ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC và các PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

nhà xuất bản giáo dục
*1976

Ô TOÁN HỌC

HỨA THUẦN PHỎNG

ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC và các PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

(In lại lần thứ hai có sửa chữa)

nhà xuất bản giáo dục
* 1976

LỜI TÁC GIẢ

Trong khi học hình học phẳng, nói chung học sinh đều cảm thấy có ít nhiều khó khăn.

Nghiên cứu nguyên nhân, ta thấy có mấy điểm dưới đây :

1. Học sinh chưa có những khái niệm cơ bản rõ ràng.

2. Sách giáo khoa biên soạn tuần tự theo hệ thống luận lý, không tổng hợp từng loại làm cho người mới học khó nắm cách giải các bài toán.

3. Trong các sách giáo khoa, các bài toán mẫu quá ít, hướng dẫn và gợi ý không đầy đủ nên khó tiếp thu và nghiên cứu.

4. Học sinh thường chỉ học « vẹt » các định lý và các quy tắc, không biết vận dụng một cách sinh động những định lý và các quy tắc đó.

Vì vậy nội dung chủ yếu của cuốn sách này là nhằm giúp học sinh hiểu tài liệu sách giáo khoa, hướng dẫn vận dụng định lý và quy tắc, nắm được phương pháp giải toán chính xác để có thể nâng cao kiến thức và lý luận hình học. Cuốn sách này dùng để giúp cho sách giáo khoa, có thể nói là để bổ sung một phần cho sách giáo khoa.

Các định lý và cách chứng minh trong cuốn « Định lý hình học và các phương pháp chứng minh » là những phần chủ yếu nhất trong toàn bộ hình học, người mới học phải hiểu thực rõ các khái niệm cơ bản của những phần đó mới học tập kết quả, cho nên ở chương I có giải thích tường tận những khái niệm cơ bản. Để tránh việc giải thích trống rỗng, chúng tôi hết sức cố gắng dùng các ví dụ chứng minh cụ thể, sáng sủa, một mặt vừa làm cho học sinh ghi được các ấn tượng sâu sắc, mặt khác vừa tăng thêm phần hứng thú học tập cho họ.

Ở chương II trong các loại chứng minh có phép chứng minh thẳng theo từng bước tuần tự. Mỗi phép có 1—2 ví dụ mẫu. Trong ví dụ, có phần « suy xét » hoặc « phân tích ». Quá trình gợi ý sẽ nuôi dưỡng năng lực suy nghĩ, tăng cường bản lĩnh giải quyết vấn đề cho học sinh.

Sau mỗi lần giảng một cách chứng minh, đều có bài tập gắn liền với các ví dụ để học sinh tập làm. Với các bài tập tương đối khó, đều có phần « chỉ dẫn » thích hợp, gợi ý học sinh làm thử.

Các cách giải toán hình có rất nhiều, cách chứng minh cũng thiên biến vạn hóa. Ngoài những quy tắc nhất định, và cách chứng minh theo từng bước tuần tự cần luyện thành thạo, học sinh phải phát huy năng lực sáng tạo, vận dụng linh hoạt các định lý và các phương pháp chứng minh. Vì thế, ở chương III, có đưa ra một số ví dụ về cách vận dụng linh hoạt, nếu độc giả nghiên cứu kỹ càng cũng sẽ có những tiến bộ rõ rệt.

Cuốn sách này khi đến tay học sinh ắt còn thiếu sót, mong các bạn chú ý nêu lên, có thể làm sáng tỏ đề tài, biến đổi cách giải, cung cấp tư liệu, động viên học sinh tự động nghiên cứu. Mong các bạn học sinh đặc biệt lưu ý các điểm đó để tạo thành tập quán kiên trì đào sâu suy nghĩ.

Trong lúc biên soạn sách, mặc dù chúng tôi có cân nhắc kỹ càng song không tránh khỏi có chỗ sai lầm, mong độc giả chỉ bảo.

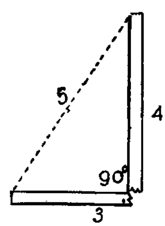
HỨA THUẦN PHỎNG

CHƯƠNG I

KIẾN THỨC CƠ BẢN

§ I. ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC VÀ BÀI TẬP CHỨNG MINH LÀ GÌ ?

Trong cuốn Chu bề toán kinh, một cuốn sách toán xưa nhất của Trung quốc, một tác phẩm trước thời Chiến quốc (1) có ghi một đoạn của Thương Cao (2) trả lời Chu Công (3) : « Nếu lấy một cái thước thẳng bẻ gẫy thành góc vuông (90⁰), một cạnh góc vuông có độ dài là 3, cạnh góc vuông kia là 4, thì độ dài của cạnh huyền nhất định là 5 ». Ý ông ta nói là : « Nếu độ dài của hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông là 3 và 4, thì độ dài cạnh huyền nhất định phải bằng 5 ». Ngày xưa, ở Ai cập khi xây dựng đền chùa, phải theo một phương nhất định. Trước tiên, người ta dựa vào vị trí của các vì sao mà xác định phương Nam Bắc, rồi lấy một sợi dây kết hai nút chia dây thành ba đoạn tỷ lệ với 3 : 4 : 5, sau đó lấy hai nút và chập hai đầu dây lại làm đỉnh, căng dây thành hình tam giác trên mặt đất, nếu cạnh ngắn nhất chỉ phương Nam Bắc, thì cạnh ngắn thứ hai nhất thiết chỉ phương Đông Tây. Việc làm đó nói rõ nếu ba cạnh của một tam giác tỷ



Hình 1

(1) Chiến quốc : một thời kỳ lịch sử của Trung quốc. Trong thời kỳ đó, rất nhiều cuộc chiến tranh xảy ra giữa các bọn thống trị phong kiến.

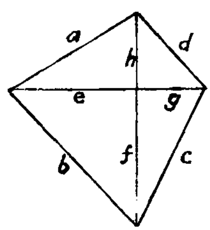
(2) Thương Cao : một nhà toán học thời xưa của Trung quốc.

(3) Chu Công : tên một ông vua thời xưa của Trung quốc.

lệ với 3 : 4 : 5, thì góc xen giữa hai cạnh ngắn là góc vuông. Những quan hệ đó đã được phổ biến lại cho người sau, như ở Trung quốc, ông Trần Tử đã ghi lại : « Đem mỗi cạnh góc vuông tự nhân cho nhau, cộng lại ($3^2 + 4^2 = 25$), lấy căn bậc hai thì được cạnh huyền ($\sqrt{25} = 5$) » ; ở Hy lạp, Pi-ta-go đã chứng minh « tổng bình phương hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông bằng bình phương của cạnh huyền » (như $3^2 + 4^2 = 5^2$). Mỗi mệnh đề dùng để biểu thị tính chất của các hình như trên, mà tính chân thực đã được chứng minh, gọi là một *định lý* trong hình học.

Những *hệ quả* trong hình học cũng là một loại định lý. Như « trong tam giác vuông, hiệu bình phương của cạnh huyền và một cạnh góc vuông bằng bình phương của cạnh góc vuông kia » là một điều có thể suy ra từ định lý Pi-ta-go, nên gọi là một hệ quả của định lý đó, thực ra là định lý phụ thuộc.

Trong hình học lại có nhiều mệnh đề cần chứng minh mà ta thường gọi là *bài tập*, thực ra cũng là định lý. Những định lý mà trong sách giáo khoa có ghi lại rõ ràng và đầy đủ phần chứng minh, và ta thường dựa vào đấy để chứng minh những định lý và bài tập khác, được gọi là các *định lý cơ bản* ; còn những định lý mà khi chứng minh các định lý và bài tập khác ít dùng đến, dành cho người học luyện tập chứng minh thì gọi là bài tập. Như định lý Pi-ta-go nêu ở trên, trong các sách giáo khoa có chứng minh đầy đủ, và sau này khi làm bài tập cũng dùng đến nhiều, là một định lý cơ bản Bây giờ ta xét một định lý khác : « Nếu hai đường chéo của một tứ giác vuông góc với nhau, thì tổng các bình phương của hai cạnh đối diện với nhau bằng tổng các bình phương của hai cạnh đối kia ». Định lý này phải dùng định lý Pi-ta-go để chứng minh. Trước tiên ta tính



Hình 2

$a^2 = e^2 + h^2$, $c^2 = f^2 + g^2$

Cộng lại

$$a^2 + c^2 = e^2 + h^2 + f^2 + g^2$$

Cũng làm như trên ta được

$$b^2 + d^2 = e^2 + h^2 + f^2 + g^2$$

Vậy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

Định lý này đã chứng minh xong và nó không cần dùng làm căn cứ để chứng minh những định lý khác, nên coi như bài tập và xếp vào bài tập.

Trong một số sách giáo khoa hình học, những định lý quan trọng có khi cũng xếp vào bài tập. Như định lý « trong tam giác vuông, điểm giữa của cạnh huyền cách đều ba đỉnh », định lý này được dùng nhiều để chứng minh các bài tập. Nhưng lại xếp vào bài tập, người đọc cần đặc biệt lưu ý.

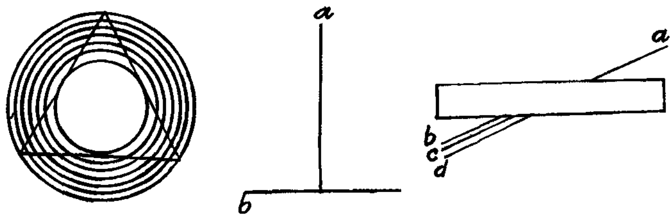
Tóm lại, định lý, hệ quả, bài tập đều là định lý cả, sau này ta gọi chung là định lý. Quá trình và các bước chứng minh một bài tập cũng là quá trình và các bước chứng minh một định lý.

Sau cùng, ta phải đề cập đến một vấn đề, là cuốn sách toán xưa nhất của Trung quốc mà ta đã nói ở trên toàn ghi lại những tính toán về thiên văn ; do nhu cầu của sản xuất nông nghiệp thời đó người ta cần nghiên cứu thiên văn, qua việc nghiên cứu đó họ phát hiện ra nhiều định lý hình học. Để giải quyết vấn đề nhà ở, người Ai cập cũng phát hiện nhiều định lý trong quá trình xây dựng những công trình kiến trúc ; hơn nữa sông Nin lại định kỳ ngập lụt, người nông dân phải phân chia lại ruộng đất sau khi nước rút, họ lại phát hiện thêm những định lý về tính diện tích của các hình.

Những sự việc đó nói rõ sự phát sinh và phát triển của môn hình học là dựa trên cơ sở của lao động sản xuất. Hình học, các môn toán cũng như các môn khoa học tự nhiên khác đều là sản phẩm của lao động.

§ 2. TẠI SAO PHẢI CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC ?

Dưới đây có ba hình, có thể dùng để thử xem mắt bạn có tinh không. Mời bạn xem hình (1) trước : ta hãy quan sát về « hình dạng », trong hình có một tam giác, ba cạnh của tam giác đó chẳng phải đều cong cả vào phía trong là gì ? Ta hãy tiếp tục so sánh «độ dài» của hai đoạn thẳng a và b trong hình (2) chỉ cần xem qua là biết ngay a dài hơn b rồi phải không bạn? Cuối cùng ta hãy quan sát « vị trí » của các đường trong hình (3). Có phải bạn định nói a và c (hay d) cùng nằm trên một đường thẳng không ?



(1) (2) (3)

Thật ra, bạn đã nhìn sai hết rồi ! Nếu không tin, bạn thử dùng một cái thước kẻ thẳng đo mà xem, bạn sẽ thấy ba cạnh của tam giác trong hình (1) đều thẳng ; độ dài của a và b trong hình (2) bằng nhau ; hai đoạn a và c của hình (3) cùng nằm trên một đường thẳng.

Điều đó nói lên rằng muốn nghiên cứu hình dạng, vị trí và kích thước của các hình, chúng ta không thể chỉ nhìn bằng mắt, vì mắt ta có khi « nhìn sai ».

Ta cần chú ý rằng nói như vậy không có nghĩa là khi nghiên cứu các hình không thể hay không cần dùng mắt để quan sát mà ý nói là nếu chỉ dùng mắt quan sát không thì chưa đủ.

Người ta nhận thức mọi sự vật xung quanh qua thực tiễn. Trong thực tiễn, do cảm giác của các giác quan mà ta biết được các hiện tượng của các sự vật, thấy được một vài mặt của các sự vật và sự liên hệ bên ngoài của chúng.

Những cái mà ta thấy được đấy tuy thô sơ, có khi còn làm cho ta có cảm giác sai, nhưng đó chính là do sự tiếp xúc giữa ý thức người ta với sự vật khách quan mới có được, đấy là mở đầu của sự nhận thức. Nhận thức sự vật khách quan bằng cảm giác là giai đoạn cơ bản của sự nhận thức, gọi là nhận thức bằng cảm tính.

Tiếp đó, người ta dùng óc suy nghĩ, phân tích, phán đoán và suy xét thêm, đem nhận thức nâng lên một mức cao hơn. Khi đó ta có thể nắm được bản chất của các sự vật, các mặt khác của các sự vật và liên hệ bên trong của chúng. Ví như một hòn ngọc thô sơ. Sau khi được gọt dũa, trở nên óng ánh đẹp mắt. Đó là giai đoạn phát triển của sự nhận thức, gọi là nhận thức bằng lý tính.

Các tri thức của chúng ta về hình học là đi từ nhận thức cảm tính phát triển lên nhận thức lý tính, nghĩa là lý luận và thực tế liên hệ với nhau.

Vì môn hình học chỉ lấy một số tính chất (hình dạng, kích thước, vị trí) của các vật thể làm đối tượng nghiên cứu, rồi phát triển dần thành nhận thức lý tính, cho nên ta có thể bỏ qua bản chất của vật thể, dùng lý luận để suy diễn phần không gian mà vật đó chiếm. Suy diễn nghĩa là từ những lý lẽ đã biết suy dần từng bước để tìm ra những lý lẽ chưa biết, qua đó rút ra được những kết luận chính xác. Phải rời khỏi sự vật mà hình dung phần không gian vật đó chiếm (như xét hình dạng, kích thước, vị trí của các hình), đó chính là tính trừu tượng của hình học.

Phần chứng minh của các định lý hình học ghi chép lại cách dùng lý luận suy diễn để xác nhận tính chất của các hình hình học. Nhiệm vụ chủ yếu của phần chứng minh là ở chỗ chúng ta phải nói rõ tại sao và với những điều kiện nào, thì nhất thiết rút ra được những kết luận gì, tức là ta phải đưa ra những bằng cớ để chứng thực các kết luận là đúng, nêu lên được những liên hệ bên trong của chúng.

Muốn dùng lý luận để chứng minh một định lý, cần có một số tiên đề làm cơ sở (sẽ nói rõ ở mục sau), những tiên đề này đều rút ra từ thực tiễn, và phù hợp với sự vật khách quan. Từ các tiên đề đó, ta suy ra được các định lý. Những định lý này lại được đối chiếu với sự vật khách quan mà ta gặp trong đời sống hàng ngày, tức là nhận thức lý tính phải phù hợp với nhận thức cảm tính. Qua đó ta thấy rõ, hình học căn cứ vào thực tế và từ thực tế phát triển thành lý luận, và lý luận lại giúp chúng ta nhận thức thêm một bước sự vật khách quan. Từ thực tế đến trừu tượng, trừu tượng lại trở lại chỉ đạo thực tế và cứ tuần hoàn như vậy mãi. Điều đó hoàn toàn duy vật biện chứng.

Cho nên, phần chứng minh của định lý không phải hoàn toàn là lý luận trừu tượng, mà có kết hợp với thực tế, nghĩa là lý luận và thực tế là một khối thống nhất.

§ 3. CƠ SỞ CỦA ĐỊNH LÝ

Khi gặp phải người có tính tò mò, bạn thường bị hỏi đến nỗi không thể trả lời được phải không ? Việc đó không thể trách bạn là kém tài. Vì lý do của các sự vật lúc đầu tuy không khó giải thích lắm, nhưng nếu cứ tiếp tục giải thích mãi, sẽ đi đến chỗ là không giải thích được. Khi đó ngoài câu trả lời «tất nhiên là như thế», không còn câu trả lời nào khác. Như ở nông thôn, ta thường thấy những con đường tắt đi qua trong những thửa ruộng xanh mượt, nếu tôi hỏi bạn : « Tại sao người ta không đi trên bờ ruộng mà đi tắt, làm thiệt hại đến mùa màng ? » Tôi nghĩ bạn sẽ trả lời : « Vì người ta muốn đỡ tốn thì giờ ». « Tại sao như thế lại đỡ tốn được thì giờ ? » Bạn trả lời : « Đi tắt nhanh hơn đi theo bờ ruộng, vì khoảng cách càng ngắn, thời gian đi càng ít ». Tại sao đi tắt lại ngắn đường hơn ? » Khi đó bạn bắt buộc phải trả lời : « Tất nhiên là như thế ». Thực ra, sự việc đó không những người mà ngay cả loài vật cũng cho là tất nhiên. Khi bạn vứt xương xuống đất, chó cũng chạy lại cặp xương theo đường thẳng. Bạn đã từng thấy con chó nào dại đến nỗi chạy theo đường cong để cướp xương ăn không ? Vì vậy, ta thấy câu nói « Khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm là đoạn thẳng nối liền hai điểm đó » là một chân lý rất tự nhiên, được mọi người công nhận dầu không thêm vào lý do gì nữa, nhưng cũng chẳng ai hoài nghi cả.

Hình học đã là môn khoa học dùng lý luận để suy diễn, thì phải dựa vào quy tắc suy diễn của lôgic để tìm hiểu tính chất chung của không gian. Suy diễn có lôgic nghĩa là mỗi câu nói đều có lý do xác đáng ; mỗi lý do lại phải có nguyên nhân sinh ra nó. Cứ như vậy mãi, cuối cùng cũng giống như trên kia, phải có một khởi điểm làm cơ sở cho việc lý luận. Cho nên có một số lý do chỉ có thể căn cứ vào kinh nghiệm và cảm giác mà khẳng định chúng có thể thành lập được, nghĩa là những lý do đó đã rất chính xác, không thể nào hoài nghi được nữa. Những lý do đó dùng làm chân lý cơ bản, ta gọi là các *tiên đề*.

Trong hình học, muốn chứng minh hai đoạn thẳng a và b bằng nhau, thì trước tiên phải tìm được đoạn thứ ba c, rồi dựa vào những lý do mà suy ra $a = c$ và $b = c$. Đến lúc này muốn khẳng định $a = b$ thì không còn dựa được vào lý do nào nữa, mà chỉ nói được là « hai đại lượng cùng bằng một đại lượng thứ ba thì bằng nhau ». a và b đều bằng c, thì hai đại lượng đó bằng nhau là một chân lý rất tự nhiên không còn ai hoài nghi được nữa. Những kết luận như vậy, là những tiên đề cơ bản nhất, không thêm lý do gì nữa cũng thành lập được.

Bất kỳ một môn khoa học nào đều có một số danh từ chuyên môn (danh từ riêng). Ta có biết được ý nghĩa của những danh từ đó, nghĩa là có một khái niệm về danh từ đó, thì mới có thể bước vào nghiên cứu môn học đó được. Mỗi một khái niệm cần được giải thích rõ tính chất đặc biệt của nó để phân biệt với khái niệm khác ; những giải thích như vậy gọi là *định nghĩa của khái niệm đó* ; những định nghĩa trong hình học, trong chứng minh bài tập đôi khi cũng dùng đến. Nên chúng cũng là căn cứ của phần chứng minh.

Như ta muốn chứng minh định lý Pi-ta-go, trước tiên cần phải có khái niệm về « tam giác vuông » — « Tam giác có một góc vuông là tam giác vuông ». Đó là định nghĩa của tam giác vuông. Nhưng muốn hoàn toàn hiểu rõ định nghĩa này, lại cần phải có những khái niệm tương đối cơ bản hơn, như góc », « góc vuông », « tam giác ». Trong định nghĩa của những khái niệm này, lại cần phải có những khái niệm khác cơ bản hơn. Cứ như thế mãi, sẽ dẫn đến những khái niệm cơ bản nhất như *« điểm »*, *« đường »*, *« mặt »*, *« khối hình học »* . . .

Đó là những *yếu tố cơ bản* của hình hình học.

Những tiên đề và định nghĩa nêu ở trên, đều là những căn cứ nguyên thủy nhất của hình học. Trên cơ sở đó, có thể suy ra được tất cả các tính chất của không gian, tạo thành một hệ thống lý luận của môn hình học.

Những tiên đề và định nghĩa của hình học đã có ghi chép đầy đủ trong sách giáo khoa cấp II, cấp III, các bạn mới học hình rất quen thuộc, ở đây không nhắc lại nữa.

§ 4. HAI PHẦN CỦA ĐỊNH LÝ

Bạn muốn nhờ thợ làm bất cứ một đồ dùng gì, trước hết, phải đưa nguyên vật liệu cho thợ và nói rõ muốn làm cái gì. Như vậy thợ mới làm được. Nguyên vật liệu có nhiều loại : như gỗ và tre đều làm được bàn.

Nhưng cách làm khác nhau, thì dụng cụ để làm cũng không giống nhau. Bạn phải nói cho thợ rõ là loại nguyên vật liệu gì, ông ta mới đặt kế hoạch làm và chuẩn bị những dụng cụ cần thiết. Đồ dùng lại có nhiều thứ, như bàn và rương... đều là đồ dùng và có thể làm bằng gỗ, nhưng cách làm và dụng cụ cũng có thứ khác nhau. Phải bàn giao đầy đủ những điều trên thì người thợ mới làm đúng thứ đồ dùng mình muốn làm.

Chứng minh định lý hình học cũng ví như làm đồ dùng. Cho nên trong mệnh đề của định lý, trước tiên phải cho biết đã có những nguyên vật liệu gì, sau đó phải nói rõ muốn làm gì, có như vậy ta mới quyết định được dùng gì để làm. Như trong các định lý :

(1) Góc đối đỉnh thì bằng nhau.

(2) Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau điều mà ta phải chứng minh đều là « hai góc bằng nhau ». Nhưng ở (1) thì cho « hai góc đối đỉnh », ở (2) cho « trong tam giác cân, hai góc ở đáy ». Ở đây có thể ví như làm cùng một thứ đồ dùng mà bằng hai thứ nguyên liệu khác nhau. Lại trong các định lý :

(3) Hai góc nhọn trong tam giác vuông phụ nhau.

(4) Tổng bình phương của hai cạnh góc vuông của tam giác vuông bằng bình phương của cạnh huyền, đều cho ta « một tam giác vuông », nhưng ở (3) phải chứng minh « hai góc nhọn phụ nhau », ở (4) phải chứng minh « tổng bình phương của hai cạnh góc vuông bằng bình phương của cạnh huyền ». Có thể ví như dùng cùng một thứ nguyên vật liệu làm ra hai thứ đồ dùng khác nhau.

Qua các ví dụ trên, ta nhận thấy bất kỳ định lý nào cũng có thể chia làm hai phần. Phần trước ví như nguyên vật liệu đã có sẵn gọi là *phần giả thiết*, là phần cho ta biết đã có những gì, phần sau của định lý ví như vật định làm, là kết quả của sự suy diễn, gọi là *kết luận*, phần này lúc đầu chưa biết có đúng không, sau khi chứng minh mới công nhận được.

Muốn chứng minh một định lý trước tiên phải phân biệt rõ ràng giả thiết và kết luận của định lý đó, cũng giống như cần biết rõ dùng nguyên vật liệu gì và làm cái gì. Đấy là một việc rất quan trọng. Người mới học thường thấy khó khăn trong việc làm này.

Ở đây xin nhắc thêm một điều :

Dạng tổng quát của định lý có thể viết như sau :

$$\text{Nếu } \underbrace{\text{A là B}}_{\text{Giả thiết}} \text{, thì } \underbrace{\text{C là D}}_{\text{Kết luận}}$$

Chữ « nếu » ở trước, có khi thay bằng chữ « cho » hay « biết rằng » đều là phần giả thiết. Chữ « thì » ở phần sau có khi thay bằng « chứng minh rằng » là kết luận.

Ví dụ :

$$\text{Nếu } \underbrace{\text{hai cạnh của tam giác}}_{A} \; \underbrace{\text{bằng nhau}}_{B}$$

$$\text{thì các } \underbrace{\text{góc đối diện với hai cạnh}}_{C} \text{ đó } \underbrace{\text{bằng nhau}}_{D}$$

$$\text{Nếu } \underbrace{\text{hai cạnh ngoài của hai góc kề}}_{A} \text{ hợp thành } \underbrace{\text{một đường thẳng}}_{B}$$

$$\text{thì } \underbrace{\text{hai góc đó}}_{C} \; \underbrace{\text{bù nhau}}_{D}$$

Thông thường, cách phát biểu các định lý đều cô đọng, muốn phân biệt được giả thiết và kết luận của một định lý, ta giữ nguyên ý, biến đổi cách viết. Phương pháp biến đổi chỉ là thêm vào vài chữ, làm cho ý của định lý rõ hơn mà thôi. Như định lý « Góc đối đỉnh bằng nhau » có thể biến đổi như sau :

$$\text{Nếu } \underbrace{\text{hai góc}}_{A} \text{ là } \underbrace{\text{góc đối đỉnh}}_{B} \text{, thì } \underbrace{\text{hai góc đó}}_{C} \; \underbrace{\text{bằng nhau}}_{D};$$

Một số định lý có phần giả thiết tương đối phức tạp dạng tổng quát của chúng là :

$$\left.\begin{array}{r}\text{Nếu A là B}\\ \text{và E là F}\end{array}\right\}\text{ thì C là D.}$$

Như định lý « trong tam giác cân đường phân giác của góc ở đỉnh chia đôi cạnh đáy » có dạng trên.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Nếu } \underbrace{\text{một tam giác}}_{A} \text{ là } \underbrace{\text{cân}}_{B}\\ \text{và } \underbrace{\text{một đường thẳng}}_{E}\ \underbrace{\text{chia đôi góc ở đỉnh}}_{F}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{thì } \underbrace{\text{đường đó}}_{C}\\ \underbrace{\text{chia đôi cạnh đáy}}_{D}\end{array}$$

§ 5. TỪ MỘT ĐỊNH LÝ CÓ THỂ BIẾN ĐỔI THÀNH BỐN ĐỊNH LÝ

Đem phân tích câu nói của một người, về cấu tạo, ta thường thấy có sự khác nhau về thứ tự trước sau : về tính chất lại có sự phân biệt giữa nghĩa đen và nghĩa bóng, nên có những cách nói khác nhau.

Ví dụ như

A nói : Trung quốc, là nước có số dân lớn nhất trên thế giới.

B nói : Nước có số dân lớn nhất trên thế giới là Trung quốc.

C nói : Không là Trung quốc, thì không phải là nước có số dân lớn nhất trên thế giới.

D nói : Không là nước có số dân lớn nhất trên thế giới, thì không phải là Trung quốc.

Bốn câu nói đó, về ý tuy hơi khác nhau một ít, nhưng đều chính xác cả. Mỗi câu nói như vậy, đều có thể chia thành hai phần giả thiết và kết luận. Câu nói của A có thể viết dưới dạng.

Nếu $\underbrace{\text{một nước}}_{A}$ là $\underbrace{\text{Trung quốc}}_{B}$, thì $\underbrace{\text{nước đó}}_{C}$ là $\underbrace{\text{nước có số dân lớn nhất trên thế giới}}_{D}$

và là một định lý. Ta gọi câu nói của A là *định lý thuận*. Câu nói của B đảo lộn thứ tự giả thiết và kết luận của định lý thuận, gọi là *định lý đảo*. Câu nói của C đem thay « là » trong định lý thuận bằng « không phải là » gọi là *định lý phản*. Còn câu nói của D không những đảo lộn thứ tự giả thiết và kết luận của định lý thuận, mà còn thay « là » bằng « không phải là » gọi là *định lý phản đảo*. Qua đó ta thấy mỗi định lý đều có bốn cách biến đổi, dạng tổng quát của chúng là

(A) Định lý thuận	Nếu A là B, thì C là D.
(B) Định lý đảo	Nếu C là D, thì A là B.
(C) Định lý phản	Nếu A không phải là B, thì C không phải là D.
(D) Định lý phản đảo	Nếu C không phải là D, thì A không phải là B.

Sau đây xin nêu một ví dụ về định lý hình học :

(A) Định lý thuận :

Nếu $\underbrace{\text{hai cạnh của một tam giác bằng nhau}}_{\text{A là B}}$ thì $\underbrace{\text{hai góc đối diện với hai cạnh ấy cũng bằng nhau}}_{\text{C là D}}$

(B) Định lý đảo :

Nếu $\underbrace{\text{hai góc của một tam giác bằng nhau}}_{\text{C là D}}$ thì $\underbrace{\text{hai cạnh đối diện với hai góc đó cũng bằng nhau}}_{\text{A là B}}$

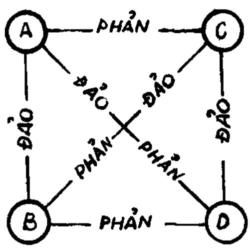
(C) Định lý phản ;

Nếu $\underbrace{\text{hai cạnh của một tam giác không bằng nhau}}_{\text{A không phải là B}}$ thì $\underbrace{\text{hai góc đối diện với hai cạnh đó cũng không bằng nhau}}_{\text{C không phải là D}}$

(D) Định lý phản đảo :

Nếu $\underbrace{\text{hai góc của một tam giác không bằng nhau}}_{\text{C không phải là D}}$ thì $\underbrace{\text{hai cạnh đối diện với hai góc đó cũng không bằng nhau}}_{\text{A không phải là B.}}$

Nghiên cứu kỹ quan hệ giữa bốn định lý trên, chúng ta sẽ thấy nếu gọi (B) là định lý thuận, thì (A) là định lý đảo, (D) là định lý phản, và (C) là định lý phản đảo. Nếu lần lượt gọi (C), (D) là định lý thuận, thì giữa những định lý còn lại cũng có một quan hệ nhất định. Ta dùng hình vẽ bên trái để biểu diễn mối quan hệ đó, chúng ta sẽ thấy rõ hơn.



Nhưng định lý có phần giả thiết phức tạp hơn, thì hình thức biến đổi của chúng cũng nhiều hơn. Thông thường, nếu giả thiết gồm hai phần, có dạng *A* là *B* và *E* là *F*, thì giữ nguyên một phần không đổi, còn phần kia sẽ đảo lộn với kết luận như trên đã làm. Dạng tổng quát của nó được biểu diễn như sau :

(A) Định lý thuận — Nếu A là B, và E là F, thì C là D.

(B) Định lý đảo
- a) Nếu A là B, và C là D, thì E là F.
- b) Nếu E là F, và C là D, thì A là B.

(C) Định lý phản
- a) Nếu A là B, và E không phải là F, thì C không phải là D.
- b) Nếu E là F, và A không phải là B thì C không phải là D.

(D) Định lý phản đảo
- a) Nếu A là B, và C không phải là D, thì E không phải là F.
- b) Nếu E là F, và C không phải là D, thì A không phải là B.

Thí dụ như định lý « trong tam giác cân, đường phân giác ở đỉnh chia đôi cạnh đáy », có thể biến đổi như sau :

(A) Định lý thuận : Nếu một tam giác là cân, và một đường thẳng chia đôi góc đỉnh, thì đường đó chia đôi cạnh đáy.

(B) Định lý đảo : a) Nếu một tam giác là cân, và một đường thẳng qua đỉnh chia đôi cạnh đáy, thì đường đó chia đôi góc đỉnh.

b) Nếu một đường thẳng chia đôi góc một đỉnh của một tam giác, và chia đôi cạnh đáy, thì tam giác đó cân.

(C) Định lý phản : a) Nếu một tam giác là cân, và một đường thẳng không chia đôi góc đỉnh, thì đường đó không chia đôi cạnh đáy.

b) Nếu một đường thẳng chia đôi góc ở một đỉnh của một tam giác, và tam giác đó không cân thì đường thẳng đó không chia đôi cạnh đáy.

(D) Định lý phản đảo : a) Nếu một tam giác là cân, và một đường thẳng qua đỉnh không chia đôi cạnh đáy, thì đường thẳng đó không chia đôi góc đỉnh.

b) Nếu một đường thẳng chia đôi góc ở một đỉnh của một tam giác, nhưng không chia đôi cạnh đáy, thì tam giác đó không cân.

§ 6. NHỮNG ĐỊNH LÝ BIẾN ĐỔI ĐƯỢC TỪ ĐỊNH LÝ THUẬN CÓ ĐÚNG CẢ KHÔNG

Chúng ta đều biết rằng mèo là động vật có bốn chân. Bây giờ ta đặt câu đó làm định lý thuận, rồi biến đổi thành bốn cách nói dưới đây :

(A) Định lý thuận : Nếu một con vật là mèo, thì con vật đó có bốn chân.

(B) Định lý đảo : Nếu một con vật có bốn chân, thì con vật đó là mèo.

(C) Định lý phản : Nếu một con vật không phải là mèo, thì con vật đó không có bốn chân.

(D) Định lý phản đảo : Nếu một con vật không có bốn chân, thì con vật đó không phải là mèo.

Chỉ cần liên hệ với thực tế mà suy xét, ta thấy định lý thuận và định lý phản đảo đều đúng. Nhưng định lý đảo và định lý phản thì không đúng.

Ta hãy xét thêm một định lý hình học :

(A) Định lý thuận : Nếu hai góc là đối đỉnh. thì hai góc đó bằng nhau.

(B) Định lý đảo : Nếu hai góc là bằng nhau, thì hai góc đó là góc đối đỉnh.

(C) Định lý phản : Nếu hai góc không phải là góc đối đỉnh thì hai góc đó không bằng nhau.

(D) Định lý phản đảo : Nếu hai góc không bằng nhau, thì hai góc đó không phải là góc đối đỉnh.

Xem qua thì biết ngay ví dụ này cũng như ví dụ trước (A) và (D) đều đúng, còn (B) và (C) thì không đúng.

Dùng phương pháp trên đây, đem biến đổi các định lý khác và nghiên cứu chúng ta sẽ thấy không phải bốn cách biến đổi của định lý nào cũng đúng cả, chỉ có (A) và (D) đúng, nghĩa là bao giờ định lý thuận (A) và định lý phản đảo (D) cũng cùng đúng. Nếu ta chứng minh được một trong hai định lý đó (A hoặc D) đúng, thì định lý kia không cần chứng minh nữa, nghĩa là cũng đúng. Giữa (B) và (C) cũng có mối liên hệ như trên. Vì nếu gọi (B) là định lý thuận, thì (C) là định lý phản đảo, nên chỉ cần chứng minh được một trong hai định lý đúng, thì định lý kia cũng đúng. Tóm lại, mỗi định lý đều có bốn cách biến đổi. Ta chỉ cần chứng minh được (A) hoặc (D), và (B) hoặc (C), thì các định lý còn lại không cần chứng minh nữa cũng đúng. Muốn rõ hơn nữa, bạn hãy xem kỹ hình ở mục trước. Bốn góc của hình vuông biểu diễn bốn loại định lý. Những định lý được các đường chéo nối liền thì, hoặc cùng đúng, hoặc cùng sai. Nếu chứng minh được hai định lý kề nhau bất kỳ, thì cả bốn đều đúng.

Trong những ví dụ trên, tại sao lại có một số ví dụ thì định lý đảo và định lý phản đúng, có số ví dụ thì định lý đảo và định lý phản lại sai? Nghiên cứu thật kỹ mới thấy tại chữ « là » có hai nghĩa « thuộc » và « giống nhau ». Như khi ta nói « mèo là loài vật bốn chân », có nghĩa là « mèo thuộc loài động vật bốn chân ». Trường hợp này định lý đảo và định lý phản đều không đúng. Vì mèo chỉ là một trong những loại vật có bốn chân thôi. Động vật bốn chân có thể là chó, bò... nên không thể kết luận động vật có bốn chân là mèo được. Nhưng khi ta nói « Trung quốc là nước có số dân lớn nhất trên thế giới », có nghĩa là « Tất cả các nước trên thế giới, chỉ có Trung quốc là số dân lớn nhất». Ở đây « Trung quốc » và « nước có số dân lớn nhất » tuy là hai danh từ, nhưng đối tượng mà hai danh từ đó chỉ đều giống nhau. Cho nên, trong trường hợp này, định lý đảo và định lý phản đều đúng. Như vậy, khi đã biết giả thiết và kết luận là những sự vật có một không hai, thì định lý đảo cũng đúng như định lý thuận, do đó mà khi biến đổi thành định lý phản và định lý phản đảo cũng đúng, không cần chứng minh nữa, đấy gọi *là quy tắc đồng nhất.*

Như trong định lý « trong một tam giác, đoạn thẳng nối điểm giữa của hai cạnh thì song song với cạnh thứ ba » chỉ có một đoạn thẳng nối điểm giữa của hai cạnh (tiên đề đường thẳng), và đường thẳng đi qua điểm giữa của một cạnh và song song với cạnh thứ ba cũng chỉ có một, nên định lý đảo của định lý trên « trong một tam giác, đường thẳng đi qua điểm giữa của một cạnh và song song với cạnh thứ hai, thì đi qua điểm giữa của cạnh thứ ba » cũng đúng.

§ 7. TRƯỚC KHI CHỨNG MINH CẦN CHUẨN BỊ NHỮNG GÌ

Người mới học hình tuy miễn cưỡng nhớ được các định nghĩa, tiên đề, định lý, nhưng khi chứng minh bài tập thì thấy khó và nhiều khi không làm được. Gặp một bài tập là muốn chứng minh ngay, nếu may mắn mà gặp bài dễ thì còn chứng minh được nếu gặp phải bài khó, nghĩ một lúc mà không tìm ra đầu mối thì đành chịu bó tay. Bài làm không được có nhiều nguyên nhân, nhưng nguyên nhân chủ yếu là bạn đã bỏ qua phần chuẩn bị cần thiết trước khi chứng minh bài tập.

Phần chuẩn bị không ngoài những điểm sau :

1) Đọc kỹ đề bài một lượt, phải hiểu rõ định nghĩa của tất cả các danh từ trong bài, nhằm hoàn toàn hiểu ý bài tập đó.

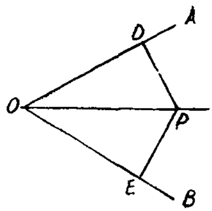
2) Phân biệt cho được giả thiết và kết luận của bài tập, rồi dựa vào những điều đã cho trong giả thiết để vẽ hình, dùng chữ để làm ký hiệu những đường và điểm, các giao điểm, hai đầu mút đoạn thẳng.

3) Dựa vào bài tập và các ký hiệu trong hình vẽ để viết giả thiết và kết luận ; thay những danh từ toán học trong bài bằng các ký hiệu,

làm cho bài trở nên đơn giản và dễ hiểu (như bằng nhau viết =, lớn hơn thay bằng >).

Như muốn chứng minh « tất cả những điểm trên đường phân giác của một góc cách đều hai cạnh của góc đó », ta cần chuẩn bị như sau :

1) Phải hiểu đường phân giác là đường chia một góc ra làm hai phần bằng nhau, (tất nhiên trước đó lại phải hiểu đường thẳng và góc là gì) và khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng là độ dài của đoạn vuông góc hạ từ điểm đó xuống đường thẳng cho trước (trước đó cũng phải hiểu đường thẳng vuông góc là đường như thế nào).



2) Nắm được giả thiết của định lý là : Cho một góc ; từ một điểm trên đường phân giác hạ đường vuông góc xuống hai cạnh. Kết luận là : hai đoạn thẳng đó bằng nhau. Dựa theo giả thiết, trước tiên ta vẽ một góc AOB ; rồi dựng đường phân giác OC ; trên OC lấy một điểm P, từ P hạ PD và PE vuông góc với OA và OB.

3) Theo hình vẽ mà viết giả thiết và kết luận như sau :

GT : cho $\widehat{AOB}$; $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$; P là một điểm tùy ý trên OC.

$PD \perp OA$; $PE \perp OB$.

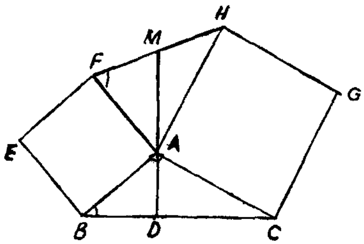
K.L : $PD = PE$

Đến lúc này, có thể nói đã hoàn toàn hiểu được ý của bài ra, và đã biểu diễn được ý đó một cách rõ ràng. Phần chuẩn bị như vậy là xong, có thể bắt tay vào việc tìm cách chứng minh.

Muốn làm tốt phần chuẩn bị, còn nhiều điểm cần chú ý nữa. Như ngoài việc phân biệt giả thiết và kết luận cần chú ý đến mặt vẽ hình. Về mặt này nên lưu ý các điểm sau đây :

(A) Các hình nói chung, không thể chỉ vẽ một nét. Cho nên cần phân biệt đường nào cần vẽ trước, đường nào phải vẽ sau ; khi dùng ký hiệu (dùng chữ) phải theo thứ tự của bài ra, đừng lẫn lộn.

Ví dụ như khi chứng minh bài « lấy hai cạnh *AB*, *AC* của tam giác *ABC* làm cạnh, dựng các hình vuông *ABEF*, *ACGH* ra phía ngoài của tam giác, từ A dựng đường vuông góc với BC, gặp BC tại D và FH tại M. Chứng minh $FM = MH$», khi vẽ hình, nên chú ý những điểm sau đây:

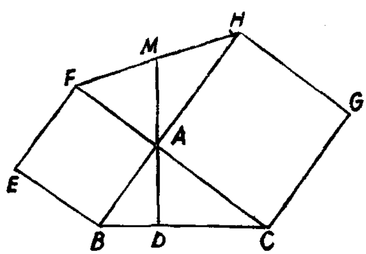


Hình 6

Dựng $\triangle ABC$ trước, tiếp đó dựng các hình vuông ABEF và ACGH, sau cùng dựng đường vuông góc với BC và đi qua A. Khi dùng ký hiệu chú ý đừng đảo lộn E và F, phải theo thứ tự trong bài ra là ABEF. Nếu đảo lộn F với E, thì sẽ không tài nào chứng minh được FM = MH. Một điều cần chú ý nữa là chân đường vuông góc D, nằm trên BC, còn M nằm trên FH.

(B) Hình vẽ cần giữ đúng những điều kiện mà phần giả thiết đã cho, không nên bỏ sót một điều gì. Như bài ra cho một hình thang, ta không nên vẽ một tứ giác bất kỳ; nếu hình vẽ bỏ sót một vài điều kiện đã cho thì bài sẽ không chứng minh được. Mặt khác, ta cũng đừng vẽ thêm vào hình những phần không cần thiết. Có bạn thấy bài ra cho một góc, đem vẽ thành một góc vuông; hay giả thiết cho một tam giác, lại dựng một tam giác đều. Làm như vậy khi chứng minh thường hay hiểu lầm.

Như ở ví dụ trong mục (A) trên kia, nếu dựng tam giác ABC thành tam giác vuông như hình bên, có $\widehat{BAC}$ vuông, thì bài sẽ trở thành một trường hợp đặc biệt. Ta sẽ hiểu lầm FAC và HAB là những đường thẳng đã cho trước, và sẽ chứng minh như sau:



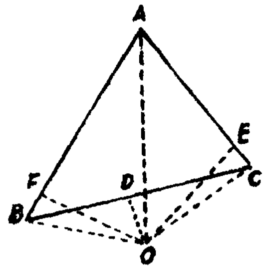
Chứng minh	*Lý do*
1. Vì $AF = AB$, $AH = AC$	1. Theo giả thiết, các cạnh của hình vuông bằng nhau.
2. $\widehat{FAH} = \widehat{BAC}$	2. Góc đối đỉnh bằng nhau.
3. Do đó : $\triangle AFH = \triangle ABC$	3. c. g. c.
4. Ta có : $\widehat{AFH} = \widehat{ABC}$	4. Suy từ 3.
$\widehat{DAC} + \widehat{ACD} = 90^0$ $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$	5. Hai góc nhọn trong tam giác vuông phụ nhau.
6. Nên : $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$	6. Suy từ 5.
7. $\widehat{DAC} = \widehat{FAM}$	7. Góc đối đỉnh bằng nhau.
8. $\widehat{AFH} = \widehat{FAM}$	8. Suy từ 4 — 6 — 7.
9. Vậy $FM = MA$	9. Trong một tam giác MFA, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau
10. Tương tự ta có $MH = MA$	10. Giống cách chứng minh từ 4 đến 9.
11. Vậy $FM = MH$	11. Hai đại lượng cùng bằng một đại lượng thứ ba thì bằng nhau.

Bị chú : Nếu bạn chưa học đến các định lý ở trên thì sẽ không hiểu phần chứng minh, ta có thể tạm bỏ qua, sau này nghiên cứu lại.

Chứng minh như vậy, mới xem qua tưởng là đúng lắm rồi. Thực ra không đúng với điều kiện đã cho của bài ra. Vì hai cặp góc đối đỉnh ở 2 và 7, tam giác vuông ABC ở 5 đều không có trong bài ra. Phần chứng minh chỉ đúng với một trường hợp đặc biệt.

Muốn chứng minh bài này, mời bạn tham khảo ví dụ 12 ở sau.

(C) Hình vẽ phải chính xác mới có thể giúp ta quan sát trong lúc suy diễn và gợi ý cho ta. Như muốn chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, nhìn vào hình vẽ chính xác, ta dễ phát hiện hai tam giác bằng nhau có chứa hai đoạn thẳng đó, cộng thêm sự suy diễn của bản thân nữa, ta có thể tìm được cách chứng minh một cách dễ dàng Nếu vẽ tùy tiện, không những chẳng có ích gì, mà đôi khi còn chứng minh sai. Qua ví dụ thú vị dưới đây, bạn sẽ rõ thêm vấn đề này.



Hình 8

Chứng minh « mọi tam giác đều cân ».

G. T. : ABC là một tam giác bất kỳ

K. L. : AB = AC.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng đường phân giác AO của A, đường trung trực OD của cạnh BC ; hai đường gặp nhau tại O ; từ O dựng OE ⊥ AC ; OF ⊥ AB ; nối OB, OC.	I. Mỗi góc đều có một đường phân giác ; mỗi đoạn thẳng đều có một đường trung trực ; từ một điểm ngoài một đường thẳng, có thể hạ đường vuông góc xuống đường cho trước ; qua hai điểm kẻ được một đường thẳng.
2. $\widehat{AFO} = \widehat{AEO}$	2. Góc vuông đều bằng nhau.
3. $\widehat{FAO} = \widehat{EAO}$	3. AO là đường phân giác
4. AO = AO	4. Không đổi.
5. Vậy △ AFO = △ AEO	5. g. g. c (tam giác vuông)
6. Ta có : AF = AE	6. Suy từ 5.
7. Từ OB = OC	7. Các điểm trên đường trung trực cách đều hai đầu của đoạn thẳng.
8. Và OF = OE	8. Suy từ 5.
9. $\widehat{BFO} = \widehat{CEO}$	9. Góc vuông đều bằng nhau.
10. △ BFO = △ CEO	10. c. c. g. (tam giác vuông)
11. FB = EC	11. Suy từ 10.
12. Vậy AB = AC	12. Suy từ 6 và 11.

Bài ra cho tam giác bất kỳ, nhưng sao lại cân được ? Định lý này chẳng quái lạ lắm hay sao? Nhưng cách chứng minh ở trên có đầy đủ lý do, hình như không có chỗ nào sơ hở cả! Thực ra, nếu xem kỹ hình vẽ, bạn sẽ thấy hình vẽ không chính xác, nên mới dẫn tới kết luận kỳ quái này. Nếu hình vẽ chính xác, ta sẽ thấy chân của hai đường vuông góc hạ từ O xuống AB và AC, không phải đều nằm trong hai đoạn thẳng đó mà một điểm phải nằm trên AC kéo dài. Tuy qua chứng minh ta vẫn rút ra được $AF = AE$, $FB = EC$, nhưng hai đẳng thức này không thể cộng vào nhau để rút ra $AB = AC$ được, nên phần chứng minh trên sai.

§ 8. BẮT TAY VÀO CHỨNG MINH NHƯ THẾ NÀO

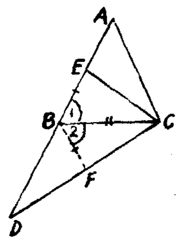
Sau khi đã làm tốt phần chuẩn bị, ta có thể bắt đầu tìm cách chứng minh. Chứng minh hình học không giống như số học chỉ áp dụng các quy tắc cố định, hay như đại số đã có sẵn những công thức, mà phải nắm vững phương pháp suy xét vấn đề, tìm hiểu và suy đoán từng bước một. Phương pháp suy xét phổ biến nhất giống phương pháp của bác sĩ dùng để chẩn đoán bệnh: trước tiên phải tìm hiểu các triệu chứng; rồi nghiên cứu xem những nguyên nhân nào có thể gây nên triệu chứng đó; rồi lại xét đến quá trình ốm và hoàn cảnh sống của bệnh nhân mới quyết định được nguyên nhân nào đã gây nên bệnh.

Giả sử đã chẩn đoán được căn bệnh là do ăn uống mất vệ sinh gây nên, thì phải nghiên cứu thêm bệnh ở dạ dày hay thuộc về đường ruột? Hay ở những cơ quan khác trong cơ thể? Cuối cùng tìm những bằng chứng và đem từng bằng chứng một ra phân tích và đối chiếu. Như vậy, xuất phát từ triệu chứng của bệnh nhân tìm nguyên nhân và căn bệnh, phân tích và nghiên cứu từng bước, cho đến lúc nhận định của mình phù hợp với mọi hiện tượng (triệu chứng), đấy là một phương pháp suy xét quan trọng khi cần giải quyết một vấn đề, thường gọi là PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH.

Phương pháp chủ yếu dùng để chứng minh định lý hình học cũng là phương pháp phân tích. Các bước của nó giống như bác sĩ khi chẩn đoán bệnh. Ta bắt đầu từ kết luận, tìm những điều kiện cần phải có để dẫn tới kết luận đó; rồi nghiên cứu từng điều kiện, xét xem điều kiện nào có thể đứng vững được, ngoài ra cần có những điều kiện gì nữa. Cứ như vậy, suy ngược từng bước, cho đến lúc những điều kiện cần thiết phù hợp với giả thiết mới thôi.

Dưới đây là một ví dụ cụ thể dùng phương pháp phân tích chứng minh một định lý.

Ví dụ 1 : Cho tam giác cân ABC đáy BC, lấy trên AB kéo dài một đoạn BD = AB. Chứng minh rằng trung tuyến



Hình 9

$$CE = \frac{1}{2} CD,$$

G.T. : AB = AC

kéo dài AB, và BD = AB.

AE = EB.

Nối CD và CE.

K.L. : CD = 2CE

Phân tích 1. Muốn CD = 2CE, phải có một trong hai điều kiện dưới đây :

a) $\frac{1}{2}$ độ dài CD = độ dài CE.

b) 2 lần độ dài CE = độ dài CD.

2. Nếu lấy a. của 1, để có $\frac{1}{2}$ CD = CE, thì phải chia đôi CD ở F, và nghiên cứu xem có hợp với một trong hai điều kiện dưới đây không :

a) CF = CE. b) DF = CE.

3. Nếu lấy a. của 2, để có CF = CE, lại cần phải có một trong những điều kiện sau :

a) CF và CE là cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau.

b) CF và CE đều bằng một đoạn thẳng thứ ba.

. . . .

4. Nếu lấy a. của 3, phải nối BF và muốn $\triangle$ BFC = $\triangle$ BEC, lại cần phải có một trong những điều kiện sau :

a) BE = BF, $\widehat{2} = \widehat{1}$, BC = BC (c. g. c)

b) $\widehat{2} = \widehat{1}$, $BC = BC$, $\widehat{BCF} = \widehat{BCE}$ (g. c. g)

. . . .

5. Nghiên cứu kỹ a) và b) của 4. Ta thấy chỉ có a) phù hợp với giả thiết. Vì BF là đoạn thẳng nối liền trung điểm của hai cạnh, nên bằng $\frac{1}{2}$ AC. Theo giả thiết thì $AB = AC$, $BE = \frac{1}{2} AB$. Thay vào sẽ được $BF = BE$. Và vì $BF // AC$, nên có cặp góc so le trong $\widehat{2} = \widehat{ACB}$; $\triangle ABC$ cân, nên $\widehat{1} = \widehat{ACB}$; ta suy ra $\widehat{1} = \widehat{2}$. Còn BC thì chung. Cuối cùng ta được $\triangle BCF = \triangle BCE$, thì cũng chứng minh được $CD = 2\ CE$.

Trong phương pháp phân tích nêu ở trên, nếu lấy *b.* của *1* ; *b* của *2* ; *b.* của *3...*, suy đoán tương tự, ta cũng được kết quả như trên, do đó có những phương pháp chứng minh khác nhau. Ở đây không nêu thêm nữa, để bạn đọc sau một thời gian học tập rồi tự nghiên cứu lấy.

Nếu bạn anh đưa cho anh một chùm chìa khóa bảo anh vào phòng đọc sách lấy một cuốn sách tham khảo về hình, mà anh chưa từng vào phòng đọc sách bao giờ ; thì muốn vào phòng, nhất thiết anh phải thử qua các chìa khóa, xem cái nào mở được cửa phòng. Khi mở được cửa phòng rồi, anh lại phải tìm xem tủ nào để sách toán, và thử chìa khóa một lần thứ hai ; mở được tủ, anh lại phải xem ngăn nào để sách hình, và cuốn thứ mấy trong ngăn đó là cuốn sách anh phải tìm. Như vậy anh phải mất công một lúc mới tìm được sách. Dùng phương pháp này để giải quyết vấn đề tuy phiền phức, nhưng nó lại phù hợp với quá trình suy nghĩ của người ta, nó hợp với những người chưa quen giải quyết những vấn đề mới lạ. Nếu anh đã hiểu biết ít nhiều về vấn đề cần giải quyết, thì anh có thể từ những điều đã biết, suy đoán từng bước, rồi giải quyết vấn đề một cách nhanh gọn. Ví như sau khi xem xong, anh để sách về chỗ cũ, nếu sau này cần xem lại lần thứ hai thì anh sẽ tìm được sách một cách dễ dàng. Phương pháp đó gọi là PHƯƠNG PHÁP TỔNG HỢP.

Khi chứng minh Định lý hình học, ta bắt đầu từ giả thiết, từ những điều đã biết (tiên đề, định lý, định nghĩa) chọn ra những điều thích hợp, từng bước một suy ra kết luận. Đó chính là phương pháp tổng hợp. Ví dụ trên kia nếu dùng phương pháp tổng hợp chứng minh có thể viết như sau:

Chứng minh	*Lý do*
1. Chia đôi CD tại F, nối BF	1. Mỗi đoạn thẳng đều có một trung điểm, qua hai điểm kẻ được một đường thẳng.
2. Vì $AB = BD$, $CF = FD$	2. Theo giả thiết và suy từ 1.
3. Do đó $BF // AC$	3. *Đường thẳng đi qua trung điểm của* 2 cạnh một tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng $\frac{1}{2}$ cạnh đó.
4. Từ $\widehat{1} = \widehat{ACB} = \widehat{2}$	4. Hai góc đáy của một tam giác cân bằng nhau; góc so le trong bằng nhau.
5. và $BF = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB = BE$	5. Suy từ 3 và giả thiết.
6. $BC = BC$	6. Không đổi
7. có $\triangle CBF = \triangle CBE$	7. c.g.c
8. $CF = CE$	8. 2 tam giác bằng nhau thì các yếu tố tương ứng của chúng cũng bằng nhau.
9. Vậy $CD = 2CE$	9. Suy từ 8 và giả thiết.

Qua ví dụ trên, ta nhận thấy rằng phương pháp phân tích là từ kết luận đi ngược lên giả thiết, chứng minh hơi phiền nhưng lại dễ phát hiện các điều kiện (yếu tố) liên quan đến việc chứng minh, dễ tìm ra manh mối hơn. Phương pháp tổng hợp thì từ nguyên nhân (giả thiết) mà suy ra kết quả (kết luận) chứng minh đơn giản hơn, nhưng muốn chọn được những điều kiện cần thiết và thích hợp cho việc chứng minh trong rất nhiều điều kiện khác thì phiền hơn, và đôi khi không làm được. Cho nên khi chứng minh một bài tập hình, người ta thường dùng phương pháp phân tích đề tìm cách chứng minh, rồi dùng phương pháp tổng hợp viết phần chứng minh vào vở tập.

Vô luận phương pháp phân tích hay tổng hợp, cũng đều trực tiếp chứng minh định lý, nên gọi chung là PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TRỰC TIẾP.

§ 9. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH GIÁN TIẾP

Khi học hóa, bạn đã chả học cách đãi cát lấy vàng rồi là gì? Hàm lượng vàng trong cát rất nhỏ, hạt lại nhỏ, muốn trực tiếp nhặt những hạt vàng nhỏ trong một đống cát to tướng ra thì không tài nào làm được, nên người ta dựa vào tỷ trọng khác nhau của vàng và cát, gián tiếp dùng nước để phân ly.

Vàng sẽ đọng lại trên máng và cát bị nước cuốn đi. Hai cách làm tuy khác nhau, nhưng đều lấy được vàng ra khỏi cát. Cho nên khi dùng phương pháp trực tiếp mà không giải quyết được vấn đề, thì ta dùng phương pháp gián tiếp, kết quả đều như nhau cả.

Trên kia ta đã nói mỗi định lý đều có bốn cách biến đổi, định lý thuận và định lý phản đảo hoặc cùng đúng, hoặc cùng sai. Dựa vào mối liên quan đó, khi định lý thuận không chứng minh được hoặc khó chứng minh, thì ta có thể chứng minh định lý phản đảo của nó. Nếu định lý phản đảo đúng thì định lý thuận cũng đúng. Vì giả thiết của định lý phản đảo là mặt trái của kết luận của định lý thuận, và kết luận là mặt trái của giả thiết của định lý thuận. Cho nên, cách chứng minh này thật ra là : cho mặt trái của kết luận của định lý thuận là đúng, rồi chứng minh nó mâu thuẫn với giả thiết của định lý thuận.

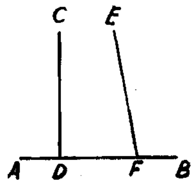
Dưới đây là một ví dụ về cách chứng minh này :

Ví dụ 2 : Một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước thì cắt tất cả đường thẳng khác không vuông góc với đường thẳng đó.

G.T. : CD $\perp$ AB, EF không $\perp$ AB

K.L. : CD cắt EF.

Suy xét : Muốn chứng minh hai đường thẳng cắt nhau không dựa được vào định lý nào cả nên không trực tiếp chứng minh được, mà phải dùng phương pháp chứng minh ta vừa nêu ở trên.

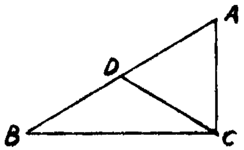


Hình 10

Giả thiết của định lý có hai phần, một trong hai định lý phản đảo của nó là « Giả sử CD $\perp$ AB, (giữ nguyên phần đầu của giả thiết), và CD không cắt EF, thì EF $\perp$ AB ». Ta chỉ cần chứng minh được định lý này đúng thì định lý thuận cũng đúng.

Chứng minh	*Lý do*
1. Giả sử CD không cắt EF	1. Hai đường thẳng không gặp nhau tức là không cắt nhau.
2. thì CD// EF	2. Nếu hai đường thẳng không gặp nhau thì phải // với nhau.
3. do đó : $\widehat{CDB} = \widehat{EFB}$	3. Góc đồng vị của 2 đường thẳng // hợp thành với cát tuyến AB.
4. $\widehat{CDB} = 90^0$	4. Vì CD $\perp$ AB (theo giả thiết).
5. Nên $\widehat{EFB} = 90^0$	5. Suy từ 3 và 4.
6. Vậy EF $\perp$ AB (như vậy thì trái với giả thiết)	6. Suy từ định nghĩa của đường thẳng vuông góc.
7. Cho nên CD và EF phải cắt nhau.	7. Vì trái với giả thiết, thì phần giả sử của 1, cũng sai

Có khi kết luận của định lý thuận lại có nhiều mặt trái (ngược lại), ta phải chứng minh các mặt trái đó đều không đúng thì kết luận của định lý thuận đó nhất định phải đúng. Các bạn xem ví dụ sau đây sẽ rõ :



Hình 11

Ví dụ 3 : Trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông thì bằng một nửa cạnh huyền.

G.T. : Trong $\triangle ABC$ có $\widehat{C} = 90^0$

$DA = DB$

K.L. : $DC = DA$

Suy xét : Ta sẽ nghiên cứu phương pháp chứng minh trực tiếp sau. Bây giờ ta thử dùng phương pháp gián tiếp để giải bài này.

Vì định lý phản đảo của định lý này là "Cho $\triangle ABC$, $DA = DB$ (giữ nguyên phần đầu của giả thiết), và $DC \neq DA$, thì $\widehat{C} \neq 90^0$». Vì $DC \neq DA$, nên có thể xảy ra hai trường hợp $DC > DA$ Và $DC < DA$.

Chứng minh	*Lý do*
1. Giả sử $DC > DA$	1. Nếu $DC \neq DA$, thì có thể $DC > DA$.
2. thì $DC > DB$	2. Thay $DB = DA$ (giả thiết) vào 1.
3. $\widehat{A} > \widehat{ACD}$ $\widehat{B} > \widehat{BCD}$	3. Trong một tam giác, đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
4. Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} > \widehat{C}$	4. Cộng hai bất đẳng thức ở 3 lại với nhau.
5. Nhưng $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^0 - \widehat{C}$	5. Tổng 3 góc trong của một tam giác bằng 180^0, và đổi $\widehat{C}$ sang vế phải.
6. Ta có $180^0 - \widehat{C} > \widehat{C}$	6. Thay 5 vào 4.
7. hay $2\widehat{C} < 180^0$ $\widehat{C} < 90^0$ sẽ mâu thuẫn với giả thiết	7. Đổi vế bất đẳng thức 6.
8. Giả sử $DC < DA$	8. Nếu $DC \neq DA$, thì có thể $DC < DA$.
9. Cũng lý luận tương tự ta có $\widehat{C} > 90^0$ và trái với giả thiết	9. Cách chứng minh giống từ 2 — 7.

10. Vậy DC = DA	10. Giữa DC và DA chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp : DC $\begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix}$ DA ; mà DC $\gtrless$ DA đều trái với giả thiết, thì DC nhất định phải bằng DA.

Trên kia, chúng tôi cũng đã nói qua : nếu phần giả thiết và kết luận của định lý thuận đều chỉ những sự vật có một không hai, thì định lý đảo của nó cũng đúng. Trong trường hợp này, ta không trực tiếp chứng minh định lý thuận, mà gián tiếp chứng minh định lý đảo của nó, thì kết quả vẫn như nhau. Vì định lý đảo là đem đảo lộn giả thiết và kết luận của định lý thuận, nên khi muốn chứng minh một hình nào đó có những tính chất nào đấy thì trước tiên ta dựng một hình có những tính chất đó rồi chứng minh hình đó với hình trong bài tập là một. Hay nói một cách khác, nếu định lý thuận là « một hình nào đó có những tính chất nào đấy » và nếu chỉ riêng hình đó mới có các tính chất ấy, thì ta có thể thay thế việc chứng minh định lý thuận bằng việc chứng minh định lý đảo : « một hình mà có các tính chất đó sẽ là hình đã cho » (1).

Ta lấy một ví dụ.

Ví dụ 4 : Nếu tổng hai đáy của một hình thang bằng một cạnh bên, thì đường phân giác của hai góc kề với cạnh bên đó đi qua trung điểm của cạnh bên kia.

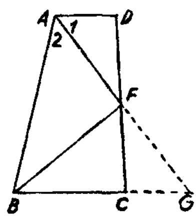
G. T. : Trong hình thang ABCD

AD//BC

AD + BC = AB

F là trung điểm của CD.

K. L. : Phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ đi qua F



Hình 12

(1) Đúng ra thì nên dùng « lớp hình » thay cho « hình » mới đúng, nhưng vì trong ngôn ngữ hình học của ta cũng hay dùng lẫn lộn nên để vậy cũng được (Người dịch).

Suy xét : Muốn chứng minh một đường thẳng đi qua trung điểm của một đoạn thẳng thì tương đối khó, *chứng minh đường thẳng chia đôi một góc dễ hơn*. Ta sẽ dùng phương pháp chứng minh gián tiếp để chứng minh định lý này. Định lý đảo của định lý này là « Nếu trong hình thang ABCD, AD//BC, AD+BC=AB, F là trung điểm của CD, nối AF và BF, thì AF chia đôi $\widehat{A}$ và BF chia đôi $\widehat{B}$ (đảo lộn giả thiết và kết luận của bài ra) ».

Vì đường phân giác (của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$) chỉ có một, và qua hai điểm chỉ kẻ được một đường thẳng (AF, BF) nên ta không cần chứng minh định lý thuận mà chứng minh định lý đảo cũng được.

Chứng minh	*Lý do*
1. Không dựng phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$, nối AF, BF kéo dài AF và BC gặp nhau ở G	1. Qua hai điểm có thể kẻ được một đường thẳng ; đường thẳng có thể kéo dài vô hạn. Vì AD // BC, AF không // với BC thì phải cắt BC.
2. Từ AD//BC	2. Theo giả thiết.
3. có $\widehat{1} = \widehat{G}$, $\widehat{D} = \widehat{BCG}$ $\widehat{FCG}$	3. Góc so le trong của hai đường // và một cát tuyến thì bằng nhau.
4. DF = FC	4. Theo giả thiết.
5. Vậy $\triangle$ ADF = $\triangle$ GCF	5. g.c.g
6. Ta rút ra AD = CG	6. Suy từ 5.
7. BG = AB	7. Thay 6 vào giả thiết AD+BC = AB
8. $\widehat{2} = \widehat{G}$	8. Góc đáy của tam giác cân BAG.
9. Nhưng $\widehat{1} = \widehat{G}$	9. Chứng minh ở 3.
10. Nên $\widehat{1} = \widehat{2}$	10. Suy từ 8 và 9.
11. AF là phân giác của $\widehat{A}$	11. Theo định nghĩa của đường phân giác.
12. Tương tự BF là phân giác của $\widehat{B}$.	12. Chứng minh giống từ 2 đến 11.
13. Vậy phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ qua F.	13. Suy từ 11. và 12. đường thẳng đi qua 2 điểm và đường phân giác của một góc chỉ có một.

Mấy ví dụ nêu ở trên đều không trực tiếp chứng minh định lý thuận, mà gián tiếp chứng minh định lý phản đảo hay định lý đảo của nó, nên gọi chung là PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH GIÁN TIẾP hay còn gọi là PHẢN CHỨNG.

§ 10. NHỮNG ĐIỀM CẦN CHÚ Ý KHI CHỨNG MINH

Nguyên nhân làm cho các bạn thấy học hình học khó, ngoài việc bạn chưa chuẩn bị đầy đủ trước lúc chứng minh, lại còn bỏ qua những điềm cần chú ý khi chứng minh. Nếu lúc bắt đầu học bạn mắc phải một số sai lầm mà không kịp thời sửa chữa, thì sau một thời gian dài bạn khó mà uốn nắn được, bạn sẽ không thu được kết quả trong học tập như ý muốn, thậm chí có khi lại hoàn toàn chịu bó tay trước môn học này. Phần chuẩn bị đã nói rồi, bây giờ xin nêu những điềm cần chú ý khi chứng minh.

(1) Hình học là môn học suy diễn bằng lý luận chặt chẽ, từ những nguyên nhân nào đó nhất thiết phải suy ra được những kết quả nào đấy, không mơ hồ một tý nào. Mỗi một câu nói trong lúc chứng minh đều phải có lý do xác đáng, tuyệt đối không qua loa được. Người mới học nên tuân theo những quy cách nhất định, chia bài chứng minh ra hai phần: bên trái là lời chứng minh, bên phải là lý do ; giống như trong các ví dụ ở các mục trước. Làm như vậy có thề tránh được chứng minh sai hoặc thiếu, còn giúp ta nhớ được lâu các tiên đề, định lý và định nghĩa đã học, vì đã viết đi viết lại nhiều lần.

(2) Những lý do dùng làm căn cứ cho phần chứng minh chỉ giới hạn trong bốn điều sau đây:

a) Giả thiết của bài ra.

b) Những định nghĩa đã học.

c) Những tiên đề đã học.

d) Những định lý đã chứng minh (đã học).

Nếu dùng lầm những quan hệ mà giả thiết của định lý không cho thì phạm sai lầm, như ví dụ (B) trong mục 7. Những điều ta chưa học đến hay trong sách không nói đến cũng không thể dùng làm căn cứ. Hoặc không thể dùng lý do tự mình đặt ra và sai căn bản để làm căn cứ cho việc chứng minh.

(3) Khi chứng minh thường phải vẽ thêm những đường phụ để giúp cho việc chứng minh. Những đường phụ đó, bắt đầu chứng minh nên ghi ngay vào đầu bài làm, nói rõ đã vẽ như thế nào. Còn nên vẽ đường phụ như thế nào mới giúp ích cho việc chứng minh sẽ nói kỹ ở mục sau.

(4) Sau khi đã chứng minh một điều gì rồi, mà có một điều khác cũng cần chứng minh tương tự, thì có thể giảm bớt phần chứng minh của điều sau, chỉ viết lại kết quả, và trong phần lý do ghi chứng minh giống như trên hoặc «Cũng chứng minh tương tự». Như muốn chứng minh BF chia đôi $\widehat{B}$ trong ví dụ 4, chỉ cần theo cách chứng minh từ 1—11: «Kéo dài BF và AD gặp nhau tại H» rồi chứng minh như phần đầu nên có thể bỏ bớt phần chứng minh có tính chất nhắc lại ở trên.

(5) Để dễ nhận rõ sự liên hệ giữa các yếu tố trong hình vẽ, người ta thường dùng những ký hiệu để đánh dấu các yếu tố bằng nhau (đoạn thẳng và góc), như trong hình của ví dụ 1, qua ký hiệu ta nhận ra hai tam giác bằng nhau một cách dễ dàng, vì có một cặp góc bằng nhau xen giữa hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một.

(6) Trong khi chứng minh, nên dùng các hệ thức thay cho lời nói trong những trường hợp có thể, làm cho bài chứng minh rõ ràng hơn. Lời chứng minh cần đơn giản, gọn, đừng dài dòng nhưng cũng không thiếu hay bỏ sót. Như trong bài chứng minh bằng phương pháp tổng hợp ở ví dụ 1, để giản tiện ở phần 2 có thể nêu luôn hai hệ thức; và ở phần 5 lẽ ra phải có trước $BF = \frac{1}{2} AC$, $BE = \frac{1}{2} AB$, rồi từ $AB = $ $= AC$ ta được $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$, cuối cùng mới viết được $BF = BE$

Nhưng làm như vậy dài dòng quá, để gọn hơn, ta bỏ bớt hai lý do « $\frac{1}{2}$ của hai đại lượng bằng nhau thì bằng nhau » và « hai đại lượng cùng bằng hai đại lượng bằng nhau khác thì bằng nhau », bằng cách thay thế từng bước các đại lượng đó. Ở phần 4, cũng bỏ bớt một lý do, đem ba hệ thức « $\widehat{1} = \widehat{ACB}$, $\widehat{2} = \widehat{ACB}$, nên $\widehat{1} = \widehat{2}$ gộp lại làm một.

Khi chứng minh, còn cần chú ý nhiều điểm khác mà sau này chúng tôi kết hợp nêu ra trong các ví dụ. Nếu bạn lưu ý đến các điều đó và cẩn thận, bạn sẽ tránh được sai lầm và tự thấy mình tiến bộ sau một thời gian làm như vậy.

§ 11. VẼ ĐƯỜNG PHỤ NHƯ THẾ NÀO CHO CÓ LỢI

Khi chứng minh định lý hình học, trừ một số bài dễ, phần nhiều phải vẽ thêm đường phụ mới chứng minh được. Vì đường phụ có nhiều loại, nên không có một phương pháp vẽ cố định, đó là một việc khó trong lúc chứng minh. Trong sách giáo khoa vì không biết nên bắt đầu nói như thế nào, nên thà không nói còn hơn là nói không rõ. Để giúp được phần nào cho bạn đọc, chúng tôi sẽ nêu một số điểm lớn, nhưng chắc chắn là không sao tránh được thiếu sót, chỉ có thể chờ sang chương sau, bổ sung vào lúc chứng minh bài tập.

Trước tiên cần phải hiểu rõ:

Mục đích của việc vẽ đường phụ. Nói chung, vẽ đường phụ nhằm sáu mục đích dưới đây:

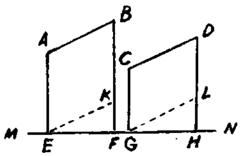
(1) Đem những điều kiện đã cho của bài toán và những hình có liên quan đến việc chứng minh tập hợp vào một nơi (một hình mới), làm cho chúng có liên hệ với nhau.

Ví dụ 5: Hai đoạn thẳng song song và bằng nhau thì hình chiếu của chúng trên một đường thẳng thứ ba cũng bằng nhau.

G.T. : AB = CD

AE, BF, CG, DH đều $\perp$ MN.

K.L. : EF = GH.



Hình 13

Suy xét : Sự bằng nhau của AB và CD và sự bằng nhau của EF và GH không thấy ngay được là có liên quan với nhau.

Hai đoạn thẳng cần chứng minh bằng nhau là EF và GH. Từ định lý « Những đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì song song với nhau », ta biết AE//BF//CG//DH và có thể dựng thêm EK // AB, GL // CD để tạo nên hai hình bình hành. Từ định lý « cạnh đối của hình bình hành bằng nhau » ta có EK = AB, GL = CD. Như vậy tức là ta đã dời vị trí của AB và CD đến EK và GL, để tạo thành hai cạnh tương ứng của hai tam giác EKF và GLH trong đó ta cần chứng minh rằng hai đoạn thẳng EF và GH bằng nhau. Muốn có EF = GH ta chỉ cần chứng minh $\triangle$EKF = $\triangle$GLH.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng EK // AB, GL // CD	1. Từ một điểm có thể dựng một đường thẳng // với một đường cho trước.
2. AE // BF, CG // DH.	2. Hai đường thẳng cùng $\perp$ với một đường khác thì // với nhau.
3. Ta có các tứ giác AEKB và CGLD là ▱	3. Một tứ giác có hai cặp cạnh đối // với nhau là ▱
4. EK = AB = CD = GL.	4. Cạnh đối của ▱ thì bằng nhau ; và suy từ giả thiết.
5. EK // GL	5. Suy từ giả thiết và 1. : hai đường cùng // với hai đường khác // với nhau thì cũng // với nhau.
6. Ta rút ra $\widehat{KEF} = \widehat{LGH}$	6. Góc đồng vị của hai đường // với một cát tuyến thì bằng nhau.
7. $\widehat{EFK} = \widehat{GHL}$	7. Góc vuông bằng nhau.

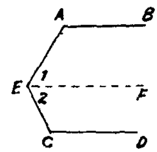
8. Vậy $\triangle EFK = \triangle GHL$	8. Trường hợp bằng nhau của tam giác vuông.
9. $EF = GH$	9. Hai tam giác bằng nhau thì cạnh tương ứng của chúng cũng bằng nhau.

Chú ý: Bạn thử từ A và C dựng đường thẳng // với MN, xem có thể làm cho đoạn thẳng đã cho và đoạn thẳng cần chứng minh trở nên có liên hệ với nhau được không?

(2) Tạo nên đoạn thẳng thứ ba hoặc góc thứ ba, làm cho hai đoạn thẳng hoặc hai góc cần chứng minh trở nên có liên hệ.

Ví dụ 6 : G.T. : $\widehat{A} + \widehat{E} + \widehat{C} = 360^0$

K.L. : AB // CD



Hình 14

Suy xét : Từ E dựng EF // AB, nếu chứng minh được EF // CD thì sẽ có AB // CD.

Chứng minh	*Lý do*
1. Từ E dựng EF // AB	1. Từ một điểm có thể dựng đường thẳng // với một đường thẳng cho trước.
2. thì $\widehat{A} + \widehat{1} = 180^0$	2. Hai góc trong cùng phía của hai đường // và một cát tuyến thì bù nhau.
3. $\widehat{A} + \widehat{E} + \widehat{C} = 360^0$	3. Theo giả thiết.
4. $\widehat{C} + \widehat{2} = 180^0$	4. Suy từ 2 và 3.
5. EF // CD	5. Theo định lý, cách nhận ra hai đường thẳng //.
6. AB // CD	6. Đường thẳng // với một trong hai đường thẳng // cho trước thì cũng // với đường kia.

Chú ý : Bạn thử từ E dựng đường // với AB về bên trái : xem đường đó có thể làm trung gian để chứng minh AB // CD được không ?

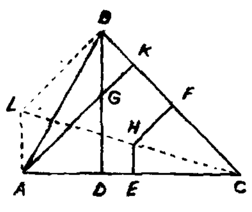
(3) Tạo nên đoạn thẳng hay góc bằng tổng, hiệu, gấp đôi hay $\frac{1}{2}$ đoạn thẳng hay góc cho trước, để đạt mục đích chứng minh định lý. Như ở ví dụ 1 là tạo nên đoạn thẳng bằng $\frac{1}{2}$ đoạn cho trước.

Ở ví dụ 4 là tạo nên tổng của hai đoạn thẳng ; và ví dụ dưới đây là tạo nên đoạn thẳng bằng 2 lần đoạn thẳng cho trước.

Ví du 7 : Khoảng cách từ trực tâm đến một đỉnh của tạm giác bằng hai lần khoảng cách từ tâm của đường tròn ngoại tiếp đến cạnh đối diện với đỉnh đó.

G.T. : AK, BD là đường cao của $\triangle ABC$ cắt nhau ở G, đường trung trực HE, HF cắt nhau ở H.

K.L. : $BG = 2HE$, $AG = 2HF$



Hình 15

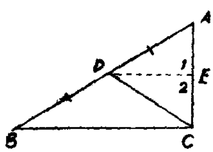
Suy xét : Muốn chứng minh $BG = 2HE$, ta có thể tìm cách dựng một đoạn thẳng khác bằng 2HE. Nhưng nếu kéo dài HE gấp đôi để đạt mục đích trên, thì đoạn đó vẫn không có liên hệ gì với BG cả, nên phải nghĩ cách khác. Từ giả thiết E là trung điểm của AC, ta thử nối CH và kéo dài đến L, sao cho $HL = CH$. H là trung điểm của CL, HE trở thành đoạn thẳng nối hai trung điểm của hai cạnh của tam giác CAL.

Từ định lý « đường trung bình của một tam giác bằng $\frac{1}{2}$ cạnh thứ ba » ta có $LA = 2HE$. Xem kỹ hai đoạn LA và BG, ta có thể chứng minh chúng là cạnh đối của một hình bình hành, nên giải được bài này.

Chứng minh	*Lý do*
1. Nối CH và kéo dài một đoạn HL = CH, nối LA, LB.	1. Qua hai điểm có thể kẻ được một đường thẳng ; đường thẳng có thể kéo dài vô hạn.
2. LA // HE	2. Đoạn thẳng nối liền trung điểm hai cạnh của tam giác thì // với cạnh thứ ba.
3. BD // HE	3. Hai đường cùng $\perp$ với đường thứ ba thì // với nhau.
4. Nên LA // BD	4. Suy từ 2 và 3.
5. Tương tự ta có LB // AK	5. Theo cách chứng minh từ 2 đến 4.
6. Tứ giác LAGB là ▱	6. Tứ giác có các cạnh đối diện // với nhau là ▱
7. BG = LA	7. Cạnh đối của ▱ bằng nhau.
8. LA = 2HE	8. Theo định lý đường trung bình của tam giác và 1.
9. BG = 2HE	9. Thay 7 và 8.
10. Tương tự ta cố AG = 2HF	10. Theo cách chứng minh từ 7 đến 9.

Chú ý **:** Bạn thử nối CG lấy trung điểm là M tạo nên đoạn thẳng mới bằng $\frac{1}{2}$ BG là FM, xem có thể chứng minh được bài này không ?

(4) Tạo nên những đại lượng mới (đoạn thẳng hoặc góc) bằng nhau ; thêm vào những đại lượng bằng nhau mà bài ra đã cho để giúp cho việc chứng minh.



Hình 16

Ví dụ 8 : Trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông bằng một nửa cạnh huyền (ví dụ 3).

G.T : Trong $\triangle ABC$, $\widehat{C} = 90^0$

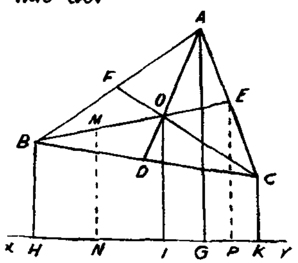
$DA = DB$

K.L.: $DC = DA$.

Suy xét : Trong bài ra chỉ có một cặp đại lượng bằng nhau là DA = DB, như vậy không chứng minh được DC = DA. Ta lấy trung điểm của AC là E, nối DE, thì có thêm một cặp đại lượng mới bằng nhau là AE = EC. Và từ định lý « đường trung bình của một tam giác song song với cạnh thứ ba », « góc đồng vị của hai đường thẳng // hợp thành với một cát tuyến thì bằng nhau » và « góc bù với góc vuông cũng là góc vuông » ta sẽ có DE // BC ; $\widehat{1} = \widehat{C} = 90^0 = \widehat{2}$, như vậy, lại được thêm một cặp đại lượng mới bằng nhau. Ta có thể chứng minh $\triangle$ADE = $\triangle$ CDE để rút ra DC = DA.

Chứng minh	*Lý do*
1. Lấy trung điểm của AC là E nối DE.	1. Mỗi đoạn thẳng đều có một trung điểm. Qua 2 điểm kẻ được một đường thẳng duy nhất.
2. DE // BC	2. Đoạn thẳng nối liền trung điểm hai cạnh của tam giác thì // với cạnh thứ ba.
3. Nên $\widehat{1} = \widehat{C} = 90^0$	3. Góc đồng vị và theo giả thiết.
4. và $\widehat{2} = 90^0$	4. Góc bù với góc vuông cũng là góc vuông.
5. $\widehat{1} = \widehat{2}$	5. Góc vuông bằng nhau.
6. AE = EC	6. Theo 1.
7. DE = DE	7. Không đổi
8. Vậy $\triangle$ADE = $\triangle$CDE	8. c.g.c.
9. DC = DA	9. Hai tam giác bằng nhau thì các yếu tố tương ứng cũng bằng nhau.

(5) Tạo nên một hình mới, để có thể áp dụng một định lý *đặc biệt nào đó.*



Hình 17

Ví dụ 9 : Từ ba đỉnh của một tam giác hạ các đường vuông góc xuống một đường thẳng ở ngoài tam giác đó. Chứng minh rằng tổng độ dài của ba đường vuông góc đó gấp 3 lần độ dài của đoạn thẳng vuông góc hạ từ trọng tâm của tam giác xuống cùng đường thẳng đó.

G.T. : Trong $\triangle ABC$, trung tuyến AD, BE, CF gặp nhau tại O.

AG, BH, CK, OI đều $\perp$ xy.

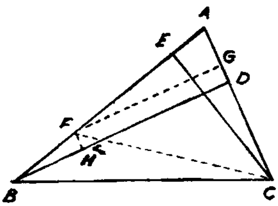
K.L. : $AG + BH + CK = 3\ OI$.

Suy xét : Bài này nếu muốn áp dụng (3) để tạo nên một đoạn thẳng bằng tổng ba đoạn thẳng kia thì không sao làm được, ta phải nghĩ cách khác. Từ định lý những đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng cho trước thì song song với nhau, ta biết bốn đường đó song song với nhau. Và từ định lý «Trọng tâm của một tam giác cách đỉnh một đoạn bằng $\frac{2}{3}$ trung tuyến hạ từ đỉnh đó xuống cạnh đối diện».

Biết $BO = 2OE$, ta có thể lấy trung điểm của BO là M, dựng $MN \perp xy$, $EP \perp xy$, tạo nên hình thang MNPE, BHIO, AGKC, có OI, MN, EP song song với nhau và là đường trung bình của các hình thang trên. Ta có thể ứng dụng định lý «đường trung bình của hình thang bằng $\frac{1}{2}$ tổng của hai đáy» và chứng minh được bài trên.

Chứng minh	*Lý do*
1. Lấy trung điểm của BO là M dựng $MN \perp xy$, $EP \perp xy$.	1. Mỗi đoạn thẳng đều có trung điểm ; từ một điểm ngoài một đường thẳng có thể hạ đường vuông góc xuống đường thẳng đó.
2. Vì BH//MN//OI//AG//EP//CK	2. Những đường thẳng cùng $\perp$ với một đường thẳng khác thì // với nhau.
3. $BM = MO = OE$. $AE = EC$	3. Theo định lý về trọng tâm của tam giác và giả thiết.
4. nên $HN = NI = IP$	4. Theo định lý các đường thẳng song song cách đều.
5. $MN + EP = 2\ OI$	5. Theo định lý đường trung bình của hình thang.
6. $2MN + 2EP = 4\ OI$	6. Suy từ 5
7. Nhưng $2MN = BH + OI$ $2EP = AG + CK$	7. Giống 5
8. $AG + BH + CK + OI = 4\ OI$	8. Thay 7 và 6.
9. Vậy $AG + BH + CK = 3\ OI$	9. Chuyển vế và ước lược.

(6) Biến đổi hình vẽ, làm cho bài trở nên dễ chứng minh hơn trước.



Hình 18

Ví dụ 10: Một tam giác có hai cạnh không bằng nhau, thì tổng của cạnh lớn và đường cao thuộc cạnh ấy, lớn hơn tổng của cạnh bé và đường cao thuộc cạnh đó.

G.T. : Cho Δ ABC

$AB > AC$

BD, CE là đường cao

K.L. : $AB + CE > AC + BD$.

Suy xét **: Nếu tạo nên một đoạn bằng $AB+CE$ và một đoạn khác bằng $AC+BD$ thì không chứng minh được. Do đó ta phải biến đổi kết luận của bài ra : chuyền vế bất đẳng thức của kết luận, ta sẽ được $AB - AC > BD - CE$. Trên cạnh lớn AB ta lấy $AF = AC$, thì $BF = AB - AC$; dựng $FG \perp AC$, $FH \perp BD$ tạo nên một đoạn $BH = BD - HD = BD - CE$. Như vậy là ta đã đổi bài tập trên thành một bài tập khác phải chứng minh $BF > BH$.**

Chứng minh	*Lý do*
1. Trên AB lấy $AF = AC$ Nối FC, dựng $FG \perp AC$, $FH \perp BD$	1. Trên đoạn lớn có thể lấy một đoạn bằng đoạn nhỏ hơn ; qua 2 điểm kẻ được một đường thẳng ; từ một điểm ngoài đường thẳng hạ được đường $\perp$ xuống đường thẳng đó.
2. Vì FG // BD, FH // AC	2. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thứ ba thì // với nhau.
3. Nên tứ giác FHDG là ▱	3. Tứ giác có hai cặp cạnh đối // với nhau là ▱
4. $FG = HD$	4. Cạnh đối của ▱ bằng nhau.
5. $FG = CE$	5. Đường cao hạ đến 2 cạnh bên của tam giác cân bằng nhau.

6. $HD = CE$	6. Suy từ 4, 5.
7. $BH = BD - HD = BD - CE$	7. Suy từ 6.
8. $BF = AB - AF = AB - AC$	8. Suy từ 1 và giả thiết
9. Vì $\widehat{FHB} = 90^0$	9. Theo cách dựng ở 1.
10. Nên ta có $BF > BH$	10. Trong tam giác vuông thì cạnh huyền lớn nhất.
11. hay $AB - AC > BD - CE$	11. Thay 7, 8 vào 10.
12. Vậy $AB + CE > AC + BD$	12. Chuyển vế các số hạng.

Chú ý : Bạn thử từ trên AB lấy $BK = AC$, từ K dựng $KL \perp AC$, $KM \perp BD$, xem có chứng minh được bài này không ? Hoặc trên CA kéo dài lấy một điểm N sao cho $CN = AB$; hay trên AC kéo dài lấy một điểm P sao cho $AP = AB$ xem có chứng minh được không ?

Một điều cần nhắc với các bạn nữa là :

Các loại đường phụ : đường phụ thường có mười loại dưới đây :

(1) Kéo dài một đoạn thẳng cho trước với độ dài tùy ý, hoặc bằng một độ dài cho trước, hoặc cắt một đường thẳng khác như ví dụ 4 và 7.

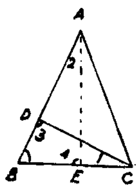
(2) Nối hai điểm cho trước hoặc hai điểm cố định (gồm cả trung điểm của đoạn thẳng cố định), điểm nằm trên một đoạn thẳng cho trước và cách một đầu của đoạn thẳng đó một khoảng cho trước), như trong ví dụ 1, 7, 8 và 10.

(3) Từ một điểm cho trước dựng đường song song với một đường thẳng cho trước, hoặc dựng đường song song với một đường, mà ta cần chứng minh đường này song song với một đường nào đó, như trong ví dụ 5 và 6.

(4) Từ một điểm cho trước hạ đường vuông góc xuống một đường thẳng cho trước, như ở ví dụ 9 và 10.

(5) Dựng đường phân giác của một góc cho trước, như ở ví dụ 11 (cách giải I).

(6) Dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước hợp thành với một đường thẳng khác một góc bằng góc cho trước, như trong cách giải II của ví dụ 11 dưới đây:



Hình 19

Ví dụ 11: Góc xen giữa cạnh đáy và đường cao của cạnh bên trong một tam giác cân bằng một nửa góc ở đỉnh.

G.T. : Trong $\triangle ABC$: $AB = AC$,

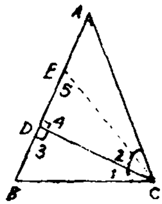
$CD \perp AB$

K.L. : $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{A}$

Cách giải I

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng phân giác của $\widehat{A}$ là AE	1. Mỗi góc đều có một đường phân giác.
2. Thì $AE \perp BC$	2. Trong tam giác cân, đường phân giác ở đỉnh vừa là đường cao.
3. $\widehat{3} = \widehat{4}$	3. Góc vuông bằng nhau.
4. $\widehat{B} = \widehat{B}$	4. Không đổi.
5. $\widehat{1} = \widehat{2}$	5. 2 tam giác có hai cặp góc tương ứng bằng nhau từng đôi một thì cặp góc thứ ba cũng bằng nhau.
6. $\widehat{2} = \frac{1}{2}\widehat{A}$	6. Theo 1.
7. Vậy $\widehat{1} = \frac{1}{2}\widehat{A}$	7. Thay 5 vào 6.

Cách giải II.



Hình 20

Chứng minh	*Lý do*
1. Từ C dựng đường CE sao cho $\widehat{1} = \widehat{2}$	1. Từ một điểm có thể dựng một đường thẳng hợp thành với một đường thẳng cho trước một góc bằng 1 góc cho trước.
2. $\widehat{3} = \widehat{4}$, CD = CD	2. Góc vuông bằng nhau ; không đổi.
3. $\triangle BCD = \triangle ECD$	3. g. c. g.
4. $\widehat{5} = \widehat{B}$	4. hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau thì bằng nhau.
5. mà $\widehat{B} = \widehat{C}$	5. Góc đáy của tam giác cân thì bằng nhau.
6. $\widehat{BCE} = \widehat{A}$	6. Trong tam giác ABC và tam giác CBE có hai cặp góc bằng nhau từng đôi một thì cặp góc thứ ba cũng bằng nhau.
7. $2\widehat{1} = \widehat{A}$	7. Thay 1 vào 6.
8. Vậy $\widehat{1} = \frac{1}{2}\widehat{A}$	8. Chia cả hai vế của 7 cho 2

(7) Từ một điểm cho trước, dựng tiếp tuyến với đường tròn cho trước.

(8) Bài ra cho hai đường tròn giao nhau, thì kẻ được dây cung chung.

(9) Bài ra cho hai đường tròn tiếp xúc với nhau, ta có thể dựng tiếp tuyến chung hoặc đường nối tâm.

(10) Nếu có bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn, thì qua bốn điểm đó có thể dựng thêm đường tròn phụ.

Những ví dụ về bốn loại đường phụ trên đây, sẽ giới thiệu với các bạn ở chương sau. Cuối cùng, chúng tôi xin nhắc thêm một điều sau đây.

Những điểm cần chú ý khi vẽ đường phụ:

(1) Muốn đường phụ giúp ích cho việc chứng minh thì vẽ đường phụ phải có mục đích, không nên vẽ tùy tiện.

Nếu không thì chẳng giúp được gì cho việc chứng minh, lại còn làm cho hình vẽ rối ren, hoa mắt, khó mà tìm được cách giải đúng. Ta nên đặt biệt lưu ý phần này.

(2) Vẽ đường phụ phải tuân theo phép dựng hình cơ bản. Những đường không có trong phép dựng hình cơ bản tuyệt đối không được dựng. Như trong ví dụ 8, căn cứ vào phép dựng hình, ta thấy « tìm trung điểm của một đoạn thẳng » và « nối hai điểm cho trước » là các bước làm hợp lý. Nếu không nói « lấy trung điểm của AC là E, nối DE » mà thay bằng cách nói sau:

a) Dựng đường trung trực của AC là DE.

b) Từ D dựng DE // BC, sao cho AE = EC.

c) Từ D dựng DE $\perp$ AC sau cho AE = EC.

thì đều không hợp lý. Ở *a*, đường trung trực của AC chưa chắc đã đi qua D. Trong *b*, *c*, qua D dựng đường song song với BC, hoặc từ D hạ đường vuông góc xuống AC, đều chưa thể xác định đường đó có chia đôi AC hay không, nên trái với phép dựng hình.

(3) Có khi đường phụ vẽ thêm cùng là một đường nào đó, nhưng vì cách dựng khác nhau, nên cách chứng minh cũng khác nhau. Như trong 1. (phần chứng minh) của ví dụ 8, nếu thay « từ D dựng DE//BC » thì phải dùng định lý « đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh của tam giác mà song song với cạnh thứ hai thì phải đi qua trung điểm của cạnh thứ ba » để chứng minh AE = EC. Hay nếu thay bằng « từ D hạ DE ⊥ AC », thì phải dùng định lý « hai đường thẳng hợp thành với một cát tuyến một cặp góc đồng vị bằng nhau thì song song với nhau » để chứng minh DE // BC, rồi lại phải dùng định lý đường trung bình ở trên để chứng minh AE = EC.

CHƯƠNG II

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

§ 1. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

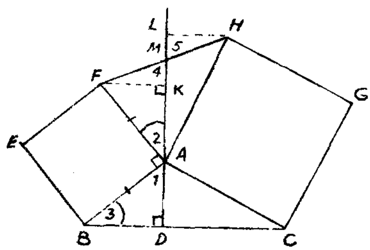
Khi học hình, nếu chúng ta chỉ học thuộc lòng các tiên đề, định lý và định nghĩa mà không biết vận dụng, thì chẳng khác gì một người chỉ biết ngắm nghía những đồ cổ mà mình đã sưu tầm được, không đi sâu tìm hiểu nghiên cứu hoàn cảnh và quá trình phát triển của xã hội đã sản xuất ra những thứ đó, như vậy thì chẳng có ích gì. Muốn vận dụng được các tiên đề, định lý, cần phải nghiên cứu các phương pháp chứng minh. Ở đây ta phân loại các phương pháp chứng minh theo kết luận của định lý, chứ không theo cách thức chứng minh (trực tiếp, gián tiếp) như ở chương trước. Ta dựa vào tính chất của kết luận, đem phân loại bài tập như loại chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau, hai đường thẳng song song với nhau, ba điểm cùng nằm trên một đường thẳng v.v... Chúng ta sẽ nghiên cứu phương pháp chứng minh cho từng loại và những định lý cần dùng đến, rồi đem quy nạp và chỉnh lý. Sau này, khi làm bài tập, gặp phải những bài cùng loại ta có thể từ những phương pháp và định lý đã nghiên cứu, chọn lấy những phương pháp và định lý thích hợp để ứng dụng. Cho nên, nghiên cứu các phương pháp chứng minh là một cơ hội tốt để chúng ta luyện tập vận dụng các định lý đã học, nó giúp ích nhiều cho việc học tập môn hình học.

Bài tập về chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau có nhiều, trước tiên, ta hãy nghiên cứu phương pháp chứng minh loại bài tập này. Những định lý có thể dùng để chứng minh loại bài này cũng nhiều, các bạn đã học trong sách giáo khoa ở đây không nhắc lại hết được. Những định lý như vậy tuy nhiều, nhưng thường dùng nhất trong khi chứng minh, vẫn không ngoài các định lý sau :

(1) Lợi dụng trường hợp bằng nhau của tam giác. Ngoài ví dụ 5 và ví dụ 8 ở chương trước, nay nêu thêm một ví dụ tương đối khó.

Ví dụ 12 : G.T. : Lấy hai cạnh AB, AC của $\triangle$ ABC làm cạnh, dựng các hình vuông ABEF và ACGH ra phía ngoài của tam giác, dựng AD $\perp$ BC, kéo dài DA gặp FH tại M.

K.L. : FM = MH.



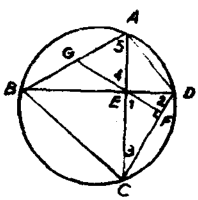
Hình 21

Suy xét : Trong bài ra có nhiều góc vuông, các cạnh của hình vuông lại bằng nhau. Vì $\widehat{2}$ và $\widehat{3}$ đều phụ với $\widehat{1}$, nên $\widehat{2} = \widehat{3}$... Những đại lượng bằng nhau đó, ta phải tìm cách lợi dụng. Nếu dựng FK $\perp$ DM thì sẽ có $\triangle$AFK = $\triangle$BAD, FK = AD. Cũng tương tự như vậy ta dựng HL $\perp$ DM, được HL = AD. Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh $\triangle$FMK = $\triangle$HML là được.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng FK $\perp$ DM HL $\perp$ DM	1. Từ một điểm ngoài đường thẳng, có thể dựng đường $\perp$ xuống đường thẳng đó.
2. Từ $\widehat{2} + \widehat{1} = 90^0$	2. Vì 3 góc kề bù nhau, trong đó có 1 góc là 90^0.
3. $\widehat{3} + \widehat{1} = 90^0$.	3. 2 góc nhọn của tam giác vuông phụ nhau.
4. Có : $\widehat{2} = \widehat{3}$	4. Suy từ 2 và 3.
5. Và ta có : $\widehat{FKA} = \widehat{ADB}$	5. Góc vuông bằng nhau.

6. $FA = AB$	6. Hai cạnh của hình vuông thì bằng nhau.
7. Nên $\triangle AFK = \triangle BAD$	7. Trường hợp bằng nhau của tam giác vuông.
8. Ta rút ra $FK = AD$	8. Hai cạnh tương ứng của 2 tam giác bằng nhau thì bằng nhau.
9. Tương tự ta có $HL = AD$	9. Theo cách chứng minh từ 2 — 8.
10. Vì $FK = HL$	10. Suy từ 8 và 9.
11. $\widehat{FKM} = \widehat{HLM}$	11. Góc vuông bằng nhau.
12. $\hat{4} = \hat{5}$	12. Góc đối đỉnh bằng nhau.
13. Vậy $\triangle FMK = \triangle HML$	13. Giống 7.
14. Ta rút ra $FM = MH$	14. Giống 8.

(2) Dùng đoạn thẳng thứ ba làm trung gian. Trong ví dụ 12 ở trên, từ 8 và 9 ta suy ra 10, chính là dùng phương pháp này. Sau đây là một ví dụ nữa.



Hình 22

Ví dụ 13 : Nếu một tứ giác nội tiếp trong đường tròn có hai đường chéo vuông góc với nhau, thì đường thẳng đi qua giao điểm của đường chéo và vuông góc với một cạnh của tứ giác sẽ chia đôi cạnh đối diện với cạnh đó (Bài này gọi là định lý Brahma — Gúpta).

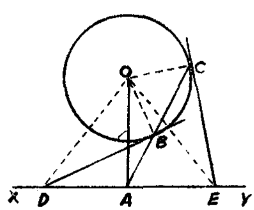
G. T : Tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn $AC \perp BD$. Qua giao điểm E dựng $GE \perp CD$

K. L. : $AG = GB$.

Suy xét : $\triangle ABE$ là tam giác vuông, ta phải chứng minh $AG = GB$, nghĩa là G là trung điểm của cạnh huyền ; ta đã biết rằng trung điểm của cạnh huyền cách đều ba đỉnh của tam giác vuông, nên lấy GE làm trung gian. Muốn chứng minh AG = GE, cần phải có $\widehat{4} = \widehat{5}$. Từ $\widehat{4} = \widehat{1}$, $\widehat{5} = \widehat{2}$, và $\widehat{1}$, $\widehat{2}$ đều phụ với $\widehat{3}$, ta suy ra $\widehat{1} = \widehat{2}$ nên $\widehat{4} = \widehat{5}$ có thể chứng minh được.

Chứng minh	*Lý do*
1. $\widehat{1} + \widehat{3} = 90^0$ $\widehat{2} + \widehat{3} = 90^0$	1. Hai góc nhọn của tam giác vuông phụ nhau.
2. Nên $\widehat{1} = \widehat{2}$	2. Suy từ 1.
3. Nhưng $\widehat{1} = \widehat{4}$, $\widehat{2} = \widehat{5}$	3. Góc đối đỉnh ; 2 góc cùng chắn một cung.
4. $\widehat{4} = \widehat{5}$	4. Suy từ 3.
5. AG = GE	5. 2 góc trong tam giác bằng nhau thì hai cạnh đối diện với 2 góc ấy cũng bằng nhau.
6. Tương tự ta có GB = GE	6. Theo cách chứng minh từ 1 đến 5.
7. AG = GB	7. Suy từ 5 và 6.

(3) *Ứng dụng tính chất của tam giác cân :* Trong phần 5 của ví dụ 13 đã làm như vậy, lý do của 5 là định lý đảo của định lý « trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau ». Có khi người ta cũng ứng dụng tính chất « đường phân giác hay đường cao của góc ở đỉnh chia đôi cạnh đáy » của tam giác cân để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau. Ta xem ví dụ dưới đây.



Hình 23

Ví dụ 14 : Cho một đường tròn tâm O và đường thẳng xy ở ngoài đường tròn đó. Từ

O hạ OA $\perp xy$; từ A kẻ một cát tuyến bất kỳ cắt đường tròn tại B và C ; tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt xy ở D và E. Chứng minh rằng AD = AE.

G.T. : Cho đường tròn tâm O và đường thẳng xy ở ngoài đường tròn

AO $\perp xy$

BD, CE là tiếp tuyến tại B và C.

K.L. : DA = AE.

Suy xét : Ta đã biết OA $\perp$ DE, nếu có OD = OE thì DA = AE. Muốn chứng minh OD = OE, ta có thể lợi dụng góc vuông giữa tiếp tuyến và bán kính : $\widehat{OBD} = \widehat{OCE}$, bán kính OB = OC và dùng trường hợp bằng nhau của tam giác vuông. Nhưng giữa $\triangle$ OBD và $\triangle$ OCE ngoài hai cặp đại lượng bằng nhau ở trên, còn có cặp đại lượng thứ ba nào bằng nhau nữa không ? Đó chính là mấu chốt của bài này, cũng là phần khó chứng minh nhất. Sau khi nghiên cứu kỹ, ta thấy tứ giác ODAB và OCEA nội tiếp được, nên có thể suy được ra $\widehat{ODB} = \widehat{OAB} = \widehat{OEC}$.

Chứng minh	*Lý do*
1. Nối OD, OE, OB, OC	1. Qua hai điểm kẻ được một đường thẳng.
2. $\widehat{OBD} = \widehat{OCE} = 90^0$	2. Tiếp tuyến $\perp$ bán kính qua tiếp điểm.
3. $\widehat{OAD} = \widehat{OAE} = 90^0$	3. Góc vuông bằng nhau.
4. Tứ giác ODAB và tứ giác OCEA nội tiếp	4. Từ A và B nhìn OD dưới góc 90^0 không đổi; $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ bù nhau.
5. $\widehat{ODB} = \widehat{OAB} = \widehat{OEC}$	5. Góc nội tiếp cùng chắn một cung.
6. OB = OC	6. Bán kính bằng nhau.
7. $\triangle$ OBD = $\triangle$ OCE	7. Suy từ 2, 5, 6, g. g. c. tam giác vuông.
8. OD = OE	8. Các yếu tố tương ứng của 2 tam giác bằng nhau thì bằng nhau.
9. DA = AE	9. Trong tam giác cân đường cao hạ từ đỉnh chia đôi cạnh đáy.

Chú ý : Dựa vào định lý để nhận biết tứ giác nội tiếp vẽ thêm đường tròn phụ, để tạo ra những cặp góc mới bằng nhau, là một phương pháp rất quan trọng.

(4) *Lợi dụng hình bình hành.* Ngoài việc ứng dụng tính chất « Cạnh đối của hình bình hành bằng nhau » như trong các ví dụ 5, 7, 10 ; ta còn ứng dụng tính chất « Các đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm » để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau. Ta sẽ xem trong cách giải I của ví dụ 15.

(5) *Lợi dụng đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và // với cạnh thứ hai thì chia đôi cạnh thứ ba (Định lý đường trung bình của tam giác).*

Xem trong cách giải II của ví dụ 15.

Ví dụ 15 : Cho $\triangle ABC$ cân, $AB = AC$, trên AB lấy một điểm D, trên AC kéo dài lấy một điểm E sao cho $BD = CE$, nối D với E cắt BC tại F. Chứng minh rằng $DF = FE$.

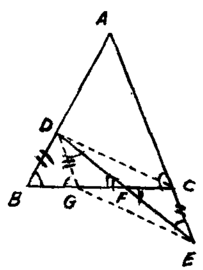
G.T. : Cho $\triangle ABC$, $AB = AC$

$BD = CE$

DE và BC gặp nhau tại F

L. : $DF = FE$.

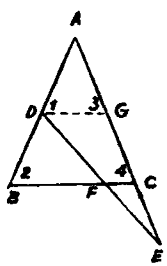
Suy xét 1 : Dựng DG // AE, nếu chứng minh được tứ giác DGEC là ▱, thì DE và BC nhất định cắt nhau tại trung điểm F. Muốn chứng minh DGEC là ▱, chỉ cần có $DG = CE$ là đủ. Vì DG đã // CE rồi. Giả thiết của bài đã cho $DB = CE$, nên chỉ cần chứng minh $DB = DG$ nữa là được. Muốn có $DG = DB$, trước tiên phải chứng minh $\widehat{DGB} = \widehat{B}$, ta đã biết $\widehat{DGB} = \widehat{ACB}$, chứng minh được $\widehat{B} = \widehat{ACB}$, nên $\widehat{B} = \widehat{DGB}$ có thể thành lập được.



Hình 24

Cách giải I.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng DG // AE, nối DC, GE.	1. Dựa vào phép dựng đường thẳng đi qna 1 điểm cho trước và // với đường thẳng cho trước ; qua 2 điểm kẻ được 1 đường thẳng.
2. Thì $\widehat{DGB} = \widehat{ACB}$	2. Góc đồng vị của 2 đường // và một cát tuyến thì bằng nhau.
3. $\widehat{B} = \widehat{ACB}$	3. Hai góc đáy của tam giác cân bằng nhau.
4. $\widehat{DGB} = \widehat{B}$	4. Suy từ 2 và 3.
5. Nên DG = DB	5. Trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là 2 cạnh bằng nhau.
6. Nhưng CE = DB	6. Theo giả thiết.
7. DG = CE	7. Suy từ 5 và 6.
8. Vì DG // CE	8. Theo cách dựng ở 1.
9. DGEC là ▱	9. Tứ giác có một cặp cạnh $\underline{\underline{//}}$ là ▱
10. Vậy DF = FE	10. Đường chéo của ▱ cắt nhau tại trung điểm.



Hình 25

Suy xét 2 : Dựng DG // BC, nếu chứng minh được GC = CE, thì DF = FE. Muốn có GC = = CE thì GC phải bằng DB, vì bài ra đã cho DB = CE rồi. Ta biết AB = AC, GC và DB đều nằm trên AC và AB, nên trước tiên phải chứng minh AG = AD. Muốn có AG = AD, thì phải chứng minh $\widehat{1} = \widehat{3}$. Điều đó có thể làm được.

Cách giải II.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng DG // BC	1. Dựa vào phép dựng đường thẳng đi qua 1 điểm cho trước và // với đường cho trước.
2. $\widehat{1} = \widehat{2} = \widehat{4} = \widehat{3}$	2. Góc đồng vị của 2 đường thẳng // ; và 2 góc đáy của tam giác cân bằng nhau.
3. Nên AG = AD	3. Trong một tam giác, đối diện với 2 góc bằng nhau là 2 cạnh bằng nhau.
4. Nhưng AC = AB	4. Giả thiết.
5. Vậy GC = DB	5. Lấy 4 trừ 3.
6. Nhưng CE = DB	6. Giả thiết.
7. GC = CE	7. Suy từ 5 và 6.
8. Vậy DF = FE	8. Trong tam giác đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và // với cạnh thứ 2 thì chia đôi cạnh thứ 3.

(6) *Lợi dụng các đoạn thẳng bằng nhau cho trước rồi biến đổi :*

Ta dựa vào tính chất « gấp hai đoạn thẳng bằng nhau lên cùng một số lần, hoặc cùng chia hai đoạn thẳng bằng nhau ra cùng một số phần, thì được các đoạn thẳng mới bằng nhau ». và « Tổng hay hiệu của hai cặp đoạn thẳng bằng nhau từng đôi một thì bằng nhau » biến đổi các đoạn thẳng bằng nhau cho trước, ta sẽ chứng minh được định lý. Các ví dụ ở trên kia đã ứng dụng rất nhiều. Không nên thêm ví dụ riêng nữa.

(7) *Lợi dụng những đại lượng bằng nhau trong đường tròn.* Từ những định lý « Khoảng cách từ tâm đến hai dây cung bằng nhau thì bằng nhau », « hai cung bằng nhau, hai góc ở tâm bằng nhau hay hai góc nội tiếp bằng nhau, thì hai dây cung tương ứng cũng bằng nhau » v. v... chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau. Phần này dễ, ở đây không nên thêm ví dụ nữa.

Cuối cùng, xin nêu một số bài tập quan trọng để các bạn luyện tập. Những bài tập này thường ra trong các kỳ thi vào các trường đại học chuyên nghiệp về những năm trước. Bạn thử ứng dụng các phương pháp trên làm thử.

BÀI TẬP 1

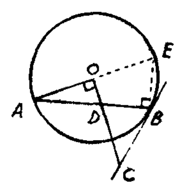
1. Cho ▱ ABCD, E và F là trung điểm của BC và AD. Chứng minh rằng BF và DE chia AC thành ba phần bằng nhau.

2. Đường kính AB của một đường tròn tâm O và dây cung AC hợp thành một góc 30^0, tiếp tuyến tại C cắt AB kéo dài ở D. Chứng minh AC = DC.

3. Trên một đường tròn tâm O lấy một điểm B, dựng tiếp tuyến BC (hình 26) ODC vuông góc với bán kính OA cắt dây AB tại D. Chứng minh BC = CD.

4. Thử lợi dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh ví dụ 15.

5. Lấy một cạnh của góc vuông của một tam giác vuông làm đường kính dựng một đường tròn cắt cạnh huyền tại một điểm. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại điểm đó chia đôi cạnh góc vuông kia



Hình 26

6. Lấy hai cạnh AB và AC của △ ABC. Dựng các tam giác đều ABD và ACE ra phía ngoài của tam giác, lấy AD và AE làm hai cạnh dựng ▱ ADFE. Chứng minh rằng △ FBC là tam giác đều.

7. Cho △ ABC, đường cao là BD và CE, gọi F là trung điểm của BC, từ F dựng đường vuông góc với DE cắt DE tại G. Chứng minh DG = GE.

8. Hai đường cao AD và BE của △ ABC cắt nhau tại H, đường kính của đường tròn ngoại tiếp là AF. Chứng minh rằng nếu HF cắt BC tại G, thì ta có HG = GF.

Chỉ dẫn : Kéo dài AD cắt đường tròn ngoại tiếp tại K, trước tiên lợi dụng trường hợp bằng nhau của tam giác chứng minh HD = DK.

9. Một tứ giác nội tiếp trong đường tròn có hai đường chéo vuông góc với nhau. Chứng minh rằng độ dài đoạn thẳng nối giao điểm của đường chéo với trung điểm của một cạnh, bằng khoảng cách từ tâm đường tròn đến cạnh đối diện với cạnh đó.

Chỉ dẫn : Trong hình của ví dụ 13, từ tâm hạ $OH \perp CD$, và chứng minh CHEG là ▱

§ 2. CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU

Về phương pháp chứng minh hai góc bằng nhau, ta đã thấy nhiều trong các ví dụ trước. Các bạn đều rất quen thuộc. Bây giờ ta đem các phương pháp đó quy nạp lại, sẽ được các phương pháp chủ yếu sau đây :

(1) *Lợi dụng hai đường thẳng giao nhau hoặc song song với nhau.*

Ta sẽ chứng minh hai góc là góc đối đỉnh, góc so le trong hoặc góc đồng vị của hai đường thẳng song song hợp thành với một cát tuyến, hoặc chứng minh hai góc có cạnh tương ứng song song cùng chiều (hoặc ngược chiều).

(2) *Lợi dụng định lý về đường tròn.*

Ta chứng minh hai góc là góc nội tiếp cùng chắn một cung, hoặc một góc giữa tiếp tuyến và một dây qua tiếp điểm, góc kia là góc nội tiếp chắn cung mà dây đó trương.

(3) Lợi dụng trường hợp bằng nhau của tam giác :

Chứng minh hai góc là góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau.

(4) Lợi dụng tam giác cân :

Chứng minh hai góc là góc đáy của tam giác cân.

(5) Lợi dụng hình bình hành :

Chứng minh hai góc là hai góc đối của một hình bình hành.

(6) Lợi dụng tam giác đồng dạng :

Chứng minh hai góc là các góc thứ ba của hai tam giác đã có hai góc tương ứng bằng nhau từng đôi một.

(7) Dùng góc thứ ba làm trung gian :

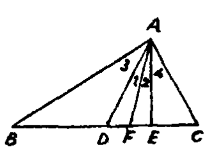
Chứng minh hai góc cùng phụ (hoặc cùng bù) với một góc thứ ba ; hoặc hai góc đó cùng bằng một góc thứ ba, hoặc cùng bằng hai góc bằng nhau khác.

(8) Lợi dụng các góc bằng nhau cho trước rồi biến đổi :

Chứng minh hai góc là tổng hay hiệu của hai cặp góc bằng nhau từng đôi một, hoặc gấp đôi hay bằng một nửa hai góc bằng nhau cho trước.

Khi chứng minh hai góc bằng nhau, người ta thường dùng sáu phương pháp đầu, nếu các phương pháp đó đều không có hiệu lực, thì mới dùng các phương pháp sáu. Dưới đây chúng tôi nêu vài ví dụ tương đối khó, các bạn nên lưu ý quá trình suy xét phân tích, nếu không, dầu cho bạn biết được cách chứng minh rồi, nhưng không biết vận dụng một cách sáng tạo vào các trường hợp khác, thì cũng chẳng có ích gì.

Ví dụ 16 : Trong tam giác vuông đường phân giác của góc vuông chia đôi góc tạo bởi đường trung tuyến và đường cao của cạnh huyền.



Hình 27

G. T. : Trong $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 90^0$

$AE \perp BC$, $BD = DC$

$\widehat{BAF} = \widehat{CAF}$

K. L. : $\widehat{1} = \widehat{2}$

Suy xét : 1 và 2 không phải là góc đối đỉnh hay góc của hai đường thẳng // ; cũng không thể là góc tương ứng của 2 tam giác bằng nhau, hay 2 góc đáy của tam giác cân, hay góc thứ ba của 2 tam giác đã có 2 góc tương ứng bằng nhau từng đôi một ; cho nên đều không thể ứng dụng các phương pháp từ (1) đến (6) để chứng minh ; $\widehat{2}$ tuy phụ với $\widehat{AFE}$, nhưng lại khó làm cho $\widehat{1}$ và $\widehat{AFE}$ có quan hệ với nhau ; ta cũng không tìm ra góc trung gian bằng $\widehat{1}$ hoặc $\widehat{2}$, nên phương pháp (7) cũng không dùng được. Nhưng từ giả thiết $\widehat{BAF} = \widehat{CAF}$, ta biết rằng nếu chứng minh được $\widehat{3} = \widehat{4}$ thì ta có thể suy ra $\widehat{1} = \widehat{2}$. Muốn chứng minh $\widehat{3} = \widehat{4}$, xem qua hình vẽ, ta thấy điều đó không khó. Vì $\triangle$ DAB cân, nên $\widehat{3} = \widehat{B}$. Mặt khác, $\widehat{B}$ và $\widehat{4}$ đều phụ với $\widehat{C}$, nên $\widehat{B} = \widehat{4}$, ta suy được : $\widehat{3} = \widehat{4}$.

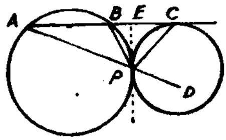
Chứng minh	*Lý do*
1. $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^0$ $\widehat{4} + \widehat{C} = 90^0$	1. Hai góc nhọn của tam giác vuông phụ nhau.
2. $\widehat{B} = \widehat{4}$	2. Suy từ 1.
3. Vì DB = DA	3. Trong tam giác vuông, điểm giữa của cạnh huyền cách đều 3 đỉnh.
4. Ta có : $\widehat{B} = \widehat{3}$	4. Góc đáy của tam giác cân bằng nhau.
5. $\widehat{3} = \widehat{4}$	5. Suy từ 2 và 4.
6. Nhưng $\widehat{BAF} = \widehat{CAF}$	6. Giả thiết.
7. Nên $\widehat{1} = \widehat{2}$	7. Suy từ 5 và 6.

Ví dụ 17 : Cho hai đường tròn ngoại tiếp tại điểm P, dây cung AB của một đường tròn kéo dài tiếp xúc với đường tròn kia tại C, kéo dài AP đến D. Chứng minh $\widehat{BPC} = \widehat{CPD}$.

G. T. : P là tiếp điểm của 2 đường tròn.

AB là dây cung của đường tròn lớn ; ABC là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ tại C ; kéo dài AP đến D.

K. L. : $\widehat{BPC} = \widehat{CPD}$.



Hình 28

Suy xét : Hai góc ta phải chứng minh không phải là góc nội tiếp hoặc góc giữa tiếp tuyến và dây cung. Cũng không phải là hai góc có mối liên quan như đã nêu ở (1) đến (7), nên không thể dùng các phương pháp đó để chứng minh được. Nhưng trong chương trước, khi nói về vẽ thêm đường phụ, đã nói « nếu hai đường tròn tiếp xúc với nhau, thì ta dựng tiếp tuyến chung hoặc đường nối tâm của hai đường tròn đó », ta thử áp dụng vào trường hợp này xem sao. Ta dựng tiếp tuyến chung PE, được $\hat{1} = \hat{A}$, $\hat{2} = \hat{C}$; cộng hai vế trái với nhau ta được tổng của $\hat{1}$ và $\hat{2}$ là $\widehat{BPC}$; cộng hai vế phải với nhau ($\hat{A}$ và $\hat{C}$), ta được tổng của hai góc này là góc ngoài CPD của tam giác ACP. Như vậy là đã giải quyết được vấn đề.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn qua P cắt AC tại E.	1. Qua điểm tiếp xúc của hai đường tròn kẻ được một tiếp tuyến chung.
2. Vì EP = EC	2. Hai tiếp tuyến của đường tròn cùng xuất phát từ một điểm thì bằng nhau.
3. Nên $\hat{2} = \hat{C}$	3. Góc đáy của tam giác cân bằng nhau.
4. Vì $\hat{1} = \hat{A}$	4. Góc giữa tiếp tuyến và một dây qua tiếp điểm bằng góc nội tiếp chắn cung mà dây đó trương.
5. Ta có $\widehat{BPC} = \hat{A} + \hat{C}$	5. Suy từ 3 và 4.

6. Nhưng $\widehat{CPD} = \widehat{A} + \widehat{C}$	6. Góc ngoài của tam giác bằng tổng 2 góc trong không kề với nó.
7. Vậy $\widehat{BPC} = \widehat{CPD}$	7. Suy từ 5 và 6.

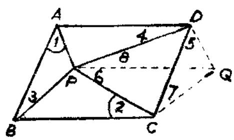
Chú ý : Khi bài ra cho hai đường tròn tiếp xúc với nhau, ta nên dựng tiếp tuyến chung qua tiếp điểm. Tiếp tuyến này có hiệu nghiệm trong rất nhiều trường hợp, thế nào bạn cũng phải thử dựng xem, rồi mới tìm phương pháp khác.

Ví dụ 18 : Trong ▱ ABCD lấy một điểm P sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{PCB}$. Chứng minh $\widehat{PBA} = \widehat{PDA}$

G. T. : Trong ▱ ABCD lấy một điểm P sao cho $\widehat{1} = \widehat{2}$

K. L. : $\widehat{3} = \widehat{4}$

Suy xét : Ví dụ này cũng giống như hai ví dụ trước, dùng phương pháp thường không giải được, nhìn trong hình vẽ, ta thấy $\widehat{3}$ và $\widehat{4}$ đều là một phần của hai góc đối của ▱ , hình như chỉ cần chứng minh $\widehat{PBC} = \widehat{PDC}$ trước, rồi lấy hai góc B và D trừ đi từng vế của đẳng thức trên, là được $\widehat{3} = \widehat{4}$



Hình 29

Nhưng từ giả thiết $\widehat{1} = \widehat{2}$ để chứng minh $\widehat{PBC} = \widehat{PDC}$, thì cũng chẳng khác gì bài ra cả, nên ta phải nghĩ cách khác. Bài ra cho ABCD là ▱ , ta vẽ thêm đường phụ, để tạo nên những cặp góc mới bằng nhau, ta thử dùng phương pháp (7) xem sao. Nếu dựng ▱ APQD, ta sẽ được hai cặp góc mới bằng nhau là $\widehat{1} = \widehat{5}$, $\widehat{4} = \widehat{8}$. Đồng thời ta được thêm một ▱ PBCQ khác, lại có thêm $\widehat{2} = \widehat{6}$, $\widehat{3} = \widehat{7}$. Rồi từ $\widehat{1} = \widehat{2}$, ta suy ra $\widehat{5} = \widehat{6}$ nên có thể chứng minh tứ giác PCQD nội tiếp, và từ $\widehat{7} = \widehat{8}$ ta suy được $\widehat{3} = \widehat{4}$.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng PQ // AD, DQ // AP	1. Theo phép dựng đường thẳng //.
2. thì tứ giác APQD là ▱	2. Theo định nghĩa của ▱
3. Ta có PQ $\stackrel{//}{=}$ AD	3. Cạnh đối của hình ▱ thì bằng nhau.
4. Nhưng BC $\stackrel{//}{=}$ AD	4. Giống 3
5. thì PQ $\stackrel{//}{=}$ BC	5. Hai đoạn thẳng cùng $\stackrel{//}{=}$ một đường thẳng thứ ba thì $\stackrel{//}{=}$.
6. Tứ giác PBCQ là ▱	6. Tứ giác có một cặp cạnh đối $\stackrel{//}{=}$ là ▱
7. Vì AB // DC, AP // DQ	7. Cạnh đối của ▱ song song với nhau.
8. Nên $\widehat{1} = \widehat{5}$	8. Góc có cạnh tương ứng // cùng chiều.
9. và $\widehat{2} = \widehat{6}$	9. Góc so le trong của 2 đường // thì bằng nhau.
10. ta có : $\widehat{5} = \widehat{6}$	10. Suy từ giả thiết và 8, 9.
11. Tứ giác PCQD nội tiếp	11. D và P nhìn đoạn QC dưới 1 góc không đổi ($\widehat{5} = \widehat{6}$)
12. $\widehat{7} = \widehat{8}$	12. Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung.
13. Nhưng $\widehat{7} = \widehat{3}$, $\widehat{8} = \widehat{4}$	13. Giống lý do ở 8 và 9.
14. $\widehat{3} = \widehat{4}$.	14. Suy từ 13.

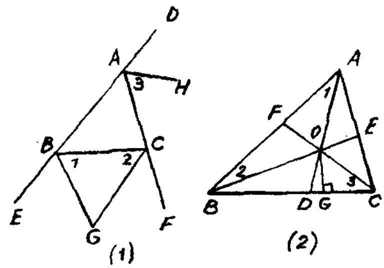
Chú ý : Lợi dụng đường song song để tạo nên những cặp góc mới bằng nhau là một phương pháp rất hay.

BÀI TẬP 2

1. Chứng minh rằng góc tạo thành bởi hai đường phân giác của hai góc ngoài của một tam giác bằng một nửa góc ngoài thứ ba. (Hình 30/1).

Chỉ dẫn : để ý xem $\hat{1}$, $\hat{2}$ và $\hat{3}$ có liên quan gì với nhau không ? $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{G}$ có liên quan gì với nhau không ?

2. Ba đường phân giác trong AD, BE, CF của $\triangle$ ABC gặp nhau tại O, từ O dựng OG $\perp$ BC.



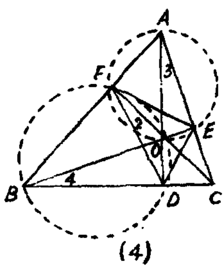
Hình 30

Chứng minh $\widehat{BOD} = \widehat{COG}$ (hình 30/2)

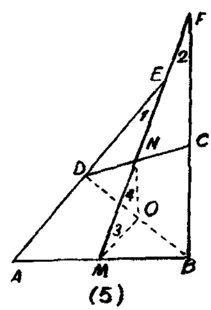
3. Hai đường tròn giao nhau tại A và B ; dựng đoạn thẳng CD $\perp$ AB đi qua A và cắt hai đường tròn tại C và D ; kéo dài CB, DB cắt hai đường tròn tại hai điểm F và E. Chứng minh AB là phân giác của $\widehat{EAF}$.

4. Cho $\triangle$ ABC và ba đường cao AD, BE và CF. Chứng minh rằng AD, BE, CF là phân giác của ba góc của $\triangle$ DEF (hình 31).

Chỉ dẫn : Tìm trong hình vẽ những tứ giác nội tiếp.



Hình 31



Hình 32

5. Cho tứ giác ABCD, AD = BC, M và N là điểm giữa của AB và DC ; kéo dài AD, MN cắt nhau tại E ; kéo dài BC, MN cắt nhau tại F. Chứng minh $\widehat{AEM} = \widehat{BFM}$ (Hình 32)

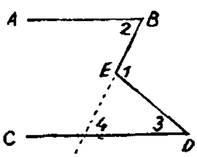
6. Từ một điểm A trên đường tròn tâm O dựng AD vuông góc với đường kính EF và dựng tiếp tuyến BC tại A.

Chứng minh AE và AF là phân giác của các góc tạo thành bởi AD và BC.

§ 3. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI NHAU

Trong các ví dụ nêu ở trước, ta đã gặp nhiều trường hợp chứng minh hai đường song song với nhau. Ta đã ứng dụng những định lý « hai đường thẳng cùng song song hoặc vuông góc với một đường thứ ba thì song song với nhau » hay « đoạn thẳng nối liền điểm giữa hai cạnh của một tam giác song song với cạnh thứ ba », « hai cạnh đối của một hình bình hành song song với nhau » v.v... Bây giờ ta quy nạp lại một lần nữa. Thường có bốn phương pháp sau đây để chứng minh hai đoạn thẳng song song.

(1) *Lợi dụng quan hệ giữa các góc.* Muốn chứng minh hai đường thẳng song song với nhau, ta chứng minh hai góc so le trong bằng nhau, hoặc hai góc trong cùng phía bù nhau v.v... Như trong cách giải I và cách giải II của ví dụ 19.



Hình 33.

(2) *Lợi dụng đường thẳng thứ ba làm trung gian.* Ta chứng minh hai đường cùng song song hoặc cùng vuông góc với đường thứ ba ; hay là hai đường song song với hai đường thẳng khác song song với nhau, hoặc vuông góc với hai đường thẳng song song với nhau. Như cách giải III của ví dụ 19.

Ví dụ 19 : G.T. : $\widehat{1} = \widehat{2} + \widehat{3}$

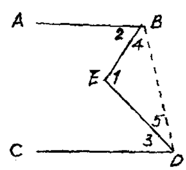
K.L. : AB // CD.

Cách giải I.

Chứng minh	*Lý do*
1. Kéo dài BE cắt CD tại F	1. Đường thẳng có thể kéo dài vô hạn.
2. thì $\widehat{1} = \widehat{3} + \widehat{4}$	2. Góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.
3. Nhưng $\widehat{1} = \widehat{2} + \widehat{3}$	3. Giả thiết.
4. $\widehat{3} + \widehat{4} = \widehat{2} + \widehat{3}$	4. Suy từ 2 và 3
5. Vậy $\widehat{4} = \widehat{2}$	5. Suy từ 4.
6. Ta có AB // CD	6. Một cặp góc so le trong bằng nhau, thì hai đường đó // với nhau.

Cách giải II.

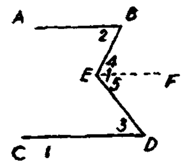
Chứng minh	*Lý do*
1. Nối B và D	1. Qua hai điểm kẻ được một đường thẳng.
2. thì $\widehat{1} + \widehat{4} + \widehat{5} = 180^0$	2. Tổng 3 góc trong của tam giác bằng 180^0
3. Nhưng $\widehat{1} = \widehat{2} + \widehat{3}$	3. Giả thiết.
4. Nên $\widehat{2} + \widehat{3} + \widehat{4} + \widehat{5} = 180^0$	4. Thay 1 trong 2 bằng 3.
5. Vậy AB // CD	5. Hai góc trong cùng phía bù nhau thì hai đường đó // với nhau.



Hình 34

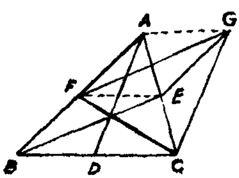
Cách giải III.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng EF // AB	1. Theo phép dựng hình.
2. thì $\widehat{4} = \widehat{2}$	2. Góc so le trong bằng nhau
3. Nhưng $\widehat{1} = \widehat{2} + \widehat{3}$	3. Giả thiết.
4. Vậy $\widehat{5} = \widehat{3}$	4. Lấy 3 trừ 2.
5. EF // CD	5. Góc so le trong bằng nhau thì 2 đường song song.
6. Vậy AB // CD	6. Hai đường cùng song song với một đường thứ ba thì // với nhau.



Hình 35

(3) *Lợi dụng hình bình hành.* Nếu muốn chứng minh hai đường thẳng cho trước là cạnh đối của hình bình hành, ta dùng định lý « tứ giác có hai cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một là hình bình hành », « tứ giác lồi có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành » hoặc « tứ giác lồi có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm là hình bình hành ». Ta nghiên cứu thêm ví dụ dưới đây :



Hình 36

Ví dụ 20 : G.T. : AD, BE, CF là 3 đường trung tuyến của ΔABC, FG // BE; EG // AB

K.L. : AD // GC

Suy xét : Muốn chứng minh AD // GC, phải chứng minh ADCG là ▱. Để đạt mục đích trên, cần phải có AG $\stackrel{//}{=}$ DC. Vì ta đã biết FE $\stackrel{//}{=}$ DC, nên chỉ cần có AG $\stackrel{//}{=}$ FE là được. Và vì GE $\stackrel{//}{=}$ BF $\stackrel{//}{=}$ AF. Nên AFEG là ▱ dựa vào kết quả đó ta sẽ chứng minh được bài trên.

Chứng minh	*Lý do*
1. Nối AG, FE	1. Theo phép dựng hình.
2. Tứ giác FBEG là ▱ (AbEG)	2. Tứ giác có hai cặp cạnh đối // với nhau là ▱ ; suy ra từ giả thiết.
3. GE $\stackrel{//}{=}$ FB $\stackrel{//}{=}$ AF	3. Cạnh đối của ▱ thì $\stackrel{//}{=}$; suy từ giả thiết.
4. Vì AFEG là ▱	4. Tứ giác lồi có một cặp cạnh $\stackrel{//}{=}$ là ▱
5. Nên AG $\stackrel{//}{=}$ FE	5. Giống 3.
6. Nhưng FE $\stackrel{//}{=} \frac{1}{2}$ BC $\stackrel{//}{=}$ DC	6. Đoạn thẳng nối trung điểm 2 cạnh của tam giác thì $\stackrel{//}{=} \frac{1}{2}$ cạnh thứ ba.
7. Ta có AG $\stackrel{//}{=}$ DC	7. Hai đoạn thẳng cùng $\stackrel{//}{=}$ một đoạn thứ ba thì $\stackrel{//}{=}$.
8. Vậy tứ giác ADCG là ▱	8. Giống 4.
9. AD // GC	9. Giống 3.

(4) Lợi dụng đoạn thẳng nối liền trung điểm hai cạnh của tam giác :

Ở trang 70, ví dụ 20, ta đã dùng phương pháp này, nay không nên thêm ví dụ riêng nữa.

BÀI TẬP 3

1. Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy.

Chỉ dẫn : AD // BC, gọi E, F là trung điểm của AB và DC ; AF và BC kéo dài gặp nhau ở G. Chứng minh AF = FG.

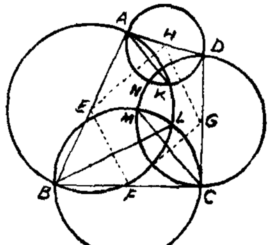
2. Từ các đỉnh của hình bình hành ABCD hạ các đường vuông góc AE, BF, CG và DH xuống các đường chéo. Chứng minh EF // GH.

Chỉ dẫn : Chứng minh các đường chéo của tứ giác EFGH cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Từ đỉnh A của tam giác ABC hạ các đường vuông góc AD và AE xuống đường phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$. Chứng minh DE // BC.

4. Cho hai đường tròn tâm O và O' giao nhau tại A và B. Đường thẳng qua A cắt đường tròn O tại C và đường tròn O' tại D ; một đường thẳng khác qua B cắt đường tròn O tại E và đường tròn O' tại F. Chứng minh CE // DF.

Chỉ dẫn : Bài ra cho hai đường tròn giao nhau, dây cung chung là đường phụ rất có lợi cho việc chứng minh.



Hình 37

5. Lần lượt lấy các cạnh của tứ giác làm đường kính dựng các đường tròn, thì bốn dây cung chung của các đường tròn đó sẽ tạo thành hai cặp đoạn thẳng song song với nhau từng đôi một (hình 37).

Chỉ dẫn : Nối các tâm của các đường tròn lại sẽ được một hình bình hành.

6. Cho hai đường tròn tiếp xúc với nhau, ta kẻ một đường thẳng đi qua tiếp điểm, cắt hai đường tròn tại hai điểm. Chứng minh rằng hai bán kính nối các tâm với các giao điểm song song với nhau.

7. Tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn ; hai đường chéo cắt nhau tại E. Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp của △ABE tại điểm E song song với CD.

8. Trên đường chéo BD của hình bình hành ABCD lấy một điểm P. Qua P dựng EPG vuông góc với AB và CD cắt AB tại E và CD tại G, dựng HPF vuông góc với AD và BC, cắt AD tại H và BC tại F. Chứng minh EF // HG.

Chỉ dẫn : Theo cách làm của bài 4 trong bài tập 2 chứng minh hai góc bằng nhau trước.

§ 4. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

Muốn chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau, người ta thường dùng bốn phương pháp dưới đây :

(1) Lợi dụng hai góc kề bằng nhau. Nếu hai đường thẳng giao nhau tạo thành hai góc kề bằng nhau, thì hai đường đó vuông góc với nhau.

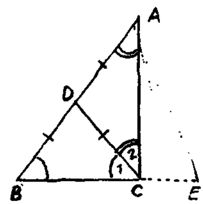
Ví dụ 21 : Nếu trung tuyến thuộc một cạnh trong một tam giác bằng một nửa cạnh đó, thì tam giác đó là tam giác vuông.

G. T. : Trong $\triangle ABC$, $DA = DB = DC$

K. L. : $\widehat{ACB} = 90^0$

Suy xét : Nếu $\widehat{ACB} = 90^0$, thì $AC \perp BC$. Ta kéo dài BC đến E, nếu ta chứng minh được $\widehat{ACB} = \widehat{ACE}$ thì bài này có thể giải được.

Vì $\widehat{ACB} = \widehat{1} + \widehat{2}$, mà $\widehat{ACE}$ thì bằng $\widehat{A} + \widehat{B}$, xem kỹ, bạn sẽ thấy $\widehat{1} = \widehat{B}$, $\widehat{2} = \widehat{A}$. Bài này rất dễ chứng minh, bạn thử viết phần chứng minh ra xem.



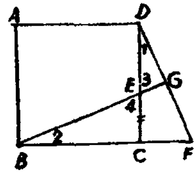
Hình 38

(2) Lợi dụng các góc vuông cho trước hoặc các góc phụ nhau. Ta có thể chứng minh rằng góc tạo bởi hai đường thẳng bằng một góc vuông cho trước, hoặc là góc thứ ba của một tam giác đã có hai góc phụ nhau, để chứng minh rằng hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

Ví dụ 22 : G. T. : Trên cạnh CD của hình vuông ABCD lấy một điểm E, kéo dài BC đến F sao cho $CF = CE$.

K. L. : $= BE \perp DF$

Suy xét : Muốn chứng minh BE ⊥ DF ta phải có $\widehat{DGE} = 90^0$. Chỉ cần $\widehat{DGE} = \widehat{BCE}$ hoặc $\hat{1} + \hat{3} = 90^0$, thì ta sẽ chứng minh được $\widehat{DGE} = 90^0$. Qua hình vẽ ta thấy $\hat{3} = \hat{4}$ nên chỉ cần có $\hat{1} = \hat{2}$ nữa là chứng minh được định lý này.



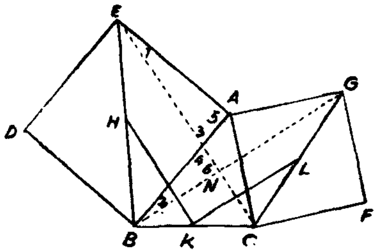
Hình 39

Giả thiết đã cho CE = CF, ngoài ra các cạnh của hình vuông lại bằng nhau, bạn thử lợi dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh $\hat{1} = \hat{2}$ xem có được không.

(3) Dùng đoạn thẳng thứ ba làm trung gian. Muốn chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau, ta có thể chứng minh một trong hai đường thẳng song song với một đường cho trước nào đó còn đường kia thì vuông góc với đường cho trước đó, hoặc chứng minh hai đường này song song với hai đường thẳng vuông góc cho trước.

Ví dụ 23 : G. T. : Lấy hai cạnh AB, AC của △ ABC làm cạnh dựng các hình vuông ABDE, ACFG ra phía ngoài của tam giác ; H, K, L là trung điểm của EB, BC và CG.

K. L. : HK ⊥ KL.



Hình 40

Suy xét : Dùng hai phương pháp trước không chứng minh được HK⊥KL, nên tìm trong hình vẽ những đường thẳng có liên quan đến hai đoạn thẳng này. Vì H, K, L đều là trung điểm của các đoạn thẳng, nên nếu ta nối E với C, B với G, thì HK, KL sẽ là đoạn thẳng nối liền trung điểm hai cạnh của một tam giác, và HK // // EC, KL // BG. Cho nên chỉ cần chứng minh được EC ⊥ BG thì giải quyết được bài này. Quan sát kỹ, ta thấy EC, BG là cạnh tương ứng của hai tam giác AEC và ABG. Ta có thể chứng minh dễ dàng, hai tam giác này bằng nhau. Nhưng qua hai tam giác bằng nhau này ta cũng chỉ rút ra được EC = BG, cặp đại lượng này hình như chẳng giúp ích được gì cho việc chứng minh cả. Phân tích một lần nữa, ta thấy từ 2 tam giác bằng nhau trên còn rút ra được $\widehat{1} = \widehat{2}$. Bây giờ muốn chứng minh EC ⊥ BG, thì cũng chẳng khác gì phương pháp dùng để chứng minh ví dụ 22 cả.

Chứng minh	*Lý do*
1. Nối EC, BG	1. Theo phép dựng hình.
2. Vì AE = AB, AC = AG	2. Các cạnh của hình vuông thì bằng nhau.
3. $\widehat{EAC} = 90^0 + \widehat{BAC} = \widehat{BAG}$	3. Một góc của hình vuông bằng 90^0.
4. Ta có $\triangle AEC = \triangle ABG$	4. c.g.c.
5. $\widehat{1} = \widehat{2}$	5. Góc tương ứng của 2 tam giác bằng nhau thì bằng nhau.
6. $\widehat{3} = \widehat{4}$	6. Góc đối đỉnh bằng nhau.
7. $\widehat{6} = \widehat{5} = 90^0$	7. 2 tam giác có 2 góc bằng nhau từng đôi một thì góc thứ ba của chúng cũng bằng nhau.
8. Ta rút ra EC ⊥ BG	8. Hai đường giao nhau tạo thành góc vuông thì ⊥ với nhau.
9. Nhưng HK // EC, KL // BG	9. Đoạn thẳng nối trung điểm 2 cạnh của tam giác thì // với cạnh thứ 3.
10. Nên HK ⊥ KL	10. Hai đường // với 2 đường vuông góc với nhau thì cũng ⊥ với nhau.

(4) Lợi dụng tam giác cân : Muốn chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau, ta có thể chứng minh một trong hai đường là cạnh đáy, còn đường kia là trung tuyến hoặc phân giác, hoặc là đường cao trên cạnh đó của tam giác cân.

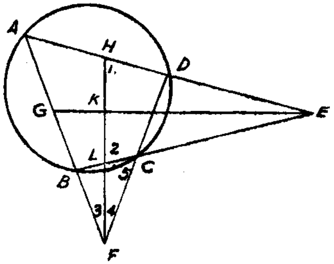
Ví dụ 24 : Cho một tứ giác nội tiếp, ta kéo dài từng cặp cạnh đối, chúng sẽ cắt nhau ở ngoài đường tròn và tạo thành hai góc. Chứng minh rằng hai đường phân giác của hai góc đó vuông góc với nhau.

G. T. : Tứ giác ABCD nội tiếp.

AD, BC kéo dài cắt nhau tại E ; AB, DC kéo dài cắt nhau tại F.

EG là phân giác của $\widehat{E}$; FH là phân giác của $\widehat{F}$.

K. L. : EG $\perp$ FH.



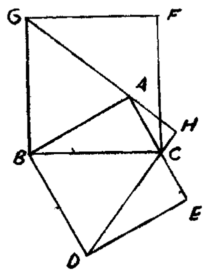
Hình 41

Suy xét : Vì EG chia đôi $\widehat{E}$, nếu ta chứng minh được $\triangle$ EHL cân thì sẽ được EG $\perp$ FH. Muốn có EH = EL phải chứng minh $\widehat{1} = \widehat{2}$. Căn cứ vào định lý góc ngoài của tam giác, ta có $\widehat{1} = \widehat{3} + \widehat{A}$, $\widehat{2} = \widehat{4} + \widehat{5}$ và từ giả thiết $\widehat{3} = \widehat{4}$, nếu chứng minh được $\widehat{A} = \widehat{5}$ nữa thì sẽ được $\widehat{1} = \widehat{2}$ Nhưng $\widehat{5} = 180^0 - \widehat{C}$ và $\widehat{A} + \widehat{C} =$ $= 180^0$, nên $\widehat{5} = \widehat{A}$. Như vậy là ta đã tìm được cách giải của bài này.

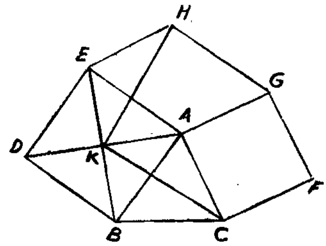
BÀI TẬP 4

1. BD, CE là hai đường cao của $\triangle$ ABC, F và G là điểm giữa BC và DE. Chứng minh FG $\perp$ DE.

2. Cho $\triangle$ ABC, $\widehat{A} = 90^0$, lấy AB, BC làm cạnh dựng các hình vuông ABDE, BCFG vào phía trong của tam giác. Chứng minh GA $\perp$ DC (hình 42).



Hình 42



Hình 43

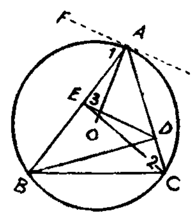
3. Lấy hai cạnh AB, AC của $\triangle$ ABC làm cạnh dựng các hình vuông ABDE, ACFG ; K là giao điểm của AD và BE ; ta dựng thêm hình bình hành AEHG. Chứng minh CK $\perp$ KH.

Chỉ dẫn : $\widehat{HEA}$, $\widehat{BAC}$ đều bù với EAG, có thể chứng minh $\triangle$ EKH = = $\triangle$ AKC.

4. Hai đường tròn tiếp xúc với nhau tại điểm A. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn tại B và C. Chứng minh AB $\perp$ AC.

5. BD và CE là đường cao của $\triangle$ABC, O là tâm của đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh AO $\perp$ DE (hình 44).

Chỉ dẫn : Dựng tiếp tuyến AF, tai A, chứng minh tứ giác BEDC nội tiếp rồi rút ra AF // DE.



Hình 44

6. Cho một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn, đồng thời lại ngoại tiếp một đường tròn khác. Chứng minh rằng đoạn thẳng nối các tiếp điểm (của đường tròn nội tiếp đa giác) đối diện thì vuông góc với nhau.

Chỉ dẫn : Nối tâm với các tiếp điểm, chứng minh hai góc đối ở tâm bù nhau, rồi ứng dụng định lý « góc nội tiếp bằng một nửa góc ở tâm cùng chắn một cung » chứng minh hai góc nhọn phụ nhau.

§ 5. CHỨNG MINH TỔNG (HOẶC HIỆU) CỦA HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG MỘT ĐOẠN THẲNG THỨ BA, HAY MỘT ĐOẠN THẲNG GẤP ĐÔI (HOẶC BẰNG MỘT NỬA) MỘT ĐOẠN THẲNG KHÁC

Trước tiên ta hãy nói cách chứng minh tổng của hai đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng thứ ba. Có bốn phương pháp dưới đây :

(1) Dựng một đoạn thẳng bằng tổng của hai đoạn thẳng cho trước.

Ta dựng tổng của hai đoạn thẳng cho trước rồi chứng minh rằng tổng này bằng đoạn thẳng thứ ba của bài ra.

(2) Dựng một đoạn thẳng bằng hiệu của hai đoạn thẳng cho trước.

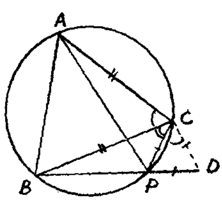
Ta dựng hiệu của đoạn thứ ba với một trong hai đoạn cho trước, rồi chứng minh rằng hiệu này bằng đoạn còn lại.

Ví dụ 25 : Cho một tam giác đều nội tiếp trong một đường tròn. Chứng minh rằng khoảng cách từ một điểm trên đường tròn đến đỉnh xa nhất, bằng tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai đỉnh còn lại.

G. T. : ABC đều.

P là một điểm trên $\overset{\frown}{BC}$

K. L. : $PA = PB + PC$.

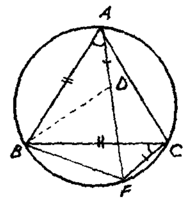


Hình 45

Suy xét 1 : Nếu kéo dài BP đến D, sao cho $PD = PC$, thì $BD = BP + PC$, ta chỉ cần chứng minh $PA = BD$ là được. Ta biết rằng PA và BD là hai cạnh tương ứng của hai tam giác PAC và BDC, trong hai tam giác này, ta đã biết $BC = AC$, muốn cho 2 tam giác đó bằng nhau, ta phải tìm thêm những đại lượng bằng nhau khác. Vì $\widehat{CPD} + \widehat{CPB} = 180^0$, mà $\widehat{A} + \widehat{CPB} = 180^0$, (góc đối của tứ giác nội tiếp), nên

$\widehat{A} = \overset{\frown}{CPD} = 60^0$, vì vậy $\triangle$ CPD cũng là tam giác đều. Ta có thêm hai cặp đại lượng mới bằng nhau là CP = CD, $\overset{\frown}{ACP} = 60^0 + \overset{\frown}{BCP} = \overset{\frown}{BCD}$. Do đó có thể chứng minh được $\triangle$ PAC = $\triangle$ BDC.

Suy xét 2 : Trên AP, lấy một đoạn AD = PC, chỉ cần chứng minh DP = PB, rồi đem hai đẳng thức này cộng lại, ta sẽ chứng minh được bài ra. Xem qua các ký hiệu trong hình vẽ, ta thấy có thể chứng minh :



Hình 46

$\triangle$ABD = $\triangle$CBP, ta rút ra được BD = BP mặt khác ta có $\overset{\frown}{BPD} = \overset{\frown}{BCA} = 60^0$, nên $\triangle$BPD là tam giác đều, và ta có DP = PB.

Các bạn thử dựa vào kết quả của suy xét 1 và 2 để tự chứng minh lấy.

(3) Chia đoạn thẳng thứ ba thành hai phần. Chứng minh một phần của đoạn thẳng thứ ba bằng đoạn thẳng thứ nhất, phần còn lại bằng đoạn thứ hai.

(4) Ứng dụng những định lý đặc biệt : Dùng định lý về đường trung bình của tam giác hay của hình thang, cũng có thể chứng minh một đoạn thẳng bằng tổng hay hiệu của hai đoạn thẳng khác.

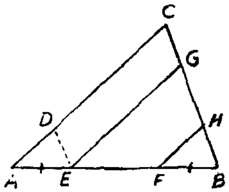
Ví dụ 26 : G. T. : Cho $\triangle$ ABC, AE = BF

AC // EG // FH.

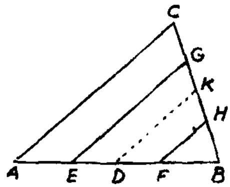
K. L. : EG + FH = AC

Suy xét 1 : Vì EG // AC, nếu dựng thêm ED // BC, thì sẽ được một và chia AC thành hai phần, trong đó DC bằng EG, chỉ cần chứng minh thêm AD = FH nữa là được. Nhưng AD và FH là hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau, ta có thể chứng minh điều này một cách dễ dàng, nên AD = FH.

Suy xét 2 : EG và FH là hai đáy của hình thang EFHG, nếu ta lấy trung điểm của EF là D nối với trung điểm của GH là K, thì ta có EG + FH = 2DK, sau



Hình 47



Hình 48

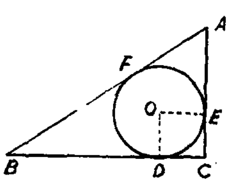
đó ta chứng minh thêm 2DK = AC nữa là được. Vì DK là đoạn thẳng nối liền trung điểm hai cạnh AB, BC của $\triangle$ ABC, nên 2DK = AC.

Bạn đọc thử dựa vào kết quả của suy xét ở trên mà tự chứng minh lấy.

Phương pháp chứng minh hiệu của hai đoạn thẳng cho trước bằng đoạn thẳng thứ ba cũng giống như trên, vì $a - b = c$ thì $c + b = a$.

Phương pháp chứng minh tổng hay hiệu của ba đoạn thẳng trở lên bằng một đoạn thẳng khác cũng chẳng khác phương pháp trên mấy, bạn có thể tìm thấy phương pháp này ở ví dụ 9. Nhưng có khi cần ứng dụng đến định lý đặc biệt « hai tiếp tuyến của một đường tròn cùng xuất phát từ một điểm thì bằng nhau » như ví dụ dưới đây :

Ví dụ 27 : Đường kính của đường tròn nội tiếp trong tam giác vuông, bằng tổng hai cạnh góc vuông trừ đi cạnh huyền.



Hình 49

G. T. : Trong $\triangle ABC$, $\widehat{C} = 90^0$ đường tròn tâm O tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F có bán kính là R.

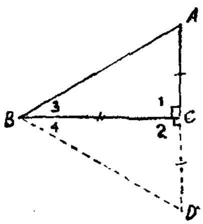
K. L. : $2R = BC + CA - AB$.

Suy xét : Vì BD = BF, AE = AF, nên BC + AC — AB = CD + CE, mà 2 R thì bằng OD + OE, nên chỉ cần chứng minh được CD + CE = OD + OE là giải quyết được bài này. Ta nhận thấy tứ giác ODCE là hình vuông. CD và OE, CE và OD là *hai cặp cạnh đối diện, nên* CD = OE, CE = OD.

Dựa vào kết quả cuối cùng, ta có thể chứng minh được đẳng thức trong kết luận.

Bây giờ ta nói sang phương pháp chứng minh một đoạn thẳng nào đó có độ dài gấp đôi hay bằng một nửa độ dài của một đoạn thẳng cho trước. Có hai phương pháp sau :

(1) Gấp đôi đoạn thẳng. Ta gấp đôi đoạn thẳng ngắn, rồi chứng minh nó bằng đoạn thẳng dài như trong ví dụ 7.



Hình 50

(2) Chia đoạn thẳng. Ta chia đôi đoạn thẳng dài, rồi chứng minh nó bằng đoạn thẳng ngắn như trong ví dụ 1. Bây giờ nêu thêm một ví dụ nữa :

Ví dụ 28 : Nếu một góc nhọn của tam giác vuông gấp đôi góc nhọn kia, thì cạnh huyền dài gấp đôi cạnh góc vuông ngắn.

G.T. : Trong $\triangle$ ABC; có $\widehat{C} = 90^0$

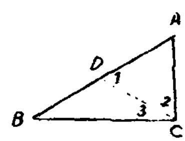
$\widehat{A} = 2\widehat{B}$.

K.L. : AB = 2AC.

Suy xét 1 : Đem AC kéo dài gấp đôi được AD. Ta tìm cách chứng minh AB = AD. Muốn có AB = AD, ta phải chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{D}$. Từ giả thiết $\widehat{A} = 2 . \widehat{3}$ và $\triangle ABC = \triangle DBC$ (điều này ta có thể chứng minh được dễ dàng) ta suy ra được :

$\widehat{D} = \widehat{A} = 2 . \widehat{3} = \widehat{3} + \widehat{4} = \widehat{ABD}.$

Suy xét 2 : Đem AB chia đôi được AD, bây giờ ta tìm cách chứng minh AD = AC nghĩa là phải chứng



Hình 51

minh được $\widehat{1} = \widehat{2}$. Vì trung điểm của cạnh huyền trong tam giác vuông cách đều ba đỉnh, nên $\widehat{1} = \widehat{B} + \widehat{3} = 2\widehat{B} = \widehat{A}$, và vì $\widehat{2} = \widehat{A}$ nên $\widehat{1} = \widehat{2}$.

Phần chứng minh chúng tôi dành cho bạn đọc luyện tập.

Muốn chứng minh một đoạn thẳng gấp 3, 4... lần hay bằng $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... một đoạn khác ta cũng áp dụng phương pháp như trên.

BÀI TẬP 5

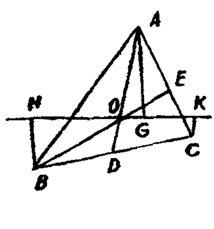
1. Tổng các khoảng cách từ một điểm trên cạnh đáy của tam giác cân đến hai cạnh bên bằng đường cao trên một cạnh bên.

2. Tổng các khoảng cách từ một điểm trong tam giác đều đến 3 cạnh bằng chiều cao của tam giác đó.

Chỉ dẫn : qua điểm đó dựng đường song song với một cạnh, rồi dựa vào kết quả bài 1 để chứng minh.

3. Từ các đỉnh của ▱ABCD hạ các đường vuông góc AE, BF, CG, DH xuống một đường thẳng ở ngoài ▱. Chứng minh AE + CG = BF + DH.

4. Cho một đường thẳng bất kỳ đi qua trọng tâm của một tam giác. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ hai đỉnh ở cùng một phía của đường thẳng đến đường thẳng đó, bằng khoảng cách của đỉnh còn lại đến đường thẳng (hình 52).



Hình 52

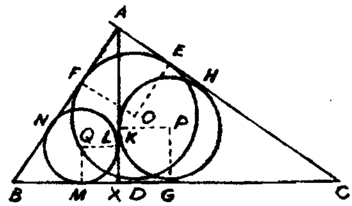
Chỉ dẫn : Từ D và trung điểm của AO là F hạ các đường vuông góc xuống đường thẳng cho trước.

5. Một tứ giác ngoại tiếp đường tròn. Chứng minh tổng độ dài của hai cạnh đối này bằng tổng các độ dài của hai cạnh đối kia.

6. Cho tam giác ABC vuông, $\widehat{A} = 90^0$, $Ax \perp BC$, đường tròn nội tiếp tâm O, tiếp xúc với ba cạnh của tam giác tại D, E, F có bán kính là R ; đường tròn nội

tiếp tâm P của tam giác ACx tiếp xúc với ba cạnh của tam giác đó tại G, H, K và có bán kính là r; đường tròn nội tiếp tâm Q của tam giác ABx tiếp xúc với ba cạnh của tam giác đó tại L, M, N và có bán kính là r'. Chứng minh $R + r + r' = Ax$. (hình 53)

Chỉ dẫn: Dựa theo phương pháp của ví dụ 27.



Hình 53

7. Cho $\triangle ABC$, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, $AD \perp BC$, và E là trung điểm của BC. Chứng minh $AB = 2DE$.

8. Cho $\triangle ABC$, D là trung điểm của AB, trên AC lấy một điểm E sao cho $AE = 2CE$, CD và BE cắt nhau tại O. Chứng minh $OE = \frac{1}{4} BE$.

Chỉ dẫn: Lấy trung điểm của BE là F, rồi theo phương pháp ở ví dụ 15 để chứng minh $FO = OE$.

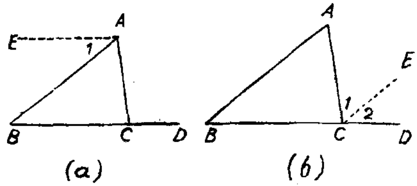
§ 6. CHỨNG MINH TỔNG (HOẶC HIỆU) CỦA HAI GÓC BẰNG MỘT GÓC THỨ BA, HAY GÓC NÀY GẤP ĐÔI (HOẶC BẰNG MỘT NỬA) GÓC KIA

Có hai phương pháp chủ yếu dùng để chứng minh tổng hoặc hiệu của hai góc cho trước bằng một góc thứ ba nào đó.

(1) Dựng góc bằng tổng hoặc hiệu của hai góc: chia một góc thành hai góc nhỏ hơn. Muốn chứng minh tổng (hay hiệu) của hai góc bằng một góc thứ ba, ta dựng một góc bằng tổng (hay hiệu) của hai góc trước, rồi chứng minh góc này bằng góc thứ ba, cũng có thể chia góc thứ ba thành hai góc, rồi chứng minh một góc bằng góc thứ nhất, góc còn lại bằng góc thứ hai, như phương pháp chứng minh đoạn thẳng bằng tổng hay hiệu của hai đoạn khác. Ví dụ khi chứng minh định lý : góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không

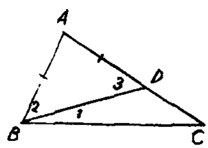
kề với nó », ta dựng AE // BD (xem hình 54 a) tạo nên $\widehat{EAC} = \widehat{A} + \widehat{1} = \widehat{A} + \widehat{B}$, rồi chứng minh góc này bằng $\widehat{ACD}$; hoặc là ta dựng CE // AB (hình 54b) chia góc ACD thành $\widehat{1}$ và $\widehat{2}$, rồi chứng minh $\widehat{1} = \widehat{A}$, $\widehat{2} = \widehat{B}$.

Muốn chứng minh góc này gấp đôi (hoặc bằng một nửa) góc kia, ta có thể gấp đôi góc nhỏ lên, hoặc chia đôi góc lớn, rồi chứng minh rằng kết quả bằng góc cho trước như trong ví dụ 11.



Hình 54

(2) Dùng góc thứ tư làm trung gian. Có khi ta phải mượn góc thứ tư hoặc thứ năm làm trung gian để chứng minh, làm cho các góc phải chứng minh có liên quan với nhau, rồi dùng phương pháp đại số, như chuyển vế, thay thế, bỏ dấu ngoặc v. v... biến đổi để rút ra kết luận.



Hình 55

Ví dụ 29: G.T. : Cho △ ABD

AB = AD.

C là một điểm tùy ý trên AD kéo dài.

K.L. : $\widehat{1} = \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C})$

Suy xét : Quan sát hình vẽ, ta thấy $\widehat{1} + \widehat{2} = \widehat{B}$ và $\widehat{1} + \widehat{C} = \widehat{3}$. Vì $\widehat{2} = \widehat{3}$ cho nên ba góc 1, B, C, có liên hệ với nhau, và ta suy được hai cách giải sau :

Cách giải I.

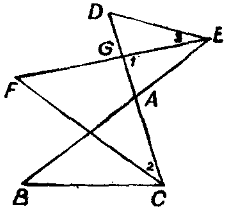
Chứng minh	*Lý do*
Vì $\widehat{1} = \widehat{B} - \widehat{2}$	(Vì $\widehat{B} = \widehat{1} + \widehat{2}$, ta chuyển vế)
$= \widehat{B} - \widehat{3}$	(Góc đáy của tam giác cân bằng nhau ; thay vào trên).
$= \widehat{B} - (\widehat{1} + \widehat{C})$	(Góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc *trong* không kề với nó ; thay $\widehat{3} = \widehat{1} + \widehat{C}$.
$= \widehat{B} - \widehat{1} - \widehat{C}$	(bỏ dấu ngoặc)
nên ta có $2 . \widehat{1} = \widehat{B} - \widehat{C}$	(chuyển vế, rút gọn)
$\widehat{1} = \frac{1}{2} (\widehat{B} - \widehat{C})$	(hai đại lượng bằng nhau, thì một nửa của chúng cũng bằng nhau).

Cách giải II.

C. M. : $\widehat{1} = \widehat{3} - \widehat{C}$	(Góc ngoài của tam giác bằng tổng 2 góc trong không kề với nó ; chuyển vế)
$= \widehat{2} - \widehat{C}$	(góc đáy của tam giác cân bằng nhau; thay $\widehat{3}$ bằng $\widehat{2}$)
$= (\widehat{B} - \widehat{1}) - \widehat{C}$	(Vì $\widehat{2} = \widehat{B} - \widehat{1}$; thay vào trên)

Còn các bước sau chứng minh giống trong cách giải I.

Chú ý : Sau một thời gian học tập, bạn đã có được một số kiến thức cơ bản về môn hình học, khi chứng minh, bạn có thể tùy trường hợp mà linh động, không nhất thiết phải trình bày theo hình thức của các ví dụ trước, để tiện cho việc *tính toán* (*chuyển vế*, thay thế...), nên ví dụ trên đây không viết như các ví dụ trước.



Hình 56

Ví dụ 30: G.T.: Hai $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có góc ở A là góc đối đỉnh ; phân giác của $\widehat{C}$ và $\widehat{E}$ cắt nhau tại F.

K.L.: $\widehat{F} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{D})$

Suy xét : $\widehat{F}$ và $\widehat{D}$ không liên quan trực tiếp với nhau, nhưng $\widehat{F} + \widehat{2}$ và $\widehat{D} + \widehat{3}$ đều bằng $\widehat{1}$. Giữa $\widehat{B}$ và $\widehat{F}$ cũng có quan hệ tương tự như giữa $\widehat{F}$ và $\widehat{D}$. Vì $\widehat{2}$, $\widehat{3}$ đều bằng một nửa $\widehat{C}$ và $\widehat{E}$, nên sau đó ta có thể khử $\widehat{2}$ và $\widehat{3}$ đi và chứng minh được bài này.

Chứng minh	*Lý do*
1. $\widehat{F} + \widehat{2} = \widehat{1}$ và $\widehat{D} + \widehat{3} = \widehat{1}$	1. Theo định lý về góc ngoài của tam giác
2. $\widehat{F} + \widehat{2} = \widehat{D} + \widehat{3}$	2. Suy từ 1.
3. hay $\widehat{F} + \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{D} + \frac{1}{2}\widehat{E}$	3. Thay giả thiết vào.
4. Lý luận tương tự, ta có : $\widehat{F} + \frac{1}{2}\widehat{E} = \widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{C}$	4. Giống cách chứng minh từ 1—3.
5. Nên $2\widehat{F} = \widehat{B} + \widehat{D}$	5. Cộng 3 với 4 và ước lược số hạng đồng dạng.
6. $\widehat{F} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{D})$	6. Suy từ 5.

BÀI TẬP 6

1. Từ một điểm A ngoài đường tròn tâm O dựng hai tiếp tuyến AB và AC tiếp xúc với đường tròn tại B và C. Kẻ đường kính BD. Chứng minh

$$\widehat{A} = 2\widehat{CBD}.$$

2. Chứng minh rằng góc tạo thành giữa đường cao và trung tuyến trên cạnh huyền của một tam giác vuông, bằng hiệu của hai góc nhọn.

3. Chứng minh rằng góc tạo thành bởi đường cao trên cạnh đáy và phân giác của góc ở đỉnh trong một tam giác, bằng một nửa hiệu của hai góc ở đáy.

4. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, $AC > AB$, D là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$. Chứng minh $\widehat{ADO} = \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C})$

Chỉ dẫn : Đối chiếu với bài trước, xem có điểm nào giống nhau không.

5. Cho tứ giác ABCD, kéo dài AB, DC cắt nhau tại E, kéo dài AD, BC cắt nhau tại F ; phân giác của $\widehat{E}$ và $\widehat{F}$ cắt nhau tại O. Chứng minh : $\widehat{EOF} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C})$.

§ 7. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG (HAY GÓC) KHÔNG BẰNG NHAU

Muốn chứng minh hai đoạn thẳng hoặc hai góc không bằng nhau, ta có thể dựa vào nhiều tiên đề và định lý ; quy nạp lại ta được bốn phương pháp dưới đây :

(1) Lợi dụng mối liên hệ giữa ba cạnh của tam giác hoặc định lý về góc ngoài của tam giác.

Muốn chứng minh hai đoạn thẳng không bằng nhau, mà trong giả thiết của bài ra lại không cho các góc không bằng nhau, ta thường áp dụng định lý « Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba »...

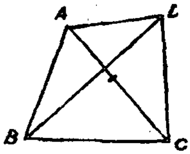
Như muốn chứng minh « tổng độ dài của bốn cạnh của một tứ giác bất kỳ *lớn hơn tổng độ dài của hai đường chéo* » ta có thể dựa vào định lý trên để chứng minh bài này, vì bài ra không nói đến các góc không bằng nhau. Dựa vào định lý, ta có :

$$AB + BC > AC$$

$$BC + CD > BD$$

$$CD + DA > AC$$

$$DA + AB > BD$$

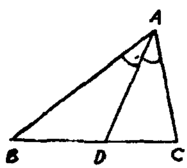


Hình 57

ta cộng các vế bên trái với bên trái, bên phải với bên phải được :

$2\,(AB + BC + CD + DA) > 2\,(AC + BD)$ chia cả 2 vế cho 2 ta sẽ chứng minh được bài ra.

Nếu bài tập không cho trước các đoạn thẳng không bằng nhau, mà phải chứng minh hai góc không bằng nhau thì ta thường áp dụng định lý « góc ngoài của một tam giác *lớn hơn* mỗi góc trong không kề với nó ».



Hình 58

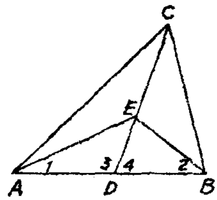
Như trong bài « cho tam giác ABC, AD là phân giác của $\widehat{A}$. Chứng minh $\widehat{ADB} > \widehat{BAD}$ ». Không cho biết đoạn thẳng nào lớn hơn đoạn thẳng nào, dựa vào định lý trên ; ta có $\widehat{ADB} > \widehat{CAD}$, rồi thay $\widehat{CAD} = \widehat{BAD}$ vào bất đẳng thức trên sẽ chứng minh được bài trên.

(2) Lợi dụng sự liên hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác. Trong một tam giác, nếu cho biết hai góc không bằng nhau, thì ta có thể chứng minh hai cạnh không bằng nhau, và ngược lại như đã áp dụng trong ví dụ 10.

(3) Lợi dụng sự liên hệ giữa hai tam giác có hai cạnh tương ứng bằng nhau. Trong hai tam giác, nếu đã có hai cạnh tương ứng bằng nhau, thì ta có thể so sánh hai cạnh thứ ba khi biết tương quan giữa hai góc tạo bởi hai cặp cạnh kia.

Ví dụ 31 : G.T. : Trên trung tuyến CD của $\triangle ABC$ lấy một điểm E bất kỳ, nối BE và AE, $\widehat{B} > \widehat{A}$

K. L. : $\widehat{2} > \widehat{1}$



Hình 59

Suy xét : Muốn chứng minh $\widehat{2} > \widehat{1}$, phải có AE > BE. Ta biết AE, BE là hai cạnh của hai tam giác AED và BED đã có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một, nên muốn chứng minh AE > BE, ta phải chứng minh $\widehat{3} > \widehat{4}$ trước. Nhưng $\widehat{3}$ và $\widehat{4}$ lại là hai góc của hai tam giác ACD và BCD đã có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một, nên muốn có $\widehat{3} > \widehat{4}$, thì phải có AC > BC. Từ giả thiết $\widehat{B} > \widehat{A}$, ta có thể suy ra AC > BC

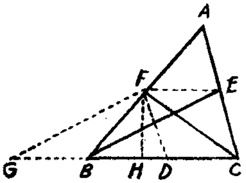
Chứng minh	*Lý do*
1. Vì $\widehat{B} > \widehat{A}$	1. Giả thiết của bài ra
2. Cho nên AC > BC	2. Trong $\triangle$ ABC, đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.
3. AD = DB, CD = CD	3. Theo giả thiết ; không đổi.
4. Vậy $\widehat{3} > \widehat{4}$	4. Vì $\triangle$ ACD và $\triangle$ BCD có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một, cạnh thứ ba nào lớn hơn thì góc đối diện với cạnh đó cũng lớn hơn.
5. Vì AD = DB, ED = ED	5. Giống 3.
6. Nên AE > BE	6. Vì $\triangle$ AED và $\triangle$ BED, có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một, cạnh thứ ba nào đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn.
7. Vậy $\widehat{2} > \widehat{1}$	7. Trong $\triangle$ ABE, đối diện với cạnh lớn là góc lớn hơn.

(4) Lợi dụng hình chiếu của hai đường xiên. Ta có thể dùng định lý «trong hai đường xiên, đường nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn» hoặc định lý đảo của nó để chứng minh hai đoạn thẳng không bằng nhau.

Ví dụ 32 : Trong một tam giác, trung tuyến thuộc cạnh lớn thì ngắn hơn trung tuyến thuộc cạnh bé.

G.T. : Cho Δ ABC, AB > AC,
BE và CF là các trung tuyến

K.L. : BE > CF



Hình 60

Suy xét : Nếu kéo dài CB một đoạn BG = EF thì tứ giác FGBE là ▱ (vì FE // GC và EF = = GB), ta có GF = BE, bây giờ chỉ cần chứng minh thêm GF > CF. Vì GF và CF là hai đường xiên hạ từ F xuống GC nên ta dựng thêm FH $\perp$ GC. Muốn có GF > CF, ta chứng minh GH > CH. Ta dựng FD // AC có GB = FE = DC, bây giờ nếu ta chứng minh được BH > DH thì GH > CH. Vì BF = $\frac{1}{2}$ AB, DF = $\frac{1}{2}$ AC, mà AB > AC nên ta có BF > DF, và BH > DH có thể chứng minh được. Bạn đọc thử dựa vào kết quả phân tích ở trên để chứng minh bài này.

Khi dùng bốn phương pháp trên để chứng minh hai góc hay hai đoạn thẳng không bằng nhau, ta thường phải dời chỗ đoạn thẳng hay góc đến một vị trí mới, để các yếu tố trong giả thiết và kết luận trở nên có liên hệ với nhau. Ta thường dùng ba phương pháp sau đây để dời vị trí của các đoạn thẳng hay góc đến một vị trí mới :

(1) Phép tịnh tiến. Tịnh tiến một đoạn thẳng nghĩa là dời đoạn thẳng đến một vị trí mới và song song với đoạn thẳng cũ, làm cho đoạn thẳng này và một đoạn thẳng khác trở nên có liên hệ với nhau, như trong ví dụ 32, ta dời BE đến GF.

(2) Phép đối xứng qua một đường thẳng. Ta cố định một đường thẳng, rồi gấp hình vẽ theo đường thẳng đó. Làm như vậy cũng có thể dời đoạn thẳng hay góc đến một vị trí mới.

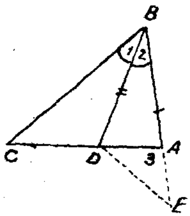
Ví dụ 33 : Một tam giác có hai cạnh không bằng nhau, thì đường phân giác của góc xen giữa hai cạnh đó cũng chia cạnh đối diện với góc đó ra hai phần không bằng nhau, phần đoạn thẳng nối liền với cạnh lớn dài hơn phần đoạn thẳng nối liền với cạnh bé.

G.T. : Cho $\triangle ABC$, $BC > AB$.

BD là phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D.

K.T. : $CD > DA$.

Suy xét : CD và DA là hai cạnh của hai tam giác BCD và BAD, nhưng hai tam giác này không có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một, nên không thể dùng định lý về hai tam giác có hai cạnh tương ứng bằng nhau để chứng minh $CD > DA$. Nếu ta kéo dài cạnh ngắn BA đến E, sao cho $BE = BC$, thì sẽ được $\triangle BCD = \triangle BED$, và rút ra được $CD = DE$. Như vậy là ta đã gấp hình vẽ theo đường BD, dời đoạn CD đến vị trí DE. Vì DE, DA là hai cạnh của $\triangle ADE$, nên muốn chứng minh $DE > DA$ phải có $\widehat{3} > \widehat{E}$. Theo phép dời của ta thì $\widehat{E} = \widehat{C}$, nên ta chỉ cần chứng minh $\widehat{3} > \widehat{C}$ là được. Nhìn vào hình vẽ ta thấy $\widehat{3}$ là góc ngoài $\triangle ABC$, nên $\widehat{3}$ phải lớn hơn $\widehat{C}$. Phần chứng minh chúng tôi dành cho bạn đọc luyện tập.



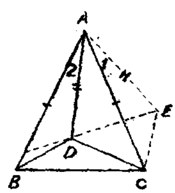
Hình 61

(3) Phép quay. Ta cố định một điểm, cho hình vẽ quay quanh điểm đó đến một vị trí mới, làm cho các đoạn thẳng trở nên có liên hệ.

Ví dụ 34 : G.T. : Cho $\triangle ABC$, $AB = AC$. D là một điểm tùy ý trong $\triangle ABC$,

$\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$

K.L. : $DC > DB$.



Hình 62

Suy xét : Muốn chứng minh $DC > DB$, đáng lẽ ra ta có thể chứng minh $\widehat{DBC} > \widehat{DCB}$, nhưng bất đẳng thức này không sao chứng minh được, và giả thiết

$\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$ ta cũng không lợi dụng được. Ta phải dời vị trí của một bộ phận hình vẽ, dựng $\widehat{1} = \widehat{2}$, lấy AE = AD, sẽ được $\triangle ACE = \triangle ABD$. Như vậy là ta đã cho $\triangle ABD$ quay quanh điểm A cố định đến vị trí mới trùng với $\triangle ACE$, để dời BD đến vị trí EC. Từ $\widehat{AEC} > \widehat{ADC}$, ta có thể chứng minh DC > EC một cách dễ dàng.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng $\widehat{1} = \widehat{2}$, lấy AE = AD nối DE, EC	1. Theo phép dựng hình cơ bản.
2. ta có $\triangle ABD = \triangle ACE$	2. Suy từ giả thiết và 1 ; c.g.c.
3. $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$	3. Góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau.
4. ta có : $\widehat{AEC} > \widehat{ADC}$	4. Thay 3 vào bất đẳng thức của giả thiết.
5. nhưng $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$	5. Góc đáy của tam giác cân thì bằng nhau.
6. Nên $\widehat{CED} > \widehat{CDE}$	6. Lấy các vế tương ứng của 4 và 5 trừ nhau.
7. Vậy DC > CE	7. Trong tam giác ; đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.
8. CE = DB	8. Cạnh tương ứng của 2 tam giác bằng nhau.
9. Vậy DC > DB	9. Thay 8 và 7.

BÀI TẬP 7

1. Trong hình thang ABCD, BC là đáy lớn và AB > DC. Chứng minh $\widehat{C} > \widehat{B}$.

2. Cho $\triangle ABC$, AB > AC, trên đường phân giác của $\widehat{A}$ lấy một điểm D tùy ý. Chứng minh AB − AC > DB − DC.

3. Chứng minh rằng đoạn thẳng nối liền các trung điểm một cặp cạnh đối này của một tứ giác, ngắn hơn một nửa tổng của hai cạnh đối kia.

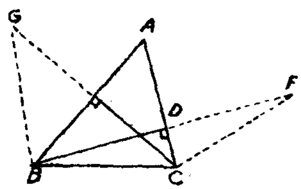
Chỉ dẫn : Theo cách vẽ đường phụ của bài (5) trong bài tập 2.

4. Nếu một tam giác có hai cạnh không bằng nhau, thì góc tạo thành giữa trung tuyến của cạnh thứ ba với cạnh lớn, nhỏ hơn góc tạo thành giữa trung tuyến đó với cạnh bé.

Chỉ dẫn : Gọi D là trung điểm của BC, trong $\triangle ABC$, ta cố định D (làm tâm) đem $\triangle ABD$ quay 180^0.

5. Lấy một điểm P trong $\triangle ABC$, sao cho $CP = CB$. Chứng minh $AB > AP$.

Chỉ dẫn : dựng phân giác của $\widehat{BCP}$, rồi dùng phép đối xứng qua đường thẳng để dời hình vẽ.



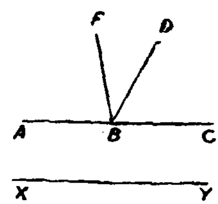
Hình 63

6. Chứng minh rằng đường cao trên cạnh lớn của một tam giác bất kỳ ngắn hơn đường cao trên cạnh nhỏ (Hình 63)

Chỉ dẫn : Kéo dài BD đến F, sao cho $DF = BD$, kéo dài CE đến G sao cho $EG = CE$

7. Kéo dài cạnh BC của $\triangle ABC$ đến E sao cho $CE = AB$; kéo dài CB đến D, sao cho $BD = AC$; $AB > AC$. Chứng minh $AD > AE$.

§ 8. CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG (THẲNG HÀNG)



Hình 64

Người ta thường dùng ba phương pháp sau để chứng minh các điểm thẳng hàng:

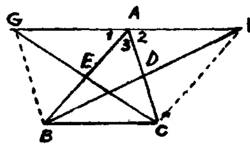
(1) Lợi dụng góc bù : Như trên hình 64, muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta nối AB, BC, rồi ta lợi dụng những đường BD, BF đi qua B để chứng minh $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 180^0$, hoặc $\widehat{ABF} + \widehat{FBD} + \widehat{DBC} = 180^0$. Bạn sẽ thấy ứng dụng của phương pháp này trong cách giải I của ví dụ 35 và trong ví dụ 36.

(2) Lợi dụng đường song song. Vẫn lấy ví dụ ở hình trên, ta có thể chứng minh $AB \parallel xy$ và $BC \parallel xy$, rồi dựa vào tiên đề về đường thẳng song song mà chứng minh $AC \parallel xy$ và A, B, C phải thẳng hàng. Ta sẽ thấy ứng dụng của phương pháp này trong cách giải II của ví dụ 35.

Ví dụ 35 :

G.T. : Cho $\triangle ABC$, kéo dài trung tuyến BD đến F sao cho DF = BD và trung tuyến CE đến G sao cho EG = CE.

K.L. : G, A, F thẳng hàng.



Hình 65

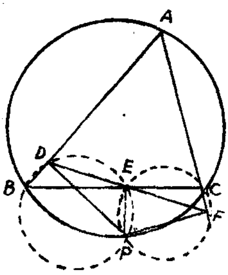
Suy xét : 1) Nối GA, AF, ta phải chứng minh GA và AF hợp thành một đường thẳng. Muốn vậy thì $\hat{1} + \hat{3} + \hat{2}$ phải bằng 180^0. Trong hai $\triangle$ GAE và $\triangle$ CBE, theo giả thiết thì đã có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một, và có hai góc đối đỉnh, nên hai tam giác này bằng nhau. Từ đó, ta suy ra $\hat{1} = \widehat{ABC}$. Lý luận tương tự ta có $\hat{2} = \widehat{ACB}$. Vì $\widehat{ABC} + \hat{3} + \widehat{ACB} = 180^0$, nên $\hat{1} + \hat{3} + \hat{2} = 180^0$.

Suy xét : 2) Muốn chứng minh GA và AF hợp thành một đường thẳng, thì ta phải chứng minh $GA \parallel BC$, $AF \parallel BC$. Từ giả thiết ta biết AB và GC cắt nhau tại trung điểm, nên tứ giác GBCA là ▱, vậy $GA \parallel BC$. Còn $AF \parallel BC$ cũng chứng minh tương tự.

Các bạn viết lấy phần chứng minh.

Chú ý : Hai đoạn GA và AF nên vẽ một đoạn to nét hơn để khỏi lầm GA và AF là một đường thẳng cho trước.

Ví dụ 36 : Từ một điểm trên đường tròn ngoại tiếp của một tam giác bất kỳ hạ các đường vuông góc xuống ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng chân của ba đường vuông góc đó thẳng hàng (đường thẳng này gọi là đường thẳng Simson)



Hình 66

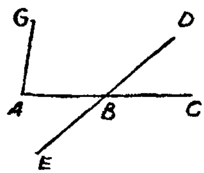
G.T. : P là một điểm trên đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$, dựng $PD \perp AB$, $PE \perp BC$, $PF \perp AC$

K.L. : D, E, F thẳng hàng.

Suy xét : Muốn cho ba điểm D,E,F thẳng hàng thì ta phải chứng minh $\widehat{DEP} + \widehat{PEF} = 180^0$; tứ giác EPFC cũng nội tiếp được trong đường tròn, ta có $\widehat{PEF} = \widehat{PCF}$, cho nên ta chỉ cần chứng minh thêm $\widehat{PCF} = \widehat{DBP}$ nữa là được. Ta có thể chứng minh cặp góc này bằng nhau sau khi phân tích tứ giác ABPC nội tiếp.

Chứng minh	*Lý do*
1. Nối DE, EF, BP, PC	1. Qua hai điểm kẻ được một đường thẳng
2. Vì $\widehat{BDP} = \widehat{BEP} = 90^0$	2. Góc tạo nên bởi hai đường thẳng ⊥.
3. Nên tứ giác BPED nội tiếp	3. D và E nhìn BP dưới góc 90^0 không đổi.
4. $\widehat{CEP} + \widehat{CFP} = 180^0$	4. Giống 2.
5. Tứ giác EPFC nội tiếp	5. Tứ giác có hai góc đối bù nhau thì nội tiếp.
6. Vì $\widehat{DBP} + \widehat{DBP} = 180^0$ E	6. Góc đối của tứ giác lồi nội tiếp bù nhau.
7. Và $\widehat{DBP} = \widehat{PCF}$	7. Hai góc cùng bù với $\widehat{ACP}$.
8. $\widehat{PCF} = \widehat{PEF}$	8. Góc nội tiếp cùng chắn một cung.
9. Nên ta có $\widehat{DEP} + \widehat{PEF} = 180^0$	9. Suy từ 7, 8, 6 (thay 7, 8 vào 6)
10. DE và EF hợp thành một đường thẳng	10. Hai góc kề bù nhau, thì cạnh ngoài hai góc đó hợp thành đường thẳng.
11. Vậy D, E, F thẳng hàng	11. Đổi cách nói ở 10.

(3) Lợi dụng góc bằng nhau. Bạn hãy xem hình 67, muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta nối AB, BC rồi dựa vào đường thẳng DE đi qua B cho trước chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$.

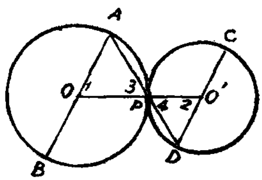


Hình 67

Hay ta nối AB, AC (khi chưa chứng minh AB, BC hợp thành đường thẳng, ta phải coi AC không đi qua B), ta dựa vào đường thẳng AG đi qua A cho trước ? chứng minh $\widehat{GAB} = \widehat{GAC}$.

Ví dụ 37 : G.T : Cho hai đường tròn tâm O và O' tiếp xúc với nhau tại P, hai đường kính AB và CD của hai đường tròn song song với nhau.

K.L. : (a) Khi hai đường tròn tiếp xúc ngoài, thì AD và BC cắt nhau tại P.



Hình 68

Suy xét : Muốn chứng minh AD và BC cắt nhau tại P, thì ta phải chứng minh ba điểm A, P, D thẳng hàng và ba điểm B, P, C cũng thẳng hàng. Vì đường nối tâm OO' đi qua tiếp điểm P, ta nối AP, DP ; nếu $\hat{3} = \hat{4}$ thì ta có A, P, D thẳng hàng. Để đạt mục đích đó, ta tìm xem $\hat{3}$ và $\hat{4}$ có liên hệ với góc nào nữa không, ta thấy $\hat{3} = \hat{A}$; $\hat{4} = \hat{D}$ là một cặp góc so le trong của hai đường song song hợp thành với một cát tuyến, nên chúng bằng nhau. Nói như vậy thì sai to, vì APD chưa chắc đã là đường thẳng, nếu bạn coi A và D là góc so le trong, thì mặc nhiên bạn đã công nhận APD là đường thẳng rồi, còn mất công chứng minh A, P, D thẳng hàng làm gì nữa. Đấy là một sai lầm ta thường phạm khi chứng minh ba điểm thẳng hàng, bạn đọc cần đặc biệt lưu ý.

Vì OPO' là một đường thẳng nên $\hat{1} = \hat{2}$, hai góc này lại là góc ở đỉnh của tam giác cân, $\hat{3}$ và $\hat{4}$ là góc đáy, nên $\hat{3} = \hat{4}$ có thể chứng minh được.

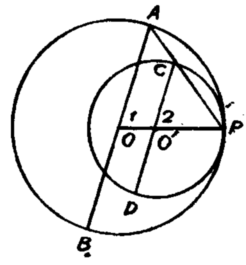
Chứng minh	*Lý do*
1. Nối AP, DP, OO'	1. Qua 2 điểm kẻ được một đường thẳng.
2. thì OO' qua P	2. Đường nối tâm của hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì đi qua tiếp điểm.

3. $\widehat{1} = \widehat{2}$	3. Góc so le trong của 2 đường // hợp thành với cát tuyến OO'.
4. Nhưng $\widehat{1} + \widehat{3} + \widehat{A} = \widehat{2} + \widehat{4} + \widehat{D}$	4. Tổng 3 góc trong của một tam giác bằng 180^0.
5. Nên $\widehat{3} + \widehat{A} = \widehat{4} + \widehat{D}$	5. Suy từ 3 và 4.
6. Vì $\widehat{3} = \widehat{A}$, $\widehat{4} = \widehat{D}$	6. Các bán kính của một đường tròn bằng nhau ; góc đáy của tam giác cân bằng nhau.
7. Nên $\widehat{3} = \widehat{4}$	7. Thay 6 vào 5 rồi chia đôi.
8. Vậy AP và PD hợp thành một đường thẳng	8. Vì $\widehat{3} + \widehat{APO'} = 180^0$ nên $\widehat{4} + \widehat{APO'} = 180^0$
9. Nghĩa là AD qua P	9. Vì A, P, D thẳng hàng.
10. Tương tự ta có BC qua P	10. Theo cách chứng minh từ 1 — 9.
11. Vậy AD, BC cắt nhau tại P	11. Suy từ 9 và 10.

K. L. : (b) Nếu hai đường trên tiếp xúc trong, thì AC, BD cũng cắt nhau tại P.

Suy xét : Ta nối AP, CP chứng minh $\widehat{APO} = \widehat{CPO}$, rồi ta chứng minh hai đường AP và CP trùng nhau bằng lý luận : nếu hai góc bằng nhau có một cạnh chung, miền trong của hai góc ở cùng một phía của cạnh chung đó, thì hai cạnh kia phải chồng khít lên nhau. Nên AP và CP hợp thành một đường thẳng, và AC kéo dài phải qua P. Bạn thử dựa vào sự suy xét trên để chứng minh phần (b) của kết luận (Hình 69).

BÀI TẬP 8



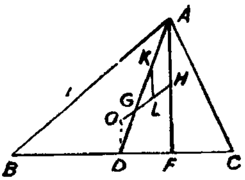
Hình 69

1. Hai đường tròn tâm O và O' giao nhau tại A và B, có đường kính là AC và AD. Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng. Trường hợp C và D ở về cùng một phía của B, và trường hợp D và C ở về hai phía của B thì cách chứng minh có gì khác nhau ?

2. Chứng minh rằng các trung điểm của hai cạnh bên và của hai đường chéo trong hình thang cùng nằm trên một đường thẳng (thẳng hàng).

3. Cho $\triangle ABC$, từ A hạ các đường vuông góc xuống phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{B}$. Chứng minh rằng chân của hai đường vuông góc và các trung điểm của các cạnh AB, AC thẳng hàng.

4. Chứng minh rằng trọng tâm, trực tâm và tâm của đường tròn ngoại tiếp với một tam giác thẳng hàng (đường thẳng này gọi là đường thẳng Ơ-le).



Hình 70

Chỉ dẫn : Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ; G là trọng tâm (AG = 2GD) và H là trực tâm tam giác ; nối OG, GH. Từ ví dụ 7, ta biết AH = 2OD, gọi K và L là trung điểm của AG và GH chứng minh $\triangle ODG = \triangle LKG$.

5. Từ một điểm trên nửa đường tròn ta hạ đường vuông góc xuống đường kính ; dựng một đường tròn khác sao cho nó vừa tiếp xúc với nửa đường tròn vừa tiếp xúc với đường đó. Chứng minh rằng hai tiếp điểm và một đầu đường kính của nửa đường tròn cho trước thẳng hàng.

6. Cho ba đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau tại ba điểm A, B, C ; nối AB và AC ; AB kéo dài cắt một đường tròn ở D, AC kéo dài cũng cắt đường tròn ấy tại E. Chứng minh DE chính là đường kính của đường tròn ấy.

Chỉ dẫn : Ta chứng minh D, E và tâm của đường tròn đó thẳng hàng. Gọi O là tâm của đường tròn có hai điểm D, E, thì trước tiên ta phải chứng minh DO, OE song song với đường nối tâm của hai đường tròn kia.

7. Cho hai đường tròn tâm O và O' ở ngoài nhau. Chứng minh rằng OO' thẳng hàng với hai giao điểm của hai tiếp tuyến chung trong và ngoài của hai đường tròn đó.

Chỉ dẫn : Hai đường phân giác của hai góc đối đỉnh hợp thành một đường thẳng, mỗi góc chỉ có một đường phân giác.

§ 9. CHỨNG MINH CÁC ĐƯỜNG CÙNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM

(đồng quy tại một điểm)

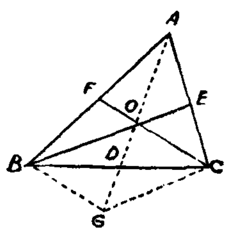
Chứng minh các đường cùng đi qua một điểm cho trước, có năm phương pháp sau đây :

(1) Chứng minh giao điểm của hai đường thẳng nằm trên đường thứ ba. Muốn chứng minh ba đường cùng đi qua một điểm, đầu tiên ta xác định vị trí giao điểm của hai đường trước, rồi chứng minh giao điểm đó nằm trên đường thứ ba. Khi chứng minh các đường đồng quy trong tam giác (đường trung tuyến, trung trực, phân giác, đường cao) ta đã áp dụng phương pháp này. Trong sách giáo khoa có ghi đầy đủ phần chứng minh các đường đồng quy, ở đây không nhắc lại nữa.

(2) Dựng đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng cho trước, rồi chứng minh đường này trùng với đường thứ ba. Bạn sẽ thấy phương pháp này trong cách giải I của ví dụ 38.

(3) Qua giao điểm của hai đường thẳng cho trước dựng hai đường thẳng khác, rồi chứng minh hai đường này hợp thành đường thẳng thứ ba. Phương pháp này được áp dụng trong cách giải II của ví dụ 38.

Ví dụ 38 : Ba đường trung tuyến của tam giác gặp nhau tại một điểm.



Hình 71

G.T. : cho △ ABC. D, E, F là trung điểm của BC, CA, AB.

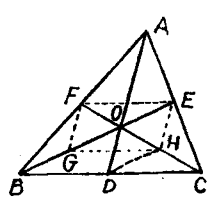
K.L. : AD, BE, CF gặp nhau tại một điểm.

Cách giải I.

Chứng minh	*Lý do*
1. Gọi O là giao điểm của BE và CF ; nối AO và kéo dài đến G, sao cho AO = OG, AG cắt BC tại D'	1. Theo phép dựng hình cơ bản.
2. Vì AF = FB, AO = OG.	2. Theo giả thiết và 1.
3. FC' // BG'.	3. Đoạn thẳng nối liền trung điểm 2 cạnh của tam giác song song với cạnh thứ 3.
4. Tương tự ta có : EB // CG	4. Giống cách chứng minh 1 — 3.
5. Nên tứ giác BGCO là ▱	5. Tứ giác có hai cặp cạnh đối song son với nhau từng đôi một là ▱
6. BD' = CD'.	6. Đường chéo của ▱ cắt nhau tạ trung điểm.
7. Nghĩa là D' là trung điểm của BC	7. Theo định nghĩa của trung điểm
8. Nhưng D cũng là trung điểm của BC.	8. Giả thiết.
9. Vậy D' phải trùng với D, AD' phải trùng với AD, hay nói cách khác trung tuyến AD qua O, O là giao điểm của 3 đường trung tuyến.	9. Vì một đoạn thẳng chỉ có một trun điểm, và qua 2 điểm chỉ kẻ đượ một đường thẳng.

Cách giải II.

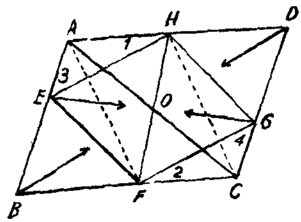
Chứng minh	*Lý do*
1. Gọi O là giao điểm của BE và CF, nối AO, DO, gọi G là trung điểm của BO, H là trung điểm của CO ; nối FE, GH, FG, EH, DH.	1. Mỗi đoạn thẳng đều có một trung điểm theo phép dựng hình cơ bản.



Hình 72

2. Vì $AF = FB$, $AE = EC$	2. Giả thiết.
3. Nên $FE \overset{//}{=} \frac{1}{2}\ BC$	3. Đoạn thẳng nối liền trung điểm 2 cạnh của tam giác $\overset{//}{=} \frac{1}{2}$ cạnh thứ ba.
4. $OG = GB$, $OH = HC$	4. Suy từ 1.
5. $GH \overset{//}{=} \frac{1}{2}\ BC$	5. Giống 3,
6. $FE \overset{//}{=} GH$	6. 2 đoạn thẳng cùng $\overset{//}{=}$ một đoạn thứ ba thì $\overset{//}{=}$.
7. Tứ giác FGHE là ▱	7. Tứ giác có 2 cạnh $\overset{//}{=}$ là ▱
8. Ta có : $GO = OE$	8. Đường chéo của ▱ cắt nhau tại trung điểm.
9. Vì $OH = HC$; $BD = DC$	9. Suy từ 1 và giả thiết.
10. Nên $DH \overset{//}{=} \frac{1}{2}\ BO \overset{//}{=} GO \overset{//}{=} OE$	10. Giống 3; suy từ 1 và 8.
11. Ta có tứ giác ODHE là ▱	11. Giống 7.
12. $EH // OD$	12. Cạnh đối của ▱ // với nhau.
13. Nhưng $EH // AO$	13. Đoạn thẳng nối liền trung điểm 2 cạnh của tam giác CAO, nên // với cạnh thứ ba.
14. Vậy AO và OD phải cùng nằm trên một đường thẳng nghĩa là AD là trung tuyến.	14. Qua một điểm ngoài một đường thẳng, chỉ dựng được một đường // với đường thẳng cho trước.
15. Ba trung tuyến AD, BE, CF gặp nhau tại O	15. Suy từ 1 và 14.

(4) Chứng minh các đường đều đi qua một điểm cố định : Khi cần chứng minh từ ba đường trở lên đi qua một điểm cho trước, người ta thường trừ ra một đường, rồi chứng minh các đường khác đều đi qua một điểm cố định trên đường đó.



Hình 73

Ví dụ 39 : Nếu một hình bình hành nội tiếp trong một hình bình hành khác, thì bốn đường chéo gặp nhau tại một điểm.

G. T. : Các đỉnh của ▱ EFGH nằm trên các cạnh của ▱ ABCD.

K. L. : AC, BD, EG, FH gặp nhau tại một điểm.

Suy xét : Vì hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, nên giao điểm của hai đường chéo AC và BD là trung điểm O của đoạn AC. Muốn chứng minh bốn đường chéo cùng đi qua một điểm, ta chỉ cần chứng minh BD, EG, FH đều đi qua trung điểm O của AC là được.

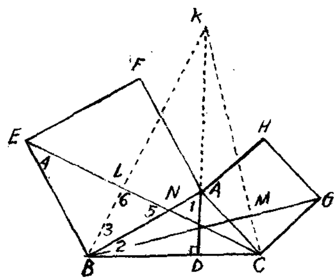
Chứng minh	*Lý do*
1. Vì HE // FG, HA // FC, AE // CG	1. Cạnh đối của ▱ // với nhau.
2. Nên $\widehat{1} = \widehat{2}$, $\widehat{3} = \widehat{4}$	2. Góc có cạnh tương ứng // ngược chiều thì bằng nhau.
3. Và HE = FG	3. Cạnh đối của ▱ bằng nhau.
4. ta có △ AEH = △ CGF	4. g. c. g.
5. AH = FC	5. Hai cạnh tương ứng của 2 tam giác bằng nhau thì bằng nhau.
6. Tứ giác AFCH là ▱	6. Tứ giác có một cặp cạnh đối // và = là ▱
7. AC và FH cắt nhau tại O và O là trung điểm của AC và FH	7. Đường chéo của ▱ cắt nhau tại trung điểm.
8. Nhưng BD và AC cũng cắt nhau tại trung điểm của AC là O ; và EG và FH cũng cắt nhau tại trung điểm của FH là O và cũng là trung điểm của AC.	8. Giống 7.
9. Vậy AC, BD, EG, FH đều đi qua trung điểm của AC là O	9. Suy từ 7 và 8

(5) Lợi dụng định lý về các đường đồng quy trong tam giác.

Muốn chứng minh ba đường cùng đi qua một điểm cho trước, ta biến đổi hình vẽ, làm cho ba đường cho trước trong hình cũ trở thành các đường đồng quy trong hình mới. Ví dụ như khi chứng minh ba đường cao trong tam giác gặp nhau tại một điểm (trong sách giáo khoa), người ta biến đổi hình vẽ, làm cho ba đường cao của tam giác cũ trở thành ba đường trung trực của một tam giác mới, rồi dựa vào định lý ba đường trung trực trong tam giác đồng quy tại một điểm để chứng minh ba đường cao của một tam giác đồng quy. Dưới đây nêu thêm một ví dụ :

Ví dụ 40 : G.T. : Lấy hai cạnh AB và AC của $\triangle ABC$ làm cạnh, dựng các hình vuông ABEF, ACGH ra phía ngoài của tam giác và $AD \perp BC$.

K.L. : AD, BG, CE gặp nhau tại một điểm.

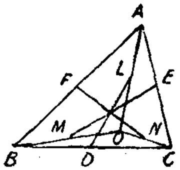


Hình 74

Suy xét : Ta biết cách vẽ thêm đường phụ cho bài này qua sự gợi ý của ví dụ 12 và ví dụ 23. Ta kéo dài DA đến K, sao cho AK = BC, nối BK, CK. Theo cách chứng minh ở ví dụ 12, ta chứng minh $\widehat{FAK} = \hat{2}$, cộng thêm 90^0 vào hai vế của đẳng thức trên ta được $\widehat{BAK} = \widehat{EBC}$ và ta chứng minh được $\triangle BAK = \triangle EBC$, rút ra được $\hat{3} = \hat{4}$. Rồi lại dùng phương pháp trong ví dụ 23, chứng minh $CE \perp BK$ và $BG \perp CK$. Cuối cùng KD, BM, CL trở thành ba đường cao của $\triangle KBC$, ta đã biết ba đường cao của tam giác gặp nhau tại một điểm, nên AD, BG, CE phải gặp nhau tại một điểm.

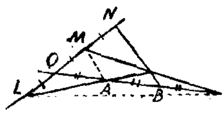
BÀI TẬP 9

1. Cho một tứ giác bất kỳ, chứng minh rằng hai đoạn thẳng nối liền các trung điểm của các cạnh đối nhau của tứ giác, và đoạn thẳng nối liền trung điểm của hai đường chéo đồng quy tại một điểm (mệnh đề này gọi là định lý Gergonne).



Hình 75

2. Cho $\triangle ABC$, O là một điểm bất kỳ trong tam giác L, M, N, là các trung điểm của AO, BO, CO ; và D, E, F là các trung điểm của BC, AC, AB. Chứng minh rằng DL, EM, FN đồng quy tại một điểm (hình 75).



Hình 76

3. Cho hai đường thẳng cắt nhau tại O, trên một đường ta lấy ba điểm A, B, C sao cho $OA = AB = BC$; trên đường kia ta lấy ba điểm L, M, N sao cho $LO = OM = MN$.

Chứng minh rằng AL, BN. CM đồng quy tại một điểm (hình 76).

Chỉ dẫn : A là trọng tâm $\triangle MLC$ nên LA đi qua trung điểm của CM.

4. Cho $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 90^0$. AD là phân giác của $\widehat{A}$; từ B, C hạ các đường vuông góc BE, CF, CE đồng quy tại một điểm.

Chỉ dẫn : Kéo dài AD đến G sao cho $AG = EF$, rồi nghiên cứu xem AD, BF, CE là những đường gì trong $\triangle GEF$.

§ 10. CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM NẰM TRÊN CÙNG MỘT ĐƯỜNG TRÒN

(đa giác nội tiếp)

Có sáu phương pháp dùng để chứng minh đa giác nội tiếp

(1) Lợi dụng các tam giác vuông có cạnh huyền chung.

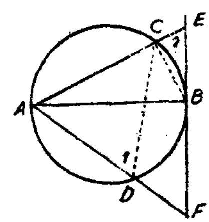
Nếu hai hay nhiều tam giác vuông có cạnh huyền chung, thì ta có thể chứng minh đa giác tạo thành bởi các đỉnh của các tam giác đó nội tiếp trong đường tròn. Như phương pháp chứng minh ở 4 của ví dụ 14.

(2) Lợi dụng hai tam giác có đáy chung và góc ở đỉnh bằng nhau (góc nội tiếp). Nếu hai tam giác có một cạnh đáy chung và hai góc đối

diện với cạnh đó bằng nhau và ở cùng một phía với cạnh đáy, thì ta có thể kết luận hai góc đó là hai góc nội tiếp trong cùng một đường tròn và cùng chắn một cung. Vậy tứ giác tạo nên bởi các đỉnh của hai tam giác đó nội tiếp. Ở 11 của ví dụ 18 và 3 của ví dụ 36, ta đều chứng minh bằng phương pháp này.

(3) Lợi dụng các góc đối diện bù nhau trong một tứ giác. Nếu một tứ giác có một cặp đối diện bù nhau, thì tứ giác đó nội tiếp trong một đường tròn. Phương pháp này được áp dụng ở 5 của ví dụ 36.

(4) Lợi dụng việc một góc ngoài của một tứ giác bằng góc trong đối diện với góc kề của nó. Nếu một tứ giác có một góc ngoài bằng góc trong đối diện với góc kề của nó, thì tứ giác đó nội tiếp.



Hình 77

Ví dụ 41: G.T. : Cho đường tròn tâm O, AB là đường kính, từ A ta kẻ hai đường thẳng cắt tiếp tuyến của đường tròn tại điểm B ở E và F, và cắt đường tròn ở C và D.

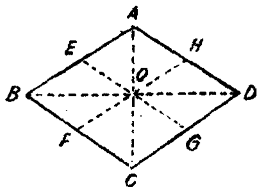
K.L. : Tứ giác CDFE nội tiếp.

Suy xét : Nối CD, ta chỉ cần chứng minh được $\widehat{1} = \widehat{2}$ là tứ giác CDFE nội tiếp. Vì $\widehat{1} = \widehat{ABC}$, nên muốn có $\widehat{1} = \widehat{2}$, ta phải chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{2}$. Từ giả thiết ta biết $\widehat{ACB} = \widehat{ABE} = 90^0$, $\widehat{ABC}$ và $\widehat{2}$ đều phụ với $\widehat{BAC}$, nên $\widehat{ABC} = \widehat{2}$, và ta chứng minh được $\widehat{1} = \widehat{2}$. Vì $\widehat{1} + \widehat{D} = \widehat{2} + \widehat{D} = 180^0$ nên tứ giác CDFE nội tiếp.

Bạn đọc thử xét trường hợp AF và AE đều ở cùng một phía với AB, vẽ hình rồi chứng minh thử.

(5) Chứng minh các đỉnh của một đa giác cách đều một điểm cố định. Nếu các đỉnh của một đa giác cách đều một điểm cố định thì các đỉnh của đa giác đó phải nằm trên đường tròn có tâm là điểm cố định và bán kính bằng khoảng cách từ điểm đó đến một đỉnh bất kỳ của đa giác.

Ví dụ 42. Chứng minh rằng nếu nối liền các trung điểm kề nhau của các cạnh một hình thoi thì ta được một tứ giác nội tiếp.



Hình 78

G. T. : ABCD là hình thoi ; E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

K. L. : Tứ giác EFGH nội tiếp.

Suy xét : Quan sát hình vẽ, ta thấy E, F, G, H có thể đều cách đều O (giao điểm của các đường chéo), ta nối O với bốn điểm đó. Ta biết đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau, và trung điểm của cạnh huyền của tam giác vuông cách đều ba đỉnh, nên $EO = \frac{1}{2} AB = OF = \frac{1}{2} BC$... Và ta chứng minh được tứ giác EFGH nội tiếp.

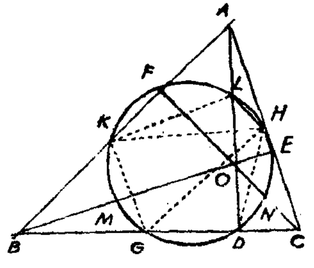
(6) Lần lượt chứng minh các đỉnh của một đa giác cùng nằm trên một đường tròn. Muốn chứng minh các đa giác (tứ giác, ngũ giác, lục giác...) khác nội tiếp ta lấy ra ba đỉnh rồi chứng minh ba đỉnh này với đỉnh thứ tư hợp thành một tứ giác nội tiếp, rồi ta lại chứng minh ba đỉnh trước và đỉnh thứ năm hợp thành một tứ giác nội tiếp, cứ lần lượt làm như vậy với đỉnh thứ sáu, thứ bảy... Vì qua ba điểm cho trước chỉ xác định được một đường tròn, nên tất cả các đường tròn ngoại tiếp đó đều chỉ là một. Dưới đây là phương pháp chứng minh một định lý nổi tiếng về đa giác nội tiếp.

Ví dụ 43 : Cho △ ABC. Chứng minh rằng : (*a*) các trung điểm của ba cạnh ; (*b*) chân của ba đường cao, (*c*) các trung điểm của ba đoạn thẳng nối liền ba đỉnh với trực tâm của tam giác, chín điểm đó (đa giác có 9 đỉnh) cùng nằm trên một đường tròn (nội tiếp trong đường tròn)

G. T.: AD, BE, CF là ba đường cao của Δ ABC. O là trực tâm của tam giác.

G, H, K, L, M, N là các trung điểm của BC, CA, AB, AO, BO, CO.

K. L.: Chín điểm G, H, K, D, E, F, L, M, N cùng nằm trên một đường tròn (đa giác GDNEHLFKM nội tiếp).



Hình 79

Suy xét: Ta chọn các trung điểm của ba cạnh là G, H, K làm gốc rồi chứng minh ba điểm này và D tạo thành một tứ giác nội tiếp, vì D, E, F đều là chân của các đường cao, nên ta có thể dùng cùng một phương pháp chứng minh ba điểm gốc cùng với E và F, tạo thành những tứ giác nội tiếp. Sau đó ta lại chứng minh ba điểm gốc và L tạo nên tứ giác nội tiếp, và M, N cũng tương tự như vậy, vì ba điểm này đều là các trung điểm của AO, BO, và CO, nên phương pháp chứng minh cũng giống nhau.

Như vậy trên sáu đường tròn đều có ba điểm gốc G, H, K nên sáu đường tròn đó chỉ là một.

Chứng minh	*Lý do*
1. Nối KH, KG, HG	1. Theo phép dựng hình.
2. thì KH//BC, KG//AC	2. Đoạn thẳng nối liền các trung điểm 2 cạnh của tam giác thì // với cạnh thứ ba.
3. KGCH là ▱	3. Tứ giác có 2 cặp cạnh đối // với nhau là ▱
4. $\widehat{GKH} = \widehat{C}$	4. Góc đối của ▱ thì bằng nhau.
5. Từ HD = HC	5. Trong tam giác vuông, trung điểm trên cạnh huyền cách đều ba đỉnh.
6. Nên $\widehat{HDC} = \widehat{C}$	6. Góc đáy của tam giác cân thì bằng nhau.
7. Vậy $\widehat{GKH} = \widehat{HDC}$	7. Suy từ 4 và 6.
8. Tứ giác GKHD nội tiếp	8. Vì tứ giác này có $\widehat{HDC} + \widehat{HDG} = 180^0$, $\widehat{HKG} + \widehat{HDG} = 180^0$.

9. Tương tự ta có: tứ giác GHFK nội tiếp tứ giác GEHK nội tiếp	9. Giống cách chứng minh từ 1 — 8
10. Ta nối KL, LH, GH	10. Giống 1
11. thì KL//BE, LH//FC	11. Giống 2.
12. Ta có: $\widehat{KLH} = \widehat{FOE}$	12. Hai góc có cạnh tương ứng // ngược chiều thì bằng nhau.
13. Nhưng $\widehat{KGH} = \widehat{A}$	13. Giống 4. Ta có thể chứng minh được.
14. $\widehat{FOE} + \widehat{A} = 180^0$	14. Tổng các góc trong của tứ giác bằng 360^0, mà $\widehat{F} = \widehat{E} = 90^0$.
15. Vậy $\widehat{KLH} + \widehat{KGH} = 180^0$	15. Thay 12, 13 vào 14.
16. Tứ giác GHLK nội tiếp	16. Góc đối của tứ giác bù nhau thì tứ giác đó nội tiếp.
17. Tương tự ta có: Tứ giác GHKM nội tiếp Tứ giác GNHK nội tiếp	17. Giống cách chứng minh từ 10 – 16.
18. Vậy G, H, K, D, E, F, L, M, N cùng nằm trên một đường tròn	18. Từ 8, 9, 16, 17 ta thấy 6 đường tròn đều đi qua 3 điểm G, H, K mà qua 3 điểm chỉ xác định một đường tròn duy nhất nên 6 đường tròn đó *chỉ là một*.

Chú ý: Có nhiều phương pháp chứng minh bài này. Bạn đọc thử chọn ba điểm khác làm gốc và nghiên cứu cách chứng minh bài này để rút kinh nghiệm.

BÀI TẬP 10

1. Từ trung điểm A của cung BC kẻ hai dây cung AD, AE bất kỳ, cắt BC tại F và G. Chứng minh tứ giác DFGE nội tiếp trong đường tròn.

2. Chứng minh rằng nếu từ một điểm dựng các tiếp tuyến với các đường tròn đồng tâm, thì tất cả các tiếp điểm tạo thành một đa giác nội tiếp.

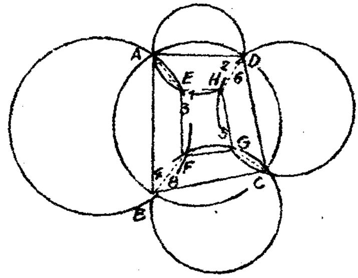
3. Cho $\triangle ABC$, AD là đường cao trên cạnh BC. Dựng các đường $DE \perp AB$, $DF \perp AC$. Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp.

4. Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, ta kẻ một đường thẳng qua A cắt hai đường tròn tại hai điểm C và D, dựng tiếp tuyến của mỗi đường tròn tại C và D, hai tiếp tuyến này cắt nhau tại E. Chứng minh rằng tứ giác BCED nội tiếp.

5. Cho một tứ giác nội tiếp trong đường tròn. Dựng bốn đường tròn khác với bán kính tùy ý, mỗi đường tròn có một dây cung là một cạnh tứ giác (hình 80). Chứng minh rằng bốn giao điểm khác của các đường tròn đó tạo thành một tứ giác mới nội tiếp.

Chỉ dẫn : Chứng minh

$$\overset{\frown}{FEH} + \overset{\frown}{FGH} = 180^0$$



Hình 80

6. Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau, từ giao điểm của hai đường chéo ta hạ các đường vuông góc xuống bốn cạnh. Chứng minh rằng bốn chân của bốn đường vuông góc tạo thành một tứ giác nội tiếp.

7. Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau, từ giao điểm của hai đường chéo hạ đường vuông góc xuống các cạnh. Chứng minh rằng chân của các đường vuông góc và các trung điểm của bốn cạnh tạo thành một bát giác nội tiếp.

Chỉ dẫn : Ứng dụng phương pháp ở ví dụ 13.

§ 11. CHỨNG MINH CÁC ĐƯỜNG TRÒN GIAO NHAU TẠI MỘT ĐIỂM
(đường tròn đồng quy)

Muốn chứng minh nhiều đường tròn cùng đi qua một điểm có hai phương pháp dưới đây :

(1) Chứng minh các đường tròn đều đi qua một điểm cố định.

Trong các bài tập dễ, ta dễ phát hiện các đường tròn cho trước có một điểm chung, ta chỉ cần chứng minh các đường tròn đều đi qua điểm đó.

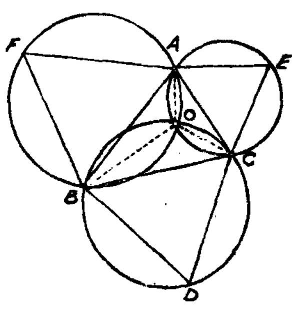
Ví dụ 44 : Chứng minh rằng bốn đường tròn có đường kính là bốn cạnh của một hình thoi giao nhau tại một điểm.

G.T. : Tứ giác ABCD là hình thoi, lấy bốn cạnh của hình thoi làm đường kính dựng bốn đường tròn.

K.L. : Bốn đường tròn giao nhau tại một điểm.

Suy xét : Xem hình ở ví dụ 42, ta thấy hai đường chéo vuông góc với nhau tại O, nên các cạnh đều là cạnh huyền của những tam giác vuông. Bốn đường tròn đều lấy các cạnh của hình thoi làm đường kính, nên các đường tròn đó đều đi qua đỉnh O của các tam giác vuông.

(2) Chứng minh giao điểm của hai đường tròn nằm trên các đường tròn khác. Muốn chứng minh các đường tròn giao nhau tại một điểm, ta cũng có thể đặt hai đường tròn giao nhau tại một điểm nào đó trước, rồi chứng minh điểm này nằm trên các đường tròn còn lại. Ta hãy xem ví dụ dưới đây.



Hình 81

Ví dụ 45 : Lấy các cạnh của một tam giác làm cạnh, dựng các tam giác đều ra phía ngoài của tam giác đó. Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác đều giao nhau tại một điểm.

G.T. : Cho △ ABC, lấy 3 cạnh dựng các tam giác đều BCD, CAE ; ABF ra phía ngoài.

K.L. : Đường tròn ngoại tiếp của 3 tam giác đều giao nhau tại một điểm.

Suy xét : Gọi O là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác CAE và tam giác ABF, ta hãy chứng minh O cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCD. Muốn vậy, ta phải chứng minh tứ giác OBDC nội tiếp, nghĩa là ta phải chứng minh $\widehat{D} + \widehat{BOC} = 180^0$. Vì giả thiết đã cho $\widehat{D} = 60^0$, nên ta chỉ cần chứng minh $\widehat{BOC} = 120^0$ là được. Vì $\widehat{E} + \widehat{COA} = 180^0$, nên ta biết $\widehat{COA} = 120^0$, tương tự ta cũng suy được $\widehat{AOB} = 120^0$ nên có thể chứng minh được $\widehat{BOC} = 120^0$

Chứng minh	*Lý do*
1. Gọi O là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp của $\triangle CAE$ và $\triangle ABF$, nối AO, BO, CO.	1. Theo phép dựng hình.
2. thì $\widehat{E} + \widehat{COA} = 180^0$ $\widehat{F} + \widehat{AOB} = 180^0$	2. Tứ giác nội tiếp (hai *góc đối* bù nhau).
3. Nhưng $\widehat{E} = 60^0$, $\widehat{F} = 60^0$	3. Mỗi góc của $\triangle$ đều là 60^0.
4. Nên $\widehat{COA} = 120^0$ $\widehat{AOB} = 120^0$	4. Lấy 2 trừ đi 3.
5. Vì $\widehat{COA} + \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 360^0$	5. Góc đầy.
6. Nên $\widehat{BOC} = 120^0$	6. Lấy 5 trừ đi 4.
7. Từ $\widehat{D} = 60^0$	7. Giống 3.
8. Ta có $\widehat{D} + \widehat{BOC} = 180^0$	8. Cộng 6 với 7.
9. Tứ giác OBDC nội tiếp	9. Tứ giác có một cặp góc đối bù nhau thì nội tiếp được trong đường tròn.
10. Vậy đường tròn ngoại tiếp của $\triangle BCD$ cũng đi qua O.	10. Suy từ 1 và 9.

Chú ý: Nếu bạn đọc tiếp tục nghiên cứu kỹ hình vẽ, sẽ thấy AO và OD hợp thành một đường thẳng nên có thể chứng minh ba đường AD, BE, CF cũng giao nhau tại O.

BÀI TẬP 11

1. Cho một tứ giác nội tiếp. Dựng bốn đường tròn, mỗi đường tròn đi qua trung điểm của hai cạnh kề nhau và đỉnh của tứ giác xen giữa hai cạnh ấy. Chứng minh bốn đường tròn đó giao nhau tại một điểm.

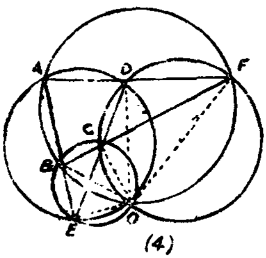
Chỉ dẫn : Bốn đường tròn này đều đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp của tứ giác.

2. Cho $\triangle ABC$, trên ba cạnh BC, CA, AB lấy ba điểm D, E, F tùy ý, dựng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, BFD, và CDE. Chứng minh ba đường tròn đó giao nhau tại một điểm (định lý điểm O).

3. Lấy hai cạnh của một tam giác làm cạnh, dựng các hình vuông ra phía ngoài của tam giác đó, dựng một hình vuông thứ ba có đường chéo là cạnh còn lại của tam giác. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của ba hình vuông đó giao nhau tại một điểm.

4. Cho một tứ giác bất kỳ, kéo dài các cạnh của tứ giác cho chúng cắt nhau tạo thành bốn hình tam giác. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp bốn tam giác đó giao nhau tại một điểm (điểm này gọi là điểm Miquel).

Chỉ dẫn : Gọi O là giao điểm các đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCE$ và $\triangle CDF$, chứng minh tứ giác AFOB và tứ giác ADOE nội tiếp (hình 82).



Hình 82

§ 12. CHỨNG MINH ĐOẠN THẲNG TỶ LỆ

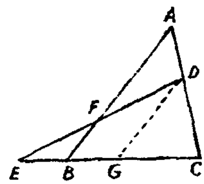
Người ta thường dùng đường song song, đường phân giác của một góc hoặc tam giác đồng dạng để chứng minh các đoạn thẳng tỷ lệ.

Trường hợp cả ba phương pháp trên đều không có hiệu lực, thì người ta tìm hai đoạn thẳng tỷ lệ thứ ba làm trung gian, để chứng minh các đoạn thẳng khác tỷ lệ với nhau. Sau đây chúng tôi sẽ giới thiệu với các bạn từng phương pháp có kèm theo ví dụ.

(1) Lợi dụng đường song song. Ta thử quan sát xem bốn đoạn thẳng trong tỷ lệ thức có phải được tạo thành bởi một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh thứ ba không. Nếu không phải, thì ta xem có đoạn thẳng nào khác có thể thay thế cho các đoạn thẳng trong tỷ lệ thức hay không.

Ví dụ 46 : G.T. : Trên AC của △ ABC lấy một điểm D, kéo dài CB đến E, sao cho BE = AD, ED và AB cắt nhau tại F.

K.L. : EF : FD = AC : BC

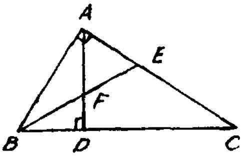


Hình 83

Suy xét : Quan sát bốn đoạn thẳng của tỷ lệ thức và hai đoạn thẳng bằng nhau cho trước trong hình vẽ, ta thấy muốn làm cho ba đoạn EF, FD, EB có mối liên hệ, thì phải từ D dựng DG // AB, như vậy, ba đoạn thẳng trên và BG là những đoạn thẳng tạo nên bởi một đường song song với một cạnh của △ EDG, và cắt hai cạnh kia của tam giác. Đồng thời bốn đoạn AC, BC, AD, BG cũng có mối liên hệ như bốn đoạn trên. Ta có chứng minh sau :

Chứng minh	*Lý do*
1. Từ D dựng DG // AB	1. Theo phép dựng hình.
2. thì EF : FD = EB : BG	2. Đường thẳng // với một cạnh của △ cắt hai cạnh kia thành những đoạn thẳng tỷ lệ.
3. hay EF : FD = AD : BG	3. Thay giả thiết vào 2.
4. Nhưng AC : BC = AD : BG	4. Giống 2.
5. Vậy EF : FD = AC : BC	5. Suy từ 3 và 4.

(2) Lợi dụng đường phân giác của một góc. Ta xem hai số hạng của mỗi tỷ số trong tỷ lệ thức, có phải là hai đoạn thẳng



Hình 84

được tạo nên bởi đường phân giác của một góc của một tam giác cắt cạnh đối diện với góc đó không ; nếu phải, ta có thể xác định tỷ số của hai đoạn đó bằng tỷ số của hai cạnh kia của tam giác.

Ví dụ 47 : G.T. : Cho Δ ABC, $\widehat{A} = 90^0$ AD $\perp$ BC, phân giác BE cắt AD tại F và AC tại E.

K.L. : DF : FA = AE : EC.

Suy xét : DF và FA là hai đoạn thẳng tạo nên bởi đường phân giác của $\widehat{B}$ trong ΔBAD cắt cạnh đối diện với $\widehat{B}$, nên tỷ số của chúng bằng BD : AB ; AE và EC cũng được tạo nên bởi phân giác của $\widehat{B}$ trong ΔABC cắt cạnh đối diện với góc đó, nên tỷ số của chúng bằng AB : BC. Vậy muốn có tỷ lệ thức trong kết luận, ta chỉ cần chứng minh BD : AB = AB : BC là được. Ta nhận thấy ΔDBA $\sim$ Δ ABC, BD và BA, AB và BC là hai cặp cạnh tương ứng của hai tam giác trên (một cặp là hai cạnh góc vuông ngắn, cặp kia là hai cạnh huyền), nên tỷ lệ thức trên có thể chứng minh được.

Chứng minh	*Lý do*
1. DF : FA = DB : AB AE : EC = AB : BC	1. Trong một tam giác, đường phân giác trong chia cạnh đối diện với nó thành hai đoạn tỷ lệ với hai cạnh kề 2 đoạn ấy.
2. Từ ΔABC $\sim$ ΔDBA	2. Đường cao trên cạnh huyền của tam giác vuông chia tam giác đó thành những tam giác mới đồng dạng với tam giác cũ.
3. Ta có BD : AB = AB : BC	3. 2 tam giác đồng dạng có các cạnh tương ứng tỷ lệ với nhau.
4. Vậy DF : FA = AE : EC	4. Hai tỷ số bằng hai tỷ số bằng nhau khác, thì bằng nhau.

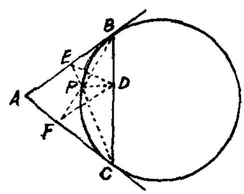
(3) Lợi dụng tam giác đồng dạng. Ta đã thấy phương pháp này trong 3, của ví dụ 47 ; ta dùng định lý « hai tam giác đồng dạng thì các cạnh tương ứng của chúng tỷ lệ với nhau » để chứng minh các đoạn thẳng tỷ lệ. Ta sẽ thấy thêm ứng dụng của phương pháp này trong cách giải I của ví dụ 48.

(4) Lợi dụng các tỷ số khác làm trung gian. Phương pháp này là chứng minh hai tỷ số trong tỷ lệ thức bằng một tỷ số thứ ba, hoặc cùng bằng hai tỷ số khác bằng nhau. Trong hai ví dụ trên đều đã ứng dụng phương pháp này ; phương pháp này cũng được ứng dụng trong cách giải II của ví dụ dưới đây.

Ví dụ 48.

G.T. : Từ một điểm A ngoài đường tròn dựng hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn đó ; trên đường tròn lấy một điểm P tùy ý, dựng $PD \perp BC$, $PE \perp AB$, $PF \perp AC$

K.L. : PE : PD = PD : PF.



Hình 85

Suy xét 1 : PE và PD là hai cạnh của $\triangle PED$, PD và DF là hai cạnh của $\triangle PDF$, nếu $\triangle PED \sim \triangle PDF$, thì bốn cạnh đó tỷ lệ với nhau. Muốn có $\triangle PED \sim \triangle PDF$, cần phải chứng minh $\widehat{PED} = \widehat{PDF}$ và $\widehat{PDE} = \widehat{PFD}$. Để chứng minh hai cặp góc này bằng nhau từng đôi một, ta phải tìm những góc khác làm trung gian. Từ những đường vuông góc đã cho trong giả thiết, ta thấy tứ giác PEBD và tứ giác PDCF nội tiếp, nên có thể tìm được những góc nội tiếp bằng nhau. Và từ tiếp tuyến đã cho trong giả thiết, ta sẽ suy ra được góc giữa tiếp tuyến và một dây qua tiếp điểm bằng góc nội tiếp chắn cung mà dây đó trương. Ta chứng minh như sau :

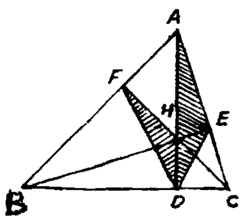
Cách giải I.

Chứng minh	*Lý do*
1. Nối ED, DF, PB, PC.	1. Theo phép dựng hình.
2. thì $\widehat{PEB} + \widehat{PDB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$	2. Góc xen giữa hai đường thẳng $\perp$ hai góc vuông cộng với nhau.

3. Tứ giác PEBD nội tiếp	3. Tứ giác có 2 góc đối bù nhau thì nội tiếp được trong một đường tròn.
4. $\widehat{PED} = \widehat{PBD}$	4. Góc nội tiếp cùng chắn một cung.
5. Tương tự $\widehat{PDF} = \widehat{PCF}$	5. Giống cách chứng minh từ 1 — 4.
6. Nhưng $\widehat{PBD} = \widehat{PCF}$	6. Góc giữa tiếp tuyến và dây qua tiếp điểm bằng góc nội tiếp chắn cung mà dây đó trương.
7. Nên $\widehat{PED} = \widehat{PDF}$	7. Suy từ 4, 5, 6.
8. Tương tự $\widehat{PDE} = \widehat{PFD}$	8. Giống cách chứng minh từ 1 — 7.
9. Vậy $\triangle PED \sim \triangle PDF$	9. Hai tam giác có 2 góc bằng nhau là 2 tam giác đồng dạng.
10. Ta có : PE : PD = PD : PF	10. Các cạnh tương ứng của tam giác đồng dạng tỷ lệ với nhau.

Suy xét 2 : Nếu chỉ nối PB, PC thì từ định lý về góc giữa tiếp tuyến và dây đi qua tiếp điểm, ta biết $\widehat{PBE} = \widehat{PCD}$. Ta chứng minh được tam giác vuông PEB đồng dạng với tam giác vuông PDC, và suy ra PE : PD = PB : PC. Với cách đó ta cũng chứng minh được PD : PF = PB : PC. Như vậy qua tỷ số trung gian PB : PC, ta chứng minh được tỷ lệ thức trong kết luận. Cách giải này đơn giản hơn cách giải I.

Cũng có khi bài ra cho bốn đoạn thẳng mà ta phải chứng minh tích của hai đoạn thẳng này bằng tích hai đoạn thẳng kia. Trong trường hợp đó, trước tiên ta phải chứng minh một tỷ lệ thức, rồi dựa vào tính chất « tích trung tỷ bằng tích ngoại tỷ » của tỷ lệ thức để chứng minh tích hai đoạn này bằng tích hai đoạn kia.



Hình 86

Ví dụ 49 : G.T. : Ba đường cao AD, BE, CF của △ ABC gặp nhau tại H.

K.L. : DA . DH = DE . DF

Suy xét : Muốn chứng minh $DA.DH = DE.DF$, ta đem lại hai đoạn thẳng ở vế trái làm ngoại tỷ, hai đoạn ở vế phải của đẳng thức làm trung tỷ, biến đổi thành tỷ lệ thức $DA : DF = DE : DH$, rồi chứng minh tỷ lệ thức này. DA, DE là hai cạnh của $\triangle DAE$. DF, DH là hai cạnh của $\triangle DFH$, ta phải tìm cách chứng minh hai tam giác này đồng dạng với nhau. Muốn cho hai tam giác đồng dạng, cần phải có hai góc tương ứng bằng nhau từng đôi một. Vì tứ giác AFDC nội tiếp, nên ta có $\widehat{DAE} = \widehat{DFH}$, và từ (4) của bài tập 2, ta có $\widehat{ADE} = \widehat{FDH}$, nên ta có thể chứng minh hai tam giác trên đồng dạng được.

Chứng minh	*Lý do*
1. 2$\triangle$ vuông FAC, DAC có cạnh huyền AC chung.	1. Giả thiết.
2. Tứ giác AFDC nội tiếp	2. Từ F và D nhìn AC dưới góc 90^0.
3. $\widehat{DAE} = \widehat{DFH}$	3. Góc nội tiếp cùng chắn 1 cung thì bằng nhau.
4. Tương tự ta có $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ $\widehat{FDH} = \widehat{FBH}$	4. Giống cách chứng minh từ 1 — 3.
5. Nhưng $\widehat{HCF}$, $\widehat{EBH}$ đều phụ với $\widehat{A}$.	5. Hai góc nhọn của tam giác vuông phụ nhau.
6. Nên $\widehat{HCE} = \widehat{FBH}$	6. Suy từ 5.
7. $\widehat{HDE} = \widehat{FDH}$	7. Suy từ 4, 5, 6.
8. Vậy $\triangle DAE \sim \triangle DFH$	8. Hai tam giác có hai góc tương ứng bằng nhau (3 và 7) từng đôi một là 2 tam giác đồng dạng.
9. $DA : DF = DE : DH$	9. Hai tam giác đồng dạng thì các cạnh tương ứng của chúng tỷ lệ với nhau.
10. Ta suy ra : $DA . DH = DE . DF$	10. Trong một tỷ lệ thức, tích trung tỷ bằng tích ngoại tỷ.

BÀI TẬP 12

1. Cho $\triangle ABC$, trên BC lấy một điểm D tùy ý, dựng DE // BA cắt AC tại E, dựng DF // CA cắt BA tại F. Chứng minh rằng $BF : FA = AE : EC$.

2. Cho một đường tròn tâm O, AB là đường kính. Từ A và B kẻ hai dây cung AF và BG cắt nhau tại E; dựng dây cung $CD \perp AB$ và đi qua E. Chứng minh $CG : GD = CF : FD$.

Chỉ dẫn : $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DB}$, $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{DA}$

3. Trên hai cạnh AB, AC của $\triangle ABC$ lấy hai điểm D và E, sao cho $BD = CE$, kéo dài DE và BC cắt nhau tại F. Chứng minh $AB : AC = FE : FD$.

4. Một hình vuông nội tiếp trong một tam giác vuông có một cạnh nằm trên cạnh huyền. Chứng minh ba đoạn thẳng trên cạnh huyền tỷ lệ với nhau.

5. Cho hai đường tròn tâm A và tâm B tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm P. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung ngoài CD là đoạn thẳng trung bình nhân giữa hai đường kính của hai đường tròn.

Chỉ dẫn : Tiếp tuyến chung trong PE cắt CD tại E. Chứng minh $AP : PE = PE : PB$ trước.

6. Chứng minh rằng đường kính của đường tròn nội tiếp trong một hình thang cân là đoạn trung bình nhân giữa hai đáy của hình thang đó.

Chỉ dẫn : Giả sử cạnh bên AB của hình thang tiếp xúc với đường tròn tâm O tại E, thì AE bằng một nửa của một đáy, BE bằng một nửa của đáy kia, OE là bán kính theo cách chứng minh ở bài trên ta có thể chứng minh $AE : OE = OE : BE$.

7. Cho $\triangle ABC$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác đó, dựng tiếp tuyến AD; từ B dựng BE//AD cắt AC tại E. Chứng minh $AC : AB = AB : AE$.

8. Từ một điểm P trên đường tròn tâm O hạ PC vuông góc với dây cung AB cho trước; từ A và B hạ các đường vuông góc AD và BE xuống tiếp tuyến của đường tròn tại P. Chứng minh $AD : PC = PC : BE$.

9. Chứng minh rằng tích của hai cạnh của một tam giác, bằng tích của đường kính của đường tròn ngoại tiếp với tam giác và đường cao thuộc cạnh thứ ba.

10. Từ một điểm ngoài một đường tròn dựng hai tiếp tuyến và một cát tuyến với đường tròn. Chứng minh rằng: trong tứ giác tạo nên bởi hai tiếp điểm và hai giao điểm, tích của hai cạnh đối này bằng tích của hai cạnh đối kia.

Chỉ dẫn : Dùng các tỷ số của các đoạn thẳng tạo nên bởi tiếp tuyến và cát tuyến làm trung gian, chứng minh tỷ lệ thức trước.

§ 13. DÙNG TỶ LỆ THỨC CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU HAY HAI ĐƯỜNG SONG SONG VỚI NHAU

Trước tiên ta hãy tìm hiểu phương pháp dùng tỷ lệ thức chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau. Có bốn phương pháp sau đây:

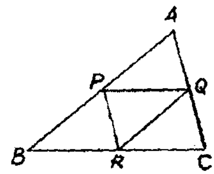
(1) Chứng minh tỷ số của hai đoạn thẳng bằng tỷ số nghịch đảo của chúng. Trong các bài tập dễ, muốn chứng minh $a = b$, thì ta có thể chứng minh $a : b = b : a$.

Ví dụ 50

G. T :

Cho $\triangle ABC$, từ một điểm P trên AB dựng PQ // BC cắt AC tại Q ; từ Q dựng QR // AB cắt BC tại R ; từ R dựng đường song song với AC, đường này lại đi qua P.

K.L : P là trung điểm của AB.

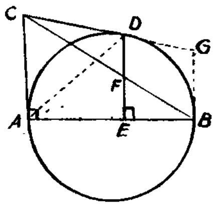


Hình 87

Suy xét : Muốn chứng minh AP = BP, ta nghiên cứu tỷ số của chúng, ta biết AP : PB = AQ : QC, PB : AP = BR : RC ; trong hai tỷ lệ thức này, tỷ số của các vế bên phải bằng nhau, nên ta có AP : PB = PB : PA.

Chứng minh	*Lý do*
1. Vì AP : PB = AQ : QC PB : AP = BR : RC	1. Đường thẳng song song với một cạnh của tam giác chia hai cạnh kia thành các đoạn thẳng tỷ lệ.
2. Nhưng AQ : QC = BR : RC	2. Giống trên.
3. Nên AP : PB = PB : AP	3. Suy từ 1 và 2.
4. $\overline{AP}^2 = \overline{PB}^2$	4. Trong một tỷ lệ thức, tích trung tỷ bằng tích ngoại tỷ.
5. Vậy AP = PB	5. Căn bậc 2 của hai đại lượng bằng nhau thì bằng nhau.

(2) Chứng minh hai đoạn thẳng tỷ lệ với hai đoạn thẳng bằng nhau cho trước. Muốn chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, ta có thể dựa vào hai đoạn thẳng bằng nhau cho trước, rồi chứng minh 4 đoạn thẳng đó tỷ lệ với nhau. Ví dụ như muốn chứng minh $x = y$, mà ta đã biết $a = b$ rồi thì ta có thể chứng minh $a : x = b : y$.



Hình 88

Ví dụ 51 :

G.T. :

Từ một điểm D trên một đường tròn dựng DE vuông góc với đường kính AB ; tiếp tuyến qua A và D cắt nhau tại C ; nối CB cắt DE tại F.

K. L. : DF = FE.

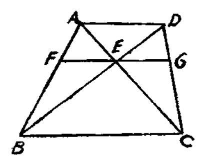
Suy xét : Từ giả thiết ta đã biết CD = CA, muốn chứng minh DF = FE, thì ta phải chứng minh CD : DF = CA : FE... (1). Tỷ số ở vế phải của (1) bằng AB : EB, còn tỷ số ở vế trái rất khó chứng minh bằng AB : EB, CD và DF là hai cạnh của tam giác CDF nên nếu dựng tiếp tuyến qua B, cắt CD kéo dài tại G thì sẽ được $\triangle$CGB đồng dạng với tam giác CDF, như vậy tỷ số ở vế trái của (1) bằng CG : GB, cũng bằng CG : DG. Từ CA // DE // GB, ta suy ra AB : EB = CG : DG, vậy tỷ lệ thức (1) cũng đúng.

Chứng minh	*Lý do*
1. Dựng tiếp tuyến qua B cắt CD kéo dài tại G.	1. Phép dựng hình.
2. Từ CA // DE // GB	2. Tiếp tuyến ⊥ với đường kính qua tiếp điểm ; những đường thẳng cùng ⊥ với một đường thẳng khác thì // với nhau.
3. Ta có $\triangle$CDF $\sim$ $\triangle$CGB	3. Đường thẳng // với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh kia tạo nên một tam giác mới $\sim$ với tam giác cũ.
4. CD : CG = DF : GB	4. Hai tam giác đồng dạng thì các cạnh tương ứng của chúng tỷ lệ với nhau.
5. Nhưng từ DG = GB	5. Các tiếp tuyến xuất phát từ một điểm ngoài đường tròn thì bằng nhau,

6. Vậy CD : CG = DF : DG	6. Thay 5 vào 4.
7. CD : DF = CG : DG	7. Hoán vị hai trung tỷ của tỷ lệ thức.
8. Và CA : FE = AB : EB	8. Giống 3 và 4.
9. CG : DG = AB : EB	9. Ba đường // cắt hai đường khác thành những đoạn thẳng tỷ lệ.
10. Vậy CD : DF = CA : FE	10. Suy từ 7, 8, 9.
11. Từ CD = CA	11. Giống 5.
12. Ta có : DF = FE	12. Trong hai tỷ số bằng nhau, nếu hai số hạng trước của hai tỷ số đó mà bằng nhau, thì 2 số hạng sau của chúng cũng bằng nhau.

(3) Chứng minh hai đoạn thẳng này và một đoạn khác tạo thành một tỷ lệ thức. Như muốn chứng minh $x = y$ mà trong bài lại không cho các đoạn thẳng bằng nhau, ta có thể dựa vào một đoạn thẳng a và chứng minh $a : x = a : y$.

Ví dụ 52. Cho một hình thang. Chứng minh rằng giao điểm của các đường chéo chia đôi đoạn thẳng nối liền hai cạnh bên đi qua giao điểm và song song với đáy của hình thang đó.



Hình 89

G.T : Trong hình thang ABCD, AD // BC, E là giao điểm của hai đường chéo, FG // BC và đi qua E.

K.L. : FE = EG.

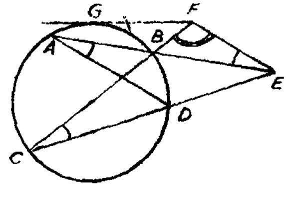
Suy xét : Trong hình vẽ không có những đoạn thẳng bằng nhau, nhưng ta thấy đoạn BC có liên quan với FE và EG, nên có thể dùng nó để chứng minh FE = EG được. Từ $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ AFE ta có : BC : FE = AB : AF. Tương tự ta cũng có BC : EG = DC : DG.

Vế phải của hai tỷ lệ thức trên bằng nhau, vì đấy là những đoạn thẳng tạo nên bởi ba đường song song cắt hai đường thẳng khác, nên những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ với nhau. Nhờ đó ta có : BC : FE = BC : EG và ta rút ra được FE = EG.

(4) Lợi dụng phương tích của một điểm đối với một đường tròn. Người ta còn dùng định lý « nếu từ một điểm bất kỳ ở ngoài một đường tròn, ta kẻ tới đường tròn đó một cát tuyến và một tiếp tuyến, thì tiếp tuyến là trung bình nhân giữa toàn cát tuyến và phần cát tuyến ở ngoài đường tròn » để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau.

Ví dụ 53 : G.T. : Kéo dài hai dây cung AB, CD của một đường tròn, chúng cắt nhau tại một điểm E ở ngoài đường tròn đó ; dựng đường song song với AD và đi qua E cắt CB kéo dài tại F, từ F dựng tiếp tuyến FG với đường tròn.

K.L. : FG = FE.



Hình 90

Suy xét : Từ định lý nêu ở trên, ta biết $\overline{FG}^2 = FC.FB$, nếu ta cũng chứng minh được $\overline{FE}^2 = FC.FB$, thì FG = FE. Muốn có $\overline{FE}^2 = FC.FB$, ta phải chứng minh FC : FE = FE : FB, để có tỷ lệ thức này ta phải chứng minh $\triangle$ FCE $\sim$ $\triangle$ FEB, điều đó rất dễ chứng minh.

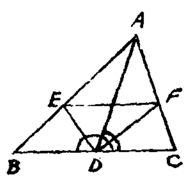
Sau đây, ta hãy tìm hiểu phương pháp dùng tỷ lệ thức để chứng minh hai đường thẳng song song với nhau, người ta thường dùng hai phương pháp dưới đây :

(1) Lợi dụng các đoạn thẳng tỷ lệ trên hai cạnh của tam giác.

Ta có thể dùng định lý « nếu hai đường thẳng định trên hai cạnh của một tam giác những đoạn thẳng tỷ lệ thì hai đường thẳng ấy song song với nhau » để chứng minh hai đường thẳng song song với nhau.

Ví dụ 54 : G.T. : AD là trung tuyến của $\triangle$ ABC dựng phân giác của $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$ cắt AB, AC tại E và F.

K.L. : EF // BC.



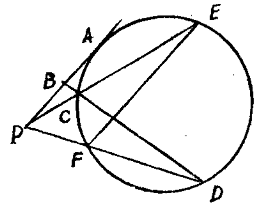
Hình 91

Suy xét : Muốn cho EF // BC, ta có thể chứng minh AE : EB = AF : FC... (1). Tỷ số ở vế trái của (1) có các số hạng là hai đoạn thẳng được tạo thành do đường phân giác của góc trong của $\triangle$ DAB chia cạnh đối diện, nên bằng AD : BD, tương tự như trên, ta cũng chứng minh được tỷ số ở vế phải của (1) bằng AD : CD. Vì AD : BD = AD : CD, nên tỷ lệ thức (1) đúng.

(2) Lợi dụng tam giác đồng dạng để chứng minh các góc bằng nhau.

Ta cũng có thể dựa vào định lý về các trường hợp đồng dạng của tam giác để chứng minh hai tam giác đồng dạng, qua đó ta rút ra được các góc tương ứng bằng nhau, nếu hai góc tương ứng nào đó là một cặp góc chiếm vị trí so le trong hay đồng vị thì có thể chứng minh hai đường thẳng song song với nhau.

Ví dụ 55 : G.T. : Từ một điểm P ngoài đường tròn dựng tiếp tuyến PA với đường tròn đó, từ trung điểm B của PA kẻ một cát tuyến BCD; PC, PD cắt đường tròn tại E và F.



K.L. : FE // PA.

Hình 92

Suy xét : Muốn cho FE // PA, ta phải có $\widehat{BPC} = \widehat{E}$. Vì $\widehat{E} = \widehat{D}$, nên ta chỉ cần chứng minh $\widehat{BPC} = \widehat{D}$. Muốn vậy ta tìm cách chứng minh $\triangle BPC \sim \triangle BDP$, vì $\widehat{BPC}$ và $\widehat{D}$ là hai góc tương ứng của hai tam giác. Hai tam giác trên có $\widehat{PBC}$ chung, muốn cho chúng đồng dạng, cần phải chứng minh thêm BC : BP = BP : BD hoặc BC : BA = BA : BD (vì BP = BA). Điều này có thể chứng minh được từ $\overline{BA}^2 = BC \cdot BD$.

BÀI TẬP 13

1. Cho $\triangle ABC$, dựng đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại D và E. Chứng minh rằng nếu có BD : DA = AE : EC thì AD = DB.

2. Trong $\triangle ABC$, các đường phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt các cạnh đối diện với 2 góc đó tại D và E. Chứng minh nếu ED // BC thì $\triangle ABC$ cân.

3. Cho $\triangle ABC$, một đường thẳng cắt AB, AC và BC kéo dài tại D, E, F. Có AE : EC = BF : CF. Chứng minh D là trung điểm của AB.

Chỉ dẫn : Dựng đường song song với BA qua C, cắt DEF tại G, rồi chứng minh CG : AD = CG : DB.

4. Cho hai đường tròn cắt nhau. Chứng minh rằng tiếp tuyến của hai đường tròn cùng xuất phát từ một điểm trên dây chung kéo dài thì bằng nhau.

5. Trên cạnh BC của $\triangle$ ABC lấy hai điểm D và E, sao cho BD = CE. Dựng đường tròn ngoại tiếp của $\triangle$ ADE. Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường tròn xuất phát từ B và C bằng nhau.

6. Trên cạnh AC của tứ giác lấy một điểm E bất kỳ dựng EF // AB, cắt BC tại F; dựng EG // AD tại G. Chứng minh FG // BD.

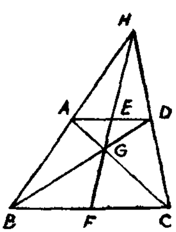
7. AB là đường kính của đường tròn tâm O; dựng tiếp tuyến tại A và B, hai tiếp tuyến này cắt một tiếp tuyến thứ ba tại điểm E của đường tròn tại C và D, AD, BC cắt nhau tại F. Chứng minh EF // CA.

8. Từ một điểm P ở ngoài đường tròn dựng tiếp tuyến PA và cát tuyến PBC, từ P kẻ một đoạn PD với phương tùy ý sao cho PD = PA, BD cắt đường tròn tại E, CD cắt đường tròn tại F. Chứng minh EF // PD.

Chỉ dẫn : Chứng minh $\triangle PDB \sim \triangle PCD$, rồi rút ra $\widehat{PDC} = \widehat{PCD}$

§ 14. DÙNG TỶ LỆ CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM THẲNG HÀNG VÀ ĐA GIÁC NỘI TIẾP

Muốn chứng minh các điểm thẳng hàng hoặc đa giác nội tiếp, có khi người ta dùng các đoạn thẳng tỷ lệ để chứng minh hai tam giác đồng dạng trước, rồi dựa vào các cặp góc bằng nhau của hai tam giác đó mà chứng minh kết luận của bài ra. Ta hãy xem ví dụ sau.



Hình 93

Ví dụ 56. Chứng minh rằng các trung điểm của hai đáy của một hình thang, giao điểm của hai đường chéo và giao điểm của hai cạnh bên kéo dài thẳng hàng.

G. T. : Cho hình thang ABCD ; E, F là các trung điểm của 2 đáy AD, BC , G là giao điểm của AC và BD ; H là giao điểm của BA, CD kéo dài.

K. L. : E, F, G, H thẳng hàng.

Suy xét : Ta chứng minh E, F, G thẳng hàng trước. Ta đã biết AGC là một đường thẳng, bây giờ nếu ta chứng minh được $\widehat{AGE} = \widehat{CGF}$ thì có thể biết được EG và GF hợp thành một đường thẳng.

Để đạt mục đích trên, ta nghiên cứu xem $\triangle$ AEG có đồng dạng với $\triangle$ CGF không. Vì đã có $\widehat{EAG} = \widehat{FCG}$ nên ta chỉ cần chứng minh thêm $AE : CF = AG : CG$ là hai tam giác trên đồng dạng. Xem hình ta thấy $\triangle ADG \sim \triangle CGB$ nên $AD : CB = AG : CG$, mà giả thiết đã cho $AE = \frac{1}{2} AD$, $CF = \frac{1}{2} CB$, nên tỷ lệ thức đầu có thể chứng minh được. Để chứng minh E, F, H thẳng hàng, ta cũng dùng phương pháp trên.

Chứng minh $\widehat{AHE} = \widehat{BHF}$.

Chứng minh : Ta nối EG, FG trong $\triangle$ ADG và $\triangle$CBG, có hai cặp góc là góc so le trong của hai đường thẳng song song hợp thành với một cát tuyến, nên chúng bằng nhau từng đôi một và ta có : $\triangle ADG \sim \triangle CBG$, $AD : CB = AG : CG$. Theo giả thiết thì $AE = \frac{1}{2} AD$, $CF = \frac{1}{2} CB$, nên ta có thể đổi tỷ lệ thức trên thành $AE : CF = AC : CG$.

Ta cũng có $\widehat{EAG} = \widehat{FCG}$ nên $\triangle AEG \sim \triangle CFG$, vì hai tam giác này có một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh tỷ lệ với nhau từng đôi một. Ta rút ra $\widehat{AGE} =$ $= \widehat{CGF}$, vậy EG và FG phải hợp thành một đường thẳng.

Ta sẽ nối EH, FH, tương tự như trên ta chứng minh được $\triangle ADH \sim \triangle BCH$, và từ $AD : BC = AH : BH$ ta suy ra $AE : BF = AH : BH$, ta có thêm $\widehat{EAH} =$ $= \widehat{FBH}$, nên $\triangle AEH \sim \triangle BFH$. Ta rút ra được $\widehat{AHE} = \widehat{BHF}$, vậy EH và FH phải cùng nằm trên một đường thẳng.

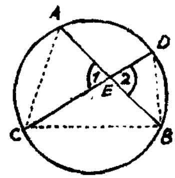
Từ những kết quả trên, ta có thể kết luận E, F, G, H thẳng hàng.

Chú ý : Sau này khi viết phần chứng minh, ta có thể viết đơn giản như ví dụ trên, nhưng phải đầy đủ, không rập khuôn một cách máy móc, những lý do dễ hiểu cũng không cần nêu, chỉ nêu những lý do quan trọng.

Ví dụ 57. G.T. : AB và CD cắt nhau tại E và $AE \,.\, BE =$ $= CE \,.\, DE$.

K.L. : Tứ giác ACBD nội tiếp.

Suy xét: Từ giả thiết ta có thể suy được AE : DE = CE : BE; bốn đoạn thẳng trong tỷ lệ thức là các cạnh tương ứng của $\triangle ACE$ và $\triangle DBE$, các cạnh ấy lại kề các góc 1 và 2 mà $\widehat{1} = \widehat{2}$, nên $\triangle ACE \sim \triangle DBE$. Ta Có $\widehat{A} = \widehat{D}$, nên tứ giác ACBD nội tiếp.



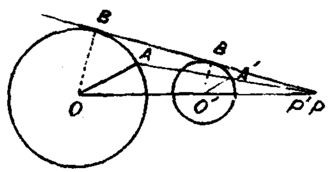
Hình 94

Chứng minh: Ta nối AC, DB, CB. Xét hai tam giác ACE và DBE, chúng có một góc đối đỉnh $\widehat{1} = \widehat{2}$, và từ giả thiết ta biết hai cạnh tương ứng của hai tam giác kề hai góc ấy tỷ lệ với nhau. Nên $\triangle ACE \sim \triangle DBE$. Ta rút ra: $\widehat{A} = \widehat{D}$. Vì A và D nhìn CB dưới một góc không đổi nên tứ giác ABCB nội tiếp.

BÀI TẬP 14

1. Hai đoạn thẳng AB, CD kéo dài cắt nhau tại E, có AE . BE = CE . DE Chứng minh tứ giác ACBD nội tiếp.

2. Cho hai đường tròn tâm O và tâm O' ở ngoài nhau, bán kính OA song song và cùng chiều với bán kính O'A', BB' là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn; kéo dài BB' và AA' chúng cắt nhau tại P. Chứng minh P, O, O' thẳng hàng.



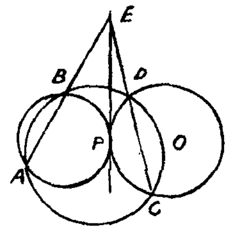
Hình 95

Chỉ dẫn: Nếu gọi P là giao điểm của BB' và OO', P' là giao điểm AA' và OO', thì từ những tam giác đồng dạng trong hình vẽ ta có OP : O'P = OB : O'B, OP' : O'P' = =OA : O'A' nên OP : O'P=OP' : O'P'. Từ tính chất của tỷ lệ thức, ta suy ra OO' : O'P = OO' : O'P', và O'P = O'P', vậy P' phải trùng với P.

3. Trong bài trên, cho OA song song và ngược chiều O'A', tiếp tuyến chung trong BB' cắt AA' tại một điểm. Chứng minh điểm đó thẳng hàng với O và O'.

4. Cho hai đường tròn tâm O và O' tiếp xúc với nhau tại P. Dây AB của một đường tròn cắt tiếp tuyến chung trong tại E ; dựng một đường tròn với bán kính tùy ý đi qua A và B, cắt đường tròn kia tại C và D. Chứng minh ba điểm C, D, E thẳng hàng.

Chỉ dẫn : Nối EC cắt đường tròn tâm O tại một điểm D', rồi ứng dụng phương pháp của bài (1) chứng minh tứ giác ABD'C nội tiếp.



Hình 96

§ 15. CHỨNG MINH CÁC QUAN HỆ VỀ TỔNG HAY HIỆU CÁC BÌNH PHƯƠNG CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG.

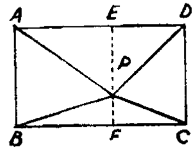
Để chứng minh các quan hệ về tổng hay hiệu các bình phương của các đoạn thẳng có hai phương pháp chủ yếu sau đây :

(1) Lợi dụng định lý Pitago. Dựa vào định lý « Trong tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông », ta có thể chứng minh các quan hệ về tổng hay hiệu các bình phương của các đoạn thẳng. Ta sẽ ứng dụng phương pháp này trong cách giải I của ví dụ 58.

(2) Lợi dụng định lý về tổng và hiệu các bình phương, của hai cạnh của tam giác. Người ta còn dùng định lý «Tổng các bình phương của hai cạnh của một tam giác bằng hai lần bình phương của trung tuyến thuộc cạnh thứ ba, cộng thêm nửa bình phương của cạnh thứ ba» để chứng minh các quan hệ về tổng hay hiệu các bình phương của các đoạn thẳng. Ta sẽ thấy phương pháp này trong cách giải II của ví dụ 58.

Ví dụ 58 : Nối liền một điểm bất kỳ ở trong (hay ngoài) hình chữ nhật với bốn đỉnh. Chứng minh rằng tổng các bình phương của các khoảng cách từ điểm đó đến hai đỉnh đối nhau này, bằng tổng các bình phương của các khoảng cách từ điểm đó đến hai đỉnh đối nhau kia.

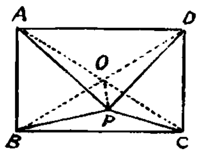
G. T.: Cho hình chữ nhật ABCD và một điểm P ở trong (hay ngoài) hình chữ nhật, nối P với các đỉnh.



K.L.: $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$

Hình 97

Suy xét 1: Ta lợi dụng bốn góc vuông của hình chữ nhật, để làm cho PA, PB, PC, PD trở thành cạnh huyền của các tam giác vuông, muốn vậy, ta dựng EF//AB và đi qua P. Từ định lý Pitago, ta suy ra:



Hình 98

$\overline{PA}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{PE}^2$, $\overline{PC}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{PF}^2$, cộng từng vế của hai đẳng thức trên với nhau ta được:

$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2$

Tương tự như trên ta có $\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 =$ $= \overline{BF}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2$. Nhưng AE = BF, CF = DE, nên ta có thể chứng minh được kết luận của bài ra một cách dễ dàng.

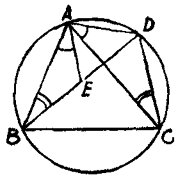
Suy xét 2: Lợi dụng tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường để chứng minh bài này. Ta nối PO, thì PO sẽ trở thành trung tuyến của $\triangle$ PAC và $\triangle$ PBD; từ định lý về tổng các bình phương của hai cạnh của một tam giác, ta có:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{2PO}^2 + \frac{\overline{AC}^2}{2},\ \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{2PO}^2 + \frac{\overline{BD}^2}{2}$$

vì AC = BD, nên đẳng thức trong kết luận của bài ra là đúng.

Muốn chứng minh tổng hay hiệu của tích các đoạn thẳng, ta dùng ba phương pháp sau đây:

(1) Lợi dụng các tam giác đồng dạng. Từ những tam giác đồng dạng, ta có thể suy ra tích mấy đoạn thẳng này bằng tích các đoạn thẳng kia, đem cộng hay trừ các tích đó với nhau ta sẽ được đẳng thức cần chứng minh.



Hình 99

Ví dụ 59: Cho một tứ giác nội tiếp. Chứng minh rằng tổng các tích của hai cạnh đối nhau, bằng tích của hai đường chéo (định lý Ptolémée, nhà thiên văn và toán học Hy lạp).

G.T.: Tứ giác ABCD nội tiếp.

K.L.: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Suy xét: Muốn có tích của AB và CD, thì phải làm cho hai đoạn này trở thành hai cạnh tương ứng của hai tam giác đồng dạng. Để đạt mục đích trên, ta dựng AE, sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.

Từ $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, ta suy ra: $AB : AC = BE : CD$, hay $AB \cdot CD = AC \cdot BE$... (1). Bây giờ ta lại tìm tích của AD và BC; quan sát hình vẽ, ta thấy $\triangle AED \sim \triangle ABC$, ta có: $AD : AC = ED : BC$ hay $AD \cdot BC = AC \cdot ED$... (2). Đem cộng (1) với (2) ta sẽ chứng minh được kết luận của bài ra.

***Chứng minh*:** Dựng AE cắt BD tại E, sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ . . . (1) đem cộng thêm $\widehat{EAC}$ vào hai vế của (1), ta có $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$ . . . (2). Vì góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau, nên $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ . . . (3), và $\widehat{ACB} = \widehat{ADE}$. . . (4). Suy từ (1) và (3) ta có $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, $AB : AC = BE : CD$ hay $AB.CD = AC.BE$ . . . (5). Tương tự như trên, từ (2) và (4) ta có $\triangle AED \sim \triangle ABC$, và suy ra $AD.BC = AC.ED$ . . . (6). Đem cộng (5) với (6) được:

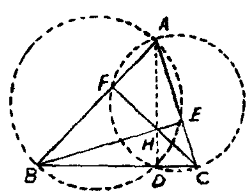
$$AB.CD + AD.BC = AC.BE + AC.ED = AC.(BE + ED) = AC.BD.$$

(2) Lợi dụng phương tích của một điểm đối với một đường tròn. Ta cũng có thể dùng phương tích của một điểm đối với một đường tròn để chứng minh tổng hoặc hiệu của các tích của các đoạn thẳng này bằng tích các đoạn thẳng kia.

Ví dụ 60: G.T.: Cho $\triangle$ ABC có ba góc nhọn. H là giao điểm của hai đường cao BE và CF.

K.L.: $BA \cdot BF + CA.CE = \overline{BC}^2$

$BE \cdot BH + CF.CH = \overline{BC}^2$



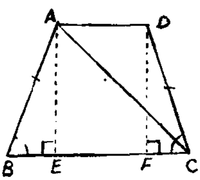
Hình 100

Suy xét : Muốn có các tích BA. BF, CA. CE, ta phải làm cho FA, EA trở thành dây của các đường tròn.

Ta dựng đường cao thứ ba là AD, thì sẽ được các tứ giác AFDC và AEDB nội tiếp, và ta có BA . BF = BC . BD, CA . CE = BC . DC. Đem cộng từng vế của hai đẳng thức trên với nhau, ta sẽ được đẳng thức đầu của kết luận. Đẳng thức thứ hai cũng chứng minh tương tự.

(3) Lợi dụng các định lý khác. Có khi người ta cũng dùng những định lý như « tổng các bình phương của hai đường chéo của một hình bình hành bằng tổng các bình phương của bốn cạnh » và định lý về bình phương của một cạnh của một tam giác thường, để chứng minh tổng hay hiệu của các tích của các đoạn thẳng này bằng tích các đoạn thẳng kia.

Ví dụ 61 : Chứng minh rằng bình phương của một đường chéo của một hình thang cân, bằng tích hai đáy cộng với bình phương của một cạnh bên.



Hình 101

G.T.: Hình thang ABCD cân.

$AD \parallel BC ; AB = CD.$

K.L. : $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + BC . AD$

Suy xét : Trong hình thang cân, hai góc đối diện bù nhau, nên trong hai góc B và D, nhất định có một góc là góc nhọn, một góc là góc tù. Nếu $\widehat{B}$ nhọn, thì ta dựng $AE \perp BC$, có $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 BC . BE$. So sánh với đẳng thức trong kết luận, ta thấy vế trái và số hạng đầu của vế phải bằng nhau rồi, bây giờ phải tìm cách làm cho $\overline{BC}^2 - 2BC . BE = BC . AD$ nữa là được. Đem biểu thức này đặt thành thừa số chung ta có

$$\overline{BC}^2 - 2 BC . BE = BC (BC - 2BE).$$

Vấn đề còn lại là chứng minh $BC - 2BE = AD$. Ta biết rằng hai góc đáy của hình thang cân bằng nhau, nếu dựng thêm $DF \perp BC$, ta sẽ được hai tam giác vuông bằng nhau và suy ra được $BE = CF$, $BC - 2BE = BC - BE - CF = EF$, mà $EF = AD$ (cạnh đối của hình chữ nhật). Vậy kết luận của bài ra có thể chứng minh được.

BÀI TẬP 15

1. Cho tam giác ABC vuông một đường thẳng cắt hai cạnh góc vuông AB, AC tại D và E. Chứng minh

$$\overline{CD}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DE}^2$$

2. Trong $\triangle$ ABC, AD là đường cao, E là một điểm tùy ý trên AD, chứng minh.

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{EC}^2$$

Chỉ dẫn : Chứng minh hai vế của đẳng thức đều bằng $\overline{DB}^2 - \overline{DC}^2$.

3. Cho một hình thang vuông. Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai đường chéo bằng hiệu các bình phương của hai đáy.

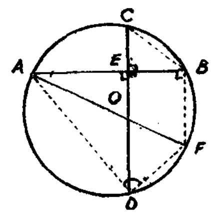
4. Hai dây AB và CD của đường tròn tâm O vuông góc với nhau tại E. Chứng minh rằng :

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = d^2$$

(d là đường kính của đường tròn)

Chỉ dẫn : Vẽ hình và nối các đường như hình bên, chú ý CB = DF.

5. *Chứng minh* : ba lần tổng các bình phương của ba cạnh của một tam giác, bằng bốn lần tổng các bình phương của ba trung tuyến.



Hình 102

6. Cho tứ giác ABCD, E và F là các trung điểm của AC, BD. Chứng minh $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2$

Chỉ dẫn : Nối EB, ED tìm cách ứng dụng định lý về tổng và hiệu các bình phương của hai cạnh của một tam giác.

7. Cho tứ giác ABCD nội tiếp, BC = CD. Chứng minh

$$AB \,.\, AD + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

Chỉ dẫn: Tìm trong hình vẽ hai cặp tam giác đồng dạng, rồi chứng minh AB.AD = ..., $\overline{BC}^2$ = ...

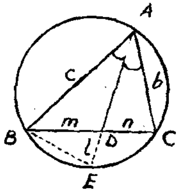
8. Cho một đường tròn tâm O với đường kính AB ; dựng hai dây AC, BD ở cùng một phía của AB ; chúng cắt nhau tại E. Chứng minh :

$$AC \,.\, AE + BD \,.\, BE = \overline{AB}^2$$

9. Chứng minh rằng tổng các bình phương của hai đường chéo của một hình thang bằng tổng các bình phương của hai cạnh bên, cộng thêm hai lần tích của hai đáy.

Chỉ dẫn : Giống phương pháp của ví dụ 61 sau khi chứng minh đem cộng từng vế của hai đẳng thức lại.

10. Trong $\triangle ABC$, $AB = c$, $AC = b$, đường phân giác của góc xen giữa hai cạnh đó là $AD = t_a$, $BD = m$, $DC = n$. Chứng minh : $t_a^2 = bc - mn$ (hình 103).



Hình 103

Chỉ dẫn : Kéo dài AD cắt đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$ tại E, thì $\triangle ABE \sim \triangle ADC$, $bc = t_a, AE = t_a (t_a + l)$.

11. Trong $\triangle ABC$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, độ dài của trung tuyến CD là m_c. Chứng minh $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

Chỉ dẫn : Kéo dài CD đến E sao cho $DE = CD$, thì AEBC là ▱, rồi ứng dụng định lý về tổng các bình phương của hai đường chéo của ▱ để chứng minh.

12. Chứng minh : tổng các bình phương của hai đường chéo của một tứ giác bằng hai lần tổng các bình phương của hai đoạn thẳng nối liền các trung điểm của các cạnh đối nhau.

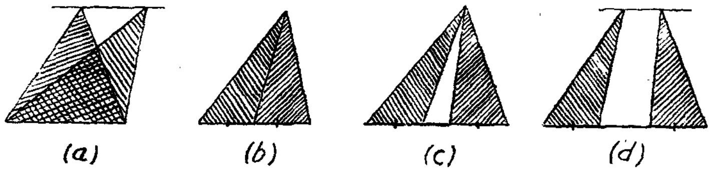
Chỉ dẫn : Lần lượt nối liền các trung điểm của bốn cạnh với nhau, ta sẽ có ▱.

§ 16. CHỨNG MINH DIỆN TÍCH BẰNG NHAU

Có nhiều định lý dùng để chứng minh diện tích các hình bằng nhau. Nhưng thường dùng nhất là các phương pháp sau.

(1) Lợi dụng các tam giác có đáy và chiều cao bằng nhau.

Định lý « hai tam giác có cạnh đáy bằng nhau và chiều cao bằng nhau thì có diện tích bằng nhau » được ứng dụng nhiều trong trường hợp như hình (*a*) : hai tam giác có cạnh đáy chung, đỉnh của chúng cùng nằm trên một đường thẳng song song với đáy. Trường hợp như ở các hình (*b*) và (*c*), (có đỉnh chung và hai đáy bằng nhau cùng nằm trên một đường thẳng) và hình (*d*) (gồm cả đặc điểm của hai loại trên) thì ít ứng dụng đến.

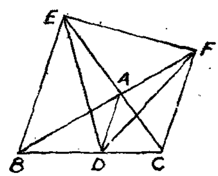


Hình 104

Ví dụ 62 : G.T.: Từ ba đỉnh của △ABC dựng AD//BE//CF cắt cạnh đối diện hoặc các cạnh kéo dài tại D,E,F.

K.L.: Diện tích △DEF = 2 diện tích △ABC.

Suy xét : △DEF có thể chia làm ba phần : một là △ADE, hai là △ADF, ba là △AEF, tam giác ADE và tam giác ADB có đáy chung và chiều cao bằng nhau nên S△ADE = S△ADB (S là diện tích)... (1) Tương tự S△ADF = = S△ADC... (2). Đem cộng (1) với (2) thì sẽ bằng diện tích của △ABC. Bây giờ ta chỉ cần chứng minh thêm S△AEF = = S△ABC, nhìn vào hình ta thấy S△CFE = S△CFB, đem hai vế của đẳng thức này trừ đi S△CFA, rồi đem cộng với (1) và (2), ta sẽ chứng minh được kết luận.



Hình 105

(2) Lợi dụng các hình bình hành và tam giác có đáy và chiều cao bằng nhau.

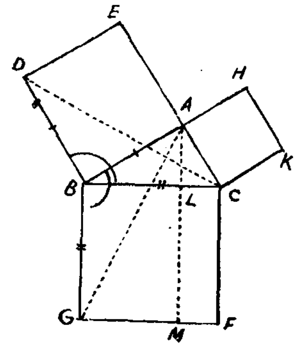
Ứng dụng định lý « diện tích hình tam giác bằng một nửa diện tích hình bình hành có đáy và chiều cao bằng đáy và chiều cao của tam giác » cũng có thể chứng minh diện tích các hình bằng nhau.

Ví dụ 63 : Dùng diện tích để chứng minh định lý Pi-ta-go.

G.T.: Cho △ABC, $\widehat{A} = 90^0$, lấy 3 cạnh làm cạnh dựng các hình vuông ABDE, BCFG và CAHK ra phía ngoài của tam giác.

K.L.: SABDE + SCAHK = SBCFG.

Suy xét : Nối CD, thì hình vuông ABDE và $\triangle$BCD có BD là đáy chung, AB bằng đường cao của tam giác nên S hình vuông ABDE = 2S$\triangle$BCD... (1) Nối thêm AG, ta sẽ chứng minh được $\triangle$BCD = = $\triangle$BGA, tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng cũng bằng nhau. Ta dựng thêm ALM $\perp$ BC, tương tự như (1), ta có : S của hình chữ nhật BLMG = 2S$\triangle$ BGA... (2). So sánh (1) và (2), ta thấy S của hình vuông ABDE = S ☐ BLMG. Và ta cũng có thể dùng cùng một phương pháp chứng minh S của hình vuông ACKH = S ☐ CLMF.

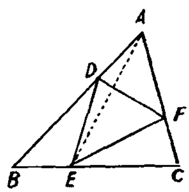


Hình 106

(3) Lợi dụng tỷ số diện tích của hai tam giác có chiều cao bằng nhau. Vì « tỷ số diện tích của hai tam giác có chiều cao bằng nhau bằng tỷ số hai đáy của hai tam giác đó », cho nên nếu có BE : EC = $m : n$, thì có S$\triangle$ABE : S$\triangle$AEC = $m : n$.

Ví dụ 64 : G.T. : Trên ba cạnh AB, BC, CA của $\triangle$ABC lấy ba đoạn AD, BE, CF mỗi đoạn bằng $\frac{1}{3}$ của mỗi cạnh.

K.L. : S $\triangle$DEF = $\frac{1}{3}$ S $\triangle$ABC.



Hình 107

Suy xét : Giữa $\triangle$DEF và $\triangle$ABC không liên quan trực tiếp với nhau nên phải tìm một tam giác khác làm trung gian. Muốn chứng minh S$\triangle$DEF = $\frac{1}{3}$ S$\triangle$ABC thì ta chứng minh S$\triangle$BED + S $\triangle$ CFE + S $\triangle$ ADF = $\frac{2}{3}$ S$\triangle$ABC. Ta quan sát $\triangle$ BED và $\triangle$ ABC, để dễ so sánh ta nối AE và dùng $\triangle$ ABE làm trung gian vì hai tam giác trước đều có một chiều cao bằng một chiều cao của $\triangle$ ABE.

Chứng minh : Nối AE, ta đã biết BE = $\frac{1}{3}$ BC, mà BE và BC là hai đáy của $\triangle$ ABE và $\triangle$ABC có chiều cao bằng nhau, từ định lý nêu ở (3) ta có ; S$\triangle$ABE = = $\frac{1}{3}$ S$\triangle$ABC. Mặt khác BD = $\frac{2}{3}$ AB, nên S$\triangle$BED = $\frac{2}{3}$ S$\triangle$ABE =

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} S\triangle ABC = \frac{2}{9} \cdot \triangle ABC.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$S\triangle CFE = \frac{2}{9} S\triangle ABC, \quad S\triangle ADF = \frac{2}{9} S\triangle ABC.$$

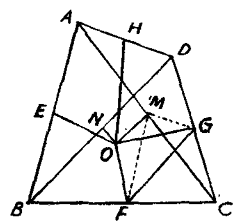
Lấy $S\triangle ABC$ lần lượt trừ đi ba tam giác trên được :

$$S\triangle DEF = (1 - 3 \cdot \frac{2}{9}) S\triangle ABC = \frac{1}{3} S\triangle ABC.$$

(4) Lợi dụng đường trung bình của tam giác. Ba đường trung bình của tam giác chia tam giác ấy thành bốn tam giác nhỏ bằng nhau, và diện tích mỗi tam giác tạo nên bởi một đường trung bình cắt hai cạnh chỉ bằng một phần tư diện tích tam giác cũ. Mối liên quan này cũng thường được ứng dụng trong khi chứng minh.

Ví dụ 65 : G.T. : Cho tứ giác ABCD, M và N là các trung điểm của AC, BD, dựng MO//DB, NO//AC, nối trung điểm của bốn cạnh là E, F, G, H với O.

K. L. : OE, OF, OG, OH chia tứ giác ABCD thành bốn phần có diện tích bằng nhau.



Hình 108

Suy xét : Nối MF , MG thì $S\triangle MFC = \frac{1}{4} S\triangle ABC$, $S\triangle MGC = \frac{1}{4} S\triangle ADC$, cộng từng vế của hai đẳng thức trên lại ta được diện tích của tứ giác MFCD $= \frac{1}{4}$ ABCD. Muốn chứng minh diện tích của tứ giác OFCG $= \frac{1}{4}$ ABCD, ta chỉ cần chứng minh diện tích của tứ giác MFCG = diện tích của tứ giác OFCG là được. Hai tứ giác này có $\triangle FCG$ chung, nên chỉ cần chứng minh thêm $S\triangle MFG = S\triangle OFG$. Vì FG//BD//OM, nên hai tam giác này có cùng một chiều cao, lại có đáy chung, do đó diện tích của chúng bằng nhau.

BÀI TẬP 16

1. Cho ▱ABCD, dựng đường song song BD cắt cạnh BC tại E và cạnh CD tại F. Chứng minh $S\triangle ABE = S\triangle ADF$.

Chỉ dẫn: Nối BF, DE chú ý ba cặp tam giác có đáy chung và chiều cao bằng nhau.

2. Chứng minh rằng diện tích của một tam giác có cạnh đáy là cạnh bên của một hình thang, đỉnh là trung điểm của cạnh bên kia, bằng một nửa diện tích của hình thang đó.

3. Từ đỉnh A của ▱ABCD kẻ một đường thẳng cắt BC tại E, cắt DC kéo dài tại F. Chứng minh $S\triangle ABF = S\triangle ADE$, $S\triangle ECD = S\triangle BEF$.

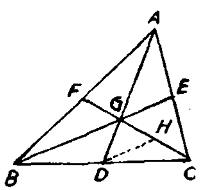
4. Cho $\triangle$ ABC kéo dài AB đến D, BC đến E, CA đến F sao cho AB = BD, BC = CE, CA = AF. Chứng minh $S\triangle DEF = 7S\triangle ABC$.

5. Trung tuyến AD và BE của $\triangle$ ABC cắt nhau tại F. Chứng minh :

$$S\triangle DEF = \frac{1}{2} S\triangle CEF = \frac{1}{3} S\triangle CED = \frac{1}{4} S\triangle ABF.$$

Chỉ dẫn: AF : FD = 2 : 1, BF : FE = 2 : 1.

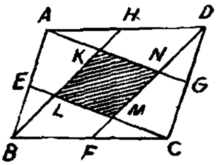
6. Trong hình thang ABCD, E và F là các trung điểm của hai đáy AD và BC, trên EF ta lấy một điểm O tùy ý. Chứng minh : GO = OH.



Hình 109

7. Chứng minh rằng diện tích của một tam giác có ba cạnh là ba đường trung tuyến của một tam giác cho trước, bằng $\frac{3}{4}$ diện tích của tam giác cho trước.

Chỉ dẫn: Ba trung tuyến BD, BE, CF gặp nhau tại G, gọi H là trung điểm của CG, thì ba cạnh của $\triangle$ DGH mỗi cạnh bằng $\frac{1}{3}$ của một trung tuyến, và diện tích sẽ bằng $\frac{1}{9}$ diện tích của tam giác có ba cạnh là ba trung tuyến. Mặt khác diện tích của $\triangle$DGH cũng bằng $\frac{1}{12}$ diện tích của $\triangle$ABC.



Hình 110

8. Trong ▱ABCD, E, F, G, H là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Bốn đoạn thẳng AG, BH, CE, DF cắt nhau tại K, L, M, N. Chứng minh :

$$S ▱ KLMN = \frac{1}{5} S ▱ ABCD.$$

Chỉ dẫn : Ta có thể chứng minh AG // EC, BH // FD một cách dễ dàng. Vì GN, MF đều là đường trung bình của các △, nên DN = NM = KL = LB = = 2MF, DM = $\frac{4}{5}$ DF, S△DMC = $\frac{4}{5}$ △ DFC. Nhưng diện tích của △DFC = = $\frac{1}{4}$ S ▱ABCD. Do đó S △ DMC = $\frac{1}{5}$ S ▱ABCD.

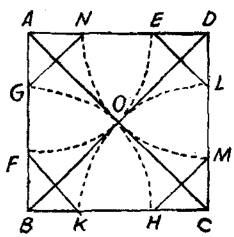
9. Trong hình vuông ABCD, E và M là trung điểm của CD và DA, G là giao điểm của BE và CF. Chứng minh S △ BCG = $\frac{1}{5}$ diện tích của ABCD. ABCD

§ 17. CHỨNG MINH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

Có một số bài tập hình học trong đó ta phải dựa vào các định lý đã học để tính độ lớn của một góc nào đó, độ dài của một đoạn thẳng hay một cung cho trước, hoặc diện tích của một hình nào trước, rồi mới có thể chứng minh được bài tập đó. Đấy là những bài tập có liên quan đến vấn đề tính toán hình học.

Ví dụ 66 : G.T. : O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD trong hình vuông ABCD. Lần lượt lấy A, B, C, D làm tâm, AO làm bán kính dựng các cung cắt bốn cạnh tại E, F, G, H, K, L, M, N.

K. L. : Đa giác N G F K H M L E là bát giác đều.



Hình 111

Suy xét : Muốn chứng minh bát giác N G F K H M L E là bát giác đều, ta có thể chứng minh mỗi góc của đa giác này bằng 135° trước. Để đạt mục đích trên, ta chỉ cần chứng minh các tam giác bị cắt đi ở bốn góc là những tam giác cân có góc ở đáy bằng 45^0 là được. Sau đó ta sẽ dùng định lý Pi-ta-go để chứng minh các cạnh của đa giác bằng nhau, vì trong trường hợp này áp dụng định lý Pi-ta-go tiện lợi hơn.

Chứng minh: Vì đường chéo của hình vuông cắt nhau tại trung điểm, nên $BG = BO = DO = DN$. Từ $AB = AD$ và đẳng thức trên, ta suy ra $AG = AN$, do đó $\triangle AGN$ vuông cân, ta có $\widehat{AGN} = \widehat{ANG} = 45^0$, từ đó $\widehat{FGN} = \widehat{ENG} = 135^0$.

Tương tự như trên, ta cũng chứng minh được sáu góc còn lại của đa giác trên mỗi góc bằng 135^0, đây là một đa giác có tám góc bằng nhau.

Nếu góc độ dài của mỗi cạnh hình vuông là a, thì từ định lý Pi-ta-go, ta tính được độ dài của đường chéo

$DB = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}\,a$. Do đó $DN = DO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,

$AN = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a$. Tương tự như trên, $DE = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a$.

Cho nên $NE = a - 2\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a = (\sqrt{2} - 1)\,a$.

Mặt khác trong tam giác vuông cân AGN, đã biệt cạnh bên dài $\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a$ nên

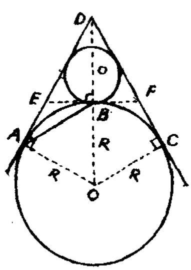
$$GN = \sqrt{2\left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a\right]^2} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a =$$
$$= (\sqrt{2} - 1)\,a$$

Tương tự như trên, ta cũng có thể chứng minh các cạnh khác của bát giác này đều bằng

$$(\sqrt{2} - 1)\,a.$$

Vậy bát giác này có 8 cạnh bằng nhau.

Tổng hợp cả hai phần chứng minh trên, ta kết luận bát giác trên là bát giác đều.



Hình 112

Ví dụ 67. G.T.: Cho đường tròn tâm O, $\widehat{ABC} = 120^0$ dựng hai tiếp tuyến qua A và C, chúng cắt nhau tại D, dựng đường tròn tâm P tiếp xúc với AD, CD và $\overset{\frown}{ABC}$.

K.L.: Chu vi của đường tròn tâm P bằng độ dài của cung ABC.

Suy xét : Gọi R là bán kính của đường tròn tâm O, ta có thể tính được độ dài của $\overset{\frown}{ABC}$. Ta dựng tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn qua tiếp điểm B, thì ta sẽ được $\triangle$ DEF đều, và suy ra $PB = \frac{1}{3}$ DB. Mặt khác $\triangle$ AOB cũng là tam giác đều, nên ta có thể chứng minh được $DB = BO = R$, và tính được bán kính PB của đường tròn tâm P, rồi tính chu vi của đường tròn đó.

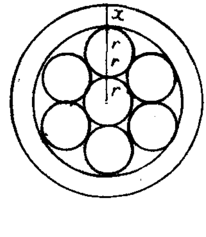
Chứng minh : Nối DO vì DO chia đôi $\widehat{D}$, nên phải đi qua P. Nối AB, vì DO chia đôi $\overset{\frown}{AOC}$, nên $\overset{\frown}{AOB} = 60^0$, $\triangle$ AOB đều. Nhưng $\triangle$ AOD là tam giác vuông, nên $BO = AB = BD$.

Dựng tiếp tuyến chung trong EF qua tiếp điểm B, thì $EF \perp DO$, nên $DE = DF$. Trong tứ giác DAOC, có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^0$, $\widehat{O} = 120^0$, nên $\widehat{D} = 60^0$, và $\triangle$ DEF cũng là tam giác đều. Đặt $OA = OB = R$, thì $BD = R$ vì bán kính của đường tròn nội tiếp trong một tam giác đều bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao, nên $PB = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} R$, chu vi của đường tròn tâm P là : $2\pi \cdot PB = 2\pi \cdot \frac{1}{3} R = \frac{2}{3} \pi R$. Mặt khác, độ dài của $\overset{\frown}{ABC} = \frac{120}{360} \cdot 2\pi R = \frac{2}{3} \pi R$. Vậy độ dài của $\overset{\frown}{ABC}$ bằng chu vi đường tròn tâm P.

Ví dụ 68 :

G. T. : Cho bảy đường tròn có bán kính bằng nhau, tiếp xúc với nhau, và bị bao trong một hình vành khuyên (như hình 113) biết rằng tổng diện tích của bảy hình tròn bằng diện tích hình vành khuyên.

K. L. : Bề ngang của hình vành khuyên bằng bán kính của đường tròn.



Hình 113

Suy xét : Gọi x là bề ngang (chiều rộng) của hình vành khuyên r là bán kính của mỗi đường tròn, thì bán kính lớn của hình vành khuyên bằng $x + 3r$, bán kính nhỏ bằng 3r, và ta có thể tính được diện tích của hình vành khuyên. Mặt khác, từ r ta cũng tính diện tích của bảy hình tròn và theo ý của bài ra ta lập phương trình.

Nếu giải phương trình đó mà được $x = r$, thì chứng minh được bài tập.

Chứng minh : Vì các tiếp điểm đều nằm trên đường nối tâm, cho nên, nếu gọi bán kính của các đường tròn là r, bề ngang của hình vành khuyên là x, thì ta có bán kính lớn của hình vành khuyên là $x + 3r$, bán kính bé là 3r, diện tích của hình vành khuyên là :

$$\pi(x + 3r)^2 - \pi(3r)^2 = \pi(x^2 + 6rx)$$

Mặt khác, ta có tổng diện tích của bảy hình tròn là $7\pi r^2$, theo giả thiết, ta có phương trình sau :

$$\pi(x^2 + 6rx) = 7\pi r^2$$

Rút gọn được : $x^2 + 6rx - 7r^2 = 0$

hay $(x - r)\ (x + 7r) = 0$

ta có : $x = r$ hoặc $x = -7r$.

Vì độ dài của đoạn thẳng không thể là một số âm, nên bề ngang của hình vành khuyên bằng bán kính của đường tròn.

BÀI TẬP 17

1. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC lấy hai điểm D và E, sao cho BE = AB, = CD = AC. Chứng minh : $\widehat{DAE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

2. Cho một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 36^0. Chứng minh rằng đường phân giác của một góc đáy chia tam giác ấy thành hai tam giác cân mới.

3. a, b, c là độ dài ba cạnh của $\triangle$ ABC, bán kính của đường tròn nội tiếp với tam giác ấy là r, gọi $S = \frac{1}{2}(a + b + c)$ và Δ thay cho diện tích $\triangle$ ABC. Chứng minh rằng $r = \frac{\Delta}{S}$.

Chỉ dẫn : *Gọi O là tâm của đường tròn nội tiếp, thì diện tích của* $\triangle$ OBC $= \frac{1}{2}ar$, của $\triangle$OCA $= \frac{1}{2}br$, của $\triangle$ OAB $= \frac{1}{2}cr$, rồi cộng từng vế của đẳng thức trên lại với nhau.

4. Cũng bài trên, gọi r_a, r_b, r_c là bán kính của các đường tròn bàng tiếp ba cạnh a, b, c, hãy chứng minh :

$$r_a = \frac{\Delta}{S - a}, \qquad r_b = \frac{\Delta}{S - b} \qquad r_c = \frac{\Delta}{S - c}$$

5. Cũng bài trên, gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp với Δ ABC Chứng minh :

$$R = \frac{abc}{4\Delta}$$

Chỉ dẫn : Gọi h_a là chiều cao của Δ ABC trên cạnh a, từ (9) của bài tập 12, ta suy ra $bc = 2Rh_a$, và từ công thức tính diện tích của tam giác, ta có $\Delta = \frac{1}{2} ah_a$.

6. Giống bài trên. Chứng minh : $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

Chỉ dẫn : Lấy diện tích và độ dài của các cạnh biểu diễn các đường cao.

7. *Giống bài trên. Chứng minh* : $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

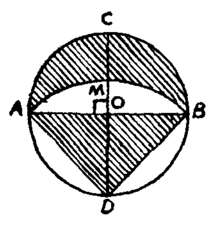
8. Cho hai đường tròn không bằng nhau, trên mỗi đường tròn lấy một cung, hai cung đó có độ dài bằng nhau. Chứng minh rằng tỷ số giữa góc ở tâm ứng với hai cung đó, bằng tỷ số nghịch đảo của hai bán kính.

9. Đem đường kính của một đường tròn cho trước chia thành một số phần tùy ý bằng nhau lần lượt lấy các đoạn thẳng tạo bởi một đầu này của đường kính và từng điểm chia làm đường kính, dựng các nửa đường tròn về phía trên của đường kính cho trước sau đó, lần lượt lấy các đoạn thẳng tạo bởi đầu kia của đường kính và từng điểm chia làm đường kính, dựng các nửa đường tròn về phía dưới của đường kính cho trước. Hãy chứng minh :

(a) Những nửa đường tròn đó chia đường tròn cũ thành những hình có diện tích bằng nhau (hình giới hạn bởi các nửa đường tròn).

(b) Chu vi của mỗi hình bằng chu vi của đường tròn cho trước.

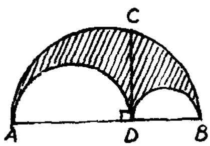
10. Cho một đường tròn tâm O có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, lấy AD làm bán kính, D làm tâm dựng $\overset{\frown}{AMB}$ cắt CD tại M. Chứng minh rằng diện tích của hình trăng khuyết AMBC bằng diện tích của Δ ABD.



Hình 114

Chỉ dẫn : Chứng minh diện tích của nửa hình tròn AOBC bằng diện tích của hình quạt DAMB trước.

11. Cho nửa đường tròn có đường kính AB, trên $\overset{\frown}{AB}$ lấy một điểm C, dựng CD $\perp$ AB, lấy AD, BD làm đường kính dựng hai nửa đường tròn về cùng phía với nửa đường tròn cũ (hình 115). Chứng minh rằng diện tích trong phần gạch sọc bằng diện tích của đường tròn có đường kính là CD.



Hình 115

12. Trên bán kính OA của đường tròn tâm O lấy một điểm B sao cho OB là đoạn trung bình nhân giữa OA và AB, dựng một đường tròn đồng tâm với đường tròn cho trước có bán kính là OB. Chứng minh rằng tỷ số diện tích giữa hình tròn bán kính OB và hình vành khuyên bằng tỷ số diện tích giữa hình vành khuyên và hình tròn cho trước.

Chỉ dẫn : Vì OA : OB = OB : AB, nên ta có $\overline{OB}^2 = OA \cdot AB$ và diện tích hình vành khuyên bằng :

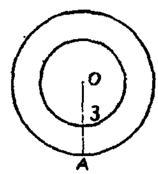
$\pi(\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2) = \pi(\overline{OA}^2 - OA \cdot AB) = \pi \cdot OA(OA - AB) = \pi \cdot OA \cdot OB.$

Cho nên dt hình tròn cũ : diện tích hình vành khuyên =

$\pi \cdot \overline{OA}^2 : \pi\, OA \cdot OB = OA : OB.$

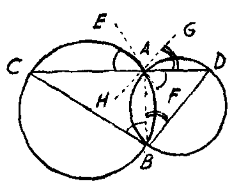
và dt hình vành khuyên : dt hình tròn bán kính OB =

$\pi \cdot OA \cdot OB : \pi \cdot \overline{OB}^2 = OA : OB.$



Hình 116

§ 18. CHỨNG MINH VỀ CÁC ĐẠI LƯỢNG KHÔNG ĐỔI, CÁC ĐẠI LƯỢNG CỰC ĐẠI HAY CỰC TIỂU



Hình 117

Nếu hình vẽ có một phần này cố định, một phần kia lại có thể thay đổi, thì tổng, hiệu, tích, tỷ số hoặc góc xen giữa của hai đoạn thẳng chuyển động đôi khi có một giá trị không đổi. Muốn chứng minh đại lượng nào đó có một giá trị không đổi, trước tiên phải tìm xem giá trị đó bằng một đoạn thẳng cố định nào, hay bằng tích, tỷ số hoặc góc xen giữa của hai đoạn thẳng cố định nào, sau đó mới chứng minh rằng khi hình vẽ thay đổi, đại lượng ta xét vẫn bằng đoạn thẳng cố định hay tích, tỷ số hoặc góc xen giữa của hai đoạn thẳng cố định mà ta đã tìm được ở trên kia.

Ví dụ 69 : G.T. : Hai đường tròn cố định giao nhau tại hai điểm A và B. Qua A dựng một cát tuyến CAD tùy ý.

K.L. : $\widehat{CBD}$ có một giá trị không đổi.

Suy xét : Vì cát tuyến CAD có thể thay đổi, nên hai cạnh của góc $\widehat{CBD}$ có đỉnh B cố định cũng thay đổi theo CAD. Ta thử nghiên cứu xem $\widehat{CBD}$ có thể bằng một góc nào cố định không, ta nối AB, chia $\widehat{CBD}$ thành hai phần, mỗi phần là một góc nội tiếp, từ định lý về góc giữa tiếp tuyến và dây đi qua tiếp điểm, ta biết các góc nội tiếp đó bằng các góc giữa tiếp tuyến tại A và dây CAD, nhưng vị trí của hai tiếp tuyến cố định, nên có thể chứng minh $\widehat{CBD}$ có giá trị không đổi.

Chứng minh : Nối AB, dựng tiếp tuyến EF và GH của hai đường tròn tại A. Từ định lý "Góc giữa tiếp tuyến và một dây đi qua tiếp điểm bằng góc nội tiếp cùng chắn một cung với dây đó", ta có :

$\widehat{ABC} = \widehat{CAE} = \widehat{DAF}$, $\widehat{ABD} = \widehat{DAG}$. Đem cộng từng vế của hai đẳng thức trên được : $\widehat{CBD} = \widehat{GAF}$. Dầu cho vị trí của CAD thay đổi thế nào đi nữa, nhưng tiếp tuyến EF và GH tại A vẫn cố định, nên $\widehat{GAF}$ cố định vậy $\widehat{CBD}$ cũng có giá trị không đổi.

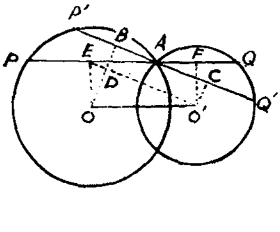
Trong tất cả những hình hình học thỏa mãn các điều kiện của bài tập (đơn giản nhất là đoạn thẳng) hình nào lớn nhất gọi là cực đại, hình nào nhỏ nhất gọi là cực tiểu. Các bài tập trong đó cần chứng minh một hình hình học nào đó là lớn nhất hay bé nhất, gọi là những bài tập về cực đại hay cực tiểu.

Người ta thường dùng ba định lý sau đây để chứng minh một đoạn thẳng là cực đại hay cực tiểu :

(1) Trong tất cả các đường nối liền hai điểm, đoạn thẳng nối liền hai điểm đó ngắn nhất.

(2) Trong tất cả các đường nối liền một điểm ở ngoài một đường thẳng cho trước với đường thẳng đó, đường vuông góc hạ từ điểm đó xuống đường thẳng là đường ngắn nhất.

(3) Trong tất cả các dây cung đi qua một điểm trên đường tròn, đường kính đi qua điểm đó có độ dài lớn nhất.



Hình 118

Ví dụ 70. G.T. : Cho hai đường tròn tâm O và O' giao nhau, qua một giao điểm A kẻ nhiều cát tuyến, trong đó cát tuyến PQ // OO'.

K.L. : Cát tuyến PQ lớn nhất.

Suy xét : Ta dựng một cát tuyến P'Q' không song song với OO' và đi qua A, từ O và O' hạ các đường vuông góc OB, O'C xuống cát tuyến đó, thì B và C chia đôi dây AP' và AQ', nên P'Q' = AP' + + AQ' = 2AB + 2AC = 2BC.

Và từ O' ta hạ O'D ⊥ OB, thì O'D // P'Q', nhưng OB cũng // O'C, nên tứ giác O'DBC là ▱, P'Q' = 2BC = 2O'D.

Ta hạ thêm OE, O'F vuông góc với PQ, cũng theo cách chứng minh trên, ta có : PQ = 2OO'.

Vì O'D ⊥ OB, nên OO' > O'D, ta suy ra PQ > P'Q'. Nếu PQ đã lớn hơn một cát tuyến bất kỳ qua A mà không // với OO' thì trong tất cả cát tuyến qua A, PQ lớn nhất.

BÀI TẬP 18

1. Chứng minh rằng hiệu các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên cạnh đáy kéo dài của một tam giác cân đến hai cạnh bên có một giá trị không đổi.

Chỉ dẫn : Tham khảo bài (1) của bài tập 5.

2. Từ một điểm O kẻ ba nửa đường thẳng OA, OB, OC, P là một điểm trên OB, PD ⊥ OA, PE ⊥ OC. Chứng minh rằng PD : PE có một giá trị không đổi khi P chuyển động trên OB.

3. Cho một đường tròn cố định trên đường kính AB kéo dài lấy một điểm C cố định, dựng CD ⊥ AC, kẻ một đường thẳng tùy ý đi qua A', cắt CD tại E và cắt đường tròn tại F. Chứng minh AE . AF có một giá trị không đổi.

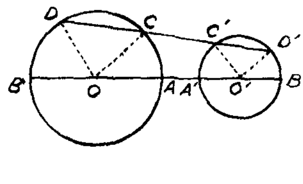
Chỉ dẫn : AB và AC là hai đoạn thẳng cố định, hãy tìm một cặp tam giác đồng dạng, rồi chứng minh các đoạn thẳng tỷ lệ với nhau.

4. Cho hai đường tròn đồng tâm cố định có tâm là O, AB là đường kính của một đường tròn, trên đường tròn kia lấy một điểm P tùy ý. Chứng minh $\overline{PA}^2 . \overline{PB}^2$ có một giá trị không đổi.

Chỉ dẫn : Độ dài của hai bán kính là cố định, dùng định lý về tổng các bình phương của hai cạnh của một tam giác để chứng minh, và biểu diễn $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ theo bán kính của hai đường tròn.

5. Trong một đường tròn tâm O lấy một điểm P cố định. Chứng minh rằng trong tất cả các dây qua P, thì dây vuông góc với đường kính đi qua P là ngắn nhất.

6. Cho hai đường tròn ở ngoài nhau, đường nối tâm OO' cắt hai đường tròn tại A và A' (hình 119), kéo dài OO' về cả hai phía, cắt hai đường tròn tại B và B'. Chứng minh rằng AA' là khoảng cách ngắn nhất giữa hai đường tròn, BB' là khoảng cách lớn nhất giữa hai đường tròn.



Hình 119

Chỉ dẫn : Đường gấp khúc OCC'O' > đoạn thẳng OAA'O', đem cả hai vế trừ đi bán kính của hai đường tròn. Đường gấp khúc DOO'D' > đoạn thẳng DCC'D', rồi thay các bán kính vào hai vế.

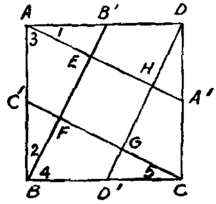
7. Cho một đường tròn tâm O và một điểm P ở ngoài đường tròn, kẻ một đường thẳng đi qua P và O cắt đường tròn tại A và B, A nằm giữa O và P. Chứng minh PA là khoảng cách ngắn nhất từ P đến đường tròn và PB là khoảng cách lớn nhất từ P đến đường tròn đó.

§ 19. CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH KHÁC

Trong các mục trước, ta đã phân loại bài tập theo kết luận của chúng. Ngoài các loại bài tập đó, còn có nhiều loại khác nữa. Nếu chúng ta nắm vững những phương pháp giới thiệu ở các mục trước, thì việc chứng minh các loại bài tập khác cũng không khó khăn lắm. Để kết thúc chương này, chúng tôi nêu thêm một số ví dụ, chứ không giới thiệu từng loại nữa.

Như muốn chứng minh một hình là hình vuông, trước tiên ta có thể áp dụng phương pháp chứng minh hai đường song song với nhau để chứng minh hình đó là hình bình hành trước ; rồi lại áp dụng phương pháp chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau để chứng minh hai cạnh kề nhau của hình đó bằng nhau. Cuối cùng ta áp dụng phương pháp chứng minh hai đường vuông góc với nhau để chứng minh hai cạnh kề nhau của chúng tạo thành một góc vuông. Lần lượt áp dụng ba phương pháp đó, ta sẽ chứng minh được bài tập trên.

Ví dụ 71. G.T. : Trong hình vuông ABCD. A', B', C', D' là trung điểm của các cạnh CD, DA, AB, BC. AA', BB', CC', DD' cắt nhau tại E, F, G, H.



Hình 120

K.L.: Tứ giác EFGH là hình vuông. Ta không suy xét bài này.

Chứng minh : Vì AC' và A'C là một nửa của hai cạnh đối nhau của hình vuông nên $AC' \underline{\parallel} A'C$, ta có tứ giác AC'CA' là ▱, nên AA'//C'C. Tương tự BB'//D'D.

Vậy tứ giác EFGH là ▱.

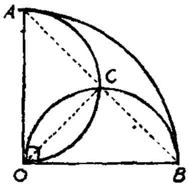
Xét hai tam giác vuông AA' D và BB' A, có hai cạnh góc vuông bằng nhau từng đôi một, nên chúng bằng nhau, ta rút ra $\hat{1} = \hat{2}$, $\hat{3} = \hat{4}$ (hai góc này phụ với hai góc bằng nhau, nên chúng bằng nhau). Tương tự như trên ta có $\hat{2} = \hat{5}$, do đó $\triangle$ ABE $= \triangle$ BCF, ta suy ra AE = BF.

Trong hai $\triangle$ ADH và $\triangle$ ABE, B'E và C'F đều là đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với một cạnh khác, nên AE = EH, BF = FE, do đó EH = FE. Vậy tứ giác EFGH là một hình thoi.

Từ chứng minh trên : $\hat{1} = \hat{2}$ mà $\hat{1} + \hat{3} = 90^0$ thì $\hat{2} + \hat{3} = 90^0$ vậy $\widehat{FEH} = 90^0$. Vậy tứ giác EFGH là hình chữ nhật.

Tổng hợp các kết quả trên lại, ta có thể xác định tứ giác EFGH là một hình vuông.

Muốn chứng minh hai cung bằng nhau, ta có thể áp dụng phương pháp chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau (chứng minh hai dây trương hai cung đó bằng nhau); hoặc áp dụng phương pháp chứng minh hai góc bằng nhau (chứng minh hai góc nội tiếp (góc ở tâm) tương ứng bằng nhau); hoặc áp dụng phương pháp chứng minh hai đường song song với nhau để chứng minh hai dây trương hai cung đó song song với nhau trước, rồi dùng các phương pháp khác chứng minh tiếp.



Hình 121

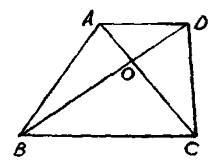
Ví dụ 72 : *G.T.* : Trong một phần tư hình tròn AOB, lấy bán kính OA và OB làm đường kính, dựng các nửa đường tròn vào phía trong của hình, hai nửa đường tròn đó giao nhau tại C.

K.L.: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CO} = \overset{\frown}{CB}$.

Suy xét: Vì OA = OB, nên hai nửa đường bằng nhau. Muốn giải quyết bài này, ta phải chứng minh AC = CO = CB trước. Để đạt mục đích đó, ta phải chứng minh $\widehat{CAO} = \widehat{COA}$, $\widehat{CBO} = \widehat{COB}$. Vì $\widehat{ACO}$ và $\widehat{BCO}$ đều bằng 90^0, nên $\widehat{OAC}$, $\widehat{CBO}$ đều bằng 45^0.

Chứng minh: Nối AC, OC, BC. $\widehat{ACO}$ và $\widehat{BCO}$ đều là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, nên chúng đều bằng 90^0, và A, C, B thẳng hàng. Trong $\triangle$OAB: $\widehat{O} = 90^0$, OA = OB nên $\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = 45^0$. Trong $\triangle$ACO, đã biết một góc bằng 90^0, một góc khác bằng 45^0, thì $\widehat{AOC}$ cũng bằng 45^0. Do đó $\widehat{BAO} = \widehat{AOC}$ ta suy ra AC = CO, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CO}$. Cũng tương tự như trên, ta có $\overset{\frown}{CO} = \overset{\frown}{CB}$.

Có một số bài tập về chứng minh diện tích, cần phải liên hệ với các tỷ lệ thức. Ngược lại, có một số bài tập chứng minh đoạn thẳng tỷ lệ lại cần phải dựa vào diện tích của các hình. Ta hãy xem ví dụ dưới đây:



Hình 122

Ví dụ 73. G.T.: Trong hình thang ABCD, AD//BC, hai đường chéo cắt nhau tại O, diện tích của $\triangle$ OBC $= p^2$, của $\triangle$ OAD $= q^2$.

K.L.: Diện tích của hình thang ABCD $= (p + q)^2$.

Suy xét: Đẳng thức ta cần chứng minh là S của ABCD $= p^2 + 2pq + q^2$ (S là diện tích). Từ giả thiết, ta biết chỉ cần chứng minh thêm:

$$S\triangle OAB + S\triangle OCD = 2pq.$$

Nhưng S$\triangle$ABC = S$\triangle$DBC, từ đó, ta suy được S$\triangle$OAB = S$\triangle$OCD. Bây giờ ta hãy tìm cách chứng minh S$\triangle$OAB = pq.

Vì pq là trung bình nhân giữa p^2 và q^2 ($p^2 : pq = pq : q^2$), cho nên để chứng minh S$\triangle$OAB = pq, ta có thể chứng minh S$\triangle$OBC : S$\triangle$OAB = S$\triangle$OAB : S$\triangle$OAD.

Hai tam giác ở vế trái của tỷ lệ thức trên có chiều cao bằng nhau, nên tỷ số diện tích của chúng bằng tỷ số giữa hai đáy tức là CO : OA. Tương tự, tỷ số diện tích của hai tam giác ở vế phải bằng BO : OD. Nếu bây giờ ta chứng minh được: CO : OA = BO : OD thì giải quyết được bài này. Vì bốn đoạn thẳng này là các cạnh tương ứng của hai tam giác đồng dạng, nên tỷ lệ thức cuối cùng có thể chứng minh được dễ dàng.

BÀI TẬP 19

1. Trên các cạnh của hình vuông ABCD lấy các đoạn AA' = BB' = CC' = = DD'. Chứng minh tứ giác A'B'C'D' cũng là hình vuông.

2. Đường phân giác của các góc của hình chữ nhật ABCD cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh tứ giác EFGH là một hình vuông.

3. Cho △ ABC vuông, đường phân giác của góc vuông C cắt cạnh huyền tại D, dựng DE ⊥ BC, DF ⊥ AC, chứng minh tứ giác DECF là hình vuông.

4. Kéo dài ba cạnh của tam giác đều ABC, sao cho AA' = BB' = CC'. Chứng minh △ A'B'C' cũng là tam giác đều.

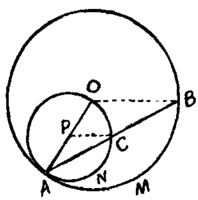
5. Từ giao điểm của hai đường chéo trong một hình thoi hạ các đường vuông góc xuống các cạnh. Chứng minh rằng tứ giác có các đỉnh là chân các đường vuông góc đó là một hình chữ nhật.

6. Kéo dài hai dây cung AB, CD của một đường tròn cho trước, chúng cắt nhau tại O, phân giác của O cắt $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$ tại E và F. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CE} - \overset{\frown}{DF}$.

Chỉ dẫn : Từ F dựng hai dây song song với AB và CD.

7. Cho ▱ ABCD, P là một điểm tùy ý trên đường chéo BD, PE ⊥ AB, PF ⊥ BC. Chứng minh PE : PF = BC : AB.

Chỉ dẫn : S △ ABP = S △ BCP, tức là $\frac{1}{2}$ AB. PE = $\frac{1}{2}$ BC. PF.



Hình 123

8. Lấy bán kính OA của đường tròn tâm O làm đường kính dựng một đường tròn (hình 123) cắt dây AB tại C. Chứng minh diện tích của hình viên phân AMB : diện tích của hình viên phân ANC = 4 : 1.

Chỉ dẫn : P, C là trung điểm của OA, AB, nên diện tích của hình quạt OAMB : diện tích của hình quạt PANC = = 4 : 1. S △ OAB : S △ PAC = 4 : 1

CHƯƠNG III

VẬN DỤNG CÁC ĐỊNH LÝ VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH PHẢI LINH HOẠT

§ 1. BIẾN ĐỔI ĐỊNH LÝ

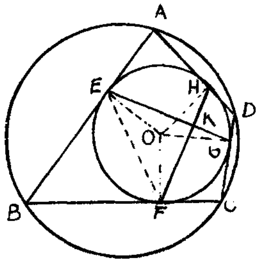
Các định lý (gồm cả bài tập) của môn hình học rất nhiều, các phương pháp chứng minh cũng nhiều. Trong các chương trước ta đã phân loại và nghiên cứu tỷ mỷ, nhưng vẫn chưa đầy đủ và hoàn thiện. Ngoài những phương pháp chứng minh có các bước làm nhất định mà ta đã thành thạo, ta còn phải biết phát huy tính sáng tạo, vận dụng định lý và phương pháp chứng minh một cách linh hoạt, như vậy mới tiến bộ được.

Vậy muốn vận dụng các định lý và các phương pháp chứng minh cho linh hoạt, thì có bí quyết gì không?

Vấn đề này rất khó trả lời. Vì nó không có những tiêu chuẩn tuyệt đối, và muốn nói cũng không biết nên bắt đầu như thế nào. Phương pháp tốt nhất là tự mình cố gắng tìm hiểu nhiều. Ở đây, chúng tôi chỉ có thể cung cấp cho các bạn một số hiểu biết mà chúng tôi nghĩ được để các bạn tham khảo.

Đầu tiên, ta hãy nói về biến đổi các định lý. Những định lý có trong sách giáo khoa, chỉ là một số ta thường dùng đến và tương đối quan trọng. Khi chứng minh bài tập, ngoài những định lý đó, ta còn phải biết chọn lấy những định lý quan trọng trong các bài tập để ứng dụng. Không những thế, có khi ta còn phải biến đổi cả định lý trong sách giáo khoa hoặc trong bài tập, làm cho phương pháp chứng minh đơn giản và gọn hơn.

Người biết vận dụng các định lý không máy móc, thường sáng tạo được thêm những định lý mới; với những định lý này, không những có thể làm cho phương pháp chứng minh đơn giản, mà còn giúp ta tránh được suy xét dài dòng, tìm được phương pháp chứng minh dễ dàng hơn.



Hình 124

Thí dụ như bài (6) của bài tập 4 trong chương trước:

G.T.: Tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn và ngoại tiếp một đường tròn khác, các tiếp điểm lần lượt là E, F, G, H.

K.L.: $EG \perp FH$.

Dựa vào gợi ý của bài đó, ta có các phần chứng minh sau:

Cách giải I (thường).

Chứng minh	*Lý do*
1. Gọi O là tâm của đường tròn nội tiếp trong tứ giác, nối EO, FO, GO, HO, EF	1. Theo phép dựng hình.
2. $\widehat{A} + \widehat{EOH} + \widehat{AHO} + \widehat{AEO} = 360^0$	2. Tổng các góc trong của tứ giác bằng 360^0.
3. $\widehat{AHO} = 90^0$; $\widehat{AEO} = 90^0$	3. Tiếp tuyến $\perp$ với bán kính đi qua tiếp điểm.
4. Do đó $\widehat{A} + \widehat{EOH} = 180^0$	4. Lấy 2 trừ 3.
5. Tương tự ta có $\widehat{C} + \widehat{FOG} = 180^0$	5. Giống cách chứng minh từ 2 — 4.
6. Nên $\widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{EOH} + \widehat{FOG} = 360^0$	6. Cộng 4 với 5.
7. Nhưng $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^0$	7. Các góc đối của một tứ giác lồi nội tiếp bù nhau.
8. Nên $\widehat{EOH} + \widehat{FOG} = 180^0$	8. Suy từ 6 và 7.
9. Mặt khác ta có: $\widehat{EOH} = 2\,\widehat{EFH}$ $\widehat{FOG} = 2\,\widehat{FEG}$	9. Góc ở tâm gấp đôi góc nội tiếp cùng chắn một cung.

10. Nên $2\widehat{EFH} + 2\widehat{FEG} = 180^0$	10. Thay 9 vào 8.
11. $\widehat{EFH} + \widehat{FEG} = 90^0$	11. Suy từ 10.
12. Nhưng $\widehat{EFH} + \widehat{FEG} + \widehat{EKF} = 180^0$	12. Tổng ba góc trong của tam giác bằng 180^0.
13. Do đó : $\widehat{EKF} = 90^0$	13. Lấy 12 trừ 11.
14. Vậy $EG \perp FH$	14. Hai cạnh của góc vuông thì vuông góc với nhau.

Cách chứng minh này khá phiền phức, nếu ta biến đổi các định lý thì có thể chứng minh như sau :

Cách giải I (đơn giản).

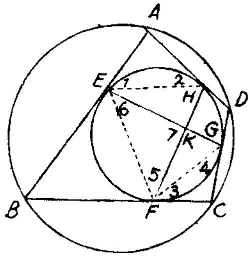
Chứng minh	*Lý do*
1. Giống như trước	1. Giống trước.
2. Từ $\widehat{A} + \widehat{EOH} = 180^0$ $\widehat{C} + \widehat{FOG} = 180^0$	2. Góc giữa hai tiếp tuyến bù với góc giữa hai bán kính qua tiếp điểm.
3. và $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^0$	3. Các góc đối của một tứ giác lồi nội tiếp bù nhau.
4. Nên $\widehat{EOH} + \widehat{FOG} = 180^0$	4. Suy từ 2 và 3.
5. $\widehat{EFH} + \widehat{FEG} = 90^0$	5. Nếu hai góc ở tâm của một đường tròn bù nhau, thì hai góc nội tiếp chắn hai cung đó phụ nhau.
6. Vậy $EG \perp FH$	6. Nếu hai góc của một tam giác phụ nhau, thì hai cạnh kề góc thứ ba vuông góc với nhau.

Những lý do 2, 5, 6 ở trên đều biến đổi từ các định lý của sách giáo khoa. Chứng minh như vậy chẳng đơn giản hơn trước là gì ?

Bài này còn có hai cách giải nữa mỗi cách giải đều có cách giải thường và cách giải đơn giản, bạn đọc nên đặc biệt lưu ý cách biến đổi định lý.

Cách giải II (thường).

Chứng minh — *Lý do*



Hình 125

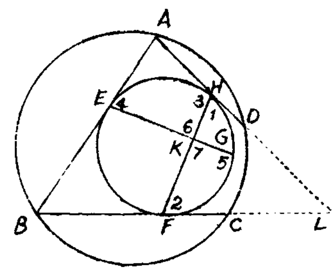
Chứng minh	*Lý do*
1. Nối EF, EH, FG	1. Theo phép dựng hình.
2. Có $\widehat{A} + \widehat{1} + \widehat{2} = 180^0$ $\widehat{C} + \widehat{3} + \widehat{4} = 180^0$	2. Tổng ba góc trong của tam giác bằng 180^0
3. $\widehat{A} + \widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{C} + \widehat{3} + \widehat{4} = 360^0$	3. Cộng từng vế của 2.
4. Nhưng từ $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^0$	4. Các góc đối của tứ giác lồi nội tiếp bù nhau.
5. Ta có : $\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} + \widehat{4} = 180^0$	5. Lấy 3 trừ đi 4.
6. Từ AE = AH, CF = CG	6. Hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm ở ngoài đường tròn thì bằng nhau.
Ta suy ra $\widehat{1} = \widehat{2}$, $\widehat{3} = \widehat{4}$	7. Góc đáy của tam giác cân bằng nhau.
8. $2.\widehat{1} + 2.\widehat{3} = 180^0$	8. Thay 7 vào 5.
9. Vậy $\widehat{1} + \widehat{3} = 90^0$	9. Suy từ 8.
10. Vì $\widehat{1} = \widehat{5}$, $\widehat{3} = \widehat{6}$	10. Góc giữa tiếp tuyến và một dây qua tiếp điểm bằng góc nội tiếp chắn cung dây đó trương.
11. Từ $\widehat{5} + \widehat{6} = 90^0$	11. Thay 10 vào 9.
12. và $\widehat{5} + \widehat{6} + \widehat{7} = 180^0$	12. Tổng 3 góc trong của một tam giác bằng 180^0.
có : $\widehat{7} = 90^0$	13. Lấy 12 trừ đi 11.
Do đó EG ⊥ FH	14. Hai cạnh của góc vuông vuông góc với nhau.

Cách giải II (đơn giản).

Chứng minh	*Lý do*
1. Giống như trước	1. Giống trước.
2. Từ AF = AH, CF = CG	2. Hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm ngoài đường tròn thì bằng nhau.
3. và $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^0$	3. Các góc đối của tứ giác lồi nội tiếp bù nhau.
4. Ta có $\widehat{1} + \widehat{3} = 90^0$	4. Nếu góc ở đỉnh của hai tam giác cân bù nhau, thì góc ở đáy của chúng phụ nhau.
5. Từ $\widehat{1} = \widehat{5}$, $\widehat{3} = \widehat{6}$	5. Góc giữa tiếp tuyến và một dây qua tiếp điểm bằng góc nội tiếp chắn cung dây đó trương.
6. Ta suy ra $\widehat{5} + \widehat{6} = 90^0$	6. Thay 5 vào 4.
7. Do đó EG ⊥ FH	7. Nếu hai góc của tam giác phụ nhau, thì hai cạnh của góc thứ ba vuông góc với nhau.

Cách giải III (thường).

Chứng minh	*Lý do*
1. Kéo dài AD và BC, chúng cắt nhau tại L.	1. Hai đường không //, thì phải giao nhau.



Hình 126

2. thì LH = LF	2. Hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm ngoài đường tròn thì bằng nhau.
3. $\widehat{1} = \widehat{2}$	3. Góc đáy của tam giác cân bằng nhau.
4. Từ $\widehat{1} + \widehat{3} = 180^0$	4. Hai cạnh ngoài của 2 góc kề nhau tạo thành một đường thẳng thì 2 góc đó bù nhau.
5. Ta có : $\widehat{2} + \widehat{3} = 180^0$	5. Thay 3 vào 4.
6. Tương tự như trên $\widehat{4} + \widehat{5} = 180^0$	6. Giống cách chứng minh 1 — 5.
7. Vì $\widehat{A} + \widehat{3} + \widehat{4} + \widehat{6} = \widehat{C} + \widehat{2} + \widehat{5} + \widehat{7} = 360^0$	7. Tổng các góc trong của tứ giác bằng 360^0.
8. $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^0$	8. Các góc đối của tứ giác lồi nội tiếp bù nhau.
9. Ta suy ra : $\widehat{6} + \widehat{7} = 180^0$	9. Lấy hai đẳng thức trong 7 trừ đi các đẳng thức trong 5, 6, 8.
10. Nhưng $\widehat{6} = \widehat{7}$	10. Góc đối đỉnh bằng nhau.
11. Vậy $2\widehat{6} = 180^0$	11. Thay 10 vào 9.
12. $\widehat{6} = 90^0$	12. Suy từ 11.
13. Do đó EG ⊥ FH	13. Hai cạnh của góc vuông vuông góc với nhau.

Nếu AD // BC, thì HF là đường kính, $\widehat{2} = \widehat{3} = 90^0$, và đẳng thức của 5, không cần chứng minh cũng đúng.

Cách giải III (đơn giản).

Chứng minh	*Lý do*
1. Từ $\widehat{2} + \widehat{3} = 180^0$ $\widehat{4} + \widehat{5} = 180^0$	1. Góc so le trong của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ 1 điểm ngoài đường tròn hợp thành với một cát tuyến qua 2 tiếp điểm thì bù nhau;
2. và $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^0$	2. Góc đối của tứ giác nội tiếp bù nhau.
3. Nên $\widehat{6} + \widehat{7} = 180^0$	3. Ba cặp góc của hai tứ giác bù nhau từng đôi một thì cặp góc thứ tư của chúng cũng bù nhau.
4. Vậy EG ⊥ FH	4. Góc đối đỉnh bù nhau, thì hai đường thẳng vuông góc với nhau.

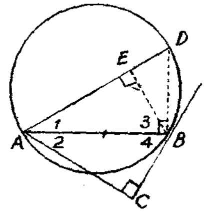
Lý do 4 trong cách giải II (đơn giản) và lý do 1, 3, 4 trong cách giải III (đơn giản) đều không có trong sách giáo khoa do ta biến đổi từ các định lý mà ra cả, nếu bạn thường xuyên dùng phương pháp này, nó sẽ giúp bạn rất nhiều trong khi tìm cách chứng minh một bài tập.

§ 2. TỪ CÁI CŨ SUY RA CÁI MỚI

Khi đã tìm được cách chứng minh một bài tập hình học rồi, ta không nên tự mãn, cho thế là đủ, mà nên đi sâu nghiên cứu thêm xem còn cách giải nào khác nữa không. Đối với những định lý đã học rồi hoặc những bài tập đã làm rồi, thì sau này khi học đến các định lý mới, nên nghiên cứu lại, thử xem từ các định lý mới có thể chứng minh được những định lý và bài tập trước kia không. Làm như vậy, không những sự suy xét của chúng ta tiến bộ hơn, mà còn là một cơ hội tốt để chúng ta luyện tập vận dụng các định lý và cách vẽ đường phụ, vì mỗi cách chứng minh cần dùng đến những định lý và đường phụ khác nhau. Những cơ hội tốt đó phải do bạn tự mình cố gắng tìm kiếm.

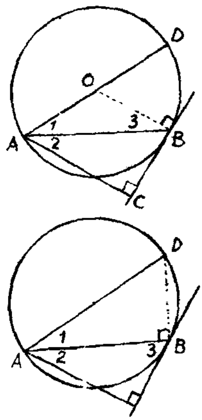
Như có một bài tập: « Tại đầu B của dây AB dựng tiếp tuyến BC, từ A dựng $AC \perp BC$ và kẻ đường kính AD. Chứng minh rằng $\widehat{DAB} = \widehat{BAC}$ ». Đây là một bài chứng minh hai góc bằng nhau. Nếu ta áp dụng các phương pháp chứng minh hai góc bằng nhau, sẽ được năm cách giải tất cả. Bây giờ ta thử phân tích tỉ mỉ từng cách giải một sau đây chỉ nêu phần suy xét, bạn đọc sẽ tự chứng minh lấy.

(1) Có thể áp dụng trường hợp bằng nhau của tam giác chứng minh được không? Từ $\widehat{ACB}$ vuông, ta dựng $BE \perp AD$, thì $\triangle ABC$ và $\triangle ABE$ có hai góc vuông bằng nhau và cạnh huyền chung chỉ cần có $\widehat{3} = \widehat{4}$ nữa là chúng bằng nhau. Làm thế nào để có $\widehat{3} = \widehat{4}$? Ta thấy $\widehat{4}$ là góc giữa tiếp tuyến và một dây qua tiếp điểm, nên bằng $\widehat{D}$, thế thì $\widehat{3}$ có thể bằng $\widehat{D}$ được không? Ta lại thấy $\widehat{ABD}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, vậy $\widehat{ABD}$ cũng là góc vuông, mà $\widehat{3}$ và $\widehat{D}$ đều cùng phụ với $\widehat{1}$, nên chúng



Hình 127

bằng nhau. Như vậy thì hai tam giác trên bằng nhau và có thể chứng minh được $\widehat{1} = \widehat{2}$.



Hình 128

(2) Ta có thể lợi dụng tam giác cân để chứng minh bài này không? $\widehat{1}$ là góc giữa dây AB và bán kính OA, nếu nối BO thì $\widehat{1}$ sẽ là góc đáy của tam giác cân, và $\widehat{1} = \widehat{3}$, $\widehat{2}$ có bằng $\widehat{3}$ được không? Muốn vậy thì AC phải song song với OB mới được. Điều đó rất dễ chứng minh, vì BC là tiếp tuyến nên $BC \perp OB$, mà $AC \perp BC$ thì giả thiết đã cho rồi.

(3) Ta có thể chứng minh bài này bằng tam giác đồng dạng không? Ta thấy $\widehat{2}$ là một góc của tam giác vuông ABC vậy $\widehat{1}$ có thể là một góc của một tam giác vuông nào đó không? Ta nối BD thì $\triangle ABD$ vuông, ta thấy thêm $\widehat{3} = \widehat{D}$, vậy $\widehat{1}$ cũng phải bằng $\widehat{2}$.

(4) Ta đã biết $\widehat{2}$ phụ với $\widehat{3}$ rồi, thế thì $\widehat{1}$ có thể phụ với một góc nào không? Có thể chứng minh hai góc cùng phụ với hai góc bằng nhau được không?

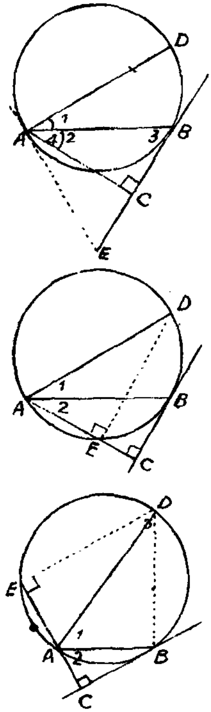
Nếu nối BD, thì $\widehat{1}$ phụ với $\widehat{D}$, ta lại trở lại cách chứng minh ở trên kia. Ta dựng tiếp tuyến tại A là AE, cắt BC hay BC kéo dài tại E, thì $\widehat{1}$ phụ với $\widehat{4}$.

Vì hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm ngoài đường tròn thì bằng nhau mà $\widehat{3}$ và $\widehat{4}$ là góc đáy của tam giác cân, nên chúng bằng nhau.

Vậy $\widehat{1}$ cũng phải bằng $\widehat{2}$.

(5) Nếu AC cắt đường tròn tại E, thì $\widehat{1}$ và $\widehat{2}$ đều là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BD}$ và $\overset{\frown}{BE}$, có thể áp dụng trường hợp hai cung bằng nhau thì góc nội tiếp chắn hai cung đó cũng bằng nhau để chứng minh bài này không?

Muốn có $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BE}$, ta nối DE, rồi ứng dụng định lý "một dây song song với tiếp tuyến, thì tiếp điểm chia đôi cung. bị trương" để chứng minh; vậy cần phải chứng minh DE//BC trước. Ta thấy DE và BC đều vuông góc với AC, nên chứng minh hai đường đó song song với nhau là một việc rất dễ.



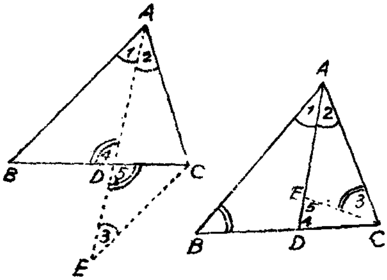
Hình 129

Xét cho kỹ các phương pháp chứng minh ở trên, ta thấy phương pháp cuối cùng chưa chặt chẽ lắm, vì AC chưa chắc đã cắt đường tròn, lúc ấy tuy ta vẫn được $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BE}$, nhưng chỉ được $\hat{1} = \hat{3}$, ta còn phải dựa vào định lý góc ngoài cửa tứ giác nội tiếp bằng góc trong đối diện với nó để chứng minh tiếp, rồi mới được $\hat{1} = \hat{2}$.

Trong trường hợp đặc biệt, AC lại là tiếp tuyến của đường tròn thì AD // CB, lý do để cho $\hat{1} = \hat{2}$ sẽ rất đơn giản.

Qua đó ta cũng thấy được một bài tập tuy có nhiều cách chứng minh, nhưng trong các phương pháp đó cũng có phương pháp không được hoàn thiện lắm, cho nên khi làm bài ta phải suy nghĩ chín chắn.

Trong quá trình học hình, ta có làm quen với một định lý quan trọng: « *đường phân giác của góc trong của một tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỷ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy* ». Phần chứng minh của định lý trong sách giáo khoa chắc bạn đọc đã rõ. Nhưng có một số sách giáo khoa xếp định lý này trước phần tam giác đồng dạng, nên phương pháp chứng minh khá phiền phức. Sau khi học các định lý về tam giác đồng dạng rồi, nếu bạn trở lại nghiên cứu định lý này bạn sẽ thấy phương pháp chứng minh định lý đó có phần dễ dàng hơn; bởi vì những định lý về tam giác đồng dạng không phải suy từ định lý này mà ra, nên cách chứng minh đó, về lý luận mà nói, không đến nỗi phạm sai lầm về mất hệ thống, đảo lộn thứ tự. Sau đây giới thiệu với các bạn một cách ngắn gọn hai phương pháp chứng minh mới của định lý này.



(1) (2)

Hình 130

(1) Từ C dựng đường song song với AB, cắt AD kéo dài tại E. Vì $\widehat{1} = \widehat{3}$, $\widehat{4} = \widehat{5}$, nên $\triangle ABD \sim \triangle ECD$, ta suy ra $AB : EC = BD : DC$. Nhưng $\widehat{2} = \widehat{1} = \widehat{3}$ nên $EC = AC$, thay vào tỷ lệ thức trên, ta có :

$$AB : AC = BD : DC$$

(2) Dựng CE sao cho $\widehat{3} = \widehat{B}$, ta có $\triangle ABD \sim \triangle ACE$, và suy ra : $AB : AC = BD : CE$. Từ $\widehat{4} = \widehat{1} + \widehat{B}$, $\widehat{5} = \widehat{2} + \widehat{3}$, ta có $\widehat{4} = \widehat{5}$, $CE = DC$ thay vào tỷ lệ thức trước được $AB : AC = BD : DC$.

Bị chú : Cách giải (2) là đặt giả thiết $\widehat{C} > \widehat{B}$, trong trường hợp $\widehat{C} < \widehat{B}$, thì ta lấy ở $\widehat{B}$ một phần góc bằng $\widehat{C}$, rồi chứng minh như cũ. Khi $\widehat{C} = \widehat{B}$, tam giác này là tam giác cân, việc chứng minh định lý này trở nên hết sức dễ dàng.

§ 3. BIẾN KHÓ THÀNH DỄ

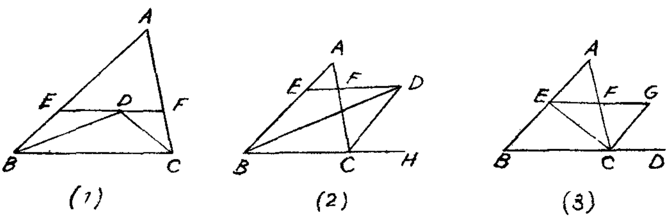
Có thể nói việc làm quan trọng nhất khi chứng minh một bài tập là phân tích suy xét, có tìm được phương pháp chứng minh hay không chủ yếu do việc làm này quyết định. Một bài tập dù khó đến đâu, sau các bước phân tích cần thiết, đều có thể biến đổi từng bước thành bài dễ. Cứ như vậy sẽ đi đến chỗ bài đã biến đổi thỏa mãn điều kiện của bài ra, và ta cũng giải quyết được bài khó. Phương pháp biến đổi bài khó thành dễ ta đã gặp nhiều trong các ví dụ trước. Vì đây là vấn đề rất quan trọng trong việc học môn hình học nên chúng tôi nêu thêm ví dụ để nghiên cứu kỹ hơn.

Chúng ta có ba bài tập sau đây :

(1) Trong $\triangle$ ABC, phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại D, dựng đường song song với BC đi qua D, cắt AB và AC tại E và F. Chứng minh rằng EF = BE + CF.

(2) Trong $\triangle$ ABC, phân giác của $\widehat{B}$ và của góc ngoài của $\widehat{C}$ cắt nhau tại D, dựng đường song song với BC đi qua D, cắt AB, AC tại E và F. Chứng minh rằng EF = BE — CF.

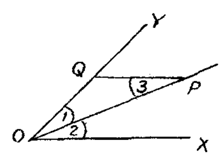
(3) Trong $\triangle$ ABC, phân giác của $\widehat{C}$ cắt AB tại E ; qua E dựng đường song song với BC cắt AC tại F, cắt đường phân giác của góc ngoài của $\widehat{C}$ tại G. Chứng minh rằng EF = FG.



Hình 131

Hình vẽ của ba bài này tuy có khác nhau, nhưng quan sát kỹ, ta thấy cả ba hình đó đều có một phần giống nhau như hình 132. Trong hình này, nếu biết $\widehat{1} = \widehat{2}$, QP//Ox, thì có thể chứng minh $\widehat{1} = \widehat{2} = \widehat{3}$, và $\triangle$ QOP cân, nghĩa là QP = = QO. Ta có thể đặt thành một bài tập như sau :

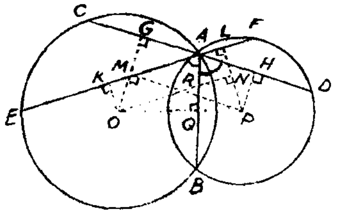
Từ một điểm trên đường phân giác của một góc dựng đường song song với một cạnh và cắt cạnh kia của góc, ta sẽ được một tam giác cân.



Hình 132

Bài này, người mới học hình cũng chứng minh được. Làm được bài này, thì cả ba bài trên ta cũng làm được. Trong bài (1) hoặc (2) dùng phương pháp này có thể chứng minh được ED = BE, DF = CF, rồi đem cộng hay trừ hai đẳng thức này với nhau, ta sẽ chứng minh được bài tập đó. Trong bài (3) ta cũng dùng phương pháp trên, sẽ được EF = = CF, FG = CF. So sánh hai đẳng thức này với nhau ta thấy EF = FG.

Dưới đây là một ví dụ khó hơn, ta đem bài này phân tích và biến đổi, làm cho nó trở thành bài dễ.



Hình 133

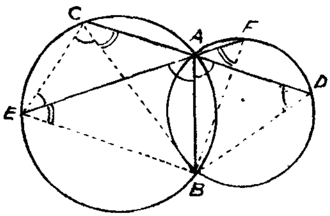
Cho hai đường tròn giao nhau, qua một giao điểm kẻ hai đường thẳng, sao cho góc giữa đường này với dây chung bằng góc giữa đường kia với dây chung. Chứng minh rằng phần đoạn thẳng giới hạn trong hai đường tròn của hai đường thẳng đó bằng nhau.

G.T.: Hai đường tròn tâm O và P giao nhau tại A và B, qua A kẻ hai đường thẳng CAD và EAF, cắt hai đường tròn tại các điểm C, D, E, F, và $\widehat{EAB} = \widehat{DAB}$.

K.L.: CD = EF.

Phân tích 1: Muốn trực tiếp chứng minh CD = EF thì rất khó, ta hãy biến đổi bài này. Vì mỗi đoạn thẳng trên đều tạo thành bởi hai dây của hai đường tròn, nên ta có thể lợi dụng đường thẳng qua tâm vuông góc với dây để chia đôi hai phần của mỗi đoạn thẳng đó. Như vậy là CD, EF đều còn lại một nửa là GH và KL. GH và KL đều là cạnh bên của các hình thang, chứng minh hai đoạn này bằng nhau dễ hơn một chút. Tuy vậy, chứng minh cạnh bên của hai hình thang bằng nhau vẫn còn khó, ta lại biến đổi nữa. Ta lợi dụng đường song song dời GH, KL đến vị trí mới MP và ON, vì MP và ON là cạnh của các tam giác vuông OPM và PON, nên muốn chứng minh chúng bằng nhau, ta phải chứng minh $\triangle OPM = \triangle PON$. Như vậy chẳng đơn giản hơn lúc đầu là gì? Hai tam giác vuông này có cạnh huyền chung, nếu có thêm một cặp đại lượng bằng nhau nữa thì chúng bằng nhau. Thế thì đại lượng ta cần là góc hay là cạnh? Giả thiết đã cho một cặp góc bằng nhau, không phải nói, ta cũng biết là cần góc. Ta tạm cho rằng $\widehat{NOP} = \widehat{MPO}$, rồi tìm cách chứng minh, như vậy bài lại đơn giản thêm một bước nữa. Từ đường nối tâm vuông góc với dây chung, ta biết $\widehat{NOP}$ phụ với $\widehat{ORQ}$. Nhưng $\widehat{ORQ} = \widehat{EAB}$, nên $\widehat{NOP}$ cũng phụ với $\widehat{EAB}$. Cũng chứng minh tương tự, ta sẽ có $\widehat{MPO}$ phụ với $\widehat{DAB}$ do đó $\widehat{NOP} = \widehat{MPO}$. Vậy hai tam giác vuông ở trên bằng nhau, và ta cũng suy được ra CD = EF.

Qua phân tích trên, ta thấy rõ cách biến đổi từng bước bài khó sang bài dễ. Cuối cùng ta sẽ tìm được cách chứng minh. Thực ra, các bước phân tích như vậy vẫn còn dài dòng, nếu ta tiến hành theo một hướng khác, thì thấy bài này cũng chưa thật khó lắm. Sau đây là cách phân tích thứ hai:



Hình 134

Phân tích 2: Ta làm cho CD và EF trở thành cạnh tương ứng của hai tam giác rồi chứng minh hai tam giác đó bằng nhau.

Ta nối CB, DB, EB, FB. Trong $\triangle CDB$ và $\triangle EFB$, có $\widehat{C} = \widehat{E}$, $\widehat{D} = \widehat{F}$, chỉ cần chứng minh thêm CB = EB nữa là được. Muốn cho CB = EB, tức là muốn cho $\triangle BCE$ cân, ta phải có $\widehat{BCE} = \widehat{BEC}$. Hai góc này có liên quan với cặp góc bằng nhau đã cho trong giả thiết. Chứng minh chúng bằng nhau cũng không lấy gì làm khó, nên ta có thể chứng minh được bài này.

§ 4. TỪ MỘT SUY RA BA

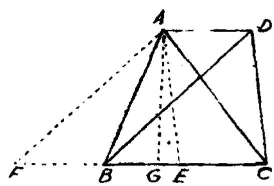
Chúng ta đã biết mỗi định lý đều có một định lý đảo, một định lý phản và một định lý phản đảo. Bốn định lý như vậy, thường có phương pháp chứng minh và cách dựng đường phụ giống nhau. Cho nên, nếu ta biết được phương pháp chứng minh một định lý rồi, gặp trường hợp phải chứng minh ba định lý kia, vẫn có thể áp dụng phương pháp trước chứng minh, làm cho ta đỡ mất công hơn. Sau khi chứng minh một định lý rồi, bạn đi sâu nghiên cứu thêm ba cách biến đổi của nó, bạn sẽ có một ấn tượng sâu sắc về phương pháp chứng minh và rút ra được nhiều kinh nghiệm mới. Các bạn học hình nhất thiết đừng bỏ qua cơ hội nghiên cứu này.

Sau đây là một ví dụ về tính chất của hình thang.

(1) Hai đường chéo của một hình thang cân bằng nhau.

Định lý này có thể chứng minh theo cách sau:

Từ A dựng AE // DC cắt BC tại E, dựng AF // DB cắt CB kéo dài tại F, dựng AG ⊥ BC. Ta sẽ có tứ giác AECD và tứ giác AFBD là ▱ ta suy ra AE = DC = AB, AF = DB, từ định lý



Hình 135

« trong tam giác cân, đường cao hạ từ đỉnh chia đôi cạnh đáy », ta có : BG = GE. Vì FB = AD = EC, nên FG = GC. Từ định lý đảo của định lý nêu ở trên, ta biết AF = AC hay là DB = AC.

Biết phương pháp chứng minh định lý này rồi, bây giờ cần chứng minh định lý đảo của nó.

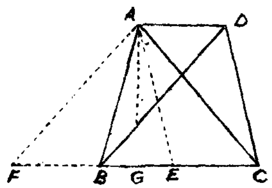
(2) Trong một hình thang có hai đường chéo bằng nhau. Chứng minh hình thang đó là hình thang cân.

Ta vẽ đường phụ như trước, và chứng minh như sau : Từ AF = DB = AC, ta suy ra FG = GC. Đem đẳng thức này trừ đi từng vế của FB = EC, được BG = = GE. Do đó ta biết được AB = AE = DC.

Sau đây là định lý phản của nó.

(3) Nếu hai cạnh của một hình thang không bằng nhau, thì hai đường chéo của nó cũng không bằng nhau, đường chéo đi qua đỉnh của góc xen giữa đáy lớn và cạnh bên lớn thì lớn hơn!

Ta vẫn vẽ đường phụ như trước và chứng minh như sau:



Hình 136

Nếu AB > DC thì AB > AE, từ định lý "trong hai đường xiên, đường nào có hình chiếu lớn thì lớn hơn", ta suy ra : BG > GE, đem cộng từng vế với FB = EC, được FG > GC.

Lại từ định lý đảo của định lý trên, ta có AF > AC hay DB > AC.

Khi chứng minh định lý phản đảo của nó :

(4) Nếu hai đường chéo của một hình thang không bằng nhau, thì hai cạnh bên cũng không bằng nhau, cạnh bên đi qua đỉnh của góc xen giữa đáy lớn và đường chéo lớn thì lớn hơn.

Phương pháp vẫn giống như trước. Ta chứng minh : Đặt giả thiết DB > AC, thì AF > AC, được FG > GC đem trừ từng vế với FB = EC, ta được BG > GE. Từ đó AB > AE hay AB > DC.

§ 5. LIÊN HỆ CÁC BÀI TẬP CÙNG LOẠI VỚI NHAU

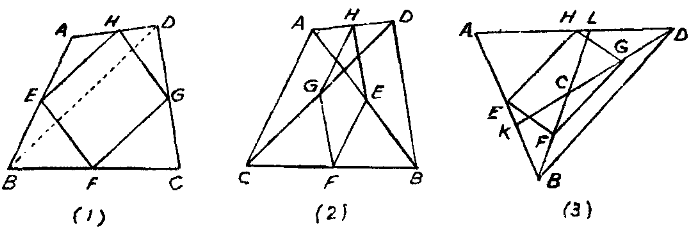
Bài tập hình học tuy nhiều, nhưng trong đó cũng có một số bài giống nhau về thực chất nội dung mà khác nhau về bề ngoài. Trong quá trình học tập, ta nên thường xuyên lưu ý, biết liên hệ những bài đó với nhau. Làm như vậy có một điều lợi là, đã làm được một bài, thì cũng làm được một bài khác cùng loại.

Thí dụ như ba bài dưới đây:

(1) Chứng minh rằng tứ giác có bốn đỉnh là các trung điểm của bốn cạnh của một tứ giác là một hình bình hành.

(2) Nối liền trung điểm của hai cạnh đối nhau với trung điểm của hai đường chéo của một tứ giác. Chứng minh tứ giác tạo thành là hình bình hành.

(3) Cho tứ giác AKCL, AK, LC kéo dài cắt nhau tại B, AL, KC kéo dài cắt nhau tại D; E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, BC, CD, DA. Chứng minh tứ giác EFGH là hình bình hành.



Hình 137

Trông bề ngoài, ba bài này hoàn toàn khác nhau, nhưng thực chất nội dung của chúng lại giống nhau vì những lý do sau:

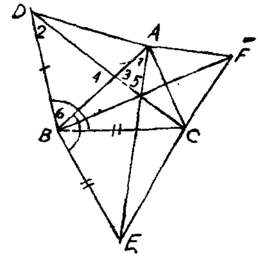
Nếu đem cạnh BC của tứ giác ABCD trong hình (1) quay 180^0 xung quanh tâm B, ta sẽ được hình (2). Và nếu đem đổi $\widehat{C}$ của hình (1) bằng một góc lớn hơn 180^0 thì ta sẽ được hình (3). Phương pháp chứng minh của ba bài này đều dựa vào định lý đường trung bình của tam giác.

Chứng minh EH $\overset{//}{=} \frac{1}{2}$ BD và FG $\overset{//}{=} \frac{1}{2}$ BD trước, rồi mới chứng minh EH $\overset{//}{=}$ FG và xác định tứ giác EFGH là ▱.

Cũng có khi hình vẽ của mấy bài tập nào đó trông khác nhau hoàn toàn, nhưng trong các hình đó lại có một phần giống nhau, thì cách chứng minh của chúng cũng giống nhau. Như trong hai bài dưới đây, tuy chúng có khác nhau về hình vẽ: một bài là tam giác, bài kia là tứ giác, nhưng hai hình đó đều chứa những tam giác bằng nhau có những tính chất giống nhau:

(1) Cho Δ ABC, lấy các cạnh làm cạnh dựng các tam giác đều ABD, BCE, CAF ra phía ngoài của tam giác.

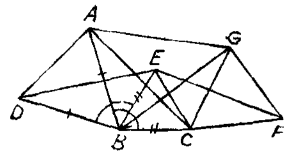
Chứng minh: CD = AE = BF.



(1)

(2) Cho tứ giác ABCG, lấy AB và CG làm cạnh dựng các tam giác đều ABD, CGF ra phía ngoài của tứ giác và lấy BC làm cạnh dựng Δ BCE đều vào phía trong của tứ giác.

Chứng minh rằng DE = AC, EF = BG.



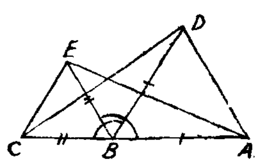
(2)

Hình 138

Trong hình (1), có $\widehat{DBA} = \widehat{CBE} = 60^0$ mỗi vế cộng thêm $\widehat{ABC}$, ta được $\widehat{DBC} = \widehat{ABE}$. Từ DB = AB, BC = BE, ta có:

Δ DBC = Δ ABE và suy ra CD = AE, cũng làm tương tự như trên, ta sẽ chứng minh được bài (1). Trong hình (2), ta cũng có thể áp dụng phương pháp như ở bài (1). Chứng minh hai tam giác bằng nhau.

Ngoài các bài trên, hai bài sau đây cũng có thể áp dụng phương pháp trên để chứng minh:



(3)

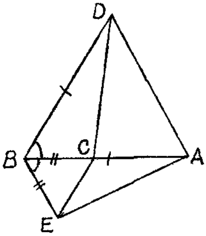
Hình 139

(3) Ba điểm A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng. Lấy AB, BC làm cạnh dựng các tám giác đều ABD, BCE về cùng một phía của đường thẳng.

Chứng minh AE = CD.

(4) Ba điểm A, C, B cùng nằm trên một đường thẳng. Lấy AB, CB làm cạnh, dựng các tam giác đều ABD, CBE về hai bên của đường thẳng đó.

Chứng minh rằng AE = CD.



Hình 140

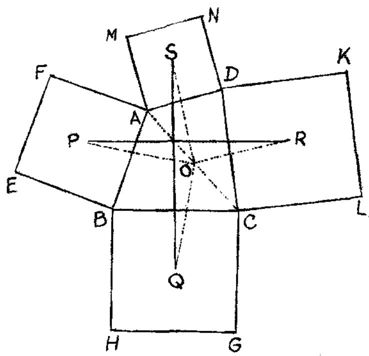
Trong bốn bài trên, sau khi chứng minh rồi, ta còn có thể chứng minh thêm góc xen giữa hai đoạn thẳng bằng nhau ấy bằng 60^0, và cách chứng minh của bốn bài đều giống nhau.

Như trong bài (1), từ các tam giác bằng nhau, ta suy ra $\widehat{1} = \widehat{2}$, rồi từ định lý về góc đối đỉnh, ta có $\widehat{3} = \widehat{4}$, dựa vào định lý " hai tam giác có hai góc tương ứng bằng nhau từng đôi một thì góc thứ ba của chúng cũng bằng nhau ", ta suy ra $\widehat{5} = \widehat{6} = 60^0$.

Những bài trên còn có thể mở rộng và biến đổi, thay tam giác đều bằng hình vuông, kết quả ta vẫn được hai đoạn thẳng bằng nhau và chúng vuông góc với nhau. Ba bài dưới đây, vẫn có cùng một phương pháp chứng minh như bốn bài trước.

(5) Lấy hai cạnh AB, AC của △ABC làm *cạnh*, dựng các hình vuông ABDE, ACFG ra phía ngoài của tam giác. Chứng minh BG = CE, BG ⊥ CE. Xem hình ở ví dụ 23.

(6) Trên đoạn thẳng AB lấy một điểm C tùy ý, lấy AC, CB làm cạnh dựng các hình vuông ACDE, CBFG về cùng phía với AB. Chứng minh rằng AG = DB, AG ⊥ DB. Hình vẽ giống ví dụ 22.



Hình 141

(7) Lấy bốn cạnh của tứ giác ABCD làm cạnh dựng các hình vuông ABEF, BCGH, CDKL, DAMN ra phía ngoài của tứ giác. P, Q, R, S lần lượt là tâm của các hình vuông trên. Chứng minh.

$$PR = QS \text{ và } PR \perp QS$$

Muốn chứng minh bài này, cần nối AC, lấy trung điểm của AC là O, theo ví dụ 23, chứng minh PO = QO và PO ⊥ QO RO = SO và RO ⊥ SO trước, rồi mới áp dụng phương pháp chứng minh ở trên..

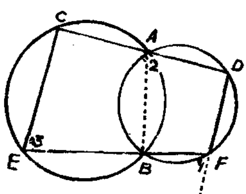
§ 6. BIẾN ĐỔI LIÊN TỤC HÌNH VẼ

Hình vẽ của các ví dụ ở mục trước, phần lớn biến đổi từ một hình mà ra, cho nên phương pháp chứng minh những bài đó gần như giống nhau hoàn toàn. Như trong bài (1), các cạnh AB và BC không cùng nằm trên một đường thẳng, nếu ta cố định điểm B, quay Δ BCE làm cho AB và BC nối nhau thành một đường thẳng, thì ta sẽ được hình của bài (3); làm cho BC trùng với AB thì được bài (4). Và nếu cố định BC, gấp Δ BCE (bằng phép đối xứng qua trục) theo đường BC rồi cho quay quanh điểm B, ta sẽ được nửa hình bên trái của bài (2).

Lợi dụng sự biến đổi liên tục của hình vẽ, ta có thể đem một bài tập biến đổi thành nhiều bài tập khác. Và nếu ta làm được một trong những bài đó, thì các bài khác cũng có thể áp dụng cùng một phương pháp để chứng minh, đỡ mất nhiều thì giờ suy xét.

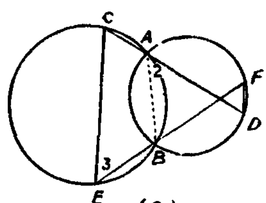
Dưới đây là một bài tập thường, đem hình vẽ này biến đổi liên tục, ta sẽ được hai mươi ba hình vẽ khác nhau, nên ta cũng có hai mươi ba bài tập khác nhau :

(1) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, qua A và B kẻ hai đường thẳng CAD cắt hai đường tròn tại C và D, EBF cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh rằng CE // DF.



(1)

Hình 142



(2)

Hình 143

Bài này có nhiều cách chứng minh sau đây là một trong các phương pháp chứng minh đó :

Nối AB, kéo dài DF, ta có $\widehat{1} = \widehat{2} = \widehat{3}$ vậy CE // DF.

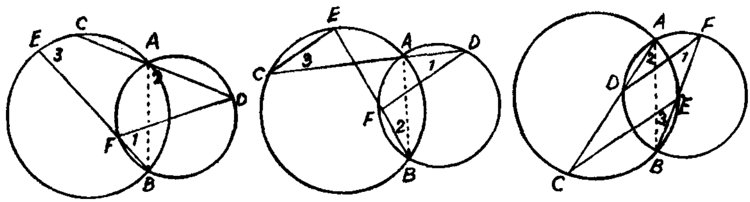
Hình vẽ của năm bài sau tuy khác (1) nhưng phương pháp chứng minh thì giống nhau.

(2) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, qua A và B kẻ hai đường thẳng, CAD cắt hai đường tròn tại C và D, EBF cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh CE // FD (ký hiệu CE và FD như vậy chỉ cả hướng).

(3) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, qua A và B kẻ hai đường thẳng, CAD cắt hai đường tròn tại C và D, BFE cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh rằng CE // DF.

(4) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, qua A và B kẻ hai đường thẳng, CAD cắt hai đường tròn tại C và D, BFE cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh CE // FD (FD khác hướng với DF của bài trước).

(5) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, qua A và B kẻ h i đường thẳng, ADC cắt hai đường tròn tại C và D, BEF cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh CE // DF.



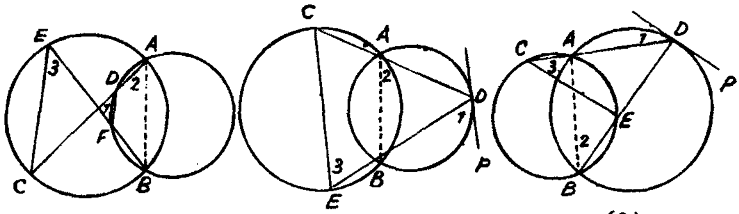
(3) (4) (5)

Hình 144

(6) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, qua A và B kẻ hai đường thẳng, ADC cắt hai đường tròn tại C và Q, BFE cắt hai đường tròn tại E và R. Chứng minh CE // FD (hình 6).

Trong hình 6, nếu D trùng với F, thì dây cuug DF sẽ trở thành tiếp tuyến qua điểm trùng nhau đó, và ta lại có thêm ba bài tập khác :

(7) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, qua A kẻ đường thẳng cắt hai đường tròn tại C và D, DB kéo dài cắt đường tròn tại E, tiếp tuyến tại điểm D là DP. Chứng minh CE//DP (hình 7).



(6) (7) (8)

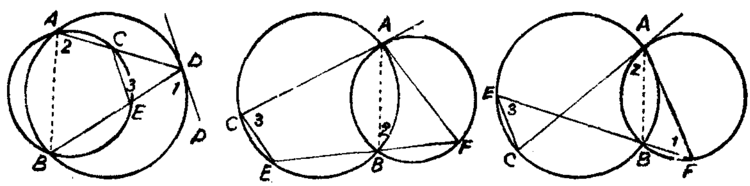
Hình 145

(8) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, qua A kẻ một đường thẳng cắt hai đường tròn tại C và D, DB cắt đường tròn tại E, tiếp tuyến tại điểm D và DP. Chứng minh CE // DP.

(9) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, qua A kẻ đường thẳng ACD cắt đường tròn tại C và D, BD cắt đường tròn tại E, tiếp tuyến tại điểm D là DP. Chứng minh CE // DP (hình 9).

Nếu D trùng với A, thì CA trở thành tiếp tuyến của một trong hai đường tròn, và ta lại có thể biến đổi hình vẽ, kết quả được thêm bốn bài tập dưới đây :

(10) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, dựng tiếp tuyến của một đường tròn tại A, cắt đường tròn kia tại C, kẻ đường thẳng EBF đi qua B cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh CE // AF (hình 10).



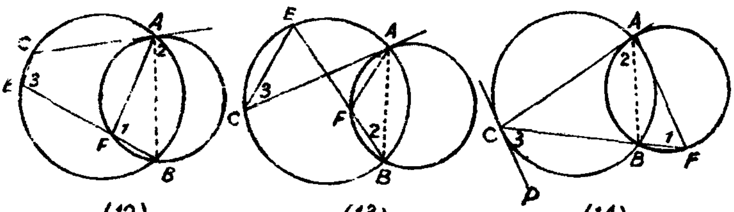
(9) (10) (11)

Hình 146

(11) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, dựng tiếp tuyến của một đường tròn tại A cắt đường tròn kia tại C, kẻ đường thẳng EBF đi qua B, cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh CE // FA.

(12) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, dựng tiếp tuyến của một đường tròn tại A cắt đường tròn kia tại C, kẻ đường thẳng BFE đi qua B cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh CE // AF (hình 12).

(13) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, dựng tiếp tuyến của một đường tròn tại A cắt đường tròn kia tại C. Kẻ đường thẳng BFE đi qua B cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh CE // FA.



(12) (13) (14)

Hình 147

Nếu D trùng với A đồng thời E cũng trùng với C, thì ta có hai bài sau:

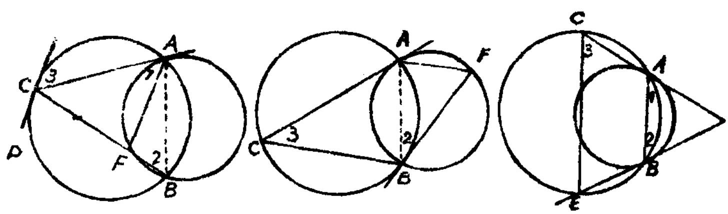
(14) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, dựng tiếp tuyến của một đường tròn tại A cắt đường tròn kia tại C. CB kéo dài cắt một đường tròn tại F và tiếp tuyến của đường tròn tại điểm C là CP.

Chứng minh CP // AF (hình 14).

(15) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B dựng tiếp tuyến của một đường tròn tại A cắt đường tròn kia tại C. CB cắt một đường tròn tại F, tiếp tuyến của đường tròn tại điểm C là CP. Chứng minh CP // AF (hình 15).

Nếu D trùng với A, và E cũng trùng với B, thì ta có bài sau:

(16) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, dựng tiếp tuyến của một đường tròn tại A, cắt đường tròn kia tại C; ta lại dựng tiếp tuyến của đường tròn thứ hai tại B, cắt đường tròn thứ nhất tại F. Chứng minh CB // AF.



(15) (16) (17)

Hình 148

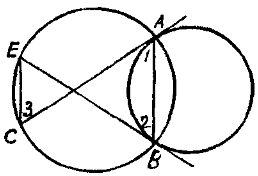
Nếu D trùng với A, đồng thời F trùng với B, thì ta có thêm hai bài sau :

(17) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, dựng tiếp tuyến của cùng một đường tròn tại A và B cắt đường tròn kia tại C và E. Chứng minh CE // AB.

(18) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, dựng tiếp tuyến của cùng một đường tròn tại A và B cắt đường tròn kia tại C và E. Chứng minh CE // BA.

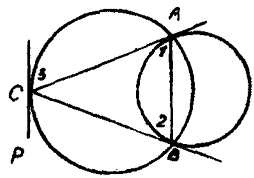
Nếu D trùng với A, F trùng với B, mà E cũng trùng với C nữa, ta có bài sau :

(19) Cho hai đường tròn giao nhau tại A và B, dựng tiếp tuyến của cùng một đường tròn tại A và B, giao điểm C của hai tiếp tuyến đó nằm trên đường tròn kia, tiếp tuyến của đường tròn đó tại C là CP. Chứng minh CP // AB.



(18)

Hình 149



(19)

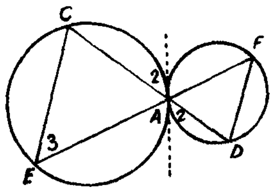
Hình 150

Các bài tập trên đều do sự biến đổi liên tục vị trí của hai đường thẳng qua hai giao điểm của hai đường tròn mà có.

Sau cùng, ta hãy biến đổi vị trí của hai đường tròn, cho A trùng với B, lúc ấy hai đường tròn tiếp xúc với nhau, và được thêm hai bài tập khác. Ta chỉ cần vẽ thêm một tiếp tuyến chung, còn phương pháp chứng minh vẫn như cũ.

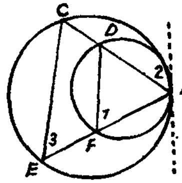
(20) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A. Kẻ hai đường thẳng CAD và EAF, cắt hai đường tròn tại C, D và E, F. Chứng minh CE // FD.

(21) Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau tại A. Kẻ hai đường thẳng đi qua A, ADC cắt hai đường tròn tại C và D, AFE cắt hai đường tròn tại E và F. Chứng minh CE // DF.



(20)

Hình 151



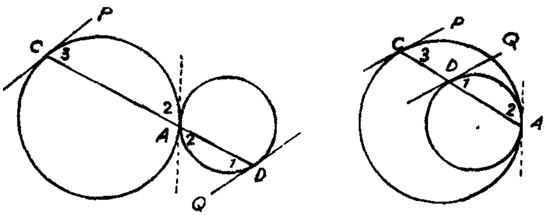
(21)

Hình 152

Trong hình trên, nếu F trùng với D, đồng thời E trùng với C, thì ta lại được thêm hai bài sau:

(22) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Kẻ đường thẳng CAD đi qua A và cắt hai đường tròn tại C và D; CP là tiếp tuyến tại điểm C, DQ là tiếp tuyến tại điểm D. Chứng minh CP // QD.

(23) Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau tại điểm A. Kẻ đường thẳng ADC đi qua A cắt hai đường tròn tại C và D, CP là tiếp tuyến tại điểm C, DQ là tiếp tuyến tại D. Chứng minh CP // DQ.



(22) (23)

Hình 153

§ 7. VẬN DỤNG NHỮNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT

Trong một số bài tập hình học, giả thiết và kết luận hầu như không liên quan gì với nhau, các yếu tố có liên quan với nhau trong hình vẽ cũng khó trông thấy, trong trường hợp ấy, ta cần phải vận dụng những phương pháp đặc biệt để chứng minh. Vận dụng phương pháp đặc biệt chẳng qua là đem đổi vị trí một phần nào đó của hình vẽ làm cho nó trở nên có liên hệ với một phần khác, giúp ta tìm được phương pháp chứng minh. Nếu bạn để ý thì thấy những phương pháp này đã từng ứng dụng nhiều trong các ví dụ. Trong những phương pháp đặc biệt, phép tịnh tiến được ứng dụng nhiều nhất, ngoài ra, người ta còn ứng dụng phép đối xứng qua tâm và đối xứng qua đường thẳng, ta đã gặp nhiều ứng dụng này trong các ví dụ của chương trước và chương này. Bây giờ giới thiệu với các bạn một ví dụ đặc biệt nữa :

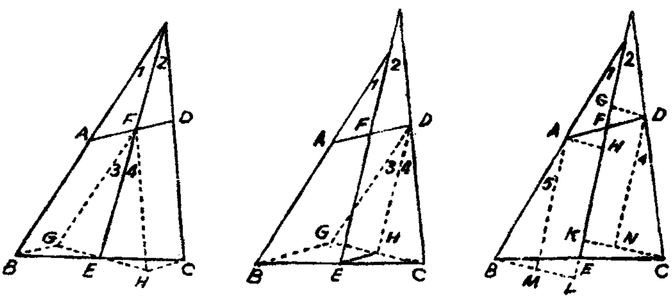
Một tứ giác có hai cạnh đối diện bằng nhau. Chứng ming rằng hai góc, tạo thành bởi hai cạnh đối diện bằng nhau kéo dài và đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đối kia bằng nhau.

G.T.: Trong tứ giác ABCD, AB = DC, E, F là các trung điểm của BC, AD. BA, EF, CD kéo dài tạo thành $\widehat{1}$ và $\widehat{2}$.

K.L. : $\widehat{1} = \widehat{2}$.

Nếu áp dụng phương pháp tịnh tiến, ta sẽ được bốn cách chứng minh khác nhau. Một trong những cách đó đã chỉ dẫn trong bài (5) của bài tập hai, dưới đây là ba cách chứng minh còn lại :

(1) Tịnh tiến AB, DC đến FG, FH tức là tạo thành ▱ ABGF và ▱ DCHF, thì $BG \underline{\underline{/\!/}} AF \underline{\underline{/\!/}} FD \underline{\underline{/\!/}} HC$, vậy ta biết tứ giác BHCG cũng



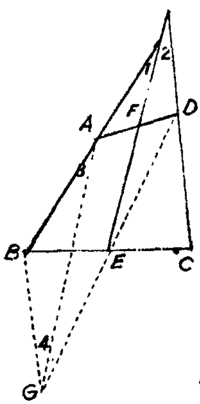
(1) (2) (3)

Hình 154

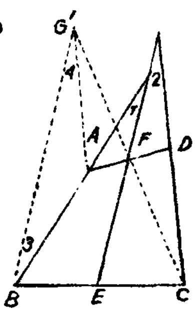
là ▱ và GH sẽ đi qua trung điểm của BC là E. Từ GE = EH và giả thiết, ta biết ΔFGH cân, FE là trung tuyến trên cạnh đáy, nên $\widehat{3} = \widehat{4}$. Nhưng $\widehat{1}$ và $\widehat{3}$, $\widehat{2}$ và $\widehat{4}$ đều là góc đồng vị của hai đường song song hợp với cát tuyến EF, do đó $\widehat{1} = \widehat{2}$.

(2) Tịnh tiến AB đến vị trí mới DG, tạo thành ▱ABGD, lấy trung điểm của GC là H, thì EH $\overset{//}{=} \frac{1}{2}$ BG $\overset{//}{=} \frac{1}{2}$ AD $\overset{//}{=}$ FD, nên tứ giác FEHD cũng là ▱, ta có DH // FE, $\widehat{1}$ và $\widehat{3}$ là góc có cạnh tương ứng song song cùng chiều, nên chúng bằng nhau, ta tiếp tục áp dụng phương pháp chứng minh ở (1), cuối cùng sẽ được $\widehat{1} = \widehat{2}$.

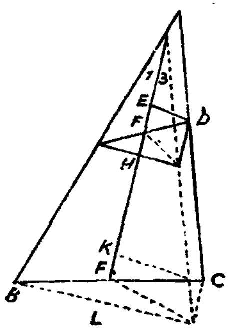
(3) Tịnh tiến $\widehat{1}$, $\widehat{2}$ đến vị trí $\widehat{3}$, $\widehat{4}$, dựng AH, BL, CK, DG $\perp$ EF ta có Δ AHF = Δ DGF và Δ BLE = Δ CKE, ta rút ra được AH = DG, BL = CK. Từ phép dựng và chứng minh trên, ta có tứ giác AMLH và tứ giác DNKG là những ▱ và suy ra: ML = AH = DG = NK, BM = = CN, vậy Δ ABM = Δ DCN, ta có $\widehat{3} = \widehat{4}$, do đó $\widehat{1} = \widehat{2}$.



Hình 155



Hình 156



Hình 157

Nếu ta ứng dụng phép đối xứng qua tâm, sẽ được hai cách chứng minh sau:

(1) Lấy E làm tâm cho △ ECD quay 180^0 thành △ EBG. Ta có $AB = DC = BG$ và $\widehat{3} = \widehat{4}$. Từ $DF = FA$, $DE = EG$ ta suy ra AG // FE. Vì BC, GD cắt nhau tại trung điểm nên tứ giác BGCD là ▱ ta có BG // DC. Do đó $\widehat{3} = \widehat{1}$, $\widehat{4} = \widehat{2}$ và ta chứng minh được $\widehat{1} = \widehat{2}$.

(2) Lấy F làm tâm cho △ FDC quay 180^0 thành △ FAG, cũng áp dụng phương pháp chứng minh ở trên, ta có GB // FE, GA // DC và suy được $\widehat{1} = \widehat{3} = \widehat{4} = \widehat{2}$.

Nếu áp dụng phương pháp đối xứng qua đường thẳng, thì chứng minh rất dài dòng. Ở đây chỉ có tính chất tham khảo khi làm bài áp dụng các phương pháp trước tiện hơn.

Lấy EF làm trục đối xứng gấp hình vẽ, chuyển AB đến vị trí MN, AM, BN cắt FE tại H và L dựng DG, CK $\perp$ FE, từ đó ta suy ra AM và BN cũng vuông góc với FE và $AH = HM$, $BL = LN$.

Áp dụng phương pháp tịnh tiến ở (3) ta có thể chứng minh $GK = HL$, lấy từng vế của đẳng thức này trừ đi HK được: $GH = KL$. Vì FE nối liền trung điểm hai cạnh của các △ ADM và △ BCN nên ta biết tứ giác GHMD và tứ giác KLNC là ▱ và có: $DM = CN$. Nhưng $MN = AB = DC$, vậy tứ giác MNCD cũng là ▱ ta suy ra MN // DC, $\widehat{1} = \widehat{3} = \widehat{2}$ (hình 157).

MỤC LỤC

Chương I — KIẾN THỨC CƠ BẢN

Chương II — CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC
VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

BẢNG ĐÍNH CHÍNH

Trang	Dòng	IN SAI	SỬA LẠI
32	15	$\widehat{BCG}$	$\widehat{FCG}$
36	9 dl	*CGLD là , với nhau là*	CGLD là ▱, với nhau là ▱
	8 dl	*Cạnh đối của*	Cạnh đối của ▱
98	6 dl	*AC và O*	AC là O
133	11	*ADCD*	ABCD
135	10	*△ BOB đều*	△ AOB đều
		△ AOB	△ AOD

www.facebook/otoanhoc2911

ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC
VÀ CÁC PHƯƠNG
PHÁP CHỨNG MINH

*NHÀ XUẤT BẢN
GIÁO DỤC*

In 150 000 cuón khổ
14,5 × 20,5 tại nhà In
TRƯỜNG SƠN — 178/1
Phan Đăng Lưu — Phú
Nhuận — Thành phố Hồ
Chí Minh.

In xong tháng 12 - 1976

Nộp lưu chiểu tháng 12-
1976

★

Giá : 0.45 đ