NGUYỄN CHÍN EM

TÀI LIỆU TỰ HỌC

TOÁN 9

MỤC LỤC

PHẦN I ĐẠI SỐ 1

CHƯƠNG 1 CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA 3

1 CĂN BẬC HAI 3

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 3

1 Căn bậc hai của một số 3

2 So sánh các căn bậc hai số học 3

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 3

1 Ví dụ minh họa 3

2 Bài tập tự luyện 6

2 CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$ 10

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 10

B CÁC DẠNG TOÁN 10

1 Phá dấu trị tuyệt đối 10

2 Điều kiện để $\sqrt{A}$ có nghĩa 10

3 Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ 11

4 Phương trình - Bất phương trình 14

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 15

3 LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG 21

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 21

1 Định lí 21

2 Khai phương một tích 21

3 Nhân các căn thức bậc hai 21

B CÁC DẠNG TOÁN 21

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 26

4 LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG 32
A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 32
B DẠNG TOÁN 32
1 Khai phương một thương 32
2 Chia hai căn thức bậc hai 32
C PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 32
D BÀI TẬP TỰ LUYỆN 36
5 BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI 41
A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 41
1 Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn 41
2 Đưa một thừa số vào trong dấu căn 41
3 Khử mẫu của biểu thức lấy dấu căn 41
4 Trục căn thức ở mẫu 41
B CÁC DẠNG TOÁN 41
1 Đưa một thừa số vào trong hoặc ra ngoài dấu căn 41
2 Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn-Phép nhân liên hợp 43
3 Sử dụng các phép biến đổi căn thức bậc hai cho bài toán rút gọn và chứng minh đẳng thức 44
4 Sử dụng các phép biến đổi căn thức bậc hai giải phương trình 47
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 48
6 RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN BẬC HAI 54
A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 54
B CÁC DẠNG TOÁN 54
1 Thực hiện phép tính rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai 54
2 Giải phương trình 62
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 63

7 CĂN BẬC BA - CĂN BẬC n 67

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 67

1 Căn bậc ba 67

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 67

1 Thực hiện các phép tính với căn bậc 3 và bậc n 67

2 Khử mẫu chứa căn bậc ba 74

3 Giải phương trình chứa căn bậc ba 74

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 75

CHƯƠNG 2 HÀM SỐ BẬC NHẤT 77

1 NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ 77

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 77

1 Khái niệm hàm số và đồ thị 77

2 Tập xác định của hàm số 77

3 Hàm số đồng biến, nghịch biến 77

B CÁC DẠNG TOÁN 77

1 Sự xác định của một hàm số 77

2 Tìm tập xác định của hàm số 78

3 Xét tính chất biến thiên của hàm số 82

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 85

2 HÀM SỐ BẬC NHẤT 96

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 96

1 Định nghĩa 96

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 96

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP 98

3 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT 101

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 101

1 Đồ thị của hàm số $y = ax$ với $a \neq 0$ 101

2 Đồ thị của hàm số $y = ax + b$, $a \neq 0$ 101

3 Cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất 101

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 102

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP 106

4 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU 110

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 110

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 110

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP 114

5 HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG 118

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 118

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 118

1 Hệ số góc của đường thẳng 118

2 Lập phương trình đường thẳng biết hệ số góc 119

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 122

PHẦN II HÌNH HỌC 125

CHƯƠNG 1 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG 127

1 MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC VUÔNG 127

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 127

1 Hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền 127

2 Một số hệ thức liên quan tới đường cao 127

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 127

1 Giải các bài toán định lượng 128

2 Giải các bài toán định tính 128

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 129

2 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC 134

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 134

1 Tỉ số lượng giác 134

2 Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt 134

3 Hàm số lượng giác của hai góc phụ nhau 134

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 134

1 Giải các bài toán định lượng 134

2 Giải các bài toán định tính 135

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 135

CHƯƠNG 2 ĐƯỜNG TRÒN 139

1 SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN - TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN 139

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 139

1 Nhắc lại về đường tròn 139

2 Cách xác định đường tròn 139

3 Tâm đối xứng - Trục đối xứng 140

B CÁC DẠNG TOÁN 140

1 Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn 140

2 Quỹ tích điểm là một đường tròn 142

3 Dựng đường tròn 144

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 145

2 ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN 152

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 152

1 So sánh độ dài của đường kính và dây 152

2 Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây 152

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 152

1 Giải bài toán định tính và định lượng 152

2 Giải bài toán dựng hình 154

3 Giải bài toán quỹ tích 154

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN 155

3 LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY 158

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT 158

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 158

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP 158

4 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN 160

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 160

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 160

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP 162

5 TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN 166

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 166

1 Các tính chất của tiếp tuyến 166

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 166

1 DỰNG TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN 166

2 GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH VÀ ĐỊNH LƯỢNG 168

3 Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn 170

4 Sử dụng tính chất tiếp tuyến để tìm quỹ tích 172

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN 173

6 TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU 181

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT 181

1 ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC 181

2 ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC 181

B	PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	182
C	BÀI TẬP LUYỆN TẬP	183
D	HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ	184
7	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN	187
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	187
1	Hai đường tròn có hai điểm chung	187
2	Hai đường tròn chỉ có một điểm chung	188
3	Hai đường tròn không có điểm chung	189
4	Một số tính chất	190
B	PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	191
C	BÀI TẬP LUYỆN TẬP	195

PHẦN

I

ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1

CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

BÀI 1. CĂN BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ

Định nghĩa 1. Căn bậc hai số học của một số $a \geq 0$ là một số x không âm mà bình phương của nó bằng a. Ký hiệu $\sqrt{a}$.

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}, \text{ với } a \geq 0.$$

Tổng quát trên $\mathbb{R}$:

① Mọi số dương $a > 0$ có hai căn bậc hai là hai số đối nhau.

— $\sqrt{a} > 0$ gọi là căn bậc hai số học hay còn gọi là căn bậc hai dương của a.

— $-\sqrt{a} < 0$ gọi là căn bậc hai âm của a.

② Số 0 có căn bậc hai duy nhất là 0.

③ Số âm không có căn bậc hai.

2 SO SÁNH CÁC CĂN BẬC HAI SỐ HỌC

Định lí 1. *Với hai số a, b không âm, ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.*

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính $\sqrt{16}; \sqrt{1{,}44}; \sqrt{(-8)^2}$.

Lời giải.

Ta có

① $\sqrt{16} = 4$ vì $4 > 0$ và $4^2 = 16$.

② $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ vì $1{,}2 > 0$ và $(1{,}2)^2 = 1{,}44$.

③ $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$ vì $8 > 0$ và $8^2 = 64$.

⚠ *Rất nhiều học sinh nhầm lẫn công thức*

$$\sqrt{a^2} = a, \text{ dẫn tới cho rằng } \sqrt{(-8)^2} = -8.$$

Cần chú ý rằng $\sqrt{a^2} = |a|$, *do đó* $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$.

□

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau

① $\sqrt{0{,}16} + \sqrt{\dfrac{4}{25}}$.

② $\sqrt{3\dfrac{1}{16}} - \sqrt{0{,}36}$.

Lời giải.

① $\sqrt{0{,}16} + \sqrt{\dfrac{4}{25}} = \sqrt{\left(\dfrac{4}{10}\right)^2} + \sqrt{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{5}$.

② $\sqrt{3\frac{1}{16}} - \sqrt{0{,}36} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^2} = \frac{7}{4} - \frac{3}{5} = \frac{23}{20}$.

□

Ví dụ 3. Trong các số $\sqrt{(-3)^2}; \sqrt{3^2}; -\sqrt{(-3)^2}; -\sqrt{3^2}$ số nào là căn bậc hai số học của 9.

✍ Lời giải.

Ta có $\sqrt{9} = 3$, mà

- $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3 > 0$.
- $\sqrt{3^2} = |3| = 3 > 0$.
- $-\sqrt{(-3)^2} = -|-3| = -3 < 0$.
- $-\sqrt{3^2} = -|3| = -3 < 0$.

Vậy $\sqrt{(-3)^2}; \sqrt{3^2}$ là căn bậc hai số học của 9. □

Ví dụ 4. Tìm x, biết

① $x^2 = \frac{16}{9}$.

② $(x-1)^2 = \frac{1}{9}$.

✍ Lời giải.

① Ta có $x^2 = \frac{16}{9}$

$x^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$x = \frac{4}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right\}.$$

② Ta có $(x-1)^2 = \frac{1}{9}$

$(x-1)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$x - 1 = \frac{1}{3}$ hoặc $x - 1 = -\frac{1}{3}$

$x = \frac{4}{3}$ hoặc $x = \frac{2}{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right\}.$$

□

Nhận xét. *Như vậy, thông qua ví dụ trên chúng ta đã làm quen được với việc sử dụng khái niệm căn bậc hai để tìm nghiệm của phương trình. Tuy nhiên chúng ta chỉ mới bắt đầu với phương trình dạng $x^2 = a^2$ hoặc cần biến đổi đôi chút để có được dạng này hoặc sử dụng hằng đẳng thức, cụ thể*

$$x^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{4}{3}.$$

Ví dụ tiếp theo sẽ nâng mức tiếp cận cho chúng ta.

Ví dụ 5. Tìm x, biết

① $x^2 = 4 - 2\sqrt{3}$.

② $(2x-1)^2 = |1 - 2x|$.

✍ Lời giải.

① Ta có $x^2 = 4 - 2\sqrt{3}$

$$x^2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$$

$$x = \sqrt{3} - 1 \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{\sqrt{3} - 1; 1 - \sqrt{3}\right\}.$$

② Đặt $t = |2x - 1| \geq 0$, ta có phương trình

$$t^2 - t = 0$$

$$t(t-1) = 0$$

$$t = 0 \text{ hoặc } t = 1.$$

- $t = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
- $t = 1 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}.$$

□

Ví dụ 6. So sánh các số $x = 4\sqrt{3}$ và $y = 3\sqrt{4}$.

Lời giải.

Ta có

- $x = 4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$.
- $y = 3\sqrt{4} = \sqrt{3^2 \cdot 4} = \sqrt{36}$.

Vì $48 > 36$ nên $x > y$. □

Ví dụ 7. Tìm giá trị của x, biết

① $x^2 < 25$.

② $x^2 + 2x - 3 > 0$.

Lời giải.

① Ta có $x^2 < 25 \Leftrightarrow x^2 < 5^2 \Leftrightarrow -5 < x < 5$.

② Ta có $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 4$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 > 2^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 > 2 \\ x + 1 < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3. \end{array}\right.$$

□

Với $a > 0$ ta có

- $x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a$.
- $x^2 > a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a. \end{array}\right.$

Các em học sinh cần cẩn trọng khi giải bài này vì có thể mặc phải sai lầm dẫn đến làm mất nghiệm ($x^2 > 4^2 \Leftrightarrow x > 4$) hoặc thừa ($x^2 < 5 \Leftrightarrow x < 5$).

Ví dụ 8. Tìm giá trị của x, biết

① $x^2 + 2x - 3 > 0$.

② $4x^2 - 4x < 8$.

Lời giải.

Ta có

① $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 > 2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 > 2 \\ x + 1 < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3. \end{array}\right.$

② $4x^2 - 4x < 8 \Leftrightarrow (2x)^2 - 4x + 1 < 9 \Leftrightarrow (2x-1)^2 < 3^2 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 2.$

□

⚠ *Từ định nghĩa về căn bậc hai, chúng ta mở rộng*

- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$
- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B. \end{cases}$

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau

① $\sqrt{x-1} = 3.$

② $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

① $\sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 3^2.$

$\Leftrightarrow x - 1 = 9$

$\Leftrightarrow x = 10.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{10\}.$$

② $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 2x^2 - 3x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \{-1; 1\}.$$

□

2 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Thực hiện phép tính

① $(-5)^2 \cdot \left(-\dfrac{7}{5}\right)^2.$

② $(-0{,}25)^2 : \left(\dfrac{3}{100}\right)^2.$

✍ **Lời giải.**

Ta có

① $(-5)^2 \cdot \left(-\dfrac{7}{5}\right)^2$.

$= \left((-5) \cdot \dfrac{7}{(-5)}\right)^2 = 7^2 = 49.$

② $(-0{,}25)^2 : \left(\dfrac{3}{100}\right)^2$

$= \left(\dfrac{25}{100}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{100}{3}\right)^2$

$= \left(\dfrac{25}{100} \cdot \dfrac{100}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{25}{3}\right)^2 = \dfrac{625}{9}.$

□

Bài 2. Tìm x, biết

① $x^2 = 9.$

② $x^2 = (-2)^2.$

③ $4x^2 + 1 = 8 - 2\sqrt{6}.$

④ $x^2 + 1 = 6 - 2\sqrt{6}.$

✍ **Lời giải.**

Ta có

① $x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 3^2$

$\Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -3$.

Vậy $S = \{-3; 3\}$.

② $x^2 = (-2)^2 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$.

Vậy $S = \{-2; 2\}$.

③ $4x^2 + 1 = 8 - 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow (2x)^2 = 7 - 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow (2x)^2 = (\sqrt{6} - 1)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{6}-1}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{6}}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}; \dfrac{\sqrt{6}-1}{2}\right\}$.

④ $x^2 + 1 = 6 - 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} - \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Vậy $S = \left\{\sqrt{2} - \sqrt{3}; \sqrt{3} - \sqrt{2}\right\}$.

□

Bài 3. So sánh các cặp số sau

① 0,3 và 0,2(5).

② $4\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ và $2\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

③ $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$.

④ $6\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ và $7\sqrt{\dfrac{2}{6}}$.

✍ **Lời giải.**

① $0{,}3 > 0{,}2(5)$.

② Vì $4 > 2$ và $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$ nên $4\sqrt{\dfrac{1}{2}} > 2\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

③ $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$.

$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$.

Vì $18 > 12$ nên $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

④ Vì $6 < 7$ và $\dfrac{2}{7} < \dfrac{2}{6}$ nên $6\sqrt{\dfrac{2}{7}} < 7\sqrt{\dfrac{2}{6}}$.

□

Bài 4. Chứng minh rằng các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x.

① $x^2 + 1 \geq 2x$.

② $2x^2 + 2x - 1 \geq -15$.

③ $x^2(x^2 - 1) \geq x^2 - 1$.

④ $x^2 + 6ax + 9a^2 - 4 > 0$, với a là hằng số.

✍ **Lời giải.**

① Giả sử $x^2 + 1 \geq 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy ta có điều chứng minh.

② Giả sử $2x^2 + 2x - 1 \geq -15$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq -27$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq -27$ (luôn đúng).

Vậy ta có điều chứng minh.

③ Giả sử $x^2(x^2 - 1) \geq x^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy ta có điều chứng minh.

④ Giả sử $9x^2 + 6ax + a^2 + 8 > 0$

$\Leftrightarrow (3x + a)^2 > -8$ (luôn đúng).

Vậy ta có điều chứng minh.

□

Bài 5. Tìm giá trị của x, biết

① $x^2 \geq 25; x^2 < 25$.

② $x^2 + 2x - 5 \geq 0$.

③ $x^2 - 1 < 9$.

④ $x^2 + 6ax + 9a^2 - 4 > 0$, a là hằng số.

✍ **Lời giải.**

① Ta có

— $x^2 \geq 25 \Leftrightarrow x^2 \geq 5^2 \Leftrightarrow x \geq 5$ hoặc $x \leq -5$.

— $x^2 < 25 \Leftrightarrow x^2 < 5^2 \Leftrightarrow -5 < x < 5$.

Vậy không tìm được x thỏa các điều kiện đề cho.

② $x^2 + 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 \geq \sqrt{6} \\ x + 1 \leq -\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{6} - 1 \\ x \leq -\sqrt{6} - 1. \end{array}\right.$

③ $x^2 - 1 < 9 \Leftrightarrow x^2 < 3^2 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

④ $x^2 + 6ax + 9a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x+3a)^2 > 2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3a > 2 \\ x + 3a < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 - 3a \\ x < -2 - 3a. \end{array}\right.$

□

Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 8 + \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $A = 8 + \sqrt{\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}} \geq 8$.

Đẳng thức xảy ra khi $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4. \end{array}\right.$

Vậy $A_{\min} = 8$. □

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 11 - \sqrt{x^2 + 7x + 4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $A = 11 - \sqrt{\left(x + \dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}} \leq 11$.

Đẳng thức xảy ra khi $\left(x + \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -6. \end{array}\right.$

Vậy $A_{\max} = 11$. □

Bài 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

① $A = 5 + \sqrt{x^2 - 3x + 9}$.

② $B = \sqrt{x^2 - 7x + 5}$.

③ $C = \sqrt{x^2 - 7x + 6} - 25$.

④ $D = x^2 - 6x + 11$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

① $A = 5 + \sqrt{\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4}} \geq 5 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x - \dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $A_{\min} = 5 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

② $B = \sqrt{\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{29}{4}} \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{29}{4}$.

Vậy $B_{\min} = 0$.

③ $C = \sqrt{\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}} - 25 \geq -25$.

Đẳng thức xảy ra khi $\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$.

Vậy $C_{\min} = -25$.

④ $D = (x-3)^2 + 2 \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy $D_{\min} = 2$.

□

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

① $A = 15 - \sqrt{x^2 - 4x + 13}$.

② $B = -3x^2 + 6x - 15$.

③ $C = 12 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

④ $D = 17 + 10x - x^2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

① $A = 15 - \sqrt{(x-2)^2 + 9} \leq 5 - \sqrt{9} = 12$.

Đẳng thức xảy ra khi $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $A_{\max} = 12$.

② $B = -3(x-1)^2 - 12 \leq -12$.

Đẳng thức xảy ra khi $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $B_{\max} = -12$.

③ $C = 12 - \sqrt{(x-1)^2} \leq 12$.

Đẳng thức xảy ra khi $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $C_{\max} = 12$.

④ $D = -[(x-5)^2 - 48] = -(x-1)^2 + 48 \leq 42$.

Đẳng thức xảy ra khi $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $B_{\max} = 42$.

□

Bài 10. Giải các phương trình sau

① $\sqrt{2x - 1} = 1$.

② $\sqrt{x^2 + 5} = x + 1$.

③ $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 2x}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có $\sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $S = \{1\}$.

② Ta có $\sqrt{x^2+5} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 5 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $S = \{2\}$.

③ Ta có $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $S = \{2\}$.

□

BÀI 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

① Điều kiện để $\sqrt{A}$ có nghĩa

$\sqrt{A}$ có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$.

② Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0. \end{cases}$$

B CÁC DẠNG TOÁN

1 PHÁ DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ví dụ 1. Tính $|x-1|$.

Lời giải.

Ta có $|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ nếu } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) \text{ nếu } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 \text{ nếu } x \geq 1 \\ 1-x \text{ nếu } x < 1. \end{cases}$ □

Ví dụ 2. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn biểu thức: $C = |x-1| + 2|x+2| + 3$.

Lời giải.

Nhận xét rằng $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Do đó để bỏ được dấu giá trị tuyệt đối của C ta cần xét các trường hợp sau

① Nếu $x \leq -2$ ta được $C = -(x-1) - 2(x+2) + 3 = -3x$.

② Nếu $-2 \leq x \leq 1$ ta được $C = -(x-1) + 2(x+2) + 3 = x + 8$.

③ Nếu $x > 1$ ta được $C = (x-1) + 2(x+2) + 3 = 3x + 6$.

□

2 ĐIỀU KIỆN ĐỂ $\sqrt{A}$ CÓ NGHĨA

Ví dụ 3. Tìm điều kiện của x để $\sqrt{-2x+1}$ tồn tại.

Lời giải.

Để $\sqrt{-2x+1}$ tồn tại, điều kiện là $-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\sqrt{-2x+1}$ tồn tại khi và chỉ khi $x \leq \dfrac{1}{2}$. □

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa

① $A = \dfrac{1}{\sqrt{5x+10}}$.

② $B = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{3x^2 - 5x + 2}$.

Lời giải.

① Để A có nghĩa, điều kiện là $5x + 10 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Vậy với $x > -2$ thì A có nghĩa.

② Để B có nghĩa, điều kiện là $\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \neq 1; x \neq \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Vậy, với $x \geq -\dfrac{1}{2}$ và $x \neq 1$, $x \neq \dfrac{2}{3}$ thì B có nghĩa.

□

Ví dụ 5. Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa

① $A = \sqrt{x^2 - 36}$. ② $B = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$. ③ $C = \sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}}$.

✍ **Lời giải.**

a) Để A có nghĩa, điều kiện là $x^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 6^2 \Leftrightarrow |x| \geq 6$.
Vậy, với $|x| \geq 6$ thì A có nghĩa.

b) Để B có nghĩa, điều kiện là

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x-2| \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 \geq 1 \\ x-2 \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1. \end{array}\right.$$

Vậy, với $x \geq 3$ hoặc $x \leq 1$ thì B có nghĩa.

c) Để C có nghĩa, điều kiện là $\dfrac{2-x}{x-3} \geq 0$. Ta lập bảng xét dấu, dựa trên

$$2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

như sau

x		2		3	
$2-x$	$+$	0	$-$		$-$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{2-x}{x-3}$	$-$	0	$+$	‖	$-$

Từ đó suy ra $\dfrac{2-x}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$.
Vậy, với $2 \leq x < 3$ thì C có nghĩa.

□

3 SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

Ví dụ 6. Tính:

① $\sqrt{(0{,}09)^2}$ ② $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$.

✍ **Lời giải.**

a) Ta có $\sqrt{(0{,}09)^2} = |0{,}09| = 0{,}09$.

b) Ta có $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$, vì $\sqrt{3}-2 < 0$.

□

Ví dụ 7. Tính:

① $\sqrt{x^6}$ ② $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

③ $x + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ ④ $x + y + \sqrt{(x-y)^2}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3| = \begin{cases} x^3 \text{ nếu } x^3 \geq 0 \\ -x^3 \text{ nếu } x^3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x^3 \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$

② Ta có $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ nếu } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) \text{ nếu } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 \text{ nếu } x \geq 0 \\ 2-x \text{ nếu } x < 2. \end{cases}$

③ Ta có
$x + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x + \sqrt{(x-1)^2} = x + |x-1| = \begin{cases} x + x - 1 \text{ nếu } x - 1 \geq 0 \\ x - (x-1) \text{ nếu } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1 \text{ nếu } x \geq 1 \\ 1 \text{ nếu } x < 1. \end{cases}$

④ Ta có $x + y + \sqrt{(x-y)^2} = x + y + |x-y| = \begin{cases} x + y + x - y \text{ nếu } x - y \geq 0 \\ x + y - (x-y) \text{ nếu } x - y < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x \text{ nếu } x \geq y \\ 2y \text{ nếu } x < y. \end{cases}$

□

Ví dụ 8. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } x \geq 2 \\ 2 \text{ nếu } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \\
&= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \\
&= \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1| \\
&= \begin{cases} \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 \text{ nếu } \sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 \text{ nếu } \sqrt{x-1} - 1 < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } \sqrt{x-1} \geq 1 \\ \text{ nếu } \sqrt{x-1} < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } x - 1 \geq 1 \\ 2 \text{ nếu } 0 \leq x - 1 < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } x \geq 2 \\ 2 \text{ nếu } 1 \leq x < 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } x \geq 2 \\ 2 \text{ nếu } 1 \leq x < 2. \end{cases}$ □

Ví dụ 9. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{9x^2 - 1}$.

① Tìm tập xác định của A.

② Rút gọn biểu thức A.

③ Tính giá trị của A tại $x = 1$.

④ Tìm giá trị của x để $A = \dfrac{1}{3}$.

⑤ Tìm giá trị của x để $A < 0$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện để biểu thức A có nghĩa

$$\begin{cases} 9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \\ 9x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)^2 \geq 0 \\ (3x-1)(3x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{3}.$$

② Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{9x^2-6x+1}}{9x^2-1} = \frac{\sqrt{(3x-1)^2}}{9x^2-1} = \frac{|3x-1|}{(3x-1)(3x+1)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} \text{ nếu } 3x-1>0 \\ -\dfrac{1}{3x+1} \text{ nếu } 3x-1<0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} \text{ nếu } x > \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3x+1} \text{ nếu } x < \dfrac{1}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

③ Với $x = 1$ ta được $A = \dfrac{1}{3\cdot 1+1} = \dfrac{1}{4}$.

④ Để $A = \dfrac{1}{3}$, ta có hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: Nếu $\begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} = \dfrac{1}{3} \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3x+1 \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

+ Trường hợp 2: Nếu $\begin{cases} \dfrac{-1}{3x+1} = \dfrac{1}{3} \\ x < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3x+1 \\ x < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$.

Vậy với $x = \dfrac{2}{3}$ hoặc $x = -\dfrac{4}{3}$ thì $A = \dfrac{1}{3}$.

⑤ $A < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(3x-1)^2}}{9x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \neq 0 \\ 9x^2-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow 9x^2-1<0 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$.

Vậy với $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$ thì $A < 0$.

⚠ *Ở câu này ta có thể làm cách khác nhanh hơn nhờ việc đánh giá được: $|3x-1| > 0$ (Tập xác định: $x \neq \pm\dfrac{1}{3}$).*

Do đó $9x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$.

□

Ví dụ 10.

① Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \geq \sqrt{(a+b)^2}$.

② Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{(2006-x)^2} + \sqrt{(2005-x)^2}.$$

✍ **Lời giải.**

① Xét bất đẳng thức, vì hai vế không âm nên bình phương hai vế ta được

$$a^2+b^2+2\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}\ge(a+b)^2\Leftrightarrow 2|ab|\ge 2ab, \text{luôn đúng.}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh và dấu "=" xảy ra khi $ab\ge 0$, tức là khi a và b cùng dấu.

② Ta viết $A=\sqrt{(2006-x)^2}+\sqrt{(x-2005)^2}\ge\sqrt{(2006-x+x-2005)^2}=1$.
Vậy ta được $\min A=1$, đạt được khi

$$(2006-x)(2005-x)\ge 0\Leftrightarrow 2005\le x\le 2006.$$

Trong câu a), chúng ta đã sử dụng phép bình phương để khử căn, rồi từ đó nhận được bất đẳng thức đúng. Tuy nhiên, ta cũng có thể chứng minh bằng cách biến đổi:

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\ge\sqrt{(a+b)^2}\Leftrightarrow|a|+|b|\ge|a+b|.$$

Ta thấy ngay đẳng thức trên luôn đúng (vì đã được chứng minh trong phần bất đẳng thức chứa dấu trị tuyệt đối).

□

4 PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1. Tìm x, biết

① $\sqrt{(x+1)^2}=9$; ② $\sqrt{(x-3)^2}=3-x$.

Lời giải.

① Ta biến đổi về dạng

$$|x+1|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x+1=9 & \text{nếu } x+1\ge 0\\ -(x+1)=9 & \text{nếu } x+1<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=8 & \text{nếu } x\ge -1\\ x=-10 & \text{nếu } x<-1\end{array}\right..$$

Vậy ta nhận được hai giá trị $x=8$ và $x=-10$.

② Ta có $\sqrt{(x-3)^2}=3-x\Leftrightarrow|x-3|=3-x\Leftrightarrow x-3\le 0\Leftrightarrow x\le 3$.
Vậy nghiệm của phương trình là $x\le 3$.

Trong lời giải câu b), chúng ta đã sử dụng tính chất

$$|a|=-a\Leftrightarrow a\le 0.$$

□

Ví dụ 2. Tìm x, biết

① $\sqrt{x-2}+2=x$; ② $\sqrt{x-1}+1\le x$.

Lời giải.

① Điều kiện có nghĩa $x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$. $(*)$
Biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt{x-2}=x-2\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=\left(\sqrt{x-2}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0\\ \sqrt{x-2}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ \sqrt{x-2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=3\end{array}\right., \text{thỏa mãn } (*).$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=2$ và $x=3$.

② Điều kiện có nghĩa $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$. $(*)$
Biến đổi bất phương trình về dạng

$$\sqrt{x-1}\le x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\le\left(\sqrt{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ \sqrt{x-1}-1\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ \sqrt{x-1}\ge 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x\ge 2\end{array}\right.,\text{thỏa mãn } (*).$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x=1$ hoặc $x\ge 2$.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tập xác định của các biểu thức sau:

① $A=\sqrt{5x+40}$;

② $B=\dfrac{2x^2+3x+1}{\sqrt{x^2-4}}$;

③ $C=\dfrac{\sqrt{2x+4}}{x^2-6x+9}$;

④ $D=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+123}}$.

✍ **Lời giải.**

① Để A có nghĩa thì $5x+40\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -8$. Vậy tập xác định $\mathscr{D}=[-8;+\infty)$;

② Để B có nghĩa thì $x^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-2.\end{array}\right.$ Vậy tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$;

③ Để C có nghĩa thì $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x^2-6x+9\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -2\\ x\ne 3\end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\ne 3$.
Vậy tập xác định $\mathscr{D}=[-2;+\infty)\setminus\{3\}$;

④ Để D có nghĩa thì $x^2+123>0$ (đúng $\forall x\in\mathbb{R}$). Vậy tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

□

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

① $A=\dfrac{\sqrt{x^2+2\sqrt{3}x+3}}{x^2-3}$;

② $B=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x-2}}$;

③ $C=\dfrac{\sqrt{(x-4)^2}}{x^2-5x+4}$;

④ $D=\dfrac{3x+1}{\sqrt{9x^2+6x+1}}$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện xác định: $x^2-3\ne 0 \Leftrightarrow x\ne\pm\sqrt{3}$.
Ta có $A=\dfrac{\sqrt{x^2+2\sqrt{3}x+3}}{x^2-3}=\dfrac{\sqrt{\left(x+\sqrt{3}\right)^2}}{x^2-3}=\dfrac{|x+\sqrt{3}|}{x^2-3}$.
Ta xét hai trường hợp:
TH1: Nếu $x+\sqrt{3}>0 \Leftrightarrow x>-\sqrt{3}$ thì $A=\dfrac{x+\sqrt{3}}{\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{1}{x-\sqrt{3}}$.
TH2: Nếu $x+\sqrt{3}<0 \Leftrightarrow x<-\sqrt{3}$ thì $A=\dfrac{-\left(x+\sqrt{3}\right)}{\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}=-\dfrac{1}{x-\sqrt{3}}$.

② Điều kiện xác định: $x\ge 2$.
Ta có $B=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{\sqrt{(x-2)(x-3)}}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-3}$.

③ Điều kiện xác định: $x^2-5x+4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1, x\neq 4$.
Ta có $C=\dfrac{\sqrt{(x-4)^2}}{x^2-5x+4}=\dfrac{\sqrt{(x-4)^2}}{(x-1)(x-4)}=\dfrac{|x-4|}{(x-1)(x-4)}$.
Ta xét hai trường hợp:
TH1: Nếu $x-4>0\Leftrightarrow x>4$ thì $C=\dfrac{x-4}{(x-1)(x-4)}=\dfrac{1}{x-1}$.
TH2: Nếu $x-4<0\Leftrightarrow x<4$ thì $C=\dfrac{-(x-4)}{(x-1)(x-4)}=-\dfrac{1}{x-1}$.

④ Điều kiện xác định: $9x^2+6x+1>0\Leftrightarrow (3x+1)^2>0\Leftrightarrow x\neq -\dfrac{1}{3}$.
Ta có $D=\dfrac{3x+1}{\sqrt{9x^2+6x+1}}=\dfrac{3x+1}{(3x+1)^2}=\dfrac{3x+1}{|3x+1|}$.
Ta xét hai trường hợp:
TH1: Nếu $3x+1>0\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{3}$ thì $D=\dfrac{3x+1}{3x+1}=1$.
TH2: Nếu $3x+1<0\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{3}$ thì $D=\dfrac{3x+1}{-(3x+1)}=-1$.

□

Bài 3. Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}=3$; ② $\sqrt{4x^2-4x+1}=1-2x$;

③ $\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$; ④ $\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}=\sqrt{x-2}-1$.

✍ **Lời giải.**

① Biến đổi tương đương về dạng
$$\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}=3\Leftrightarrow |\sqrt{x}+1|=3\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=3\Leftrightarrow \sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4.$$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=4$.

② Biến đổi tương đương về dạng
$$\sqrt{(2x-1)^2}=1-2x\Leftrightarrow |2x-1|=1-2x\Leftrightarrow 1-2x\leq 0\Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}.$$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\geq \dfrac{1}{2}$.

③ Biến đổi tương đương về dạng
$$\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\sqrt{x}-1\Leftrightarrow |\sqrt{x}-1|=\sqrt{x}-1\Leftrightarrow \sqrt{x}-1\geq 0\Leftrightarrow \sqrt{x}\geq 1\Leftrightarrow x\geq 1.$$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\geq 1$.

④ Biến đổi tương đương về dạng
$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}=\sqrt{x-2}-1\\ \Leftrightarrow\ & |\sqrt{x-2}-1|=\sqrt{x-2}-1\\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x-2}-1\geq 0\\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x-2}\geq 1\\ \Leftrightarrow\ & x-2\geq 1\\ \Leftrightarrow\ & x\geq 3.\end{aligned}$$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\geq 3$.

□

Bài 4. Cho biểu thức $A = 6x - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

① Rút gọn biểu thức A;

② Tính giá trị biểu thức A với $x = 5$;

③ Tìm giá trị của x để biểu thức $A = 1$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện xác định: $x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$ (đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).
Ta có $A = 6x - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 6x - 1 + \sqrt{(x-2)^2} = 6x - 1 + |x - 2|$.
Ta xét hai trường hợp:
TH1: Nếu $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ thì $A = 6x - 1 + (x - 2) = 7x - 3$.
TH2: Nếu $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ thì $A = 6x - 1 - (x - 2) = 5x + 1$.

② Với $x = 5$, ta có $A = 7 \cdot 5 - 3 = 32$.

③ Để $A = 1$, ta có
TH1: Với $x \geq 2$ thì $7x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{7}$, không thỏa mãn.
TH2: Với $x < 2$ thì $5x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, thỏa mãn.
Vậy $x = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Bài 5. Cho biểu thức $A = x + 8 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

① Rút gọn biểu thức A;

② Tính giá trị biểu thức A với $x = -1$;

③ Tìm giá trị của x để biểu thức $A = 0$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện: $x^2 - 6x + 9 \geq 0$, luôn đúng.
Ta có $A = x + 8 - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = x + 8 - \sqrt{(x-3)^2} = x + 8 - |x - 3|$.
Ta xét hai trường hợp:

TH 1. Nếu $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ thì $A = x + 8 - (x - 3) = 11$.

TH 2. Nếu $x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$ thì $A = x + 8 - (3 - x) = 2x + 5$.

② Với $x = 3$, ta tính được $A = 11$.

③ Để $A = 0$ với $x < 3$, ta có $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$.
Vậy $x = -\dfrac{5}{2}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

□

Bài 6. Tìm x, biết:

① $\sqrt{2x - 1} + 1 = 2x$;

② $\sqrt{3x - 2} + 4 \leq 6x$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện có nghĩa $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$ $(*)$.

Biến đổi phương trình về dạng

$\sqrt{2x-1} = 2x-1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}=0\\ \sqrt{2x-1}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}=0\\ \sqrt{2x-1}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=1\end{array}\right.$ thỏa mãn $(*)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$ và $x = 1$.

② Điều kiện có nghĩa $3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{3}$ $(*)$.

Biến đổi bất phương trình về dạng

$\sqrt{3x-2} \leq 2(3x-2) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} \leq 2\left(\sqrt{3x-2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}\left(2\sqrt{3x-2}-1\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3x-2}=0\\ 2\sqrt{3x-2}-1\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-2=0\\ \sqrt{3x-2}\geq \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\ x\geq \dfrac{3}{4}\end{array}\right.$, thỏa mãn $(*)$.

Vậy bất phương trình có nghiệm $x = \dfrac{2}{3}$ hoặc $x \geq \dfrac{3}{4}$.

□

Bài 7. Giải phương trình:

① $\sqrt{x^2-5x+8} = 2$;   ② $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} = 0$;

✍ **Lời giải.**

① Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1.

Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.

Điều kiện: $\forall x \in \mathbb{R}$ do $x^2-5x+8 = \left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \geq 0$.

Ta có $\sqrt{x^2-5x+8} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+8} = 2 \Leftrightarrow x^2-5x+8 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 4$.

Cách 2.

Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

$x^2-5x+8 = 4 \Leftrightarrow x^2-5x+4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 4$.

② Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1.

Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$

Ta có $\sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow x+1 = 2-x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2.

Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

$\sqrt{x-1} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x+1 = 2-x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 = 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \dfrac{1}{2}$.

□

Bài 8. Giải phương trình:

① $\sqrt{x^2-x+1} = x+1$; ② $\sqrt{x^2-2x+3} = x+5$.

✍ Lời giải.

① Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1. Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.

Điều kiện $\forall x \in \mathbb{R}$ do $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq 0$.

Ta có $\sqrt{x^2-x+1} = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = (x+1)^2$ $x^2 - x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$.

Cách 2. Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - x + 1 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$.

② Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1.

Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.

Điều kiện $\forall x \in \mathbb{R}$ do $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 0$.

Ta có $\sqrt{x^2-2x+3} = x+5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = (x+5)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 + 10x + 25 \Leftrightarrow 12x = -22 \Leftrightarrow x = -\dfrac{11}{6}$.

Vậy phương trình cho một nghiệm là $x = -\dfrac{11}{6}$.

Cách 2.

Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 3 = (x+5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ 12x = -22 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{11}{6}.$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -\dfrac{11}{6}$.

□

Bài 9. Giải phương trình:

① $5\sqrt{x-2} = x+2$; ② $3\sqrt{2x-1} = 2x-5$.

✍ Lời giải.

Đề nghị các em học sinh giải theo hai cách đã biết.

Cách 1.

Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.

Cách 2.

Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

Ở đây trình bày theo cách đặt ẩn phụ để các em làm quen.

① Điều kiện có nghĩa $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$.
Viết phương trình dưới dạng
$x-2-5\sqrt{x-2}+4=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^2-5\sqrt{x-2}+4=0. \quad (1)$
Đặt $t=\sqrt{x-2}$, điều kiện $t\geq 0$. Khi đó phương trình (1) có dạng
$t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow (t-1)(t-4)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}=1 \\ \sqrt{x-2}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=18 \end{array}\right.$.
Vậy phương trình có nghiệm $x=3$ và $x=18$.

② Điều kiện có nghĩa $2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}$. Viết phương trình dưới dạng
$2x-1-3\sqrt{2x-1}-4=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}\right)^2-3\sqrt{2x-1}-4=0. \quad (1)$
Đặt $t=\sqrt{2x-1}$, điều kiện $t\geq 0$. Khi đó phương trình (1) có dạng
$t^2-3t-4=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ (loại)} \\ t=4 \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=4 \Leftrightarrow 2x-1=16 \Leftrightarrow x=\dfrac{17}{2}$.
Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{17}{2}$.

□

BÀI 3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH LÍ

Định lí 1. *Với $A \geq 0$, $B \geq 0$ thì $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.*

2 KHAI PHƯƠNG MỘT TÍCH

Quy tắc khai phương một tích: *Muốn khai phương một tích các biểu thức không âm ta có thể khai phương từng biểu thức rồi nhân kết quả với nhau.*

3 NHÂN CÁC CĂN THỨC BẬC HAI

Quy tắc nhân các căn thức bậc hai: *Muốn nhân các căn thức bậc hai của các biểu thức không âm ta có thể nhân các biểu thức dưới dấu căn với nhau rồi lấy căn bậc hai của kết quả đó.*

B CÁC DẠNG TOÁN

Ví dụ 1. Sử dụng quy tắc khai phương một tích, tính

① $\sqrt{25 \cdot 49}$. ② $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 36}$. ③ $\sqrt{27 \cdot 48}$. ④ $\sqrt{81a^2}$.

Lời giải.

① $\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35$.

② $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 36} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$.

③ $\sqrt{27 \cdot 48} = \sqrt{27 \cdot 3 \cdot 16} = \sqrt{81 \cdot 16} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{16} = 9 \cdot 4 = 36$.

④ $\sqrt{81a^2} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{a^2} = 9|a|$.

Nhận xét. *Trong câu thứ ba, nếu chúng ta vận dụng một cách máy móc quy tắc khai phương một tích sẽ không nhận được kết quả gọn.*

□

Ví dụ 2. Sử dụng quy tắc nhân các căn thức bậc hai, tính

① $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$. ② $\sqrt{1{,}1} \cdot \sqrt{44} \cdot \sqrt{10}$.

③ $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}$. ④ $\sqrt{27a} \cdot \sqrt{3a}$, với $a > 0$.

Lời giải.

① $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$.

② $\sqrt{1{,}1} \cdot \sqrt{44} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{1{,}1 \cdot 44 \cdot 10} = \sqrt{11 \cdot 11 \cdot 4} = 11 \cdot 2 = 22$.

③ $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \sqrt{2-1} = 1$.

④ Với $a > 0$ ta có

$$\sqrt{27a} \cdot \sqrt{3a} = \sqrt{27a \cdot 3a} = \sqrt{81a^2} = 9|a| = 9a.$$

Nhận xét. *Trong câu thứ ba, chúng ta đã sử dụng hằng đẳng thức $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.*

□

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau

① $\sqrt{a^4(3-a)^2}$, với $a \geq 3$.

② $\dfrac{1}{a-b}\sqrt{a^6(a-b)^2}$, với $a < b < 0$.

✍ **Lời giải.**

① Với $a \geq 3$ thì $3-a \leq 0$, ta có

$$\sqrt{a^4(3-a)^2} = \sqrt{a^4}\cdot\sqrt{(3-a)^2} = a^2|3-a| = a^2(a-3).$$

② Với $a < b < 0$ thì $a-b < 0$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b}\sqrt{a^6(a-b)^2} &= \frac{1}{a-b}\cdot\sqrt{a^6}\cdot\sqrt{(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}\cdot|a^3|\cdot|a-b|\\ &= \frac{1}{a-b}\cdot(-a^3)\cdot(b-a) = a^3.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 4. Thực hiện phép tính

① $A = \left(\sqrt{8}+\sqrt{72}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$.

② $B = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$.

③ $C = \left(3\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$.

✍ **Lời giải.**

① $A = \left(\sqrt{8}+\sqrt{72}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = \sqrt{8}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{72}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{16}+\sqrt{144}-\sqrt{4}$
$= 4+12-2 = 14.$

② $B = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2 - 2\sqrt{4+\sqrt{7}}\sqrt{4-\sqrt{7}} + \left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$
$= 4+\sqrt{7}-2\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right)\left(4-\sqrt{7}\right)}+4-\sqrt{7} = 8-2\sqrt{16-7} = 8-2\cdot 3 = 2.$

③ $C = \left(3\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) = \left(3\sqrt{5}\right)^2-2 = 45-2 = 43.$

Nhận xét. *Như vậy trong câu thứ ba, bằng việc sử dụng hằng đẳng thức chúng ta đã giảm được đáng kể độ phức tạp.*

□

Ví dụ 5.

① So sánh $\sqrt{16+4}$ với $\sqrt{16}+\sqrt{4}$.

② Chứng minh rằng $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, với mọi a, b không âm.

✍ **Lời giải.**

① Ta có $\left(\sqrt{16+4}\right)^2 = 20$ và $\left(\sqrt{16}+\sqrt{4}\right)^2 = (4+2)^2 = 36$.
Cho nên $\left(\sqrt{16+4}\right)^2 < \left(\sqrt{16}+\sqrt{4}\right)^2$, do đó $\sqrt{16+4} < \sqrt{16}+\sqrt{4}$.

② Hai vế của bất đẳng thức luôn không âm nên bình phương hai vế, ta được

$$\left(\sqrt{a+b}\right)^2 \leq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow a+b \leq a+2\sqrt{ab}+b \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 0$ hoặc $b = 0$.
Do đó $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, với mọi a, b không âm.

Nhận xét. *Cách đặt vấn đề của ví dụ trên, giúp chúng ta tiếp cận với bất đẳng thức trước khi đi chứng minh nó. Tuy nhiên, nếu đặt vấn đề theo kiểu ngược lại, chúng ta sẽ được quyền sử dụng bất đẳng thức này để đưa ra đánh giá cho phép so sánh.*

□

Ví dụ 6.

① Chứng minh rằng $|ac+bd| \le \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$ *(Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ki).*

② Biết $x^2+y^2=52$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A=3x+2y$.

✍ Lời giải.

① Hai vế của bất đẳng thức luôn không âm nên bình phương hai vế, ta được

$$\begin{aligned} & (ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ \Leftrightarrow\ & a^2c^2+2acbd+b^2d^2 \le a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^2d^2-2adbc+b^2c^2 \ge 0 \\ \Leftrightarrow\ & (ad-bc)^2 \ge 0 \text{ (luôn đúng).} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $bc=ad$ hay $a=kc$, $b=kd$.
Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

② Ta có $|A|=|3x+2y| \le \sqrt{(3^2+2^2)(x^2+y^2)}$.
Mà $\sqrt{(3^2+2^2)(x^2+y^2)}=\sqrt{13\cdot 52}=\sqrt{13\cdot 13\cdot 4}=13\cdot 2=26$.
Do đó $|A|\le 26$, suy ra $-26\le A\le 26$.
Dấu "=" xảy ra khi $x=3k$ và $y=2k$, do đó

$$x^2+y^2=52 \Leftrightarrow (3k)^2+(2k)^2=52 \Leftrightarrow 13k^2=52 \Leftrightarrow k^2=4 \Leftrightarrow k=\pm 2.$$

Vậy $A_{\max}=26$ khi $(x;y)=(6;4)$.
$A_{\min}=-26$ khi $(x;y)=(-6;-4)$.

□

Ví dụ 7. Cho biểu thức $A=\dfrac{2x^2-ax-3a^2}{2x^2-5ax+3a^2}$.

① Rút gọn biểu thức A.

② Chứng minh rằng $A=\left(a+\sqrt{a+1}\right)^2$ khi $x=\sqrt{a^2+1}$.

✍ Lời giải.

① Điều kiện xác định $x\ne a$ và $x\ne \dfrac{3a}{2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x^2-ax-3a^2}{2x^2-5ax+3a^2}=\frac{2x^2+2ax-3ax-3a^2}{2x^2-2ax-3ax+3a^2}=\frac{2x(x+a)-3a(x+a)}{2x(x-a)-3a(x-a)} \\ &= \frac{(x+a)(2x-3a)}{(x-a)(2x-3a)}=\frac{x+a}{x-a}. \end{aligned}$$

② Thay $x=\sqrt{a^2+1}$ vào biểu thức rút gọn trên ta được

$$A=\frac{\sqrt{a^2+1}+a}{\sqrt{a^2+1}-a}=\frac{\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)}=\frac{\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^2}{a^2+1-a^2}=\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^2.$$

□

Ví dụ 8. Cho biểu thức $A = \dfrac{a+b-\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b}$.

① Rút gọn biểu thức A.

② Tính giá trị của A, biết $a-b=1$.

Lời giải.

① Điều kiện xác định là $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \neq b. \end{cases}$

Ta có $a\sqrt{a}+b\sqrt{b} = \left(\sqrt{a}\right)^3 + \left(\sqrt{b}\right)^3 = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a+b-\sqrt{ab}\right)} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b} \\ &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}-1\right)}{a-b} = \frac{1}{a-b}. \end{aligned}$$

② Với $a-b=1$, suy ra $A=1$.

□

Ví dụ 9. Cho hai biểu thức $A = \sqrt{x^2-3x+2}$ và $B = \sqrt{x-1}\sqrt{x-2}$.

① Tìm x để A có nghĩa.

② Tìm x để B có nghĩa.

③ Với giá trị nào của x thì $A = B$?

④ Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa còn B không có nghĩa?

Lời giải.

① Ta có $A = \sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{(x-1)(x-2)}$.

Biểu thức A có nghĩa khi $(x-1)(x-2) \geq 0$. Ta lập bảng xét dấu của $(x-1)(x-2)$.

— $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

— $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu

x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $(x-1)(x-2) \geq 0$ khi $x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$.

Vậy A có nghĩa khi $x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$.

② Biểu thức B có nghĩa khi

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Vậy B có nghĩa khi $x \geq 2$.

③ Khi $A = B$, tức là

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{x-1}\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Vậy với $x \geq 2$ thì $A = B$.

④ Dựa vào điều kiện có nghĩa của A và B ta có ngay với $x \leq 1$ thì chỉ A có nghĩa còn B không có nghĩa.

□

Ví dụ 10. Cho a, b, c và a', b', c' là số đo các cạnh tương ứng của hai tam giác đồng dạng. Chứng minh rằng $\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$.

✍ **Lời giải.**

Giả sử hai tam giác đồng dạng với tỉ số k, suy ra

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \Leftrightarrow \begin{cases} a' = ka \\ b' = kb \\ c' = kc. \end{cases}$$

Khi đó, ta biến đổi biểu thức cần chứng minh về dạng

$$\begin{aligned} & \sqrt{ka^2} + \sqrt{kb^2} + \sqrt{kc^2} = \sqrt{(a+b+c)(ka+kb+kc)} \\ \Leftrightarrow\ & a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k} = \sqrt{k(a+b+c)^2} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{k}(a+b+c) = \sqrt{k}(a+b+c) \text{ (luôn đúng).} \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét.

— *Như vậy, trong lời giải trên để chứng minh đẳng thức chúng ta đã sử dụng cách "Biến đổi tương đương đẳng thức về đẳng thức đúng". Tuy nhiên, ta cũng có thể sử dụng cách biến đổi một vế thành vế còn lại, cụ thể*

$$\begin{aligned} \sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} &= \sqrt{ka^2} + \sqrt{kb^2} + \sqrt{kc^2} = a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k} \\ &= \sqrt{k}(a+b+c) = \sqrt{k(a+b+c)^2} = \sqrt{(a+b+c)(ka+kb+kc)} \\ &= \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')} \textit{ (đpcm).} \end{aligned}$$

— *Qua cách biến đổi trên, chúng ta thấy ngay rằng việc sử dụng quy tắc khai phương một tích có thể giúp làm xuất hiện nhân tử chung trong một biểu thức. Nhận định này sẽ giúp chúng ta trong việc biến đổi biểu thức về dạng tích và được sử dụng nhiều trong dạng toán "Giải phương trình chứa căn bậc hai".*

□

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sqrt{x^2-9} - \sqrt{x-3} = 0$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện xác định là

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 9 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$\sqrt{x-3}\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{x-3}\left(\sqrt{x+3}-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}=0\\ \sqrt{x+3}=1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-2.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được $x=3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét. *Như chúng ta đã biết, phương trình trên còn có thể được giải bằng phương pháp biến đổi tương đương, cụ thể*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x-3}=0\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x-3\ge 0\\ x^2-9=x-3\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x\ge 3\\ (x-3)(x+3)=x-3\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x\ge 3\\ (x-3)(x+2)=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x\ge 3\\ \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-2\end{array}\right.\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &x=3.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=3$.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính

① $\sqrt{49\cdot 100}$. ② $\sqrt{2^4\cdot(-9)^2}$. ③ $\sqrt{72\cdot 32}$. ④ $\sqrt{12{,}1\cdot 490}$.

✍ **Lời giải.**

① $\sqrt{49\cdot 100}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{100}=7\cdot 10=70$.

② $\sqrt{2^4\cdot(-9)^2}=\sqrt{2^4}\cdot\sqrt{(-9)^2}=2^2\cdot|-9|=36$.

③ $\sqrt{72\cdot 32}=\sqrt{36\cdot 2\cdot 32}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{64}=6\cdot 8=48$.

④ $\sqrt{12{,}1\cdot 490}=\sqrt{12{,}1\cdot 49\cdot 10}=\sqrt{121\cdot 49}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{49}=11\cdot 7=77$.

□

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau

① $\sqrt{27\cdot 48(a-3)^2}$. ② $\sqrt{48\cdot 75a^2}$.

✍ **Lời giải.**

① $\sqrt{27\cdot 48(a-3)^2}=\sqrt{27\cdot 3\cdot 16\cdot (a-3)^2}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{(a-3)^2}=9\cdot 4\cdot |a-3|=36|a-3|$.

② $\sqrt{48\cdot 75a^2}=\sqrt{16\cdot 3\cdot 25\cdot 3\cdot a^2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{a^2}=4\cdot 3\cdot 5\cdot |a|=60|a|$.

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

① $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{a}}$, với $a>0$.

② $\sqrt{8a^2}\cdot\sqrt{18a^4}$, với $a<0$.

✍ **Lời giải.**

① Với $a>0$ ta có $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{a}}=\sqrt{a\cdot\dfrac{9}{a}}=\sqrt{9}=3$.

② Với $a<0$ ta có $\sqrt{8a^2}\cdot\sqrt{18a^4}=\sqrt{8a^2\cdot 18a^4}=\sqrt{144\cdot a^6}=\sqrt{144}\cdot\sqrt{a^6}=12|a^3|=-12a^3$.

□

Bài 4. Thực hiện phép tính

① $A=\sqrt{72}\cdot\sqrt{18}$.

② $B=\sqrt{\dfrac{25}{7}}\cdot\sqrt{\dfrac{7}{16}}$.

③ $C=\left(\sqrt{\dfrac{9}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$.

✍ **Lời giải.**

① $A=\sqrt{72}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{36\cdot 2\cdot 9\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=6\cdot 2\cdot 3=36$.

② $B=\sqrt{\dfrac{25}{7}}\cdot\sqrt{\dfrac{7}{16}}=\sqrt{\dfrac{25}{7}\cdot\dfrac{7}{16}}=\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{4}$.

③ $C=\left(\sqrt{\dfrac{9}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\dfrac{9}{2}\cdot 2}+\sqrt{\dfrac{3}{2}\cdot 2}-\sqrt{2\cdot 2}$

$=\sqrt{9}+\sqrt{3}-\sqrt{4}=3+\sqrt{3}-2=1+\sqrt{3}$.

□

Bài 5. Thực hiện phép tính

① $A=(\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)$.

② $B=(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1-\sqrt{3})$.

③ $C=\left(\sqrt{4-\sqrt{3}}-\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)^2$.

✍ **Lời giải.**

① $A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)=\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

$=5-1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot 1=4+\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

② $B=(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1-\sqrt{3})=(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{2}+1-3=2\sqrt{2}$.

③ $C=\left(\sqrt{4-\sqrt{3}}-\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)^2=4-\sqrt{3}-2\sqrt{4-\sqrt{3}}\sqrt{4+\sqrt{3}}+4+\sqrt{3}$

$=8-2\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)}=8-2\sqrt{16-3}=8-2\sqrt{13}$.

□

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau

① $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

② $\sqrt{5}+2=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

✍ Lời giải.

① $VP=\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}=VT$.

② $VP=\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}\cdot 2+4}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}=\sqrt{5}+2=VT$.

□

Bài 7. Cho $a>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{a}+1>\sqrt{a+1}$.

✍ Lời giải.

Với $a>0$, hai vế luôn dương nên bình phương hai vế của bất đẳng thức ta được

$$\left(\sqrt{a}+1\right)^2>\left(\sqrt{a+1}\right)^2\Leftrightarrow a+1+2\sqrt{a}>a+1\Leftrightarrow 2\sqrt{a}>0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy $\sqrt{a}+1>\sqrt{a+1}$, với mọi $a>0$. □

Bài 8. Cho $a\geq 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{a-1}<\sqrt{a}$.

✍ Lời giải.

Với $a\geq 1$, tức là $a-1\geq 0$, hai vế luôn không âm nên bình phương hai vế của bất đẳng thức ta được

$$\left(\sqrt{a-1}\right)^2<\left(\sqrt{a}\right)^2\Leftrightarrow a-1<a\Leftrightarrow -1<0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy $\sqrt{a-1}<\sqrt{a}$, với mọi $a\geq 1$. □

Bài 9. Chứng minh rằng $\sqrt{6}-1>\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt{6}-1\right)^2=6-2\sqrt{6}+1=7-2\sqrt{6}$.

$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2=5-2\sqrt{6}$.

Dễ thấy $7-2\sqrt{6}>5-2\sqrt{6}$. Do đó $\sqrt{6}-1>\sqrt{3}-\sqrt{2}$. □

Bài 10. Tính giá trị của biểu thức

① $A=x^2+2x+16$ với $x=\sqrt{2}-1$.

② $B=x^2+12x-14$ với $x=5\sqrt{2}-6$.

✍ Lời giải.

① Ta có $A=x^2+2x+16=x^2+2x+1+15=(x+1)^2+15$.
Khi $x=\sqrt{2}-1$ thì $A=\left(\sqrt{2}-1+1\right)^2+15=2+15=17$.

② Ta có $B=x^2+12x-14=x^2+2\cdot x\cdot 6+6^2-50=(x+6)^2-50$.
Khi $x=5\sqrt{2}-6$ thì $B=\left(5\sqrt{2}-6+6\right)^2-50=50-50=0$.

□

Bài 11. Cho hai biểu thức $A=\sqrt{2x^2-3x+1}$ và $B=\sqrt{x-1}\sqrt{2x-1}$.

① Tìm x để A có nghĩa.

② Tìm x để B có nghĩa.

③ Với giá trị nào của x thì $A=B$?

④ Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa còn B không có nghĩa?

✍ Lời giải.

① Ta có $A = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{(x-1)(2x-1)}$.
Biểu thức A có nghĩa khi $(x-1)(2x-1) \geq 0$. Ta lập bảng xét dấu của $(x-1)(2x-1)$.

— $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
— $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu

x		$\frac{1}{2}$		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)(2x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $(x-1)(2x-1) \geq 0$ khi $x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 1$.
Vậy A có nghĩa khi $x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 1$.

② Biểu thức B có nghĩa khi

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy B có nghĩa khi $x \geq 1$.

③ Khi $A = B$, tức là

$$\sqrt{(x-1)(2x-1)} = \sqrt{x-1}\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy với $x \geq 1$ thì $A = B$.

④ Dựa vào điều kiện có nghĩa của A và B ta có ngay với $x \leq \frac{1}{2}$ thì chỉ A có nghĩa còn B không có nghĩa.

□

Bài 12. Biết $x^2 + y^2 = 117$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = 2x + 3y$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $|A| = |2x+3y| \leq \sqrt{(2^2+3^2)(x^2+y^2)}$.
Mà $\sqrt{(2^2+3^2)(x^2+y^2)} = \sqrt{13 \cdot 117} = \sqrt{13 \cdot 13 \cdot 9} = 13 \cdot 3 = 39$.
Do đó $|A| \leq 39$, suy ra $-39 \leq A \leq 39$.
Dấu "=" xảy ra khi $x = 2k$ và $y = 3k$, do đó

$$x^2 + y^2 = 117 \Leftrightarrow (2k)^2 + (3k)^2 = 117 \Leftrightarrow 13k^2 = 117 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3.$$

Vậy $A_{\max} = 39$ khi $(x;y) = (6;9)$. □

$A_{\min} = -39$ khi $(x;y) = (-6;-9)$.

Bài 13. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là một nửa chu vi. Chứng minh rằng

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}.$$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2=\left(1\cdot\sqrt{p-a}+1\cdot\sqrt{p-b}+1\cdot\sqrt{p-c}\right)^2$.

Suy ra

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2\le(1^2+1^2+1^2)(p-a+p-b+p-c)\\
\Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2\le 3p\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\le\sqrt{3p}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{\sqrt{p-a}}{1}=\dfrac{\sqrt{p-b}}{1}=\dfrac{\sqrt{p-c}}{1}$ hay $a=b=c$.

Ta tiếp tục chứng minh $\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\\
\Leftrightarrow\ &p<p-a+p-b+p-c+2\sqrt{(p-a)(p-b)}+2\sqrt{(p-b)(p-c)}+2\sqrt{(p-c)(p-a)}\\
\Leftrightarrow\ &2\sqrt{(p-a)(p-b)}+2\sqrt{(p-b)(p-c)}+2\sqrt{(p-c)(p-a)}>0 \text{ (luôn đúng).}
\end{aligned}$$

Vậy $\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\le\sqrt{3p}$. □

Bài 14. Giải các phương trình sau

① $\dfrac{3x+2}{\sqrt{x+2}}=2\sqrt{x+2}$.

② $\sqrt{4x^2-1}-2\sqrt{2x+1}=0$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện xác định là $x>-2$.

Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$3x+2=2\left(\sqrt{x+2}\right)^2\Leftrightarrow 3x+2=2(x+2)\Leftrightarrow x=2.$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được $x=2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

② Điều kiện xác định là

$$\begin{cases}4x^2-1\ge 0\\ 2x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge\dfrac{1}{4}\\ x\ge-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{1}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2-1}-2\sqrt{2x+1}=0\ &\Leftrightarrow\ \sqrt{(2x-1)(2x+1)}-2\sqrt{2x+1}=0\\
&\Leftrightarrow\ \sqrt{2x+1}\left(\sqrt{2x-1}-2\right)=0\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+1}=0\\ \sqrt{2x-1}=2\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{5}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{5}{2}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

□

Bài 15. Giải các phương trình sau

① $\sqrt{x-2}+\sqrt{4x-8}-\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{25x-50}{4}}=4.$ ② $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}.$

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện xác định là $x \geq 2$.

Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x-2}+\sqrt{4(x-2)}-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{4}(x-2)}=4 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x-2}+2\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}=4 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x-2}=2 \\
\Leftrightarrow\ & x-2=4 \\
\Leftrightarrow\ & x=6.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định, phương trình đã cho có nghiệm $x=6$.

② Điều kiện xác định là

$$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \\ 1-2x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 1 \\ x\leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -4\leq x\leq \frac{1}{2}.$$

Phương trình đã cho được viết lại là

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{x+4} \\
\Leftrightarrow\ & 1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)}=x+4 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(1-x)(1-2x)}=2x+1 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ (1-x)(1-2x)=(2x+1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x=0.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định, phương trình đã cho có nghiệm $x=0$.

□

BÀI 4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định lí 1. *Với* $A \geq 0$, $B > 0$ *thì* $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

B DẠNG TOÁN

1 KHAI PHƯƠNG MỘT THƯƠNG

Quy tắc khai phương một thương: Muốn khai phương một thương $\dfrac{A}{B}$ của hai biểu thức $A \geq 0$, $B > 0$, ta có thể khai phương lần lượt biểu thức bị chia A và biểu thức chia B. Sau đó lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

2 CHIA HAI CĂN THỨC BẬC HAI

Quy tắc chia hai căn thức bậc hai: Muốn chia hai căn thức bậc hai của hai biểu thức không âm A cho căn thức bậc hai của biểu thức dương B, ta có thể chia biểu thức A cho biểu thức B rồi lấy căn bậc hai của thương đó.

C PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính

1. $A = \sqrt{72} : \sqrt{2}$
2. $B = (\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}$
3. $C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}$.

✍ **Lời giải.**

1. Ta có ngay $A = \sqrt{72} : \sqrt{2} = \sqrt{72 : 2} = \sqrt{36} = 6$.
2. Ta có ngay:
$$B = (\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3} = \sqrt{12 : 3} - \sqrt{27 : 3} + \sqrt{3 : 3} = \sqrt{4} - \sqrt{9} + 1 = 0.$$
3. Ta viết C dưới dạng:
$$C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

□

Nhận xét.

— *Trong các câu a) và b), chúng ta thực hiện phép bằng bằng việc sử dụng ngay quy tắc chia hai căn thức bậc hai. Tuy nhiên, câu b) có thể thực hiện theo cách biến đổi:*
$$\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$
$\Rightarrow B = 0$.

— *Trong câu c), chúng ta thực hiện tách* $\sqrt{15} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$. *Tuy nhiên, cũng có thể thực hiện như sau:*
$$C = (\sqrt{5^2 \cdot 3} + \sqrt{3^2 \cdot 5}) : \sqrt{15} = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 3}{15}} + \sqrt{\frac{3^2 \cdot 5}{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức:

① $A = \dfrac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2-\sqrt{5}}$ ② $B = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

✍ **Lời giải.**

① Ta có ngay:

$$A = \frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4-2\cdot 2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}}{2-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}}{2-\sqrt{5}} = \frac{|2-\sqrt{5}|}{2-\sqrt{5}} = -1.$$

② Ta có ngay:

$$B = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

□

Nhận xét.

— *Trong lời giải câu ①, các em học sinh cần chú ý tới dấu của $2-\sqrt{5}<0$ để xác định được đúng giá trị cho A.*

— *Trong lời giải câu ②, bằng việc nhân cả tử và mẫu với 2 chung ta đạt được hai mục đích:*

- *Mẫu số trở thành số chính phương.*
- *Tử số được biến đổi về dạng bình phương một nhị thức.*

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức:

① $A = \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}\cdot\sqrt{\dfrac{a^6}{b^3}}$, với $b>0$. ② $B = b^5\sqrt{\dfrac{a^2+6a+9}{b^8}}$.

✍ **Lời giải.**

① Trước hết ta sử dụng quy tắc nhân hai căn bậc hai, rồi biến đổi tiếp:

$$A = \sqrt{\frac{a^2}{b}}\cdot\sqrt{\frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot\frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^8}{b^4}} = \frac{a^4}{b^2}.$$

② Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} B &= b^5\sqrt{\frac{(a+3)^2}{b^8}} = b^5\cdot\frac{|a+3|}{b^4} = b\cdot|a+3| \\ &= \begin{cases} b(a+3) & \text{nếu } a+3\ge 0 \\ -b(a+b) & \text{nếu } a+3<0 \end{cases} = \begin{cases} b(a+3) & \text{nếu } a\ge -3 \\ -b(a+3) & \text{nếu } a<-3 \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Như vậy, trong câu ① nếu chúng ta vận dụng quy tắc khai phương một thương một cách máy móc sẽ không nhân được kết quả gọn.*

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức:

① $A=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ② $B=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có:

$$\begin{aligned}A &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\\ &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})=0.\end{aligned}$$

② Ta có:

$$\begin{aligned}B &= \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})-y(\sqrt{y}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-y)}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.\end{aligned}$$

□

Nhận xét.

— *Trong lời giải câu ①, chúng ta đã lựa chọn cách đơn giản từng biểu thức, dựa trên việc phân tích tử số thành các hằng đẳng thức. Tất nhiên, biểu thức cũng có thể được đơn giản bằng quy đồng mẫu số, xong cách giải này phức tạp hơn.*

— *Trong lời giải câu ②, chúng ta đánh giá được tử số là một hằng đẳng thức, tuy nhiên mẫu số không phải là hằng đẳng thức, dó đó chúng ta sử dụng phương pháp nhóm số hạng để phân tích nó thành tích.*

Ví dụ 5.

① So sánh $\sqrt{25-16}$ với $\sqrt{25}-\sqrt{16}$.

② Chứng minh rằng với $a>b>0$ luôn có: $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta nhận thấy: $\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ và $\sqrt{25}-\sqrt{16}=5-4=1$.
$\Rightarrow \sqrt{25-16}>\sqrt{25}-\sqrt{16}$.

② Hai vế của bất đẳng thức không âm nên bình phương hai vế, ta được:
$(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a-b>a+b-2\sqrt{a\cdot b}$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{a\cdot b}>2b \Leftrightarrow \sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$, luôn đúng với $a>b>0$.

□

Nhận xét. *Cách đặt vấn đề của ví dụ trên, giúp chúng ta tiếp cận với bất đẳng thức trước khi đi chứng minh nó. Tuy nhiên, nếu đặt vấn đề theo kiểu ngược lại, chúng ta sẽ được quyền dùng bất đẳng thức này để đưa ra đánh giá cho phép so sánh.*

Ví dụ 6. Cho biểu thức $A=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x^3}-x}{\sqrt{x}-1}$.

① Tìm điều kiện để biểu thức A có nghĩa.

② Rút gọn biểu thức.

③ Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \dfrac{53}{9-2\sqrt{7}}$.

✍ Lời giải.

① Điều kiện để biểu thức A có nghĩa: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Vậy, tập xác định của A là $x > 1$.

② Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})+(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} + \frac{|x|(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1-x} + x = -2\sqrt{x-1}+x = (x-1)-2\sqrt{x-1}+1 = (\sqrt{x-1}-1)^2. \end{aligned}$$

③ Trước hết, ta đi đơn giản biểu thức với giá trị của x, bằng cách:

$$x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}} = \frac{53(9+2\sqrt{7})}{(9-2\sqrt{7})(9+2\sqrt{7})} = \frac{53(9+2\sqrt{7})}{81-28} = 9+2\sqrt{7}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{9+2\sqrt{7}-1}-1)^2 = (\sqrt{8+2\sqrt{7}}-1)^2 \\ &= (\sqrt{7+2\sqrt{7}+1}-1)^2 = [\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}-1]^2 = (\sqrt{7}+1-1)^2 = 7. \end{aligned}$$

Vậy, với $x = \dfrac{53}{9-2\sqrt{7}}$ thì $A = 7$.

□

Nhận xét.

— *Trong lời giải câu ②, ở bước biến đổi thứ hai, ta bỏ được dấu trị tuyệt đối do điều kiện $x > 1$ đã xác định ở câu ①.*

— *Trong lời giải câu ③, để nhận được kết quả $A = 7$, chúng ta đã phải thực hiện hai công việc:*

- *Đơn giản biểu thức giá trị của x, bằng cách nhân cả tử và mẫu với $9+2\sqrt{7}$. Bản chất của việc làm này được gọi là "Phép nhân liên hợp" và chúng ta sẽ nghiên cứu kĩ trong chủ đề sau.*
- *Đơn giản biểu thức giá trị của A, bằng cách tách $8+2\sqrt{7}$ thành $7+2\sqrt{7}+1$ để nhận được một nhị thức bình phương, từ đó khử được căn thức.*

Ví dụ 7. Cho hai biểu thức $A = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$.

① Tìm x để A có nghĩa.

② Tìm x để B có nghĩa.

③ Với giá trị nào của x thì $A = B$?

④ Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa?

✍ Lời giải.

① Để A có nghĩa điều kiện là $\dfrac{x-1}{x-3} \geq 0$.
Ta lập bản xét dấu, dựa trên: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$; $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ như sau:

x			1		3	
$x-1$	$-$		0	$+$		$+$
$x-3$	$-$			$-$	0	$+$
$\dfrac{x-1}{x-3}$	$+$		0	$-$	‖	$+$

Từ đó, suy ra: $\dfrac{x-1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ hoặc $x > 3$.
Vậy, với $x \leq 1$ hoặc $x > 3$ thì A có nghĩa.

② Để B có nghĩa điều kiện là: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.
Vậy, với $x > 3$ thì B có nghĩa.

③ Để có $A = B$, tức là: $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.
Vậy, với $x > 3$ thì $A = B$.

④ Ta có ngay với $x \leq 1$ thì chỉ có A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

□

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Thực hiện phép tính:

① $A = \sqrt{72} : \sqrt{18}$

② $B = \sqrt{52} : \sqrt{117}$

③ $C = \left(\sqrt{\dfrac{2}{5}} - \sqrt{\dfrac{18}{5}} + 2\sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{5}$.

✍ Lời giải.

① Ta có: $A = \sqrt{72} : \sqrt{18} = \sqrt{72 : 18} = \sqrt{4} = 2$.

② Ta có: $B = \sqrt{52} : \sqrt{117} = \sqrt{\dfrac{52}{117}} = \sqrt{\dfrac{52 : 13}{117 : 13}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$.

③ Ta có:

$$C = \left(\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{\frac{18}{5}} + 2\sqrt{5}\right)\sqrt{5} = \sqrt{\frac{2\cdot 5}{5}} - \sqrt{\frac{18\cdot 5}{5}} + 2\sqrt{5\cdot 5} = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2 = 2 - 2\sqrt{2}.$$

□

Bài 2. Rút gọn biểu thức:

① $A = \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

② $B = \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4+\sqrt{24}}$

③ $C = \dfrac{1-\sqrt{a^3}}{a-1}$

④ $D = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$

⑤ $E = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

⑥ $F = \dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$.

✍ Lời giải.

① Ta có: $A = \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$.

② Ta có: $B = \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4+\sqrt{24}} = \dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

③ Ta có:

$$C = \frac{1-\sqrt{a^3}}{a-1} = \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{-(\sqrt{a}-1)(1+\sqrt{a}+a)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{-(1+\sqrt{a}+a)}{\sqrt{a}+1}.$$

④ Ta có: $D = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{\sqrt{5}+1} = 1$.

⑤ Ta có: $E = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{6}+3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 1$.

⑥ Ta có: $F = \dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{\sqrt{3-2\cdot 2\sqrt{3}+4}}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{|\sqrt{3}-2|}{\sqrt{3}-2} = -1$.

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức

① $A = 3\cdot\sqrt{\dfrac{12(a-2)^2}{27}}$

② $B = (a-b)\cdot\sqrt{\dfrac{ab}{(a-b)^2}}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta biến đổi

$$\begin{aligned} A &= 3\cdot\sqrt{\frac{4(a-2)^2}{9}} = 3\cdot\frac{2|a-2|}{3} = 2|a-2| \\ &= \begin{cases} 2(a-2) & \text{nếu } a-2\ge 0 \\ -2(a-2) & \text{nếu } a-2<0 \end{cases} = \begin{cases} 2(a-2) & \text{nếu } a\ge 2 \\ -2(a-2) & \text{nếu } a<2 \end{cases}. \end{aligned}$$

② Ta biến đổi

$$B = (a-b)\cdot\frac{\sqrt{ab}}{|a-b|} = \begin{cases} \sqrt{ab} & \text{nếu } a-b>0 \\ -\sqrt{ab} & \text{nếu } a-b<0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{ab} & \text{nếu } a>b \\ -\sqrt{ab} & \text{nếu } a<b. \end{cases}$$

□

Bài 4. Cho biểu thức $A = x^2 - x\sqrt{10}$. Tính giá trị biểu thức A với $x = \sqrt{\dfrac{2}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

✍ **Lời giải.**

Thay $x = \sqrt{\dfrac{2}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ vào A, ta được $A = \dfrac{21}{10}$. □

Bài 5. Cho biểu thức: $A = \left[\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-1\right)\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}+1\right)\right] : \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$

① Rút gọn biểu thức A.

② Cho $b=1$, tìm a để biểu thức $A=2$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) : \left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}. \end{aligned}$$

② Với $b = 1$ được $A = 2$, vậy:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{a+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2(a+1) \Leftrightarrow 2a - \sqrt{a} + 2 = 0. \qquad (1)$$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}\sqrt{a})^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a} + \frac{1}{8} + \frac{17}{8} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{2a} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{17}{8} \geq \frac{17}{8} > 0. \end{aligned}$$

Do đó, (1) không thỏa mãn.

Vậy, không có giá trị nào của a để với $b = 1$ thì $A = 2$.

□

Bài 6. Cho biểu thức: $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x} - \sqrt{x} + x - 1}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$.

① Rút gọn biểu thức A.

② Tìm x để $A = \dfrac{1}{5}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(x-1) + (x-1)}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right) : \frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-1-2\sqrt{x}+2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}\cdot(\sqrt{x}+1) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

② Ta có:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5(\sqrt{x}-1) = \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

Vậy, với $x = \dfrac{9}{4}$ thì $A = \dfrac{1}{5}$.

□

Bài 7. Cho hai biểu thức: $A = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x-3}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-3}}$.

① Tìm x để A có nghĩa.

② Tìm x để B có nghĩa.

③ Với giá trị nào của x thì $A = B$?

④ Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa?

✍ **Lời giải.**

① Để A có nghĩa điều kiện là $\dfrac{x-1}{2x-3} \geq 0$ ta lập bảng xét dấu, dựa trên:

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$; $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ như sau:

x		1		$\frac{3}{2}$	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x-1}{2x-3}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

Từ đó, suy ra $\dfrac{x-1}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ hoặc $x > \dfrac{3}{2}$.

Vậy với $x \leq 1$ hoặc $x > \dfrac{3}{2}$ thì A có nghĩa.

② Để B có nghĩa điều kiện là $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

Vậy với $x > \dfrac{3}{2}$ thì B có nghĩa.

③ Để có $A = B$ tức là $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-3}} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

Vậy với $x > \dfrac{3}{2}$ thì $A = B$.

④ Ta có ngay, với $x \leq 1$ thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

□

Bài 8. Cho biểu thức: $A = \left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} + \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}\right) : \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

① Tìm x để A có nghĩa.

② Rút gọn biểu thức A.

③ Tính giá trị của biểu thức với $x = 19 - 8\sqrt{3}$.

✍ **Lời giải.**

① Để A có nghĩa điều kiện là $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

② Biến đổi A về dạng

$$\begin{aligned} A &= \left(\dfrac{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}}{\sqrt{\sqrt{x}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{x}-1}}\right) : \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \left(\dfrac{|\sqrt{x}-1| + |\sqrt{x}+1|}{\sqrt{\sqrt{x^2}-1}}\right) : \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \\ &= \dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}} \cdot \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

3 Với $x = 19 - 8\sqrt{3}$, ta có:

$$\sqrt{x} = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = |4 - \sqrt{3}| = 4 - \sqrt{3}$$

do đó: $A = 2(4 - \sqrt{3}) = 8 - 2\sqrt{3}$.

□

BÀI 5. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐƯA MỘT THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN

Ta có:

$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B},\ \text{với } B \geq 0$$

.

2 ĐƯA MỘT THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN

Ta có:

$$|A|\sqrt{B} = \sqrt{A^2B},\ \text{với } B \geq 0$$

. Ta có hai trường hợp:

① Nếu $A \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$, với $B \geq 0$.

② Nếu $A < 0$ thì $A\sqrt{B} = -|A|\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$, với $B \geq 0$.

3 KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC LẤY DẤU CĂN

Ta có:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A\cdot B}{B^2}} = \frac{1}{|B|}\sqrt{A\cdot B},\ \text{với } A\cdot B \geq 0, B \neq 0$$

.

4 TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU

Trục căn thức ở mẫu, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

① Phân tích nhân tử và mẫu ra thừa số chung chứa căn rồi rút gọn thừa số đó.

② Nhân tử và mẫu với thừa số thích hợp để làm mất căn thức mẫu. Có các dạng cơ bản sau:

— $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ $(B > 0)$.

— $\dfrac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)} = \dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{A-B}$, với $A > 0, B > 0, A \neq B$.

— $\dfrac{1}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)} = \dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{A-B}$, với $A > 0, B > 0, A \neq B$.

Hai phép biến đổi dạng 2 và dạng 3 gọi là phép nhân liên hợp.

B CÁC DẠNG TOÁN

1 ĐƯA MỘT THỪA SỐ VÀO TRONG HOẶC RA NGOÀI DẤU CĂN

Ví dụ 1. Viết gọn các biểu thức sau:

① $A = \sqrt{25\cdot 90}$ ② $B = \sqrt{75\cdot 54}$

✍ **Lời giải.**

① $A = \sqrt{25 \cdot 90} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 10} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{10} = 15 \cdot \sqrt{10}$.

② $B = \sqrt{75 \cdot 54} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 6} = 5 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 2 \cdot 3} = 45 \cdot \sqrt{2}$.

□

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức sau: $A = \dfrac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8\left(a^2 - 4a + 4\right)}$

✍ **Lời giải.**

Ta biến dổi A về dạng:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8(a-2)^2} \\
&= \frac{2\sqrt{2} \cdot a^4 \cdot |a-2|}{a-2} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}a^4 \cdot (a-2)}{a-2} & \text{nếu } a-2>0 \\ -\dfrac{2\sqrt{2}a^4 \cdot (a-2)}{a-2} & \text{nếu } a-2<0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\sqrt{2}a^4 \text{ nếu} a>2 \\ -2\sqrt{2}a^4 \text{ nếu} a<2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Như vậy, ở trong A có thể đưa được a^8 và $(a-2)^2$ ra ngoài dấu căn. Tuy nhiên, ta thấy rằng:*

— $\sqrt{a^8} = \sqrt{\left(a^4\right)^2} = a^4$, *bởi $a^4 \geq 0$ với mọi a.*

— $\sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$, *bởi ta chưa xác định được dấu của $a-2$.*

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $\dfrac{a-b}{b^2}\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = |a|$, với $a > b$.

✍ **Lời giải.**

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

— Cách 1: Sử dụng quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn.

Vì $a > b$ nên $\dfrac{a-b}{b^2} > 0$, do đó:

$$\frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2-2qb+b^2}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{b^4} \cdot \frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

— Cách 2: Sử dụng quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn.

Ta có:

$$\frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = \frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{(a-b)^2}} = \frac{a-b}{b^2} \cdot \frac{|a| \cdot b^2}{|a-b|} = \frac{a-b}{b^2} \cdot \frac{|a| \cdot b^2}{(a-b)} = |a|.$$

□

Nhận xét. *Như vậy, phép biến đổi đưa thừa số vào trong dấu căn đã giúp chúng ta có thể chứng minh được đẳng thức. Ngoài ra, nó còn rất cần thiết trong các phép tính toán, thí dụ:*

① *Để so sánh $\sqrt{31}$ và $2\sqrt{27}$, ta biến đổi:*

$2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28} < \sqrt{31}$.

② *Khi tính $3\sqrt{2}$:*

— *Nếu ta tính* $\sqrt{2} \approx 1,41$ *(sai chưa đến* $0,01$*) rồi nhân 3 thì sai số sẽ gấp* 3 *lần sai số của giá trị gần đúng của* $\sqrt{2}$ *mà ta đã lấy.*

— *Còn nếu ta thực hiện* $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$*, rồi dùng bảng tìm giá trị gần đúng của* $\sqrt{18}$ *thì sai số không bị nhân lên* 3 *lần như làm cách trên.*

Ví dụ 4. Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần: $6\sqrt{2}, 4\sqrt{5}, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{7}$.

Lời giải.

Sử dụng quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn, ta viết lại dãy số dưới dạng:
$6\sqrt{2} = \sqrt{72}, 4\sqrt{5} = \sqrt{80}, 2\sqrt{13} = \sqrt{52}, 3\sqrt{7} = \sqrt{63}$.
Do đó, ta có sắp xếp $4\sqrt{5}, 6\sqrt{2}, 3\sqrt{7}, 2\sqrt{13}$. □

2 KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC DƯỚI DẤU CĂN-PHÉP NHÂN LIÊN HỢP

Ví dụ 5. Khử mẫu số của các biểu thức dưới dấu căn:

① $\sqrt{\dfrac{7}{12}}$. ② $\sqrt{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}}$.

Lời giải.

① Ta biến đổi: $\sqrt{\dfrac{7}{12}} = \sqrt{\dfrac{7}{4 \cdot 3}} = \sqrt{\dfrac{7 \cdot 3}{36}} = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

② Ta biến đổi: $\sqrt{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{a-1}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{a-1}}{|a|}$.

□

Ví dụ 6. Trục căn thức ở mẫu

① $\dfrac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}$. ② $\dfrac{\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a-1}-1}$. ③ $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. ④ $\dfrac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}$.

Lời giải.

① Ta biến đổi: $\dfrac{a+1}{\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{(a+1)\sqrt{a^2-1}}{a^2-1} = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}$.

② Ta biến đổi: $\dfrac{\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a-1}-1} = \dfrac{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}{\left(\sqrt{a-1}-1\right)\left(\sqrt{a-1}+1\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}{a-1-1} = \dfrac{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}{a-2}$.

③ Ta biến đổi:

$$\begin{aligned}\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{(a-b)(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a-b)(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\\ &= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)(a+b).\end{aligned}$$

hoặc có thể biến đổi:
$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a^2-b^2)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{(a^2-b^2)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b} = (a+b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right).$$

④ Ta biến đổi:

$$\begin{aligned}\frac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}} &= \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}} = \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}\cdot\left(1-\sqrt{a}\right)}{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)} = \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}\cdot\left(1-\sqrt{a}\right)}{1-a}\\ &= \sqrt{1+\sqrt{a}}\cdot\left(1-\sqrt{a}\right).\end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Trong lời giải câu ②, chúng ta phải đi trục căn thức hai lần. Các em học sinh có thể thực hiện theo chiều ngược lại.*

Ví dụ 7. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Hãy trục căn thức ở mẫu của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ta được $a=bt$ và $c=dt$.

Khi đó, biểu thức được viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{\sqrt{bt}+\sqrt{b}+\sqrt{dt}+\sqrt{d}} = \frac{1}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{t}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{t}-1\right)}{(b-d)(t-1)}\\ &= \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-1\right)}{(b-d)\left(\frac{a}{b}-1\right)} = \frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(b-d)(a-b)}\end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Trong cuốn toán nâng cao 8 chúng ta đã từng thấy khẳng định của Pô-li-a rằng yếu tố phụ như một nhịp cầu để nối nối bài toán cần tìm ra cách giải với bài toán đã biết cách giải và ở đây chúng ta có thể khẳng định thêm rằng việc đưa yếu tố phụ còn có tác dụng như một chiếc đòn bẩy, giúp ta giải bài toán nhẹ nhàng hơn.*

3 SỬ DỤNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CHO BÀI TOÁN RÚT GỌN VÀ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức: $A=\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

✍ Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}A &= \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}+\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}+\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}\\ &= \sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}\\ &= \sqrt{7}+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Nếu thực hiện theo phương pháp"quy đồng mẫu số", ta được:*
$A=\dfrac{4\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)+2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{4\sqrt{5}+2\sqrt{3}+2\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}.$
bài toán sẽ dừng lại ở đây.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng: $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$, với $a, b>0$.

✍ **Lời giải.**
Nhận xét rằng: $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)$.
Từ đó, suy ra:

$$\begin{aligned}\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}&=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}-\sqrt{ab}\\&=a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{b}\\&=a-2\sqrt{ab}+b\\&=\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{ab}+\left(\sqrt{b}\right)^2\\&=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2.\end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Trong lời giải trên, chúng ta dựa trên hằng đẳng thức để phân tích tử số ra thừa số chung từ đó rút gọn được căn thức ở mẫu. Tất nhiên, chúng ta có thể lựa chọn phép nhân liên hợp xong cách giải này phức tạp hơn.*

Ví dụ 10. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}}=\sqrt{2009}-1.$

✍ **Lời giải.**
Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1\\&\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\&\ldots\\&\frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}}=\sqrt{2009}-\sqrt{2008}.\end{aligned}$$

Thực hiện phép cộng theo vế và rút gọn, ta được:
$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}}=\sqrt{2009}-1$ (đpcm). □

Nhận xét. *Trong lời giải trên, để chứng minh đẳng thức chúng ta lựa chọn phép nhân liên hợp để khử căn thức ở mẫu cho từng phân số. Và ở đây chúng ta sử dụng phép biến đổi cục bộ.*

Ví dụ 11. Cho biểu thức: $A=\left(\sqrt{1-x}+\dfrac{3}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right).$

① Tìm điều kiện để A có nghĩa. ② Rút gọn A.

③ Tính giá trị của A khi $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.   ④ Tìm x để $\sqrt{A} > A$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện để A có nghĩa:
$$\begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 1+x > 0 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x > -1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1. \qquad (*)$$
Vậy, điều kiện tồn tại của A là $-1 < x < 1$.

② Biến đổi biểu thức về dạng:
$$A = \frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}+3}{\sqrt{1+x}} : \frac{\sqrt{1-x^2}+3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}+3}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+3} = \sqrt{1-x}.$$

③ Trước tiên, ta viết lại x dưới dạng:
$$x = \frac{\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4-3} = 2\sqrt{3}-3.$$
Khi đó, ta suy ra:
$$A = \sqrt{1-\left(2\sqrt{3}-3\right)} = \sqrt{1-2\sqrt{3}+3} = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \left|1-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}-1.$$

④ Để $\sqrt{A} > A$, điều kiện là: $A < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} < 1 \Leftrightarrow 1-x < 1 \Leftrightarrow x > 0$.
Vậy, với $0 < x < 1$ thì $\sqrt{A} > A$.

□

Ví dụ 12. Cho biểu thức: $A = (x-3)\sqrt{\dfrac{x}{9-x^2}}$.

① Tìm điều kiện để A có nghĩa.

② Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức A khi $x = 1$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện để A có nghĩa: $\begin{cases} \dfrac{x}{9-x^2} \ge 0 \\ 9-x^2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{(3-x)(3+x)} \ge 0 \\ (3-x)(3+x) \ne 0 \end{cases}$.
Lập bảng xét dấu từ đó thu được $x < -3$ hoặc $0 \le x < 3$.
Vậy, điều kiện tồn tại của A là $x < -3$ hoặc $0 \le x < 3$.

② Từ kết quả câu a), suy ra $x-3 < 0$, do đó:
$$A = (x-3)\sqrt{\frac{x}{9-x^2}} = -|x-3|\sqrt{\frac{x}{9-x^2}} = -\sqrt{\frac{x(x-3)^2}{(3-x)(3+x)}} = -\sqrt{\frac{x(3-x)}{3+x}}.$$
Thay $x = 1$ vào A, ta được: $A = -\sqrt{\dfrac{1(3-1)}{3+1}} = -\sqrt{\dfrac{2}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

□

Nhận xét. *Bài toán sẽ có một kết quả sai nếu các em học sinh không đánh giá điều kiện $0 \le x < 3$, dẫn đến sai lầm trong quá trình biến đổi.*
$$A = (x-3)\sqrt{\frac{x}{9-x^2}} = \sqrt{\frac{x(x-3)^2}{(3-x)(3+x)}} = \sqrt{\frac{x(3-x)}{3+x}}.$$
Với biến đổi như vậy thì kết quả câu b) sẽ là $A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4 SỬ DỤNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 13. Với giá trị nào của x thì ta có:

① $\sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$. ② $\sqrt{a(1-3x)^2} = (3x-1)\sqrt{a}$ (với $a > 0$).

✍ Lời giải.

① Ta biến đổi tương đương: $\sqrt{3x^2} = x\sqrt{3} \Leftrightarrow |x|\sqrt{3} \Leftrightarrow |x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$.
Vậy, với $x \geq 0$ ta có đẳng thức đã cho.

② Ta biến đổi tương đương:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a(1-3x)^2} = (3x-1)\sqrt{a} \\ \Leftrightarrow & |1-3x|\sqrt{a} = (3x-1)\sqrt{a} \\ \Leftrightarrow & |1-3x| = 3x-1 && \text{(do } a > 0) \\ \Leftrightarrow & 1-3x \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x \geq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vậy, với $x \geq \frac{1}{3}$, ta có được đẳng thức đã cho.

□

Ví dụ 14. Giải phương trình: $\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6$.

✍ Lời giải.
Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{9^2}} = 6 \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{x-2} - 9\cdot\frac{1}{9}\sqrt{x-2} = 6 \\ \Leftrightarrow & 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 6 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3 \\ \Leftrightarrow & x-2 = 9 \\ \Leftrightarrow & x = 11. \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 11$. □

Nhận xét. *Như vậy, với phương trình trong câu trên, chúng ta sử dụng quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn để biến đổi nó về dạng $\sqrt{f} = g$. Tất nhiên, chúng ta cũng có thể sử dụng quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn để giải, cụ thể:*

$\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} = 3\sqrt{\frac{1}{4}(4x-8)} = 3\sqrt{x-2}$.

$9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = \sqrt{\frac{81(x-2)}{81}} = \sqrt{x-2}$.

Xong cách biến đổi kiểu này rất thụ động.

Ví dụ 15. Giải các phương trình sau:

① $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} + 2 = 0$. ② $2x - 5a\sqrt{x-a} + 2a^2 - 2a = 0$, với $a > 0$.

✍ Lời giải.

① Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x^2+1}-x-\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}+2=0\\
\Leftrightarrow&\frac{-2x}{x^2+1-x^2}+2=0\\
\Leftrightarrow&-2x+2=0\\
\Leftrightarrow&2x=2\\
\Leftrightarrow&x=1.
\end{aligned}$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=1$.

② Đặt $t=\sqrt{x-a}$, điều kiện $t\geq 0$. Suy ra $t^2=x-a\Leftrightarrow x=t^2+a$.
Khi đó, phương trình có dạng:

$$\begin{aligned}
&2\left(t^2+a\right)-5at+2a^2-2a=\\
\Leftrightarrow&2t^2-5at+2a^2=0\\
\Leftrightarrow&(t-2a)(2t-a)=0\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}t-2a=0\\2t-a=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}t=2a\\t=\dfrac{a}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-a}=2a\\\sqrt{x-a}=\dfrac{a}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x-a=4a^2\\x-a=\dfrac{a^2}{4}\end{array}\right.\qquad(\text{do } a>0)\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x=4a^2+a\\x=\dfrac{a^2+4a}{4}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x=4a^2+a$ và $x=\dfrac{a^2+4a}{4}$.

□

Nhận xét. *Như vậy*

① *Với phương trình trong câu a), chúng ta sử dụng phép quy đồng cục bộ vì nhận thấy mẫu số của phân số thứ nhất là liên hợp của mẫu số của phân số thứ hai.*

② *Với phương trình trong câu b), chúng ta sử dụng phép đặt ẩn phụ để nhận được một phương trình bậc hai, từ đó sử dụng kiến thức về phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi nó về dạng tích và nhận được hai nghiệm $t=2a$ và $t=\dfrac{a}{2}$ (lưu ý rằng cả hai nghiệm này đều thỏa mãn $t\geq 0$ do giả thiết $a>0$).*

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. So sánh các cặp số sau:

① $4\sqrt{7}$ và $3\sqrt{13}$.

② $5\sqrt{11}$ và $3\sqrt{21}$.

③ $\dfrac{3}{4}\sqrt{5}$ và $\dfrac{4}{9}\sqrt{7}$.

④ $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ và $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có:
$4\sqrt{7} = \sqrt{4^2 \cdot 7} = \sqrt{112}$,
$3\sqrt{13} = \sqrt{3^2 \cdot 13} = \sqrt{117}$.
Vậy, ta được $4\sqrt{7} < 3\sqrt{13}$.

② Ta có: $5\sqrt{11} = \sqrt{5^2 \cdot 11} = \sqrt{275}$,
$3\sqrt{21} = \sqrt{3^2 \cdot 21} = \sqrt{189}$.
Vậy, ta được $5\sqrt{11} > 3\sqrt{21}$.

③ Ta có:
$\frac{3}{4}\sqrt{5} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 5} = \sqrt{\frac{45}{16}}$,
$\frac{4}{9}\sqrt{7} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot 7} = \sqrt{\frac{112}{81}}$.
Vậy, ta được $\frac{3}{4}\sqrt{5} > \frac{4}{9}\sqrt{7}$.

④ Ta có:
$$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$$
$$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)} = \frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{6-3} = \sqrt{6}+\sqrt{3}.$$
Vậy, ta được $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} > \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

□

Bài 2. So sánh các cặp số sau: $A = \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2}$ và $B = \frac{12}{3-\sqrt{6}} + \sqrt{6}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} \\
&= \frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{\left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{6}-1\right)} + \frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)} \\
&= \frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1} + \frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4} \\
&= 3\left(\sqrt{6}-1\right) + 2\left(\sqrt{6}+2\right) \\
&= 5\sqrt{6}+1. \\
B &= \frac{12}{3-\sqrt{6}} + \sqrt{6} \\
&= \frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{\left(3-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)} \\
&= \frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{9-6} \\
&= 4\left(3+\sqrt{6}\right).
\end{aligned}$$

Vậy, ta được $A < B$. □

Bài 3. Trục căn thức ở mẫu:

① $A = \dfrac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$.

② $B = \dfrac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{8} - 2\sqrt{2}}$.

③ $C = \dfrac{\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3} - \sqrt{a-3}}$.

④ $D = \dfrac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có: $A = \dfrac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} = \dfrac{\left(1 - \sqrt{a}\right)\left(1 + \sqrt{a} + a\right)}{1 - \sqrt{a}} = 1 + \sqrt{a} + a$.

② Ta có: $B = \dfrac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{2^2 \cdot 2}} = \dfrac{1}{\sqrt{18}}$.

③ Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \dfrac{\left(\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3}\right)\left(\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3}\right)}{\left(\sqrt{a+3} - \sqrt{a-3}\right)\left(\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3}\right)} \\ &= \dfrac{\left(\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3}\right)^2}{(a+3) - (a-3)} \\ &= \dfrac{a + 3 + 2\sqrt{a+3}\sqrt{a-3} + a - 3}{a + 3 - a + 3} \\ &= \dfrac{2a + 2\sqrt{a^2 - 9}}{6}. \end{aligned}$$

④ Ta có:

$$\begin{aligned} D &= \dfrac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ &= \dfrac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)} \\ &= \dfrac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 3} \\ &= \dfrac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{\left(1 + 2\sqrt{2} + 2\right) - 3} \\ &= \dfrac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}} \\ &= \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 4. Rút gọn biểu thức:

① $A = \dfrac{1}{\sqrt{7} - 2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}$.

② $B = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - \dfrac{\sqrt{2} - 2}{1 - \sqrt{2}}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có: $A = \dfrac{\sqrt{7} + 2\sqrt{3} + \sqrt{7} - 2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} + 2\sqrt{3}\right)} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7 - 4 \cdot 3} = -\dfrac{2\sqrt{7}}{5}$

② Ta có:

$$B=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{2\cdot2+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{2-1}$$
$$=3+\sqrt{2}$$

□

Bài 5. Với giá trị nào của x thì ta có:

① $\sqrt{7x^2}=-x\sqrt{7}$.

② $\sqrt{a(x-2)^2}=(2-x)\sqrt{a}$ (với $a>0$).

✍ **Lời giải.**

① Ta biến đổi tương đương:
$\sqrt{7x^2}=-x\sqrt{7}\Leftrightarrow |x|\sqrt{7}=-x\sqrt{7}\Leftrightarrow |x|=-x\Leftrightarrow x\le 0$.
Vậy, với $x\le 0$ ta có được đẳng thức đã cho.

② Ta biến đổi tương đương:
$\sqrt{a(x-2)^2}=(2-x)\sqrt{a}\Leftrightarrow |x-2|\sqrt{a}=(2-x)\sqrt{a}\Leftrightarrow |x-2|=2-x\Leftrightarrow 2-x\le 0\Leftrightarrow x\ge 0$.
Vậy, với $x\ge 2$ ta có được đẳng thức đã cho.

□

Bài 6. Chứng minh rằng:

① $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{a+b}{a-b}$, với $a,\ b>0$ và $a\ne b$.

② $\dfrac{\left(a\sqrt{b}+b\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}\sqrt{\dfrac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a\left(a+2\sqrt{b}\right)+b}}=b$, với $a>b>0$.

✍ **Lời giải.**

① Thực hiện phép quy đồng mẫu số cho vế trái (VT), ta được:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

② Nhận xét rằng:

$$\frac{\left(a\sqrt{b}+b\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}=\frac{\sqrt{b}\left(a+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}.$$

$$\sqrt{\frac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a\left(a+2\sqrt{b}\right)+b}}=\sqrt{\frac{b\left[\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right]}{a^2+2a\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2}}=\sqrt{\frac{b\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}}=\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a+\sqrt{b}}.$$

Do đó:

$$VT=\frac{\sqrt{b}\left(a+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}\cdot\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a+\sqrt{b}}=\frac{b\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}=b.$$

□

Bài 7. Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{4x-16}+\sqrt{x-4}-\frac{1}{3}\sqrt{9x-36}=4.$ ② $\sqrt{9x-9}-\sqrt{4x-4}+\sqrt{16x-16}-3\sqrt{x-1}=16.$

✍ **Lời giải.**

① Biến đổi phương trình về dạng:
$2\sqrt{x-4}+\sqrt{x-4}-\sqrt{x-4}=4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-4}=4 \Leftrightarrow \sqrt{x-4}=2 \Leftrightarrow x-4=4 \Leftrightarrow x=8.$

② Biến đổi phương trình về dạng:
$3\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}-3\sqrt{x-1}=16 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=16 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=8$
$\Leftrightarrow x-1=64 \Leftrightarrow x=65.$

□

Bài 8. Giải các phương trình sau:

① $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}+2=0.$ ② $\dfrac{2x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{2x}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{5}+1.$

✍ **Lời giải.**

① Biến đổi phương trình về dạng:
$$\frac{\sqrt{x+1}-1-\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}+2=0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x+1-1}+2=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}=2 \Leftrightarrow x=1.$$
Vậy, phương trình có nghiệm $x=1$.

② Nhận xét rằng:
$$\frac{2x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2x\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}\frac{2x\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=x\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right).$$
$$\frac{2x}{\sqrt{3}+1}=\frac{2x\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{2x\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}=x\left(\sqrt{3}-1\right).$$
Do đó, phương trình được chuyển về dạng:
$x\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)-x\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{5}+1 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1\right)=\sqrt{5}+1$
$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{5}+1\right)=\sqrt{5}+1 \Leftrightarrow x=1.$
Vậy, phương trình có nghiệm $x=1$.

□

Bài 9. Giải các phương trình sau:

① $2x-7\sqrt{x}+5=0.$ ② $x-6\sqrt{x-3}-10=0.$

✍ **Lời giải.**

① Đặt $t=\sqrt{x}$, điều kiện $t\ge 0$.
Khi đó phương trình có dạng: $2t^2-7t+5=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-5)=0$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ 2t-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{25}{4} \end{array}\right. .$$
Vậy, phương trình có hai nghiệm $x=1$ và $x=\dfrac{25}{4}$.

② Đặt $t=\sqrt{x-3}$, điều kiện $t\ge 0$. Suy ra: $t^2=x-3 \Leftrightarrow x=t^2+3$
Khi đó phương trình có dạng:
$$t^2+3-6t-10=0 \Leftrightarrow t^2-6t-7=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t+1=0 & \text{(vô nghiệm)} \\ t-7=0 & \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow t = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 7 \Leftrightarrow x - 3 = 49 \Leftrightarrow x = 52.$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 52$.

□

Bài 10. Cho biểu thức: $A = \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 1$

① Tìm điều kiện để A có nghĩa. ② Rút gọn A. ③ So sánh $|A|$ với A, biết $x > 1$.

④ Tìm x để $A = 2$. ⑤ Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện để A có nghĩa: $\begin{cases} x > 0 \\ x - \sqrt{x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

② Nhận xét rằng:

$x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+1\right) = \sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}\right)^3 + 1\right] = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x - \sqrt{x}+1\right).$

$2x + \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right).$

Do đó, biểu thức A được biến đổi về dạng:

$A = \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{x-\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} + 1 = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) - \left(2\sqrt{x}+1\right) + 1 = x - \sqrt{x}.$

③ Nhận xét rằng, với $x > 1$, ta có ngay: $x > \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow A > 0 \Rightarrow |A| = A$

④ Để $A = 2$, điều kiện là: $x - \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x}$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t+2=0 & \text{(vô nghiệm)} \\ t-2=0 & \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy, điều kiện là $x = 4$.

⑤ Ta có: $A = x - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \geq -\dfrac{1}{4}$.

Do đó $A_{Min} = -\dfrac{1}{4}$; đạt được khi: $\sqrt{x} - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

□

BÀI 6. RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN BẬC HAI

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện các phép biến đổi đơn giản:

① Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn.

② Đưa một thừa số vào trong dấu căn.

③ Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn.

④ Trục căn thức ở mẫu.

Bước 2: Thực hiện phép tính.

Ta có kết quả: $a\sqrt{A}-b\sqrt{A}+c\sqrt{A}+d=(a-b+c)\sqrt{A}+d$ với $A\ge 0$ và $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

B CÁC DẠNG TOÁN

1 THỰC HIỆN PHÉP TÍNH RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN BẬC HAI

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính:

① $3\sqrt{8}-\sqrt{18}-5\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{50}$

② $\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

Lời giải.

① Ta biến đổi:

$$\begin{aligned}3\sqrt{8}-\sqrt{18}-5\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{50}&=3\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{9\cdot 2}-5\sqrt{\frac{2}{2^2}}+\sqrt{25\cdot 2}\\&=6\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{2}+5\sqrt{2}\\&=\left(6-3-\frac{5}{2}+5\right)\sqrt{2}\\&=\frac{11\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

② Ta biến đổi từng thành phần trong biểu thức:

$\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, ở đây ta sử dụng phép phân tích tỉ số.

$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

$\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{3-1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1.$

Như vậy: $\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{2}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{3}+1=1.$

□

Nhận xét. *Như vậy, với yêu cầu "Thực hiện phép tính" của các biểu thức chứa căn bậc hai chúng ta cần linh hoạt sử dụng bốn quy tắc biến đổi đã biết, cụ thể:*

— *Ở câu ①, chúng ta đã sử dụng quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn cho* $3\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$. *Còn* *đối với* $5\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ *ta biến đổi nó về dạng mẫu số bình phương là* $5\sqrt{\dfrac{2}{2^2}}$, *tất nhiên cũng có thể biến đổi:*

$$5\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

— *Ở câu ② mỗi thành phần đều có nhiều cách biến đổi, cụ thể ngoài cách đã trình bày trong lời giải trên chúng ra còn có thể thực hiện như sau:*

$\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$

$\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \left(\sqrt{3}+1\right).$

Ví dụ 2. Thực hiện phép tính:

① $A = 15\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$. ② $B = \sqrt{\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có: $A = 15\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right) = 15\left(\dfrac{1}{5}\sqrt{15} + \dfrac{1}{3}\sqrt{15}\right) = 15\cdot\dfrac{8}{15}\sqrt{15} = 8\sqrt{15}.$

② Ta có thể làm theo hai cách:

— Cách 1: Sử dụng phương pháp quy đồng mẫu số, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{6}}} - \frac{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{6}}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{6}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{6}}} = -2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

— Cách 2: Sử dụng phương pháp trục căn thức ở mẫu, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^2}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)}} - \sqrt{\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)}} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{7}-\sqrt{6}-\sqrt{7}-\sqrt{6} = -2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Các em học sinh cần phải linh hoạt trong việc lựa chọn cách biến đổi. Trong nhiều bài toán việc trục căn thức ở mẫu sẽ làm cho các bược quy đồng đơn giản hơn nhiều.*

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau:

① $A = 2\sqrt{3x} + \sqrt{27x} - \sqrt{8x} + \sqrt{50x} + \sqrt{x}.$ ② $B = \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{xy} + \dfrac{x}{y}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, với $x,\ y > 0$.

✍ **Lời giải.**

① Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{3x}+3\sqrt{3x}-2\sqrt{2x}+5\sqrt{2x}+\sqrt{x} \\ &= (2+3)\sqrt{3x}+(-2+5)\sqrt{2x}+\sqrt{x} \\ &= 5\sqrt{3x}+3\sqrt{2x}+\sqrt{x} \\ &= \left(5\sqrt{3}+3\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}. \end{aligned}$$

② Với x, $y > 0$ ta biến đổi:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{xy}{y^2}}+\sqrt{xy}+\frac{x}{y}\sqrt{\frac{xy}{x^2}} \\ &= \frac{1}{|y|}\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+\frac{x}{|x|y}\sqrt{xy} \\ &= \frac{1}{y}\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+\frac{x}{xy}\sqrt{xy} \\ &= \left(\frac{1}{y}+1+\frac{1}{y}\right)\sqrt{xy} \\ &= \frac{(y+2)\sqrt{xy}}{y}. \end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Như vậy, với yêu cầu "Rút gọn" các biểu thức chứa căn bậc hai chúng ta vẫn linh hoạt sử dụng bốn quy tắc biến đổi đã biết. Tuy nhiên trong câu b) chúng ta lưu ý tới* $\sqrt{a^2}=|a|$, *từ đó thực hiện thêm việc phá dấu trị tuyệt đối.*

Ví dụ 4. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2-\left(\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=4\sqrt{6}$.

✍ **Lời giải.**

Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned} 5+2\sqrt{6} &= \left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2. \\ 5-2\sqrt{6} &= \left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2 &= \left(\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}. \\ \left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2 &= \left(\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Do đó $VT=5+2\sqrt{6}-\left(5-2\sqrt{6}\right)=4\sqrt{6}$. □

Nhận xét. *Đối với biểu thức đã cho, nếu không khéo léo đánh giá được* $5+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ *và* $5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ *mà thực hiện phép nhân liên hợp để khử mẫu thì sẽ nhận được kết quả rất phức tạp.*

Ví dụ 5. Cho a, b, c, d, A, B, C, D là các số thực dương thỏa mãn:

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=\frac{c}{D}$$

Chứng minh rằng: $\sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{cC}+\sqrt{dD}=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=\frac{c}{D}$, suy ra $\begin{cases} a=At \\ b=Bt \\ c=Ct \\ d=Dt \end{cases}$.

Khi đó đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{A^2t}+\sqrt{B^2t}+\sqrt{C^2t}+\sqrt{D^2t}=\sqrt{(At+Bt+Ct+Dt)(A+B+C+D)}$$
$$\Leftrightarrow (A+B+C+D)\sqrt{t}=(A+B+C+D)\sqrt{t} \qquad \text{(luôn đúng).}$$

□

Ví dụ 6. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)}-\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{(1+z^2)(1+x^2)}-\sqrt{1+z^2}-\sqrt{1+x^2}}{zx}+$$
$$\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}}{xy}=0.$$

✍ **Lời giải.**

Đặt $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$. Ta được đẳng thức điều kiện là:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a}{abc}\Leftrightarrow bc+ca+ab=1 \qquad (1).$

Và khi đó đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$$\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}+\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$
$$=(b+c)\sqrt{1+a^2}+(c+a)\sqrt{1+b^2}+(a+b)\sqrt{1+c^2}.$$

Nhận xét rằng:

$$1+a^2=bc+ca+ab+a^2=(a+b)(a+c).$$
$$1+b^2=bc+ca+ab+b^2=(b+c)(b+a).$$
$$1+c^2=bc+ca+ab+c^2=(c+b)(c+a).$$

Từ đó suy ra:

$$\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}=(b+c)\sqrt{(b+a)(c+a)}=(b+c)\sqrt{1+a^2} \qquad (2).$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}=(c+a)\sqrt{1+b^2}. \qquad (3)$$
$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}=(a+b)\sqrt{1+c^2}. \qquad (4)$$

Cộng theo vế (2), (3), (4) ta nhận được đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 7. Cho biểu thức: $P=\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+3}{x-9}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}-1\right)$

① Rút gọn biểu thức P. ② Tìm x để $P<-\frac{1}{2}$.

③ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện: $0 \le x \ne 9$.
Ta có:

$$P = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-3x-3}{x-9} : \frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$
$$= \frac{2x-6\sqrt{x}+x+3\sqrt{x}-3x-3}{x-9} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$
$$= \frac{-3\sqrt{x}-3}{x-9} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}.$$

② Ta có $P < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{2} < 0$
$\Leftrightarrow \frac{-6+\sqrt{x}+3}{2(\sqrt{x}+3)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \le x < 9$.
Vậy với $0 \le x < 9$ thì $P < -\frac{1}{2}$.

③ Ta có $P = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}$.
Nhận xét: $x \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 \ge 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \le \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} \ge -1 \Leftrightarrow P \ge -1$. Vậy, suy ra $P_{min} = -1$ đạt được khi $x = 0$.

□

Ví dụ 8. Tính giá trị của biểu thức: $S = \frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$, trong đó a là nghiệm dương của phương trình: $4x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0$. (1)

✍ **Lời giải.**
Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu nên ta có: $4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0$, với $a>0$.
Suy ra $a^2 = \frac{1-a}{2\sqrt{2}}$ và $a^4 = \frac{1-2a+a^2}{8}$.
Khi đó:

$$S = \frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2} = \sqrt{a^4+a+1}+a^2 = \sqrt{\frac{1-2a+a^2+8a+8}{8}} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{a+3}{2\sqrt{2}} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

□

Ví dụ 9. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$.

① Rút gọn biểu thức P.   ② Tìm a để $P < 7-4\sqrt{3}$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện: $0 \le x \ne 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\\
&= \left(\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\frac{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a)}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\\
&= (a+\sqrt{a}+a+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a-\sqrt{a})\\
&= (1+2\sqrt{a}+a)(1-2\sqrt{a}+a) = (1+\sqrt{a})^2(1-\sqrt{a})^2 = (1-a)^2.
\end{aligned}$$

② Ta có $P<7-4\sqrt{3} \Leftrightarrow (1-a)^2 < 4-2\cdot 2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow (1-a)^2 < (2-\sqrt{3})^2$
$\Leftrightarrow -2+\sqrt{3} < 1-a < 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}-1 < a < 3-\sqrt{3}$.
Vậy với $\sqrt{3}-1<a<3-\sqrt{3}$ thì $P<7-\sqrt{3}$.

□

Ví dụ 10. Cho biểu thức: $A = 1:\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$

① Tìm tập xác định của A. ② Rút gọn biểu thức A. ③ So sánh A với 3.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện để biểu thức A có nghĩa: $\begin{cases} x\ge 0\\ x\sqrt{x}-1\ne 0\\ x-1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ x\ne 1\end{cases}$.

② Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= 1:\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)\\
&= 1:\left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right]\\
&= 1:\left[\frac{x+2}{\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right]\\
&= 1:\left[\frac{x+2+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right]\\
&= 1:\left[\frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right]\\
&= 1:\left[\frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right]\\
&= 1:\left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right] = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

③ Xét hiệu $A-3 = \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-3 = \dfrac{x+\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$.
Nhận thấy: $\begin{cases}(\sqrt{x}-1)^2\ge 0\\ \sqrt{x}\ge 0\\ 0<x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\sqrt{x}-1)^2\ge 0\\ \sqrt{x}>0\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}\ge 0$.
Do đó $A-3\ge 0 \Leftrightarrow A\ge 3$.

□

Nhận xét. *Ta có thể thực hiện rút gọn biểu thức A với cách khác như sau:*
Đặt $\sqrt{x} = a, 0 < a \neq 1$. *Ta được*

$$\begin{aligned} A &= 1 : \left(\frac{a^2+2}{a^3-1} + \frac{a+1}{a^2+a+1} - \frac{a+1}{a^2-1} \right) \\ &= 1 : \left[\frac{a^2+2}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{a+1}{a^2+a+1} - \frac{1}{a-1} \right] \\ &= 1 : \left[\frac{a^2-a}{(a-1)\left(a^2+a+1\right)} \right] \\ &= \frac{a^2+a+1}{a} \end{aligned}$$

Thay $a = \sqrt{x}$ *vào biểu thức A, ta được* $A = \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

Chúng ta đã biết

$$\boxed{(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2(AB+BC+CA).}$$

. Việc chứng minh xin dành cho bạn đọc, còn trong mục này ta sẽ đi vào khai thác nó, cụ thể:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc}, \qquad (1) \end{aligned}$$

Như vậy, nếu có điều kiện $a+b+c=0$, ta sẽ nhận được

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \qquad (2)$$

Khi đó

— Nếu thay $c = -(a+b)$, ta sẽ nhận được

$$\left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right| = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}}. \qquad (3)$$

— Nếu thay a, b, c bởi bộ ba số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$, ta sẽ nhận được

$$\left| a+b - \frac{ab}{a+b} \right| = \sqrt{a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}}. \qquad (4)$$

Yêu cầu: Các em học sinh sử dụng ý tưởng trên để khai thác cho các hằng đẳng thức:

$$(A+B-C)^2 = A^2+B^2+C^2+2(AB-BC-CA).$$
$$(A-B-C)^2 = A^2+B^2+C^2+2(-AB+BC-CA).$$
$$(A+B+C)^3, \quad (A+B-C)^3.$$

Ví dụ 11. Rút gọn biểu thức

$$S = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{(a^2+b^2)}}}.$$

✍ **Lời giải.**

Sử dụng (2) bằng cách thay a, b, c bởi bộ ba số $a^2, b^2, -(a^2+b^2)$, ta sẽ nhận được

$$\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)}}=\left|\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}\right|=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}.$$

Khi đó S được chuyển về dạng

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}} \\ &= \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right|, \quad \text{theo}\,(3). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 12. Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$S=\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$$

là số hữu tỉ.

✍ **Lời giải.**

Sử dụng (2) bằng cách thay a, b, c bởi bộ ba số $(a-b), (b-c), (c-a)$, ta sẽ nhận được

$$S=\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|.$$

Vậy S là sỗ hữu tỉ do giả thiết a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. □

Ví dụ 13. Cho biểu thức

$$S_n=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}.$$

① Tính S_{2016}.

② Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ thì S_n là số hữu tỉ nhưng không thể là số nguyên.

✍ **Lời giải.**

① Tính S_{2016}.
Sử dụng (2) bằng cách thay a, b, c bởi bộ ba số $1, (n-1), -n$, ta sẽ nhận được

$$\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}=\left|1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right|=1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 1+1+\cdots+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=(n-2)\cdot 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=n-\frac{1}{n}-\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

.

Suy ra $S_{2016}=2016-\dfrac{1}{2016}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{2010513}{1003}$.

② Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ thì S_n là số hữu tỉ nhưng không thể là số nguyên.
Dễ thấy ngay được khẳng định "S_n là số hữu tỉ nhưng không thể là số nguyên" □

2 GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 14. Giải phương trình $3\sqrt{2x}-\sqrt{18x^3}+4\sqrt{\dfrac{x}{2}}-\dfrac{1}{4}\sqrt{128x}=0.$

Lời giải.
Điều kiện $x \geq 0$.
Biến đổi phương trình về dạng

$$3\sqrt{2x}-3x\sqrt{2x}+2\sqrt{2x}-2\sqrt{2x}=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x}(1-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x}=0\\1-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right. \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=0$ và $x=1$. □

Ví dụ 15. Giải phương trình $\dfrac{2\sqrt{x}-7}{3}+\sqrt{x}-\dfrac{3\sqrt{x}-5}{2}=1.$

Lời giải.
Điều kiện $x \geq 0$.
Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{7}{3}+\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{5}{2}=1\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{2}{3}+1-\frac{3}{2}\right)\sqrt{x}=1+\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{6}\sqrt{x}=\frac{5}{6}\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{x}=5 \Leftrightarrow x=25.\end{aligned}$$

Nghiệm của phương trình là $x=25$. □

Ví dụ 16. Tìm tất cả các số hữu tỉ x để số $P=\sqrt{x^2+19x+93}$ là số hữu tỉ.

Lời giải.
Ta có kết quả "Nếu $x, y \in \mathbb{Q}$ thì $x-y \in \mathbb{Q}$", từ đó suy ra

$$\sqrt{x^2+19x+93}-x=y \in \mathbb{Q}.$$

Khi đó, ta được

$$\sqrt{x^2+19x+93}=x+y \Rightarrow x^2+19x+93=x^2+y^2+2xy \Rightarrow x(19-2y)=y^2-93.$$

Ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: Nếu $19-2y=0$, khi đó ta được $\begin{cases} y=\dfrac{19}{2}\\ 0=\left(\dfrac{19}{2}\right)^2-93\end{cases}$, hệ này vô nghiệm.
- Trường hợp 2: Nếu $19-2y \neq 0$, khi đó, ta được $x=\dfrac{y^2-93}{19-2y}$.

Thử lại, với $x = \dfrac{y^2-93}{19-2y}$, và $y \neq \dfrac{19}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+19x+93} &= \sqrt{\left(\frac{y^2-93}{19-2y}\right)^2 + \frac{19(y^2-93)}{19-2y} + 93} \\
&= \sqrt{\frac{y^4-38y^2+547y^2-353y+8649}{(19-2y)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\left(y^2-19y+93\right)^2}{(19-2y)^2}} \\
&= \frac{y^2-19y+93}{|19-2y|} \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Vậy, với các số x có dạng $x = \dfrac{y^2-93}{19-2y}$, và $y \neq \dfrac{19}{2}$ thỏa mãn điều kiện đã cho. □

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Thực hiện các phép tính:

① $A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

② $B = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

③ $C = 12\left(\sqrt{\dfrac{2}{6}} + \sqrt{\dfrac{6}{2}}\right)$.

④ $D = \sqrt{72} + 4{,}5\sqrt{2\dfrac{2}{3}} - \sqrt{5\dfrac{1}{3}} + 2\sqrt{27}$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{1+2\sqrt{5}+5} - \sqrt{1-2\sqrt{5}+5} \\
&= \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} \\
&= 1+\sqrt{5} - (\sqrt{5}-1) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{4+2\cdot 2\sqrt{3}+3} - \sqrt{4-2\cdot 2\sqrt{3}+3} \\
&= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \\
&= 2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

③ Ta có

$$\begin{aligned}
C &= 12\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{3}\right) \\
&= 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 16\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

□

Bài 2. Rút gọn biểu thức

① $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} + 1.$

② $B = \sqrt{x} - 2 + \dfrac{10-x}{\sqrt{x}+2}.$

③ $C = \dfrac{2}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{\sqrt{x}}{9-\sqrt{x}}.$

④ $D = \sqrt{xy} - \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{xy}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}}.$

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện xác định $0 \le x \ne 1$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2+x-1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

② Điều kiện xác định $0 \le x$.

$$B = \frac{10-x+(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} = \frac{10-x+x-4}{\sqrt{x}+2} = \frac{6}{\sqrt{x}+2}.$$

③ Điều kiện xác định $0 \le x \ne 3$

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \\ &= \frac{2(3-\sqrt{x})+(3+\sqrt{x})+\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \\ &= \frac{9}{9-x}. \end{aligned}$$

□

Bài 3. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1\right) : \left(\dfrac{9-x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}\right) + \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}.$

① Rút gọn biểu thức A.

② Tìm x để $A < 1$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-9 \ne 0 \\ \sqrt{x}-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 9 \\ x \ne 4. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x-3\sqrt{x}-(x-9)}{x-9} : \frac{9-x+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{9-3\sqrt{x}}{x-9} : \frac{9-x+x-9-x+4}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{-3(\sqrt{x}-3)}{x-9} : \frac{4-x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = \frac{3}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

② Để $A < 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1.$

Vậy với $x > 1$ và $x \ne 9$ thì $A < 1$.

□

Bài 4. Cho biểu thức $A=\dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$.

① Rút gọn biểu thức A. ② Tìm x để $A=\dfrac{1}{2}$. ③ Chứng minh $A\le\dfrac{2}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 1.\end{cases}$

① Ta có

$$\begin{aligned}A &= \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}+\frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\\ &= \frac{15\sqrt{x}-11-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}\\ &= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}\\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}\\ &= \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}.\end{aligned}$$

② Để $A=\dfrac{1}{2}$, ta có $\dfrac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 11\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{121}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy với $x=\dfrac{1}{121}$ thì $A=\dfrac{1}{2}$.

③ Xét hiệu $\dfrac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)}$.
Nhận thấy $3(\sqrt{x}+3)>0$.
Do đó $\dfrac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)}\le 0\Rightarrow A\le\dfrac{2}{3}$.

□

Bài 5. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$.

① Rút gọn biểu thức A. ② Tìm a để $A=-2$. ③ Tìm a để $A<0$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện $\begin{cases}a>0\\ a\ne 1.\end{cases}$
Ta có

$$\begin{aligned}A &= \left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}\right)\\ &= \frac{(a-1)^2}{4a}\cdot\left(\frac{a-2\sqrt{a}+1-a-2\sqrt{a}-1}{a-1}\right)\\ &= -\frac{a-1}{\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

② Để $A < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-a}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow 1-a < 0 \Leftrightarrow a < 1$.
Kết hợp với điều kiện, suy ra $0 < a < 1$.

③ Để $A = -2$, ta có $\dfrac{1-a}{\sqrt{a}} = -2 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{a} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a} = 1+\sqrt{2}\\ \sqrt{a} = 1-\sqrt{2} \text{ (loại).}\end{array}\right.$
Vậy $a = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

□

Bài 6. Chứng minh rằng biểu thức sau là hằng số với mọi giá trị x và y

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-y} - \frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}-x}\right)\cdot\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}.$$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})} - \frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}\right)\cdot\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}.\\ &= \frac{x+2\sqrt{xy}+y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} = 1. \end{aligned}$$

□

Bài 7. Giải các phương trình

① $\left(\sqrt{x}-3\right)(4-\sqrt{x}) = 9-x$.

② $\dfrac{3}{x+\sqrt{2x^3+1}} + \dfrac{3}{x-\sqrt{2x^3+1}} = 0$.

③ $\dfrac{\sqrt{4+x}}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$.

✍ **Lời giải.**

① Điều kiện $x \geq 0$. Ta có $-x+7\sqrt{x}-12 = 9-x \Leftrightarrow 7\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn).

② Điều kiện $\begin{cases} 2x^3+1 \geq 0\\ x^2-2x^3+1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\\ (1-x)(2x^2+x+1) \neq 0.\end{cases}$
Ta có, phương trình đã cho tương đương $6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).

③ Điều kiện xác định $x > 2$, bình phương hai vế, ta được $x = -\dfrac{23}{6}$ (không thỏa mãn).
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

□

BÀI 7. CĂN BẬC BA - CĂN BẬC N

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 CĂN BẬC BA

Định nghĩa 1. Căn bậc ba của một số a, ký hiệu $\sqrt[3]{a}$, là một số mà lũy thừa bậc ba của nó bằng a.

$$x = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow x^3 = a \ \text{(suy ra } (\sqrt[3]{a})^3 = a).$$

Tổng quát, với mọi $a \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại $\sqrt[3]{a}$.

— Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.

— Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.

— Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.

⚠ *Ta đều biết rằng $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$, do đó, ta ghi nhận kết quả như sau*

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab} \text{ và } \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \text{ với } b \neq 0.$$

Định nghĩa 2. Căn bậc n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) của một số a, là một dãy mà lũy thừa n bằng a.
Tổng quát:

— **Đối với căn bậc lẻ** $n = 2k + 1$: Mọi số đều có một căn bậc lẻ duy nhất. Căn bậc lẻ của số dương là số dương, của số 0 là 0, của số âm là số âm.
Ký hiệu $\sqrt[2k+1]{a}$ là giá trị của căn bậc lẻ.

— **Đối với căn bậc lẻ** $n = 2k$: Số âm không có căn bậc chẵn. Số 0 có căn bậc chẵn là 0. Số dương có căn bậc chẵn là hai số đối nhau.
Ký hiệu $\sqrt[2k]{a}$ và $-\sqrt[2k]{a}$ (trong đó $\sqrt[2k]{a} \geq 0$) là giá trị của các căn bậc chẵn của một số a không âm.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH VỚI CĂN BẬC 3 VÀ BẬC N

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính

① $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{-3}$.

② $(\sqrt[3]{-2} + 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)$

✍ **Lời giải.**

① $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot (-3)} = \sqrt[3]{27} = 3.$

② $(\sqrt[3]{-2} + 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{-2} + 1)\left[\left(\sqrt[3]{-1}\right)^2 - \sqrt[3]{-2} + 1\right] = \left(\sqrt[3]{-1}\right)^3 + 1 = -2 + 1 = -1.$

□

Nhận xét. *Như vậy*

1. *Trong lời giải của câu ①, chúng ta sử dụng kết quả*

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{abc}$$

2. *Trong lời giải của câu ②, chúng ta đã sử dụng hằng đẳng thức*

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

Nhớ rằng, ngoài ra ta còn có:

$$\begin{aligned}a^3-b^3&=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a-b)\\(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính

① $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$. ② $(1-\sqrt[3]{3})^3+(1+\sqrt[3]{3})^3$.

Lời giải.

① $A=(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3=3+2=5$.

②

$$\begin{aligned}B&=(1-\sqrt[3]{3})^3+(1+\sqrt[3]{3})^3\\&=(1-\sqrt[3]{3}+1+\sqrt[3]{3})^3-3(1-\sqrt[3]{3})(1+\sqrt[3]{3})(1-\sqrt[3]{3}+1+\sqrt[3]{3})\\&=2^3-3[1-(\sqrt[3]{3})^2]\cdot 2=8-6+6\sqrt[3]{9}\\&=2+6\sqrt[3]{9}\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Thực hiện phép tính

① $A=\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{27}$. ② $B=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Lời giải.

① $A=\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{27}=\sqrt[4]{3\cdot3\cdot3\cdot3}-\sqrt[3]{3\cdot3\cdot3}=0$.

② $B=\sqrt[4]{4-2\cdot2\sqrt{3}+3}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$B=\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

□

Ví dụ 4. Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3=\dfrac{5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1}{8}=\dfrac{8\sqrt{5}-16}{8}=\sqrt{5}-2\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. □

Ví dụ 5. Biết rằng nếu $a=b$ thì $a^3=b^3$ và ngược lại $a^3=b^3$ thì $a=b$. Chứng minh $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$, với $b\neq0$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=\dfrac{a}{b}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ (đpcm). □

Ví dụ 6. Tính giá trị biểu thức

$$B = \sqrt[3]{1620 + 12\sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12\sqrt{17457}}$$

✍ **Lời giải.**

Để phép biến đổi được gọn ta đặt

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt[3]{1620 + 12\sqrt{17457}} \\ b_2 = \sqrt[3]{1620 - 12\sqrt{17457}} \end{cases} \Rightarrow b_1 b_2 = \sqrt[3]{1620^2 - 12^2 \cdot 17457} = 48.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & B = b_1 + b_2 \\ \Leftrightarrow & B^3 = (b_1 + b_2)^3 = b_1^3 + b_2^3 + 3b_1 b_2 (b_1 + b_2) \\ \Leftrightarrow & B^3 = 3240 + 3 \cdot 48 \cdot B = 3240 + 144B \\ \Leftrightarrow & B^3 - 144B - 3240 = 0 \\ \Leftrightarrow & (B - 18)(B^2 + 18B + 180) = 0 \Leftrightarrow B - 18 = 0 \\ \Leftrightarrow & B = 18. \end{aligned}$$

Vậy $B = 18$. □

Nhận xét. *Như vậy, trong lời giải của bài toán trên để tính giá trị của biểu thức B, chúng ta sử dụng phép lũy thừa trong trường hợp B là tổng của hai biểu thức liên hợp. Phương pháp đó được tổng quát như sau*
Với hai biểu thức liên hợp dạng

$$M_1 = \sqrt[3]{a + b\sqrt{c}} \text{ và } M_2 = \sqrt[3]{a - b\sqrt{c}}$$

Khi đó, để tính giá trị biểu thức $B = M_1 + M_2$, chúng ta thực hiện như sau

$$\begin{aligned} & B^3 = (M_1 + M_2)^3 = M_1^3 + M_2^3 + 3M_1 M_2 (M_1 + M_2) \\ & \quad = a + b\sqrt{c} + a - b\sqrt{c} + 3\sqrt[3]{a^2 - b^2 c} \cdot B \\ \Leftrightarrow & \quad B^3 - 3\sqrt[3]{a^2 - b^2 c} \cdot B - 2a = 0. \qquad (\star) \end{aligned}$$

Tới đây, chúng ta thực hiện việc giải phương trình $(\star)$ sẽ nhận được giá trị biểu thức B.
Phương pháp trên được mở rộng tương tự với $B = M_1 - M_2$.
Với kết quả tìm được $B = 18$, chúng ta thấy ngay ví dụ trên còn có thể được phát biểu dưới dạng "Chứng minh rằng B là một số tự nhiên."
Chúng ta sẽ minh họa bằng bài toán sau

Ví dụ 7. Chứng minh rằng số $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ là một số hữu tỷ.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \\ x_2 = -3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{5}{3}.$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&x = x_1 - x - 2\\
\Leftrightarrow &x^3 = (x_1 - x_2)^3 = x_1^3 - x_2^3 - 3x_1x_2(x_1 - x_2) = 6 - 5x\\
\Leftrightarrow &x^3 + 5x - 6 = 0\\
\Leftrightarrow &(x-1)(x^2 + x + 6) = 0\\
\Leftrightarrow &x = 1.
\end{aligned}$$

Vậy ta được $x = 1$ là số hữu tỷ. □

Ví dụ 8. Cho $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$.

Chứng minh rằng với mọi $a \geq \frac{1}{8}$ thì x là một số tự nhiên.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} \\ \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 = \frac{2a-1}{3}.$

Khi đó $x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x^3 = (x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 2a + (1-2a)x$

$\Leftrightarrow x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2a) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + x + 2a = 0 \end{array}\right.$.

Với giả thiết $a \geq \frac{1}{8}$, ta nhận thấy phương trình $x^2 + x + 2a = 0$ có biệt số $\Delta = 1 - 8a$, do đó

— Với $a = \frac{1}{8}$ thì $\Delta = 0$ nên phương trình có nghiệm là $x = 1$.

— Với $a > \frac{1}{8}$ thì $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy $a \geq \frac{1}{8}$ thì phương trình có nghiệm $x = 1$ là số tự nhiên. □

Ví dụ 9. Tính giá trị biểu thức

$$A = x^3 + 15x \text{ tại } x = \sqrt[3]{5(\sqrt{6}+1)} - \sqrt[3]{5(\sqrt{6}-1)}.$$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} a_1 = \sqrt[3]{5(\sqrt{6}+1)} \\ a_2 = \sqrt[3]{5(\sqrt{6}-1)} \end{cases} \Rightarrow a_1a_2 = \sqrt[3]{25(6-1)} = 5.$

Khi đó

$x = a_1 + a_2 \Leftrightarrow x^3 = (a_1 - a_2)^3 = a_1^3 - a_2^3 - 3a_1a_2(a_1 - a_2) = 10 - 3 \cdot 5 \cdot x = 10 - 15x$

$\Leftrightarrow x^3 + 15x = 10 \Leftrightarrow A = 10.$

Vậy ta được $A = 10$. □

Ví dụ 10. Với $|a| > 2$, hãy rút gọn biểu thức

$$P = \sqrt[3]{\frac{a^3 - 3a + (a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{a^3 - 3a - (a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}}$$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} M_1 = \sqrt[3]{\dfrac{a^3-3a+(a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}} \\ M_2 = \sqrt[3]{\dfrac{a^3-3a-(a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}} \end{cases} \Rightarrow M_1M_2 = 1.$

Khi đó

$P = M_1+M_2 \Leftrightarrow P^3 = (M_1+M_2)^3 = M_1^3+M_2^3+3M_1M_2(M_1+M_2) = a^3-3a+3P$

$\Leftrightarrow P^3-3P-a^3+3a = 0 \Leftrightarrow (P-a)(P^2+aP+a^2-3) = 0 \qquad (\star).$

Với giải thiết $|a| > 2$, ta có

$$P^2+aP+a^2-3 = \left(P+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(a^2-4) > 0$$

do đó, phương trình $(\star)$ tương đương với $P-a = 0 \Leftrightarrow P = a$. Vậy ta được $P = a$. □

Ví dụ 11. Chứng minh rằng các số sau là số vô tỷ

① $a = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$.

② $b = \sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$.

✍ **Lời giải.**

① $a = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow a^3 = (\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{4})^3+(\sqrt[3]{2})^3-3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}) = 6+6a$.

$\Leftrightarrow a^3-6a-6 = 0. \qquad (\star).$

Số a là số vô tỉ vì giả sử trái lại a là số hữu tỷ thì a phải là số nguyên bởi nó là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên và hệ số bậc cao nhất bằng 1.

Mặt khác ta thấy ngay

$$2 < \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2} < 4 \Leftrightarrow 2 < a < 4 \Rightarrow a = 3$$

tuy nhiên, $a = 3$ không phải là một nghiệm của phương trình $(\star)$.

② Giả sử trái lại b là số hữu tỷ. Ta có

$b^3 = (\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{3})+(\sqrt[3]{2})^3-3\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}) = 5+3\sqrt[3]{6}b$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{6} = \dfrac{b^3-5}{3b}$ là một số hữu tỷ - Vô lý.

Điều đó chứng tỏ b là một số vô tỷ.

□

Nhận xét. *Qua lời giải của bài toán trên, chúng ta thấy*

1. *Với cả a và b ta đều sử dụng hằng đẳng thức dạng*

$$(x+y)^3 = x^3+y^3-3xy(x+y).$$

2. *Trong lời giải của câu a) chúng ta sử dụng kết quả "Mọi nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên*

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

đều là số nguyên. "

3. *Ta có được mệnh đề tổng quát sau*

"Nếu a và b là các số tự nhiên thì $c = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ hoặc là một số tự nhiên hoặc là một số vô tỉ."

Thật vậy, dễ dàng kiểm tra được rằng $c =$

$sqrt[3]a+\sqrt[3]{b}$ là một nghiệm của đa thức với hệ số nguyên dạng

$$(x^3-a-b)^3-27abx^3$$

Do đó, câu b) có thể được trình bày theo cách sau

Nhận xét sau $\begin{cases} 1 < \sqrt[3]{3} < \dfrac{3}{2} \\ 1 < \sqrt[3]{2} < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2} < 3.$

Giữa hai số tự nhiên 2 và 3 không có số tự nhiên nào, do đó suy ra a là số vô tỷ (theo kết quả trên).

4. *Chúng ta đã biết các số $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \cdots$ là các số vô tỉ. Tuy nhiên, dựa vào nhận xét thứ 2 chúng ta có thể chứng minh được một kết quả tổng quát hơn được trình bày trong bài toán sau.*

Ví dụ 12. Chứng minh rằng nếu a và n là hai số tự nhiên, $n \geq 2$ thì $\sqrt[n]{a}$ hoặc là số nguyên hoặc là một số vô tỉ.

✍ Lời giải.
Giả sử $\sqrt[n]{a}$ không phải là số nguyên. Dễ thấy $c = \sqrt[n]{a}$ là một nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $x^n - a$.
Đa thức này nếu có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm đó phải là số nguyên. Nhưng theo giả thiết $\sqrt[n]{a}$ không phải là số nguyên, do đó $\sqrt[n]{a}$ phải là số vô tỷ. □

⚠ *Dựa vào kết quả của định lý trên chúng ta mới có thể khẳng định được tính đúng đắn trong lời giải của nhiều bài toán.*

Ví dụ 13. Tìm số $\overline{xyz}$ biết rằng $\sqrt[3]{\overline{xyz}} = (x+y+z)^{4^n}$.

✍ Lời giải.
Chúng ta xét hai trường hợp
Trường hợp 1. Với $n \geq 1$ và vì $x \geq 1$ nên

— Nếu $y = z = 0$ thì $\sqrt[3]{\overline{xyz}} = \sqrt[3]{100} \notin \mathbb{N}$, trong khi $(x+y+z)^{4^n} \in \mathbb{N}$ - Vô lý.

— $y + z \geq 1$ thì $x + y + z \geq 2$, suy ra

$$(x+y+z)^{4^n} \geq 2^4 = 16 > 10 = \sqrt[3]{1000} > \sqrt[3]{\overline{xyz}} - \text{ Vô lý.}$$

Vậy, với $n \geq 1$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2. Với $n = 0$ ta được,

$$\sqrt[3]{\overline{xyz}} = x + y + z \Leftrightarrow \overline{xyz} = (x+y+z)^3 \qquad (1)$$

Mặt khác ta thấy ngay

$$64 < \overline{xyz} < 1000 \Leftrightarrow 64 < (x+y+z^3)^3 < 1000 \Leftrightarrow 4 < x+y+z < 10. \qquad (2)$$

Ta có kết quả "*Nếu $a \in \mathbb{N}$ thì a^3 chia hết cho 9 có số dư là $0, 1, 8$*", từ đó suy ra
$(x+y+z)^3$ chia cho 9 có số dư là $0, 1, 8$
$\Leftrightarrow \overline{xyz}$ chia cho 9 có số dư là $0, 1, 8$.
$\Leftrightarrow x + y + z$ chia cho 9 có số dư là $0, 1, 8$. (3)
Từ (2) và (3) suy ra $x + y + z = 8$ hoặc $x + y + z = 9$.
Với $x + y + z = 8$, suy ra $\overline{xyz} = (x+y+z)^3 = 8^3 = 512 = (5+1+2)^3$ (thỏa mãn).
Với $x + y + z = 9$, suy ra $\overline{xyz} = (x+y+z)^3 = 9^3 = 729 \neq (7+2+92)^3$ (mâu thuẫn).
Vậy, ta được $\overline{xyz} = 512$. □

Nhận xét. *Lời giải trình bày tương đối dài với mục đích giúp các em học sinh khi tham khảo dễ hiểu. Để lý giải "Tạo sao em lại biết cách chia hai trường hợp $n \geq 1$ và $n = 0$ "chúng ta chỉ cần đánh giá đơn giản như sau*

$$\begin{aligned} & 99 < \overline{xyz} < 1000 \ (\textit{tốt hơn là } 64 < \overline{xyz} < 1000) \\ \Leftrightarrow\ & 4 < \sqrt[3]{\overline{xyz}} < 10 \\ \Leftrightarrow\ & 4 < (x+y+z)^{4^n} < 10. \end{aligned}$$

Ví dụ 14. Với mỗi số tự nhiên $k > 0$, chứng minh rằng

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2k}$$

luôn viết được dạng $a_k + b_k\sqrt{6}$ với a_k, b_k nguyên dương.
Tìm hệ thức xác định dãy (a_k), dãy (b_k) với $k = 1, 2, 3, \ldots$
Chứng minh rằng với mọi $k \geq 2$ thì $a_{k-1}\cdot a_{k+1} - 6b_k^2$ là một hằng số.

✍ **Lời giải.**

① Ta chứng minh $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2k} = a_k + b_k\sqrt{6}$.
- Với $k = 1$, mệnh đề đúng.
- Giả sử mệnh đề đúng với k, ta có

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2(k+1)=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2k}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = (a_k + b_k\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}).$$

Do $\sqrt{6}$ là số vô tỷ nên suy ra

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 5a_k + 12b_{b+1} = 5a_{k+1} + 12(2a_k + 5b_k) \\ &= 5a_{k+1} + 12\left(2a_k + 5\frac{a_{k+1} - 5a_k}{12}\right) = 10a_{k+1} - a_k \text{ với } a_1 = 5,\ a_2 = 49. \end{aligned}$$

Tương tự ta có $b_{k+2} = 10b_{k+1} - b_k$ với $b_1 = 2, b_2 = 20$.
Từ đó ta có các hệ thức truy hồi xác định (a_k), (b_k).

② Từ (1), (2) ta có $a_{k-1} = 5a_k - 12b_k$.
Vậy

$$\begin{aligned} a_{k-1}\cdot a_{k+1} - 6b_k^2 &= (5a_k - 12b_k)(5a_k + 12b_k) - 6b_k^2 = 25(a_k^2 - 6b_k^2) \\ &= 25(a_k - \sqrt{6}b_k)(a_k + \sqrt{6}b_k) \\ &= 25(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2k}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2k} = 1^{2k} = 1. \end{aligned}$$

Như vậy $a_{k-1}\cdot a_{k+1} - 6b_k^2 = 25$, $\forall k \geq 2$.

□

Ví dụ 15. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[4]{x}-1}$

① Tìm x để A có nghĩa.

② Tìm mọi giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

✍ **Lời giải.**

① A có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt[4]{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt[4]{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 1.$

② Ta có $A = \dfrac{\sqrt[4]{x}-1-1}{\sqrt[4]{x}-1} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$.
Từ đó, muốn A là một số nguyên thì $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$ là một số nguyên,
khi đó, $\sqrt[4]{x}-1$ là ước số của $1 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x}-1 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 16, x = 0$.
Vậy $x = 16, x = 0$ thì A là số nguyên.

□

Nhận xét. *Câu hỏi hẳn sẽ được đặt ra ở đây là "Tại sao cần phải sử dụng định lý thì lời giải mới chính xác?". Để trả lời câu hỏi này các em hãy bắt đầu với trường hợp*
Nếu $\sqrt[4]{x}-1=\dfrac{1}{2}$ *hoặc* $\sqrt[4]{x}-1=\dfrac{1}{3}$, $\cdots$ *thì* $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$ *vẫn là số nguyên, do đó A nguyên.*
Vậy tại sao trong lời giải của ví dụ trên không xét những trường hợp này, rất đơn giản vì "nếu x là số tự nhiên thì $\sqrt[4]{x}$ *không thể là số hữu tỷ."*

2 KHỬ MẪU CHỨA CĂN BẬC BA

Phương pháp

— $a+b$ có liên hợp là a^2-ab+b^2 và ngược lại.

— $a-b$ có liên hợp là a^2+ab+b^2 và ngược lại.

Ví dụ 16. Khử căn thức ở mẫu

① $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$. ② $\dfrac{6}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$

Lời giải.
Thực hiện phép nhân liên hợp, ta có

① $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}=\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}.$

② $\dfrac{6}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}=\dfrac{6(\sqrt[3]{5}+1)}{(\sqrt[3]{5}+1)(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)}=\dfrac{6(\sqrt[3]{5}+1)}{5+1}=\sqrt[3]{5}+1$

□

Nhận xét. *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để thực hiện khử căn thức ở mẫu chúng ta sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp. Tuy nhiên, ta còn có thể trình bày theo phương pháp tách, cụ thể*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{3-2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}.$$

3 GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN BẬC BA

Ví dụ 17. Giải các phương trình sau

① $\sqrt[3]{2x+1}=3$. ② $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x^2-1}$.

Lời giải.

① $\sqrt[3]{2x+1}=3\Leftrightarrow(\sqrt[3]{2x+1})^3=3^3\Leftrightarrow 2x+1=27\Leftrightarrow x=13$.
Vậy nghiệm của phương trình là $x=13$.

② $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x^2-1}\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+1})^3=(\sqrt[3]{x^2-1})^3$
$\Leftrightarrow x+1=x^2-1\Leftrightarrow(x+1)(x-1-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.
Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$ và $x=2$.

□

Ví dụ 18. Giải các phương trình sau

① $x^6-5x^3-24=0$. ② $\sqrt[3]{2x+1}-1=2x$

Lời giải.

① $x^6-5x^3-24=0 \Leftrightarrow x^6+3x^3-8x^3-24=0 \Leftrightarrow (x^3+3)(x^3-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3=-3 \\ x^3=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{-3} \\ x=2 \end{array}\right.$. Vậy phương trình có nghiệm là $x=\sqrt[3]{-3};2$.

② $\sqrt[3]{2x+1}-1=2x \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}=2x+1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+1})^3=(2x+1)^3$
$\Leftrightarrow 2x+1=(2x+1)^3 \Leftrightarrow (2x+1)[(2x+1)^2-1]=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ (2x+1)^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ 2x-1=1 \\ 2x+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-\dfrac{1}{2};0;-1$.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Thực hiện phép tính

① $A=\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{8}$. ② $B=\sqrt[3]{-125}-\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{2}$. ③ $C=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{27}-3\sqrt[3]{3}$.

✍ **Lời giải.**

① $A=\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{8}=4-10-2=-8$.

② $B=\sqrt[3]{-125}-\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{2}=-4+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}-5$.

③ $C=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{27}-3\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-3-\sqrt[3]{3}=-3$.

□

Bài 2. Thực hiện phép tính

① $A=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$. ② $B=(\sqrt[3]{3}-1)^3+(\sqrt[3]{3}+1)^3$.

③ $C=(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)$. ④ $D=(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})$

✍ **Lời giải.**

① Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(2+2\sqrt{2}+1)} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} \\ &= \sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} B &= (\sqrt[3]{3}-1)^3+(\sqrt[3]{3}+1)^3 \\ &= (\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{3}+1)^3-3(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{3}+1) \\ &= (2\sqrt[3]{3})^3-6\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9}-1)=24-18+6\sqrt[3]{3}=6+6\sqrt[3]{3}. \end{aligned}$$

③ $C=(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3})^3-1=3-1=2$.

④ $D=(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4})=(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{3})^3=3-2=1$.

□

Bài 3. Thực hiện phép tính

① $A=(\sqrt[3]{a}+1)^3-(\sqrt[3]{a}-1)^3$. ② $B=\dfrac{1+a}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}$. ③ $C=\sqrt[3]{1-x^3+3x(x-1)}$.

✍ **Lời giải.**

① $A=[(\sqrt[3]{a}+1)-(\sqrt[3]{a}-1)]^3+3(\sqrt[3]{a}+1)(\sqrt[3]{a}-1)[(\sqrt[3]{a}+1)-(\sqrt[3]{a}-1)]=2^3+6(\sqrt[3]{a^2}-1)=2+6\sqrt[3]{a^2}$.

② $B=\dfrac{1+a}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}=\dfrac{(1+\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1)}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}=1+\sqrt[3]{a}$.

③ $C=\sqrt[3]{1-x^3+3x(x-1)}=\sqrt[3]{1-3x+3x^2-x^3}=\sqrt[3]{(1-x)^3}=1-x$.

□

Bài 4. Giải các phương trình

① $2+\sqrt[3]{x+5}=0$.

② $3-\sqrt[3]{2x-7}=0$.

③ $\sqrt[3]{x^6+6x^4}=x^2+2$.

④ $\sqrt[3]{x-1}+1=x$.

⑤ $\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-5}=1$.

✍ **Lời giải.**

① $2+\sqrt[3]{x+5}=0\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+5})^3=(-2)^3\Leftrightarrow x+5=-8\Leftrightarrow x=-13$.
Phương trình có nghiệm là $x=-13$.

② $3-\sqrt[3]{2x-7}=0\Leftarrow(\sqrt[3]{2x-7})^3=3^3\Leftrightarrow 2x-7=27\Leftrightarrow x=17$.
Phương trình có nghiệm là $x=17$.

③ $\sqrt[3]{x^6+6x^4}=x^2+2\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x^6+6x^4})^3=(x^2+2)^3$
$\Leftrightarrow x^6+6x^4=x^6+6x^4+12x^2+8\Leftrightarrow 12x^2+8=0$ (vô nghiệm).
Phương trình vô nghiệm.

④ $\sqrt[3]{x-1}+1=x\Leftrightarrow x-1=(x-1)^3\Leftrightarrow(x-1)[(x-1)^2-1=0]$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\(x-1)^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=0.\end{array}\right.$
Vậy phương trình có ba nghiệm $x=0;1;2$

⑤ $\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-5}=1$
$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x+5})^3=(1+\sqrt[3]{x-5})^3$
$\Leftrightarrow x+5=1+(x-5)+3\cdot1\cdot\sqrt[3]{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})$
$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-5}\cdot\sqrt[3]{x+5}=3$
$\Leftrightarrow(x-5)(x+5)=27$
$\Leftrightarrow x^2=52$
$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{52}$.
vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm\sqrt{52}$.

□

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT

BÀI 1. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Định nghĩa 1. Một hàm số f từ tập hợp số X đến tập hợp số Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ với một và một giá trị $y \in Y$. Kí hiệu là $f(x)$, x là biến số, $y = f(x)$ là giá trị của hàm số f tại x.

2 TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa 2. **Tập xác định** của hàm số là tập hợp các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Xuất phát từ định nghĩa trên ta có quy tắc:
Muốn tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$ ta phải đi tìm tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3 HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN

Định nghĩa 3.

① **Hàm số đồng biến** Hàm số $y = f(x)$ là hàm số đồng biến trong khoảng $(a;b)$ nếu với mọi $x_1;x_2$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

② **Hàm số nghịch biến** Hàm số $y = f(x)$ là hàm số đồng biến trong khoảng $(a;b)$ nếu với mọi $x_1;x_2$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

⚠ *Trong định nghĩa trên, nếu $(a;b)$ là tập xác định của hàm số, ta nói rằng hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trong tập xác định của nó.*

B CÁC DẠNG TOÁN

1 SỰ XÁC ĐỊNH CỦA MỘT HÀM SỐ

Muốn xét xem mối quan hệ f từ tập X vào tập Y có phải là hàm số không, chúng ta thường sử dụng định nghĩa hàm số để đưa ra lời kết luận.

Ví dụ 1. Cho f là một quan hệ từ tập $\mathbb{R}$ đến tập $\mathbb{R}$. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu:

① Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	-4	-2	0	1	3	5	7
$f(x)$	-9	-5	-1	1	5	9	13

② Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	-6	-2	-1	0	1	1	3
$f(x)$	8	4	2	-1	1	6	8

③ Có công thức $y^2 = 4x$.

✍ **Lời giải.**

① Có là hàm số, bởi vì mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng.

② Không là hàm số, vì với $x = 1$ ta xác định được hai giá trị khác nhau của $f(x)$ là 1 và 6.

③ Không là hàm số, vì với $x = 4$ ta được $y^2 = 4 \cdot 4 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$. tức là, với $x = 4$ ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và -4.

□

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = |2x - 3|$.

① Tính $f(-2); f(8)$.

② Tính các giá trị của x ứng với $y = -1; y = 3$.

✍ **Lời giải.**

① Ta lần lượt có:

$$\begin{aligned} f(-2) &= |2(-2) - 3| = |-4 - 3| = |-7| = 7, \\ f(8) &= |2x - 3| = |2 \cdot 8 - 3| = |16 - 3| = 13. \end{aligned}$$

② Ta lần lượt có:

— Với $y = -1$ thì $|2x - 3| = -1$, vô nghiệm bởi $|2x - 3| \geq 0$.

— Với $y = 3$ thì $|2x - 3| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0. \end{array}\right.$

□

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = 3x - 1$. Tìm các giá trị của x sao cho

① y nhận giá trị âm.

② y nhận giá trị lớn hơn 5.

✍ **Lời giải.**

① Để y nhận giá trị âm điều kiện là $3x - 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}$.
Vậy, với $x < \dfrac{1}{3}$ thì y nhận giá trị âm.

② Để y nhận giá trị lớn hơn 5 điều kiện là $3x - 1 > 5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$.
Vậy, với $x > 2$ thì y nhận giá trị lớn hơn 5.

□

2 TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$, ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

— **Phương pháp 1.** Tìm tập $\mathscr{D}$ của x để x có nghĩa, tức là tìm $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in \mathbb{R}\}$.

— **Phương pháp 2.** Tìm tập E của x để $f(x)$ không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus E$.

⚠ *Thông thường $f(x)$ cho bởi biểu thức đại số thì*

① *Với* $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *điều kiện là* $\begin{cases} f_1(x), f_2(x) \text{ có nghĩa} \\ f_2(x) \neq 0. \end{cases}$

② *Với* $f(x) = \sqrt[2k]{f_1(x)}$ $(k \in \mathbb{Z})$ *điều kiện là* $\begin{cases} f_1(x) \text{ có nghĩa} \\ f_1(x) \geq 0. \end{cases}$

Ví dụ 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau.

① $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. ② $y = \dfrac{x}{x^2-2x}$.

✍ **Lời giải.**

① Hàm số xác định khi $x^2+1 \neq 0$ luôn đúng.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

② Hàm số xác định khi $x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$

□

Nhận xét. ① *Các hàm số trong câu $a), b)$ đều có tử số luôn có nghĩa, do đó chỉ cần thiết lập điều kiện cho mẫu số khác* 0.

② *Trong câu b), nếu các em học sinh biến đổi hàm số về dạng $y = \dfrac{1}{x-2}$ rồi khẳng định hàm số xác định khi $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$*
Và do đó tập xác đinh là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Đây là lời giải sai vì phép biến đổi hàm số không phải là phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau.

① $y = \sqrt{2-x}$. ② $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$.

✍ **Lời giải.**

① Hàm số xác định khi $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.
Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; 2]$.

② Hàm số xác định khi $\begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$.
Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [-3; 6]$.

□

Nhận xét. *Như vậy, ví dụ trên đã minh họa việc tìm tập xác định của hàm số có chứa căn bậc hai dạng đơn giản (gồm việc giải các bất phương trình bậc nhất). Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa cho các biểu thức phức tạp hơn, và ở đây chúng ta cần sử dụng.*

— *Tính chất:*

- $A \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow A, B$ *cùng dấu.*
- $A \cdot B \leq 0 \Leftrightarrow A, B$ *trái dấu.*
- *Hoặc lập bảng xét dấu.*

Ví dụ 6. Tìm tập xác định của các hàm số sau.

① $y = \sqrt{-x^2+4x-3}$. ② $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-3x+2}$.

✍ **Lời giải.**

① Hàm số xác định khi

$$-x^2+4x-3\geq 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3\leq 0 \Leftrightarrow -x^2-x-3x+3\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\geq 0\\ x-3\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\leq 0\\ x-3\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 1\\ x\leq 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 1\\ x\geq 3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[1;3]$

② Hàm số xác định khi

$$\begin{cases}x+1\geq 0\\ x^2-3x+2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ (x-1)(x-2)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\leq 0\\ x-2\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 1\\ x\geq 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 1\\ x\leq 2\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ \left[\begin{array}{l}x\geq 2\\ x\leq 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 2\\ -1\leq x\leq 1.\end{array}\right.$$

Vậy, tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=[-1;1]\cup[2;+\infty)$.

□

Nhận xét.

— *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, để giải các bất phương trình bậc hai chúng ta sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử và vận dụng điều kiện để $A\cdot B\geq 0, A\cdot B\leq 0$.*

— *Các học sinh hãy kiểm tra lại kết quả đó bằng việc lập bảng xét dấu.*

Ví dụ 7. Tìm tập xác định của các hàm số sau

① $y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{|x|-4}$.

② $y=\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

✍ **Lời giải.**

① Hàm số xác định khi $\begin{cases}x\geq 0\\ |x|-4\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ x-4\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\neq 4.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[0;+\infty]\setminus\{4\}$.

② Biến đổi tương đương hàm số về dạng

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+2+2\sqrt{x+2}+1}+\sqrt{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}+1}\\ &= \sqrt{\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^2}\\ &= |\sqrt{x+2}+1|+|\sqrt{1-x^2}+1|\\ &= \sqrt{x+2}+\sqrt{1-x^2}+2. \end{aligned}$$

Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (1+x)(1-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ 1+x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [-1;1]$.

□

Nhận xét. *Như vậy*

① *Trong lời giải của câu ①, ngoài điều kiện để MS $\neq 0$ chúng ta còn cần tới điều kiện để $\sqrt{x}$ có nghĩa. Và trong hệ bất phương trình điều kiện, sỡ dĩ ta có biến đổi $|x|-4 \neq 0 \Leftrightarrow x-4 \neq 0$ là do điều kiện ở trên ta có $x \geq 0$.*

② *Trong lời giải câu ①, với các em học sinh chưa có kinh nghiệm sẽ thiết lập ngay điều kiện có nghĩa là*

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \\ x+3+2\sqrt{x+2} \geq 0 \\ 2-x^2+2\sqrt{1-x^2} \geq 0. \end{cases}$$

Ví dụ 8. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

① $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$.

② $y = \dfrac{\sqrt{4-x}}{(x-3)\sqrt{x-1}}$.

✍ **Lời giải.**

① Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-3)(x+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty;3)$.

② Hàm số xác định khi $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ x-1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 4 \\ x \neq 3. \end{cases}$

Vậy, tập xác đinh của hàm số là $\mathscr{D} = (1;4] \setminus \{3\}$.

□

Nhận xét. *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, đối với các biểu thức x^2-9 và $x-1$ ngoài điều kiện để nó có nghĩa trong căn bậc hai chúng ta còn ghép thêm điều kiện để nó có nghĩa khi là mẫu của một hàm phân thức, do đó phải thiết lập $x^2-9>0$ và $x-1>0$.*

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-m+2}$. Tìm m để hàm số xác định trên $[-1;1)$.

✍ **Lời giải.**

Hàm số xác định khi: $x - m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m - 2$.
Do đó tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = R \setminus \{m-2\}$.
Để hàm số xác định trên $[-1;1)$ điều kiện là:
$$m - 2 \notin [-1,1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2<-1 \\ m-2 \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m \geq 3. \end{array}\right.$$
Vậy, với $m < 1$ hoặc $m \geq 3$ thỏa mãn điều kiện đề bài. □

Ví dụ 10. Cho hàm số: $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m}$ Tìm m để hàm số xác định trên $(0,1)$.

✍ **Lời giải.**
Hàm số xác định khi
$$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2x - 2m \neq 0 \Leftrightarrow (x-m)(x-m+2) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m \neq 0 \\ x - m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \neq m - 2. \end{cases}$$
Do đó tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m-2, m\}$.
Để hàm số xác định trên $(0;1)$ điều kiện là
$$m-2, m \notin (0;1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m-2 \geq 1 \\ m-2 \leq 0 < 1 \leq x \leq 2. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 3 \\ 1 \leq m \leq 2. \end{array}\right.$$
Vậy, với $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m \leq 2$ hoặc $m \geq 3$ thỏa mãn điều kiện đề bài. □

Nhận xét. *Như vậy, trong lời giải ví dụ trên, để $m-2, m \notin (0;1)$ ta xác định được ba trường hợp là do đánh giá được $m-2 < m$ với mọi m, từ đó thiết lập:*

— *Hai điểm $m-2$ và m nằm bên trái $(0;1)$ và trong trường hợp này chỉ cần $m \leq 0$.*

— *Hai điểm $m-2$ và m nằm bên phải $(0;1)$ và trong trường hợp này chỉ cần $m \geq 0$.*

— *Điểm $m-2$ nằm bên trái $(0;1)$ và điểm m nằm bên phải $(0;1)$ và khoảng cách giữa hai điểm $m-2$ và m bằng 2 đơn vị.*

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = \sqrt{-x + 2m - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x - m + 2}}$. Tìm m để hàm số xác định trên $(0;1]$.

✍ **Lời giải.**
Hàm số xác định khi
$$\begin{cases} -x + 2m - 1 \geq 0 \\ x - m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2m - 1 \\ x > m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow m - 2 < x \leq 2m - 1.$$
Do đó tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = (m-2; 2m-1]$
Để hàm số xác định trên $(0;1]$ điều kiện là
$(0;1] \subseteq (m-2; 2m-1] \Leftrightarrow m - 2 \leq 0 < 1 \leq 2m - 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.
Vậy, với $1 \leq m \leq 2$ thỏa mãn điều kiện đề bài. □

3 XÉT TÍNH CHẤT BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét tính chất biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trong $(a;b)$, ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

— **Phương pháp 1:** Sử dụng định nghĩa.

— **Phương pháp 2:** Thực hiện theo các bước.

- Bước 1: Lấy $x_1, x_2 \in (a;b)$ với $x_1 \neq x_2$ ta thiết lập tỉ số $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.
- Bước 2: Khi đó
  - ∗ Nếu $A > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a;b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số đồng biến trong $(a;b)$.
  - ∗ Nếu $A < 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a;b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số nghịch biến trong $(a;b)$.

Ví dụ 12. Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = x - 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

— *Cách 1*: Hàm số xác định trong $\mathbb{R}$.
Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:
$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - 2) - (x_2 - 2) = x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Vậy hàm số đã cho đồng biến trong tập xác định của nó.

— *Cách 2:* Hàm số xác định trong $\mathbb{R}$.
Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{(x_1 - 2) - (x_2 - 2)}{x_1 - x_2} = 1 > 0$.
Vậy, hàm số đã đồng biến trên $\mathbb{R}$.

□

⚠ ***Tổng quát:*** *Xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x) = ax + b$, với $a \neq 0$.*

✍ **Lời giải.**

Hàm số xác định trong $\mathbb{R}$.

Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = a$.

Khi đó:

— *Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.*

— *Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.*

□

Ví dụ 13. Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = x^2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

— *Cách 1:* Hàm số xác định trong $\mathbb{R}$.
Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:
$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$.
Khi đó:

- Nếu $x_1, x_2 > 0$ (tức là $x \in (0; +\infty)$) thì:
  $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
  Vậy hàm số đồng biến trong $(0; +\infty)$.
- Nếu $x_1, x_2 < 0$ (tức là $x \in (-\infty; 0)$) thì:
  $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
  Vậy hàm số nghịch biến trong $(-\infty; 0)$.

— *Cách 2*: Hàm số xác định trong $\mathbb{R}$.
Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$.

Khi đó

— Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

— Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

□

⚠ *Hàm số $y = f(x) = ax^2$, với $a \neq 0$. Ta có*

① *Với $a > 0$.*

— *Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.*

— *Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.*

② *Với $a < 0$.*

— *Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.*

— *Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến biến trên $(-\infty; 0)$.*

Ví dụ 14. Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = -x^3$.

✍ **Lời giải.**
Ta có thể trình bày theo hai cách sau đây:

— *Cách 1:* Hàm số xác định trong $\mathbb{R}$.
Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:
$f(x_1) - f(x_2) = (-x_1^3) - (-x_2^3) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong tập xác định của nó.

— *Cách 2:* Hàm số xác định trong $\mathbb{R}$.
Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-x_1^3) - (-x_2^3)}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2} = -\frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2}$$
$$= -(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) < 0.$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

□

⚠ ***Tổng quát:*** *Xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x) = ax^3$, với $a \neq 0$.*

✍ **Lời giải.**
Hàm số xác định trong $\mathbb{R}$.
Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có
$A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{ax_1^3 - ax_2^3}{x_1 - x_2} = \dfrac{a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2} = a(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$.
Khi đó

— *Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.*

— *Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.*

□

Ví dụ 15. Xét sự biên thiên của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ trong $(0; +\infty)$.

✍ **Lời giải.**
Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

— *Cách 1:* Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1} &= \frac{\left(\sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1}\right)\left(\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}\right)} \\ &= \frac{\left(x_1^2+1\right) - \left(x_2^2+1\right)}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} < 0. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x_1) < f(x_2)$.
Vậy, hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

— *Cách 2:* Với $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có

$$\begin{aligned} A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1}}{x_1 - x_2} &= \frac{\left(x_1^2+1\right) - \left(x_2^2+1\right)}{(x_1 - x_2)\left(\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}\right)} \\ &= \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}} > 0. \end{aligned}$$

Vậy, hàm số đã cho đồng biến trong $(0;+\infty)$.

□

⚠ *Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng điều kiện $x_1, x_2 \in (0;\infty)$ để nhận được kết quả $x_1 + x_2 > 0$.*

Ví dụ 16. Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ trong $(1;+\infty)$.

✍ **Lời giải.**
Ta có thể trình bày theo hai cách sau

— *Cách 1:* Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in (1;+\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét
$f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{x_1}{x_1 - 1} - \dfrac{x_2}{x_2 - 1} = \dfrac{x_2 - x_1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} > 0.$
Suy ra $f(x_1) > f(x_2)$.
Vậy, hàm số đã cho nghịch biến trong $(1;+\infty)$.

— *Cách 2:* Với $x_1, x_2 \in (1;+\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{x_1}{x_1 - 1} - \dfrac{x_2}{x_2 - 1}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0.$$

Vậy, hàm số đã cho nghịch biến trong $(1;+\infty)$.

⚠ *Trong lời giải trên, chúng ta sử dụng điều kiện $x_1, x_2 \in (1;+\infty)$ để nhận được kết quả $x_1 - 1 > 0, x_2 - 1 > 0$.*

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $X = \{-3, -2, -1, 0, 3\}$, f là một quan hệ từ tập X đến tập $\mathbb{R}$. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng giá trị tương ứng của chúng là

x	-3	-2	-1	0	3
$f(x)$	-6	-4	-2	0	6

✍ **Lời giải.**

f là một hàm số vì với mỗi x thuộc tập X chỉ có một giá trị $f(x)$ tương ứng thuộc tập $\mathbb{R}$. □

Bài 2. Cho $X = \{-4, 3, 5, 7\}$, f là một quan hệ từ tập X đến tập $\mathbb{R}$. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng giá trị tương ứng của chúng là

x	-4	3	5	7
$f(x)$	8	8	8	8

✍ **Lời giải.**

f là một hàm số vì với mỗi x thuộc tập X chỉ có một giá trị $f(x)$ tương ứng thuộc tập $\mathbb{R}$. □

Bài 3. Cho $X = \{-4, -2, 0\}$, f là một quan hệ từ tập X đến tập $\mathbb{R}$. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng giá trị tương ứng của chúng là

x	-4	-4	-2	0
$f(x)$	4	12	6	1

✍ **Lời giải.**

f không phải là một hàm số vì với $x = -4$ thuộc tập X có hai giá trị $f(x)$ tương ứng thuộc tập $\mathbb{R}$ là 4 và 12.
□

Bài 4. Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = \dfrac{36}{x}$.

① Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số $y = f(x)$ vào bảng sau

x	-9	-6	3	12	
$y = f(x)$					1

② Xác định $f(-12), f(72)$.

✍ **Lời giải.**

① Ta có kết quả

x	-9	-6	3	12	36
$y = \dfrac{36}{x}$	-4	-6	12	3	1

② $f(-12) = \dfrac{36}{-12} = -3$, $f(72) = \dfrac{36}{72} = \dfrac{1}{2}$.

□

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = 2x + 9$.

a) Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số $y = f(x)$ vào bảng sau.

x	-3	-1	2	6	
$y = f(x)$					27

b) Xác định $f(-8), f(7)$.

✍ **Lời giải.**

a) Ta có bảng kết quả như sau

x	-3	-1	2	6	9
$y=f(x)$	3	7	13	21	27

b) — $f(-8)=2\cdot(-8)+9=-7$.

— $f(7)=2\cdot7+9=23$.

□

Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)$ được cho bởi công thức $f(x)=x^2-9$.

a) Tính $f(-4), f(-2), f(0), f(1), f(5)$.

b) Tính các giá trị của x ứng với $y=-8, y=-5, y=0, y=-10$.

✍ **Lời giải.**

a) — $f(-4)=(-4)^2-9=7$.

— $f(-2)=(-2)^2-9=-5$.

— $f(0)=0^2-9=-9$.

— $f(1)=1^2-9=-8$.

— $f(5)=5^2-9=16$.

b) — Với $y=-8$, ta có $x^2-9=-8 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$

— Với $y=-5$, ta có $x^2-9=-5 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2. \end{array}\right.$

— Với $y=0$, ta có $x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3. \end{array}\right.$

— Với $y=-10$, ta có $x^2-9=-10 \Leftrightarrow x^2=-1$.
Vậy không tồn tại giá trị của x để $y=10$.

□

Bài 7. Cho hàm số $y=2x-6$. Tìm các giá trị của x sao cho

1. y nhận giá trị dương.
2. y nhận giá trị nhỏ hơn 3.

✍ **Lời giải.**

1. y nhận giá trị dương $\Leftrightarrow y>0 \Leftrightarrow 2x-6>0 \Leftrightarrow x>3$.
   Vậy với $x>3$ thì y nhận giá trị dương.
2. $y<3 \Leftrightarrow 2x-6<3 \Leftrightarrow x<\dfrac{9}{2}$.
   Vậy với $x<\dfrac{9}{2}$ thì $y<3$.

□

Bài 8. Cho hàm số $y=6-5x$. Tìm các giá trị của x sao cho

① y nhận giá trị âm.

② y nhận giá trị lớn hơn 1.

✍ Lời giải.

a) Điều kiện để y nhận giá trị âm là

$$6-5x<0 \Leftrightarrow x>\frac{6}{5}$$

Vậy với $x>\frac{6}{5}$ thì y nhận giá trị âm.

b) Điều kiện để y nhận giá trị lớn hơn 1 là

$$6-5x>1 \Leftrightarrow x<1$$

Vậy với $x<1$ thì y nhận giá trị lớn hơn 1.

□

Bài 9. Cho các hàm số $f(x)=2x^2-3x+1$ và $g(x)=x^2-1$.

① Tính $f(-1)$ và $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

② Tìm số a để $f(a)=g(a)$.

✍ Lời giải.

① $f(-1)=2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+1=6; g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{3}{4}$.

② $f(a)=g(a) \Leftrightarrow 2a^2-3a+1=a^2-1 \Leftrightarrow a^2-3a+2=0 \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2. \end{array}\right.$

□

Bài 10. Tìm tập xác định của các hàm số sau

① $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

② $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+3}$.

✍ Lời giải.

① Hàm số xác định khi

$$x^2+1\neq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

② Hàm số xác định khi

$$x^2-x+3\neq 0 \Leftrightarrow x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{11}{4}\neq 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\neq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

□

Bài 11. Tìm tập xác định của các hàm số sau

① $y=\dfrac{x-1}{2x-6}$.

② $y=\dfrac{2x+1}{2x^2-x-1}$.

✍ Lời giải.

① Hàm số xác định khi

$$2x-6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

② Hàm số xác định khi

$$2x^2-x-1\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}$.

□

Bài 12. Tìm tập xác định của các hàm số sau

① $y=\sqrt{x+2}$.

② $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{7+x}$.

✍ Lời giải.

① Hàm số xác định khi

$$x+2\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant -2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[-2;+\infty)$.

② Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} 2-x\geqslant 0 \\ 7+x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 2 \\ x\geqslant -7. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[-7;2]$.

□

Bài 13. Tìm tập xác định của các hàm số sau

① $y=\sqrt{-x^2+5x-6}$.

② $\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

✍ Lời giải.

① Hàm số xác định khi $-x^2+5x-6\geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6\leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2)\leq 0 \Leftrightarrow 2\leq x\leq 3$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[2;3]$.

② Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} x^2-x+1\geq 0 \\ x+\sqrt{x^2-x+1}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}\geq -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x<0 \\ \begin{cases} -x\geq 0 \\ x^2-x+1\geq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x\geq 0. \end{array}\right.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

□

Bài 14. Tìm tập xác định của các hàm số sau

① $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$.

② $y=\dfrac{\sqrt{5-2x}}{(x-2)\sqrt{x-1}}$.

✍ Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}1-x\ge 0\\ x^2-4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ (x-2)(x+2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ \left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x<-2.$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}5-2x\ge 0\\ x-2\ne 0\\ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{5}{2}\\ x\ne 2\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1<x\le \dfrac{5}{2}\\ x\ne 2.\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\left(1;\dfrac{5}{2}\right]\setminus\{2\}.$ □

Bài 15. Tìm tập xác định của các hàm số sau

① $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x|x|-1}}.$

② $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{x+1}}.$

✍ Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x\ge 0\\ x|x|-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x\cdot x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ (x-1)(x+1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x-1>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x>1.$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}4-x^2\ge 0\\ x+1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x+2)\le 0\\ x\ne -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x\le 2\\ x\ne -1\end{cases}.$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[-2;2]\setminus\{-1\}$. □

Bài 16. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$

① Tìm tập xác định của hàm số.

② Tính giá trị của $f(4+2\sqrt{3}), f(a^2)$ với $a<-2$.

③ Tìm x để $f(x)=\sqrt{3}$.

④ Tìm x để $f(x)=f(x^2)$.

✍ Lời giải.

① Hàm số xác định khi $\begin{cases}x\ge 0\\ \sqrt{x}-1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ \sqrt{x}\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow 0\ge x\ne 1.$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

②

$$f(4+2\sqrt{3})=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+1}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-1}=\frac{\sqrt{3}+1+1}{\sqrt{3}+1-1}=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}.$$

$$f(a^2)=\frac{\sqrt{a^2}+1}{\sqrt{a^2}-1}=\frac{|a|+1}{|a|-1}=\frac{-a+1}{-a-1}=\frac{a-1}{a+1}.$$

③ Để $f(x)=\sqrt{3}$ thì

$$f(x)=\sqrt{3}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\ (\sqrt{3}-1)\sqrt{x}=\sqrt{3}+1\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\Leftrightarrow x=\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}.$$

④ Để $f(x)=f(x^2)$ thì

$$f(x)=f(x^2)\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{x-1}{x+1}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x+1}\Leftrightarrow x+1=(\sqrt{x}-1)^2\Leftrightarrow \sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0.$$

□

Bài 17. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2m+1}$ xác định trên $[0;1)$.

✍ **Lời giải.**

Hàm số có nghĩa khi và chỉ khi $x-2m+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2m-1$.

Suy ra, hàm số xác định trên $[0;1)$ khi và chỉ khi

$$2m-1\notin[0;1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m-1<0\\2m-1\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<\dfrac{1}{2}\\m\geq 1.\end{array}\right.$$

□

Bài 18. Tìm m để hàm số sau xác định trên $(1;3)$.

$$y=\sqrt{-x+2m-1}-\frac{1}{2x-m}.$$

✍ **Lời giải.**

Hàm số có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases}-x+2m-1\geq 0\\2x-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2m-1\\x>\dfrac{m}{2}.\end{cases}$

Suy ra, hàm số xác định trên $(1;3)$ khi và chỉ khi

$$\frac{m}{2}\leq 1<3\leq 2m-1\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 2\\m\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow m=2$$

. □

Bài 19. Xét sự biến thiên của các hàm số

① $y=f(x)=2x+3$;

② $y=f(x)=1-3x$;

③ $y=f(x)=(m^2+1)x-2$;

④ $y=f(x)=mx+4$, với $m\neq 0$.

✍ **Lời giải.**

① Vì $a=2>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

② Vì $a=-3<0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

③ Vì $a=m^2+1>0,\forall m$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

④ Với $m>0$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, $m<0$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

□

Bài 20. Xét sự biến thiên của các hàm số

① $y=f(x)=2x^2$ trong $(0;+\infty)$;

② $y=f(x)=-6x^2$ trong $(0;+\infty)$;

③ $y=f(x)=x^2+2x+3$;

④ $y=f(x)=-x^2+4x+1$.

✍ **Lời giải.**

① Với $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có
$A = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{2x_1^2-2x_2^2}{x_1-x_2} = 2(x_1+x_2) > 0, \forall x_1, x_2 \in (0;+\infty)$.
Vậy hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

② Với $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có
$A = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{-6x_1^2+6x_2^2}{x_1-x_2} = -6(x_1+x_2) < 0, \forall x_1, x_2 \in (0;+\infty)$.
Vậy hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

③ Với $x_1, x_2 \in (-1;+\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có
$A = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{x_1^2+2x_1+3-x_2^2-2x_2-3}{x_1-x_2} = x_1+x_2+2 > 0, \forall x_1, x_2 \in (-1;+\infty)$.
Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

Với $x_1, x_2 \in (-\infty;-1)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có
$A = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{x_1^2+2x_1+3-x_2^2-2x_2-3}{x_1-x_2} = x_1+x_2+2 < 0, \forall x_1, x_2 \in (-\infty;-1)$.
Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

④ Với $x_1, x_2 \in (2;+\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có
$A = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{-x_1^2+4x_1+1+x_2^2-4x_2-1}{x_1-x_2} = -x_1-x_2+4 < 0, \forall x_1, x_2 \in (2;+\infty)$.
Vậy hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Với $x_1, x_2 \in (-\infty;2)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có
$A = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{-x_1^2+4x_1+1+x_2^2-4x_2-1}{x_1-x_2} = -x_1-x_2+4 > 0, \forall x_1, x_2 \in (-\infty;2)$.
Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$.

□

Bài 21. Xét sự biến thiên của các hàm số

① $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ trong $(1;+\infty)$. ② $f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$ trong $(-\infty;-2)$.

✍ **Lời giải.**

① Với mọi $x, y \in (1;+\infty), x \neq y$. Lập tỉ lệ

$$A = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{y+1}{y-1}}{x-y} = \frac{-2}{(x-1)(y-1)} < 0 \,(\text{do } x>1, y>1 \text{ nên } (x-1)(y-1)>0).$$

Do đó hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

② Với mọi $x, y \in (-\infty;-2), x \neq y$, Lập tỉ lệ

$$B = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\dfrac{x}{2x+3}-\dfrac{y}{2y+3}}{x-y} = \frac{3}{(2x+3)(2y+3)} > 0$$

(do $x < -2, y < -2$ nên $(2x+3)(2y+3) > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$.

□

Bài 22. Xét sự biến thiên của các hàm số

① $f(x) = \sqrt{x-1}$. ② $y = \sqrt{2-x}$.

✍ **Lời giải.**

① Tập xác định của hàm số $[1;+\infty)$.
Với mọi $x, y \in [1;+\infty), x \neq y$, lập tỉ lệ

$$A = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}}{x-y} = \frac{x-y}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1})(x-y)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} > 0.$$

Do đó hàm số đồng biến trên tập xác định.

② Tập xác định của hàm số $(-\infty;2]$.
Với mọi $x, y \in (-\infty;2], x \neq y$, lập tỉ lệ

$$A = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2-y}}{x-y} = \frac{y-x}{(\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y})(x-y)} = \frac{-1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}} < 0.$$

Do đó hàm số nghịch biến trên tập xác định.

□

Bài 23. Xét sự biến thiên của các hàm số

① $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ trong $(0;+\infty)$. ② $f(x) = x^2+4x+5$ trong $(-\infty;-2)$.

✍ **Lời giải.**

① Với mọi $x, y \in (0;+\infty), x \neq y$, lập tỉ lệ

$$A = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{y^2+3}}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}\right)(x-y)} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}} > 0.$$

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

② Với mọi $x, y \in (-\infty;-2), x \neq y$, lập tỉ lệ

$$A = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(x^2+4x+5)-(y^2+4y+5)}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y+4)}{x-y} = x+y+4.$$

Do $x < -2, y < -2$ nên $x+y+4 < 0$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

□

Bài 24. Xét sự biến thiên của các hàm số

① $f(x) = 3x^3$.

② $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$.

③ $f(x) = x^3 + x + 1$.

④ $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

✍ **Lời giải.**

① Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$, lập tỉ lệ

$$\begin{aligned} A = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{3x^3 - 3y^3}{x-y} \\ &= \frac{3(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y} \\ &= x^2+xy+y^2. \end{aligned}$$

Do $x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0\, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (x, y không đồng thời bằng 0) nên $A > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

② Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$, lập tỉ lệ

$$\begin{aligned} A = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{(x^3-3x^2+6x+1)-(y^3-3y^2+6y+1)}{x-y} \\ &= \frac{\left((x-1)^3+3x+2\right)-\left((y-1)^3+3y+2\right)}{x-y} \\ &= \frac{\left((x-1)^3-(y-1)^3\right)+3(x-y)}{x-y} \\ &= \frac{(x-y)\left((x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2+3\right)}{x-y} \\ &= (x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2+3. \end{aligned}$$

Do $(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2+3 = \left[(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\right]^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2+3 > 0\, \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên $A > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

③ Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$, lập tỉ lệ

$$\begin{aligned} A = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{(x^3+x+1)-(y^3+y+1)}{x-y} \\ &= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2+1)}{x-y} \\ &= x^2+xy+y^2+1 > 0. \end{aligned}$$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

④ Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$, lập tỉ lệ

$$A = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(x^3+2x^2+3x+1)-(y^3+2y^2+3y+1)}{x-y}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{[(x+1)^3 - x^2] - [(y+1)^3 - y^2]}{x-y} \\
&= \frac{[(x+1)^3 - (y+1)^3] - (x^2 - y^2)}{x-y} \\
&= \frac{(x-y)[(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + x + y]}{x-y} \\
&= (x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 - (x+y) \\
&= x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y + 3 \\
&= \left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(x+\frac{2}{3}\right)\left(y+\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{3} \\
&= \left[\left(x+\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(y+\frac{2}{3}\right)\right]^2 + \frac{3}{4}\left(y+\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}.
\end{aligned}
$$

Biểu thức cuối luôn dương với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

□

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, với $a \neq 0$, trong đó a và b là các số thực xác định.

⚠ *Nếu $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$ là hàm số biểu thị sự tương quan tỷ lệ thuận.*

Tính chất 1. Ta có:

— Hàm số $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$.

— Trong tập xác định $\mathbb{R}$, hàm số $y = ax + b$
- Đồng biến nếu $a > 0$.
- Nghịch biến nếu $a < 0$.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = mx - m^2 - x + 1$.

① Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

② Tìm m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

③ Tìm m để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

✍ **Lời giải.**
Viết lại hàm dưới dạng $y = (m-1)x - m^2 - 1$.

① Hàm số trên là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$. Vậy với $m \neq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

② Hàm số trên nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$. Vậy với $m < 1$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

③ Ta biết gốc tọa độ $O(0,0)$, do đó đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ khi

$$0 = (m-1).0 - m^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

. Vậy với $m = \pm 1$ thì đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

□

⚠ *Trong lời giải câu ③, khi $m = 1$ hàm số không còn là hàm số bậc nhất.*

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = mx - \sqrt{1-m}$.

① Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

② Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

✍ **Lời giải.**

① Hàm số trên là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m \leq 1. \qquad (*)$$

Vậy với $0 \neq m \leq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

② Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m > 0$. Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $0 < m \leq 1$.
Vậy, với $0 < m \leq 1$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

□

Nhận xét. *Trong lời giải trên:*

— *Ở câu ① nhiều em học sinh mắc sai lầm khi chỉ thiết lập điều kiện $m \neq 0$.*

— *Ở câu ② nhiều em học sinh mắc sai lầm khi thiết lập điều kiện $m > 0$ nhưng lại không kết hợp với điều kiện $(*)$ ở câu ①.*

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax$, với $a \neq 0$.

① Chứng minh rằng $f(kx_1) = kf(x_1)$ và $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

② Các hệ thức trong câu $a)$ còn đúng với hàm số $y = g(x) = ax + b$, với $b \neq 0$ hay không?

Lời giải.

① Ta có $f(kx_1) = a(kx_1) = k(ax_1) = kf(x_1)$, đpcm.
$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$, đpcm.

② Ta lần lượt xét

— Với hệ thức: $g(kx_1) = kg(x_1)$.
$\Leftrightarrow a(kx_1) + b = k(ax_1 + b) \Leftrightarrow akx_1 + b = akx_1 + bk \Leftrightarrow b(k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 1 (b \neq 0)$.
Vậy hệ thức chỉ đúng với $k = 1$.

— Với hệ thức $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$.
$\Leftrightarrow a(x_1 + x_2) + b = (ax_1 + b) + (ax_2 + b) \Leftrightarrow ax_1 + ax_2 + b = ax_1 + ax_2 + 2b \Leftrightarrow b = 0$. Ta có $b \neq 0$, vậy hệ thức không đúng.

□

Ví dụ 4. Cho hai hàm số $f(x) = (m^2 + 1)x - 4$ và $g(x) = mx + 2$, với $m \neq 0$. Chứng minh rằng:

① Các hàm số $f(x), f(x) + g(x), f(x) - g(x)$ là các hàm đồng biến.

② Hàm số $g(x) - f(x)$ là hàm nghịch biến.

Lời giải.

① Ta lần lượt xét:

— Hàm số $f(x)$ có hệ số $a = m^2 + 1 > 0$ do đó nó là hàm đồng biến.

— Hàm số $f(x) + g(x) = (m^2 + 1)x - 4 + (mx + 2) = (m^2 + m + 1)x - 2$, có hệ số:
$a = m^2 + m + 1 = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, do đó nó là hàm đồng biến.

— Hàm số $f(x) - g(x) = (m^2 + 1)x - 4 - (mx + 2) = (m^2 - m + 1)x - 6$, có hệ số:
$a = m^2 - m + 1 = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, do đó nó là hàm đồng biến.

② Hàm số: $g(x) - f(x) = (mx + 2) - \left[(m^2 + 1)x - 4\right] = -(m^2 - m + 1)x + 6$, có hệ số:

$a = -(m^2 - m + 1) = -\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4} < 0$, do đó nó là hàm nghịch biến.

□

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax + b$, với $a \neq 0$.

① Chứng minh rằng với một giá trị x_0 tùy ý cho trước, bao giờ cũng tìm được hai số m và n sao cho $f(m) < f(x_0) < f(n)$.

② Chứng minh rằng hàm số bậc nhất không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Lời giải.

① Ta biết rằng với mỗi x_0 tùy ý cho trước, bao giờ cũng có: $x_0 - 1 < x_0 < x_0 + 1$.

Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Với $a > 0$, khi đó hàm số đồng biến, do đó $f(x_0 - 1) < f(x_0) < f(x_0 + 1)$. Từ đó ta chọn $m = x_0 - 1, n = x_0 + 1$.

Trường hợp 2: Với $a < 0$, khi đó hàm số nghịch biến, do đó $f(x_0 - 1) > f(x_0) > f(x_0 + 1)$. Từ đó ta chọn $m = x_0 + 1, n = x_0 - 1$.

② Giả sử trái lại hàm số có:

- Giá trị lớn nhất $f(x_1)$ ứng với x_1.
- Giá trị nhỏ nhất $f(x_2)$ ứng với x_2.

  Theo kết quả câu a., luôn tìm được hai số m và n sao cho:
  $f(x_1) < f(n) \Rightarrow f(x_1)$ không phải là giá trị lớn nhất.
  $f(x_2) > f(m) \Rightarrow f(x_2)$ không phải là giá trị nhỏ nhất.

□

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Một ô tô vận tốc 50 km/h khởi hành từ bến xe phía Nam cách Hà Nội 5 km và đi về phía Nghệ An (Bến xe nằm trên đường Hà Nội - Nghệ An). Hỏi sau khi khởi hành x giờ, xe cách Hà Nội bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi y là khoảng cách từ ô tô đến Hà Nội sau x giờ. Ta có khoảng cách ban đầu khi xe chưa khởi hành là 5 km vì bến xe cách Hà Nội 5 km. Hơn nữa, sau mỗi giờ xe đi về phía Nghệ An sẽ cách Hà Nội thêm 50 km. Vậy sau khi khởi hành x giờ, khoảng cách từ ô tô đến Hà Nội là $y = 50x + 5$.

□

Bài 2. Cho các hàm số

① $y = 5x + \sqrt{3}$.

② $y = 2 - \sqrt[3]{5}x$.

③ $y = -\dfrac{1}{2}x + 6$.

④ $y = 3(x - 2) + x$.

⑤ $y = -\dfrac{1}{x} + 3$.

⑥ $y = 2\sqrt{x} + 8$.

Trong các hàm số trên, hàm nào là hàm số bậc nhất? Xét sự biến thiên của các hàm số bậc nhất đó.

Lời giải.

① Hàm số $y = 5x + \sqrt{3}$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = 5 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

② Hàm số $y = 2 - \sqrt[3]{5}x$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = -\sqrt[3]{5} < 0$ nên nó là hàm số nghịch biến.

③ Hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x + 6$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = -\dfrac{1}{2} < 0$ nên nó là hàm số nghịch biến

④ Hàm số $y = 3(x - 2) + x = 4x - 6$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = 4 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

⑤ Hàm số đã cho không là hàm số bậc nhất vì không đúng dạng $y = ax + b$.

⑥ Hàm số đã cho không là hàm số bậc nhất vì không đúng dạng $y = ax + b$.

□

Bài 3. Cho hàm số $y = (m-1)x + \sqrt{m}$.

① Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

② Tìm m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

✍ **Lời giải.**

① Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \neq 1. \qquad (*)$$

Vậy với $0 \leq m \neq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

② Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$. Kết hợp với điều kiện (*) ta được $0 \leq m < 1$. Vậy với $0 \leq m < 1$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

□

Bài 4. Tìm m để các hàm số sau là hàm bậc nhất.

① $y = mx + 6$.

② $y = m^2x + \sqrt{3} - x$.

③ $y = mx + \sqrt{m+2}$.

④ $y = (m^2 - m)x^2 + mx + 8$.

✍ **Lời giải.**

① Hệ số bậc nhất $m \neq 0$.

② Viết lại $y = \left(m^2 - 1\right)x + \sqrt{3}$. Hệ số bậc nhất $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

③ Ta có $\begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \neq 0$.

④ Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

□

Bài 5. Cho hai hàm số $f(x) = (m^2 + 5)x - 3$ và $g(x) = 2mx + 1$, với $m \neq 0$. Chứng minh rằng

① Các hàm $f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ là các hàm đồng biến.

② Hàm số $g(x) - f(x)$ là hàm nghịch biến.

✍ **Lời giải.**

① Hàm $f(x)$ có hệ số $a = m^2 + 5 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

Hàm $f(x) + g(x)$ có hệ số $a = m^2 + 2m + 5 = (m+1)^2 + 4 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

Hàm $f(x) - g(x)$ có hệ số $a = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

② Hàm $g(x) - f(x)$ có hệ số $a = -m^2 + 2m - 5 = -(m-1)^2 - 4 < 0$ nên nó là hàm số nghịch biến.

□

Bài 6. Cho hàm số $y = (m-1)x + 2m - 3$.

① Tìm m để hàm số là đồng biến, nghịch biến, không đổi.

② Chứng tỏ rằng khi m thay đổi đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

✍ **Lời giải.**

① Ta có

— Hàm số là đồng biến khi và chỉ khi: $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

— Hàm số là nghịch biến khi và chỉ khi: $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

— Hàm số là hàm hằng khi và chỉ khi: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

② Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi m.

Khi đó ta có $m(x_0 + 2) + (x_0 + y_0 + 3) = 0$ với mọi m. $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ x_0 + y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$ Vậy khi m thay đổi thì đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $M(-2; -1)$ cố định.

□

BÀI 3. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

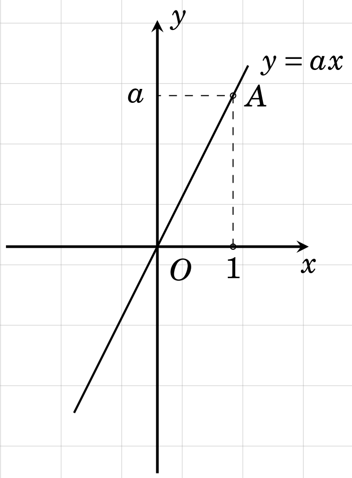
1 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $Y = AX$ VỚI $A \neq 0$

Đồ thị của hàm số $y = ax(a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $A(1;a)$. Như vậy, để vẽ đồ thị hàm số $y = ax(a \neq 0)$, ta thực hiện:

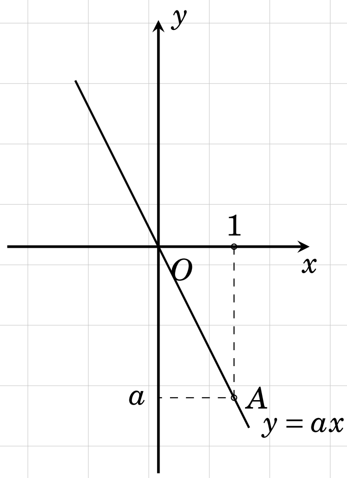
— Xác định vị trí điểm $A(1;a)$.

— Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = ax$.

Ta có minh họa:



Đường thẳng $y = ax$ $(a > 0)$ nằm trong góc phần tư (I) và phần tư (III)



Đường thẳng $y = ax$ $(a < 0)$ nằm trong góc phần tư (II) và phần tư (IV)

⚠ *Ta có một số chú ý sau:*

— *Đồ thị hàm số $y = x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.*

— *Đồ thị hàm số $y = -x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.*

2 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $Y = AX + B$, $A \neq 0$

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$, $a \neq 0$ là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b. Đường thẳng này:

— Song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$.

— Trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

Từ kết quả trên ta thấy: Nếu đã có đồ thị hàm số $y = ax$ thì đồ thị hàm số $y = ax + b$, $b \neq 0$ được suy ra bằng cách:

— Xác định vị trí điểm $M(0;b)$.

— Đường thẳng đi qua M song song với đường thẳng $y = ax$ chính là đồ thị hàm số $y = ax + b$.

3 CÁCH VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

Vì đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng nên muốn vẽ ta chỉ cần xác định hai điểm phân biệt bất kỳ trên đường thẳng đó.

⚠ *Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b, a \neq 0$:*

— *Ta nên chọn hai điểm có tọa độ chẵn.*

— *Thông thường ta chọn hai điểm* $A(0;b)$ *và* $B\left(-\frac{b}{a};0\right)$ *theo thứ tự là giao điểm của đồ thị với trục* Oy *và* Ox *nếu hai điểm đó không nằm quá xa gốc tọa độ (thí dụ* $y = x + 2005$*) hoặc tọa độ của chúng không quá phức tạp trong tính toán (thí dụ* $y = \sqrt[3]{2}x + \sqrt{89}$*).*

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Cho hàm số: $y = -x + 3$.

① Xác định giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung và trục hoành. Vẽ đồ thị hàm số.

② Gọi A và B theo thứ tự là hai giao điểm nói trên. Tính diện tích $\triangle OAB$ (O là gốc tọa độ).

③ Gọi α là góc nhọn tạo bởi đồ thị hàm số với trục Ox. Tính $\tan\alpha$, suy ra số đo góc α.

④ Bằng đồ thị, tìm x để $y > 0$, $y \leq 0$.

Lời giải.

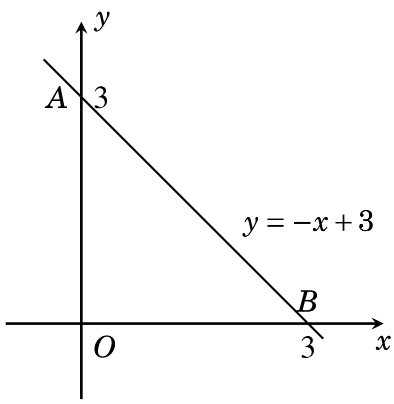
① Đồ thị cắt trục Oy tại A có:

$$x = 0 \Rightarrow y = -0 + 3 = 3 \Rightarrow A(0;3)$$

Đồ thị cắt trục Ox tại B có:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow B(3;0)$$

.



② Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.3.3 = \frac{9}{2}$$

.

③ Trong $\triangle OAB$, ta có $\widehat{AOB} = \alpha$, suy ra:

$$\tan\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^o$$

d) Từ đồ thị suy ra:

— $y > 0 \Leftrightarrow x < 3$, ứng với phần đồ thị nằm phía trên trục Ox.

— $y \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$, ứng với phần đồ thị phía dưới trục Ox.

□

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y = ax - 3a$

① Xác định giá trị của a để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;4)$. Vẽ đồ thị hàm số với a vừa tìm được.

② Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng tìm được trong a).

Lời giải.

① Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;4)$ khi và chỉ khi:

$$4 = a.0 - 3a \Leftrightarrow 3a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

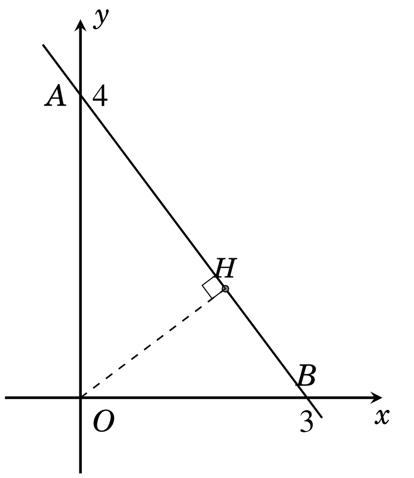
Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy thêm điểm $B(3;0)$.

② Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng.

Trong tam giác $\triangle OAB$ vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{4.3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}.$$



□

Ví dụ 3. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số $y = 3x$ và $y = -3x$. Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này?

✍ **Lời giải.**

Để vẽ đồ thị hàm số $y = 3x$, ta thực hiện:

— Xác định thêm một điểm $A(1;3)$.

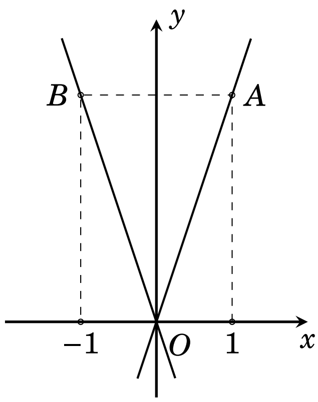
— Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = 3x$.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = -3x$, ta thực hiện:

— Xác định thêm một điểm $B(-1;3)$.

— Nối O với B ta được đồ thị hàm số $y = 3x$.

Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này đối xứng với nhau qua Oy.



□

⚠ *Ta có một số nhận xét sau:*

① *Ta biết rằng:* $|3x| = \begin{cases} 3x & khi\ \ x \geq 0 \\ -3x & khi\ \ x < 0 \end{cases}$

Do đó, nếu lấy hai phần đồ thị là:

— *Phần đồ thị của hàm số $y = 3x$ trong góc phần tư thứ I.*

— *Phần đồ thị của hàm số $y = -3x$ trong góc phần tư thứ II.*

ta nhận được đồ thị của hàm số $y = |3x|$.

② *Từ đó, để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax|$ ta thực hiện như sau:*

— *Vẽ tia OA, với $A(x_A, a \cdot x_A), x_A > 0$.*

— *Vẽ tia OB, với $B(-x_A, a \cdot x_A)$.*

Hoặc chỉ cần vẽ tia OA sau đó lấy đối xứng OA qua Oy.

Ví dụ 4. Cho hai hàm số: $y = 2x$ và $y = -\frac{1}{2}$.

① Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số. Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này?

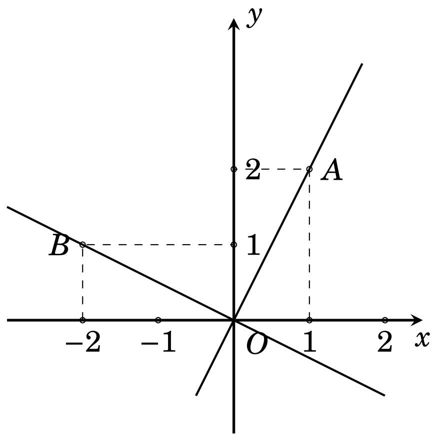
② Xác định tọa độ điểm B thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$ sao cho $x_B = 4y_B + 2$.

✍ **Lời giải.**

① Để vẽ đồ thị hàm số $y = 2x$ ta thực hiện:

— Xác định thêm một điểm $A(1;2)$.
— Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = 2x$.

Nhận xét rằng đồ thị của hai hàm số này vuông góc với nhau.



② B thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$, suy ra $y_B = -\frac{1}{2}x_B$ (*). Thay $x_B = 4y_B + 2$ vào (*), ta được:

$y_B = -\frac{1}{2}(4y_B + 2) \Leftrightarrow y_B = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x_B = 4(-\frac{1}{3}) + 2 = -\frac{1}{3}$

Vậy, điểm $B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

□

Ví dụ 5. Cho các hàm số:

$$y = f(x) = 2x, y = g(x) = 2x - 1, y = h(x) = 2x + 2.$$

① Với $x = -2; 0; 1; 2; 3$ hãy tính các giá trị tương ứng của $f(x), g(x), h(x)$.

② Có nhận xét gì về giá trị của các hàm số $f(x), g(x), h(x)$ ứng với cùng một giá trị của biến số x, từ đó đưa ra kết luận về đồ thị các hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$.

✍ **Lời giải.**

① Ta lập bảng:

x	-2	0	1	2	3
$f(x)$	-4	0	2	4	6
$g(x)$	-5	-1	1	3	5
$h(x)$	-2	2	4	6	8

b) Từ bảng, ta nhận thấy với bất kỳ hoành độ nào thì

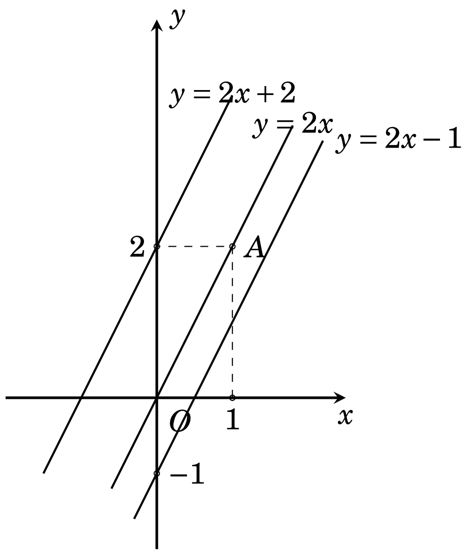
— Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ cũng nhỏ hơn tung độ tương ứng của điểm trên đường thẳng $y = 2x$ là 1 đơn vị.

— Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ cũng lớn hơn tung độ tương ứng của điểm trên đường thẳng $y = 2x$ là 2 đơn vị.

Vậy ta thấy:

— Đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ là một đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

— Đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ là một đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.



□

Ví dụ 6. Cho các hàm số:

$$y = 2x - 1, y = 2 - x, y = 3 - 2x.$$

① Vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục tọa độ.

② Có nhận xét gì về đồ thị của ba hàm số này?

✍ **Lời giải.**

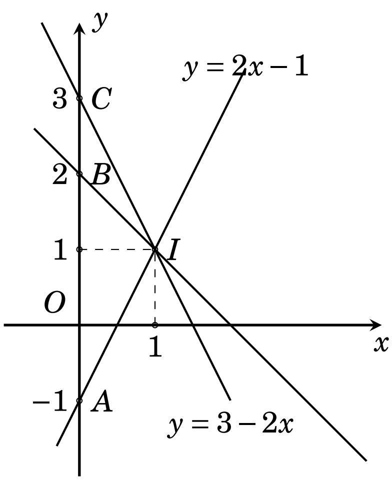
① Ta lần lượt vẽ:

— Với đồ thị $y = 2x - 1$ lấy hai điểm $A(0; -1)$ và $A_0\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$. Nối A và A_0 được đồ thị cần dựng.

— Với đồ thị $y = 2 - x$ lấy hai điểm $B(0; 2)$ và $B_0(2; 0)$. Nối B và B_0 được đồ thị cần dựng.

— Với đồ thị $y = 3 - 2x$ lấy hai điểm $C(0; 3)$ và $C_0\left(\dfrac{3}{2}; 0\right)$. Nối C và C_0 được đồ thị cần dựng.

② Đồ thị của các hàm số này đồng quy tại điểm $I(1; 1)$.

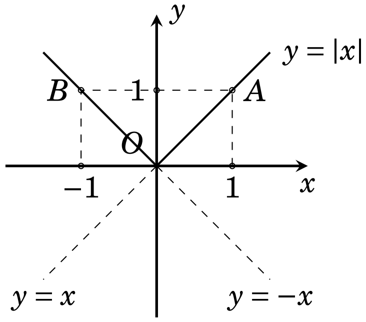


□

Ví dụ 7. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

① $y = |x|$. ② $y = |x - 2|$. ③ $|x - 1| + 2$.

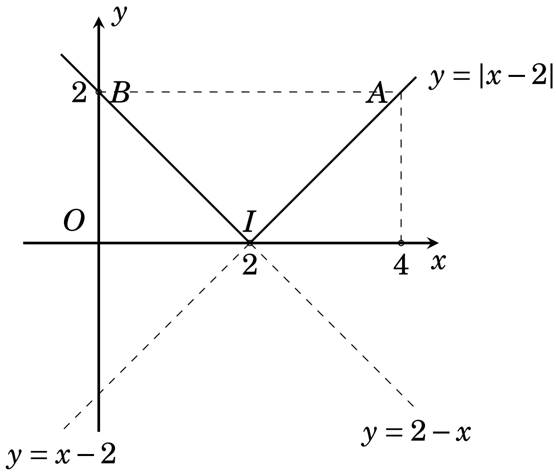
✍ **Lời giải.**



① Ta biến đổi

$$y=|x|=\begin{cases} x & \text{nếu } x\ge 0\\ -x & \text{nếu } x\le 0\end{cases}$$

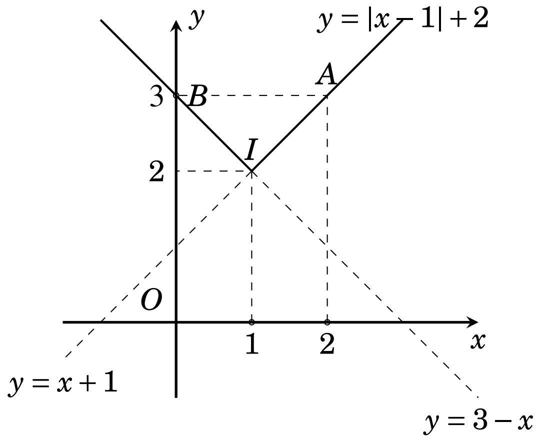
Do đó đồ thị hàm số là hai tia OA với $A(1;1)$ và OB với $B(-1;1)$.



b) Ta biến đổi

$$y=|x-2|=\begin{cases} 2-x & \text{nếu } x\ge 2\\ x-2 & \text{nếu } x\le 2\end{cases}$$

Do đó đồ thị hàm số là hai tia IA với $I(2;0)$ và $A(4;2)$ và IB với $B(0;2)$.



c) Ta biến đổi

$$y=|x-1|+2=\begin{cases} x+1 & \text{nếu } x\ge 1\\ 3-x & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$$

Do đó đồ thị hàm số là hai tia IA với $I(1;2)$ và $A(2;3)$ và IB với $B(0;3)$.

□

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Vẽ đồ thị các hàm số:

① $y=4x$.

② $y=x+3$.

③ $y=-x+6$.

④ $y=-3x-3$.

⑤ $y=-\dfrac{1}{2}x+1$.

✍ **Lời giải.**

① Xác định hai điểm $O(0;0)$ và $A(1;4)$. Đường thẳng đi qua hai điểm O,A là đồ thị hàm số cần vẽ.

② Xác định hai điểm $A(0;3)$ và $B(-3;0)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A,B là đồ thị hàm số cần vẽ.

③ Xác định hai điểm $A(0;6)$ và $B(6;0)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A,B là đồ thị hàm số cần vẽ.

④ Xác định hai điểm $A(0;-3)$ và $B(-1;0)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A,B là đồ thị hàm số cần vẽ.

⑤ Xác định hai điểm $A(0;1)$ và $B(2;0)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A,B là đồ thị hàm số cần vẽ.

Học sinh tự vẽ hình. □

Bài 2. Cho hàm số $y = ax$. Hãy xác định hệ số a, biết:

① Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;8)$.

② Đồ thị hàm só đi qua điểm $B\left(\frac{3}{4};-3\right)$.

③ Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.

Vẽ đồ thị hàm số trong mỗi trường hợp.

✍ **Lời giải.**

① Vì điểm $A(1;8)$ thuộc đồ thị hàm số nên $8.a = 1 \Leftrightarrow a = 8$.

Vậy hàm số có dạng $y = 8x$.

② Vì điểm $B\left(\frac{3}{4};-3\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên $-3 = a.\frac{3}{4} \Leftrightarrow a = -4$.

Vậy hàm số có dạng $y = -4x$.

③ Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III, ta có ngay $a = 1$.

Học sinh tự vẽ hình. □

Bài 3. Cho hàm số $y = (2a-3)x$. Hãy xác định a, để:

① Hàm số luôn đồng biến? Nghịch biến?

② Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;3)$.

③ Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(\frac{5}{4};-\frac{1}{2})$.

④ Đồ thị hàm số là đường phân giác góc phần tư thứ II, IV.

Vẽ đồ thị hàm số trong mỗi trường hợp ②, ③, ④.

✍ **Lời giải.**

① Hàm số luôn đồng biến khi và chỉ khi $2a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$.

Hàm số luôn nghịch biến khi và chỉ khi $2a - 3 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}$.

② Vì điểm $A(2;3)$ thuộc đồ thị hàm số nên $3 = (2a-3)2 \Leftrightarrow 4a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}$.

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{9}{4}x$.

③ Vì điểm $B\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$-\frac{1}{2} = (2a-3)\frac{5}{4} \Leftrightarrow 10a = 13 \Leftrightarrow a = \frac{13}{10}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -\frac{2}{5}x$.

④ Đồ thị hàm số là đường phân giác góc phần tư thứ II, IV, ta có:

$$2a - 3 = -1 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -x$.

Học sinh tự vẽ hình. □

Bài 4. Cho hàm số $y = 2ax - 3a$.

① Xác định a biết rằng đồ thị hàm số trên đi qua điểm $M(2;3)$.

② Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong a).

③ Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng tìm được trong a).

✍ **Lời giải.**

① Vì điểm $M(2;3)$ thuộc đồ thị hàm số nên: $3 = 2.a.2 - 3a \Leftrightarrow a = 3$.

Do đó hàm số có dạng $y = 6x - 9$.

② Ta lấy hai điểm $A(0;-9)$ và $B\left(\frac{3}{2};0\right)$.

Đường thẳng nối hai điểm A,B là đồ thị cần vẽ. Học sinh tự vẽ hình.

③ Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng.

Trong tam giác OAB vuông tại O ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA \cdot OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{9 \cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{9^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{9}{\sqrt{37}}.$$

Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng bằng $\frac{9}{\sqrt{37}}$.

□

Bài 5. Cho hàm số $y = ax + b$.

① Xác định a và b biết rằng đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

② Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong a).

③ Tính diện tích tam giác được tạo bởi đồ thị hàm số trong a) và các trục tọa độ.

✍ **Lời giải.**

① Giao điểm của đồ thị với trục tung là $A(0,-4)$, với trục hoành là $B(1,0)$. Ta có:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = -4 \\ a \cdot 1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}.$$

② Xác định các điểm $A(0,-4)$ và $B(1,0)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A,B là đồ thị hàm số cần vẽ. Học sinh tự vẽ hình.

③ Tam giác tạo bởi đồ thị hàm số và các trục tọa độ là $\triangle OAB$ vuông tại O.

Vậy $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 2$ (đvdt).

□

Bài 6. Cho hàm số $y = |a-1|x$. Hãy xác định a biết:

① Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;3)$.

② Đồ thị hàm số đi qua điểm $B\left(-\frac{1}{2};8\right)$.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

✍ **Lời giải.**

① Vì điểm $A(1;3)$ thuộc đồ thị hàm số nên $3 = |a-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1=3 \\ a-1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2 \end{array}\right.$

Vậy hàm số có dạng $y = 3x$.

② Vì điểm $B(-\frac{1}{2};8)$ thuộc đồ thị hàm số nên: $8 = |a-1|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ vô nghiệm. Vậy không tồn tại a.

Học sinh tự vẽ đồ thị hàm số $y = 3x$, là đường thẳng đi qua $O(0;0)$ và $A(1;3)$. □

Bài 7. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

① $y = |x|$.

② $y = 2|x| - 1$.

③ $y = |x| + 2$.

④ $y = \left|\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right|$.

⑤ $y = \left|-\frac{x}{2} + 2\right|$.

✍ **Lời giải.**

Học sinh tham khảo ví dụ 7 □

Bài 8. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y)$ sao cho:

① $y < x + 2$.

② $y \leq -x + 1$.

③ $y \geq -2x + 2$.

④ $\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -2x + 4 \\ y \geq -x + 1 \end{cases}$

✍ **Lời giải.**

Học sinh tự vẽ hình.

① Thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = x + 2$.

Khi đó tập hợp các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $y < x + 2$ nằm phía dưới đồ thị hàm số.

② Thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = -x + 1$.

Khi đó, tập hợp các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $y \leq -x + 1$ nằm phía dưới đồ thị hàm số kể cả đồ thị hàm số.

③ Thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = -2x + 2$.

Khi đó, tập hợp các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $y \geq -2x + 2$ nằm phía trên đồ thị hàm số kể cả đồ thị hàm số.

④ Thực hiện vẽ các đồ thị hàm số $y = x$, $y = -2x + 4$, $y = -x + 1$.

Khi đó, tập hợp các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn hệ thuộc phần mặt phẳng giới hạn bởi ba đồ thị trên.

□

BÀI 4. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

① Hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ là:

- Song song với nhau nếu $a = a'$ và $b \neq b'$.
- Trùng nhau nếu $a = a'$ và $b = b'$.

② Đường thẳng cắt nhau

- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y' = a'x + b'$ cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.
- Đặc biệt nếu $a \neq a'$ và $b = b'$, chúng cắt nhau tại một điểm trên Oy.

③ Vị trí của hai đường thẳng trên mặt phẳng tọa độ
Cho hai đường thẳng $(d_1)\colon y = a_1x + b_1$, $(d_2)\colon y = a_2x + b_2$, ta có các kết quả sau:

- $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
- $(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$.
- $(d_1) \cap (d_2) = \{A\} \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.
- $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = ax + 2$

① Xác định a, biết đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -x$.

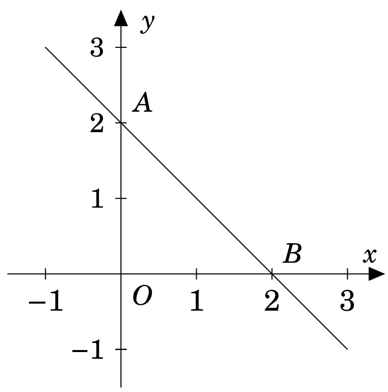
② Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong câu a). Tính diện tích tam giác được tạo bởi đồ thị hàm số trong câu a) và các trục tọa độ.

✍ **Lời giải.**

① Vì đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -x + 2$ nên $a = -1$.
Vậy hàm số có dạng $y = -x + 2$.

② Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy hai điểm $A(0;2)$ và $B(2;0)$.
Nối A và B ta được đồ thị cần vẽ. Khi đó ta có

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2.$$



Chú ý. Ta có các kết quả sau:

- Với điểm $A(0; y_A)$ thì $OA = |y_A|$.
- Với điểm $A(x_A; 0)$ thì $OA = |x_A|$.
- Với điểm $A(x_A; y_A)$ thì $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$.

□

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng $(d_1)\colon y = 2x + 1$, $(d_2)\colon y = x + 1$.

① Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định tọa độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục tọa độ.

② Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua I và song song với đường thẳng $y = -4x + 1$.

③ Lập phương trình đường thẳng (d') đi qua I và song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 9$.

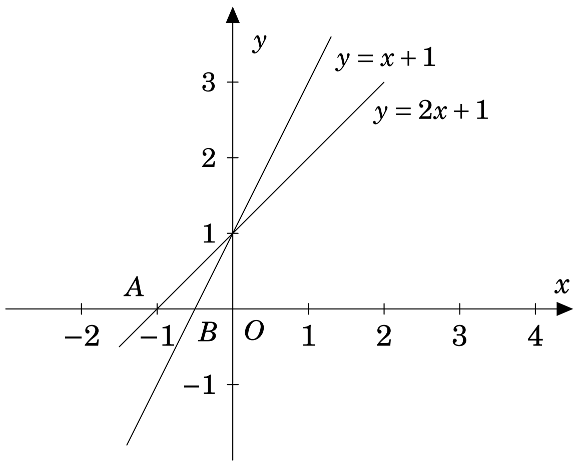
✍ **Lời giải.**

① Nhận xét rằng:

— Đường thẳng (d_1) có $a_1 = 2$ và $b_1 = 1$.

— Đường thẳng (d_2) có $a_2 = 1$ và $b_2 = 1$.

Suy ra $a_1 \neq a_2$ và $b_1 = b_2 \Rightarrow (d_1)$ cắt (d_2) cắt nhau tại điểm I trên Oy.
Giả sử giao điểm của hai đường thẳng có tọa độ $I(0; y_0)$ vì I thuộc (d_1) nên $y_0 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow I(0;1)$.



② Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = -4x + 1$, có phương trình $(d)\colon y = -4x + b$.
Vì $I \in (d)$ nên $1 = -4 \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 1$.
Vậy phương trình đường thẳng $(d)\colon y = -4x + 1$.

③ Đường thẳng (d') song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 9$ có phương trình $(d')\colon y = \frac{1}{2}x + b$, với $b \neq 9$.
Vì $I \in d'$ nên $1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 1$.
Vậy phương trình đường thẳng $(d')\colon y = \frac{1}{2}x + 1$.

Nhận xét. *Trong lời giải của ví dụ trên*

— *Ở câu a) dựa trên nhận xét (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm I trên Oy nên ta mới giả sử $I(0; y_0)$. Trong trường hợp tổng quát với hai đường thẳng $(d_1)\colon y = a_1x + b_1$, $(d_2)\colon y = a_2x + b_2$ với $(a_1 \neq a_2)$, ta giả sử tọa độ giao điểm $I(x_0; y_0)$ rồi nhận xét:*

- $I \in (d_1) \Rightarrow y_0 = a_1x_0 + b_1 \qquad (1).$
- $I \in (d_2) \Rightarrow y_0 = a_2x_0 + b_2 \qquad (2).$

Từ (1) *và* (2) *suy ra*

$$a_1x_0 + b_1 = a_2x_0 + b_2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.$$

Thay x_0 vào (1) *hoặc* (2) *(tùy theo việc thay nào dễ hơn) ta nhận được giá trị của y_0, từ đó suy ra tọa độ điểm I.*

— *Ở câu b) và câu c), ta có thể khẳng định được $b = 1$ thông qua nhận định "Đường hẳng (d) và (d') luôn cắt (d_1) tại điểm I thuộc Oy".*

□

Ví dụ 3. Cho đường thẳng $(\Delta)\colon y = x + 6$. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và

① Đi qua điểm $M(1;2)$.

② Khoảng cách từ O đến (d) bằng $2\sqrt{2}$.

✍ Lời giải.

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng Δ có phương trình $(d)\colon y = x + b$.

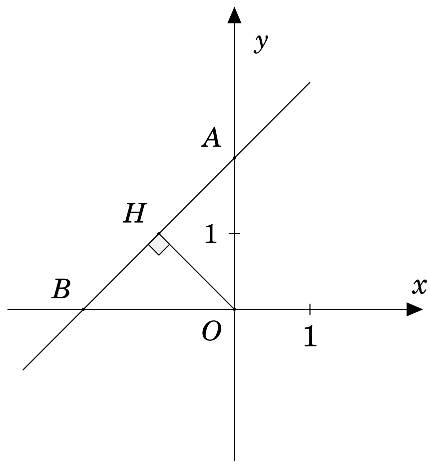
① Vì $M(1;2) \in (d)$ nên $2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.
Vậy ta được phương trình đường thẳng $(d)\colon y = x + 1$.

② Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó $A(0;b)$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = x + b \Leftrightarrow x = -b$, do đó $B(-b;0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).
Trong $\triangle OAB$ vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA \cdot OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{|b| \cdot |-b|}{\sqrt{b^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow |b| = 4 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$



Khi đó

- Với $b = 4$, ta được đường thẳng $(d_3)\colon y = x + 4$
- Với $b = -4$, ta được đường thẳng $(d_4)\colon y = x - 4$.

Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét. *Qua lời giải của ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả "Mọi đường thẳng song song với đường thẳng $y = ax + m$ luôn có phương trình $y = ax + b$". Khi đó, để xác định phương trình đường thẳng chúng ta chỉ cần xác định b.*

□

Ví dụ 4. Lập phương trình đường thẳng (d) biết (d) đi qua điểm $M(1;2)$ và chắn trên hai trục tọa độ những đoạn bằng nhau.

✍ Lời giải.

Đường thẳng (d) có phương trình $(d)\colon y = ax + b$.
Vì $M(1,2)$ thuộc (d) nên $2 = a + b \Leftrightarrow a = 2 - b$. (1)
Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được $A(0;b)$ và $B\left(-\frac{b}{a};0\right)$.
Với điều kiện $OA = OB$ suy ra

$$|b| = \left|-\frac{b}{a}\right| \Leftrightarrow |b| = \left|\frac{b}{b-2}\right| \Leftrightarrow |b(b-2)| = |b|$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - 2b = b \\ b^2 - 2b = -b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - 3b = 0 \\ b^2 - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 3 \\ b = 1. \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $b = 0$ thay vào (1) suy ra $a = 2$, ta được phương trình đường thẳng $(d_1)\colon y = 2x$.
- Với $b = 3$ thay vào (1) suy ra $a = -1$, ta được phương trình đường thẳng $(d_2)\colon y = -x + 3$.

— Với $b=1$ thay vào (1) suy ra $a=1$, ta được phương trình đường thẳng $(d_3)\colon y=x+1$.

Vậy tồn tại ba đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) thỏa mãn điều kiện đề bài.

Tổng quát

Cho điểm $A(x_0;y_0)$, ta dễ dàng chứng minh được rằng mọi đường thẳng (d) đi qua A luôn có phương trình $(d)\colon y=a(x-x_0)+y_0$. □

Ví dụ 5. Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình $(d_m)\colon y=-\dfrac{m-1}{2m-3}x+\dfrac{m+1}{2m-3}$.

1) Xác định m để

(a) (d_m) đi qua $A(2;1)$.

(b) (d_m) có hướng đi lên (hàm số đồng biến).

(c) (d_m) song song với đường thẳng $(\triangle)\colon x-2y+12=0$.

2) Tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.

✍ **Lời giải.**

Viết lại phương trình họ đường thẳng (d_m) dưới dạng $(d_m)\colon (m-1)x+(2m-3)y-m-1=0$.

1) Ta lần lượt có

(a) (d_m) đi qua $A(2;1)$ khi và chỉ khi $2(m-1)+(2m-3)-m-1=0$.

(b) (d_m) có hướng đi lên khi và chỉ khi nó có hệ số góc dương

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad -\frac{m-1}{2m-3}>0\Leftrightarrow\frac{m-1}{2m-3}<0\\
&\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1>0\\2m-3<0\end{cases}\\ \begin{cases}m-1<0\\2m-3>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>1\\m<\frac{3}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}m<1\\m>\frac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\quad 1<m<\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(c) (d_m) song song với đường thẳng (Δ) khi và chỉ khi $-\dfrac{m-1}{2m-3}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{4}$.

2) Giả sử $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua, khi đó, với $\forall m$ thì

$$\begin{aligned}
&(m-1)x_0+(2m-3)y_0-m-1=0\\
\Leftrightarrow\quad&(x_0+2y_0-1)m-x_0-3y_0-1=0\\
\Leftrightarrow\quad&\begin{cases}x_0+2y_0-1=0\\x_0+3y_0+1=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\quad&\begin{cases}x_0=5\\y_0=-2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy (d_m) luôn đi qua điểm cố định là $M(5;-2)$.

Chú ý: Với bài toán về sự đồng quy của ba đường thẳng $(d_1)\colon y=a_1x+b_1$; $(d_2)\colon y=a_2x+b_2$ và $(d_3)\colon y=a_3x+b_3$ ta thực hiện theo các bước sau

— **Bước 1.** Xác định tọa độ giao điểm I của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

— **Bước 2.** Với yêu cầu

- Để chứng minh ba đường thẳng (d_1); (d_2) và (d_3) đồng quy, ta đi chứng minh $I\in(d_3)$.
- Để nhận được giá trị của tham số để ba đường thẳng đồng quy ta thiết lập điều kiện $I\in(d_3)$.

□

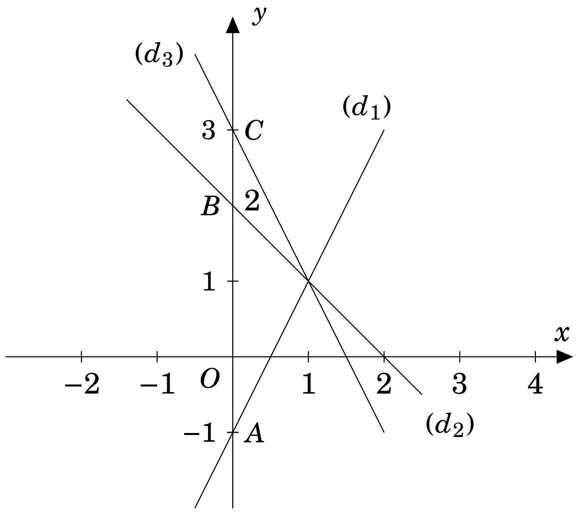
Ví dụ 6. Cho ba đường thẳng $(d_1)\colon y = 2x-1$, $(d_2)\colon y = 2-x$; $(d_3)\colon y = ax+1$. Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục tọa độ.

Lời giải.

Giả sử giao điểm I của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có tọa độ $I(x_0;y_0)$.
Khi đó

- Vì I thuộc (d_1) nên $y_0 = 2x_0 - 1$. (1)
- Vì I thuộc (d_2) nên $y_0 = -x_0 + 2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2x_0 - 1 = -x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$.
Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm $I(1;1)$.
Để ba đường thẳng (d_1), (d_2) và (d_3) đồng quy thì $I(1;1) \in (d_3) \Rightarrow 1 = a+3 \Leftrightarrow a = -2$.
Vậy với $a = -2$ thì (d_1), (d_2) và (d_3) đồng quy, khi đó đường thẳng (d_3) có phương trình $(d_3)\colon y = -2x+3$.
Vẽ đồ thị



- Để vẽ đồ thị của (d_1) ta lấy thêm điểm $A(0;-1)$.
- Để vẽ đồ thị của (d_2) ta lấy thêm điểm $B(0;2)$.
- Để vẽ đồ thị của (d_3) ta lấy thêm điểm $C(0;3)$.

□

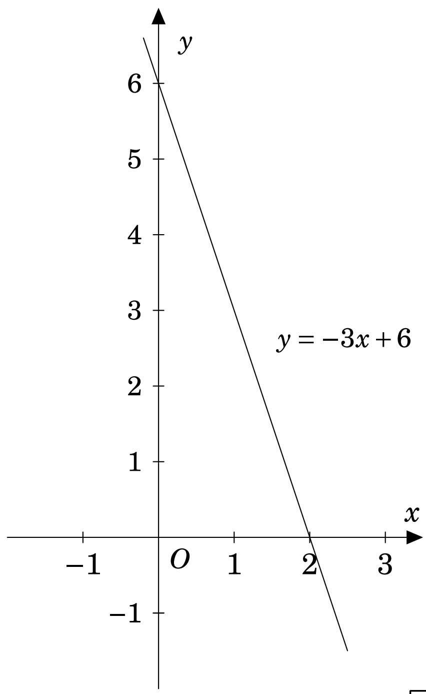
C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(\Delta)\colon y = -3x$ và đi qua điểm $M(1;3)$. Vẽ đồ thị của (d).

Lời giải.

① Vì (d) song song với (Δ) nên có phương trình $(d)\colon y = -3x+b$.
Vì $M(1;3) \in (d)$ nên $3 = -3\cdot 1 + b \Rightarrow b = 6$.
Vậy phương trình đường thẳng $(d)\colon y = -3x+6$.

② Vẽ đồ thị của (d), ta lựa chọn hai điểm $A(0;6)$ và $B(2;0)$ thuộc (d).
Nối A và B ta được đồ thị của (d).



□

Bài 2. Cho đường thẳng $(\Delta)\colon y = -x+2$. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và

① Đi qua điểm $M(1;-2)$.

② Chắn trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

③ Khoảng cách từ O đến (d) bằng $9\sqrt{2}$.

✍ Lời giải.

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) nên có phương trình $(d)\colon y = -x + b$.

① Vì $M(1;-2) \in (d)$ nên $-2 = -1 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$.
Vậy phương trình đường thẳng $(d)\colon y = -x - 1$.

② Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục tọa độ Oy, Ox, ta được

— Với điểm A, $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó điểm A có tọa độ $(0;b)$.

— Với điểm B, $y = 0 \Rightarrow 0 = -x + b \Rightarrow x = b$, do đó điểm B có tọa độ $(b;0)$.

Diện tích $\triangle AOB$ được tính bởi công thức

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2} \cdot |b| \cdot |b| = \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$

Khi đó

— Với $b = 4$, ta được đường thẳng $(d_1)\colon y = -x + 4$.

— Với $b = -4$, ta được đường thẳng $(d_2)\colon y = -x - 4$.

Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

③ Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục tọa độ Oy, Ox, ta được

— Với điểm A, $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó điểm A có tọa độ $(0;b)$.

— Với điểm B, $y = 0 \Rightarrow 0 = -x + b \Rightarrow x = b$, do đó điểm B có tọa độ $(b;0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).
Trong $\triangle OAB$ vuông tại O, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} &\Leftrightarrow OH = \frac{OA \cdot OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} \\
&\Leftrightarrow 9\sqrt{2} = \frac{|b| \cdot |-b|}{\sqrt{b^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow |b| = 18 \Leftrightarrow b = \pm 18.
\end{aligned}$$

Khi đó

— Với $b = 18$, ta được đường thẳng $(d_3)\colon y = -x + 18$

— Với $b = -18$, ta được đường thẳng $(d_4)\colon y = -x - 18$.

Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thỏa mãn điều kiện đề bài.

□

Bài 3. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) biết

① $(d_1)\colon x + y + 1 = 0$ và $(d_2)\colon 2x + 2y + 3 = 0$.

② $(d_1)\colon 3x - y + 1 = 0$ và $(d_2)\colon 4x - y + 1 = 0$.

③ $(d_1)\colon x+2y+1=0$ và $(d_2)\colon x+4y+3=0$.

④ $(d_1)\colon 2x+3y+1=0$ và $(d_2)\colon 4x+6y+2=0$.

Trong trường hợp cắt nhau, hãy tìm tọa độ giao điểm.

✍ **Lời giải.**

① Ta có $(d_1)\colon y=-x-1$ và $(d_2)\colon y=-x-\dfrac{3}{2}$ suy ra $(d_1)\parallel(d_2)$ vì $a=a'$ và $b\neq b'$.

② Ta có $(d_1)\colon y=3x+1$ và $(d_2)\colon y=4x+1$ suy ra (d_1) cắt (d_2) vì $a\neq a'$.

③ Ta có $(d_1)\colon y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ và $(d_2)\colon y=\dfrac{-1}{4}x-\dfrac{3}{4}$ suy ra (d_1) cắt (d_2) vì $a\neq a'$.

④ Ta có $(d_1)\colon y=\dfrac{-2}{3}x-\dfrac{1}{3}$ và $(d_2)\colon y=\dfrac{-2}{3}x-\dfrac{1}{3}$ suy ra (d_1) trùng (d_2) vì $a=a', b=b'$.

□

Bài 4. Cho hai đường thẳng $(d_1)\colon y=2x-1$ và $(d_2)\colon y=-x+2$.

① Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định tọa độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục tọa độ.

② Lập phương trình đường thẳng (d') đi qua I và song song với đường thẳng $y=5x+7$.

✍ **Lời giải.**

① Nhận xét rằng

— Đường thẳng (d_1) có $a_1=2$ và $b_1=-1$.

— Đường thẳng (d_2) có $a_2=-1$ và $b_2=2$.

Suy ra $a_1\neq a_2$ và $b_1\neq b_2 \Rightarrow (d_1)$ và (d_2) cắt nhau tại điểm I.
Giả sử giao điểm của hai đường thẳng có tọa độ $I(x_0;y_0)$, khi đó

— Vì I thuộc (d_1) nên $y_0=2x_0-1$. (1)

— Vì I thuộc (d_2) nên $y_0=-x_0+2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2x_0-1=-x_0+2 \Leftrightarrow x_0=1 \Rightarrow y_0=1$.

② Đường thẳng (d') song song với đường thẳng $y=5x+7$, có phương trình $(d')\colon y=5x+b$, với $b\neq 7$.
Vì I thuộc đường thẳng (d') nên $1=5\cdot 1+b \Rightarrow b=-4$.
Vậy phương trình đường thẳng $(d')\colon y=5x-4$.

□

Bài 5. Cho hai đường thẳng $(d_1)\colon y=kx+k$ và $(d_2)\colon y=\dfrac{k^2-1}{2k}x+\dfrac{k^2+1}{2k}$, với $k\neq 0$.

① Chứng minh rằng khi k thay đổi (d_1) luôn đi qua một điểm cố định.

② Với mỗi giá trị của $k\neq 0$, hãy xác định giao điểm I của (d_1) và (d_2).

✍ **Lời giải.**

① Giả sử (d_1) đi qua điểm cố định $M(x_0;y_0)$, khi đó $y_0 = kx_0 + k$ với mọi k.

$$\Leftrightarrow k(x_0+1) - y_0 = 0 \quad \forall k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Vậy đường thẳng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định $M(-1;0)$.

② Giao điểm I có tọa độ $\left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2}; \dfrac{2k}{1+k^2}\right)$

□

Bài 6. Cho ba đường thẳng (d_1): $y = 2x+3$, (d_2): $y = 3x+2$ và (d_3): $y = ax + a + 3$. Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục tọa độ.

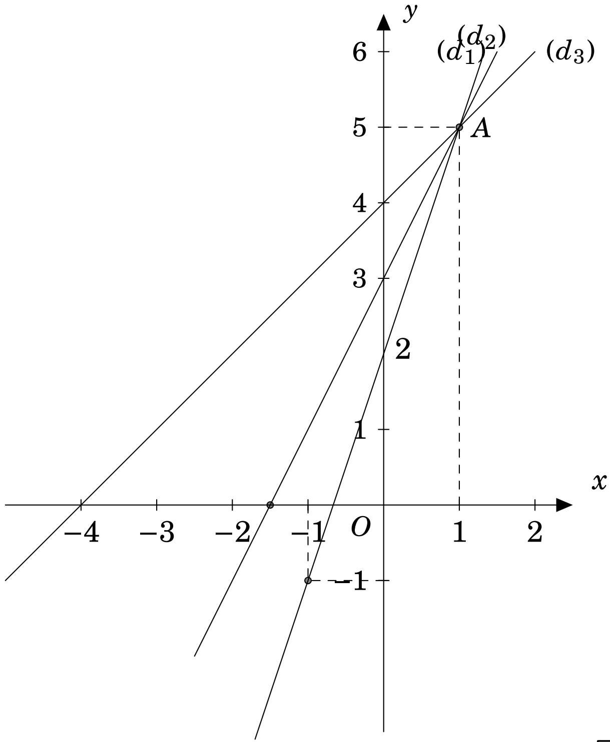
✍ **Lời giải.**

Xác định giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là $A(1;5)$.

Để ba đường thẳng đồng quy thì (d_3) đi qua A.

Thay tọa độ của A vào phương trình đường thẳng (d_3) ta được

$$5 = a \cdot 1 + a + 3 = 2a + 3 \Leftrightarrow a = 1.$$



□

BÀI 5. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc a và

— Nếu $a > 0$ thì $\alpha < 90^\circ$.

— Nếu $a < 0$ thì $\alpha > 90^\circ$ (khi đó $\alpha = 180^\circ - \widehat{ABO}$).

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Ví dụ 1. Cho đường thẳng (d): $y = x + 8$.

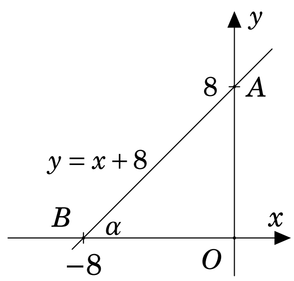
① Vẽ đường thẳng (d).

② Tính hệ số góc của đường thẳng (d).

Lời giải.

① Ta lấy hai điểm thuộc (d) là $A(0;8)$ và $B(-8;0)$.
Nối A và B ta nhận được đồ thị của (d).

② Ta có ngay, đường thẳng (d) có hệ số bằng 1.



□

Ví dụ 2. Cho hai điểm $A(3;2)$ và $B(5;8)$ thuộc đường thẳng (d).

① Tính hệ số góc của đường thẳng (d).

② Xác định đường thẳng (d) đó.

Lời giải.

① Giả sử phương trình của đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$.
Ta có

— $A(3;2) \in (d) \Rightarrow 2 = 3a + b$ (1).

— $B(5;8) \in (d) \Rightarrow 8 = 5a + b$ (2).

Lấy (1) trừ (2) suy ra: $2a = 6 \Rightarrow a = 3$.
Vậy hệ số góc của (d) bằng 3.

② Thay $a = 3$ vào (1) ta được $3 \cdot 3 + b = 2 \Leftrightarrow b = -7$.
Vậy phương trình đường thẳng (d): $y = 3x - 7$.
Tổng quát. Cho hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thuộc đường thẳng (d), trong đó $x_1 \neq x_2$.
Ta dễ dàng chứng minh được

— Hệ số góc của đường thẳng (d) là: $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

— Phương trình (d) được xác định bởi công thức: $\dfrac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $(*)$.

Trong nhiều bài toán việc sử dụng công thức $(*)$ để xác định đường thẳng (d) dễ dàng hơn nhiều.

□

2 LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG BIẾT HỆ SỐ GÓC

Phương pháp.

Ta ghi nhận kết quả: "Mọi đường thẳng có hệ số góc k luôn có phương trình $y = kx + b$".
Khi đó để xác định phương trình đường thẳng ta chỉ cần xác định b.

Ví dụ 3. Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ và

① Đi qua điểm $M(-1;-1)$.

② Chắn trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 24.

Lời giải.

Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ có phương trình là $y = \frac{4}{3}x + b$.

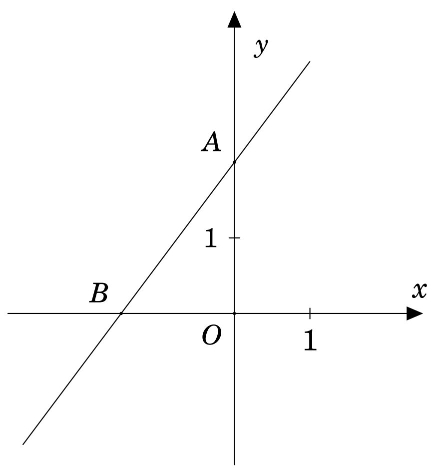
① Vì $M(-1;-1)$ thuộc (d) nên $-1 = \frac{4}{3}\cdot(-1) + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, ta được $(d)\colon\ y = \frac{4}{3}x + 1$

② Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox ta được

— Với điểm A, $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}\cdot 0 + b = b$, do đó $A(0;b)$.

— Với điểm B, $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4}{3}\cdot x + b \Leftrightarrow x = \frac{-3b}{4}$, do đó $B\left(\frac{-3b}{4};0\right)$.



Diện tích $\triangle OAB$ được cho bởi

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB \Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2}\cdot|b|\cdot\left|\frac{-3b}{4}\right| = \frac{3b^2}{8}$$
$$\Leftrightarrow b^2 = 64 \Leftrightarrow b = \pm 8.$$

Khi đó

— Với $b = 8$, ta được đường thẳng $(d_1)\colon\ y = \frac{4}{3}x + 8$.

— Với $b = -8$, ta được đường thẳng $(d_2)\colon\ y = \frac{4}{3}x - 8$.

Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thỏa mãn bài toán.

□

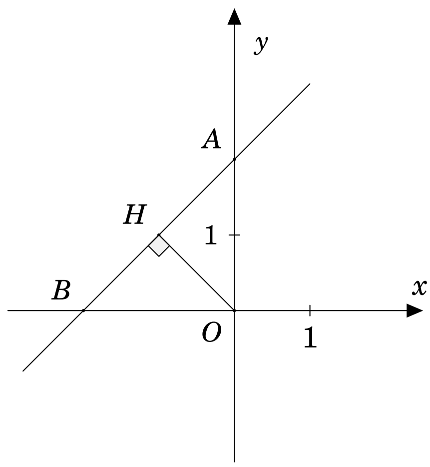
Ví dụ 4. Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ và khoảng cách từ O đến (d) bằng $\frac{12}{5}$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ có phương trình là $y = \frac{4}{3}x + b$.
Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox ta được

— Với điểm A, $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}\cdot 0 + b = b$, do đó $A(0;b)$.

— Với điểm B, $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4}{3}\cdot x + b \Leftrightarrow x = \frac{-3b}{4}$, do đó $B\left(\frac{-3b}{4};0\right)$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).
Trong $\triangle OAB$ vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH=\frac{OA\cdot OB}{\sqrt{OA^2+OB^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{5}=\frac{|b|\cdot\left|\dfrac{-3b}{4}\right|}{\sqrt{b^2+\left(\dfrac{-3b}{4}\right)^2}}=\frac{3|b|}{5}$$

$$\Leftrightarrow |b|=4 \Leftrightarrow b=\pm 4.$$

Khi đó

— Với $b=4$, ta được đường thẳng $(d_3)\colon\ y=\frac{4}{3}x+4$.

— Với $b=-4$, ta được đường thẳng $(d_4)\colon\ y=\frac{4}{3}x-4$.

Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thỏa mãn bài toán. □

Ví dụ 5. Lập phương trình đường thẳng (d) biết (d) cắt Ox, Oy theo thứ tự tại $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a,b\neq 0$.

✍ Lời giải.
Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng $y=kx+m$.

— Vì $B(0;b)$ thuộc (d) nên $b=k\cdot 0+m \Leftrightarrow b=m$.

— Vì $A(a;0)$ thuộc (d) nên $0=ka+m \Leftrightarrow ka=-m=-b \Leftrightarrow k=\frac{-b}{a}$.

Vậy phương trình (d) có dạng: $y=-\frac{b}{a}x+b \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Nhận xét. — *Qua lời giải của hai ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả "Mọi đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a,b\neq 0$ luôn có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$".*

— *Phương trình trên được gọi là phương trình đoạn chắn.*

□

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoa việc sử dụng phương trình đoạn chắn để giải toán.

Ví dụ 6. Trên mặt phẳng tọa độ, cho điểm $M(4;1)$. Một đường thẳng (d) luôn đi qua M cắt Ox, Oy theo thứ tự tại $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a,b>0$. Lập phương trình đường thẳng (d) sao cho

① Diện tích $\triangle OAB$ nhỏ nhất.

② $OA+OB$ nhỏ nhất.

③ $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

✍ Lời giải.
Từ giả thiết, ta được $(d)\colon \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
Vì $M(4;1)$ thuộc (d) nên $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1 \Leftrightarrow a=\frac{4b}{b-1}$, với $b>1$ $\quad(*)$.

① Diện tích $\triangle OAB$ được cho bởi $S = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \dfrac{ab}{2}$.
Từ $(*)$, sử dụng bất đẳng thức Cosi ta có

$$1 = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 16 \Leftrightarrow S \geq 8.$$

Suy ra, ta được $S_{\min} = 8$, đạt được khi $\dfrac{4}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2. \end{cases}$
Vậy phương trình đường thẳng (d) có dạng

$$(d)\colon \frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{-1}{4}x + 2.$$

② Ta có

$$\begin{aligned} OA + OB &= |a| + |b| = \frac{4b}{b-1} + b = \frac{4}{b-1} + b + 4 \\ &= \frac{4}{b-1} + b - 1 + 5 \geq 2\sqrt{\frac{4}{b-1} \cdot (b-1)} + 5 = 9. \end{aligned}$$

Suy ra, ta được $(OA + OB)_{\min} = 9$, đạt được khi

$$\frac{4}{b-1} = b - 1 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow b = 3, a = 6.$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) có dạng

$$(d)\colon \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}x + 3.$$

③ Ta có $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.
Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\left(4^2 + 1^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{17}.$$

Suy ra, ta được $\left(\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}\right)_{\min} = \dfrac{1}{17}$, đạt được khi

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \\ 4a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{17}{4} \\ b = 17 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) có dạng

$$(d)\colon \frac{x}{\frac{17}{4}} + \frac{y}{17} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{-1}{4}x + 17.$$

Chú ý. Sai lầm thường gặp của học sinh trong câu b) là dùng lập luận:

$$OA + OB = a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 8.$$

Khi đó $(OA + OB)_{\min} = 8$ đạt được khi $a = b = 5$.

□

Ví dụ 7.

① Lập phương trình được thẳng (d) đi qua điểm $A(-5;5)$ sao cho (d) tạo với tia Ox một góc α có $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

② Tìm trên đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_M;y_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

✍ Lời giải.

① Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$.

— (d) tạo với tia Ox một góc α có $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ nên $a = \tan\alpha = \frac{1}{2}$.

— Vì $A(-5;5)$ thuộc (d) nên $5 = a\cdot(-5) + b = \frac{1}{2}\cdot(-5) + b \Leftrightarrow b = \frac{15}{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) có dạng $(d)\colon\ y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$.

② Vì $M(x_M;y_M)$ thuộc (d) nên $y_M = \frac{1}{2}x_M + \frac{15}{2} \Leftrightarrow x_M = 2y_M - 15$. Khi đó

$$\begin{aligned} x_M^2 + y_M^2 &= (2y_M - 15)^2 + y_M^2 \\ &= 5y_M^2 - 60y_M + 225 \\ &= 5(y_M - 6)^2 + 45 \geq 45. \end{aligned}$$

Suy ra, ta được $\left(x_M^2 + y_M^2\right)_{\min} = 45$ đạt được khi: $y_M = 6 \Rightarrow x_M = 2\cdot 6 - 15 = -3$.

Vậy ta tìm được $M(-3;6)$.

Nhận xét. *Trong lời giải của ví dụ trên*

— *Ở câu a), ta sử dụng kết quả " Nếu đường thẳng $(d)\colon\ y = ax + b$ tạo với tia Ox một góc α có $\tan\alpha = a$".*

— *Điểm M được tìm trong câu b) chính là tọa độ hình chiếu vuông góc của O lên (d).*

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Lập phương trình đường thẳng (d) , biết (d)

① đi qua điểm $M(1;2)$ có hệ số góc bằng 3.

② đi qua điểm $A(-3;2)$ và tạo với tia Ox một góc 45°.

③ đi qua điểm $B(3;2)$ và tạo với tia Ox một góc 60°.

✍ Lời giải.

Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$.

① Vì đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 nên $a = 3$.
Vì điểm $M(1;2)$ thuộc (d) nên $2 = a\cdot 1 + b = 3\cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -1$.
Vậy phương trình đường thẳng $(d)\colon\ y = 3x - 1$.

② Đường thẳng (d) tạo với tia tia Ox một góc 45° nên $a = \tan 45^\circ = 1$.
Vì điểm $A(-3;2)$ thuộc điểm (d) nên $2 = a\cdot(-3) + b = 1\cdot(-3) + b \Leftrightarrow b = 5$.
Vậy, phương trình đường thẳng $(d)\colon\ y = x + 5$.

③ Ta xét hai trường hợp

— **Trường hợp 1.** Đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc $60°$, ta được

$$a = \tan 60° = \sqrt{3}.$$

Vì điểm $B(3;2)$thuộc điểm (d) nên $2 = a \cdot 3 + b = \sqrt{3} \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 2 - 3\sqrt{3}$.
Vậy, phương trình đường thẳng $(d_1)\colon y = \sqrt{3} \cdot x + 2 - 3\sqrt{3}$.

— **Trường hợp2.** Đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc $60°$, ta được

$$a = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$

Vì điểm $B(3;2)$ thuộc điểm (d) nên

$$2 = a \cdot 3 + b = -\sqrt{3} \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 2 + 3\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình đường thẳng $(d_2)\colon y = -\sqrt{3} \cdot x + 2 + 3\sqrt{3}$.

Kết luận, có hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thỏa mãn điều kiện đề bài.

□

Bài 2. Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\dfrac{-4}{3}$ và

① Đi qua điểm $M(1;-1)$.

② Chắn hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 54.

③ Khoảng cách từ O đến (d) bằng $\dfrac{3}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\dfrac{-4}{3}$ có phương trình là $(d)\colon y = \dfrac{-4}{3}x + b$.

① Vì điểm $M(1;-1)$ thuộc (d) nên $-1 = -\dfrac{4}{3}1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, phương trình đường thẳng $(d)\colon y = -\dfrac{4}{3}x + 1$.

② Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Ox, Oy, ta được

— Với điểm A, $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{4}{3} \cdot 0 + b = b$, do đó $A(0;b)$

— Vơi điểm B, $y = 0 \Rightarrow 0 = -\dfrac{4}{3} \cdot x + b \Leftrightarrow x = \dfrac{3b}{4}$, do đó $B\left(\dfrac{3b}{4};0\right)$.

Diện tích $\triangle OAB$ được cho bởi

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |b| \cdot \left|\frac{3b}{4}\right| = \frac{3b^2}{8} \Leftrightarrow b^2 = 144 \Leftrightarrow b = \pm 12.$$

Khi đó

— Với $b = 12$, ta được đường thẳng $(d_1)\colon y = -\dfrac{4}{3}x + 12$.

— Với $b = -12$, ta được đường thẳng $(d_1)\colon y = -\dfrac{4}{3}x - 12$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thỏa mãn điều kiện đề bài.

③ Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Ox, Oy, ta được

— Với điểm A, $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}\cdot 0 + b = b$, do đó $A(0;b)$.

— Với điểm B, $y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}\cdot x + b \Leftrightarrow x = \frac{3b}{4}$, do đó $B\left(\frac{3b}{4};0\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong $\triangle OAB$ vuông tại O, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \quad &\Leftrightarrow \quad OH = \frac{0A\cdot 0B}{\sqrt{OA^2+OB^2}}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{5} = \frac{|b|\cdot\left|\frac{3b}{4}\right|}{\sqrt{b^2+\left(\frac{3b}{4}\right)^2}} = \frac{3|b|}{5}\\ &\Leftrightarrow \quad |b| = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1.\end{aligned}$$

Khi đó

— Với $b = 1$, ta được đường thẳng (d_3): $y = -\frac{4}{3}x + 1$.

— Với $b = -1$, ta được đường thẳng (d_4): $y = -\frac{4}{3}x - 1$.

Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thỏa mãn bài toán.

□

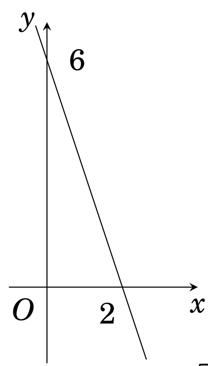
Bài 3. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = -3x$ và đi điểm $M(1;3)$. Vẽ đồ thị của (d).

✍ **Lời giải.**

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = -3x$ nên (d) có dạng $y = -3x + b$ $(b \neq 0)$.

Vì (d) đi qua điểm $M(1;3)$ nên $-3 + b = 3 \Leftrightarrow b = 6$.

Vậy (d): $y = -3x + 6$.



□

PHẦN

II

HÌNH HỌC

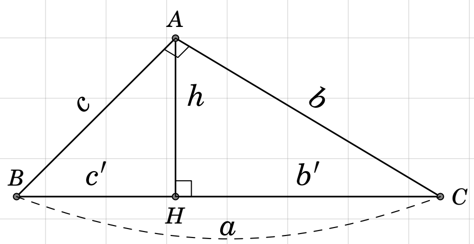
CHƯƠNG 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 HỆ THỨC GIỮA CẠNH GÓC VUÔNG VÀ HÌNH CHIẾU CỦA NÓ TRÊN CẠNH HUYỀN



Định lí 1. *Trong một tam giác vuông, bình phương của một cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.*

Như vậy, trong $\triangle ABC$ vuông tại A, ta nhận được

$$AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow c^2 = a \cdot c',$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = a \cdot b'.$$

2 MỘT SỐ HỆ THỨC LIÊN QUAN TỚI ĐƯỜNG CAO

Định lí 2. *Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.*

Như vậy, trong $\triangle ABC$ vuông tại A, ta nhận được

$$AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow h^2 = b' \cdot c'.$$

Định lí 3. *Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.*

Như vậy, trong $\triangle ABC$ vuông tại A, ta nhận được

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \Leftrightarrow b \cdot c = a \cdot h.$$

Định lí 4. *Trong một tam giác vuông, nghịch đảo bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.*

Như vậy, trong $\triangle ABC$ vuông tại A, ta nhận được

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 3\text{cm}, AC = 4\text{cm}, AH$ là đường cao. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, BH, CH, AH.

Lời giải.

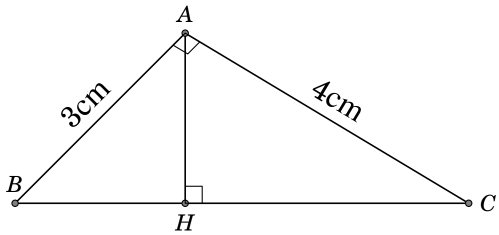
Ta lần lượt có

— $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5\text{cm}$.

— $BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{9}{5}\text{cm}$.

— $CH = \dfrac{AC^2}{BC} = \dfrac{16}{5}\text{cm}$.

— $AH = \sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{\dfrac{144}{25}} = \dfrac{12}{5}\text{cm}$.



□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, biết $BH = 3\text{cm}, CH = \dfrac{16}{3}\text{cm}$.

① Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.

② Tính độ dài AH.

Lời giải.

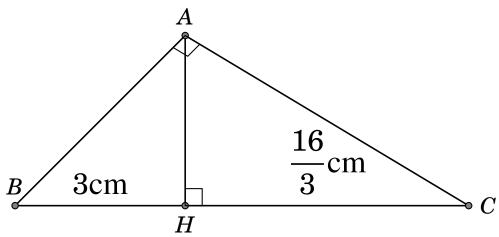
① — $BC = BH + CH = 3 + \dfrac{16}{3} = \dfrac{25}{3}\text{cm}$.

— $AB^2 = BH \cdot BC = 3 \cdot \dfrac{25}{3} = 25 \Leftrightarrow AB = 5\text{cm}$.

— $AC^2 = CH \cdot BC = \dfrac{16}{3} \cdot \dfrac{25}{3} = \dfrac{400}{9}$

$\Leftrightarrow AC = \dfrac{20}{3}\text{cm}$.

② $AH^2 = BH \cdot CH = 3 \cdot \dfrac{16}{3} = 16 \Leftrightarrow AH = 4\text{cm}$.



□

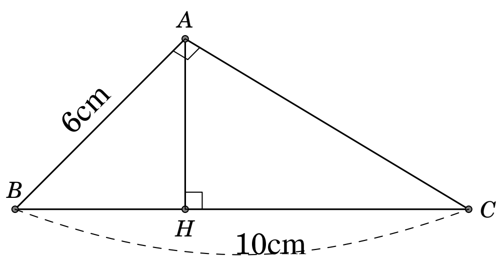
Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 6\text{cm}, BC = 10\text{cm}$. Tính độ dài đường cao AH.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{100 - 36} = 8\text{cm}$.

Suy ra $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{8^2} = \dfrac{255}{576}$

$\Leftrightarrow AH = \dfrac{5}{24}\text{cm}$.



□

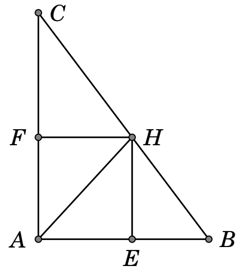
2 GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, AH là đường cao, H, F lần lượt là các đường cao của $\triangle AHB, \triangle AHC$. Chứng minh rằng

① $BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2$.

② $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.

✍ **Lời giải.**



① Ta có

$$\begin{aligned}3AH^2+BE^2+CF^2&=3AH^2+BH^2-HE^2+CH^2-HF^2\\&=3AH^2-EF^2+(BH+CH)^2-2HB\cdot HC\\&=2AH^2+BC^2-2AH^2=BC^2.\end{aligned}$$

② Trong $\triangle AHB$ ta có

$$BE=\frac{BH^2}{BA}\Rightarrow BE^2=\frac{BH^4}{BA^2}=\frac{BH^4}{BH\cdot BC}=\frac{BH^3}{BC}\qquad (1).$$

Trong $\triangle AHC$ ta có

$$CF=\frac{CH^2}{CA}\Rightarrow CF^2=\frac{CH^4}{CA^2}=\frac{CH^4}{CH\cdot BC}=\frac{CH^3}{BC}\qquad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sqrt[3]{BE^2}+\sqrt[3]{CF^2}=\frac{BH}{\sqrt[3]{BC}}+\frac{CH}{\sqrt[3]{BC}}=\frac{BC}{\sqrt[3]{BC}}=\sqrt[3]{BC^2}.$$

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$, biết $S=\frac{1}{4}\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)$ (1). Chứng minh $\triangle ABC$ vuông.

✍ **Lời giải.**

Sử dụng công thức Hêrông, ta có

$$\begin{aligned}(1)\Leftrightarrow\ &\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=\frac{1}{4}\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\\\Leftrightarrow\ &\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=(p-c)\cdot(p-b)\\\Leftrightarrow\ &p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)=(p-c)^2\cdot(p-b)^2\\\Leftrightarrow\ &p\cdot(p-a)=(p-c)\cdot(p-b)\\\Leftrightarrow\ &(a+b+c)\cdot(b+c-a)=(a+b-c)\cdot(a+c-b)\\\Leftrightarrow\ &a^2+b^2=c^2.\end{aligned}$$

□

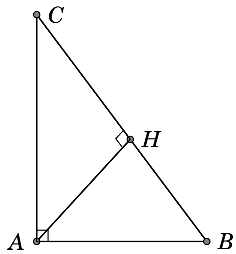
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB=15, AC=20$, AH là đường cao.

① Tính BC. ② Tính BH. ③ Tính CH. ④ Tính AH.

✍ **Lời giải.**

Trong $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có:



① $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=25$.

② $AB^2=BC\cdot BH\Rightarrow BH=\dfrac{AB^2}{BC}=9$.

③ $AC^2=BC\cdot CH\Rightarrow CH=\dfrac{AC^2}{BC}=16$.

④ $AC\cdot AB=AH\cdot BC\Rightarrow AH=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=12$.

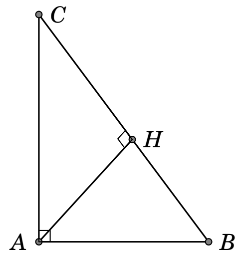
□

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB<AC$, biết rằng đường cao $AH=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$cm, $BC=\sqrt{13}$cm.

① Tính AB. ② Tính AC. ③ Tính HB. ④ Tính HC.

✍ **Lời giải.**

Gọi độ dài các cạnh AB, AC $(AB < AC)$ lần lượt là x, y với $x > y > 0$.



Khi đó ta có hệ $\begin{cases} AH\cdot BC = AB\cdot AC \\ \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 6 & (1) \\ \dfrac{x^2+y^2}{(xy)^2} = \dfrac{13}{36} & (2) \end{cases}$

Giải hệ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} x = AB = 2 \\ y = AC = 3. \end{cases}$

Do đó

— $AB^2 = BC\cdot BH \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{9}{\sqrt{13}}$cm.

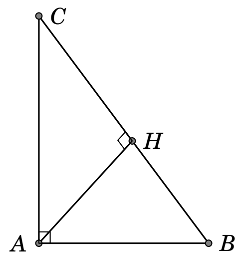
— $AC^2 = BC\cdot CH \Rightarrow CH = \dfrac{AC^2}{BC} = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$cm.

□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $\tan C = \dfrac{3}{4}$ và đường cao $AH = 12$cm.

① Tính BH. ② Tính CH. ③ Tính AB. ④ Tính AC.

✍ **Lời giải.**



① $\tan C = \cot B = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow BH = AH\cdot \tan C = 9$cm.

② $\tan C = \dfrac{AH}{CH} \Rightarrow CH = \dfrac{AH}{\tan C} = 16$cm.

③ $AB^2 = BC\cdot BH = (9+16)\cdot 9 = 144 \Rightarrow AB = 12$cm.

④ $AC^2 = BC\cdot CH = (9+16)\cdot 16 = 400 \Rightarrow AC = 20$cm.

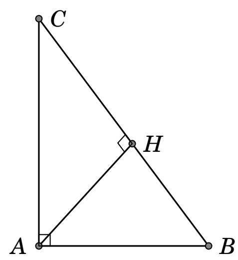
□

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, biết $BH = 1\text{cm}, AC = 2\sqrt{5}$cm.

① Tính BC. ② Tính AB. ③ Tính AH.

✍ **Lời giải.**

Gọi độ dài cạnh CH là x với $x > 0$.



Khi đó ta có $AC^2 = CH\cdot BC \Leftrightarrow x(x+1) = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \text{ (nhận)} \\ x = -5 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$.

Do vậy $BC = BH + CH = 5$cm.

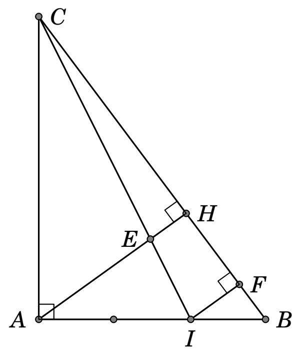
— $AB^2 = BH\cdot BC = 5 \Rightarrow AB = \sqrt{5}$cm.

— $AH\cdot BC = AB\cdot AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB\cdot AC}{BC} = 2$cm.

□

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 3\text{cm}, AC = 4$cm, đường cao AH. Điểm I thuộc cạnh AB sao cho $IA = 2IB$, CI cắt AH tại E. Tính độ dài cạnh CE.

✍ **Lời giải.**



Trong $\triangle ABC$ vuông tại A ta có

— $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5\text{cm}$, $CI=\sqrt{CA^2+AI^2}=2\sqrt{5}\text{cm}$.

— $CH=\dfrac{AC^2}{BC}=\dfrac{16}{5}\text{cm}$, $BH=\dfrac{AB^2}{BC}=\dfrac{9}{5}\text{cm}$

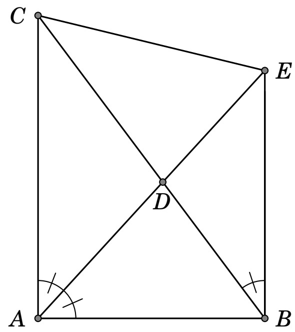
— $AH\cdot BC=AB\cdot AC\Rightarrow AH=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{12}{5}\text{cm}$

— Kẻ $IF\perp BC\Rightarrow IF\parallel AH$.
$\Rightarrow \triangle BFI\sim\triangle BHA$ nên $\dfrac{BI}{BA}=\dfrac{BF}{BH}\Rightarrow BF=\dfrac{1}{3}\cdot BH=\dfrac{9}{15}\text{cm}$.

$\Rightarrow \triangle CHE\sim\triangle CFI$ nên $\dfrac{CE}{CI}=\dfrac{CH}{CF}\Rightarrow CE=\dfrac{CH\cdot CI}{CF}=\dfrac{CH\cdot CI}{BC-BF}=\dfrac{16\sqrt{5}}{11}\text{cm}$. □

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, AD là đường phân giác trong của góc A, khẳng định $AD=\dfrac{\sqrt{2}}{b+c}\cdot bc$ là đúng hay sai?

✍ **Lời giải.**



Vì AD là đường phân giác của góc A nên

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{DB}{DB+DC}=\frac{AB}{AB+AC}$$
$$\Rightarrow DB=\frac{a\cdot c}{b+c}\text{ và } DC=\frac{a\cdot b}{b+c}.$$

Ta phải chứng minh $AD^2=AB\cdot AC-DB\cdot DC$.

Thật vậy, trên tia đối AD lấy E sao cho $\widehat{CBE}=\widehat{DAC}=\widehat{DAB}$

$\Rightarrow \triangle CED\sim\triangle ABD$ (g.g) suy ra $DB\cdot DC=AD\cdot DE$ và $\widehat{ABD}=\widehat{AEC}$

$\Rightarrow \triangle ABD\sim\triangle AEC$ (g.g) suy ra $AB\cdot AC=AD\cdot AE$

Do đó $AB\cdot AC-DB\cdot DC=AD(AE-DE)=AD^2$

Khi đó

$$\begin{aligned}AD^2&=AB\cdot AC-DB\cdot DC\\&=bc-\left(\frac{ac}{b+c}\right)\cdot\left(\frac{ab}{b+c}\right)\\&=bc\cdot\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)\\&=bc\left(\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{(b+c)^2}\right).\end{aligned}$$

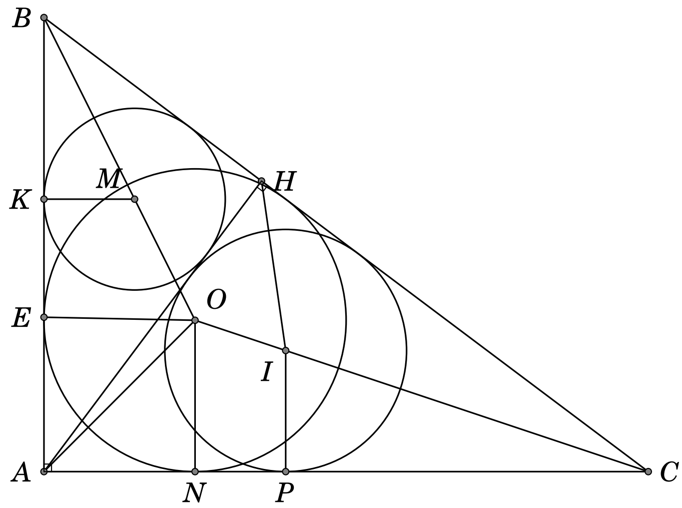
Theo giả thiết $\triangle ABC$ vuông tại A nên $b^2+c^2=a^2$.

Do đó $AD^2=\dfrac{2b^2c^2}{(b+c)^2}\Rightarrow AD=\dfrac{\sqrt{2}}{b+c}bc$. □

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, r,r_1,r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC, AHB, AHC. Chứng minh rằng

① $r_1=r\cdot\dfrac{c}{a}$ và $r_2=r\cdot\dfrac{b}{a}$.   ② $r_1^2+r_2^2=r^2$.

✍ **Lời giải.**



a) • $\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{ON}{OC} = \dfrac{IP}{IC} \Rightarrow \dfrac{r}{OC} = \dfrac{r_2}{IC} \Rightarrow r_2 = r\cdot\dfrac{IC}{OC}$. (1)

• $\triangle CHI \sim \triangle CAO \Rightarrow \dfrac{IC}{OC} = \dfrac{HC}{AC}$. (2)

• $\triangle HAC \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$. (3)

• Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $r_2 = r\cdot\dfrac{AC}{BC} = r\cdot\dfrac{b}{a}$.

• Hoàn toàn tương tự suy ra $r_1 = r\cdot\dfrac{MK}{OE} = r\cdot\dfrac{c}{a}$.

b) Ta có $r_1^2 + r_2^2 = r^2\left(\dfrac{b^2+c^2}{a^2}\right) = r^2$.

□

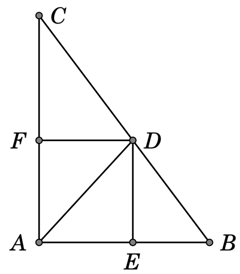
Bài 8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, D là hình chiếu của A trên BC, E và F lần lượt là hình chiếu của D xuống AB và AC. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

① $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = \dfrac{DB}{DC}$. ② $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3 = \dfrac{BE}{CF}$.

③ $AD^3 = BC\cdot EB\cdot CF$.

✍ **Lời giải.**

Tất cả các khẳng định trên đều đúng vì:



① $\begin{cases} AB^2 = DB\cdot BC \\ AC^2 = DC\cdot BC \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{DB\cdot BC}{DC\cdot BC} = \dfrac{DB}{DC}$. (1)

② $\begin{cases} DB^2 = BE\cdot AB \\ DC^2 = CF\cdot AC \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{DB}{DC}\right)^2 = \dfrac{DB^2}{DC^2} = \dfrac{BE\cdot AB}{CF\cdot AC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\left(\dfrac{DB}{DC}\right)^2 = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^4 = \dfrac{BE\cdot AB}{CF\cdot AC} \Rightarrow \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3 = \dfrac{BE}{CF}.$$

③ $\begin{cases} AD^2 = DC\cdot DB \Rightarrow AD^4 = DC^2\cdot DB^2 & (3) \\ DC^2 = CF\cdot AC & (4) \\ DB^2 = BE\cdot AB & (5) \\ AC\cdot AB = AD\cdot BC & (6) \end{cases}$

Thay $(4),(5),(6)$ vào (3) ta suy ra $AD^3 = BC\cdot BE\cdot CF$.

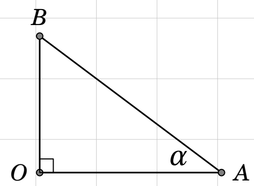
□

BÀI 2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

Cho $\triangle AOB$ vuông tại O, ta có



— $\sin\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} = \dfrac{OB}{AB}$.

— $\tan\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} = \dfrac{OB}{OA}$.

— $\cos\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} = \dfrac{OA}{AB}$.

— $\cot\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}} = \dfrac{OA}{OB}$.

2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

Độ đo	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$
$\cot\alpha$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

3 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

1. $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$.
2. $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.
3. $\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$.
4. $\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức

1. $A=4-\sin^2 45^\circ+2\cos^2 60^\circ-3\cot^3 45^\circ$.
2. $B=\tan 45^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cot 30^\circ$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

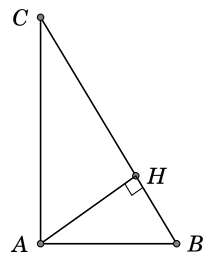
1. $A=4-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3=1$.
2. $B=1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}$.

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $\tan C=\dfrac{2}{3}$ và đường cao $AH=6$. Tính độ dài các đoạn HB,HC,AB,AC.

✍ **Lời giải.**

Ta thấy $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$ đồng dạng, do đó



— $\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{AB}{AC}=\tan C \Rightarrow HC=\dfrac{3}{2}\cdot AH=9.$

— $\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{AB}{AC}=\tan C \Rightarrow BH=\dfrac{2}{3}\cdot AH=4.$

Trong $\triangle ABC$, ta có

— $AB^2=BH\cdot BC \Leftrightarrow AB=\sqrt{BH\cdot BC}=2\sqrt{13}.$

— $AC^2=CH\cdot BC \Leftrightarrow AC=\sqrt{CH\cdot BC}=3\sqrt{13}.$

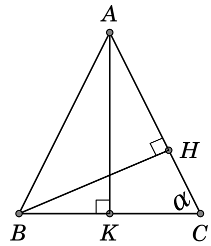
□

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Đường cao $BH=a, \widehat{ABC}=\alpha$. Tính các cạnh và đường cao còn lại.

✍ **Lời giải.**

Trong $\triangle HBC$, ta được $\sin\alpha=\dfrac{BH}{BC} \Leftrightarrow BC=\dfrac{BH}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin\alpha}.$

Trong $\triangle KAB$, ta được



— $\cos\alpha=\dfrac{BK}{AB} \Leftrightarrow AB=\dfrac{BK}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{BC}{2}}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{2\cos\alpha}.$

— $\sin\alpha=\dfrac{AK}{AB} \Leftrightarrow AK=AB\cdot\sin\alpha=\dfrac{a}{2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\sin\alpha=\dfrac{a}{2\cos\alpha}.$

□

2 GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Ví dụ 4. Cho hai tam giác vuông $\triangle ABC$ và $\triangle A_1B_1C_1$ vuông tại A và A_1 và đồng dạng. Chứng minh rằng

① $aa_1=bb_1+cc_1.$

② $\dfrac{1}{hh_1}=\dfrac{1}{bb_1}+\dfrac{1}{cc_1}.$

✍ **Lời giải.**

① Trong $\triangle ABC$ có $b=a\cos\alpha,\ c=a\sin\alpha.$
Trong $\triangle A_1B_1C_1$ có $b_1=a_1\cos\alpha,\ c_1=a_1\sin\alpha.$
Từ đó suy ra $bb_1+cc_1=aa_1\cos^2\alpha+aa_1\sin^2\alpha=aa_1.$

② Trong $\triangle ABC$ có $b=\dfrac{h}{\sin\alpha},\ c=\dfrac{h}{\cos\alpha}.$
Trong $\triangle A_1B_1C_1$ có $b_1=\dfrac{h_1}{\sin\alpha},\ c_1=\dfrac{h_1}{\cos\alpha}.$
Từ đó suy ra $\dfrac{1}{bb_1}+\dfrac{1}{cc_1}=\dfrac{1}{\frac{hh_1}{\sin^2\alpha}}+\dfrac{1}{\frac{hh_1}{\cos^2\alpha}}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{hh_1}=\dfrac{1}{hh_1}.$

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức

① $A=3a\cos 0^\circ+b\sin 90^\circ-a.$

② $B=4a^2\sin^2 45^\circ-3(a\tan 45^\circ)^2+(2a\cos 45^\circ)^2.$

✍ **Lời giải.**

① $A=3a+b-a=2a+b.$

② $B = 4a^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3a^2 + \left(2a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2a^2 - 3a^2 + 2a^2 = a^2.$

□

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức $A = 8 - \cos^2 30° + 2\sin^2 45° - \sqrt{3}\tan^3 60°$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $A = 8 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 = -\dfrac{3}{4}$. □

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức $A = (a^2 + 1)\sin 0° + b\cos 90°$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $A = (a^2 + 1) \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. □

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{a^2 \sin 90° - b^2 \cos 0°}{a\cot 45° - b - 2a\cot 90°}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $A = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$. □

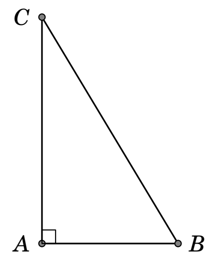
Bài 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, biết $AB = 3\text{cm}, AC = 4\text{cm}$. Hãy giải $\triangle ABC$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

— $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5\text{cm}$.

— $\tan B = \cot C = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3}$.



□

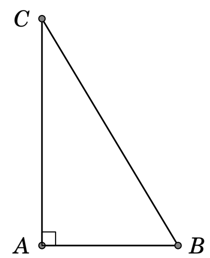
Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, biết $AB = 6\text{cm}, BC = 10$. Hãy giải $\triangle ABC$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

— $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 8\text{cm}$.

— $\tan B = \cot C = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3}$.



□

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A đường cao AH, biết $BH = 4\text{cm}, CH = 1\text{cm}$. Hãy giải $\triangle ABC$.

✍ **Lời giải.**

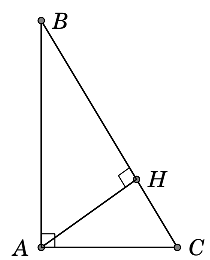
Ta có

— $BC = BH + HC = 5\text{cm}$.

— $AC^2 = BC \cdot CH = 5 \Rightarrow AC = \sqrt{5}\text{cm}$.

— $AB^2 = BC \cdot BH = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}\text{cm}$.

— $\tan B = \cot C = \dfrac{AC}{AB} = 2$.

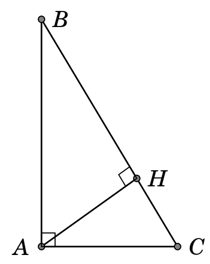


□

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A đường cao AH, biết $BH = 1\text{cm}, AH = 9\text{cm}$. Hãy giải $\triangle ABC$.

✍ **Lời giải.**

Ta có



— $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow CH = \dfrac{AH^2}{BH} = 81 \Rightarrow BC = BH + CH = 82\text{cm}$.

— $AC^2 = BC \cdot CH = 81 \cdot 82 \Rightarrow AC = 9\sqrt{82}\text{cm}$.

— $AB^2 = BC \cdot BH = 82 \Rightarrow AB = \sqrt{82}\text{cm}$.

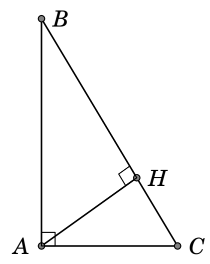
— $\tan B = \cot C = \dfrac{AC}{AB} = 9$.

□

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A đường cao AH, biết $BH = 4\text{cm}, AB = 6\text{cm}$. Hãy giải $\triangle ABC$.

✍ **Lời giải.**

Ta có



— $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BC = \dfrac{AB^2}{BH} = 9\text{cm}$.

— $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 45 \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}\text{cm}$.

— $\tan B = \cot C = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

□

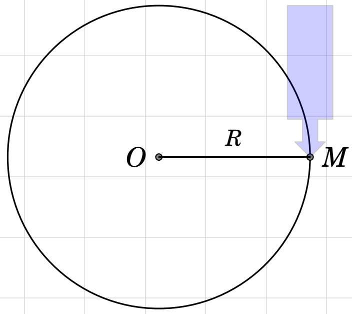
CHƯƠNG 2 ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN - TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 NHẮC LẠI VỀ ĐƯỜNG TRÒN

Định nghĩa 1.
Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R.



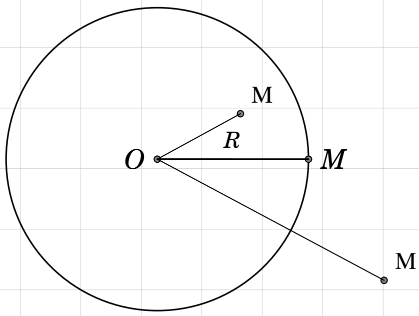
Đường tròn như vậy được ký hiệu $(O;R)$, trong trường hợp không cần chú ý đến bán kính có thể sử dụng ký hiệu (O).

Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M, ta có

— Nếu $OM < R \Leftrightarrow M$ nằm trong đường tròn.

— Nếu $OM = R \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn.

— Nếu $OM > R \Leftrightarrow M$ nằm ngoài đường tròn.

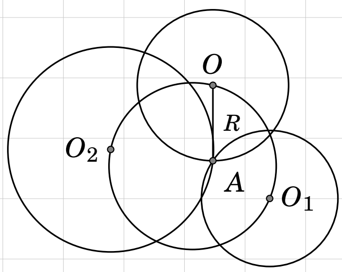


2 CÁCH XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

Theo định nghĩa một đường tròn sẽ hoàn toàn được xác định khi biết tâm và bán kính, vậy với câu hỏi *"Hãy xác định tâm O của đường tròn"*, biết

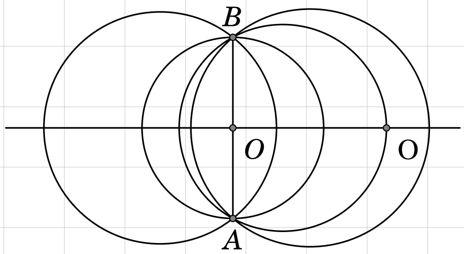
①

Đường tròn đi qua điểm A và có bán kính bằng R. Khi đó,
$OA = R \Leftrightarrow O \in (A;R)$ - Đường tròn tâm A, bán kính R.



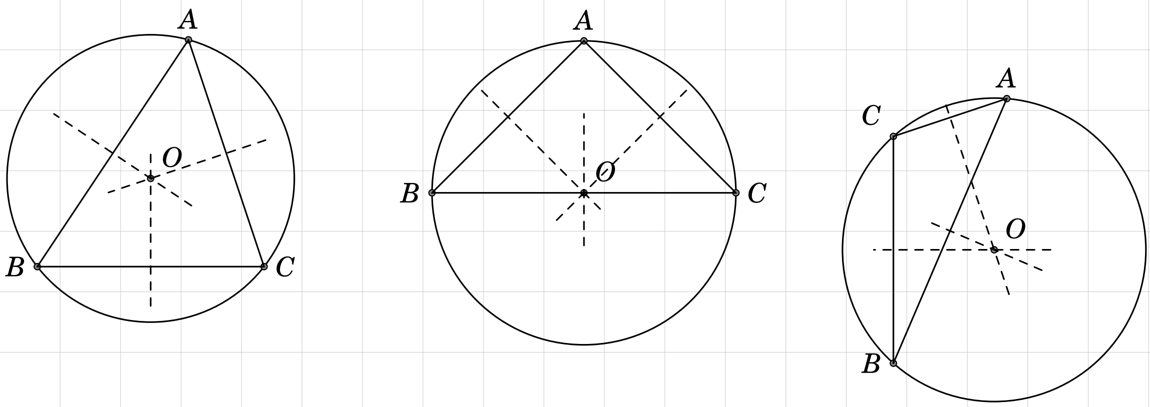
②

Đường tròn đi qua hai điểm A và B. Khi đó,
$OA = OB \Leftrightarrow O$ thuộc đường trung trực của đoạn AB.



③ Đường tròn đi qua ba điểm A, B và C không thẳng hàng. Khi đó,
$OA = OB \Leftrightarrow O$ thuộc đường trung trực của đoạn AB.
$OA = OC \Leftrightarrow O$ thuộc đường trung trực của đoạn AC.
$OB = OC \Leftrightarrow O$ thuộc đường trung trực của đoạn BC.

Vậy tâm O là giao điểm của ba đường trung trực của ΔABC.



⚠ *Trường hợp đặc biệt: Nếu $\triangle ABC$ vuông thì tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là trung điểm của cạnh huyền.*

Hệ quả 1.

① Một điểm O cho trước và một số thực $R > 0$ cho trước xác định một đường tròn $(O; R)$.

② Một đoạn thẳng AB cho trước xác định một đường tròn đường kính AB.

③ Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định một và chỉ một đường tròn đi qua ba điểm đó, kí hiệu (ABC).

3 TÂM ĐỐI XỨNG - TRỤC ĐỐI XỨNG

Ta có kết quả:

① Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

② Bất kỳ đường kính bào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

B CÁC DẠNG TOÁN

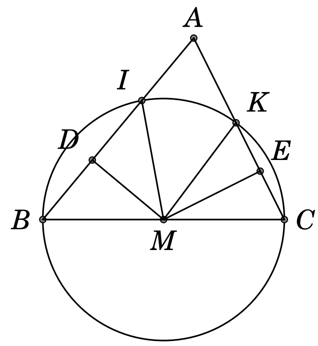
1 CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp
Ta lựa chọn một trong hai cách sau
Cách 1: Sử dụng định nghĩa, ta chứng minh các điểm này cùng cách đều một điểm.
Cách 2: Sử dụng kết quả "Nếu $\widehat{ABC} = 90^\circ$ thì B thuộc đường tròn đường kính AC".

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ và điểm M là trung điểm của BC. Hạ MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB và AC. Trên tia BD và CE lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI, E là trung điểm của CK. Chứng minh rằng bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên một đường tròn.

✍ **Lời giải.**
Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau

Cách 1: (Sử dụng định nghĩa) Ta có



— M là trung điểm BC nên $MB = MC = \frac{1}{2}BC$. (1)

— MD là trung trục cảu BI nên $MI = MB$. (2)

— ME là trung trực của CK nên $MK = MC$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $MB = MC = MI = MK = \frac{1}{2}BC$.

Vậy bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên đường tròn tâm M, bán kính $\frac{1}{2}BC$.
Cách 2: Ta có

— MD là trung trực của BI nên:

$$MI = MB = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \Delta BCI \text{ vuông tại } I.$$
$$\Leftrightarrow I \text{ thuộc đường tròn đường kính } BC. \quad (4)$$

— ME là trung trực của CK nên:

$$MK = MC = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \Delta BCK \text{ vuông tại } K.$$
$$\Leftrightarrow K \text{ thuộc đường tròn đường kính } BC. \quad (5)$$

Vậy bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên đường tròn tâm M, đường kính BC. □

Nhận xét. *Trong lời giải trên, để chứng minh bốn điểm B, I, K, C cùng thuộc một đường tròn, ta có thể sử dụng cả hai cách và*

— *Ở cách 1, ta khẳng định điểm M (đã cho sẵn) cách đều bốn điểm B, I, K, C dựa trên tính chất đường trung trực.*

— *Ở cách 2 ta khéo léo chứng minh $\widehat{BIC} = \widehat{BKC} = 90^\circ$ dựa trên kết quả "Trong tam giác vuông trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nữa cạnh huyền và ngược lại". Tuy nhiên cách 2 được đề xuất thông qua kết quả của cách 1.*

Ví dụ 2. Chứng minh rằng qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn.

✍ **Lời giải.**
Ta chứng minh bằng phản chứng.
Giả sử tồn tại đường tròn (O) đi qua ba điểm thẳng hàng A, B, C.
Ta có

$$A, B \in (O) \Rightarrow OA = OB \Rightarrow O \text{ thuộc trung trực } Ex \text{ của } AB.$$
$$B, C \in (O) \Rightarrow OB = OC \Rightarrow O \text{ thuộc trung trực } Fy \text{ của } BC.$$

suy ra $O = Ex \cap Fy$. (*)
Mặt khác, vì A, B, C thẳng hàng nên:

$$Ex \| Fy, \text{ điều này mâu thuẫn với } (*).$$

Vậy qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn. □

⚠ *Chú ý: Từ kết quả "Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định một và chỉ một đường tròn đi qua ba điểm đó", chúng ta có thể khai thác thêm như sau:*

1. *Nếu các điểm A, B, C, D thuộc đường tròn (O) và A, B, C, E thuộc đường tròn (O') thì $(O) \equiv (O')$, hay nói cách khác " Năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn ".*

2. *Mở rộng hơn "Nếu ta có A, B, C, D thuộc đường tròn (O_1) và A, B, C, E thuộc đường tròn (O_2) và A, B, C, F thuộc đường tròn (O_3) thì $(O_1) \equiv (O_2) \equiv (O_3) \equiv (O)$ và (O) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle DEF$".*

2 QUỸ TÍCH ĐIỂM LÀ MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Với yêu cầu "Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn tính chất K", ta cần trình bày lời giải gồm ba phần:

— Phần thuận: Giả sử có điểm M thỏa mãn điều kiện K, ta khéo léo suy ra rằng M thuộc một đường tròn (O), thí dụ:
Chứng minh $OM = r$- không đổi.
Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^\circ$, với O là trung điểm AB.

— Phần đảo: Lấy $M \in (O)$ và đi chứng minh M có tính chất K.

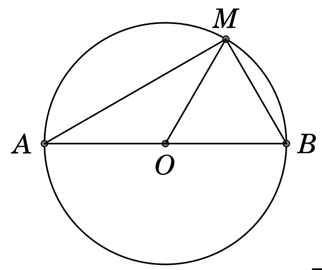
— Kết luận.

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB, tìm tập hợp các điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm AB, khi đó với điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} = 90^\circ$, ta được:

$$\triangle ABM \text{ vuông tại } M \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AB$$
$$\Leftrightarrow M \text{ thuộc đường tròn } \left(O; \frac{1}{2}AB\right).$$



□

⚠ *Chú ý*

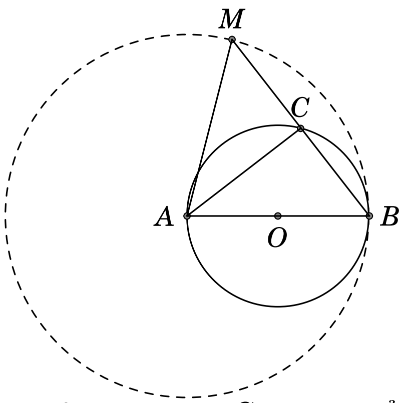
1. *Cách trình bày trên chỉ có tính minh họa, còn để có được lời giải đúng của một bài toán quỹ tích cần thực hiện ba bước.*

2. *Từ nay, chúng ta được quyền sử dụng kết quả "Nếu $\widehat{AMB} = 90^\circ$ thì M thuộc đường tròn đường kính AB".*

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = R$. C là một điểm chạy trên đường tròn đó. Trên tia BC lấy một điểm M sao cho C là trung điểm của BM. Tìm quỹ tích của điểm M.

Lời giải.

Phần thuận: Giả sử có điểm M sao cho C là trung điểm của BM.
Vì C thuộc đường tròn đường kính AB
$\Rightarrow \widehat{ACB} = 90° \Leftrightarrow AC \perp BM$
$\Rightarrow \Delta ABM$ cân vì có AC vừa là đường cao, vừa là trung tuyến. $\Rightarrow AM = AB = R \Leftrightarrow M \in (A;R)$.



Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường trò $(A;R)$, BM cắt (O) tại C. Ta phải chứng minh C là trung điểm của BM.
Thậy vậy,

- $AM = AB = R \Rightarrow \triangle ABM$ cân tại A.
- $C \in (O) \Rightarrow \widehat{ACB} = 90° \Leftrightarrow AC \perp BM$.

suy ra AC là đường cao ứng với cạnh đáy nên đồng thời là trung tuyến.
Vậy C là trung điểm của BM.
Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn $(A;R)$. □

Nhận xét. *Trong lời giải trên, để tìm tập hợp điểm M chúng ta đã tuân thủ đúng lượt đồ của bài toán quỹ tích, cụ thể:*

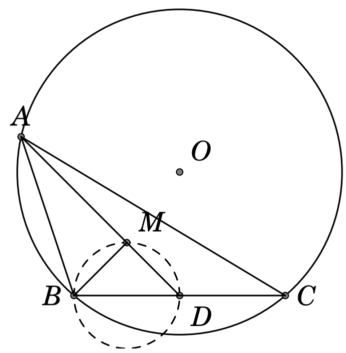
- *Phần thuận: Ta giả sử có điểm M sao cho C là trung điểm của BM, từ đó suy ra được $M \in (A;R)$.*
- *Phần đảo: Ta lấy điểm $M \in (A;R)$ và đi chứng minh M thỏa mãn điều kiện C là trung điểm của BM.*
- *Kết luận.*

Ví dụ 5. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm B, C cố định. Điểm A di chuyển trên đường tròn, D là trung điểm của BC. Gọi M là hình chiếu của B trên đường thẳng AD.

1. Tìm tập hợp điểm M khi A di chuyển trên (O).
2. Tìm vị trí của điểm A trên (O) để BM có độ dài ngắn nhất.

✍ **Lời giải.**

1. Hướng dẫn:
$BM \perp DM \Leftrightarrow \widehat{BMD} = 90°$
$\Leftrightarrow M$ di chuyển trên đường tròn đường kính BD trừ điểm B.



2. Ta có, trong đường tròn có đường kính BD thì $BM \leq BD$ (đường kính là dây cung lớn nhất).
Do đó, BM có độ dài lớn nhất bằng BD, đạt được khi $M \equiv D \Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow \triangle ABC$ cân tại A.
$\Leftrightarrow A$ là giao điểm của đường tròn tâm O với đường trung trực của BC.

□

Nhận xét. *Trong lời giải b), để chỉ ra được vị trí cần tìm của điểm A sao cho BM lớn nhất chúng ta đã bắt đầu bằng bất đẳng thức*

$$BM \leq BD, \text{ trong đó } BD \text{ là độ dài không đổi.}$$
$$\Rightarrow BM_{max} = BD, \text{ đạt được khi } M \equiv D \Rightarrow \text{ vị trí của } A.$$

Như vậy, lập luận đó dựa trên tính chất "Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn", tuy nhiên, nếu muốn, chúng ta có thể lập luận theo cách khác như sau:

$$BD^2 = BM^2 + DM^2 \Rightarrow BM_{max} \text{ khi } DM_{min}.$$

Từ đó, suy ra $BM_{max} = BD$ *đạt được khi* $DM_{min} = 0 \Leftrightarrow M \equiv D$.

3 DỰNG ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Để dựng một đường tròn ta cần biết tâm và bán kính và hãy nhớ lại "Tâm của đường tròn đi qua hai điểm A và B cho trước nằm trên đường trung trực của đoạn AB ".

để trình bày lời giải của một bài toán dựng hình, ta làm như sau

- *Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn* (O), *từ đây suy ra vị trí tâm và độ dài bán kính của nó.*
- *Cách dựng: Dựa vào kết quả của bước phân tích chúng ta suy ra phép dựng hình.*
- *Chứng minh: Chứng minh đường tròn được dựng ở bước dựng hình thỏa mãn điều kiện đầu bài.*
- *Biện luận: Số đường tròn thỏa mãn điều kiện đầu bài.*

Ví dụ 6. ① Hãy dựng một đoạn thẳng $AB = 6cm$ và ba đường tròn phân biệt nhận AB làm một dây cung.

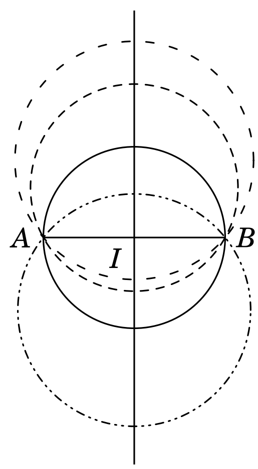
② Trong tất cả các đường tròn nhận AB làm dây cung thì đường tròn nào có đường kính nhỏ nhất? Giải thích tại sao?

✍ **Lời giải.**

①

Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn thẳng $AB = 6$cm.
- Dựng trung trực d của AB. Trên d lấy bốn điểm (O_1), (O_2), (O_3), I (I là trung điểm AB).
- Dựng bốn đường tròn ung trực d của AB. Trên d lấy bốn điểm $(O_1; O_1A)$, $(O_2; O_2A)$, $(O_3; O_3A)$ và $(I; IA)$.



② Gọi (O) là một đường tròn nhận AB làm một dây cung.
Vẽ đường kính AC, ta có:

$$AC \geq AB \text{ với } AB \text{ là hằng số}$$

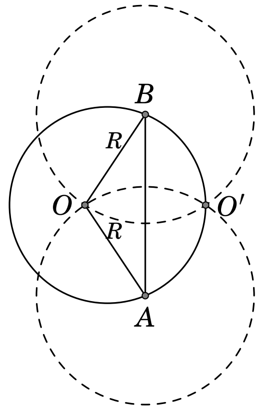
Do đó, $AC_{min} = AB$, đạt được khi $C \equiv B$.
Vậy đường tròn có đường kính nhỏ nhất là đường tròn đường kính AB.

□

Ví dụ 7. Dựng một đường tròn (O) có bán kính R cho trước và đi qua hai điểm A và B cho trước.

✍ Lời giải.

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thỏa mãn điều kiện bài toán, ta có:



— $A \in (O;R) \Rightarrow OA = R \Rightarrow O \in (A;R)$.

— $B \in (O;R) \Rightarrow OB = R \Rightarrow O \in (B;R)$.

Vậy tâm O là giao điểm của hai đường tròn $(A;R)$ và $(B;R)$.

Cách dựng: Ta lần lượt:

— Dựng các đường tròn $(A;R)$ và $(B;R)$ và gọi O là giao điểm của hai đường tròn đó.

— Dựng đường tròn $(O;R)$.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có: $OA = OB = R \Rightarrow A, B \in (O;R)$.
Biện luận: Số nghiệm hình của bài toán phụ thuộc vào số giao điểm của hai đường tròn $(A;R)$ và $(B;R)$, ta có:

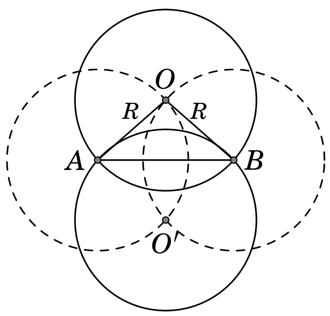
— Nếu $2R > AB$ thì bài toán có hai nghiệm hình.

— Nếu $2R = AB$ thì bài toán có một nghiệm hình.

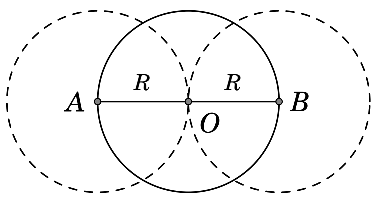
— Nếu $2R < AB$ thì bài toán không có nghiệm hình.

□

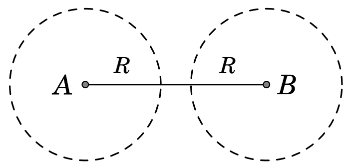
Nếu $2R > AB$



Nếu $2R = AB$



Nếu $2R < AB$



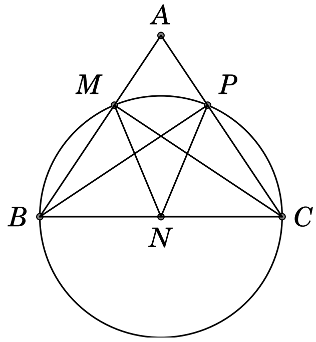
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ đều. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng các điểm B, M, P, C thuộc một đường tròn.

✍ Lời giải.

Ta có thể lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

Cách 1: Vì $\triangle ABC$ đều nên trung tuyến sẽ là đường cao, do đó:



— $CM \perp AB \Leftrightarrow \widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính BC.

— $BP \perp AC \Leftrightarrow \widehat{BPC} = 90^\circ \Rightarrow P$ thuộc đường tròn đường kính BC.

Vậy bốn điểm B, M, P, C thuộc đường tròn đường kính BC.

Cách 2: Ta có:

— $\triangle BMD$ vuông tại M và có MN là trung tuyến nên $MN = NB = NC$ (1).

— $\triangle BPC$ vuông tại P và có PN là trung tuyến nên $PN = NB = NC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $NB = NC = NM = NP \Leftrightarrow B, C, M, P$ thuộc đường tròn $(N; NB)$.

Cách 3: Với $\triangle ABC$ đều có cạnh a, ta có:

— $NB = NC = \dfrac{a}{2}$ (3).

— MN là đường trung bình nên $MN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$ (4).

— PN là đường trung bình nên $PN = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$ (5).

Từ $(3), (4), (5)$ suy ra $NB = NC = NM = NP = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow B, C, M, P$ thuộc đường tròn $\left(N; \dfrac{a}{2}\right)$. □

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường cao $AH = 1$ cm, $BC = 4$ cm. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng AH ở D.

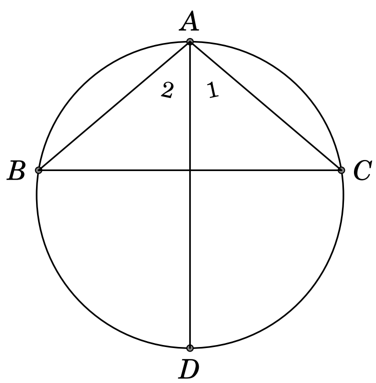
a) Chứng minh rằng các điểm B, C thuộc đường tròn đường kính AD.

b) Tính độ dài AD.

✍ Lời giải.

a)

Xét hai tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle ADB$, ta có:



— AD chung.

— $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, vì $\triangle ABC$ cân nên AH là phân giác.

— $AC = AB$, vì $\triangle ABC$ cân tại A.

Do đó $\triangle ADC = \triangle ADB \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$.

Vậy B, C thuộc đường tròn đường kính AD.

b) Trong tam giác ABD vuông tại D, ta có:

$$AH \cdot AD = AB^2 = AH^2 + BH^2 \Leftrightarrow AD = \dfrac{AH^2 + \dfrac{BC^2}{4}}{AH} = 5 \text{ cm}.$$

Vậy ta được $AD = 5$ cm.

□

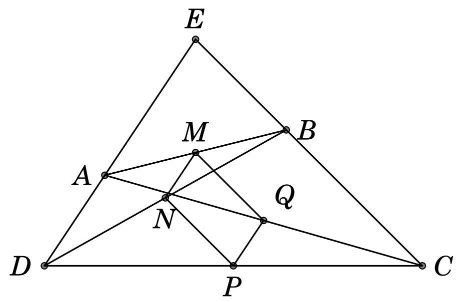
Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C}+\widehat{D}=90^\circ$. Gọi M,N,P,Q theo thứ tự là trung điểm của AB,BD,DC,CA. Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên một đường tròn.

✍ **Lời giải.**

Giả sử AD cắt BC tại E. Khi đó từ giả thiết $\widehat{C}+\widehat{D}=90^\circ$, suy ra $\widehat{E}=180^\circ-\left(\widehat{C}+\widehat{D}\right)=90^\circ$.

Ta lần lượt có: $\begin{cases} MN \parallel AD \parallel PQ \\ MQ \parallel BC \parallel PN \end{cases}$ do đó, dựa trên tính chất của góc có cạnh tương ứng song song ta được $\widehat{NMQ}=\widehat{NPQ}=\widehat{E}=90^\circ$.

Vậy bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên đường tròn đường kính NQ.



□

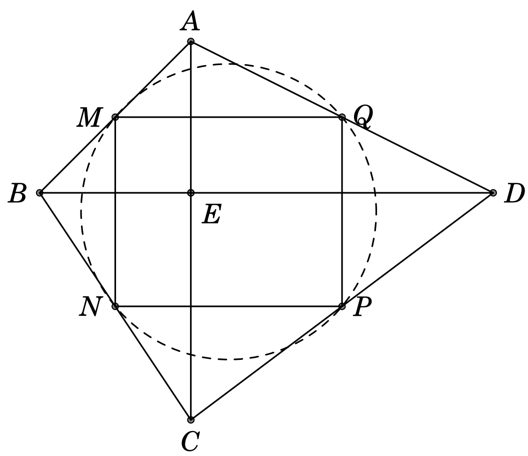
Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M,N,P,Q theo thứ tự là trung điểm của AB,BC,CD,DA. Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên một đường tròn.

✍ **Lời giải.**

Vì M,N,P,Q theo thứ tự là trung điểm của AB,BC,CD,DA nên theo tính chất của đường trung bình ta có $\begin{cases} MN \parallel AC \parallel PQ \\ MQ \parallel BD \parallel PN. \end{cases}$

Mặt khác, theo giả thiết AC và BD vuông góc với nhau nên $\widehat{NMQ}=\widehat{NPQ}=90^\circ$.

Vậy ốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên đường tròn đường kính NQ.



□

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B}=\widehat{D}=90^\circ$.

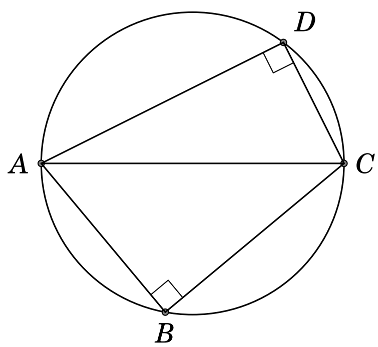
a) Chứng minh rằng bốn đỉnh của tứ giác cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $BD \le AC$. Tứ giác $ABCD$ có thêm điều kiện gì để $BD=AC$.

✍ **Lời giải.**

a) A,B,C,D thuộc đường tròn đường kính AC.

b) Ta luôn có $BD \le AC$ vì dây cung nhỏ hơn đường kính.
Để có $BD=AC \Leftrightarrow BD$ là đường kính $\Leftrightarrow \widehat{A}=\widehat{C}=90^\circ \Leftrightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

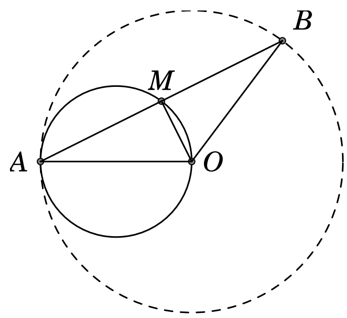


□

Bài 6. Cho đường tròn $(O;R)$, điểm A cố định trên đường tròn, điểm B di chuyển trên đường tròn. Tìm quỹ tích trung điểm M của AB.

✍ **Lời giải.**

Phần thuận: Giả sử có M là trung điểm của AB.
Xét $\triangle OAB$, ta có: $OA = OB = R \Leftrightarrow \triangle OAB$ cân tại O.
Suy ra OM vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến.
Do đó $\widehat{AMO} = 90^\circ \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính OA.

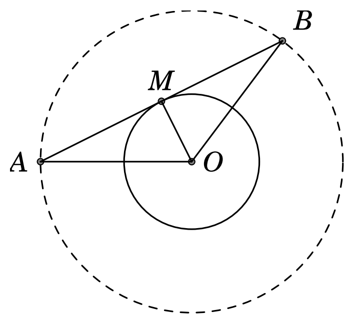


Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (OA), AM cắt O tại B. Ta phải chứng minh M là trung điểm của AB.
Thật vậy, $M \in (OA) \Leftrightarrow \widehat{AMO} = 90^\circ \Leftrightarrow OM \perp AB$.
Khi đó, trong $\triangle OAB$ cân tại O ta có ngay OM là trung tuyến $\Leftrightarrow MA = MB$.
Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn (OA). □

Bài 7. Cho đường tròn $(O;R)$. Hai điểm A,B di chuyển trên đường tròn sao cho độ dài $AB = 2\ell$ không đổi $(\ell < R)$. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn AB.

✍ **Lời giải.**

Phần thuận: Giả sử có M là trung điểm của AB.
Xét $\triangle OMA$ vuông tại M, ta có $OM^2 = OA^2 - MA^2 = R^2 - \ell^2 \Leftrightarrow OM = \sqrt{R^2 - \ell^2}$.
Vậy M thuộc đường tròn $\left(O, \sqrt{R^2 - \ell^2}\right)$.



Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ thuộc đường tròn $\left(O, \sqrt{R^2 - \ell^2}\right)$, đường thẳng qua M vuông góc với OM cắt $(O;R)$ tại A và B. Ta phải chứng minh M là trung điểm AB và $AB = 2\ell$.
Thật vậy, ta thấy ngay M là trung điểm AB, ngoài ra

$$AB = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2} = 2\sqrt{R^2 - \left(R^2 - \ell^2\right)} = 2\ell$$

Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn $\left(O, \sqrt{R^2 - \ell^2}\right)$. □

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có cạnh AB cố định, đường chéo $AC = 2$ cm. Tìm quỹ tích điểm D.

✍ **Lời giải.**

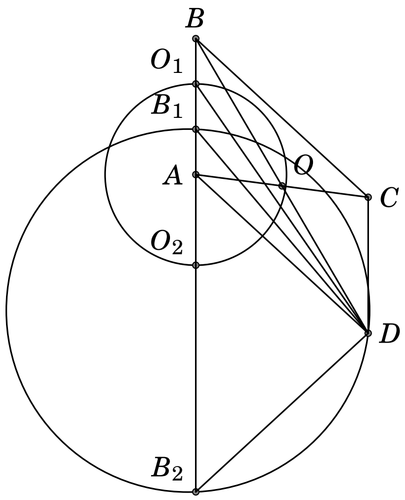
Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Phần thuận: Giả sử có điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Ta có $OA = \dfrac{1}{2}AC = 1$ cm. Do đó $O \in (A,1)$.

Giả sử $(A,1)$ cắt đường thẳng AB tại O_1 và O_2 (cố định).

Gọi B_1 và B_2 theo thứ tự là điểm đối xứng với B qua O_1 và O_2.



Ta có ngay: $\begin{cases} \widehat{O_1OO_2} = 90^\circ, \text{ góc chắn nửa đường tròn} \\ DB_1 \parallel OO_1, \text{ tính chất đường trung bình} \\ DB_2 \parallel OO_1, \text{ tính chất đường trung bình.} \end{cases}$

Suy ra, $\widehat{B_1DB_2} = 90^\circ \Leftrightarrow D$ thuộc đường tròn đường kính B_1B_2.

Phần đảo: Lấy một điểm D bất kỳ trên đường tròn (B_1B_2), BD cắt $(A,1)$ tại O, lấy C đối xứng với A qua O. Ta phải chứng minh $ABCD$ là hình bình hành và $AC = 2$ cm.

Thật vậy, ta có ngay $AC = 2AO = 2$ cm.

Mặt khác, dựa trên hình vẽ cùng với nhận xét $\begin{cases} \widehat{O_1OO_2} = 90^\circ \\ \widehat{B_1DB_2} = 90^\circ \end{cases}$ nên $DB_1 \parallel OO_1$.

Trong $\triangle BB_1D$, ta có: $\begin{cases} BO_1 = B_1O_1 \\ DB_1 \parallel OO_1 \end{cases}$ nên OO_1 là đường trung bình $\Rightarrow OB = OD$.

Khi đó, tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành.

Kết luận: Quỹ tích của điểm D là đường tròn (B_1B_2). □

Bài 9. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Điểm A di động trên (O), gọi P,Q theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

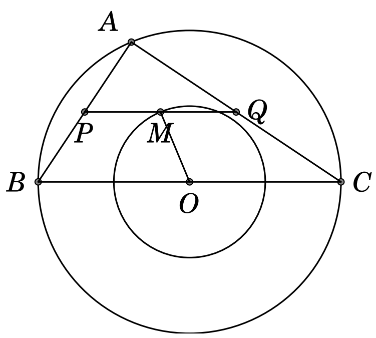
a) Chứng minh rằng PQ có độ dài không đổi khi A di động trên (O).

b) Tìm quỹ tích trung điểm M của PQ.

✍ **Lời giải.**

a) Trong $\triangle ABC$ có PQ là đường trung bình, do đó $PQ = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \cdot 2R = R$ (không đổi).

b) Từ kết quả trên suy ra A,M,O thẳng hàng và M là trung điểm OA.
Do đó $OM = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{R}{2} \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn $\left(O, \dfrac{R}{2}\right)$.



□

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, đường cao AD. Dựng điểm M thuộc đường thẳng AD sao cho $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

✍ **Lời giải.**

Phân tích: Giả sử đã dựng được điểm M thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ta có, $\widehat{BMC} = 90° \Rightarrow M \in (BC)$.

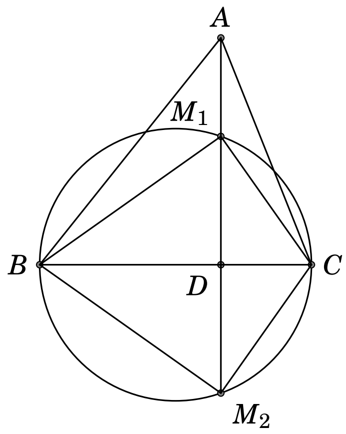
Vậy M là giao điểm của đường thẳng AD với đường tròn (BC).

Cách dựng: Ta lần lượt

— Dựng (BC).

— Đường thẳng AD cắt đường tròn (BC) tại M.

Khi đó, M là điểm cần dựng.



Chứng minh: Ta thấy ngay $\widehat{BMC} = 90°$.

Biện luận: Vì đường thẳng AD cắt đường tròn (BC) tại hai điểm M_1 và M_2 nên bài toán có hai nghiệm hình, đó là M_1 và M_2. □

Bài 11. Cho đường thẳng d và một điểm A cách đường thẳng d la 1 cm. Dựng đường tròn (O) có bán kính 1,5 cm đi qua điểm A và có tâm nằm trên d.

✍ **Lời giải.**

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ta có, $OA = 1{,}5$ cm $\Rightarrow O \in (A; 1{,}5\,\text{cm})$.

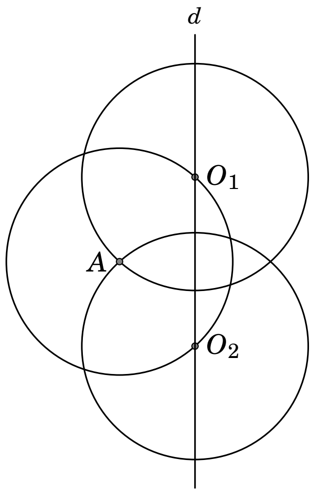
Vậy, tâm O là giao điểm của đường thẳng d với đường tròn $(A; 1{,}5\,\text{cm})$.

Cách dựng: Ta lần lượt

— Dựng đường tròn $(A; 1{,}5\,\text{cm})$.

— d cắt đường tròn $(A; 1{,}5\,\text{cm})$ tại O.

— Dựng đường tròn $(O; 1{,}5\,\text{cm})$.



Chứng minh: Ta thấy ngay $(O; 1{,}5\,\text{cm})$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Biện luận: Vì đường thẳng d cắt đường tròn $(A; 1{,}5\,\text{cm})$ tại hai điểm O_1 và O_2 nên bài toán có hai nghiệm hình, đó là hai đường tròn $(O_1; 1{,}5\,\text{cm})$ và $(O_2; 1{,}5\,\text{cm})$. □

Bài 12. Dựng một đường tròn (O) đi qua hai điểm A và B cho trước và có tâm ở trên đường thẳng d cho trước (A, B không thuộc d).

✍ **Lời giải.**

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ta có: $A, B \in (O) \Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực a của AB.

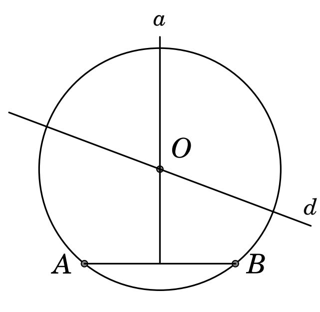
Vậy tâm O là giao điểm của a và d.

Cách dựng: Ta lần lượt

— Dựng đường trung trực a của AB.

— d cắt a tại O.

— Dựng đường tròn (O, OA).



Chứng minh: Ta thấy ngay (O, OA) thỏa mãn điều kiện đề bài.

Biện luận: Vì với hai đường thẳng d và a ta có ba trường hợp về vị trí tương đối nên:

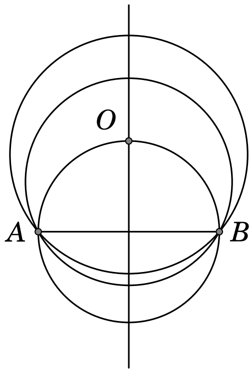
— Nếu $a \equiv d \Leftrightarrow d$ là trung trực của AB thì bài toán có vô số nghiệm hình.

— Nếu $a \parallel d \Leftrightarrow AB \perp d$ (d không là trung trực của AB) thì bài toán vô nghiệm.

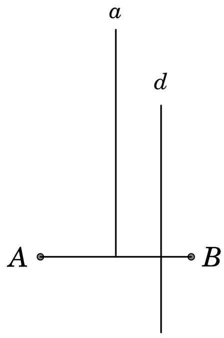
— Nếu a cắt d thì bài toán có nghiệm hình duy nhất.

□

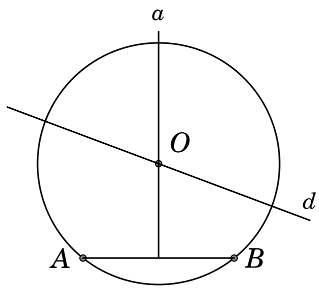
Nếu d là trung trực của AB



Nếu $AB \perp d$ và d không là trung trực của AB



Nếu AB không vuông góc với d



Bài 13. Cho năm điểm A,B,C,D,E. Biết rằng qua bốn điểm A,B,C,D có thể vẽ được một đường tròn, qua bốn điểm B,C,D,E cũng vẽ được một đường tròn. Hỏi qua cả năm điểm A,B,C,D,E có thể vẽ được một đường tròn không?

✍ **Lời giải.**

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Với giả thiết:

— Bốn điểm A,B,C,D thuộc đường tròn (O_1), suy ra $(O_1) \equiv (O)$.

— Bốn điểm B,C,D,E thuộc đường tròn (O_2), suy ra $(O_2) \equiv (O)$.

Vậy cả năm điểm A,B,C,D,E cùng thuộc đường tròn (O). □

BÀI 2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 SO SÁNH ĐỘ DÀI CỦA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY

Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn.

2 QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY

Ta có các kết quả sau:

— Đường kính vuông góc với một dây thì chia dây ấy ra làm hai phần bằng nhau.

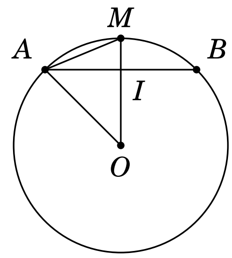
— Đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì vuông góc với dây ấy.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH VÀ ĐỊNH LƯỢNG

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ và một dây cung $AB = 2a$ $(a < R)$. Gọi I là trung điểm của AB. Tia OI cắt cung $\overset{\frown}{AB}$ tại M. Tính độ dài của dây cung MA.

✍ **Lời giải.**



Trong $\triangle AMI$, ta có :

$AM^2 = AI^2 + MI^2 = a^2 + MI^2.$ (1)

Mặt khác: $MI = OM - OI = R - OI$.

Trong tam giác OAI, ta có :

$$OI^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - a^2 \Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow MI = R - \sqrt{R^2 - a^2} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} AM^2 &= AI^2 + MI^2 = a^2 + \left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right)^2 \\ &= a^2 + R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2} + R^2 - a^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2} \\ \Rightarrow AM &= \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Vậy độ dài dây cung $AM = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}}$. □

Nhận xét. *Trong lời giải trên để tính độ dài dây cung AM chúng ta lựa chọn phương pháp trình bày theo hướng phát sinh yêu cầu rồi thực hiện yêu cầu này để đạt được mục đích cuối cùng là AM, cụ thể:*

$$AM^2 = AI^2 + MI^2 = a^2 + MI^2 \Rightarrow \text{cần xác định } MI.$$

$$MI = OM - OI = R - OI \Rightarrow \text{cần xác định } OI.$$

$$OI \text{ được xác định dựa vào tam giác } OAI.$$

Từ đó thay ngược lại kết quả để nhận được AM.

Cách trình bày như vậy sẽ rất dễ hiểu, tuy nhiên nó lại tỏ ra dài dòng, chính vì lý do này mà các em học sinh hãy lưu trữ nó trong suy nghĩ còn khi trình bày lời giải thì trình bày theo kiểu ngược lại, cụ thể:

Suy nghĩ	*Trình bày*
1. Để tính AM cần xác định MI *2. Để tính MI cần xác định OI.* *3. OI được xác định dựa vào $\triangle OAI$*	*Trong tam giác OAI, ta có* $OI^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - a^2$ $\Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - a^2}$ *Suy ra* $MI = OM - OI = R - \sqrt{R^2 - a^2}$. *Trong $\triangle AMI$, ta có:* $AM^2 = AI^2 + MI^2$ $= a^2 + \left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right)^2$ $\Rightarrow AM = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}}$.

Các em học sinh có thể luyện tập bằng việc giải lại ví dụ trên trong trường hợp $R = 5$cm và $a = 3$cm.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O), dây $AB = 2a$ và khoảng cách từ nó tới tâm bằng h. Gọi I là trung điểm của AB. Tia OI cắt đường tròn tại C.

① Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác cân.

② tính khoảng cách từ O đến BC.

✍ **Lời giải.**

① Ta có:

$$AI = IB = a \Rightarrow OI \perp AB.$$

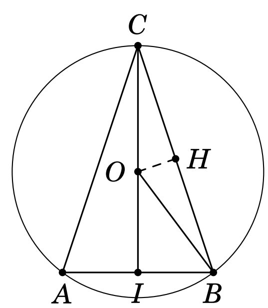
Suy ra $\triangle ABC$ có trung tuyến CI là đường cao nên là tan giác cân.

② Hạ OH vuông góc với BC, ta có:

$$HB = HC = \frac{1}{2}BC.$$

Trong tam giác OIB, ta có:

$$OB^2 = IO^2 + IB^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow OB = \sqrt{a^2 + h^2}.$$



Ta có:

$$IC = IO + OC = IO + OB = h + \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Trong $\triangle IBC$ có :

$$BC^2 = IC^2 + IB^2 = \left(h + \sqrt{a^2 + h^2}\right)^2 + a^2 = 2\left(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2\right)$$

$\Rightarrow BC = \sqrt{2\left(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2\right)}$

$\Rightarrow HB = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2\right)}$. Trong tam giác OHB, ta có

$$\begin{aligned} OH^2 &= OB^2 - HB^2 = \left(\sqrt{a^2 + h^2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2\right)}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2\right) \\ \Rightarrow OH &= \sqrt{\frac{a^2 - h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2}{2}} \end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Trong lời giải trên :*

1. *Ở câu a) ta chỉ sử dụng kết quả "Đường kính đi qua trung điểm của một dây cung thì vuông góc với dây cung ấy", từ đó dẫn tới tam giác có trung tuyến là đường cao do đó nó là tam giác cân.*

2. *Ở câu b) chúng ta đã lựa chọn phương pháp trình bày ngược sau suy nghĩ kiểu phát sinh yêu cầu, cụ thể ta nghĩ:*

   — *Để tính OH cần xác định BH và OB.*

   — $BH = \dfrac{1}{2}BC$ *và BC được xác định thông qua $\triangle IBC$ nếu biết OC (tức là OB).*

   — *OB được xác định thông qua $\triangle OIB$.*

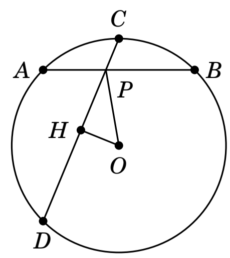
3. *Tất nhiên có thể tính OH thông qua sự đồng dạng của hai tam giác vuông là $\triangle OHC$ và $\triangle BIC$. Bạn đọc tự làm.*

Các em có thể luyện tập bằng việc giải lại các ví dụ trên trong trường hợp $a = 24$cm và $h = 7$cm.

Ví dụ 3. Cho một đường tròn (O) và điểm P ở bên trong đường tròn. Chứng minh rằng trong tất cả các dây cung đi qua P thì dây cung vuông góc với bán kính qua P là dây cung ngắn nhất.

✍ **Lời giải.**

Gọi AB là dây cung qua P và vuông góc với OP và CD là dây bất kỳ đi qua P.
Hạ OH vuông góc với CD, ta có ngay:
$OH \le OP$, vì trong tam giác vuông cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền $\Rightarrow AB \le CD \Rightarrow$ AB ngắn nhất.



□

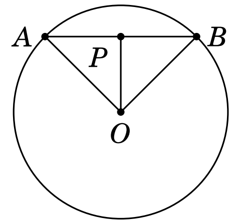
2 GIẢI BÀI TOÁN DỰNG HÌNH

Ví dụ 4. Cho một đường tròn (O) và một điểm P khác O ở bên trong đường tròn. Dựng một dây cung AB đi qua P sao cho $PA = PB$.

✍ **Lời giải.**

Phân tích: Giả sử đã dựng được dây AB đi qua P sao cho $PA = PB$, ta có:

$$PA = PB \Rightarrow OP \perp AB$$



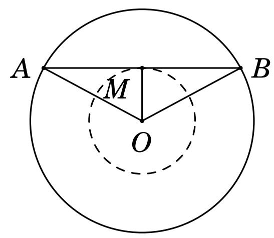
.
Cách dựng: Dựng đường thẳng (d) qua P và vuông góc với OP cắt (O) tại hai điểm A, B.
Chứng minh: Vì $OP \perp AB \Rightarrow PA = PB$.
Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.
Lưu ý: Nếu $P \equiv O$, bài toán có vô số nghiệm hình.

□

3 GIẢI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O;R)$. Tìm quỹ tích trung điểm M của dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 120°$

✍ **Lời giải.**



Phần thuận: Giả sử có điểm M là trung điểm của dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 120°$.
Trong tam giác OAM, ta có:

$$\begin{aligned} &\widehat{AOM} = 60° \Rightarrow \widehat{OAM} = 30° \\ \Rightarrow\ & OM = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2} \Rightarrow M \in \left(O;\frac{R}{2}\right). \end{aligned}$$

Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn $\left(O;\frac{R}{2}\right)$, dựng dây cung AB qua M và vuông góc với OM.
Ta phải chứng minh $\widehat{AOB} = 120°$.
Thật vậy, trong $\triangle OAM$ vuông tại M, ta có:

$$\begin{aligned} & OM = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \widehat{OAM} = 30° \Leftrightarrow \widehat{AOM} = 60° \\ \Leftrightarrow\ & \widehat{AOB} = 2\widehat{AOM} = 120°. \end{aligned}$$

Kết luận: Quỹ tích điểm M là đường tròn $\left(O;\frac{R}{2}\right)$. □

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

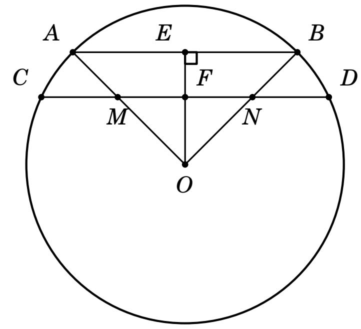
Bài 1. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M và N (M nằm giữa C và N)

① Chứng minh rằng $CM = DN$.

② Giả sử $\widehat{AOB} = 90°$, hãy tính OM, ON theo R sao cho $CM = MN = ND$.

✍ **Lời giải.**

①



Hạ OE vuông góc với AB cắt CD tại F.

Trong tam giác OAB cân tại O, ta có:
$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} \Rightarrow MN \parallel AB \Leftrightarrow OF \perp MN$ và $MF = NF$.
Ta nhận xét thêm:

$OF \perp MN \Leftrightarrow OF \perp CD \Leftrightarrow CF = DF$.

Khi đó : $CM = CF - MF = DF - NF = DN$ (đpcm).

② Đặt $MF = x$, suy ra

$CF = CM + MF = MN + MF = 3MF = 3x$.

$OF = x$, vì $\triangle OMF$ vuông cân tại F.

Trong tam giác OCF, ta có

$OF^2 = OC^2 - CF^2 \Leftrightarrow x^2 = R^2 - 9x^2 \Leftrightarrow 10x^2 = R^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{10}}$.

Khi đó ta được:

$ON = OM = OF\sqrt{2} = \frac{R}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{2} = \frac{R}{\sqrt{5}}$.

Vậy với $ON = OM = \frac{R}{\sqrt{5}}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

□

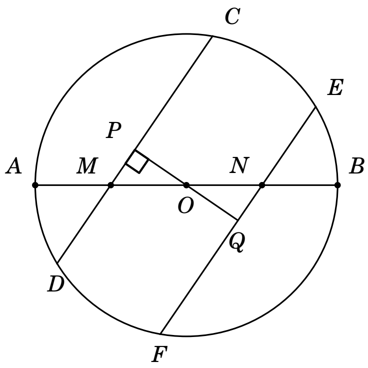
Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của OA và OB. Qua M và N lần lượt vẽ các dây cung CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

① Chứng minh tứ giác $CDFE$ là hình chữ nhật.

② Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn là $30°$, tính diện tích hình chữ nhật $CDFE$.

✍ **Lời giải.**

① Hạ OP vuông góc với CD cắt EF tại Q, suy ra:
$CP = DP$, tính chất đường kính vuông góc với dây cung.
$OQ \perp EF$ vì $EF \parallel CD$.
$\Rightarrow EQ = FQ$, tính chất đường kính vuông góc với dây cung.



Xét hai tam giác vuông $\triangle OPM$ và $\triangle OQN$, ta có:
$OM = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{1}{2}OB = ON$
$\widehat{MOP} = \widehat{NOQ}$ (vì đối đỉnh)
do đó: $\triangle OPM = \triangle OQN$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow OP = OQ \Leftrightarrow CD = EF$.
Khi đó, tứ giác $CDFE$ có $CD \parallel EF$ và $CD = EF$ nên $CDFE$ là hình bình hành.
Trong hình bình hành $CDFE$, ta có:
PQ là đường trung bình $\Rightarrow PQ \parallel CE \Rightarrow CD \perp CE$
$\Rightarrow CDFE$ là hình chữ nhật.

② Ta có:
$S_{CDFE} = CD \cdot CD.$ (1)
Trong $\triangle OPM$ vuông tại P, với $\widehat{OMP} = 30°$, suy ra:
$OP = \dfrac{1}{2}OM = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}OA = \dfrac{R}{4}.$
$CE = PQ = 2OP = \dfrac{R}{2}.$ (2)
Trong tam giác OPC vuông tại P, ta có:
$CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{16}} = \dfrac{R\sqrt{15}}{4}.$
$CD = 2CP = \dfrac{R\sqrt{15}}{2}.$ (3)
Thay (2), (3) vào (1), ta được:
$S_{CDEF} = \dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{R\sqrt{15}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{15}}{4}.$

□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Ở phía ngoài tam giác vẽ các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC. Qua A vã đường thẳng (d) cắt các nửa đường tròn trên theo thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng

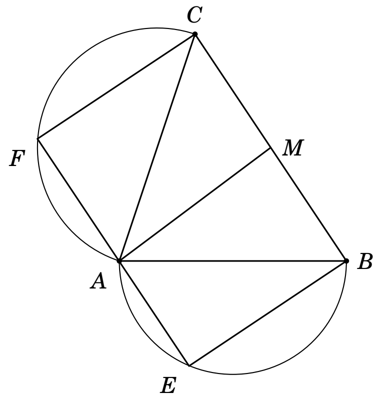
① Nếu (d) song song với BC thì $BEFC$ là hình chữ nhật.

② Nếu (d) vuông góc với trung tuyến AM của tam giác ABC thì $AE = AF$.

✍ **Lời giải.**

① Rõ ràng nếu $(d) \parallel BC \Rightarrow EF \parallel CD$ nên tứ giác $BCFE$ là hình thang.
Mặt khác, $\widehat{EFC} = \widehat{FEB} = 90^\circ$ nên $BEFC$ là hình chữ nhật.

② Rõ ràng nếu $(d) \perp AM \Rightarrow AM \parallel EB \parallel FC$ vì cùng vuông góc với (d).
Vậy AM là đường trung bình của hình thang $BEFC$ nên A là trung điểm của EF hay $AE = AF$.



□

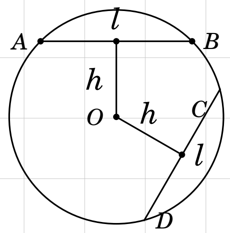
BÀI 3. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

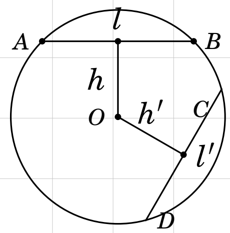
A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Ta có các kết quả sau:

① Trong một đường tròn hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.

② Trong hai dây không bằng nhau của một đường tròn dây lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.





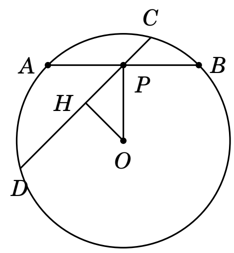
Cả hai kết quả trên vẫn đúng với mọi trường hợp hai đường tròn có bán kính bằng nhau (gọi là hai đường tròn bằng nhau) và nó tỏ ra rất hiệu quả trong bài toán cực trị.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Cho một đường tròn (O) và điểm P ở bên trong đường tròn. Chứng minh rằng trong tất cả các dây cung đi qua P thì dây cung vuông góc với bán kính qua P là dây cung ngắn nhất.

✍ **Lời giải.**

Gọi AB là dây cung qua P và vuông góc với OP và CD là dây bất kỳ đi qua P.
Hạ OH vuông góc với CD, ta có ngay:
$OH \leq OP$, vì trong tam giác vuông cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền
$\Rightarrow AB \leq CD \Rightarrow AB$ là dây cung ngắn nhất.



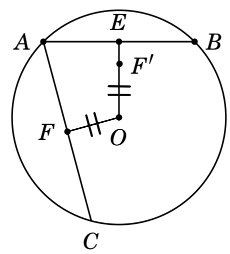
□

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC sao cho $AB < AC$ và tâm O nằm trong góc ABC. Chứng minh rằng $\widehat{OAB} > \widehat{OAC}$.

✍ **Lời giải.**

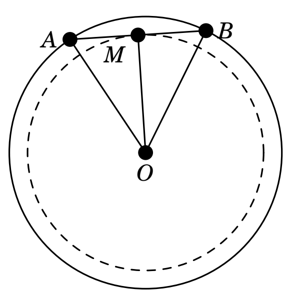
Hạ OE, OF theo thứ tự vuông góc với AB và AC.
Từ giả thiết: $AB < AC \Leftrightarrow OE > OF$.
Trên OE lấy F' sao cho $OF' = OF$, ta thấy ngay điểm F' nằm giữa O và E, suy ra:
$\widehat{OA} > \widehat{OAF'} = \widehat{OAF}$, vì $\triangle OAF' = \triangle OAF$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông)
$\Leftrightarrow \widehat{OAB} > \widehat{OAC}$ (đpcm).



□

Bài 2. Cho đường tròn (O). Tìm quỹ tích trung điểm M của các dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

✍ **Lời giải.**

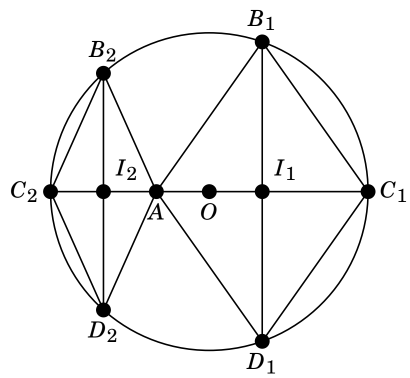


Phần thuận: Giả sử M là trung điểm của dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
Trong tam giác OAB, ta có : $OA = OB = R$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
$\Rightarrow \triangle OAB$ đều $\Rightarrow OM = \dfrac{OA\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow M \in \left(O; \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$.

Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn $\left(O; \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$, dựng dây cung AB qua M và vuông góc với OM. Ta phải chứng minh $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
Thật vậy, trong tam giác OAB cân tại O, ta có :
$OM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{OA\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle OAB$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$.
Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn $\left(O; \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. □

Bài 3. Cho đường tròn (O) và một điểm A ở bên trong đường tròn đó ($A \neq O$). Dựng hình thoi $ABCD$ sao cho B, C, D nằm trong đường tròn (O).

✍ **Lời giải.**



Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thoi $ABCD$ thỏa mãn điều kiện đầu bài, ta có:
AC là đường trung trực của $BD \Rightarrow O \in AC$.
Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

— Nối AO cắt đường tròn (O) tại C, lấy I là trung điểm của AC.

— Dựng đường thẳng d qua I và vuông góc với AC cắt đường tròn (O) tại B và D.

Khi đó, $ABCD$ là hình thoi cần dựng.
Chứng minh: Vì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình thoi.
Biện luận: Vì OA cắt đường tròn (O) tại hai điểm C_1 và C_2 nên bài toán có hai nghiệm hình.

□

BÀI 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Vị trí tương đối của đường thẳng (d) và đường tròn (O) được đánh giá thông qua số điểm chung của (d) với (O).

Bảng tóm tắt ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
1. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$\mathrm{d} > R$.
2. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn	1	$\mathrm{d} = R$.
3. Đường thẳng cắt đường tròn	2	$\mathrm{d} < R$.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Cho đường thẳng (d) và điểm O không thuộc (d). Hãy nêu cách dựng một đường tròn tâm O sao cho

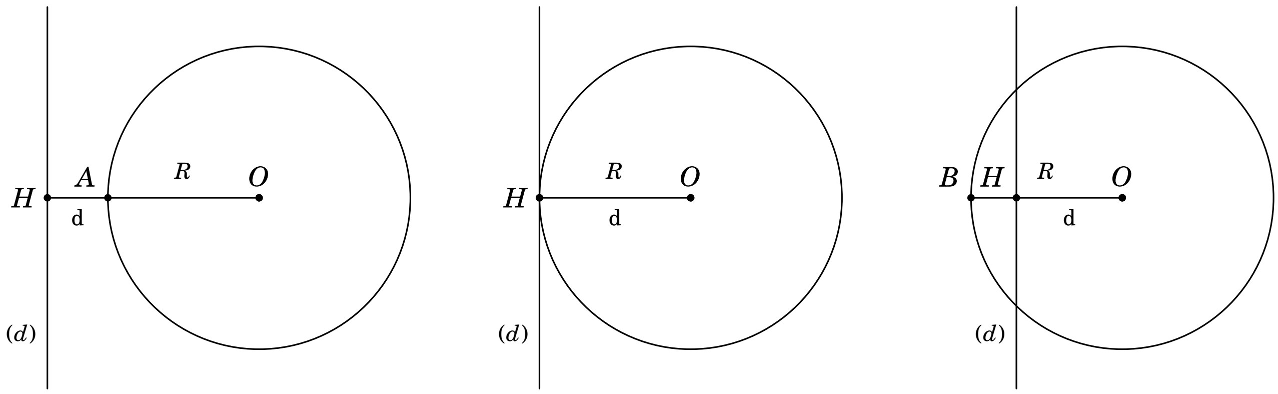
① (d) không cắt (O).

② (d) tiếp xúc (O).

③ (d) cắt (O).

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (d).



① Lấy điểm A nằm giữa O và H, rồi vẽ đường tròn $(O;OA)$. Khi đó, đường thẳng (d) không cắt đường tròn $(O;OA)$ bởi $R = OA < OH = \mathrm{d}$.

② Vẽ đường tròn $(O;OH)$. Khi đó, đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn $(O;OH)$ bởi $R = OH = \mathrm{d}$.

③ Lấy điểm B nằm trên tia đối của tia HO, rồi vẽ đường tròn $(O;OB)$. Khi đó, đường thẳng (d) cắt đường tròn $(O;OB)$ bởi $R = OB > OH > \mathrm{d}$.

Chú ý: Như vậy, để xác định được vị trí tương đối của đường thẳng (d) với đường tròn $(O;R)$ cho trước, ta cần thực hiện các bước sau

— *Bước 1:* Hạ OH vuông góc với đường thẳng (d).

— *Bước 2:* Tính độ dài đoạn OH.

— *Bước 3:* Thực hiện so sánh OH với R, từ đó đưa ra kết luận.

Ngoài ra

1. Nếu ta có $A \in (d)$ và A nằm trong $(O;R) \Rightarrow (d)$ cắt $(O;R)$ đánh giá này cho phép chúng ta nhận được lời giải đơn giản hơn nhiều.

2. $A \in (d), A \in (O;R)$ và $OA \perp (d)$ thì (d) tiếp xúc với (O).

3. $A \in (d), A \in (O;R)$ và OA không vuông góc với (d) thì (d) cắt đường tròn (O).

□

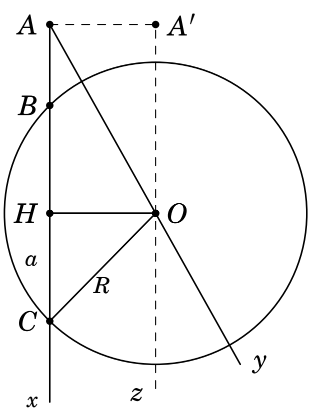
Ví dụ 2. Cho $\widehat{xAy}$ khác góc bẹt. Dựng đường tròn $(O;R)$ sao cho tia Ay qua O, đường thẳng Ax cắt (O) tại hai điểm B và C sao cho $BC = 2a$ với $a < R$.

✍ **Lời giải.**

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn $(O;R)$ thỏa mãn điều kiện.
Hạ $OH \perp BC$, ta có

$$OH^2 = OC^2 - HC^2 = R^2 - a^2$$

$\Rightarrow OH = \sqrt{R^2 - a^2}$ (không đổi)
$\Rightarrow O$ thuộc đường thẳng song song và cách Ax một khoảng bằng OH.
Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện



— Dựng tia Az qua A và vuông góc với Ax (về phần mặt phẳng chứa tia Ay).

— Trên tia Az lấy điểm A' sao cho $AA' = \sqrt{R^2 - a^2}$.

— Dựng đường thẳng (d) qua A' và song song với Ax, cắt tia Ay ở O.

— Dựng đường tròn $(O;R)$.

Chứng minh: Trước hết theo cách dựng ta có $(O;R)$ và O thuộc Ay, ta phải chứng minh $BC = 2a$.
Thậy vậy, hạ $OH \perp BC$, ta có
$OH = AA' = \sqrt{R^2 - a^2}$.
$BC = 2CH = 2\sqrt{OC^2 - OH^2} = 2\sqrt{R^2 - (R^2 - a^2)} = 2a$.
Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.
Yêu cầu: Các em học sinh hãy thực hiện lại ví dụ trên cho các trường hợp $a = R$, $a > R$. □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng

① Nếu đường thẳng xy không cắt đường tròn $(O;R)$ thì mọi điểm của xy ở bên ngoài đường tròn đó.

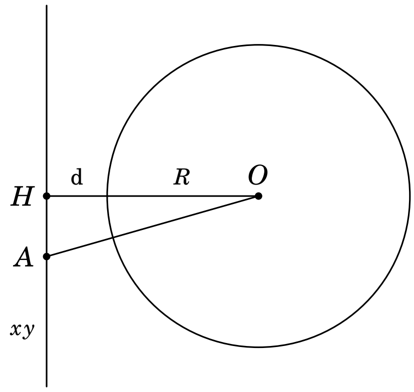
② Nếu đường thẳng xy đi qua một điểm bên trong đường tròn $(O;R)$ thì phải cắt đường tròn này tại hai điểm phân biệt.

③ Nếu đường thẳng xy cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm phân biệt A, B thì mọi điểm nằm giữa hai điểm A và B đều nằm bên trong đường tròn, các điểm còn lại (trừ A, B) nằm bên ngoài đường tròn đó.

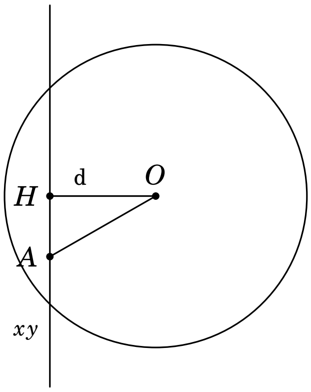
✍ **Lời giải.**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng xy.

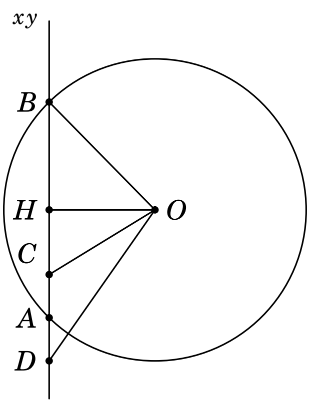
$a)$ Từ giả thiết suy ra $OH > R$.
Gọi A là điểm biển bất kì trên xy, suy ra
$OA \geq OH$ (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông)
$\Rightarrow OA > R \Leftrightarrow A$ nằm ngoài đường tròn.
Vậy, mọi điểm bất kì của xy ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$.



$b)$ Gọi A là điểm ở bên trong đường tròn $(O;R)$ mà đường thẳng xy đi qua, ta có $OH \leq OA < R \Leftrightarrow xy$ và $(O;R)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.



$c)$ Gọi C là điểm nằm giữa hai điểm A và B đều nằm bên trong đường tròn.
Gọi D là điểm bất kì nằm ngoài đoạn AB, ta có
$HD > HA \Leftrightarrow OD > OA = R$
D nằm ngoài đường tròn $(O;R)$.
Vậy, mọi điểm nằm ngoài đoạn AB đều nằm bên ngoài đường tròn.
Nhận xét: Trong lời giải trên ngoài việc sử dụng kết quả về vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn, chúng ta còn sử dụng kết quả về vị trí tương đối của điểm với đường tròn, cụ thể với đường tròn $(O;R)$ và điểm M, ta có



— Nếu $OM < R \Leftrightarrow M$ nằm trong đường tròn.
— Nếu $OM = R \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn.
— Nếu $OM > R \Leftrightarrow M$ nằm ngoài đường tròn.

□

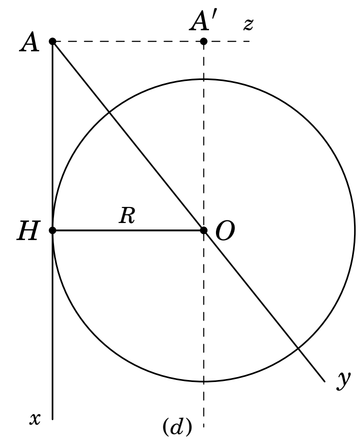
C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho góc $\widehat{xAy}$ khác góc bẹt.

① Dựng đường tròn $(O;R)$ có tâm O thuộc Ay và tiếp xúc với đường thẳng Ax.

② Dựng đường tròn $(O;R)$ tiếp xúc với Ax và Ay.

✍ **Lời giải.**



a) Ta thực hiện theo các bước

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn $(O;R)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài. Hạ $OH \perp Ay$, ta có $OH = R \Rightarrow O$ thuộc đường thẳng (d) song song và cách Ax một khoảng bằng OH ((d) thuộc nữa mặt phẳng chứa Ax có bờ Ay).

Cách dựng: Ta lần lượt thức hiện

— Dựng tia Az qua A và vuông góc với Ax (về phần mặt phẳng chứa Ay).

— Trên Az lấy điểm A' sao cho $AA' = R$.

— Dựng đường thẳng (d) qua A' và song song với Ax, cắt Ay ở O.

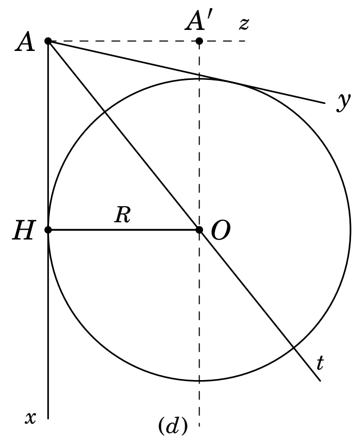
— Dựng đường tròn $(O;R)$.

Chứng minh: Trước hết theo cách dựng ta có $(O;R)$ và O thuộc Ay, ta phải chứng minh $(O;R)$ tiếp xúc với Ax.

Thậy vậy, hạ $OH \perp Ax$ ta có

$OH = AA' = R \Leftrightarrow (O;R)$ tiếp xúc với Ax.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.



b) Ta thực hiện theo các bước

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn $(O;R)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài. Vì $(O;R)$ tiếp xúc với Ax và Ay nên tâm O thuộc tia phân giác At của góc $\widehat{xAy}$.

Hạ $OH \perp Ay$, ta có $OH = R \Rightarrow O$ thuộc đường thẳng (d) song song và cách Ax một khoảng bằng OH ((d) thuộc nửa mặt phẳng chứa Ax có bờ Ay).

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện

— Dựng tia phân giác At của $\widehat{xAy}$.

— Dựng tia Az qua A và vuông góc với Ax (về phần mặt phẳng chứa Ay).

— Trên Az lấy điểm A' sao cho $AA' = R$.

— Dựng đường thẳng (d) qua A' song song với Ax, cắt tiao At ở O.

— Dựng đường tròn $(O;R)$.

Chứng minh: Trước hết theo cách dựng ta có $(O;R)$ và O thuộc At, ta phải chứng minh $(O;R)$ tiếp xúc với Ax và Ay.

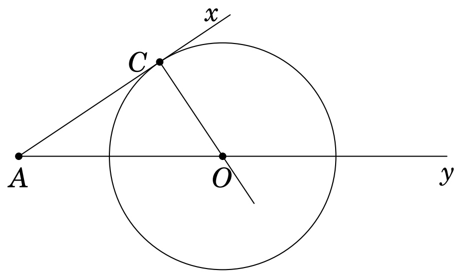
Thật vậy, hạ $OH \perp Ax$, ta có $OH = AA' = R \Leftrightarrow \mathrm{d}(O, Ax) = \mathrm{d}(O, Oy) = R \Leftrightarrow (O;R)$ tiếp xúc với Ax và Ay.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình. □

Bài 2. Cho góc nhọn $\widehat{xAy}$, điểm C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với Ax tại C tâm O thuộc tia Ay.

✍ **Lời giải.**

Dựng đường thẳng (d) đi qua C và vuông góc với tia Ax, (d) cắt tia Ay tại O. Khi đó O là tâm đường tròn tiếp xúc với Ax tại C.

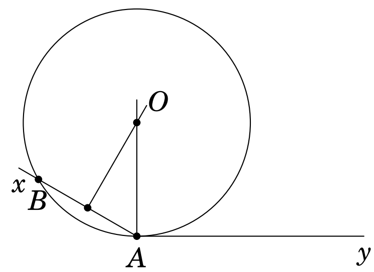


□

Bài 3. Cho trước góc $\widehat{xAy}$ khác góc bẹt và một điểm B trên cạnh Ax. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua B và tiếp xúc với Ay tại A.

✍ **Lời giải.**

Dựng đường thẳng (d) qua A và vuông góc với Ay.
Dựng đường thẳng (d') là đường trung trực của AB, (d') cắt (d) tại O. Khi đó đường tròn tâm O đi qua B và tiếp xúc với Ay tại A.

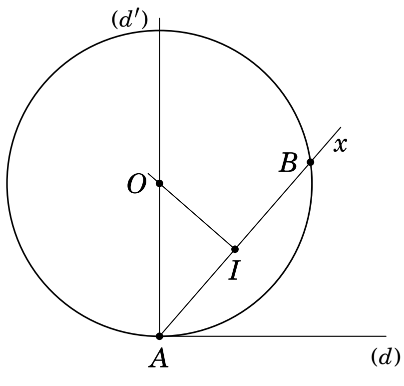


□

Bài 4. Cho đường thẳng (d), điểm A thuộc đường thẳng, điểm B nằm ngoài đường thẳng. Dựng đường tròn (O) đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại A.

✍ **Lời giải.**

Dựng đường thẳng (d') đi qua A và vuông góc với (d).
Dựng đường thẳng trung trực của AB cắt (d') tại O.
Khi đó đường tròn tâm O đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại A.



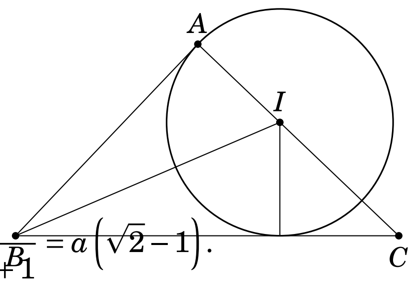
□

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Vẽ phân giác BI.

① Chứng minh rằng đường tròn $(I; IA)$ tiếp xúc với các đường thẳng AB và BC.

② Cho biết $AB = a$, tính IA từ đó suy ra $\tan 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$.

✍ **Lời giải.**



a) Ta có $IA \perp BA \Leftrightarrow IA = \mathrm{d}(I, BA) \Leftrightarrow (I; IA)$ tiếp xúc với BA tại A.

Mặt khác BI là tia phân giác góc $\widehat{ABC}$ do đó $(I; IA)$ tiếp xúc BC.

b) Sử dụng tích chất của tia phân giác trong $\triangle ABC$, ta có

$$\frac{IA}{BA} = \frac{IC}{BC} = \frac{AC - IA}{BA\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{IA}{a} = \frac{a - IA}{a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}IA = a - IA \Leftrightarrow IA = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a\left(\sqrt{2}-1\right).$$

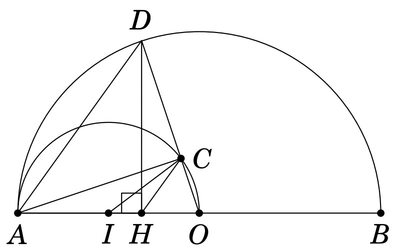
Khi đó, trong $\triangle ABI$ vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{ABI} = \frac{IA}{BA} \Leftrightarrow \tan 22^\circ 30' = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{a} = \sqrt{2}-1.(\text{đpcm})$$

□

Bài 6. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy OA làm đường kính vẽ nửa đường tròn cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB với nửa đường tròn (O). Trên nửa đường tròn đường kính OA lấy một điểm C (khác A và O). Tia OC cắt nửa đường tròn (O) tại D. Kẻ DH vuông góc AB. Chứng minh rằng tứ giác $AHCD$ là hình thang cân.

✍ **Lời giải.**



Gọi I là tâm đường tròn đường kính OA

$\Rightarrow IC = IA = IO = \dfrac{1}{2}OA \Rightarrow \triangle ACO$ vuông tại C.

Có $\triangle HOD$ và $\triangle COA$ bằng nhau, suy ra $OH = OC$

$\Rightarrow \dfrac{OC}{OD} = \dfrac{OH}{OA} \Rightarrow HC \parallel AD \Rightarrow AHCD$ là hình thang cân.

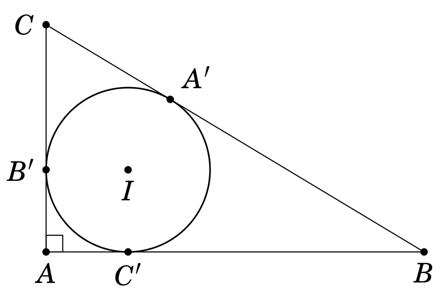
□

Bài 7. Gọi p, a, r và S lần lượt là nửa chu vi, cạnh huyền, bán kính đường tròn nội tiếp và diện tích của một tam giác vuông. Chứng minh rằng

① $r = p - a$.

② $S = p \cdot r$.

✍ **Lời giải.**



Ta có $r = AB' = AC'$. Đặt $b' = CB' = CA'$; $c' = BA' = BC'$.

① $2p = a + b + c = c' + b' + r + c' + r + b' = 2r + (b' + c') = 2r + 2a \Rightarrow r = p - a$.

② $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle IAB} + S_{\triangle IBC} + S_{\triangle ICA} = \dfrac{1}{2}r \cdot c + \dfrac{1}{2}r \cdot a + \dfrac{1}{2}r \cdot b = \dfrac{1}{2}(a + b + c) \cdot r = p \cdot r$.

□

BÀI 5. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Một đường thẳng được gọi là một tiếp tuyến của đường tròn nếu nó chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

Nhận xét. *Như vậy, ta có:* (d) *là tiếp tuyến của* $(O) \Leftrightarrow (d) \cap (O) = \{H\}$, *khi đó ta nói "đường thẳng* (d) *là tiếp tuyến của đường tròn* (O) *tại* H*".*

1 CÁC TÍNH CHẤT CỦA TIẾP TUYẾN

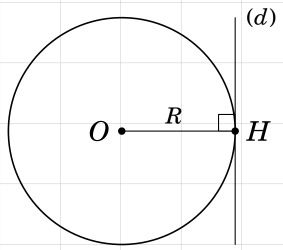
Tính chất 1. Nếu một đường thẳng là một tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Tính chất 2. Nếu đường thẳng vuông góc với bán kính tại mút nằm trên đường tròn thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.

Nhận xét.

Như vậy, ta có: (d) *là tiếp tuyến của* (O) *tại* $H \Leftrightarrow (d) \perp OH$.

hoặc viết $\begin{cases} \text{Nếu } H \in (O) \text{ và } H \in (d) \\ (d) \perp OH \end{cases} \Leftrightarrow (d)$ *là tiếp tuyến của* (O) *tại* H.



B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 DỰNG TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Các yêu cầu dựng tiếp tuyến của đường tròn (O) *cho trước thường gặp phải giải quyết một trong ba dạng sau*

Dạng 1. Dựng tiếp tuyến đi qua điểm A *cho trước.*

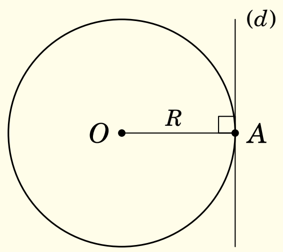
Dạng 2. Dựng tiếp tuyến song song với đường thẳng a *cho trước.*

Dạng 3. Dựng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng a *cho trước.*

Phương pháp thực hiện các dạng toán trên được trình bày trong ba dạng toán sau

Dạng 1. *Từ một điểm* A *cho trước, hãy dựng tiếp tuyến với đường tròn* (O) *cho trước, biết*

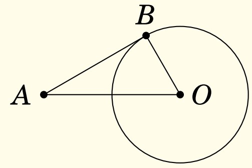
1. *Điểm* A *nằm trên đường tròn.*
2. *Điểm* A *nằm ngoài đường tròn.*



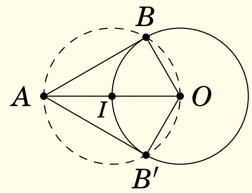
Phương pháp dựng

1. *Vì* A *nằm trên đường tròn nên tiếp tuyến là đương thẳng qua* A *và vuông góc với* OA.
2. *Ta thực hiện bốn phần*

Phân tích: *Giả sử đã dựng được tiếp tuyến qua A với đường tròn (O) và có tiếp điểm B, ta có $\widehat{ABO} = 90° \Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính OA.*



Cách dựng: *Ta thực hiện*



— *Dựng đường tròn đường kính AO, kí hiệu (AO), đường tròn này cắt (O) tại B và B'.*

— *Dựng đường thẳng AB và AB', đó chính là các tiếp tuyến cần dựng.*

Chứng minh: *Trong đường tròn (AO) ta có ngay*

$\widehat{ABO} = 90° \Rightarrow AB$ *là tiếp tuyến của đường tròn (O).*

$\widehat{AB'O} = 90° \Rightarrow AB'$ *là tiếp tuyến của đường tròn (O).*

Biện luận: *Bài toán có hai nghiệm hình (tức là, qua A luôn kẻ được hai tiếp tuyến tới (O)).*

⚠ *Nếu điểm A nằm bên trong đường tròn (O) thì qua A không thể kẻ được tiếp tuyến tới đường tròn (O).*

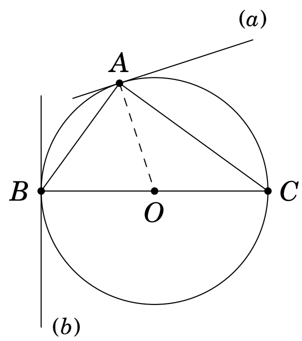
Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, biết tiếp tuyến đi qua

① điểm A.

② điểm B.

✍ **Lời giải.**

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có tâm O là trung điểm của BC.

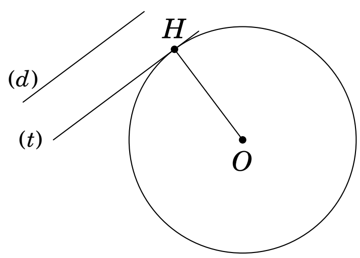


① Tiếp tuyến qua A là đường thẳng (a) qua A và vuông góc với OA.

② Tiếp tuyến qua B là đường thẳng (b) qua B và vuông góc với OB.

□

Dạng 2. Cho đường tròn (O) và một đường thẳng (d). Dựng tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến này song song với đường thẳng (d).



Phương pháp dựng

Phân tích: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến (t) của đường tròn (O) và tiếp tuyến song song với (d), gọi H là tiếp điểm, ta có $OH \perp (t) \Leftrightarrow OH \perp (d)$.

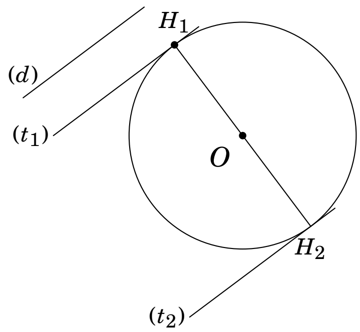
Vậy, với điểm H là giao điểm của đường tròn (O) với đường thẳng qua O vuông góc với (d).

Cách dựng: Ta thực hiện

— Dựng đường thẳng $xOy \perp (d)$ và cắt (O) tại H.

— Dựng đường thẳng (t) qua H và vuông góc với OH, đó chính là tiếp tuyến cần dựng.

Chứng minh: Ta có ngay: $(t) \perp OH$ và $(d) \perp OH \Rightarrow (t) \parallel (d) \Rightarrow (t)$ là tiếp tuyến cần dựng.
Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình.



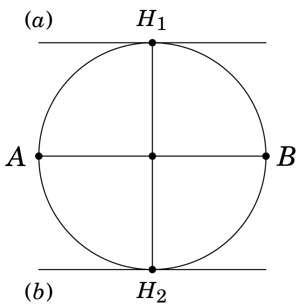
Ví dụ 2. Cho đường tròn đường kính AB. Hãy nêu các dựng tiếp tuyến với đường tròn, biếp tiếp tuyến song song với AB.

✍ Lời giải.

Gọi O là trung điểm AB, ta thực hiện

— Dựng đường thẳng (d) qua (O) và vuông góc với AB. Dựng đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm H_1 và H_2.

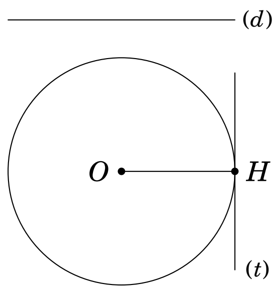
— Dựng hai đường thẳng $(a), (b)$ theo thứ tự đi qua hai điểm H_1, H_2 và song song với AB.
Khi đó $(a), (b)$ là hai tiếp tuyến cần dựng.



□

Dạng 3. Cho đường tròn (O) và một đường thẳng (d). Dựng tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng (d).
Phương pháp dựng

Phân tích: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến (t) của đường tròn (O) và tiếp tuyến vuông góc với (d), gọi H là tiếp điểm, ta có $OH \perp (t) \Leftrightarrow OH \parallel (d)$.
Vậy, với điểm H là giao điểm của đường tròn (O) với đường thẳng qua O song song với (d).

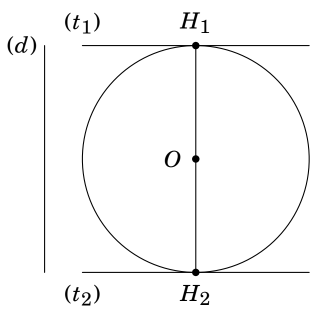


Cách dựng: Ta thực hiện

— Dựng đường thẳng $xOy \parallel (d)$ và cắt (O) tại H.

— Dựng đường thẳng (t) qua H và vuông góc với OH, đó chính là tiếp tuyến cần dựng.

Chứng minh: Ta có ngay: $(t) \perp OH$ và $(d) \parallel OH \Rightarrow (t) \parallel (d) \Rightarrow (t)$ là tiếp tuyến cần dựng.
Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình.



2 GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH VÀ ĐỊNH LƯỢNG

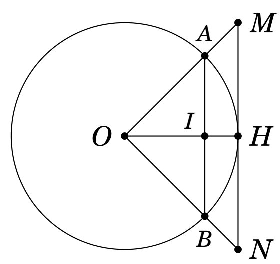
Phương pháp

① Với bài toán cho trước đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H, ta sẽ nhận được ngay các kết quả $(d) \perp OH$ và $OH = R$.

② Với bài toán cho trước AM và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn (O), ta sẽ nhận ngay được các kết quả
$+AM \perp OM$ và $AN \perp ON$,
$+AM = AN$ và $\widehat{MAO} = \widehat{NAO}$.
Dựa và các kết quả trên ta thực hiện các yêu cầu của bài toán.

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB = 2a$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, nó cắt các tia OA và OB theo thứ tự tại M và N. Tính diện tích $\triangle MON$.

✍ **Lời giải.**



Gọi H là tiếp điểm và OH cắt AB tại I, ta có $OH \perp MN$ và $OH \perp AB$.

Trong $\triangle OAI$, ta có $IA = \dfrac{AB}{2} = a$. $OI^2 = OA^2 - IA^2 = R^2 - a^2$
$\Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - a^2}$.

Vì $\triangle OAI \backsim \triangle OMH$ nên
$\dfrac{IA}{HM} = \dfrac{OI}{OH} \Rightarrow HM = \dfrac{IA \cdot OH}{OI} = \dfrac{a \cdot R}{\sqrt{R^2 - a^2}} \Rightarrow MN = 2HM = \dfrac{2a \cdot R}{\sqrt{R^2 - a^2}}$.

Ta có $S_{\triangle MON} = \dfrac{1}{2} OH \cdot MN = \dfrac{1}{2} R \cdot \dfrac{2a \cdot R}{\sqrt{R^2 - a^2}} = \dfrac{a \cdot R^2}{\sqrt{R^2 - a^2}}$.

□

Nhận xét: Trong lời giải trên chúng ta đã lựa chọn phương pháp trình bày ngược sau suy nghĩ theo kiểu phát sinh yêu cầu, cụ thể ta nghĩ:

— Để tính $S_{\triangle MON} = \dfrac{1}{2} OH \cdot MN$ cần xác định MN, tức là cần xác định HM (vì $MN = 2HM$).

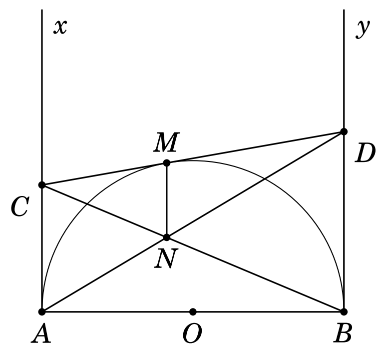
— HM được xác định thông qua sự đồng dạng của $\triangle OAI$ và $\triangle OMH$, từ đó cần xác định IA và OI.

— $AI = \dfrac{1}{2} AB$ còn OI được xác định thông qua $\triangle OIA$.

Ví dụ 4. Cho nửa đường tròn (O) với đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By. Qua một điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau ở N. Chứng minh rằng

① $MN \parallel AC$ ② $CM \cdot DB = CD \cdot MN$

✍ **Lời giải.**



① Theo tính chất tiếp tuyến ta có ngay $\triangle DBO = \triangle DMO\,(ch - cgv) \Rightarrow DB = DM$.
Tương tự ta có $AC = MC$.

Mặt khác, vì $Ax \parallel By$ nên hai tam giác $\triangle ANC$ và $\triangle DNB$ đồng dạng, suy ra

$$\frac{ND}{NA} = \frac{DB}{AC} = \frac{DM}{CM} \Rightarrow MN \parallel AC \text{ (định lí Ta-lét đảo).}$$

② Từ kết quả câu trên suy ra $MN \parallel BD \Rightarrow \dfrac{CM}{CD} = \dfrac{MN}{BD} \Leftrightarrow CM \cdot DB = CD \cdot MN$ (đpcm).

□

Nhận xét. *Trong lời giải trên*

① *Ở ý đầu, để chứng minh $MN \parallel AC$, ta suy nghĩ theo điều kiện tương đương, tức là giả sử có*

$$MN \parallel AC \Leftrightarrow \frac{ND}{NA} = \frac{MD}{MC} \underset{MC=AC}{\overset{MD=DB}{=}} \frac{DB}{AC}$$

luôn đúng vì $Ax \parallel By$.

Do vậy khi trình bày lời giải chúng ta xuất phát từ kết quả $DB = DM$, $CA = CM$ cùng với giả thiết $Ax \parallel By$.

② *Ở ý thứ hai, vẫn với suy nghĩ như trong ý đầu tiên, ta giả sử có*

$$CM \cdot DB = CD \cdot MN \Leftrightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{MN}{BD} \Leftrightarrow MN \parallel BD \parallel AC$$

Do vậy, khi trình bày lời giải chúng ta xuất phát từ giả thiết $Ax \parallel By$ cùng kết quả vừa thu được ở ý thứ nhất để có nhận xét $MN \parallel BD$.

3 CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Để chứng minh đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau

Cách 1: Nếu biết một giao điểm A của d và (O) thì ta chứng minh $OA \perp d$.

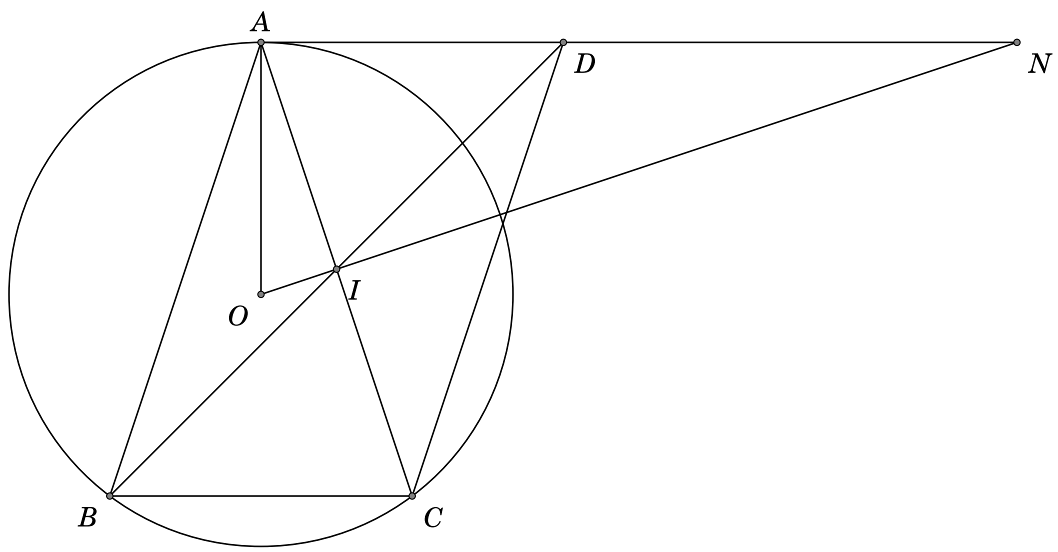
Cách 2: Hạ OA vuông góc với d, ta đi chứng minh $OA = R$.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ hình bình hành $ABCD$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh rằng

① Đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

② Ba đường thẳng AC, BD và ON cùng đi qua một điểm.

✍ **Lời giải.**



① Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $OA \perp BC$.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC \Rightarrow AD \perp OA$.
Điều này chứng tỏ AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

② Gọi I là giao điểm của AC và BD, suy ra I là trung điểm $AC \Rightarrow OI \perp AC$.
Mặt khác, $\triangle AON = \triangle CON \Rightarrow OA = OC$ và $NA = NC$.
Do đó NO là trung trực $AC \Rightarrow ON \perp AC$.
Vậy nên $I \in ON$, suy ra AC, BD, ON cùng đi qua điểm I.

□

Nhận xét. ① *Như vậy, trong ví dụ trên để chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn (O), ta chỉ cần chứng minh $AD \perp OA$ bởi $A \in (O)$.*

② *Với yêu cầu ngược lại "Tìm điều kiện để đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$" ta cần có* $\mathrm{d}(O,d) = R$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ CD vuông góc với OA tại trung điểm I của OA. Các tiếp tuyến với đường tròn tại C và tại D cắt nhau ở M.

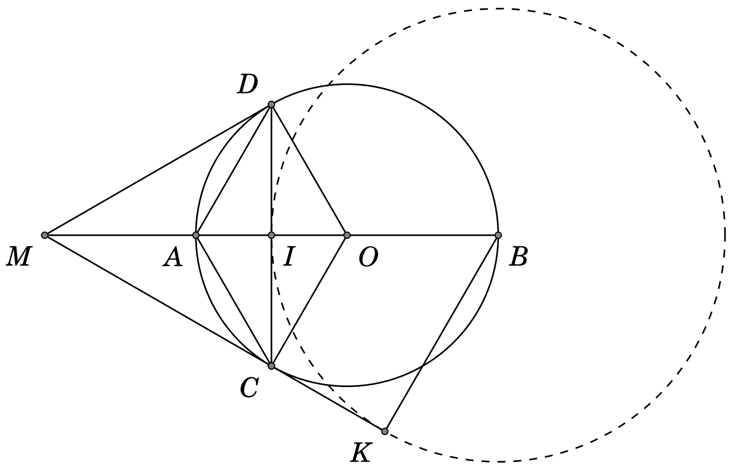
① Chứng minh rằng ba điểm M, A, B thẳng hàng.

② Tứ giác $OCAD$ là hình gì?

③ Tính $\widehat{CMD}$.

④ Chứng minh rằng đường thẳng MC là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BI)$.

✍ **Lời giải.**



① Ta có AB là đường kính vuông góc với CD nên AB là đường trung trực của CD.
Ta lại có $MC = MD$ (do $\triangle MDO = \triangle MCO$) nên M thuộc trung trực của CD, tức là $M \in AB$.
Do đó M, A, B thẳng hàng.

② Tứ giác $OCAD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường nên $OCAD$ là hình thoi.

③ Trong $\triangle AOC$ ta có $OA = OC = CA \Leftrightarrow \triangle OAC$ là tam giác đều.
Do đó $\widehat{AOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{CMO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CMD} = 60^\circ$.

④ Hạ BK vuông góc với MC, ta có $\widehat{MCA} = \widehat{DCA} = 30^\circ \Rightarrow CA$ là phân giác của góc $\widehat{MCD}$.
Ta lại có $AC \perp BC$ nên CB là phân giác góc $\widehat{KCD} \Rightarrow BI = BK$.
Do đó MC là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BI)$.

Nhận xét. ① *Ở câu a), để chứng minh M, A, B thẳng hàng chúng ta xác định vị trí của chúng đối với CD và cụ thể chúng nằm trên đường trung trực của CD do đó xuất phát từ nhận xét AB là trung trực của CD chúng ta chỉ cần chứng minh M cũng thuộc trung trực của CD, điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi $MC = MD$.*

② *Ở câu b), chúng ta sử dụng kết quả "Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường".*

③ *Ở câu c), chúng ta sử dụng kết quả câu b) và tính chất của tiếp tuyến đường tròn.*

④ *Ở câu d) chúng ta sử dụng kết quả về vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn để đưa ra kết luận cho tiếp tuyến MC và dễ thấy MD cũng là tiếp tuyến của $(B;BI)$.*

⑤ *Các kết quả ở câu a) và câu d) vẫn đúng nếu thay điều kiện "trung điểm I của OA" bởi "I nằm giữa O và A". Trong trường hợp này ta chứng minh $\widehat{MCA} = \widehat{ACD}$ bằng nhận xét $\widehat{MCA}$ phụ với $\widehat{ACO}$, $\widehat{ACD}$ phụ với $\widehat{CAO}$, mà $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$.*

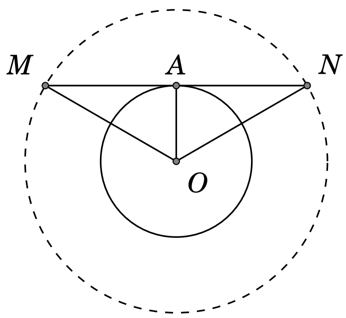
□

4 SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TIẾP TUYẾN ĐỂ TÌM QUỸ TÍCH

Việc sử dụng tính chất của tiếp tuyến để tìm quỹ tích điểm M được hiểu là việc khai thác các tính chất đó để chỉ ra tính chất của điểm M trong phần thuận của bài toán quỹ tích.

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;2\text{ cm})$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy. Trên tia Ax lấy điểm M, trên tia Ay lấy điểm N sao cho $AM = AN = 2\sqrt{3}$ cm. Tìm quỹ tích các điểm M và N.

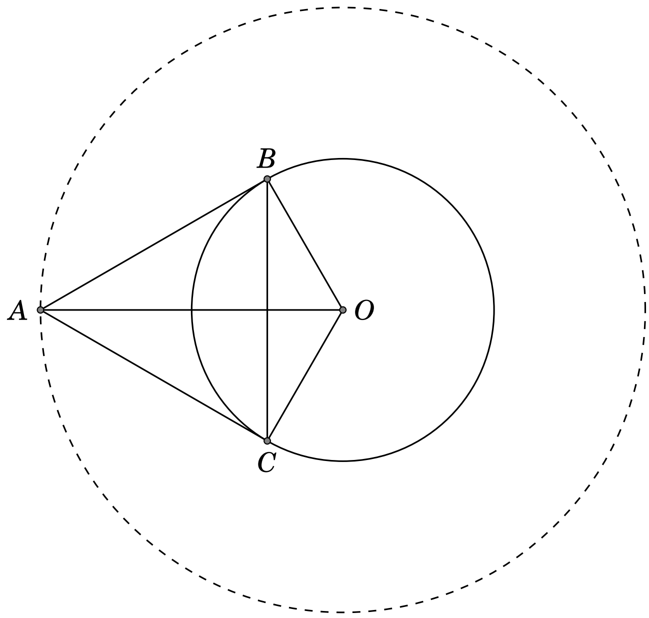
✍ **Lời giải.**



Phần thuận: Với hai điểm M, N điểm A thỏa mãn điều kiện đầu bài.
Trong $\triangle OMN$ ta có OA là đường cao và trung tuyến nên $\triangle OMN$ cân tại O. Suy ra $OM = ON$.
Trong $\triangle OAM$ vuông tại A, ta có $OM = \sqrt{OA^2 + MA^2} = 4$ cm.
Do đó M, N cùng thuộc đường tròn $(O;4\text{ cm})$.
Phần đảo: Lấy điểm A bất kì trên $(O;2\text{ cm})$.
Từ A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn $(O;2\text{ cm})$ cắt đường tròn $(O;4\text{ cm})$ tại M và N.
Chứng minh $AM = AN = 2\sqrt{3}$ cm. Thật vậy, $OA \perp MN$ nên
$AM = AN = \sqrt{OM^2 - OA^2} = 2\sqrt{3}$ cm.
Kết luận: Quỹ tích của các điểm M, N là đường tròn $(O;4\text{ cm})$. □

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O;R)$. Tìm quỹ tích của điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC đến $(O;R)$ sao cho $\widehat{BAC} = 60°$.

✍ **Lời giải.**



Phần thuận: Giả sử tồn tại điểm A thỏa mãn điều kiện đầu bài.
Trong $\triangle OAB$ ta có $\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 30^\circ$ (do $\triangle OAB = \triangle OAC$).
Do đó $OB = \frac{1}{2}OA \Rightarrow OA = 2OB = 2R$.
Vậy nên A thuộc đường tròn $(O;2R)$.
Phần đảo: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn $(O;2R)$.
Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn $(O;R)$. Ta cần chứng minh $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
Trong $\triangle OAB$, ta có $OB = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} = 60^\circ$.
Kết luận: Quỹ tích của điểm A là đường tròn $(O;2R)$. □

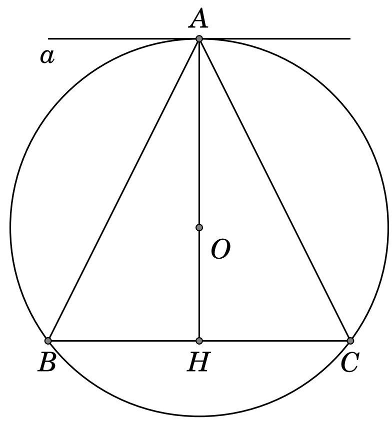
Nhận xét. ① *Trong lời giải trên, dựa vào dạng đặc biệt của $\triangle OAB$ vuông tại B, chúng ta tính được độ dài đoạn OA bằng cách sử dụng hệ thức lượng giác cho góc $\widehat{BAO}$.*

② *Chúng ta sẽ đi giải bài toán tổng quát là*
"Cho đường tròn $(O;R)$. Tìm quỹ tích của điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC đến $(O;R)$ sao cho $\widehat{BAC} = 2\alpha$".
Ta sẽ lần lượt thực hiện:
***Phần thuận:** Giả sử tồn tại điểm A thỏa mãn điều kiện đầu bài.*
Trong $\triangle OAB$ ta có $\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \alpha$ (do $\triangle OAB = \triangle OAC$). Do đó $OB = OA\sin\alpha \Rightarrow OA = \frac{R}{\sin\alpha}$.
Vậy nên A thuộc đường tròn $\left(O;\frac{R}{\sin\alpha}\right)$.
***Phần đảo:** Lấy điểm A bất kì trên đường tròn $\left(O;\frac{R}{\sin\alpha}\right)$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn $(O;R)$. Ta cần chứng minh $\widehat{BAC} = 2\alpha$.*
Trong $\triangle OAB$, ta có $\sin\widehat{BAO} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{\frac{R}{\sin\alpha}} = \sin\alpha \Rightarrow \widehat{BAO} = \alpha \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\alpha$.
***Kết luận:** Quỹ tích của điểm A là đường tròn $\left(O;\frac{R}{\sin\alpha}\right)$.*

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại A. Chứng minh rằng $a \parallel BC$.

✍ **Lời giải.**



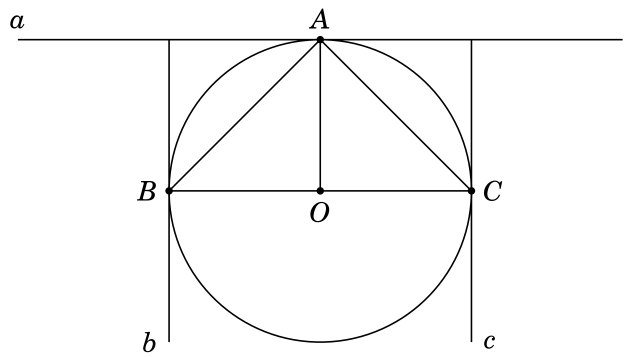
Cách dựng: Dựng đường thẳng qua A và vuông góc với OA.
Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thuộc đường cao AH.
Do đó $AO \perp BC$.
Mặt khác, $a \perp OA$ nên $a \parallel BC$. □

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A.

① Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại A. Chứng minh rằng $a \parallel BC$.

② Hãy nêu cách dựng các tiếp tuyến b, c của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại B và C. Chứng minh rằng $b \parallel c$.

✍ **Lời giải.**



① **Cách dựng:** Dựng đường thẳng qua A và vuông góc với OA.
Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là trung điểm BC và $AO \perp BC$.
Mặt khác, $a \perp OA$ nên $a \parallel BC$.

② **Cách dựng:** Dựng đường thẳng b qua B và vuông góc với OB. Dựng đường thẳng c qua C và vuông góc với OC.
Ta có b qua B và vuông góc với BC và c qua C và vuông góc BC.
Do đó $b \parallel c$.

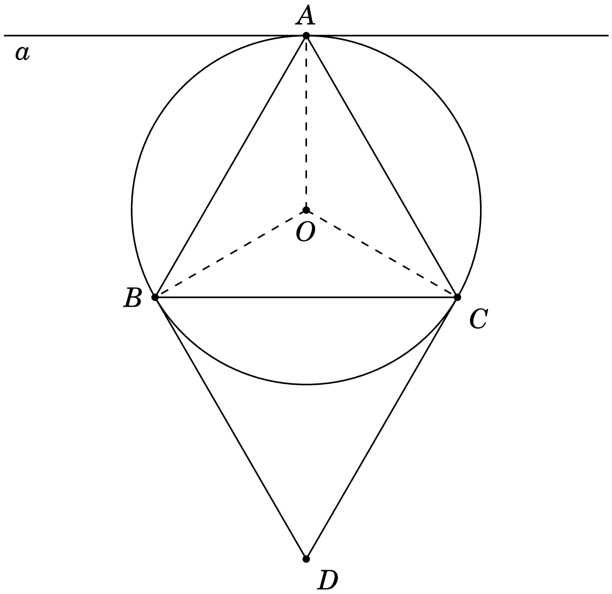
□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ đều.

① Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại A. Chứng minh rằng $a \parallel BC$.

② Hãy nêu cách dựng các tiếp tuyến b, c của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại B và C. Giả sử b và c cắt nhau tại D. Chứng minh rằng $\triangle BCD$ đều.

✍ **Lời giải.**



① **Cách dựng:** Dựng đường thẳng qua A và vuông góc với OA.
Vì $\triangle ABC$ đều nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thuộc đường cao AH.
Do đó $AO \perp BC$.
Mặt khác, $a \perp OA$ nên $a \parallel BC$.

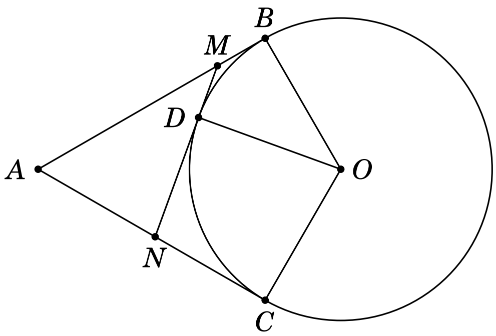
② **Cách dựng:** Dựng đường thẳng b qua B và vuông góc với OB. Dựng đường thẳng c qua C và vuông góc với OC.
Xét $\triangle BCD$, ta có
$BD = DC$ (do $\triangle OBD = \triangle OCD$)
và $\widehat{CBD} = \widehat{OBD} - \widehat{OBC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
Do đó $\triangle BCD$ đều.

□

Bài 4. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Trên cung nhỏ BC lấy điểm D. Tiếp tuyến tại D của đường tròn cắt AB tại M, cắt AC tại N. Cho biết hình tính của $\triangle ABC$ và tính chu vi của $\triangle AMN$ trong các trường hợp sau:

① $OA = 2R$. ② $OA = R\sqrt{2}$.

✍ **Lời giải.**



Ta có $AB = AC$ (do $\triangle OAB = \triangle OAC$) nên $\triangle ABC$ cân tại A.
Ta lại có $MD = MB$ (do $\triangle OMD = \triangle OMB$) và $ND = NC$ (do $\triangle OND = \triangle ONC$).
Chu vi $\triangle AMN$ là

$$\begin{aligned} P &= AM + AN + MN \\ &= AM + AN + MD + ND \\ &= AM + AN + MB + NC \\ &= AB + AC \\ &= 2AB \end{aligned}$$

Ngoài ra $\sin\widehat{OAB} = \dfrac{OB}{OA}$.

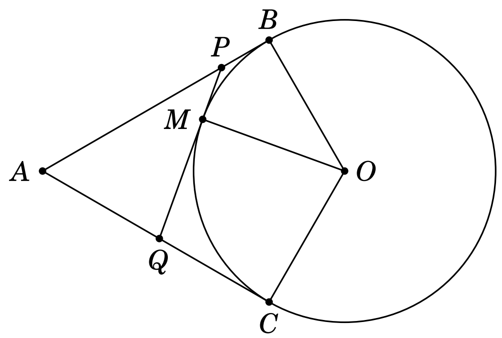
① Với $OA = 2R$ ta có $\sin\widehat{OAB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OAB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 60^\circ$
nên $\triangle ABC$ đều.
Khi đó $P = 2AB = 2\sqrt{OA^2 - OB^2} = 2\sqrt{4R^2 - R^2} = 2R\sqrt{3}$.

② Với $OA = R\sqrt{2}$ ta có $\sin\widehat{OAB} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{OAB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 90^\circ$
nên $\triangle ABC$ vuông cân tại A.
Khi đó $P = 2AB = 2\sqrt{OA^2 - OB^2} = 2\sqrt{2R^2 - R^2} = 2R$.

□

Bài 5. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ hay tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba cắt hai tiếp tuyến kia tại P và Q. Khẳng định khi điểm M di động trên cung BC thì chu vi $\triangle APQ$ có giá trị không đổi là đúng hay sai?

✍ **Lời giải.**



Ta có $AB = AC$ (do $\triangle OAB = \triangle OAC$).
Ta lại có $PM = PB$ (do $\triangle OPM = \triangle OPB$) và $QM = QC$ (do $\triangle OQM = \triangle OQC$).
Chu vi $\triangle APQ$ là

$$\begin{aligned} AP + AQ + PQ &= AP + AQ + MP + MQ \\ &= AP + AQ + PB + QC \\ &= AB + AC \\ &= 2AB \text{ là không đổi.} \end{aligned}$$

□

Bài 6. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy. Vẽ AD và BC vuông góc với xy.

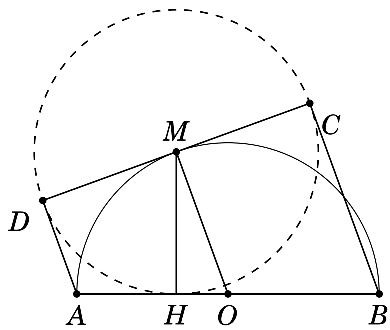
① Khẳng định $MC = MD$ là đúng hay sai?

② Khẳng định $AD + BC$ có giá trị không đổi khi M chuyển động trên đường tròn là đúng hay sai?

③ Khẳng định đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB là đúng hay sai?

④ Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) để diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất.

✍ **Lời giải.**



① Xét tứ giác $ABCD$ có $AD \parallel BC$ (do cùng vuông góc với xy)
$\Rightarrow ABCD$ là hình thang vuông.
Mặt khác, ta lại có $\begin{cases} OA = OB \\ OM \parallel AD \end{cases} \Leftrightarrow OM$ là đường trung bình.
Do đó $MC = MD$.

② Theo câu trên ta có $AD + BC = 2OM = 2R$ không đổi.

③ Hạ MH vuông góc với AB, ta có ngay $MH = MC$.
Vậy đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB.

④ Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = R \cdot CD$.
Do đó S_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi CD lớn nhất.
Trong hình thang vuông $ABCD$, ta có nhận xét $CD \leq AB = 2R \Rightarrow CD_{max} = 2R$ đạt được khi $ABCD$ là hình chữ nhật.
Điều này chỉ xảy ra khi M là điểm chính giữa của cung tròn đường kính AB.

□

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, d là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt d theo thứ tự ở D và E.

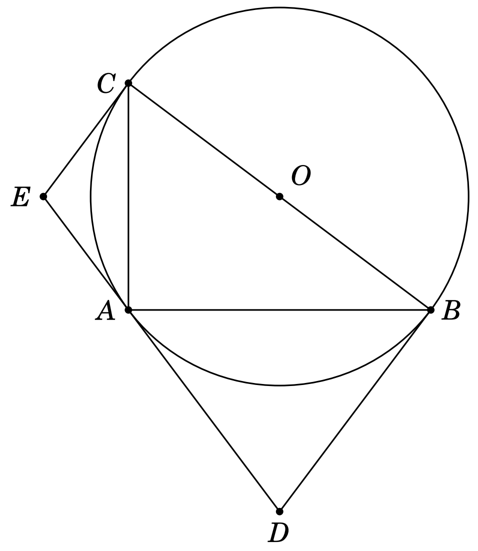
① Tính $\widehat{DOE}$.

② Khẳng định $DE = BD + CE$ là đúng hay sai?

③ Khẳng định $BD \cdot CE = R^2$ là đúng hay sai? (R là bán kính đường tròn (O))

④ Khẳng định BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE là đúng hay sai?

✍ **Lời giải.**



Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên O là trung điểm BC.

① Ta có $\triangle ODA = \triangle ODB \Rightarrow \begin{cases} DA = DB \\ \widehat{DOA} = \widehat{DOB} \end{cases}$

$\triangle OEA = \triangle OEC \Rightarrow \begin{cases} EA = EC \\ \widehat{EOA} = \widehat{EOC} \end{cases}$.

Suy ra $\widehat{DOE} = \widehat{DOA} + \widehat{EOA} = \dfrac{1}{2}(\widehat{AOB} + \widehat{AOC}) = \dfrac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.

② Từ câu trên $DE = DA + EA = DB + EC$.

③ Ta có $\triangle OBC \backsim \triangle ECO \Rightarrow \dfrac{OB}{EC} = \dfrac{BD}{OC} \Rightarrow BD \cdot CE = OC \cdot OC = R^2$.

④ Gọi I là trung điểm DE, suy ra I là tâm đường tròn đường kính DE.
Trong hình thang vuông $BCED$ ta có OI là đường trung bình
nên $OI \parallel BD \Rightarrow OI \perp BC$ (do $BC \perp BD$).
Do đó BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

□

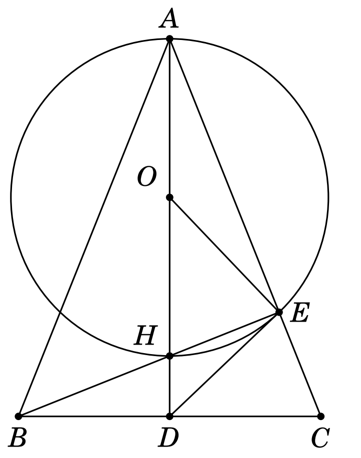
Bài 8. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, các đường cao AD và BE cắt nhau ở H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

① Khẳng định $BC = 2DE$ là đúng hay sai?

② Khẳng định DE là tiếp tuyến của (O) là đúng hay sai?

③ Tính độ dài DE biết $DH = 2$ cm, $HA = 6$ cm.

✍ **Lời giải.**



Vì $\triangle ABC$ cân tại A, đường cao AD, do đó D là trung điểm BC.

① Trong $\triangle BCE$ vuông tại E có ED là trung tuyến nên $BC = 2ED$.

② Do $\triangle OHE$ cân tại O và $\triangle DCE$ cân tại D nên ta có
$\widehat{OEH} = \widehat{OHE} = \widehat{BHD} = \widehat{BCE} = \widehat{DEC}$.
Do đó $\widehat{DEH} + \widehat{OEH} = \widehat{DEH} + \widehat{DEC} = \widehat{HEC} = 90^\circ$. Từ đó có điều phải chứng minh.

③ Ta có $HA = 6 \Rightarrow OH = 3 \Rightarrow OD = 5$
mà $OE = 3$ nên $DE = \sqrt{OD^2 - OE^2} = 4$ (cm).

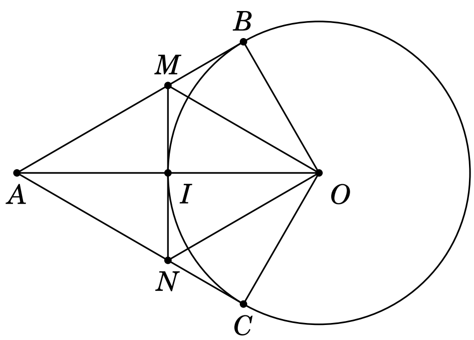
□

Bài 9. Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M.

① Xác định hình tính của tứ giác $AMON$.

② Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để MN là tiếp tuyến của (O)?

✍ **Lời giải.**



① Xét tứ giác $AMON$ ta có $\begin{cases} AM \parallel ON & \text{(cùng vuông góc với } OB) \\ AN \parallel OM & \text{(cùng vuông góc với } OC) \end{cases}$
Do đó $AMON$ là hình bình hành.
Mặt khác, xét hai tam giác vuông $\triangle OBM$ và $\triangle OCN$ ta có
$\begin{cases} OB = OC = R \\ \widehat{MOB} = \widehat{NOC} & \text{(cùng phụ với góc } \widehat{MON}) \end{cases}$.

Do đó $\triangle OBM = \triangle OCN \Rightarrow OM = ON$.
Vậy $AMON$ là hình thoi.

② Để MN tiếp xúc với $(O;R)$ thì $\mathrm{d}(O;MN) = R \Leftrightarrow OI = R \Leftrightarrow AO = 2R$.

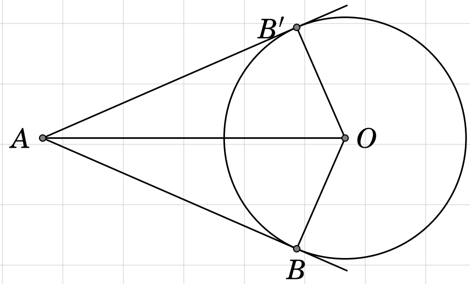
□

BÀI 6. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Với hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm, ta có kết quả "*Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì giao điểm này cách đều hai tiếp điểm và tia kẻ từ giao điểm đó qua tâm của đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến*".

Như vậy:
AB và AB' là hai tiếp tuyến của (O)
$\Rightarrow \begin{cases} AB = AB' \\ \widehat{OAB} = \widehat{OAB'} \end{cases}.$



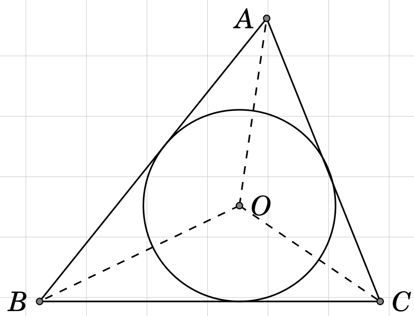
1 ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

Định nghĩa 1. Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác.

Khi đó,

① Tam giác đó gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.

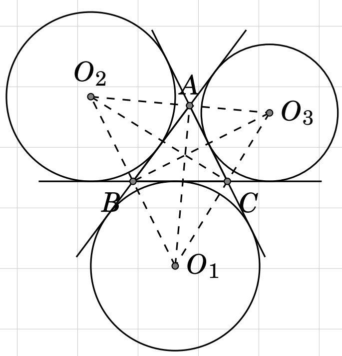
② Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác (trong thực tế ta chỉ cần lấy giao điểm của hai đường phân giác bởi trong một tam giác ba đường phân giác đồng quy).



2 ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC

Định nghĩa 2. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và các phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.

Như vậy, với $\triangle ABC$ tồn tại ba đường tròn bàng tiếp và tâm của một đường tròn bàng tiếp là giao điểm của một đường phân giác trong với hai phân giác ngoài.

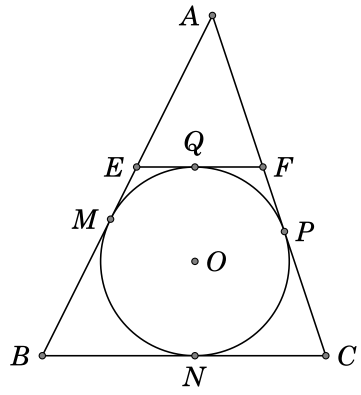


B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$, biết $BC = 6$. Lấy E, F theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho EF song song với BC và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Tính chu vi $\triangle ABC$, biết $EF = 2$ cm.

✍ Lời giải.

Ta có hai $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng, do đó: $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AE}{AB}$. (1)



Ta có:

$$\begin{cases} c = AB = AM + MB = AM + NB. \\ b = AC = AP + PC = AM + NC. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad b + c = 2AM + BC = 2AM + 6.$$
$$\Leftrightarrow \quad AM = AP = \frac{1}{2}(b + c - a) = p - a. \quad (2)$$

$$\begin{cases} AM = AE + EM = AE + EQ. \\ AM = AP = AF + FP = AF + FQ. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad 2AM = AE + AF + EF.$$
$$\Leftrightarrow \quad AM = AP = p_{\triangle AEF}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được: $\dfrac{2}{6} = \dfrac{p-6}{p} \Leftrightarrow p = 9$ cm.

Vậy chu vi của $\triangle ABC$ bằng 18 cm. □

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh a, b, c và diện tích bằng S. Đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1. Giả sử $\triangle A_1B_1C_1$ có độ dài ba cạnh tương ứng là a_1, b_1, c_1. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right).\sin\frac{C}{2}.$$

✍ Lời giải.

Trong $\triangle A_1B_1C_1$ ta có:

$$a_1 = B_1C_1 = 2r.\sin A_1 = 2r.\sin\frac{\widehat{B_1IC_1}}{2} = 2r.\sin\frac{\pi - A}{2} = 2r.\cos\frac{A}{2}.$$

Tương tự ta được $b_1 = 2r.\cos\dfrac{B}{2}$.

Trong $\triangle BIC$, ta có:

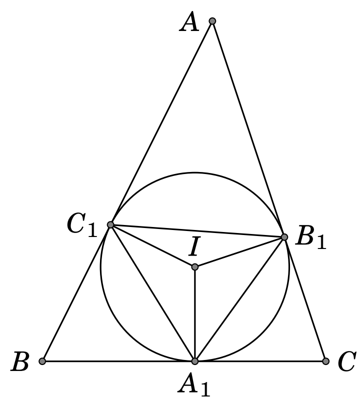
$$a = BC = BA_1 + CA_1 = r.\cot\frac{B}{2} + r.\cot\frac{C}{2} = r.\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{r.\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}}.$$

Tương tự ta được

$$b = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}}.$$

Từ đó:

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b} = 2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2} = 2\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right).\sin\frac{C}{2}.$$

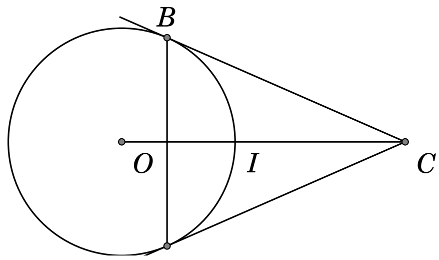


□

> **Ví dụ 3.** Cho đường tròn (O), còn B là điểm di động trên (O). Các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại C. Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

✍ **Lời giải.**

Gọi I là giao điểm của OC với (C), ta có ngay AI là phân giác góc A, từ đó suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
Vậy tập hợp tâm I thuộc đường tròn (C) ngoại trừ ba điểm A, A_1, A_2, trong đó A_1A_2 là đường kính vuông góc với OA.



□

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ đều.

① Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, biết tiếp tuyến đi qua điểm A.

② Khẳng định $d \parallel BC$ đúng hay sai?

③ Hãy nêu cách dựng các tiếp tuyến b, c của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, biết rằng các tiếp tuyến này theo thứ tự đi qua điểm B, C. Giả sử b cắt c tại D.

④ Khẳng định $\triangle BCD$ đều là đúng hay sai?

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự ở D, E.

① Tính $\widehat{BIC}$.

② Tính diện tích tứ giác $ADIE$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A, O là trung điểm của IK.

① Khẳng định bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn tâm O là đúng hay sai?

② Khẳng định AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) là đúng hay sai?

Bài 4. Cho $(O;R)$. Tìm quỹ tích của điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới $(O;R)$.

Bài 5. Cho đường thẳng d và một điểm A ở trên đường thẳng đó. Tìm tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm A.

Bài 6. Cho đường thẳng (d). Tìm tập hợp tâm các đường tròn có bán kính bằng R và tiếp xúc với đường thẳng (d).

Bài 7. Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b. Tìm tập hợp các đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng đó.

Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định trên đường tròn đó. Qua A, kẻ tiếp tuyến xy. Từ điểm M trên xy vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). hai đường cao AD VÀ BE của tam giác MAB cắt nhau tại H.

① Khẳng định ba điểm M, H, O thẳng hàng là đúng hay sai?

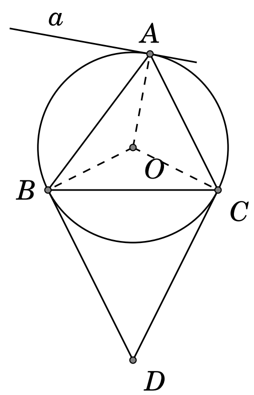
② Xác định dạng của tứ giác $AOBH$.

③ Tìm quỹ tích của điểm H khi M chạy trên xy.

D HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. ✍ **Lời giải.**

Ta có ngay:



- Tiếp tuyến qua B là đường thẳng b qua B và vuông góc với OB.
- Tiếp tuyến qua C là đường thẳng c qua C và vuông góc với OC. Xét $\triangle BCD$, ta có:

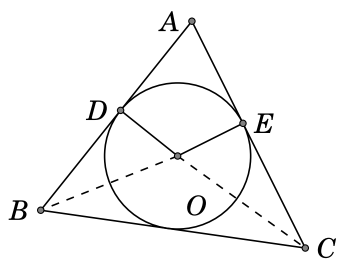
$BD = DC$, tính chất hai tiếp tuyến với đường tròn cùng đi qua D.
$\widehat{CBD} = \widehat{OBD} - \widehat{OBC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
Do đó $\triangle BCD$ đều (tam giác cân có một góc bằng 60°).

□

Bài 2. ✍ **Lời giải.**

①

Trong $\triangle IBC$, ta có:



$$\begin{aligned}\widehat{BIC} &= 180^\circ - \left(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}\right)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}.90^\circ = 135^\circ.\end{aligned}$$

② Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Xét tứ giác $ADIE$, ta có:

$$\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ \quad \text{và} \quad ID = IE = r \Rightarrow ADIE \quad \text{là hình vuông.}$$

Do đó $S_{\triangle ADIE} = ID^2 = r^2$.

Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}p.r = \frac{1}{2}(AB+AC+BC).r$$
$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{AB.AC}{AB+AC+\sqrt{AB^2+AC^2}} = \frac{6.8}{6+8+\sqrt{6^2+8^2}} = 2\text{ cm}.$$

Vậy ta được: $S_{ADIE} = 2^2 = 4\text{ cm}^2$. □

Bài 3. ✍ **Lời giải.**

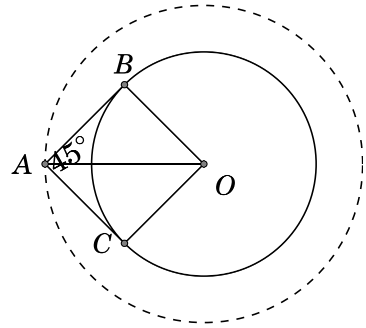
Đúng. □

Bài 4. ✍ **Lời giải.**

Ta thực hiện theo các phần sau:

Phần thuận: Giả sử tồn tại điểm A thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Trong $\triangle OAB$, ta có:



$$\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 45^\circ \Rightarrow BA = OB = R.$$

$$OA = \sqrt{OB^2+BA^2} = R\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow A$ thuộc đường tròn $(O;R\sqrt{2})$.

Phần đảo: Lấy điểm A bất kỳ trên đường tròn $(O;2R)$.

Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB,AC với đường tròn $(O;R)$. Ta phải chứng minh $\triangle BAC = 60^\circ$.

Trong $\triangle OAB$, ta có:

$$\sin\widehat{BAO} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} = 90^\circ.$$

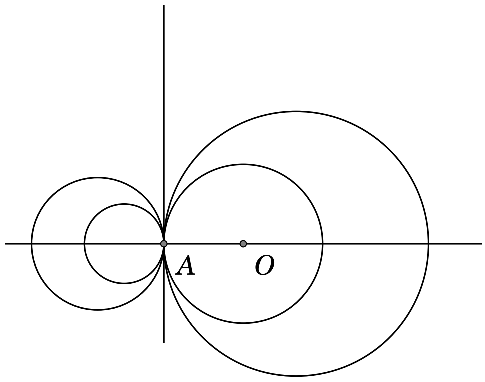
Kết luận: Qũy tích của điểm A là đường tròn $(O;\sqrt{2})$. □

Bài 5. ✍ **Lời giải.**

Đáp số trắc nghiệm C.

Đường tròn (O) tiếp xúc với d tại $A \Rightarrow OA \perp d$.

Vậy quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với d tại A là đường thẳng đi qua A và vuông góc với d.



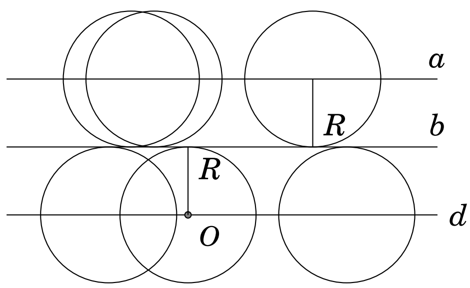
□

Bài 6. ✍ **Lời giải.**

Đáp số trắc nghiệm C.

Đường tròn (O) tiếp xúc với d nếu $d(O,a) = R$.

Vậy quỹ tích tâm các đường tròn có bán kính R tiếp xúc với d là hai đường thẳng a,b song song và khoảng cách từ chúng đến d bằng R.



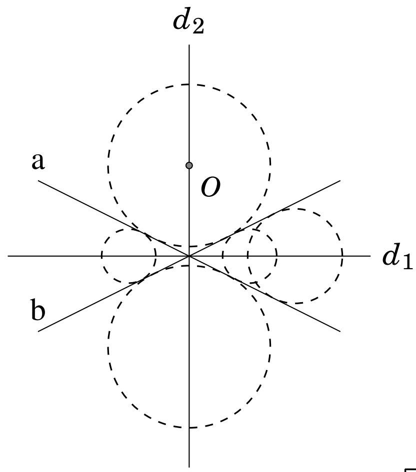
□

Bài 7. ✍ **Lời giải.**

Đáp số trắc nghiệm D.

Đường tròn (O) tiếp xúc với a và b thì $d(O,a) = d(O,b)$.

Vậy quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với a và b là hai đường phân giác d_1 và d_2 của góc tạo bởi a và b.



□

Bài 8. ✍ **Lời giải.**

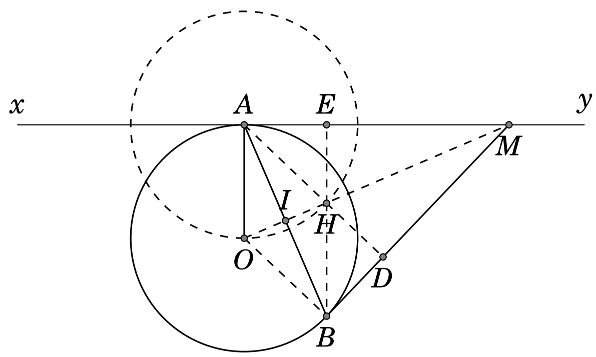
① Đáp số trắc nghiệm D.

• Vì MA, MB là tiếp tuyến nên M, O, I thẳng hàng.

• Vì $\triangle MAB$ cân tại M nên MI là đường cao.

Do đó M, H, I thẳng hàng.

Vậy ba điểm M, H, O thẳng hàng.



② Đáp số trắc nghiệm B.

Xét tứ giác $AOBH$, ta có:

$AO \parallel BH$, vì cùng vuông góc với MA.

$AO \parallel OB$, vì cùng vuông góc với MB.

Do đó $AOBH$ là hình bình hành.

Mặt khác, ta có ngay $OA = OB = R$.

Vậy $AOBH$ là hình thoi (vì nó là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau).

③ Đáp số trắc nghiệm A.

Theo kết quả câu a), ta có:

$$AH = OA = R \Rightarrow H \in (A,R).$$

□

Hạn chế quỹ tích: *Học sinh tự làm.*

BÀI 7. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hai đường tròn phân biệt không thể có quá hai điểm chung, bởi vì qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn, còn qua ba điểm không thẳng hàng chỉ có một đường tròn duy nhất.
Như vậy, hai đường tròn phân biệt chỉ có thể:

— Có hai điểm chung.

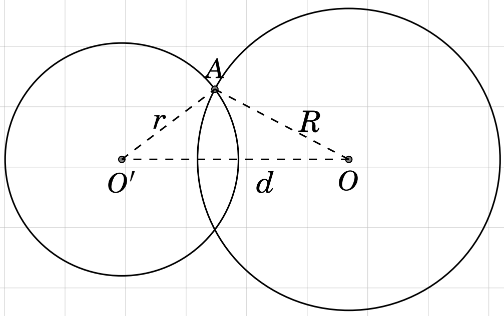
— Có một điểm chung duy nhất.

— Không có điểm chung.

Hai đường tròn nếu có nhiều hơn hai điểm chung thì chúng trùng nhau.

1 HAI ĐƯỜNG TRÒN CÓ HAI ĐIỂM CHUNG

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $R > r$ và $d = OO'$. Trường hợp này gọi là hai đường tròn cắt nhau, mỗi điểm chung gọi là một giao điểm.



Sử dụng bất đẳng thức tam giác trong $\triangle AOO'$ ta có

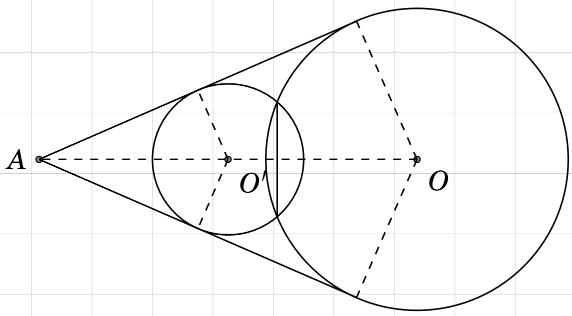
$$OA - O'A < OO' < OA + O'A,$$

từ đó suy ra điều kiện

$$R - r < d < R + r.$$

Nhận xét.

Hai đường tròn cắt nhau

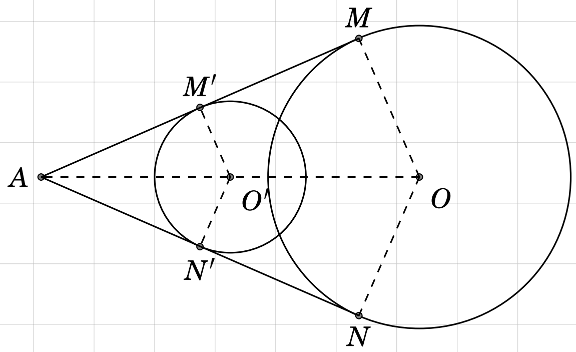


— *Có hai tiếp tuyến chung và chúng đồng quy với đường thẳng OO'.*

— *Nếu bài toán cần vẽ đường phụ, ta thường vẽ thêm dây chung của chúng.*

Bài toán: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $r < R$ cắt nhau tại A và B. Hãy dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó, biết $OO' = d$.

Lời giải



Phân tích.

Giả sử đã dựng được tiếp tuyến chung của hai đường tròn và M, M' theo thứ tự là tiếp điểm của tiếp tuyến chung với $(O;R)$ và (O',r). Gọi A là điểm đồng quy của hai tiếp tuyến với OO', ta có

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{r}{R} \Rightarrow AO' = (AO' + O'O)\cdot\frac{r}{R} \Leftrightarrow AO' = \frac{rd}{R-r}.$$

$\Rightarrow$ Xác định được vị trí điểm A. Khi đó

- Tiếp điểm M' là giao điểm của (O') và đường tròn đường kính AO'.
- Tiếp điểm M là giao điểm của đường thẳng AM' và đường tròn (O).

Cách dựng: Ta thực hiện

- Xác định điểm A trên tia OO' sao cho $AO' = \dfrac{rd}{R-r}$.
- Dựng đường tròn đường kính AO', đường tròn này cắt (O') tại M'.
- Dựng đường thẳng AM', đó chính là tiếp tuyến chung cần dựng.

Chứng minh. Ta có ngay $\widehat{AM'O} = 90° \Rightarrow AM'$ là tiếp tuyến của đường tròn (O). Ngoài ra, ta cũng có

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{AO'}{AO' + O'O} = \frac{\dfrac{rd}{R-r}}{\dfrac{rd}{R-r} + d} = \frac{r}{R} = \frac{O'M'}{OM}.$$

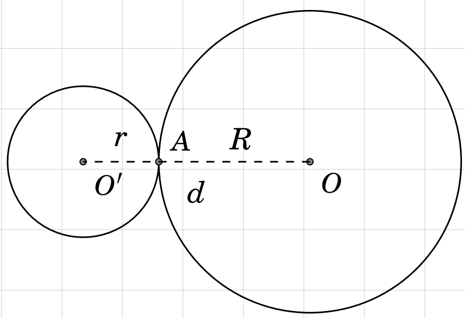
Suy ra $OM \parallel O'M' \Rightarrow OM \parallel AM \Rightarrow AM'$ là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Biện luận. Bài toán có hai nghiệm hình (tức là tồn tại duy nhất hai tiếp tuyến chung của (O) và (O')).

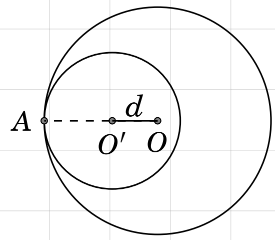
2 HAI ĐƯỜNG TRÒN CHỈ CÓ MỘT ĐIỂM CHUNG

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $R > r$ và $d = OO'$. Trường hợp này gọi là hai đường tròn tiếp xúc nhau và điểm chung duy nhất được gọi là tiếp điểm. Ta có hai khả năng tiếp xúc:

- Tiếp xúc ngoài: $d = R + r$.

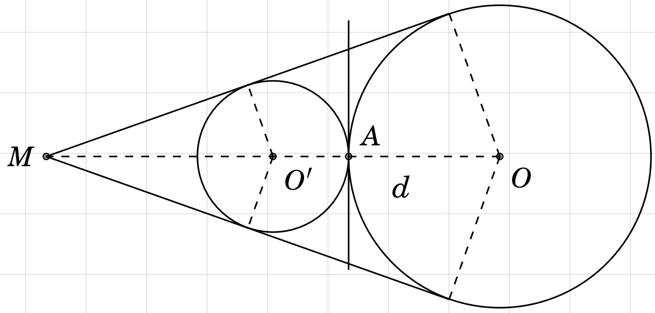


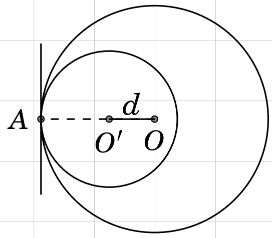
— Tiếp xúc trong: $d = R - r$.



Nhận xét:

— *Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau có ba tiếp tuyến chung.*





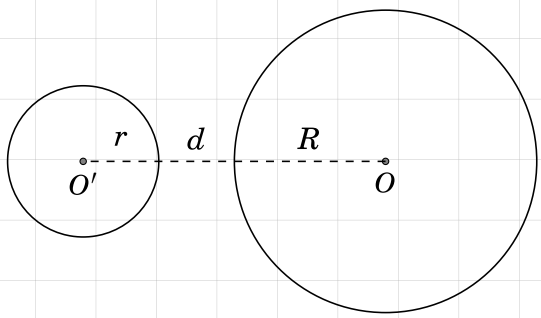
— *Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau có một tiếp tuyến chung.*

— *Hai đường tiếp xúc với nhau mà cần vẽ đường phụ, ta thường vẽ thêm tiếp tuyến chung của chúng.*

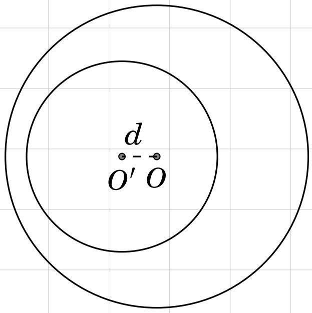
3 HAI ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG CÓ ĐIỂM CHUNG

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $R > r$ và $d = OO'$. Trường hợp này gọi là hai đường tròn không giao nhau. Ta có hai khả năng

— Ngoài nhau: $d > R + r$.



— Trong nhau: $d < R - r$.

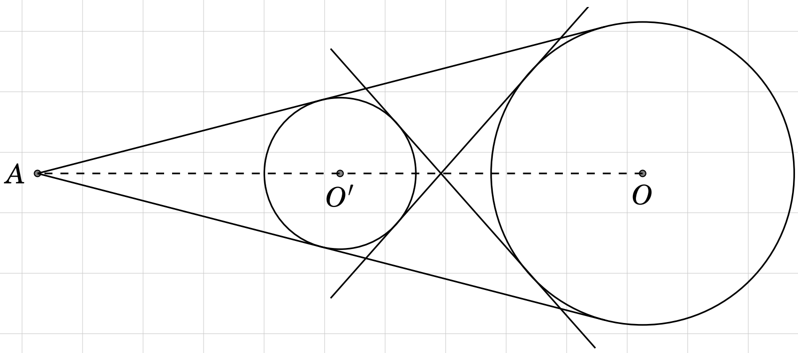


Chú ý.

— *Hai đường tròn phân biệt cùng tâm ($d = 0$) gọi là hai đường tròn đồng tâm.*

— *Hai đường tròn ngoài nhau có bốn tiếp tuyến chung, trong đó*

+ *Có hai tiếp tuyến chung cắt đoạn OO'.*
+ *Có hai tiếp tuyến chung không cắt đoạn OO'.*

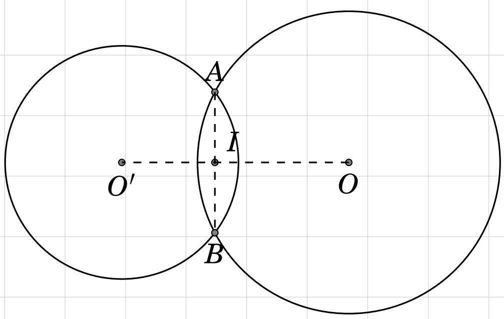


— *Hai đường tròn ở trong nhau không có tiếp tuyến chung.*

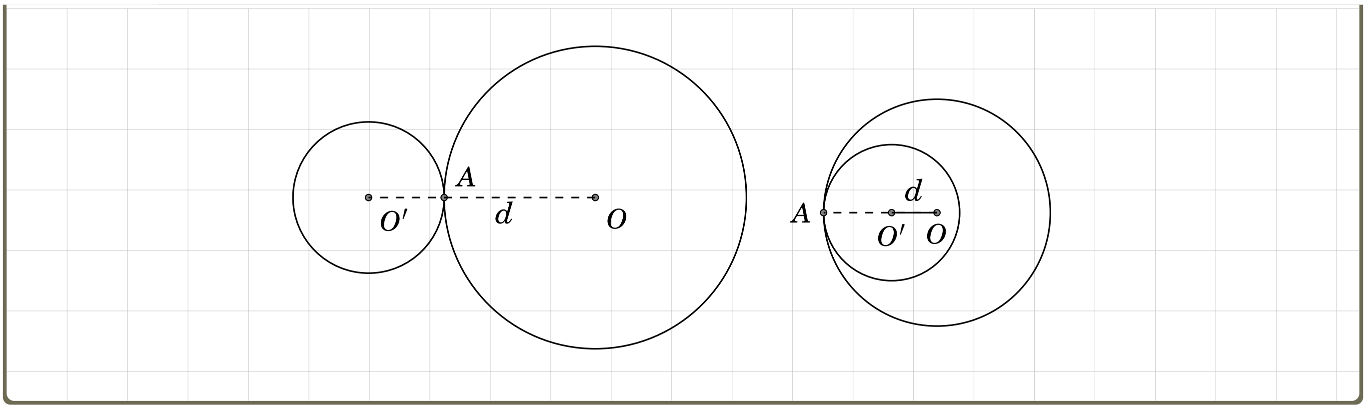
4 MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Đường nối tâm là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.

Tính chất 2. Nếu hai đường tròn cắt nhau thì dây cung vuông góc với đường nối tâm và bị đường này chia làm hai phần bằng nhau. Cụ thể, theo hình vẽ ta có: $OO' \perp AB$ và $IA = IB$.



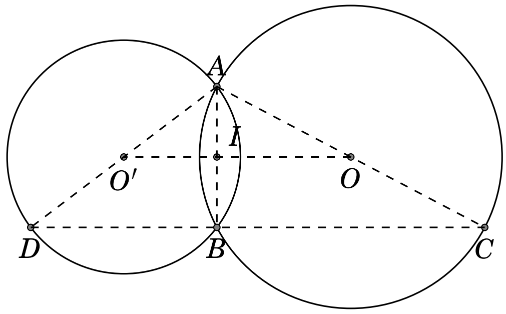
Tính chất 3. Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm. Cụ thể, theo hình vẽ sau ta có O, O', A thẳng hàng.



B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Từ A vẽ đường kính AOC và $AO'D$. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng và AB vuông góc CD.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AB và OO', suy ra I là trung điểm của AB.

- Trong tam giác ABC, ta có OI là đường trung bình nên $OI \parallel BC$.
- Trong tam giác ABD, ta có $O'I$là đường trung bình nên $O'I \parallel BD$.

Suy ra $OO' \parallel BC \parallel BD$, nên ba điểm B, C, D thẳng hàng.
Vì $AB \perp OO' \Rightarrow AB \perp CD$.

Nhận xét:

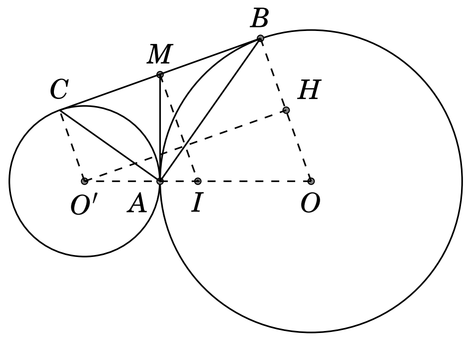
- *Trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã tận dụng đầy đủ tính chất của hai đường tròn cắt nhau.*
- *Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa việc sử dụng tính chất của hai đường tròn tiếp xúc nhau.*

□

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xuca ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC (B thuộc đường tròn (O), C thuộc đường tròn (O').

1. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông.
2. Tính số đo góc $\widehat{OMO'}$.
3. Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r.
4. Gọi I là trung điểm OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn (I, IM).

Lời giải.



① Qua A vẽ tiếp tuyến chung trong, cắt BC tại M, ta có

$$\begin{cases} MA = MB \text{ tính chất tiếp tuyến của } (O;R) \\ MA = MC \text{ tính chất tiếp tuyến của } (O',r). \end{cases}$$

Suy ra $MA = MB = MC = \dfrac{1}{2}BC$.
Tức là $\triangle ABC$ có trung tuyến AM ứng với cạnh BC bằng nửa cạnh đó nên là tam giác vuông.

② Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có

— MO là phân giác của góc $\widehat{AMB}$.
— MO' là tia phân giác của góc $\widehat{AMC}$. Suy ra $\widehat{OMO'} = 90^\circ$ (vì nó hợp bởi hai tia phân giác của hau góc kề bù).

③ Tứ giác $BCO'O$ có $OB \parallel O'C$ (vì cùng vuông góc với BC) nên tứ giác này là hình thang, do đó

$$S_{BCO'O} = \frac{1}{2}(OB + O'C)BC.$$

Hạ $O'D$ vuông góc với OB, suy ra tứ giác $BCO'H$ là hình chữ nhật nên $BC = O'H$.
Trong $\triangle OO'H$ ta có

$$O'H^2 = OO'^2 - OH^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr \Rightarrow O'H = 2\sqrt{Rr}.$$

Vậy ta được

$$S_{BCO'O} = \frac{1}{2}(r+R)\cdot 2\sqrt{Rr} = \sqrt{Rr}(R+r).$$

④ Ta có ngay IM là đường trung bình của hình thang $BCO'O$, do đó $IM \parallel OB \Rightarrow IM \perp BC$.
Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn (I, IM).

⚠ ***Nhận xét:***

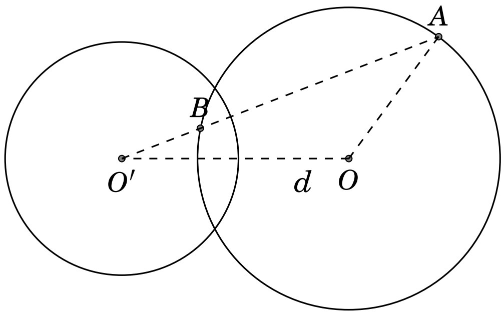
— *Ta cũng có OO' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC.*

— *Chúng ta đã biết rằng "Nếu đường thẳng d đi qua một điểm ở bên trong đường tròn (O) thì nó cắt đường tròn này" và câu hỏi được đặt ra ở đây là nếu thay đường thẳng d bằng một đường tròn thì kết luận được gì về vị trí tương đối của hai đường tròn này. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa nhận định này.*

□

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu một đường tròn đi qua một điểm bên trong và một điểm bên ngoài một đường tròn khác thì hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm.

✍ **Lời giải.**



Giả sử đường (O) đi qua A và B, trong đó A ở ngoài (O'), B ở bên trong (O'). Gọi R, r theo thứ tự là bán kính các đường tròn (O), (O'). Ta có $OA = OB = R$, $O'A > r$ và $O'B < r$.
Xét $\triangle OO'B$ ta có $OO' \leq OB + O'B < R + r$. (1)

— Nếu $R \geq r$ thì trong $\triangle OO'B$, ta có $OO' \geq OB - O'B < R + r$. (2)

— Nếu $R \leq r$ thì trong $\triangle OO'A$, ta có $OO' \geq O'A - OA > r - R$. (3)

Từ đó, ta được $|R - r| < OO' < R + r \Leftrightarrow$ Hai đườn tròn (O) và (O') cắt nhau.

Nhận xét. *Như vậy trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng các kiến thức*

— *Vị trí tương đối của một điểm với đường tròn.*

— *Hệ thức liên hệ giữa các cạnh của tam giác.*

Để từ đó nhận được bất đẳng thức $|R - r| < OO' < R + r$.

□

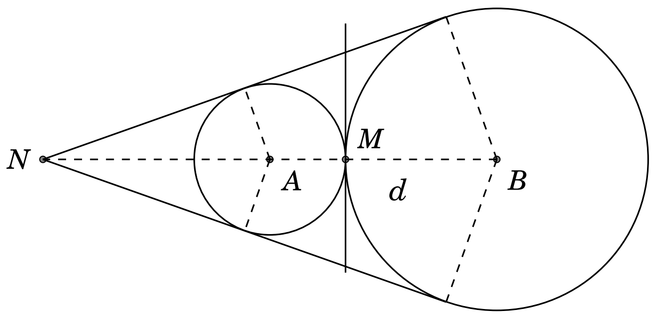
Ví dụ 4. Cho đoạn thẳng AB và một điểm M không trùng với A và B. Vẽ các đường tròn $(A;AM)$ và $(B;BM)$. Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn này, từ đó suy ra số tiếp tuyến chung của chúng.

Lời giải.

Để xét vị trí tương đối của hai đường tròn $(A;AM)$ và đường tròn $(B;BM)$, ta phải xét các trường hợp vị trí của điểm M đối với đoạn thẳng AB.
Trường hợp 1 Điểm M nằm giữa A và B, ta có

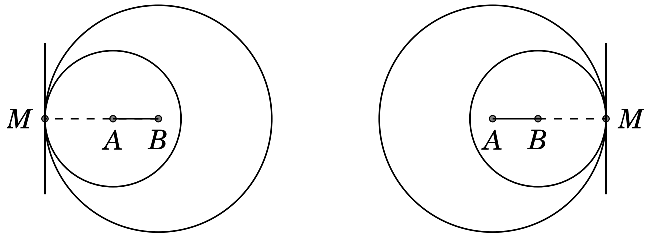
$$AB = AM + MB \Leftrightarrow d = R + r.$$

Vậy hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau và do đó chúng có ba tiếp tuyến chung.



Trường hợp 2: Điểm M nằm trên tia đối của AB (hoặc tia đối của BA), ta có

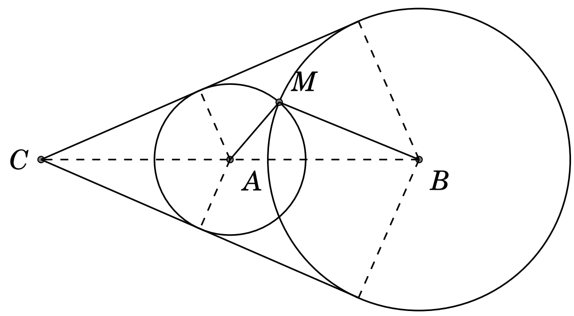
$$\left[\begin{array}{l} AB = BM - AM \Leftrightarrow d = R - r \\ AB = AM - BM \Leftrightarrow d = r - R \end{array}\right..$$



Vậy hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau và do đó chúng có một tiếp tuyến chung.
Trường hợp 3: Điểm M nằm ngoài đường thẳng AB, ta có

$$|MB - MA| < AB < MB + MA \Leftrightarrow |R - r| < d < R + r.$$

Vậy hai đường tròn cắt nhau và do đó chúng có hai tiếp tuyến chung.



Nhận xét: Để tránh bỏ sót trường hợp, các em học sinh hãy nhớ lại vị trí tương đối của điểm và đường thẳng, cụ thể với điểm M và đường thẳng AB (M không trùng với A, B) cho trước, ta có

— Nếu M thuộc đường thẳng AB, khi đó

  + M nằm giữa A và B.
  + A nằm giữa M và B.
  + B nằm giữa A và M.

— M không thuộc đường thẳng AB.

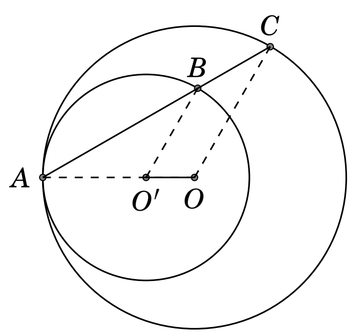
□

Ví dụ 5. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc với nhau tại A. Vẽ một cát tuyến qua A cắt hai đường tròn tại B và C. Chứng minh rằng các tiếp tuyên tại B và C song song với nhau.

✍ **Lời giải.**
Xét hai khả năng tiếp xúc của $(O;R)$ và (O',r).
Trường hợp 1: Nếu $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc trong với nhau. Trong tam giác OAC, ta có

$$\frac{O'B}{OC} = \frac{r}{R} = \frac{O'A}{OA} \Rightarrow O'B \parallel OC.$$

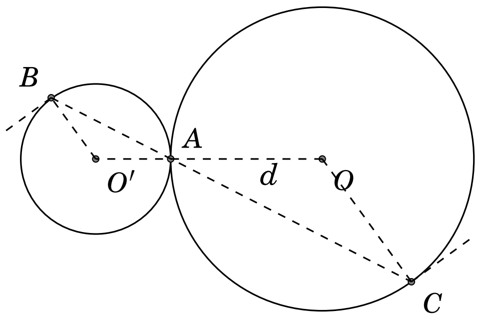
Nên các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau vì chúng vuông góc với $O'B$ và vuông góc với OC.



Trường hợp 2: Nếu $(O;R)$ và (O',r) tiếp xúc ngoài với nhau. Ta có

$$\frac{O'B}{OC}=\frac{r}{R}=\frac{O'A}{OA}\Rightarrow O'B \parallel OC.$$

Nên các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau vì chúng vuông góc với $O'B$ và vuông góc với OC.



Nhận xét: *Cũng với nhận xét như trong ví dụ trước, các em học sinh hãy nhớ rằng với giả thuyết "Hai đường tròn tiếp xúc với nhau" chúng ta cần xét hai trường hợp, đó là*

— *Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.*

— *Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.*

□

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 có cùng bán kính R và tiếp xúc ngoài với nhau đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

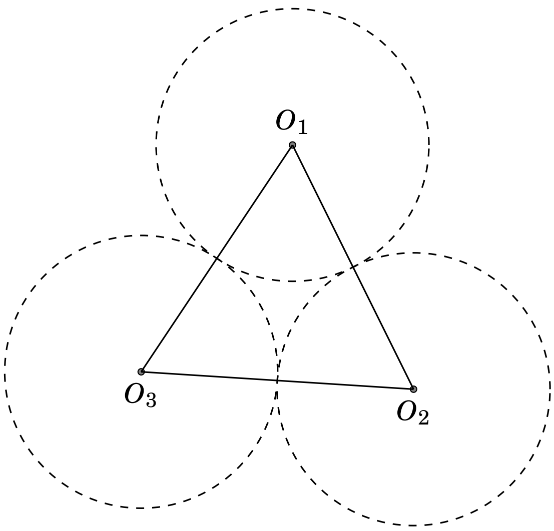
Lời giải.

Xét $\triangle O_1O_2O_3$, ta có

$$O_1O_2=O_2O_3=O_1O_3=2R$$

nên $\triangle O_1O_2O_3$ đều và có cạnh bằng $2R$.

Vậy $S_{\triangle O_1O_2O_3}=\dfrac{(2R)^2\sqrt{3}}{4}=R^2\sqrt{3}$.



□

Bài 2. Cho đoạn thẳng $AB=2a$. gọi M là trung điểm AB.

① Vẽ các đường tròn $(A;a)$ và $(B;a)$. Chứng minh rằng hai đường tròn này tiếp xúc ngoài với nhau.

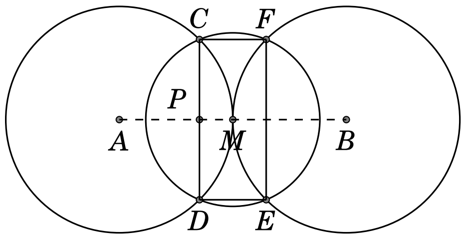
② Vẽ một đường tròn tâm M cắt hai đường tròn (A) và (B) lần lượt tại C, D, E, F (C và F cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng tứ giác $CDEF$ là hình chữ nhật.

③ Xác định bán kính của đường tròn (M) để cho tứ giác $CDEF$ là hình vuông.

✍ **Lời giải.**

c) Để $CDEF$ là hình vuông điều kiện là $CE \perp DF \Leftrightarrow \widehat{AMC} = 45°$.

Khi đó, trong tam giác ACM cân tại A với $\widehat{AMC} = 45°$, ta được $CM = a\sqrt{2}$.



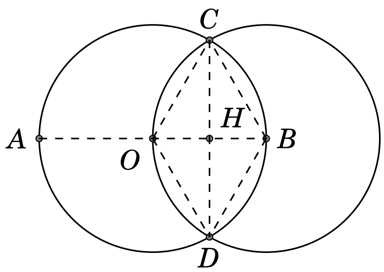
□

Bài 3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ đường tròn $(B;OB)$ cắt đường tròn (O) ở C, D.

① Xác định dạng tứ giác $OCDB$.

② Xác định dạng tam giác ACD.

✍ **Lời giải.**



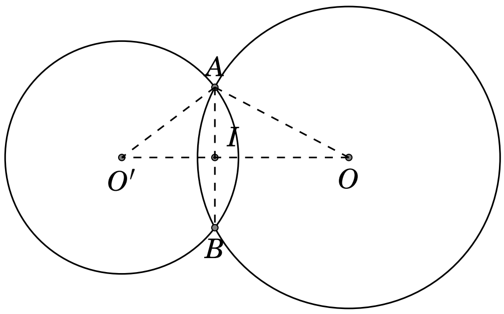
① Ta có ngay $OC = OD = OB$ và $BC = BD = BO$. Suy ra $OC = CB = BD = DO \Leftrightarrow OCBD$ là hình thoi.

② Trong tam giác ABC vuông tại C, ta có $BC = \dfrac{1}{2}AB$ suy ra $\widehat{BAC} = 30° \Rightarrow \widehat{CAD} = 60°$ nên $\triangle ACD$ đều.

□

Bài 4. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, trong đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Tính dây cung AB biết $OA = 2$cm, $O'A = 15$cm.

✍ **Lời giải.**



Gọi I là trung điểm AB, suy ra $AB = 2AI$ và $AI \perp OO'$.

Trong tam giác vuông OAO', ta có

$$S_{\triangle OAO'} = \frac{1}{2}OA \cdot OA' = \frac{1}{2}AI \cdot OO' = \frac{1}{2}AI \cdot \sqrt{OA^2 + O'A^2}$$

suy ra

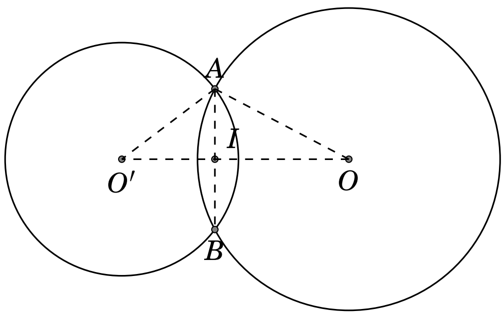
$$AI = \frac{OA \cdot O'A}{\sqrt{OA^2 + O'A^2}} = \frac{20 \cdot 15}{\sqrt{20^2 + 15^2}} = 12\,\text{cm}.$$

Vậy $AB = 12$ cm.

□

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;17\text{cm})$ và $(O';10\text{cm})$ cắt nhau tại A và B. Biết $OO' = 21\text{cm}$. Tính AB.

✍ **Lời giải.**



Gọi I là trung điểm AB, suy ra $AB = 2AI$ và $AI \perp OO'$.
Trong tam giác OAO', ta có $S_{\triangle OAO'} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{1}{2}AI \cdot OO'$. Suy ra

$$AI = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{OO'} = \frac{2\sqrt{24\cdot 3\cdot 14\cdot 7}}{21} = 8\,\text{cm}.$$

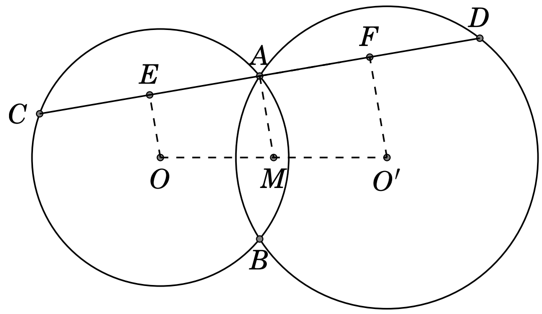
Vậy ta được $AB = 16$ cm. □

Bài 6. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AM, cắt các đường tròn (O) và (O') tại C và D. Chứng minh rằng $AC = AD$.

✍ **Lời giải.**

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm AC, AD, suy ra $OE \perp AC$ và $AE = CE$; $O'F \perp AD$ và $AF = DF$, do đó $OE \parallel MA \parallel O'F$.
Khi đó, tứ giác $OO'FE$ có $OE \perp O'F \Rightarrow OO'FE$ là hình thang. Từ đó AM là đường trung bình của $OO'FE$, suy ra

$$EA = FA \Leftrightarrow 2EA = 2FA \Leftrightarrow AC = AD.$$



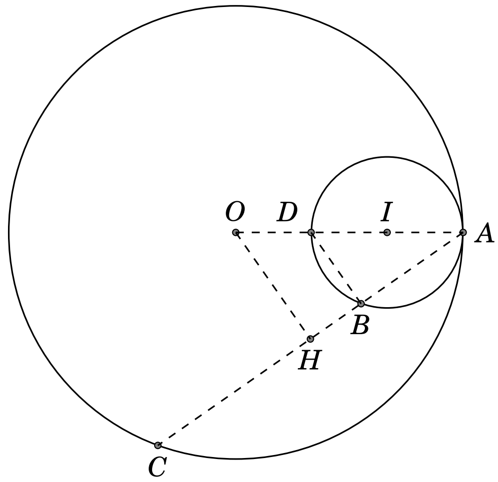
□

Bài 7. Cho đường tròn $(O;OA)$, điểm I thuộc bán kính OA sao cho $AI = \dfrac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn $(I;IA)$.

① Xác định vị trí của các đường tròn (O) và (I).

② Kẻ một đường thẳng qua A, cắt các đường tròn (I) và (O) theo thứ tự ở B và C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

✍ **Lời giải.**



① Ta có $OI = OA - IA$, suy ra (O) và (I, IA) tiếp xúc trong với nhau.

② Kẻ OH vuông góc với CA, ta có $\widehat{ABD} = 90°$ nên $BD \perp AB$, suy ra $BD \parallel OH$. Suy ra

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AO} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{AB}{2AH} = \frac{2}{2\cdot 3} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}.$$

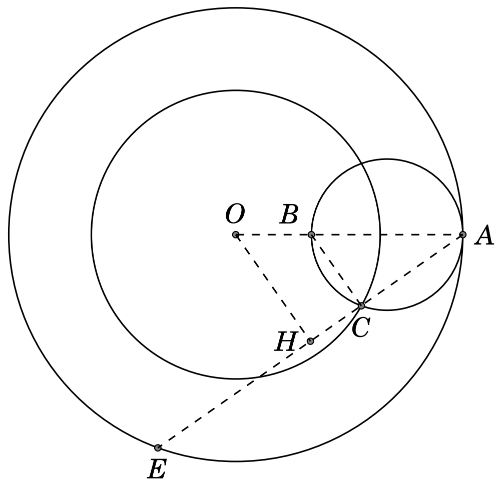
□

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Trên bán kính OA lấy điểm B sao cho $OB = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB.

① Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O) cho trước.

② Vẽ đường tròn đồng tâm O với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C. Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D và E (D nằm giữa C và E). Chứng minh rằng $AC = CD = DE$.

✍ **Lời giải.**



① Gọi I là trung điểm AB, ta có $OI = OA - IA$ nên (O) và đường tròn đường kính AB tiếp xúc nhau.

② Kẻ $OH \perp CD$, ta có $CH = DH$ và $AH = EH$, do đó

$$AC = AH - CH = EH - DH = ED.$$

Mặt khác, ta có

$$\widehat{ACB} = 90° \Leftrightarrow BC \perp AC \Rightarrow BC \parallel OH$$

nên $\frac{AC}{CH} = \frac{AB}{BO} = \frac{1}{2}$ suy ra $AC = 2CH = CD$.
Vậy ta đã chứng minh được $AC = CD = DE$.

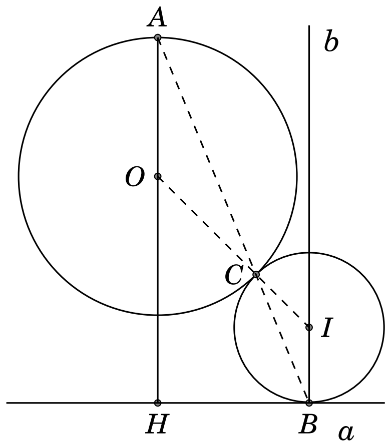
□

Bài 9. Cho đường tròn (O) và đường thẳng a không giao nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên a. Tia đối của OH cắt đường tròn tại A. Vẽ đường thẳng $b \perp a$ tại điểm B trên đường thẳng a. Đoạn thẳng AB cắt đường tròn tại C. Tia OC cắt b tại I. Chứng minh rằng đường tròn $(I; IB)$ tiếp xúc với đường thẳng a và đường tròn (O).

✍ **Lời giải.**

Nhận xét rằng $OA \parallel IB$ vì cùng vuông góc với a, suy ra $\triangle OAC \sim \triangle IBC \Rightarrow \dfrac{OA}{IB} = \dfrac{OC}{IC}$ hay $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{OA}{OC} = 1 \Leftrightarrow IB = IC$. Khi đó, vì $IB \perp a$ nên (I, IB) tiếp xúc với a.

Vì $IO = IC + OC = OC + IB$ nên (I, IB) tiếp xúc với (O).



□

Bài 10. Cho hình vuông $ABCD$. Vẽ đường tròn $(D; DC)$ và đường tròn đường kính BC. Chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M, tia BE cắt AD tại N. Chứng minh rằng M là trung điểm AB, N là trung điểm AD.

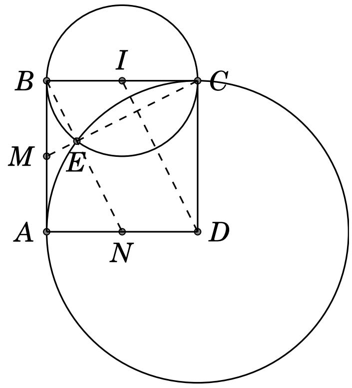
✍ **Lời giải.**

Gọi I là trung điểm AB. Xét hai tam giác vuông $\triangle CDI$ và $\triangle BCM$, ta có $CD = BC$, vì hai cạnh hình vuông, $\widehat{CDI} = \widehat{BCM}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Do đó, $\triangle CDI = \triangle BCM$ (cạnh góc vuông và góc nhọn).

$$\Rightarrow BM = CI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$$

nên M là trung điểm AB.

Chứng minh tương tự ta cũng có $\triangle ABN = \triangle BCM$ (cạnh góc vuông và góc nhọn). Suy ra $AN = BM = \dfrac{1}{2}AD \Leftrightarrow N$ là trung điểm AD.



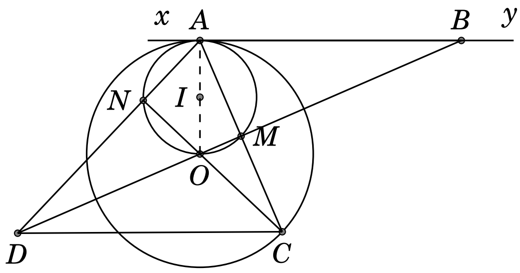
□

Bài 11. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm trên đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) đi qua O và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Qua A vẽ tiếp tuyến chung xy với hai đường tròn. Dây AC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại M. Tia CO cắt đường tròn tâm I tại N. Đường thẳng OM cắt xy và tia AN lần lượt tại B và D. Chứng minh rằng

① $MA = MC$.

② Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

✍ **Lời giải.**



① Nhận xét rằng $\widehat{OMA} = 90^\circ$
$\Rightarrow OM \perp AC \Rightarrow MA = MC$.

② Nhận xét rằng $\widehat{OMA} = 90^\circ \Rightarrow DM \perp AC$; $\widehat{ONA} = 90^\circ \Rightarrow CN \perp AD$. Suy ra O là trực tâm $\triangle ACD$, do đó

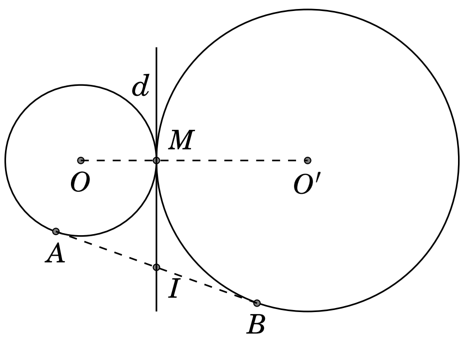
$$CD \perp AO \Rightarrow CD \parallel AB.$$

Xét hai tam giác vuông $\triangle MAB$ và $\triangle MCD$, ta có $MA = MC$, $\widehat{MAB} = \widehat{MCD}$ (so le trong), do đó $\triangle CDI = \triangle BCM$ (cạnh huyền, góc nhọn).
Suy ra $AB = AD$.
Như vậy tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$ và $AC \perp BD$ nên nó là hình thoi.

□

Bài 12. Cho đoạn thẳng AB cố định. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A, vẽ đường tròn O' tiếp xúc với AB tại B, hai đường tròn này luôn luôn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và luôn tiếp xúc ngoài với nhau. Tìm quỹ tích điểm M của hai đường tròn.

✍ **Lời giải.**



Phần thuận: Dựng tiếp tuyến chung d tại M của hai đường tròn, giả sử d cắt AB tại I.
Trong tam giác MAB, ta có
$IA = IM$, vì IA, IM đều là tiếp tuyến của (O).
$IB = IM$, vì IB, IM đều là tiếp tuyến của (O).
Suy ra $IM = \dfrac{1}{2}AB$.
$\Rightarrow \triangle MAB$ vuông tại M (vì có trung tuyến bằng nửa cạnh huyền).
$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (AB).
Phần đảo: Lấy điểm M bất kì trên đường tròn (AB). Ta thực hiện dựng

— Dựng đường thẳng m qua M vuông góc với IM.

— Dựng tia phân giác Ix của góc $\widehat{AIM}$, tia Ix cắt m tại O. Dựng đường tròn (O, OM), ta thấy ngay $\triangle OMI = \triangle OAI$(c.g.c)$\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OMI} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp AB$ hay (O, OM) tiếp xúc với AB tại A.

— Dựng tia phân giác Iy của góc $\widehat{BIM}$, tia Iy cắt m tại O'. Dựng đường tròn $(O', O'M)$ ta thấy ngay $\triangle O'MI = \triangle O'BI$(c.g.c)$\Rightarrow \widehat{O'BI} = \widehat{O'MI} = 90^\circ \Leftrightarrow OB \perp AB$ hay $(O', O'M)$ tiếp xúc với AB tại B.

Trong cách dựng trên, ta thấy ngay (O) và (O') tiếp xúc với nhau.

Kết luận Quỹ tích điểm M là đường tròn (AB).

□