BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

1
2001

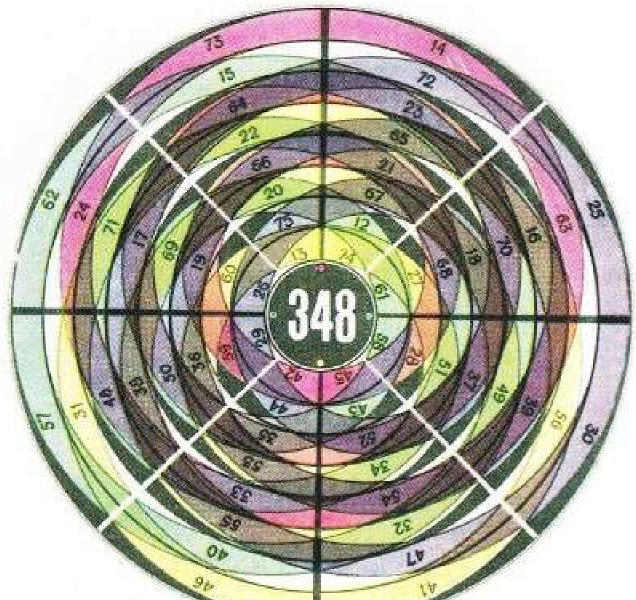
SỐ 283 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Chúc Mừng Năm Mới
Thiên Niên Kỉ Mới !

30 NĂM VIỆN TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC MUÔN MẦU

NHỮNG VÒNG TRÒN KỲ ẢO

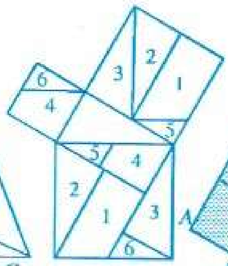


Nhà bác học, vật lí người Mỹ, B. Phơrăngcơlin (B. Franklin 1706-1790) đã sắp xếp 64 số từ 12 đến 75 trong những phần giao nhau của các hình vành khăn để tạo thành mê cung các con số và số ở tâm là 348. Cộng 8 số theo mỗi bán kính đường tròn lớn nhất ta đều được 348, nhưng ngoài 8 tổng kể trên còn nhiều bộ 8 số khác cũng có tổng là 348. Các hình vành khăn, mỗi hình một màu, sẽ gợi ý cho các bạn các bộ số như thế.

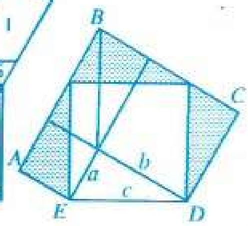
Dành cho bạn đọc. Hãy tìm các bộ 8 số có tổng bằng 348. Tặng phẩm sẽ dành cho bạn nào tìm được nhiều nhất 8 bộ số như thế.

Giải đáp bài: *CHUYỆN CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ PITAGO*

Hình 1



Hình 2



Hình 3

Rất tiếc rằng không có bạn nào chứng minh định lí Pitago bằng cả 3 cách. Vì trang báo này có hạn nên mỗi cách chỉ đưa ra một lời giải.

Cách 1. Tính diện tích các hình và biến đổi đại số (h.1)

$$\frac{a+b}{2}(a+b) = S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}c^2 + 2(\frac{1}{2}ab)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Cách 2. Phân chia hai hình vuông nhỏ thành các phần rồi ghép lại thành hình vuông lớn (h.2)

Cách 3. Cùng ghép thêm 3 hình tam giác vào 2 hình vuông nhỏ và vào hình vuông lớn để cùng được một hình *ABCDE* (h.3)

PHI PHI

HỘI NGHỊ CỘNG TÁC VIÊN TOÁN HỌC TUỔI TRẺ 2000

Sáng 22.12.2000 tại Hội trường 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội đã diễn ra Hội nghị cộng tác viên năm 2000 của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Về dự có GS Đỗ Long Vân, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, PGS Vũ Dương Thụy, Phó Giám đốc NXB Giáo dục, các ủy viên Hội đồng biên tập cùng hơn 100 cộng tác viên các tỉnh, thành từ Thừa Thiên - Huế trở ra và các cán bộ trong toà soạn. PGS Hoàng Chúng và biên tập viên Trần Chí Hiếu từ Tp Hồ Chí Minh cũng đến tham dự hội nghị. Hội nghị đánh giá những thành tích và những việc chưa làm được của năm 2000 và đề xuất những biện pháp nhằm tiếp tục đổi mới nội dung và hình thức của tạp chí trong năm 2001 và những năm tiếp đến. Nhiều cộng tác viên đã phát biểu những ý kiến đề xuất và hi vọng tạp chí sẽ có bước chuyển mình, chuẩn bị cùng đất nước bước vào nền kinh tế tri thức. Các cộng tác viên cũng hoan nghênh sự ra đời của *Toán Tuổi thơ*.

Nhân dịp này, GS. Nguyễn Cảnh Toàn và PGS. Vũ Dương Thụy đã trao Bằng danh dự và giải thưởng cho các bạn đọc đoạt giải Xuất sắc và giải Nhất cuộc thi giải Toán và Vật Lí trên tạp chí năm 2000.

VKT

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 283 (1-2001)
Tòa soạn : Ngõ187, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

VỀ TÍNH CHẤT CỦA MỘT TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐẶC BIỆT

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV trường THCS Hồng Bàng – Hải Phòng)

Trong các tứ giác nội tiếp có một tứ giác đặc biệt. Ta hãy xét bài toán sau :

Bài toán 1: Từ một điểm M ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến MB, MD và cát tuyến MAC đến đường tròn. Chứng minh rằng $AB.CD = AD.BC$

Chứng minh : (h.1)

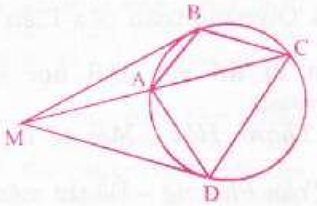
Dễ thấy $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$ nên $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MA}{MB}$

Tương tự $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{MA}{MD}$

mà $MB = MD$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DA}{DC}$

hay $AB.CD = AD.BC$ (đpcm)



Hình 1

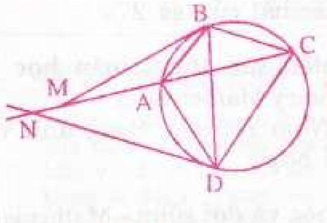
Tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tính chất đặc biệt là *tích các cạnh đối bằng nhau.*

Đảo lại :

Bài toán 2: Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn và $AB.CD = BC.AD$, khi đó các tiếp tuyến tại B và C hoặc cắt nhau trên đường thẳng AC, hoặc song song.

Chứng minh:

- Nếu BD là đường kính của đường tròn thì các tiếp tuyến tại B và D sẽ song song với nhau và song song với AC (vì ΔABD và ΔBCD vuông ở A và C, hơn nữa $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{CB}{CD}$)



Hình 2

- Giả sử BD không là đường kính và giả sử các tiếp tuyến tại B và D lần lượt cắt tia CA tại M và N (h.2). Khi đó từ $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MA}{MB} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{MA}{MC} \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự $\dfrac{AD^2}{DC^2} = \dfrac{NA}{NC}$ (2)

Do $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$ nên từ (1) và (2) ta có $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{NA}{NC}$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC - MA} = \dfrac{NA}{NC - NA}$

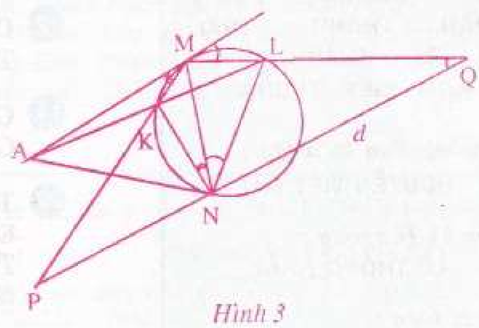
$\Rightarrow \dfrac{MA}{AC} = \dfrac{NA}{AC} \Rightarrow MA = NA$ hay M trùng N (đpcm).

Vận dụng kết quả 2 bài tập trên ta có thể giải một số bài toán thú vị sau đây.

Bài toán 3. Từ điểm A ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến AM, AN và cát tuyến AKL đến đường tròn. Vẽ đường thẳng d bất kì song song với AM. Giả sử d cắt các đường thẳng KM và LM tại P và Q tương ứng. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trung điểm đoạn PQ.

Chứng minh

Sẽ không ảnh hưởng đến kết quả bài toán khi cho đường thẳng d đi qua N (h.3). Lúc đó :



Hình 3

$$\Delta MNP \backsim \Delta MKN \Rightarrow \frac{PN}{NM} = \frac{NK}{KM} \quad (1)$$

$$\Delta MNQ \backsim \Delta MLN \Rightarrow \frac{QN}{NM} = \frac{NL}{LM} \quad (2)$$

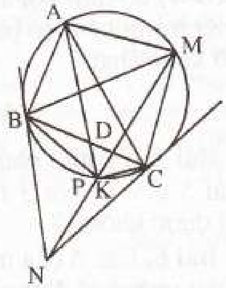
Mà theo bài toán 1 ta có $\dfrac{NK}{KM} = \dfrac{NL}{LM}$ (3)

Từ (1), (2), (3) có $\dfrac{PN}{NM} = \dfrac{QN}{NM}$ hay $PN = QN$ (đpcm)

Bài toán 4. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại N. Vẽ dây AM song song với BC. MN cắt đường tròn lần nữa tại P. Chứng minh rằng đường thẳng PA đi qua trung điểm của BC.

Chứng minh

Cách 1. Giả sử D là trung điểm của BC và AD cắt đường tròn tâm O tại K. Ta sẽ chứng minh các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau trên đường thẳng MK, lúc đó K trùng với P. Xét tứ giác $BMCK$. Khi đó ta có :



Hình 4

$$\frac{CM}{CK}=\frac{AB}{CK}=\frac{DB}{DK}=$$

$$=\frac{CD}{DK}=\frac{AC}{BK}=\frac{BM}{BK}$$

suy ra

$CM.BK = BM.CK$.

Theo kết quả bài toán 2 ta có điều phải chứng minh.

Cách 2. Giả sử AK cắt BC tại D. Theo kết quả bài toán 1 ta có

$$\frac{CK}{CM}=\frac{BK}{BM}\Leftrightarrow\frac{CK}{AB}=\frac{BK}{AC}$$

$$\Leftrightarrow\frac{DK}{DB}=\frac{DK}{DC}\Leftrightarrow DB=DC\ (dpcm).$$

Tất cả lí do để xảy ra các đẳng thức trong lời giải các bạn có thể tự giải thích đơn giản !.

- Để kết thúc cho một tính chất đẹp của một tứ giác nội tiếp đặc biệt, xin mời các bạn hãy giải bài toán sau đây :

Bài toán 5. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Từ một điểm C trên đường thẳng AB và nằm ngoài hai đường tròn vẽ hai tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (O_1). Vẽ các đường thẳng AM, AN cắt đường tròn (O_2) lần nữa tại P và Q tương ứng. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trung điểm của PQ.

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

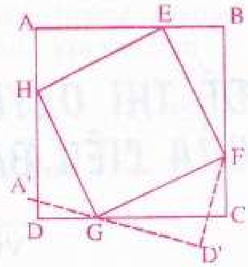
. . . .

Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 37

Problem. Let $ABCD$ be a quadrilateral and $EFGH$ a square inscribed in $ABCD$ such that $EB = FC = GD = HA$ as in the following picture. Prove that $ABCD$ is also a square.



Solution. Rotate the figure counterclockwise through $\pi/2$ about the center of the square so that H falls on G, G falls on F, A falls on A' and D falls on D'. Since

$$\angle FGC + \angle GFD' = \angle FGC + \angle HGD = \pi/2,$$

the line FD' is perpendicular to GC. Since $FD' = GD = FC$, D' is on either GC or on the side of the line GC opposite to F, and hence A' is on either GD or on the same side of GD as F. Hence $\angle EHA = \angle HGA'$ does not exceed $\angle HGD$. Thus, applying the argument all around the square we get $\angle EHA \le \angle HGD \le \angle GFC \le \angle FEB \le \angle EHA$ with the result that all these angles are equal. Hence

$$\angle HGD + \angle DHG = \angle EHA + \angle DHG = \pi/2.$$

so $\angle CDA = \pi/2$. Likewise, $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \pi/2$. The result now follows easily.

Từ mới.

quadrilateral = tứ giác
square = hình vuông
inscribe = nội tiếp (động từ)
picture = hình vẽ, ảnh
rotate = quay (động từ)
counterclockwise = theo chiều quay ngược kim đồng hồ (trạng từ)
center = tâm, trung tâm
fall = rơi, trùng (động từ)
perpendicular = vuông góc (tính từ)
opposite = ngược phía, đối lập (tính từ)
exceed = vượt, lớn hơn (động từ)
apply = áp dụng (động từ)
argument = lí lẽ, luận cứ
result = kết quả
angle = góc
likewise = cũng như vậy, tương tự (giới từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA LIÊN BANG ĐỨC (1996)

VÒNG 1

Bài 1. Một viên đá trên trục số, ban đầu ở vị trí $\frac{1}{1}$, dịch chuyển được theo các quy tắc sau :

a) Từ vị trí $\frac{a}{b}$ nào đó, nó có thể chuyển đến vị trí $\frac{2a}{b}$ hoặc $\frac{a}{2b}$

b) Từ vị trí $\frac{a}{b}$ nào đó, nếu $a > b$ thì nó có thể chuyển đến vị trí $\frac{a-b}{b}$, còn nếu $a < b$ thì nó có thể chuyển đến vị trí $\frac{a}{b-a}$.

Tìm điều kiện cần và đủ về quan hệ giữa x và y sao cho viên đá có thể đến vị trí $\frac{x}{y}$ sau một số hữu hạn lần chuyển.

Bài 2. Trên một đoạn thẳng độ dài 1 đơn vị có một số hữu hạn đoạn nhỏ rời nhau được tô màu sao cho không có hai điểm cách nhau 0,1 đều được tô màu. Chứng minh rằng tổng độ dài của các đoạn được tô màu không thể vượt quá 0,5.

Bài 3. Xét ngũ giác mà mỗi đường chéo song song với một cạnh của nó. Chứng minh rằng tỉ số của độ dài đường chéo với cạnh tương ứng song song với nó là như nhau đối với cả 5 cạnh. Hãy xác định giá trị của tỉ số này.

Bài 4. Chứng minh rằng mỗi số nguyên k $(k > 1)$ có một bội số nhỏ hơn k^4 và bội số này viết trong hệ thập phân bởi nhiều nhất là 4 chữ số khác nhau.

VÒNG 2

Bài 5. Có thể phủ kín một hình vuông cạnh dài 5 đơn vị bởi 3 hình vuông cạnh dài 4 đơn vị được không ?

Bài 6. Các ô của một bảng hình vuông kích thước $n \times n$ được đánh số từ 1 đến n^2, chẳng hạn như hình vẽ bên với $n = 5$. Bạn có thể chọn n ô sao cho không có 2 ô nào cùng cột hoặc cùng hàng rồi cộng các số trong các ô đã chọn. Giá trị của tổng này có thể bằng bao nhiêu ?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Bài 7. Có 4 đường thẳng trên một mặt phẳng sao cho cứ 3 đường thẳng trong chúng xác định được một tam giác.

Một trong các đường thẳng này song song với một trung tuyến của một tam giác được hình thành bởi 3 đường thẳng khác. Chứng minh rằng mỗi đường thẳng khác (với đường thẳng vừa nói trên) cũng có tính chất này.

Bài 8. Tìm tập hợp tất cả các số nguyên dương n sao cho $n.2^{n-1}$ là số chính phương.

ĐÓN ĐỌC THTT số 284 (2-2001)

Trong số báo tới bạn đọc sẽ biết những lời giải hay và độc đáo của một số *bài toán giải tích tổ hợp*, của *các bài toán thi chọn học sinh giỏi THPT toàn quốc bảng A năm 2000*. Báo sẽ giới thiệu những thông tin về *cuộc thi quốc tế nhằm phát hiện năng khiếu toán học* cùng với các đề thi của năm qua.

Những bài toán khó trong *Đề thi môn Toán tuyển sinh vào Đại học quốc gia thành phố Hồ Chí Minh* năm 2000 dành cho các bạn trường THPT, còn các bạn trường THCS hãy đón xem : nên chọn phương pháp giải toán nào là thích hợp khi giải một loại toán.

Các bạn sẽ có những phút thư giãn lí thú qua chuyên mục Câu lạc bộ, Giải trí toán học...

Nào ! bạn hãy tham gia *Cuộc chơi mới của Câu lạc bộ THTT năm 2001 : Nhìn ảnh đoán tuổi* xem ai đoán giỏi ! Những bài toán mới, những lời giải đáp hay... đang hẹn gặp các bạn.

THTT

Trong các kì thi tuyển sinh vào các trường đại học và cao đẳng thường gặp các bài toán về phép tính tích phân. Nếu biết khai thác và mở rộng các bài toán đó ta thu được các kết quả khá đẹp về các tính chất của tích phân và vận dụng các tính chất này giúp ta giải được một số lượng lớn các bài tập về phép tích phân cuối cấp THPT. Sau đây là một số tính chất của tích phân và các vận dụng của nó.

MỘT SỐ LỚP TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

ĐẶNG THANH HẢI

(GV khoa cơ bản Học viện Phòng không Không quân, Hà Tây)

Tính chất 1. Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm lẻ trên $[-a, a]$ thì $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Lời giải. Ta có $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$

Đặt : $x = -t \Rightarrow dx = -dt$, do $f(x)$ là hàmlẻ $\Rightarrow f(-t) = -f(t)$.

$$I = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx =$$

$= 0$ (đpcm).

Vận dụng: Tính $I = \int_{-1/2}^{1/2} \cos x . \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$

Lời giải: Rõ ràng $f(x) = \cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Có $f(x) + f(-x) =$

$$= \cos x\left[\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \cos x.\ln 1 = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lẻ trên $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, vậy theo *tính chất* 1 ta có : $I = 0$

Tính chất 2: Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên $[-a, a]$ thì

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Chứng minh tương tự như tính chất 1, chú ý $f(-x) = f(x)$

Vận dụng. Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 + \sin x}{x^2+1}dx$

(đề thi tuyển sinh ĐH Lâm nghiệp - 1999)

Lời giải. Ta có : $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{x^2+1} + \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1}dx$

Dễ thấy $\frac{\sin x}{x^2+1}$ là hàm lẻ trên $[-1,1]$, từ tính chất 1 $\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1}dx = 0$, còn $\frac{x^4}{x^2+1}$ là hàm chẵn trên $[-1,1]$ nên theo tính chất 2

$$I = 2\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx = 2\int_0^1 \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx$$

$$\Rightarrow I = 2\left[\int_0^1 x^2dx - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow I = 2\left[\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_0^1 + arctgx\Big|_0^1\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

Tính chất 3. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

Lời giải. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = -\int_{\pi/2}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos t)dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx \text{ (đpcm)}.$$

Vận dụng Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx$ $(n \in N^*)$

Lời giải.

Áp dụng tính chất 3 $\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Tính chất 4. Nếu $a > 0$, $f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên **R** thì với mọi số thực dương α ta có :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)dx}{a^x+1}=\int_0^{\alpha}f(x)dx$$

Lời giải. Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$ chú ý $f(-t) = f(t)$

$$I=\int_{-\alpha}^{0}\frac{f(x)dx}{a^x+1}=-\int_{-\alpha}^{0}\frac{f(-t)dt}{a^{-t}+1}=$$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{f(t)dt}{\frac{1}{a^t}+1}=\int_0^{\alpha}\frac{a^tf(t)dt}{a^t+1}$$

Vậy $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)dx}{a^x+1}=\int_0^{\alpha}\frac{a^xf(x)dx}{a^x+1}+\int_0^{\alpha}\frac{f(x)dx}{a^x+1}=$

$=\displaystyle\int_0^{\alpha}f(x)dx$ (đpcm).

Vận dụng. Tính $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{1+2^x}dx$

(Đề thi tuyển sinh Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông - 1999)

Lời giải. Vận dụng tính chất 4 với $a = 2 > 0$, $f(x) = x^4$ là hàm chẵn, liên tục trên **R** ta có :

$$I=\int_0^1x^4dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{1}{5}$$

Tính chất 5. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$thì

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

Lời giải. Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi}x.f(\sin x)dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t).f[\sin(\pi-t)]dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}x.f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-I$$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx \text{ (đpcm)}$$

Vận dụng Tính $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x.\sin x}{9+4\cos^2x}dx$

(câu IVa, đề 11, bộ đề thi tuyển sinh)

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{\sin x}{9+4\cos^2x}=\dfrac{\sin x}{9+4(1-\sin^2x)}$

Từ tính chất 5 $\Rightarrow I=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{9+4\cos^2x}dx$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}\frac{d(2\cos x)}{(2\cos x)^2+3^2}=-\frac{\pi}{4}.\frac{1}{3}\,arc\,tg\,\frac{2\cos x}{3}\Big|_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow I=-\frac{\pi}{12}\left[arc\,tg\left(-\frac{2}{3}\right)-arc\,tg\frac{2}{3}\right]=\frac{\pi}{6}\,arctg\frac{2}{3}.$$

SONG ÁNH... *(Tiếp trang 22)*

Phương pháp thứ hai cũng tính S_k thông qua việc tính $T(i, k)$, tuy nhiên với một cách nhìn khác : với i phần tử $n_1, n_2, ..., n_i$ thuộc $\{1, 2, ..., n\}$ ta đếm xem có bao nhiêu bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$ thỏa mãn điều kiện $A_1 \cup A_2 ... \cup A_k = \{n_1, n_2, ..., n_i\}$ (3), từ đó tính được $T(i, k)$ và S_k.

Ta cho các phần tử $n_1, n_2, ..., n_i$ "đăng kí" có mặt trong các tập hợp A_i theo quy tắc : nếu, chẳng hạn n_1 đăng kí có mặt trong A_1, A_2 và không có mặt trong các tập còn lại thì phiếu đăng kí ghi là $(1, 1, 0, ..., 0)$, còn nếu n_1 chỉ có mặt trong A_k thì ghi phiếu là $(0, ..., 0, 1)$. Phiếu đăng kí là hợp lệ nếu có ít nhất 1 số 1 (nếu không phần tử tương ứng sẽ không có mặt trong $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$). Với i phiếu đăng kí của $n_1, n_2, ..., n_i$ ta lập được bộ $(A_1, A_2, ... A_k)$. Dễ thấy rằng với hai bộ phiếu đăng kí khác nhau, ta có hai bộ tập hợp $(A_1, A_2, ..., A_k)$ khác nhau và như thế số bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$ thỏa mãn (3) bằng số bộ phiếu đăng kí hợp lệ. Vì phiếu đăng kí của n_p, $p = 1, ..., i$ gồm k số 0 hoặc 1 và phải có ít nhất 1 số 1 nên n_p có 2^k-1 cách ghi phiếu đăng kí và như vậy có tất cả $(2^k-1)^i$ bộ phiếu đăng kí hợp lệ khác nhau.

Cuối cùng, chú ý rằng có C_n^i cách chọn i phần tử từ n phần tử nên ta có $T(i, k) = C_n^i(2^k - 1)^i$ và từ đây suy ra $S_k = n(2^k - 1). 2^{k(n-1)}$.

Lời giải thứ hai rõ ràng là ngắn gọn và đẹp hơn rất nhiều. Ở đây thực tế đã xây dựng một song ánh từ tập F_k vào tập hợp $G = \{(r_1, r_2, ..., r_n) | r_i$ là các xâu nhị phân độ dài $k\}$ và tổng cần tính bằng $\displaystyle\sum_{(r_1, r_2, ..., r_n)\in G} d(r_1, r_2, ..., r_n)$ với $d(r_1, r_2, ..., r_n)$ là số các xâu r_i khác $(0, 0, ..., 0)$. Và suy nghĩ xa hơn một chút theo hướng này, ta có lời giải thứ ba còn ngắn gọn và bất ngờ hơn rất nhiều :

Gọi $S_k(i)$ là số các bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$ sao cho $i \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ thì $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_k(i)$ (bạn đọc hãy tự kiểm tra tại sao).

Có tất cả $(2^n)^k$ bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$ với $A_i \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. Trong số này, có $(2^{n-1})^k$ bộ với $A_1 \cup A_2 ... \cup A_k$ không chứa i (vì lúc này với mỗi A_i chỉ còn 2^{n-1} cách chọn). Như thế có $2^{nk} - 2^{(n-1)k}$ bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$ với $i \in A_1 \cup A_2 ... \cup A_k$. Như vậy $S_k(i) = 2^{(n-1)k} . (2^k - 1)$ và $S_k = n.2^{(n-1)k} . (2^k - 1)$.

Rõ ràng cách giải cuối cùng rất ấn tượng về sự đơn giản của nó. Nhưng có được sự đơn giản đó, chúng ta đã phải mày mò và suy nghĩ rất nhiều, phải có những kĩ năng cơ bản, những kinh nghiệm thu nhận được trong quá trình giải toán và đôi khi là một "giác quan toán học" có được nhờ rèn luyện không ngừng.

Trong số báo sau sẽ trình bày tiếp cách giải một số bài toán tổ hợp có áp dụng phương pháp song ánh.

ĐỀ THI MÔN TOÁN VÀO ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG HÀ NỘI
KHỐI D - NĂM 2000

A. PHẦN DÀNH CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (chuyên ban và chưa phân ban).

Câu I. 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số :

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

2. Từ một điểm bất kì trên đường thẳng $x = 2$ ta có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến tới đồ thị của hàm số ?

Câu II. 1. Giải phương trình :

$$(x^2 + 3x - 4)^2 + 3(x^2 + 3x - 4) = x + 4$$

2. Giải bất phương trình :

$$\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$$

3. Giải phương trình :

$$\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2$$

Câu III.

1. Giải phương trình :

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x$$

2. Cho ΔABC. Giả sử G là giao điểm các đường trung tuyến của tam giác. Kí hiệu $\angle GAB = \alpha$, $\angle GBC = \beta$, $\angle GCA = \gamma$. Chứng minh rằng :

$$\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta + \text{cotg}\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$$

trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh và S là diện tích của tam giác.

Câu IV. Cho parabol $y^2 = 8x$ và điểm $I(2, 4)$ nằm trên parabol. Xét góc vuông thay đổi quay quanh điểm I và hai cạnh của góc vuông cắt parabol tại hai điểm M và N (khác với điểm I). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

2. Cho parabol $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $y = mx + 2$.

Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng luôn luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt. Hãy xác định m sao cho phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng và parabol là nhỏ nhất.

B. PHẦN DÀNH CHO TỪNG LOẠI ĐỐI TƯỢNG THÍ SINH

Câu Va. *(cho thí sinh thi theo chương trình chưa phân ban)* :

Tính tích phân : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 + 10x + 1}{x^2 + 2x + 9}dx$

Câu Vb. *(cho thí sinh thi theo chương trình chuyên ban B)*:

Tính tích phân : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + 3x + 10}{x^2 + 2x + 9}dx$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

2) Giả sử $M(2; m)$ là điểm thuộc đường thẳng $x = 2$. Đường thẳng đi qua M là $y = a(x-2) + m$. Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $\Leftrightarrow$ Hệ

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = a(x-2) + m & (1) \\ 3x^2 - 12x + 9 = a & (2) \end{cases}$$

có nghiệm.

Thế a từ (2) vào (1) ta có :

$$t(x) = -2x^3 + 12x^2 - 24x + 17 = m \quad (3)$$

Vì $t'(x) = -6(x-2)^2 \leq 0$ $(\forall x)$ nên $t(x)$ nghịch biến trên $R \Rightarrow$ (3) có 1 nghiệm duy nhất với mọi $m \Rightarrow$ từ M kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới đồ thị.

Câu II. 1) Viết phương trình về dạng

$(x^2 + 3x - 4)^2 + 4(x^2 + 3x - 4) = x^2 + 4x$

$\Leftrightarrow [(x^2 + 3x - 4)^2 - x^2] + 4[(x^2 + 3x - 4) - x] = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 4)(x^2 + 4x) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{-1 \pm \sqrt{5}; 0; -4\}$.

2) $x \in [4; 5] \cup [6; 7]$

3) Với điều kiện $x > 0$, ta viết phương trình về dạng

$$\log_3\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = (x-1)^2$$

Với $x > 0$ thì $\log_3\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) \geq \log_3 3 = 1 \geq 1 - (x-1)^2$.

Từ đó suy ra : phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu III.

1) Ta viết phương trình về dạng :

$$\sin^8 x(1 - 2\sin^2 x) - \cos^8 x(2\cos^2 x - 1) = \frac{5}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^8 x - \cos^8 x - \frac{5}{4}) = 0$$

Vì : $\sin^8 x \le 1 < \frac{5}{4} + \cos^8 x$ nên phương trình tương đương với :

$$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ (k \in Z).$$

2) Gọi M là trung điểm của BC. Từ công thức tính độ dài đường trung tuyến ta có :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Trong ΔABM ta có :

$$\cot\alpha = \frac{c^2 + m_a^2 - \frac{a^2}{4}}{4S_{\Delta ABM}} = \frac{4c^2 + 4m_a^2 - a^2}{8S}.$$

Tương tự đối với $\cot\beta$, $\cot\gamma$. Từ đó ta có đpcm.

Câu IV. 1) Ta có $I(2, 4) \in (P) : y^2 = 8x$.

Gọi $M\left(\frac{m^2}{8}, m\right)$; $N\left(\frac{n^2}{8}, n\right)$ cùng thuộc (P) với $m, n \ne 4$. Khi đó :

$\overrightarrow{IM} = \left(\frac{m^2-16}{8}, m-4\right)$; $\overrightarrow{IN} = \left(\frac{n^2-16}{8}, n-4\right)$

Do $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{IN}$ và $(m-4)(n-4) \ne 0$ nên :

$\overrightarrow{IM} . \overrightarrow{IN} = \frac{m^2-16}{8} . \frac{n^2-16}{8} + (m-4)(n-4) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{m+4}{8} . \frac{n+4}{8} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow mn + 4(m+n) + 80 = 0$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm M, N là : $\dfrac{y-n}{x-\frac{n^2}{8}} = \dfrac{m-n}{\frac{m^2}{8}-\frac{n^2}{8}} = \dfrac{8}{m+n}$

$\Leftrightarrow 8\left(x - \frac{n^2}{8}\right) - (m+n)(y-n) = 0$

$\Leftrightarrow 8x - (m+n)y + mn = 0$

Giả sử $A\ (x_o, y_o)$ là điểm cố định $\in$ đường thẳng MN. Khi đó ta có hệ sau đúng $\forall m, n$

$$\begin{cases} mn + 4(m+n) + 80 = 0 \\ 8x_o - (m+n)y_o + mn = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-(80+4n)}{n+4} \\ 8x_o - (m+n)y_o + mn = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8x_o + \left[\frac{80+4n}{n+4} - n\right]y_o - \frac{80+4n}{n+4} . n = 0 \text{ đúng } \forall n$$

$\Rightarrow 8(n+4)x_o + (80-n^2)y_o - (80n + 4n^2) = 0$ đúng $\forall n$

$\Leftrightarrow (-y_o - 4)n^2 + 8(x_o - 10)n + (32x_o + 80y_o) = 0$

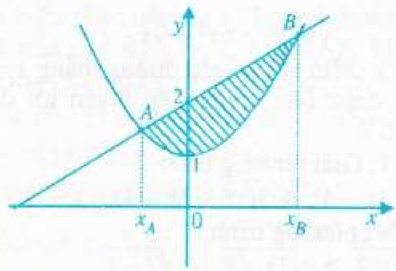
đúng với $\forall n \Leftrightarrow \begin{cases} -y_o - 4 = 0 \\ x_o - 10 = 0 \\ 32x_o + 80y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_o = -4 \\ x_o = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Điểm cố định là $A\ (10, -4)$

2) Hoành độ giao điểm của 2 đường là nghiệm của phương trình :

$x^2 + 1 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0\ (*)$

Phương trình (*) có $P = -1 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm $x_A < 0 < x_B \Rightarrow$ 2 đường này luôn cắt nhau tại 2 điểm A, B tương ứng (xem hình vẽ).



Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường thì :

$$S = \int_{x_A}^{x_B} [(mx+2) - (x^2+1)]dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + x\right)\Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$= -\frac{1}{3}(x_B^3 - x_A^3) + \frac{m}{2}(x_B^2 - x_A^2) + (x_B - x_A)$$

$$= -\frac{1}{6}(x_B - x_A)[2(x_B^2 + x_A^2 + x_Bx_A) - 3m(x_B + x_A) - 6]$$

Lưu ý: $x_B^2 + x_A^2 = (x_A + x_B)^2 - 2x_Ax_B$;

$x_A + x_B = m$;

$x_Ax_B = -1$ thì $S = \frac{1}{6}(m^2+4)^{3/2} \ge \frac{4}{3}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = 0$, khi đó $\min S = \frac{4}{3}$ (đvdt).

Câu Va. $I = \int_0^1 x dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+2x+9)}{x^2+2x+9}$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+9|\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + ln2 - \frac{1}{2}\ln 3$

Câu Vb. $J = \int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+2x+9)}{x^2+2x+9}$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+9|\Big|_0^1 = 1 + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$

Hướng dẫn giải

LTN và TRẦN PHƯƠNG

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN - LỚP 12 THPT - NĂM HỌC 1999-2000

(Bảng B)

NGUYỄN KHẮC MINH
(*Vụ Trung học phổ thông*)

Bài 1. *Cho số thực $c > 2$. Dãy số (x_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, được xây dựng theo cách sau : $x_0 = \sqrt{c}$, $x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ nếu các biểu thức dưới căn là không âm.*

Chứng minh rằng dãy (x_n) được xác định với mọi giá trị n và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n$ khi $n \to \infty$.

Lời giải. • Bằng phương pháp quy nạp theo n, ta sẽ chứng minh x_n được xác định $\forall n \in N^*$.

Thật vậy, do $c > 2$ nên : $0 < c + x_o = c + \sqrt{c} < 2c \Rightarrow \sqrt{c + x_o} < \sqrt{2c} < c \Rightarrow c - \sqrt{c + x_o} > 0$.
Suy ra x_1 được xác định (1).

Giả sử x_k $(k \geq 1)$ đã được xác định. Khi đó, hiển nhiên có $0 < x_k < \sqrt{c} < c$.

Vì thế : $0 < c + x_k < 2c \Rightarrow \sqrt{c + x_k} < \sqrt{2c} < c$ $\Rightarrow c - \sqrt{c + x_k} > 0$.
Suy ra x_{k+1} được xác định (2).

Từ (1) và (2), theo nguyên lí quy nạp, suy ra x_n được xác định $\forall n \in N^*$. (đpcm).

• Từ công thức xác định dãy (x_n) ta có :

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{c} \ \forall n \in N. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{c - \sqrt{c + x}}$ trên $[0; \sqrt{c}]$. Ta có :

$$f'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{c - \sqrt{c+x}} \, . \, \sqrt{c+x}} < 0 \qquad (4)$$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $[0; \sqrt{c}]$. Dẫn tới (x_{2k}) và (x_{2k+1}) là các dãy đơn điệu. Kết hợp với (3) suy ra (x_{2k}) và (x_{2k+1}) là các dãy hội tụ khi $k \to \infty$.

Đặt : $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$ và $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = b$ ta có :
$0 \leq a, b \leq \sqrt{c}$, $f(f(a)) = a$ và $f(f(b)) = b$ (5)

Xét hàm số $g(x) = f(f(x)) - x$ trên $[0; \sqrt{c}]$. Ta có : $g'(x) = f'(f(x)).f'(x) - 1$ (6)

Từ (4) ta có : $[f'(x)]^2 = \dfrac{1}{16(c - \sqrt{c+x})(c + x)}$ $= \dfrac{c + \sqrt{c+x}}{16(c^2 - c - x)(c+x)}$ (7)

Mà : $c + \sqrt{c+x} < c + \sqrt{2c} < 2c \ \forall x \in [0; \sqrt{c}]$.

Và : $16(c^2 - c - x](c+x) > 16(c-x)(c+x) =$ $= 16(c^2 - x^2) \geq 16(c^2 - c) > 16c \ \forall x \in [0; \sqrt{c}]$

Nên từ (7) suy ra $|f'(x)| < 1 \ \forall x \in [0; \sqrt{c}]$. Do đó, từ (6) ta được $g'(x) < 0 \ \forall x \in [0; \sqrt{c}]$. Suy ra $g(x)$ là hàm nghịch biến trên $[0; \sqrt{c}]$. Kết hợp với (5) suy ra $a = b$, hay $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{x\to\infty} x_{2k+1}$. Do đó (x_n) là dãy hội tụ khi $n \to \infty$ (đpcm).

Nhận xét: - Không ít thí sinh đã viết : "Dễ thấy $a = b$"!

- Nhiều thí sinh đã chứng minh $a = b$ xuất phát từ giả thiết $f(a) = a$ và $f(b) = b$. Xin lưu ý : giả thiết đó tương đương với việc thừa nhận (x_n) là dãy hội tụ khi $n \to \infty$, hay, nói một cách khác, thừa nhận $a = b$.

Bài 2. *Trên mặt phẳng cho trước cho hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2). Trên đường tròn (O_1, r_1) lấy một điểm M_1 và trên đường tròn (O_2, r_2) lấy một điểm M_2 sao cho đường thẳng O_1M_1 cắt đường thẳng O_2M_2 tại một điểm Q. Cho M_1 chuyển động trên đường tròn (O_1, r_1), M_2 chuyển động trên đường tròn (O_2, r_2) cùng theo chiều kim đồng hồ và với vận tốc góc như sau :*

1) Tìm quỹ tích trung điểm đoạn thẳng M_1M_2.

2) Chứng minh rằng giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác M_1QM_2 với đường tròn ngoại tiếp tam giác O_1QO_2 là một điểm cố định.

Lời giải. (bạn đọc tự vẽ hình) :

1) Gọi O là trung điểm O_1O_2. Hiển nhiên O là điểm cố định. Lấy các điểm M'_1, M'_2 sao cho : $\overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{O_1M'_1}$, $\overrightarrow{O_2M'_2} = \overrightarrow{O_2M_2}$. Vì M_1, M_2 tương ứng chuyển động trên (O_1, r_1), (O_2, r_2) theo cùng chiều và với cùng vận tốc góc nên M'_1, M'_2 sẽ quay quanh O theo cùng chiều và với cùng vận tốc góc (8).

Ta có : M là trung điểm $M_1M_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1M'_1} + \overrightarrow{O_2M'_2})$ $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của $M'_1M'_2$ (9)

Từ (8) và (9) ta được: Quỹ tích của M là đường tròn tâm O bán kính

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2r_1^2 + 2r_2^2 - d^2}, \text{ trong đó}$$
$$d = M_1M_2 = \text{const (do (8))}.$$

2) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp ΔM_1QM_2 và đường tròn ngoại tiếp ΔO_1QO_2. Dễ dàng chứng minh được : $\Delta PO_1M_1 \backsim \Delta PO_2M_2$. Suy ra $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Do đó, P thuộc đường tròn Apôlôniut dựng trên đoạn O_1O_2 cố định, theo tỉ số không đổi $\frac{r_1}{r_2}$ (10)

Dễ thấy : $(\overrightarrow{PO_1}, \overrightarrow{PO_2}) = \alpha = \text{const}$. Suy ra, P thuộc cung chứa góc định hướng không đổi α dựng trên đoạn O_1O_2 cố định (11)

Từ (10) và (11) suy ra P là điểm cố định (đpcm).

Ghi chú kí hiệu $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ là góc định hướng giữa 2 véctơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

Nhận xét: Do không sử dụng góc định hướng nên nhiều thí sinh có lời giải hoặc không đầy đủ, thiếu chính xác hoặc rườm rà, phức tạp.

Bài 3. *Cho đa thức*

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 27.$$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n luôn tồn tại một số nguyên dương a_n sao cho $P(a_n)$ chia hết cho 3^n.

Lời giải. Ta có $P(1) = 81$. Do đó, khi chọn $a_n = 1$ thì $P(a_n) \vdots 3^n$ ($n = 1, 2, 3, 4$) (12).

Tiếp theo, ta có :

Bổ đề 1. Với $a, n \in N^*$, $n \geq 5$, $a \equiv 1 \pmod 9$ và $\alpha = a + 3^{n-2}b$, $b \in \mathbf{Z}$ ta luôn có :

$P(\alpha) \equiv P(a) + 3^nbh \pmod{3^{n+1}}$

trong đó : $h \in \mathbf{Z}$ và $(h, 3) = 1$.

Chứng minh : Ta có :

$\alpha^2 = a^2 + 2.3^{n-2}ab + 3^{2n-4}b^2$

$\alpha^3 = a^3 + 3^{n-1}a^2b + 3^{2n-3}ab^2 + 3^{3n-6}b^3$

Vì $n \geq 5$ nên $2n-3$, $3n-6$ và $2n-4$ đều không nhỏ thua $n+1$.

Suy ra : $\alpha^3 \equiv a^3 + 3^{n-1}a^2b \pmod{3^{n+1}}$ và

$\alpha^2 \equiv a^2 + 2.3^{n-2}ab \pmod{3^{n+1}}$

Do đó :

$$P(\alpha) \equiv a^3 + 3^{n-1}a^2b - 9(a^2 + 2.3^{n-2}ab) + 24(a + 3^{n-2}b) - 97$$

$$\equiv P(a) + 3^{n-1}b(a^2 - 6ab + 8b) \pmod{3^{n+1}}.$$

Vì $a^2 - 6a + 8 \equiv 3 \pmod 9$ (do $a \equiv 1 \pmod 9$) nên $a^2 - 6a + 8 = 3h$ với $(h, 3) = 1$.

Vậy $P(\alpha) \equiv P(a) + 3^{n-1}bh \pmod{3^{n+1}}$, trong đó $h \in \mathbf{Z}$ và $(h, 3) = 1$ (đpcm).

Bây giờ, bằng phương pháp quy nạp theo n ta sẽ chứng minh :

Bổ đề 2. $\forall n \geq 5\ \exists a_n \equiv 1 \pmod 9$ sao cho :

$$P(a_n) \equiv 0 \pmod{3^n}$$

Chứng minh : Với $n = 5$ ta có $a_5 = 10$ thỏa mãn các yêu cầu của bổ đề. Giả sử, bổ đề 2 đúng với $n = k$ ($k \geq 5$), nghĩa là $\exists a_k \equiv 1 \pmod 9$ sao cho $P(a_k) = 3^k.v$, $v \in N^*$.

Xét : $a_{k+1} = a_k + 3^{k-2}b$, $b \in \mathbf{Z}$

Theo bổ đề 1, ta có :

$P(a_{k+1}) \equiv P(a_k) + 3^kbh \equiv 3^k(v + bh) \pmod{3^{k+1}}$

Vì $(h, 3) = 1$ nên có thể chọn $b \in N^*$ sao cho $bh \equiv -v \pmod 3$. Với b đó ta có : $a_{k+1} \equiv \pmod 9$ và $P(a_{k+1}) \equiv 0 \pmod{3^{k+1}}$.

Theo nguyên lí quy nạp, bổ đề 2 được chứng minh. Bổ đề 2 và (12) cho thấy :

$\forall n \in N^*\ \exists a_n \in N^*$ sao cho $P(a_n) \vdots 3^n$ (đpcm).

Nhận xét. Chỉ có một thí sinh giải được bài trên.

Bài 4. *Cho trước góc α với $0 < \alpha < \pi$. Tìm một tam thức bậc hai dạng $f(x) = x^2 + ax + b$ sao cho với mọi $n > 2$ đa thức :*

$P_n(x) = x^n \sin\alpha - x\sin(n\alpha) + \sin(n-1)\alpha$ chia hết cho $f(x)$.

Lời giải. Ta có :

$P_3(x) = x^3\sin\alpha - x\sin3\alpha + \sin2\alpha$

$= \sin\alpha(x + 2\cos\alpha)(x^2 - 2x\cos\alpha + 1)$

Từ đó suy ra : với $f(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$ thì $P_3(x) \vdots f(x)$ (13)

Hơn nữa, $\forall n \geq 3$ ta có :

$P_{n+1}(x) = x^{n+1}\sin\alpha - x\sin(n+1)\alpha + \sin n\alpha$

$= x^{n+1}\sin\alpha + x[\sin(n-1)\alpha - 2\sin n\alpha\cos\alpha] + \sin n\alpha$

$= x[x^n\sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha] + (x^2 - 2x\cos\alpha + 1)\sin n\alpha$

$= xP_n(x) + (x^2 - 2x\cos\alpha + 1)\sin n\alpha$ (14)

Từ (13) và (14) suy ra $f(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$ là tam thức cần tìm.

Nhận xét. Mặc dù bài toán trên không phải là bài toán khó nhưng cũng có tới 107 trong tổng số 216 thí sinh dự thi bị điểm 0.

Bài 5. *Cho tứ diện ABCD có bán kính đường tròn ngoại tiếp các mặt đều bằng nhau. Chứng minh rằng các cạnh đối diện của tứ diện ABCD bằng nhau.*

Lời giải. Kí hiệu các mặt BCD, CDA, DAB và ABC tương ứng là mặt 1, 2, 3, 4. Với $X \in \{A, B, C, D\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ta kí hiệu X_i là số đo góc phẳng tại đỉnh X ở mặt i.

Ta có :

$$\sum_{i=2}^{4} A_i + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{4} B_i + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 3}}^{4} C_i + \sum_{i=1}^{3} D_i = 4\pi$$

Không mất tổng quát, giả sử :

$$\sum_{i=1}^{3} D_i = \min\left\{\sum_{i=2}^{4} A_i ; \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{4} B_i ; \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 3}}^{4} C_i ; \sum_{i=1}^{3} D_i\right\} \quad (16)$$

Khi đó, từ (15) suy ra :

$$\sum_{i=1}^{3} D_i \leq \pi.$$

Do đó : $2\max\{D_1; D_2; D_3\} < \pi \Rightarrow \max\{D_1; D_2; D_3\} < \frac{\pi}{2}$. Suy ra, tất cả các góc phẳng tại đỉnh D đều nhọn.

Từ giả thiết của bài ra ta có :

$$\left.\begin{aligned} \sin D_1 &= \sin A_4 \\ \sin D_2 &= \sin B_4 \\ \sin D_3 &= \sin C_4 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Không mất tổng quát, giả sử $A_4 = \max\{A_4, B_4, C_4\}$. Khi đó, nếu $A_4 \geq \frac{\pi}{2}$ thì từ (17) ta được :

$D_1 = \pi - A_4$; $D_2 = B_4$ và $D_3 = C_4$.

Dẫn tới : $D_2 + D_3 = B_4 + C_4 = \pi - A_4 = D_1$, trái với tính chất của góc tam diện. Từ đó suy ra $A_4 < \frac{\pi}{2}$ và vì thế ΔABC là tam giác nhọn. Do đó, từ (17) ta có : $D_1 = A_4$, $D_2 = B_4$ và $D_3 = C_4$. Suy ra : $D_1 + D_2 + D_3 = \pi$.

Kết hợp điều này với (16) và (15) ta được : tổng tất cả các góc phẳng tại mỗi đỉnh của tứ diện bằng π. Đến đây, bằng cách trải các mặt BCD, CDA và DAB của tứ diện lên mặt phẳng (ABC), dễ dàng chứng minh được : $AB = CD$; $BC = DA$ và $AC = DB$. (đpcm)

Nhận xét. Tất cả các thí sinh đều giải bài toán theo cách : Xuất phát từ giả thiết, chứng minh tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ cách đều các mặt phẳng chứa các mặt của tứ diện đó. Và tới đây, tất cả đều hoặc không xét đến khả năng O là tâm mặt cầu bàng tiếp của tứ diện hoặc có xét đến nhưng không loại trừ được khả năng này.

Bài 6. *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện : $x^2.f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$, với mọi số thực x.*

Lời giải. Thay x bởi $1-x$ ở đẳng thức của bài ra ta được :

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \ \forall x \in \mathbf{R} \quad (18)$$

Mặt khác, từ đẳng thức của bài ra ta có :

$$f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x) \ \forall x \in \mathbf{R} \quad (19)$$

Thay (19) vào (18) ta được :

$$f(x)(x^2 - x - 1)(x^2 - x + 1) = (1-x)(1+x^3)(x^2 - x - 1) \ \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)f(x) = (1 - x^2)(x^2 - x - 1) \ \forall x \in \mathbf{R}$$

Suy ra : $f(x) = 1 - x^2 \ \forall x \neq a, b$ trong đó : a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$.

Theo định lí Viet ta có :

$$a + b = 1 \text{ và } ab = -1 \quad (20).$$

Lần lượt thay $x = a$, $x = b$ vào đẳng thức của bài ra, với lưu ý tới (20), ta được :

$$\begin{cases} a^2 f(a) + f(b) = 2a - a^4 \\ b^2 f(b) + f(a) = 2b - b^4 \end{cases}$$

Từ đó : $f(a) = c$ và $f(b) = 2a - a^4 - a^2c$, với $c \in \mathbf{R}$ tùy ý. Như vậy

$$\text{(I)} \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{nếu } x \neq a, b \\ c \in \mathbf{R} \text{ tùy ý} & \text{nếu } x = a \\ 2a - a^4 - a^2c & \text{nếu } x = b \end{cases}$$

trong đó a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Ngược lại, với lưu ý tới định nghĩa của a, b và (20), dễ kiểm tra thấy $f(x)$ được xác định bởi (I) thỏa mãn điều kiện đề bài.

Vậy tất cả các hàm số $f(x)$ được xác định bởi (I) là tất cả các hàm số cần tìm.

Nhận xét. Chỉ có 1 thí sinh giải quyết trọn vẹn bài toán trên. Rất nhiều thí sinh cho lời giải không đầy đủ, thiếu chính xác do đã đưa ra các kết luận sai về nghiệm của một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có định thức bằng O.

THÔNG BÁO

Do thành phố thay đổi biển số nhà, bạn đọc gửi thư về Tòa soạn **Toán học & Tuổi trẻ** và **Toán Tuổi thơ** xin ghi theo địa chỉ :

Ngõ 187 phố Giảng Võ, Hà Nội

Địa điểm, số điện thoại và Fax không thay đổi.

THTT

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/283. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì số $(3^n + n^3)(3^n.n^3 + 1)$ hoặc chia hết cho 49 hoặc không chia hết cho 7.

PHẠM NGỌC QUANG
(GV trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T2/283. Tính giá trị biểu thức

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)} + \sqrt{y(4-z)(4-x)} + \sqrt{z(4-x)(4-y)} - \sqrt{xyz}$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$$

TRẦN HỒNG SƠN
(GV trường THPT bán công Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T3/283. Các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện : $a + 2b + 3c = 1$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm thực :

$$4x^2 - 4(2a + 1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0$$
$$4x^2 - 4(2b + 1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0$$

TRẦN VĂN THÍNH
(GV trường THCS Tự Cường, Tiên Lãng, Hải Phòng)

Bài T4/283. Cho tứ giác (lồi) $ABCD$ và M là trung điểm của AB. Xét điểm P thuộc đoạn thẳng AC sao cho hai đường thẳng MP và BC cắt nhau, gọi giao điểm đó là T. Gọi Q là điểm thuộc đoạn thẳng BD sao cho $\dfrac{BQ}{QD} = \dfrac{AP}{PC}$. Chứng minh rằng đường thẳng TQ luôn đi qua một điểm cố định khi P chạy trên đoạn AC.

NGUYỄN PHƯỚC
(GV trường THCS Kim Long, Huế)

Bài T5/283. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1 (đơn vị). Gọi R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{R} + \frac{3}{r} \geq 4\sqrt[4]{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

PHẠM MINH PHƯƠNG
(GV khối PTCT ĐHSP Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/283. So sánh hai số

$$a = (20^{2000} + 11^{2000})^{2001}$$

và $$b = (20^{2001} + 11^{2001})^{2000}$$

ĐÀO QUANG ĐIỀN
(Phòng GD–ĐT Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T7/283. Cho k $(k \geq 2)$ số thực dương $a_1, a_2, ..., a_k$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + ... + \frac{a_{k-1}^m}{a_k^n} + \frac{a_k^m}{a_1^n} \geq a_1^{m-n} + a_2^{m-n} + ... + a_k^{m-n}$$

trong đó m, n là các số nguyên dương.

CAO TRUNG CHINH
(GV trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình)

Bài T8/283. Xét dãy số thực $a_1, a_2, a_3, ...$ thỏa mãn các điều kiện : $0 < a_n < 1$ và $a_{n+1}(1 - a_n) \geq \dfrac{1}{4}$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} < a_n < \dfrac{1}{2}$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Viện Công nghệ thông tin)

Bài T9/283. Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \cos^2\frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos^2\frac{B}{2}\right)\left(1 + \cos^2\frac{C}{2}\right) < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3\sqrt{3}}$$

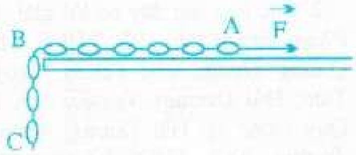
NGUYỄN THẾ BÌNH
(GV trường THPT chuyên Hà Giang)

Bài T10/283. Chứng minh rằng nếu hai hình nón cùng nội tiếp một hình cầu và có diện tích xung quanh bằng nhau thì thể tích của chúng cũng bằng nhau. Điều ngược lại có đúng không ?

HOÀNG CÔNG THANH
(GV trường THPT Nguyễn Chí Thanh, Thừa Thiên – Huế)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

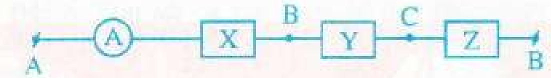
Bài L1/283. Một cái xích được giữ trên mặt bàn nằm ngang không ma sát mà $\dfrac{1}{4}$ độ dài của xích được thả thõng bên cạnh bàn. Xích có chiều dài là l, có khối lượng là m được phân bố đều cho mọi mắt xích. Tính công cần thiết để kéo phần xích bị thõng xuống trở lại mặt bàn.



NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/283. Cho mạch điện chứa 3 linh kiện ghép nối tiếp : R cuộn cảm L và C, mỗi linh kiện chứa trong một hộp kín X, Y, Z (hình vẽ).

Đặt vào 2 đầu A, B của mạch điện 1 hiệu điện thế xoay chiều $u = 8\sqrt{2}\,\sin 2\pi ft$. Khi $f =$



$50Hz$, dùng một vôn kế đo lần lượt được $U_{AB} = U_{BC} = 5\text{V}$; $U_{CD} = 4\text{V}$; $U_{BD} = 3\text{V}$.

Dùng oát kế đo công suất mạch được $P = 1{,}6W$. Khi $f > 50Hz$ thì số chỉ ampe kế giảm. Biết $R_A \approx 0$; $R_V \approx \infty$.

a) Mỗi hộp kín X, Y, Z chứa linh kiện gì ?

b) Tìm giá trị của các linh kiện.

TRẦN MẠNH HÙNG
(GV khối chuyên Toán – Tin, ĐHSP Vinh, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/283. Prove that for every positive integer n, the number $(3^n + n^3)(3^n.n^3 + 1)$ is either divisible by 49 or not divisible by 7.

T2/283. Find the value of the expression
$$\sqrt{x(4-y)(4-z)} + \sqrt{y(4-z)(4-x)} + \sqrt{z(4-x)(4-y)} - \sqrt{xyz}$$
where x, y, z are positive numbers satisfying
$$x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$$

T3/283. The non negative real numbers a, b, c satisfy the condition $a + 2b + 3c = 1$. Prove that at least one of the two following equations has real root :
$$4x^2 - 4(2a + 1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0$$
$$4x^2 - 4(2b + 1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0$$

T4/283. Let $ABCD$ be a (convex) quadrilateral and M be the midpoint of AB. Let P be a point on the segment AC such that the lines MP and BC intersect and let T be their point of intersection. Let Q be the point on the segment BD such that $\frac{BQ}{QD} = \frac{AP}{PC}$. Prove that the line TQ passes through a fixed point when P moves on the segment AC.

T5/283. Let ABC be a triangle with area 1 and let R and r be respectively the circumradius and inradius of triangle ABC. Prove that
$$\frac{2}{R} + \frac{3}{r} \geq 4\sqrt[4]{27}$$
When does equality occur ?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/283. Compare the numbers
$a = (20^{2000} + 11^{2000})^{2001}$ and
$b = (20^{2001} + 11^{2001})^{2000}$

T7/283. Let be given k $(k \geq 2)$ positive real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Prove that
$$\frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + \ldots + \frac{a_{k-1}^m}{a_k^n} + \frac{a_k^m}{a_1^n} \geq a_1^{m-n} + a_2^{m-n} + \ldots + a_k^{m-n}$$
where m, n are positive integers.

T8/283. The sequence of real numbers a_1, a_2, a_3, ... satisfies the conditions : $0 < a_n < 1$ and $a_{n+1}(1 - a_n) \geq \frac{1}{4}$ for every n = 1, 2, 3...

Prove that $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < a_n < \frac{1}{2}$ for every $n = 1, 2, 3, \ldots$

T9/283. Let A, B, C be the angles of a triangle ABC. Prove that
$$\left(1 + \cos^2\frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos^2\frac{B}{2}\right)\left(1 + \cos^2\frac{C}{2}\right) < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3\sqrt{3}}$$

T10/283. Prove that if two cones, inscribed in a same sphere, have equal lateral areas then they have equal volumes. Is the converse proposition true ?

Bài T1/279. *Tìm mọi số tự nhiên a (a > 1) sao cho nếu p là ước số nguyên tố bất kì của a thì số các ước của a mà nguyên tố với p bằng số các ước của a mà không nguyên tố với p.*

Lời giải. (của *Phạm Ngọc Lịch*, 8D1, THCS Giao Hà, Giao Thủy, **Nam Định**).

Nếu $a = p^x$ nguyên tố thì chỉ có $a = p$ $(x = 1)$ thỏa mãn.

Giả sử dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của a là :

$a = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \ldots p_n^{x_n}$ $(x_k \in N^*, k = 1, 2..., n, n \geq 2)$

Các ước số của a mà nguyên tố với p_i có dạng

$$p_1^{\alpha_1} \ldots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

Các ước số của a mà không nguyên tố với p_i có dạng

$$p_1^{\alpha_1} \ldots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_i^{\alpha_i} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

với $1 \leq \alpha_k \leq x_k$, $k = 1, 2, ..., n$

Kí hiệu A_i là số các ước của a mà nguyên tố với p_i thì

$$A_i = (x_1+1)...(x_{i-1} + 1)(x_{i+1} + 1)... + (x_n + 1) \quad (1)$$

trong đó $(x_k + 1)$ là số các ước của $p_k^{x_k}$. Gọi B_i là số các ước của a mà không nguyên tố với p_i thì

$$B_i = (x_1+1)...(x_{i-1}+1)x_i(x_{i+1} + 1)... + (x_n + 1) \quad (2)$$

Ta thấy $A_i = B_i$ khi và chỉ khi $x_i = 1$ với bất kì $1 \leq i \leq n$. Vậy tất cả các số tự nhiên a phải tìm là :

- Hoặc a là một số nguyên tố bất kì
- Hoặc $a = p_1p_2...p_n$ với $n \geq 2$ và p_k $(k = 1, 2, ..., n)$ là các số nguyên tố khác nhau.

Nhận xét. 1. Hầu hết các lời giải đều bỏ sót trường hợp a là một số nguyên tố bất kì.

2. Các bạn sau đây có lời giải đầy đủ : **Vĩnh Phúc:** *Phạm Văn Hoàng*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Hải Dương:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 7/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp Hải Dương; **Nam Định:** *Đặng Hồng Trường*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hoá:** *Trương Nho Đại*, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/279. *Chứng minh rằng nếu các số thực x, y, a, b thỏa mãn các điều kiện* $x+y = a+b$ *và* $x^4+y^4 = a^4+b^4$ *thì* $x^n + y^n = a^n + b^n$ *với mọi số nguyên dương n.*

Lời giải.

Cách 1. (của bạn *Vũ Minh Triều*, lớp 9A, trường THCS Hà Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An** và nhiều bạn khác).

Từ $x^4 + y^4 + (x+y)^4 = a^4 + b^4 + (a+b)^4$ ta có :

$[(x+y)^2-2xy]^2 - 2x^2y^2 + (x+y)^4$

$= [(a+b)^2-2ab]^2 - 2a^2b^2 + (a+b)^4$

$\Rightarrow 2(x+y)^4 - 4(x+y)^2xy + 2x^2y^2 =$

$= 2(a+b)^4 - 4(a+b)^2ab + 2a^2b^2$

$\Rightarrow 2[(x+y)^2 - xy]^2 = 2[(a+b)^2 - ab]^2$

$\Rightarrow (x+y)^2 - xy = (a+b)^2 - ab \quad (1)$

do $(x+y)^2 - xy \geq 0$ và $(a+b)^2 - ab \geq 0$,

Vì thế từ (1) và giả thiết suy ra $xy = ab$. Ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = a + b \\ xy = ab \end{cases}$$

Theo định lí Viet thì x, y là các nghiệm của phương trình

$$t^2 - (a+b)t + ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = a \\ t = b \end{array}\right.$$

Vậy (x, y) là hoán vị của (a, b) nên dĩ nhiên $x^n + y^n = a^n + b^n$ ($\forall x$ nguyên dương) $\Rightarrow$ đpcm.

Cách 2. (của bạn *Nguyễn Đức Tâm*, lớp 8C trường THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội** và một số bạn khác).

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra :

1) Nếu $a = b = 0$, thì từ giả thiết

$x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \Rightarrow x = y = 0$

$\Rightarrow x^n + y^n = a^n + b^n$ ($\forall$ số nguyên dương n).

2) Nếu a, b không đồng thời bằng không.

Đặt $t = x - a = b - y \Rightarrow x = a+t$; $y = b-t$

Từ đó ta có

$0 = x^4 + y^4 - a^4 - b^4 =$

$= (a+t)^4 + (b-t)^4 - a^4 - b^4 =$

$= t^4+4t^3a+6t^2a^2+ 4a^3t+t^4- 4t^3b + 6t^2b^2 - 4b^3t$

$= 2t[t^3+ 2t^2(a-b) + 3t(a^2+b^2) + 2(a^3-b^3)] =$

$$=2t(t+a-b)\left[\left(t+\frac{a-b}{2}\right)^2+\frac{5}{4}(a+b)^2+\frac{a^2+b^2}{2}\right] \quad (1)$$

Do a và b không đồng thời bằng 0, nên

$$\left(t+\frac{a-b}{2}\right)^2+\frac{5}{4}(a+b)^2+\frac{a^2+b^2}{2}>0$$

Vì thế từ (1) suy ra $t(t+a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=b-a \end{array}\right.$

Nếu $t=0$, thì $x=a$, $y=b \Rightarrow x^n+y^n=a^n+b^n$ ($\forall$ n nguyên dương).

Nếu $t=b-a$, thì $x=b$, $y=a \Rightarrow x^n+y^n=a^n+b^n$ ($\forall n$ nguyên dương).

Nhận xét. 1) Bài này thuộc loại dễ, nên đã có tới 129 bạn gửi bài tới. Hầu hết lời giải của các bạn đều đúng (chỉ có bốn bạn cho lời giải sai).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt

Hà Nội: *Nguyễn Thanh Tùng*, lớp 7A1, THCS Láng Thượng, Đống Đa, *Lê Nguyễn Công Nam*, 9A1, Trường Marie Curie ; **Hà Tây:** *Lê Bảo Khánh*, 9E, THCS Lê Lợi, Tx Hà Đông, *Nguyễn Trung Nghĩa*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hải Dương:** *Phạm Huy Hoàng*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, *Phạm Văn Hùng*, 9A, THCS Lê Thanh Nghị, Gia Lộc ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Tiến Dũng, Phạm Anh Minh, Nguyễn Đức Phương, Phạm Duy Thành*, 8A, trường NK Trần Phú; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Bình Minh*, 9A, THCS Yên Phong; **Bắc Giang:** *Nguyễn Thu Hiền Trang*, 8A, THCS Đức Thắng, Hiệp Hòa, *Nguyễn Tuấn Hưng*, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Tx Bắc Giang; **Hà Tĩnh:** *Phan Thị Ngân*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Hưng Yên:** *Doãn Thị Kim Huế*, 7C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Nam Định:** *Đỗ Quang Việt*, 9A3, THCS Trần Đăng Ninh, Tp Nam Định, *Lương Hữu Long*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Nguyễn Đức Tâm*, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp Nam Định ; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Huy*, 6C, THCS Tam Đảo, Tam Dương, *Nguyễn Hồng Điệp*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Đỗ Anh Đông*, 9A, THCS DTNT Lập Thạch, Vĩnh Phúc ; **Đồng Nai:** *Đoàn Thế Hiển*, 9C, THCS Trưng Vương, Xuân Lộc; **Quảng Trị:** *Hà Ngọc Sơn*, 8C, THCS Thành Cổ, Quảng Trị; **Đồng Tháp:** *Võ Hữu Trí*, 9A7, THPT tỉnh Đồng Tháp; **Quảng Ngãi:** *Đặng Đình Thuần*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi ; **Thái Nguyên** *Vũ Thành Nhân, Cao Nguyên*, 9A1, THCS Độc Lập, Tp Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** *Mai Việt Dương*, 8A, THCS Trần Mai Ninh, Tp Thanh Hóa, *Trương Nho Đại*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An:** *Phan Ngọc Thùy*, 9/1, THCS Hà Huy Tập, Tp Vinh, *Phan Thị Ngọc Mai*, 8A, THCS Lí Nhật Quang, Đô Lương, *Đậu Minh Hoàng*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Thị Nhung*, 9H, THCS thị trấn Quỳ Hợp; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thị Thùy Nhung, Lê Thanh Tùng*, 9C, THCS Việt Trì, *Tạ Thị Thanh Nga*, 8A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, *Lê Khánh Hùng*, 9A12, THCS Phong Châu, Phù Ninh

PHAN HUY KHẢI

Bài T3/279. *Chứng minh rằng :*

$$(x^2+y^2)^n \geq 2^n x^n y^n + (x^n-y^n)^2$$

trong đó x, y là các số dương và n là số nguyên dương.

Lời giải. (của bạn *Phạm Huy*, 6C, THCS Tam Đảo, Tam Dương, **Vĩnh Phúc**). Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học :

* Với $n=1$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức đúng.

* Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$ tức là :

$$(x^2+y^2)^k \geq 2^k x^k y^k + (x^k-y^k)^2$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$. Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có :

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2)^{k+1} = (x^2+y^2)^k(x^2+y^2) \\
&\geq (x^2+y^2)[2^k.x^k y^k + (x^k-y^k)^2] \\
&= (x^2+y^2)[(2^k-2)x^k.y^k + x^{2k} + y^{2k}] = \\
&= (2^k-2)x^k y^k(x^2+y^2) + x^{2(k+1)} + y^{2(k+1)} + \\
&+ (xy^k)^2 + (yx^k)^2 \\
&\geq 2(2^k-2)x^{k+1}.y^{k+1} + x^{2(k+1)} + y^{2(k+1)} + \\
&+ 2x^{k+1}y^{k+1} \\
&= 2^{k+1}x^{k+1}.y^{k+1} + (x^{k+1}-y^{k+1})^2 \text{ (đpcm)}
\end{aligned}$$

* Theo nguyên lí quy nạp thì bất đẳng thức đúng với mọi số n nguyên dương. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ x=y \end{array}\right.$

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

2) Một số bạn sử dụng bất đẳng thức Cô-si suy rộng và chứng minh :

$$C_n^o + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

để suy ra kết quả.

3) Các bạn có lời giải đúng và gọn hơn là :

Nam Định: *Phạm Ngọc Lịch*, 8D1, THPT Giao Hà, Giao Thuỷ; **Hải Dương:** *Phạm Văn Hùng*, 9A1, THCS Lê Thanh Nghị, Gia Lộc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Bình Minh*, 9A, THCS Yên Phong; **Nghệ An:** *Lê Bảo Trung*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Phú Yên:** *Nguyễn Kim Duẩn*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hoà; **Hải Phòng:** *Trần Xuân Dũng*, 8A, THNK Trần Phú.

4) Bạn *Doãn Trọng Hoàn*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Thanh Hoá phát hiện : Đây là bài 11

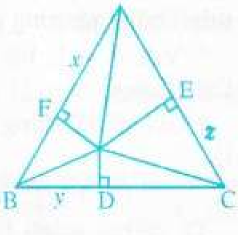
(câu c) trang 195 của cuốn sách "Các chuyên đề môn toán cấp II - tập II" của các tác giả Nguyễn Hữu Thảo và Trương Công Thành. Chân thành cảm ơn.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/279. *Cho tam giác đều ABC. Tìm tập hợp tất cả các điểm M nằm trong ΔABC sao cho nếu hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F thì các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.*

Lời giải. *Phần thuận*:

Đặt $AB = BC = CA =$ $= 1$ đơn vị, $AF = x$, $BD = y$, $CE = z$ với $0 < x, y, z < 1$ (xem hình)



Theo giả thiết

$$x^2 + y^2 + z^2 =$$
$$= AM^2 - MF^2 + BM^2 - MD^2 + CM^2 - ME^2$$
$$= BM^2 - MF^2 + CM^2 - MD^2 + AM^2 - ME^2$$
$$= (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2 \text{ suy ra}$$
$$x + y + z = 3/2 \quad (1)$$

Khi AD, BE, CF đồng quy tại P, dễ dàng chứng minh được (định lí Xêva) :

$$\frac{x}{1-x} \cdot \frac{y}{1-y} \cdot \frac{z}{1-z} = \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} \cdot \frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} \cdot \frac{S_{BCP}}{S_{ABP}} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $8xyz + 2 = 4(xy + yz + zx)$ hay $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) = 0$

Từ đó suy ra điểm M phải thuộc một trong ba đường cao của tam giác đều ABC.

Đảo lại, nếu M thuộc một trong ba đường cao của tam giác đều ABC thì do mỗi đường cao là một trục đối xứng của ΔABC suy ra AD, BE, CF đồng quy.

Kết luận: Tập hợp các điểm M phải tìm là ba đường cao (không kể các điểm đầu mút) của ΔABC.

Nhận xét. 1) Một số bạn giải cách khác : Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm tương ứng trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $MA_1 // AB$, $MB_1 // BC$, $MC_1 // AC$. Từ định lí Xêva tính theo $MA_1 = x$, $MB_1 = y$, $MC_1 = z$ suy ra $(x-y)(y-z)(z-x) = 0$ cũng dẫn đến kết luận.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn :

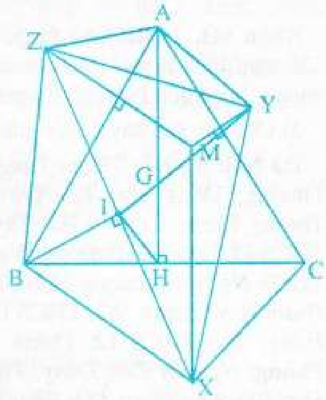
Phú Thọ: *Nguyễn Tùng Lâm*, 9A2, THCS Phong Châu, Phù Ninh, *Lê Thanh Tùng*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Minh Hải*, 9C, THCS Tam Đảo, Tam Dương; **Hà Nội:** *Lê Nguyễn Công Nam*, $9I_1$ THPT Marie Curie; **Hà Tây:** *Nguyễn Thành Sơn*, 9A, THCS Thạch Thất, *Lê Bảo Khánh*, 9E, THCS Lê Lợi, Hà Đông ; **Nghệ An:** *Vũ Minh Triều*, *Đậu Minh Hoàng*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu ,*Bùi Danh Nam*, 8B, THCS thị trấn Nam Đàn, *Phạm Văn Tuyến*, 9A, THCS Hưng Lam, Hưng Nguyên; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9/2 THCS Mỹ Hoá.

VIỆT HẢI

Bài T5/279. *Cho tam giác đều ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các tam giác ABC và XYZ có cùng trọng tâm.*

Lời giải. Gọi H là trung điểm của BC. Suy ra $AH \perp BC$ và

$$BH = \frac{1}{2} AB \ (1)$$



Gọi I là trung điểm của XZ.

Dễ thấy ΔXBZ cân và $\angle XBZ = 120°$.

Ta có $BI = \dfrac{1}{2} BZ$,

$$\angle IBH = 60° - \angle ABI = \angle ABZ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\Delta IBH \backsim \Delta ZBA$ nên

$$\frac{IH}{ZA} = \frac{1}{2} \text{ và suy ra } \frac{IH}{AY} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Đồng thời $\angle IHB = \angle ZAB$

Do đó $\angle HAY = \angle ZAY - (\angle ZAB + 30°) = (\angle ZAY - 30°) - \angle ZAB = 90° - \angle IHB = \angle IHA$ tức là $IH // AY$ (4)

Gọi giao điểm của AH và IY là G.

Từ (3) và (4) ta có $\dfrac{IG}{GY} = \dfrac{HG}{GA} = \dfrac{1}{2}$

Điều này chứng tỏ các tam giác ABC và XYZ có cùng trọng tâm (là G).

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Vĩnh Phúc: *Phạm Văn Hoàng*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Minh*, 8A, THCS Trần Phú, **Hà Nội:** *Nguyễn Lê Thanh Tú*, 8H, THCS Trưng Vương. **Nam Định:** *Ngô Huy Hoàng*, *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nghệ An:** *Đậu Minh Hoàng*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/279. *Tìm mọi số nguyên dương n sao cho $n < t_n$ trong đó t_n là số các ước nguyên dương của n^2.*

Lời giải. (của bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**) Giả sử $n = 2^\alpha 3^\beta p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ là phân tích tiêu chuẩn của n với $p_i \geq 5$ Khi đó $n^2 = 2^{2\alpha}3^{2\beta}p_1^{2\alpha_1}\dots p_k^{2\alpha_k}$ và $t_n = (2\alpha+1)(2\beta+1)(2\alpha_1+1)\dots(2\alpha_k+1)$

Ta cần tìm n để

$(2\alpha+1)(2\beta+1)\dots(2\alpha_k+1) > 2^\alpha 3^\beta p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$.

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được

1) $2^n \geq \frac{2}{3}(2n+1), \forall n \in N$

2) $2^n > 2n+1, \forall n \geq 3$

3) $3^n \geq 2n+1, \forall n \geq 1$

4) $3^n > \frac{3}{2}(2n+1), \forall n \geq 2$

5) $5^n > \frac{3}{2}(2n+1), \forall n \geq 1$

Ta thấy n không thể có ước nguyên tố lớn hơn 3. Thật vậy nếu trái lại ta có $n \geq 2^\alpha 3^\beta 5^{\alpha_1}\dots 5^{\alpha_k} > \frac{2}{3}(2\alpha+1)(2\beta+1).\ \frac{3}{2}(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\dots(2\alpha_k+1) = t_n$. Vậy $n = 2^\alpha.3^\beta$.

Nếu $\beta \geq 2$ thì $n > \frac{2}{3}(2\alpha+1)\frac{3}{2}(2\beta+1) = t_n$

Thành thử $\beta = 0$ hoặc $\beta = 1$.

Nếu $\beta = 0$ thì $n = 2^\alpha$ và $t_n = 2\alpha+1$

Khi đó $2^\alpha < 2\alpha+1 \Rightarrow \alpha = 1$ hoặc $\alpha = 2$ tức là $n = 2$ hay $n = 4$.

Nếu $\beta = 1$ thì $n = 3.2^\alpha$ và $t_n = 3(2\alpha+1)$.

Từ $2^\alpha < 2\alpha+1 \Rightarrow \alpha = 1$ hoặc $\alpha = 2 \Leftrightarrow n = 6$ hoặc $n = 12$.

Thử lại ta thấy : $n = 2, 4, 6, 12$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Bài này được nhiều bạn tham gia giải và hầu hết cho đáp số đúng. Một số lập luận hơi dài, một số lại làm quá tắt. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Lâm Tuyền*, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ, **Hoà Bình**; *Ngô Xuân Bách*, 11 Toán, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Hà Nhật Sang*, 11 NK **Quảng Bình**; *Đoàn Thái Sơn*, 11CT, THPT Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Nguyễn Văn Thắng*, 12 Toán, THPT Thái Nguyên, *Lê Thị Khánh Hiền*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, **Khánh Hoà:** *Phạm Văn Thắng*, 10T, PTNK ĐHQG Tp Hồ Chí Minh, *Lê Anh Sơn*, 12T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hoá**; *Phạm Văn Tuyến*, 9A, THCS Hưng Nguyên, **Nghệ An**; *Lương Thế Nhân*, 12 PTNK ĐHQG Tp Hồ Chí Minh, *Nguyễn An Huy*, 11D1, THPT Chu Văn An, **Hà Nội**; *Lê Hoàng An*, 12C3, Hùng Vương, Plâycu, **Gia Lai**, *Nguyễn Hải Phong*, 11 Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/279. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}$, *trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.*

Lời giải. (của *Lê Văn Tâm*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** và đa số các bạn).

Nhận xét : Khi $(t+v)(tv-3) \leq 0$ thì hàm số $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(t) + f(v) \leq 2f\left(\frac{t+v}{2}\right)$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{t}{1+t^2} + \frac{v}{1+v^2} \leq 2\,\frac{1+\frac{t+v}{2}}{1+\left(\frac{t+v}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t+v)(tv-3)(t-v)^2}{(t^2+1)(v^2+1)\left(1+\left(\frac{t+v}{2}\right)^2\right)} \leq 0.$$

Áp dụng :

1) Nếu trong 3 số x, y, z có 1 số thuộc $\left[\frac{-1}{3}, 1\right]$, giả sử $x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$, thì $x \leq 1, y+z \geq 0$ và $yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1+1/3}{2}\right)^2 < 3$.

Suy ra $(y+z)(yz-3) \leq 0$

và $$f(y) + f(z) \leq 2f\left(\frac{y+z}{2}\right).$$

Tương tự $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{3}-3\right) \leq 0$

nên $$f(x) + f((1/3) \leq 2f\left(\frac{x+1/3}{2}\right).$$

Mặt khác ta cũng có

$$\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{x+1/3}{2}\right) \leq \left(\frac{x+y+z+1/3}{2}\right)^2 = \frac{4}{9} < 3$$

nên $f(y) + f(z) + f(x) + f((1/3)$

$\leq 2\left[f\left(\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{x+1/3}{2}\right)\right]$

và $f\left(\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{x+1/3}{2}\right) \leq 2f\left(\frac{x+y+z+1/3}{4}\right) = 2f\left(\frac{1+1/3}{4}\right) = \frac{6}{10}$

Suy ra $f(y) + f(z) + f(x) + f((1/3) \leq \frac{12}{10}$

và $f(y) + f(z) + f(x) \leq \frac{9}{10}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1/3$.

2) Khi cả 3 số x, y, z đều không thuộc $[-1/3, 1]$ thì do $x+y+z = 1$ nên phải có ít nhất 1 số dương.

Nếu có 1 số dương (giả sử $x > 0$) và 2 số âm thì $f(y) < 0, f(z) < 0$ và $\max f(x) = \frac{1}{2}$ nên $P < \frac{1}{2}$

Nếu có 2 số dương (giả sử $y, z > 0$) và 1 số âm ($x<0$) thì do $x < -1/3$ ta có $(3x+1)(3+x) < 0$ và $\frac{x}{1+x^2} < -\frac{3}{10}$.

Do đó

$$P = f(x) + f(y) + f(z) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Kết luận : Giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}$ bằng $\frac{9}{10}$.

Nhận xét. Đa số các bạn đều xác định đúng đáp số, nhưng chứng minh không được chính xác, không chặt chẽ, chưa xét hết các tình huống.

Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Huỳnh Như Thúy Tiên, 11T chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, **Bình Định**; *Bùi Quang Mạ*, 10A1 chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**, *Phạm Sỹ Lâm*, 11C, THPT Mỹ Hào, **Hưng Yên**; *Hoàng Nam Phương*, 12A4, Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**; *Bùi Văn Tùng*, 12B, THPT Trần Nhật Duật, **Nam Định**; *Đinh Quyết Tiến*, 10A2, THPT Yên Khánh A, **Ninh Bình**; *Ngô Xuân Bách*, 11T, *Tô Minh Hoàng*, 12T, PTNK tỉnh **Hải Dương**, *Hoàng Kim*, 11T, THPTNK **Quảng Bình**; *Nguyễn Hoàng*, 11T, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**; *Triệu Thanh Bình*, 10T1, THPTNK Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Võ Minh Triết*, 10T, ĐHKHTN-ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Hoa Cương*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**; *Bùi Hải Nam*, 10A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/279. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$x^2y + y^2z + z^2t + t^2x - xy^2 - yz^2 - zt^2 - tx^2$$

trong đó x, y, z, t là các số thực thuộc [0; 1]

Lời giải. (của bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**).

Gọi biểu thức trên là S. Từ tính hoán vị vòng quanh của các số x, y, z, t trong S, không mất tính tổng quát giả sử $x = \max\{x, y, z, t\}$. Ta có

$S = y(x^2 - z^2 + yz - xy) + t(z^2 - x^2 + xt - zt)$

$= y(x-z)(x+z-y) + t(z-x)(x+z-t)$

Ta thấy $t(z-x)(x+z-t) \leq 0$ và

$$y(x-z)(x+z-y) \leq \left(\frac{y+x-z+x+z-y}{3}\right)^3 = \frac{8x^3}{27} \leq \frac{8}{27}$$

(theo bất đẳng thức Côsi).

Từ đó suy ra $S \leq \frac{8}{27}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{1}{3}$, $t = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{8}{27}$.

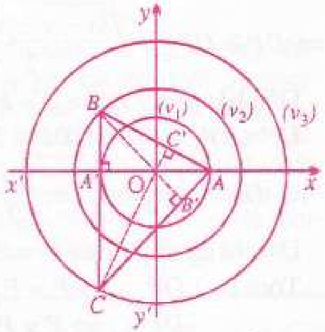
Nhận xét. Tòa soạn nhận được lời giải của 148 bạn, hầu hết các bạn giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt : **Thái Nguyên:** *Cao Nguyên*, 9A1, THCS Tân Lập; **Hà Nội:** *Lê Hùng Việt Bảo*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ; **Vĩnh Phúc::** *Phạm Quang Chiến, Phạm Văn Hoàng, Kim Đình Trường*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hải Phòng:** *Bùi Tuấn Anh, Trần Xuân Dũng, Nguyễn Vũ Lộc, Nguyễn Đức Phương, Phạm Duy Thành*, 8A, THCS Trần Phú; **Nghệ An:** *Trần Thị Như Ngọc*, 9A, THCS Quán Hành; **Hà Tĩnh:** *Đặng Văn Trường*, 9A, THCS Phan Huy Chú.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/279. *Trên mặt phẳng cho ba đường tròn đồng tâm O với bán kính lần lượt là $r_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{2}$, $r_3 = \sqrt{5}$. Gọi A, B, C là ba điểm không thẳng hàng lần lượt nằm trên ba đường tròn đó. Gọi S là diện tích ΔABC. Chứng minh rằng $S \leq 3$. Tính độ dài các cạnh ΔABC khi $S = 3$.*

Lời giải. *Cách 1.* (Dựa theo *Phạm Tuấn Anh*, 12T, ĐHKHTN-ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**).

Kí hiệu các đường tròn (O, r_i) với $i = 1, 2, 3$ lần lượt là (v_1), (v_2) và (v_3). Cố định hai đỉnh B và C, B trên (v_2) và C trên (v_3). Dễ thấy rằng khi cho A chạy trên (v_1) thì tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi đường cao AA' của nó đi qua O sao cho O thuộc đoạn AA'. Lí luận tương tự đối với hai đỉnh còn lại, ta đi đến kết luận : Trong các tam giác ABC có ba đỉnh A, B, C theo thứ tự nằm trên ba đường tròn (v_1), (v_2), (v_3), tam giác có diện tích lớn nhất phải là một trong những tam giác nhọn $A_oB_oC_o$ nhận O làm trực tâm.



Bây giờ ta chỉ ra cách dựng một tam giác $A_oB_oC_o$ như thế.

Chọn một hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxy có gốc ở tâm chung của ba đường tròn sao cho đỉnh A_o có tọa độ A_o (1, 0) và hai đỉnh còn lại : B_o (x, y_1), C_o (x, y_2) vì $BC//Oy$, trong đó $x < 0$, $y_1y_2 < 0$ (tức là nếu $y_1 > 0$ thì $y_2 < 0$ (vì O nằm trong $\Delta A_oB_oC_o$). Thế thì, muốn cho O là trực tâm của tam giác $A_oB_oC_o$, cần và đủ là $OB_o \perp C_oA_o$ và do đó x, y_1 và y_2 phải là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB_o}.\overrightarrow{A_oC_o} = x(x-1) + y_1y_2 = 0 \\ x^2 = 2 - y_1^2 = 5 - y_2^2 \end{cases} \quad (x<0,\ y_1y_2 < 0)$$

Khử y_1 và y_2 từ hệ ba phương trình trên, ta được x là nghiệm âm của phương trình bậc ba sau đây :

$$x^3 - 4x^2 + 5 = (x+1)(x^2 - 5x + 5) = 0,\ (x < 0)$$

Ta được $x_o = -1$ (hai nghiệm dương $x_{1,2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{5} \mp 1)$ bị loại)

Từ đó : $y_1 = 1$ và $y_2 = -2$ (hoặc $y_1 = -1$ và $y_2 = 2$). Suy ra

$S(A_oB_oC_o) = S = 3$, $B_oC_o = 3$, $C_oA_o = 2\sqrt{2}$ và $A_oB_o = \sqrt{5}$ (hoặc $C_oA_o = \sqrt{5}$ và $A_oB_o = 2\sqrt{2}$).

Như vậy với điểm A_o cố định thì tồn tại hai tam giác nhọn $A_oB_oC_o$ nhận O làm trực tâm và do đó cũng là tam giác có diện tích lớn nhất nghĩa là $S(ABC) \le S(A_oB_oC_o) = 3$.

Cách 2. (của *Nguyễn Huy Cung*, 11T2, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi**; *Trần Võ Huy*, 10T, *PhạmTuấn Anh*, *Lương Thế Nhân*, 12T, ĐHKHTN-ĐHQG Tp **Hồ Chí Minh**). Trên đường thẳng qua O vuông góc với mặt phẳng (ABC) ta lấy điểm D sao cho $OD = 1$. Khi đó $DA = \sqrt{2}$, $DB = \sqrt{3}$, $DC = \sqrt{6}$ và $V(ABCD) = \frac{1}{3}S$ (1)

Mặt khác, ta lại có :

$$V(ABCD) \le \frac{1}{6}DA.DB.DC = 1\ ; \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra : $s(ABC) = S \le 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi DA, DB và DC đôi một vuông góc với nhau ở D. Điều này có thể xảy ra vì có đẳng thức :

$$\frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DO^2}\ (=1)$$

Sau đó ta chỉ ra cách dựng một tam giác ABC có diện tích lớn nhất như thế với độ dài các cạnh như ở cách giải 1.

Nhận xét. 1) Một số bạn đưa ra lời giải theo hướng lời giải 1 nhưng lập luận thiếu chặt chẽ. Hầu hết không chứng minh điều kiện đủ.

2) Đa số các bạn sử dụng công thức diện tích tam giác $s = \frac{1}{2}ab\sin C$ để tính diện tích các tam giác OBC, OCA và OAB rồi từ đó suy ra diện tích tam giác ABC theo vị trí tương đối của O đối với tam giác ABC.

Ngoài một số bạn đề xuất bài toán tổng quát trong mặt phẳng và bài toán tương tự trong không gian

Nhận xét. Ngoài các bạn có tên ở trên, các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt :

Hà Nội: *Hàn Thế Anh*, 12A1, PTCT, ĐHSP Hà Nội; **Hải Dương**: *Ngô Xuân Bách*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Vĩnh Phúc:** *Trần Trung Hiếu*, 12A10, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, *Nguyễn Đắc Tùng*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Trần Thanh Hải*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Yên Bái:** *Trần Bình Minh*, 10A1, *Lục Trí Tuyên*, 12A1, THPT chuyên Yên Bái; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Thắng*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** *Vũ Đình Đấu*, 11T, THPT NK Trần Phú; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Thắng*, 12T, THPT NK Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Đặng Quang Huy*, 11A1, THPT Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Cáp Phạm Đình Thăng*, 12T, THPT chuyên Lâm Đồng, Đà Lạt; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 10T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/279. *Cho tứ diện ABCD sao cho các cạnh AB, BC, CA đều nhỏ hơn các cạnh DA, DB, DC. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của PD, trong đó điểm P thỏa mãn điều kiện* $PD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$.

Lời giải. Lấy điểm Q sao cho

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD} = \overrightarrow{0} \quad (1)$$

(Như đã biết, có duy nhất một điểm O thỏa mãn (1) và có nhiều cách xác định nó chẳng hạn DO là hình chéo của hình hộp có các đỉnh A, B, C, D, O)

Ta thấy : $2OD^2 - 2(OA^2 + OB^2 + OC^2)$

$= 3OD^2 - 2OD^2 + OD^2 - 2(OA^2 + OB^2 + OC^2)$

$= 3\overrightarrow{OD}^2 - 2\overrightarrow{OD}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) +$

$+ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 - 2(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2)$

$= (\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA} + OA^2)$

$+ (OD^2 - 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2)$

$+ (OD^2 - 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2)$

$- (\overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2)$

$- (\overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2)$

$- (\overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2)$

$= (DA^2 + DB^2 + DC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$

Đặt : $x = DA^2 + DB^2 + DC^2$;

$y = AB^2 + BC^2 + CA^2$.

Theo giả thiết

$2OD^2 - 2(OA^2 + OB^2 + OC^2) = x - y > 0$ (2)

Vậy : $PD^2 = PA^2 + PC^2 + PB^2$

$\Leftrightarrow PA^2 + PB^2 + PC^2 - PD^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP})^2 + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})^2 +$

$+ (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})^2 - (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OP})^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2OP^2 - 2\overrightarrow{OP}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})$

$= OD^2 - (OA^2 + OB^2 + OC^2)$

$\Leftrightarrow 2OP^2 = OD^2 - (OA^2 + OB^2 + OC^2)$

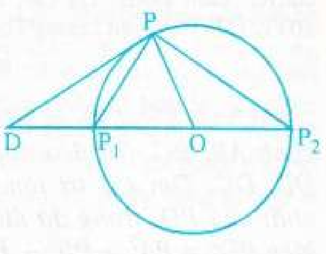
(Theo (1))

$\Leftrightarrow OP^2 = \dfrac{x-y}{4}$ (Theo (2)) $\Leftrightarrow OP = \dfrac{1}{2}\sqrt{x-y}$

$\Leftrightarrow P \in$ mặt cầu (ω) tâm O, bán kính $\dfrac{1}{2}\sqrt{x-y}$.

Nhờ (1) dễ dàng tính được $OD^2 = \dfrac{1}{4}(3x - y) \Rightarrow$ D nằm ngoài (ω).

Giả sử đường thẳng OD giao với (ω) tại P_1, P_2, $(DP_1 < DP_2)$ (xem hình).



Với mỗi $P \in (\omega)$ ta thấy

$DP \geq DO - PO$

$\Rightarrow DP \geq DO - P_1O$

$\Rightarrow DP \geq DP_1 = \dfrac{\sqrt{3x-y} - \sqrt{x-y}}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow P \equiv P_1$

$DP \leq DO + OP \Rightarrow DP \leq DO + OP_2$

$\Rightarrow DP \leq DP_2 = \dfrac{\sqrt{3x-y} + \sqrt{x-y}}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow P \equiv P_2$

Tóm lại : $DP_{\min} \Leftrightarrow P \equiv P_1$

$DP_{\max} \Leftrightarrow P \equiv P_2$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán quen thuộc, nhưng số bạn tham gia giải bài toán này không nhiều. Các bạn đều giải đúng. Tuy nhiên, kĩ thuật biến đổi tích vô hướng trong các bài giải đều không thật hoàn hảo.

2) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt. **Lào Cai:** *Nguyễn Việt Hà*, 12A5, THPT Cam Đường; **Thái Nguyên:** *Võ Quang Đức*, 12T, THPT chuyên **Yên Bái:** *Lục Trí Tuyên*, 12A1, THPT chuyên; **Cà Mau:** *Trần Vă hanh*, 12A4, THPT Phan Ngọc Hiển; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 11T, THPT Trần Phú; **Nam Định:** *Bùi Văn Tung*, THPT Trần Nhật Duật; **Đà Nẵng:** *Đặng Quang Huy*, 11A1, Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/279. *Một xe chở cát chịu tác dụng theo phương ngang bởi một lực kéo F không đổi có hướng trùng với hướng của vectơ vận tốc $\vec{v}$ của xe. Do một lỗ thủng ở sàn xe, cát chảy xuống với lưu lượng không đổi c (kg/s). Xác định gia tốc và vận tốc của xe ở thời điểm t, nếu lúc t = 0 khối lượng của xe bằng m_o và vận tốc của xe bằng không. Bỏ qua mọi ma sát.*

Hướng dẫn giải. Khối lượng của xe ở thời điểm t là $m = m_o - ct$. Áp dụng định luật II Niutơn theo phương chuyển động tìm được gia tốc mà xe ở thời điểm t là $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{F}{m_o - ct}$

Vì $a = \dfrac{dv}{dt}$ ta có :

$$\int_o^v dv = \int_o^t \frac{F}{m_o - ct}\,dt \Rightarrow v = \frac{F}{c}\ln\frac{m_o}{m_o - ct}$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn, đầy đủ và chính xác :

Nghệ An: *Lê Minh Nguyên, Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 12A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Yên Bái:** *Trần Việt Yên*, 12A, THPT chuyên Yên Bái; **Hải Dương:** *Nguyễn Quốc Hoàn*, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Hà**

Nội: *Ngô Hoàng Quý*, 11 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam; *Bạch Ngọc Đường*, 11L, PTDL Huỳnh Thúc Kháng; **Hà Tĩnh:** *Lê Hồng Quốc Tiệp*, 11A, THPT Hồng Lĩnh; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thành Sơn*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Đồng Tháp:** *Châu Hoàng Huy*, 12T, THCB thị xã Cao Lãnh; **Phú Yên:** *Lê Ngọc Thiên*, 12 Lí, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Đà Nẵng:** *Lê Anh Vũ*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thanh Hóa:** *Lê Thế Trọng*, 12A4, THPT Bỉm Sơn; **Tiền Giang:** *Trần Tất Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Hưng Yên:** *Nguyễn Hải Hà*, 10 Lí, PTNK Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Duy Hưng, Lê Khánh Hùng, Nguyễn Kim Thắng*, 12A3, *Nguyễn Minh Kiên*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Trần Đức Sinh*, 11 Lí, THPT Lê Hồng Phong

MAI ANH

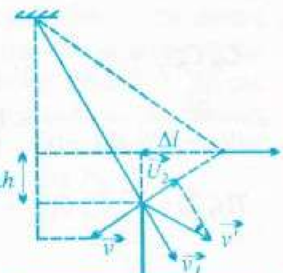
Bài L2/279. *Quả cầu nhỏ tích điện treo bằng dây nhẹ, không dãn, cách điện, dài $l = 1m$, trong một điện trường đều nằm ngang, dây treo lệch một góc $\alpha = 60^o$.*

Sau đó đổi đột ngột hướng điện trường (cường độ vẫn giữ nguyên). Khi dây treo lệch góc $\alpha_1 = 30^o$ (cùng phía lệch ban đầu so với phương thẳng đứng) thì vật va chạm đàn hồi vào một cọc cố định thẳng đứng. Biết rằng ngay trước va chạm, điện trường bị ngắt. Hỏi vật nẩy lên đến độ cao nào ?

Hướng dẫn giải.

Khi vật nằm cân bằng trong điện trường, hợp lực $\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0$.

$\Rightarrow$ lực điện trường $F = mg\text{tg}\alpha$ (1)



Đổi chiều điện trường, lực F đổi ngược hướng nhưng vẫn có cường độ như trên. Khi quả cầu đến D (bắt đầu va chạm với cọc) công do lực F sinh ra :
$A = F.\Delta l$, với $\Delta l = l(\sin\alpha - \sin\alpha_1)$ (2)

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng tìm được vận tốc v của vật ngay trước va chạm :

$$mg\Delta h + F.\Delta l = \frac{mv^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2g(\Delta h + \Delta l\text{tg}\alpha) = v^2 \qquad (3)$$

Khi va chạm đàn hồi với cọc cố định, vận tốc $\vec{v'}$ của vật sau va chạm đối xứng với $\vec{v}$ đối với cọc. Phân tích $\vec{v'} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, tìm được thành phần $\vec{v_2}$ làm vật nảy lên đến độ cao h so với vị trí va chạm D : $v_2 = v\sin\beta$ (4)

Ngay khi va chạm ngắt điện trường. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng sau va chạm :

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgh \Rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g} \qquad (5)$$

Từ (2), (3), (4) và (5) tìm được :

$$h = \frac{l}{4} = 0{,}25\text{m}.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn, đúng :

Tiền Giang: *Trần Tất Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Nghệ An:** *Đào Vinh Quang, Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Hải Dương:** *Đoàn Văn Tuyến*, 12A3, THPT Hồng Quang; **Quảng Bình:** *Dương Lê Quang*, 11 Lí, THPT NK Quảng Bình; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy*, 11 lí 1, THPT Lương Thế Vinh; **Cà Mau:** *Dương Quốc Chánh Tín*, 12A4, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Nam Định:** *Trần Đức Sinh*, 11 Lí, THPT Lê Hồng Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Duy Hưng, Nguyễn Kim Thắng, Lê Khánh Hùng*, 12A3, *Nguyễn Ngọc Anh, Dương Quốc Huy*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

ĐIỂM GIAO THỪA

Điểm giao thừa, tôi là một lát cắt
Trong không gian trù mật của thời gian
Là điểm đầu, tôi cũng là điểm cuối
Hai vectơ nối tiếp của thời gian
Bên trái tôi một epxilon
Là năm mới với bao niềm mơ ước
Tôi đứng giữa nhưng không là
trung điểm
Vì trước tôi là thời gian vô tận
Và sau tôi là vô tận thời gian
Hàm thời gian tại thời điểm giao thừa
Có bước nhảy giữa hai bờ mới, cũ./.

PHAN THANH QUANG
(Tp Hồ Chí Minh)

SONG ÁNH VÀ CÁC BÀI TOÁN GIẢI TÍCH TỔ HỢP

TRẦN NAM DŨNG
(GV khoa Toán, ĐHKHTN Tp Hồ Chí Minh)

Giải tích tổ hợp là một dạng toán khó. Tất cả chúng ta, mỗi người chắc chắn đã không ít lần phải đau đầu trước các bài toán dạng này. Lời giải của những bài toán giải tích tổ hợp thường không có khuôn mẫu, rất bất ngờ, ngắn gọn và khi giải được rồi thì thấy chúng thật ... dễ. Thế nhưng để có được cái lời giải "dễ" đó, chúng ta sẽ phải tốn rất nhiều công sức để tìm ra được chìa khóa của lời giải, tìm được đường lối đúng đắn cho lời giải. Và vấn đề mấu chốt là phải tìm ra được chìa khóa đó, còn mọi vấn đề sau đó đôi khi chỉ là các phép cộng trừ đơn giản.

Vậy làm sao có thể tìm ra được chiếc chìa khóa vàng cho các bài toán giải tích tổ hợp ? Có rất nhiều phương pháp khác nhau, rất nhiều cách tiếp cận đối với các bài toán này như phương pháp quan hệ đệ quy, phương pháp quỹ đạo, phương pháp thêm bớt... Trong bài viết này, qua một số các ví dụ, tôi sẽ trình bày với các bạn một phương pháp khá hữu hiệu để giải các bài toán giải tích tổ hợp mà chúng ta sẽ tạm gọi là *phương pháp song ánh*.

Ý tưởng của phương pháp này là : Hai tập hợp A và B có cùng số phần tử nếu như tồn tại một song ánh từ A vào B. Để đếm được số phần tử của A (kí hiệu $|A|$), ta có thể xây dựng một song ánh từ A vào một tập hợp B mà ta đã biết cách đếm số phần tử, và từ đây suy ra $|A| = |B|$. Một câu hỏi chắc chắn sẽ được đặt ra : tại sao B đếm được mà A lại không đếm được, mặc dù chúng gần như tương đương nhau ? Và đây chính là mấu chốt của vấn đề : hai tập hợp có cùng số phần tử có thể có cấu trúc được mô tả hoàn toàn khác nhau và phép đếm thực hiện được hay không, dễ dàng hay khó khăn chính là ở những mô tả này. Và ngay cả đối với cùng một tập hợp, nếu chúng ta có những cách mô tả khác nhau, sẽ có những phép đếm khác nhau, mặc dù cuối cùng chúng cũng cùng đi đến một kết quả chung, chẳng hạn như trong bài toán sau :

Bài toán : Giả sử F là tập hợp tất cả các bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$, trong đó A_i ($i = 1, 2, ..., k$) là một tập con của tập $\{1, 2, ..., 1998\}$. Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập A. Hãy tính :

$$S = \sum_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in F} |A_1 \cup A_2 ... \cup A_k| \qquad (1)$$

(Đề thi Olympic toán châu Á - Thái Bình Dương lần thứ 10 năm 1997)

Lời giải. *Lời giải thứ nhất* dùng phương pháp quy nạp khá tự nhiên về mặt ý tưởng, tuy rất cồng kềnh và đòi hỏi nhiều kĩ năng tính toán :

Để tránh nhầm lẫn, ta gọi F là F_k và S là S_k. Với $k = 1$ thì F_1 chính là tập hợp tất cả các tập con của E và S_1 là tổng các phần tử của chúng. Ta thay 1998 bằng số nguyên dương n bất kì.

Có C_n^i tập con gồm đúng i phần tử, và như vậy, $S_1 = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i = n.2^{n-1}$.

(Từ đẳng thức $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$ lấy đạo hàm hai vế ta được $n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i x^{i-1}$. Nhân hai vế với x, ta được : $nx(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i x^i$ (2). Thay $x = 1$, ta được kết quả trên).

Với $k = 2$, theo hướng trên, ta muốn tính số các cặp $(A_1, A_2) \in F_2$ sao cho $|A_1 \cup A_2| = i$. Gọi số này là $T(i, 2)$ thì ta sẽ có $S_2 = T(1, 2) + 2T(2, 2) + ... + nT(n, 2)$. Để tính $T(i, 2)$, ta cố định A_1 và giả sử A_1 là một tập hợp có j phần tử, $j \le i$ (có C_n^j cách chọn A_1). Để tập hợp $A_1 \cup A_2$ có đúng i phần tử, A_2 phải chứa đúng $i-j$ phần tử khác với các phần tử của A_1 và chứa một số lượng tùy ý số phần tử đã có trong A_1, như vậy có $C_{n-j}^{i-j} . 2^j$ cách chọn A_2, do đó $T(i, 2) = \sum_{j=0}^{i} C_n^j C_{n-j}^{i-j} 2^j$ Chú ý rằng

$$C_n^j C_{n-j}^{i-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} . \frac{(n-j)!}{(i-j)!(n-i)!} =$$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!} . \frac{i!}{j!(i-j)!} = C_n^i C_i^j, \text{ ta có}$$

$$T(i, 2) = \sum_{j=0}^{i} C_n^i C_i^j 2^j = C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j 2^j = C_n^i . 3^i \text{ và}$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{n} i C_n^i 3^i = n.3.4^{n-1}.$$

Lí luận tương tự, ta thu được công thức truy hồi đối với $T(i, k)$: $T(i, k+1) = \sum_{j=0}^{i} T(j, k) C_{n-i}^{i-j} 2^j$.

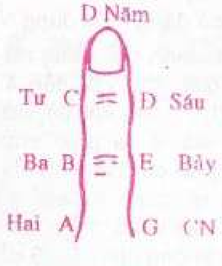
Từ đây bằng phương pháp quy nạp toán học, ta tìm được $T(i, k) = C_n^i (2^k - 1)^i$ và $S_k = n(2^k - 1)2^{k(n-1)}$ (sử dụng công thức (2)).

(Xem tiếp trang 6)

TỜ LỊCH TRÊN MỘT NGÓN TAY

XUÂN TRUNG
(Viện Công nghệ thông tin)

Bạn chỉ cần dùng một ngón tay là có thể tính được ngày m tháng t trong năm rơi vào thứ mấy trong tuần.



Mã năm 2001

Trước hết bạn cần nhớ mã của các tháng theo bảng sau :

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mã	*A*	*D*	*D*	*G*	*B*	*Đ*	*G*	*C*	*E*	*A*	*D*	*E*

Để dễ nhớ bạn chỉ cần học thuộc câu sau : *Anh Dũng Dạy Giúp Bạn Đông Giúp Cả Em Anh Dũng English.* Các chữ cái đầu của mỗi từ theo thứ tự là mã của tháng.

Sau đó bạn cần biết ngày 1 tháng 1 của năm đang tính rơi vào thứ mấy trong tuần. Thế là đủ.

Trên một ngón tay, bạn lần lượt đặt bảy chữ cái *A, B, C, D, Đ, E* và *G* ứng với bảy ngày trong tuần. Tại vị trí *A* bạn đặt thứ của ngày 1/1 của năm đang xét. Với năm 2001 ta biết ngày 1/1 là thứ Hai (như hình vẽ trên). Vậy điểm *A* ứng với thứ Hai. Khi đó điểm *B* ứng với thứ Ba, *C* ứng với thứ Tư v.v... Để xác định ngày m tháng t rơi vào thứ mấy của năm đang xét bạn thực hiện các bước sau đây :

Bước 1: Xác định mã của tháng theo bảng trên.

Bước 2 : Tính $m \equiv n$ (mod 7). (Lấy m chia cho 7, được số dư là n).

Bước 3. Bắt đầu từ điểm mã của tháng trên ngón tay của mình (được xác định theo từng năm) bạn hãy đếm từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ. Điểm kết thúc sẽ ứng với thứ trong tuần.

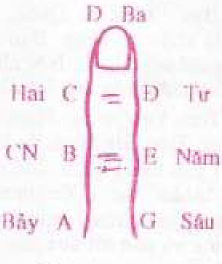
Thí dụ 1. Để xác định ngày 20/5/2001 rơi vào thứ mấy ta tính như sau :

Bước 1. Mã của tháng 5 là B (ứng với từ *Bạn*)

Bước 2. Ta có $m = 20$, $m \equiv 6$ (mod 7), $n = 6$:

Bước 3. Tại *B* tính là 1 đếm 6 lần theo chiều kim đồng hồ. Điểm kết thúc ứng với 6 là *G* rơi vào chủ nhật.

Vậy ngày 20/5/2001 là chủ nhật.



Mã năm 2000

Với các *năm nhuận* ta chỉ cần lưu ý tháng 2 có 29 ngày cho nên các ngày từ tháng 3 trở đi phải tính thêm một đơn vị. Như vậy kết quả tìm được theo cách tính nói trên sẽ được cộng thêm 1 nếu tính từ tháng 3 đến tháng 12. Các kết quả của tháng giêng và hai vẫn giữ như cũ.

Với năm 2000 ngày 1/1/2000 rơi vào thứ bảy, đó là điểm A trên ngón tay như hình vẽ bên.

Thí dụ 2. *Ngày 19/5/2000 rơi vào thứ mấy ?*

Mã của tháng 5 là B. Từ điểm B coi là 1 ta đếm đến n = 5 vì $19 \equiv 5$ (mod 7), sẽ tìm được điểm kết thúc ứng với 5 là E. Do năm 2000 là nhuận nên kết quả sẽ là thứ sáu.

Thí dụ 3. *Ngày 3/2/2000 rơi vào thứ mấy ?*

Mã của tháng 2 là *D* (ứng với từ *Dũng*). Từ điểm *D* coi là 1 ta đếm đến 3 điểm kết thúc là *E* ứng với thứ Năm.

Giải thích : Cách tính mã tháng ở bảng trên dựa vào nhận xét sau : với các năm không phải là nhuận thì các tháng sau đây sẽ có ngày đầu tháng rơi vào cùng một thứ và tạo thành các nhóm lệch nhau 1 ngày tính theo môđun 7.

Mã A : nhóm 0 (mod 7) gồm 2 tháng 1 và 10.

Mã B : nhóm 1 (mod 7) gồm tháng 5.

Mã C : nhóm 2 (mod 7) gồm tháng 8.

Mã D : nhóm 3 (mod 7) gồm các tháng 2, 3 và 11.

Mã Đ : nhóm 4 (mod 7) gồm tháng 6

Mã E : nhóm 5 (mod 7) gồm 2 tháng 9 và 12.

Mã G : nhóm 6 (mod 7) gồm 2 tháng 4 và 7.

Còn với các năm nhuận, như đã nói, do tháng 2 có 29 ngày nên kể từ tháng 3 đến tháng 12 năm nhuận ta phải cộng kết quả thêm 1 đơn vị.

Cuối cùng, lưu ý bạn đọc rằng năm nhuận được nhận biết theo các dấu hiệu sau :

1. Nếu tận cùng là 2 chữ số 0 thì số năm đó phải chia hết cho 400

2. Nếu không tận cùng là 2 chữ số 0 thì phải chia hết cho 4.

Chẳng hạn các năm 1964 và 2000 sẽ là nhuận còn năm 1990 thì không (Dĩ nhiên chúng ta chỉ xác định cho những năm có tối đa 4 chữ số).

GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Ôi ! Một năm sao mà trôi nhanh quá ! Một năm trong cuộc đời mỗi người để lại nhiều kỉ niệm khó quên. Có những kỉ niệm vui, với những lời chúc mừng bất tận. Có những kỉ niệm buồn, với bao tấm lòng san sẻ. Cám ơn mọi người đã sống cùng ta, kể cả lúc vui, lúc buồn và giờ đây tất cả cùng bước sang một thiên niên kỉ mới.

Hỡi các hội viên yêu quý của CLB ! Giá như có cách gì để có thể hội tụ nhau về cùng một nơi, mắt nhìn thấy nhau, tay trong tay nhau thì chắc chắn chúng ta sẽ nhận ra rằng : Tình bạn thật không biên giới. Bao nhiêu lứa tuổi khác nhau. Bao nhiêu quê quán khác nhau. Bao nhiêu công việc khác nhau. Thế mà chúng mình đã ở bên nhau, chung một câu lạc bộ của Toán học Tuổi trẻ.

Trước khi mở ra cuộc chơi mới, cuộc chơi xuyên suốt cả năm đầu tiên của Thiên niên kỉ mới, Thiên niên kỉ mà các năm bắt đầu viết bởi chữ số 2, câu bộ xin trao tặng phẩm đặc biệt cho hội viên may mắn nhất năm 2000.

Bạn *Nguyễn Danh Hưng*, sinh ngày 5 tháng 11 năm 1984. Địa chỉ : số 5, đường Công an vũ trang, phường Trần Nguyên Hãn, thị xã Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang.

Chúc mừng bạn Hưng và cảm ơn tất cả các bạn. Xin bạn Hưng gửi một tấm ảnh của mình để CLB có thể "công bố dung nhan" của bạn với tất cả mọi hội viên và bạn có tâm sự gì khi nhận được sự may mắn đặc biệt này ?

CLB

TẾT VUI

Chỉ nhìn số lượng các bài giải gửi về đã thấy "Tết Vui" được Vui như Tết. Hầu hết các bạn đều khẳng định có đẳng thức đúng $\sqrt{\overline{TẾT\,VUI}} = \overline{VUI}$!

Các cách giải cũng rất phong phú, có bạn không ngại gian khó viết đến 4 trang giấy to để tìm ra lời giải (!). Trong khi đó, có bạn lại công nhận những điều mà lẽ ra phải chứng minh "Như ta đã biết những số có 3 chữ số khi bình phương lên lại có tận cùng là chính nó chỉ gồm 2 số đó là 625, 376". Nhiều bạn "có thêm" kết quả : $\sqrt{390625} = 625$ vì quên không nhìn $T = 3$ đồng thời $T = 0$.

Xin giới thiệu lời giải của bạn *Nguyễn Khánh Hà*, 10T2, THPT Năng khiếu Quảng Bình : Từ đẳng thức đã cho ta dẫn đến :

$$1000\,\overline{TẾT} = \overline{VUI}\,(\overline{VUI} - 1)$$

Vì $(\overline{VUI}\,;\,\overline{VUI} - 1) = 1$ và $\overline{VUI}(\overline{VUI} - 1)$ chia hết cho $2^3.5^3$ nên chỉ có hai khả năng :

Khả năng 1 : $\begin{cases} \overline{VUI} = 8k \\ \overline{VUI} - 1 = 125p \end{cases}$ với $k, p \in N$ và $0 < p < 8$. Từ đó ta có : $8k = 125p + 1$

Do $p < 8$ và lẻ suy ra $p = 3 \Rightarrow \overline{VUI} = 125.3 + 1 = 376$. Ta có kết quả : $\sqrt{141376} = 376$ thoả mãn

Khả năng 2 : $\begin{cases} \overline{VUI} = 125m \\ \overline{VUI} - 1 = 8n \end{cases}$ với $m, n \in N$ và $0 < m < 8$

Do $m < 8$ và lẻ suy ra $m = 5$

$\Rightarrow \overline{VUI} = 625 \Rightarrow \overline{TẾT} = 390$ không thỏa mãn.

Bài toán có một kết quả duy nhất. Hai bạn T.B.K H.N.S (Quy Nhơn) có lời giải giống nhau quá... không hiểu vì sao ?

Nhân dịp năm mới, xuân "lì xì" cho bạn Hà và các bạn *Đào Xuân Quang*, 9B, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc; *Phạm Ngọc Diệp*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Hà Nội; *Lưu Hải Vũ*, 12A5, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Phan Thiết, Bình Thuận ; *Phạm Văn Chiến*, 10T, THPT NK Hà Tĩnh. Cảm ơn tất cả các bạn.

L.T.N

TÔI SAI HAY SÁCH SAI ?

Xưa... các cụ có câu "nói như sách" mang theo một hàm ý : đã là sách thì dứt khoát là đúng. Nhưng nay thì có nhiều cuốn sách mà khá nhiều chi tiết lại cần phải "dọn vườn". Ở bài toán này, có thể chỉ ra ngay : kết luận bất phương trình vô nghiệm "của sách" là sai vì $x = -1$ đương nhiên là nghiệm.

Một số bạn vẫn phê phán lời giải của "tôi" là sai :

$$\sqrt{3-x} > \sqrt{x+1} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 - x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1$$

Nhưng thật oan cho "tôi", phép biến đổi này hoàn toàn... chuẩn.

Các bạn lưu ý rằng nếu để bất phương trình ở dạng $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$ mà bình phương hai vế thì mới phải kết hợp với điều kiện $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} \geq 0$, còn lời giải của "tôi" là ... khác !

Có những bạn giải lại nhưng bị sai trầm trọng !

Bạn *Phạm Ái Quốc*, 12T, NK Hưng Yên đã cho lời giải khác và đúng. Bạn Trần Hưng Đại, nhà 390, đường Nguyễn Trãi, Hà Nội nhận xét khá "tinh" : *hình như hơi thừa điều kiện $x \leq 3$ ở phần đầu lời giải.*

Bạn *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, Hà Nam thì "thở dài" : Đáng *gia* (?" phải cho lời giải trong sách... để chẩn đoán bệnh. Ai lại để các bác sĩ "nhàn" thế ? Xin thưa các bạn : Nhiệm vụ của bác sĩ đâu phải chữa bệnh mà nhiều khi phải biết khám sức khỏe và phê tốt nữa đây ! Cảm ơn.

KIHIVI

Cuộc chơi mới đầu thiên niên kỉ mới

ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Ai cũng có quyền tham gia cuộc chơi thật lí thú này để trổ tài "con mắt tinh tường" của mình. *Suốt năm 2001, CLB sẽ in phiếu cuộc chơi và một ảnh chân dung ở từng số tạp chí.*

Bạn hãy làm như sau :

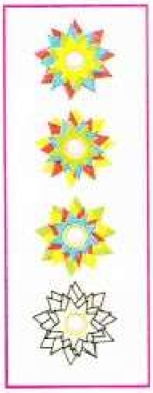
1) Ghi rõ họ và tên cùng địa chỉ của bạn ở ngoài phong bì.

2) Cắt và dán phiếu cuộc chơi ở bên ngoài phong bì ; trong phiếu cuộc chơi các bạn điền số tuổi của người trong ảnh ở thời điểm chụp ảnh và cho biết tên người đó.

3) Bạn viết cảm tưởng của bạn về cuộc chơi này và cho vào phong bì. Các bài viết khác không bỏ chung trong phong bì này.

Mỗi tháng CLB sẽ in phiếu cuộc chơi và một ảnh chân dung của một ... người đã từng có ảnh trên THTT (tất nhiên khác ảnh đã in). Bạn nhìn ảnh thật kĩ và tham gia cuộc chơi nhé ! Nếu số bạn đoán đúng quá nhiều thì CLB sẽ tiến hành bốc thăm để chọn ra 3 bạn để trao tặng phẩm. Nào ! Hãy bước vào cuộc chơi mới, đầu thiên niên kỉ mới !

CLB



ĐỐ

TINH MẮT, KHÉO TAY

Bạn nhìn 3 hình bên và phải tô màu như thế nào vào hình cuối sao cho hợp lí nhất ?

THANH MAI (st)

Giải đáp bài

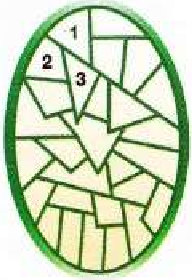
ĐẮT BAO NHIÊU

Sau mấy lần mua, bán và chuộc lại tác giả mất 155 ngàn đồng và được một bộ quần áo. Nếu gọi giá trị thực của bộ quần áo là x ngàn đồng thì tác giả bài báo sẽ bị thiệt nếu $x < 155$ và số tiền thiệt là $(155 - x)$ ngàn đồng. Con số này hoàn toàn phụ thuộc vào x.

Lập luận của Trung là dựa vào giả thiết $x = 150$, Hoành lập luận với $x = 140$.

Nhận xét: Chỉ có bạn *Phan Thành Nam*, 10 Toán 2 THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên** là hiểu bài toán. Các bạn Trần Đăng Hiên, 12A, PTBC cấp 2, 3 chuyên Ngữ, **Hà Nội,** Phạm Mạnh Hùng, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**, Hà Văn Quý, 12 Toán, PTTH năng khiếu **Quảng Bình** có một số ý đúng tuy chưa giải được bài một cách trọn vẹn.

VKT



ĐÁNH SỐ NHANH

Bạn hãy đánh số 1, 2 và 3 vào các hình nhỏ sao cho các hình liền nhau không có cùng một số.

VIỆT ĐỨC

LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA ?

Trong đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 THCS của Quận 1, Tp Hồ Chí Minh năm học 2000-2001 vào ngày 29-11-2000 có bài toán sau :

Bài toán: Giải phương trình

$$\sqrt{4x^2+5x+1} - \sqrt{4x^2-4x+4} = 9x-3$$

Một số học sinh đã cho lời giải như sau :

$\sqrt{4x^2+5x+1} - \sqrt{4x^2-4x+4} = 9x-3$ (1)

Đặt $a = \sqrt{4x^2+5x+1}$,

$b = \sqrt{4x^2-4x+4}$ $(a;\ b \geq 0)$

Ta có $a^2 - b^2 = (4x^2+5x+1) - (4x^2-4x+4) = 9x - 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a - b = a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b) - (a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0$

$\Leftrightarrow a-b = 0$ hoặc $a+b-1 = 0$

* Nếu $a-b = 0$ ta có $\sqrt{4x^2+5x+1} = \sqrt{4x^2-4x+4}$

$\Leftrightarrow 4x^2+5x+1 = 4x^2-4x+4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

* Nếu $a+b-1 = 0$ ta có $a+b = 1$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow \begin{cases} a-b = 9x-3 \\ a+b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 9x-2$

$2\sqrt{4x^2+5x+1} = 9x-2$ (4) $\Leftrightarrow 4(4x^2+5x+1) = (9x-2)^2$

$\Leftrightarrow 16x^2+20x+4 = 81x^2-36x+4 \Leftrightarrow 65x^2 - 56x = 0$

$\Leftrightarrow x(65x-56) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{56}{65}$

Thử $x = 0$ thoả mãn (4) $x = \frac{56}{65}$ thỏa (4)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$ và $x = \frac{56}{65}$

Lời giải trên đã đúng chưa ?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp Hồ Chí Minh)

VIỆN TOÁN HỌC - 30 NĂM

Tiền thân của Viện Toán học là Nhóm nghiên cứu Toán học thuộc Ủy ban Khoa học Nhà nước được thành lập từ đầu những năm 60. Các giáo sư Tạ Quang Bửu, Lê Văn Thiêm, Hoàng Tụy là những người đã có công hoạch định chiến lược xây dựng và phát triển Viện Toán học. Những sinh viên tốt nghiệp loại giỏi của trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (1962, 1963) là những người đầu tiên của Nhóm nghiên cứu Toán, có trụ sở làm việc là một căn phòng rộng khoảng $15m^2$ tại 39 Trần Hưng Đạo, Hà Nội với một chiếc bảng đen, mấy cái bàn và một tủ sách chừng 100 cuốn ! Mặc dầu vậy, tập thể cán bộ của Phòng vẫn miệt mài học tập, nghiên cứu. Một điều đáng ngạc nhiên là trong hoàn cảnh chiến tranh, một số xêmina của Hội Toán học như Hàm phức, Phương trình đạo hàm riêng... vẫn sinh hoạt rất đều đặn. Hồi đó, lịch sinh hoạt hàng tháng của các xêmina được in rônêô và gửi đi các khoa toán của tất cả các trường. Mỗi đợt xêmina, mọi người đi xe đạp hàng mấy chục cây số về Hà Nội tham dự rồi hôm sau lại quay về khu sơ tán.

Ngày 05/02/1969 Thủ tướng Phạm Văn Đồng đã kí quyết định thành lập Viện Toán học, trực thuộc Ủy ban Khoa học và Kĩ thuật Nhà nước. Đến cuối năm 1970, khi Giáo sư Lê Văn Thiêm, Hiệu phó trường Đại học Tổng hợp Hà Nội, được cử về giữ chức Viện phó Viện Toán học, Viện mới chính thức đi vào hoạt động. Năm 1972, Viện Toán học lại phải đi sơ tán. Tuy đời sống rất vất vả thiếu thốn, tài liệu sách vở nghèo nàn, công tác nghiên cứu vẫn được tiến hành với quyết tâm cao. Các xêmia khoa học vẫn được tiến hành. Năm nào Viện cũng tổ chức Hội nghị khoa học để thông báo kết quả nghiên cứu mới. Cũng chính trong thời gian này, nhiều cán bộ của Viện vẫn có những công trình đạt chất lượng cao, công bố trên các tạp chí có uy tín trong nước và quốc tế.

Tháng 5/1975, Viện Khoa học Việt Nam được thành lập và Viện Toán học là một thành viên. Từ đó Viện Toán học đã có nhiều bước phát triển và tiến bộ vững chắc với mục tiêu phấn đấu để trở thành một Viện Toán học theo các chuẩn mực quốc tế. Lực lượng nghiên cứu của Viện dần dần trưởng thành : bên cạnh một số nhà khoa học đầu đàn Viện đã có một lớp cán bộ trẻ được đào tạo tương đối tốt và đầy nhiệt tình trong nghiên cứu. Nhiều cán bộ của Viện đã bảo vệ thành công luận án tiến sĩ khoa học, một số tiến sĩ khoa học khác được bổ sung về Viện. Trong Viện đã hình thành những nhóm nghiên cứu mạnh, có uy tín trên thế giới như các nhóm nghiên cứu về Tối ưu, Đại số giao hoán, Phương trình, Lí thuyết kì dị... Các xêmina liên ngành, liên cơ quan được hình thành, góp phần đẩy mạnh sự hợp tác nghiên cứu giữa các cán bộ trong Viện, cũng như các cán bộ của nhiều cơ quan khác nhau. Viện Toán học đã thực sự là hạt nhân của công tác nghiên cứu toán học trong cả nước. Nhiều cán bộ của Viện được mời tới giảng dạy và làm việc tại các Viện nghiên cứu, Trường Đại học nổi tiếng thế giới, một số giáo sư của Viện đã được mời tham gia ban biên tập các tạp chí quốc tế có uy tín, nhiều Hội nghị quốc tế về Toán học được tổ chức tại Viện Toán. Điều đó đã đem lại sự bình đẳng trong hợp tác quốc tế của Viện Toán học. Bên cạnh việc nghiên cứu, ngay từ những năm 80, Viện Toán đã được coi là cơ sở đào tạo nghiên cứu sinh chuyên ngành Toán mạnh nhất của cả nước. Từ năm 1996, Viện bắt đầu tham gia đào tạo cao học. Hiện nay hệ thống các bài giảng Toán học hiện đại do các giáo sư giỏi của Viện trình bày, nhằm giúp các bạn trẻ tiếp cận nhanh các vấn đề thời sự của Toán học, đã thu hút hàng trăm sinh viên từ các trường Đại học đến dự.

Sự phấn đấu kiên trì và bền bỉ của Viện Toán học cho những nghiên cứu khoa học ở trình độ cao đã đem lại cho Viện sự thừa nhận trong cộng đồng toán học quốc tế. Viện đã được Viện Hàn lâm Khoa học các nước trên thế giới thứ ba xếp là một trong mười Viện nghiên cứu xuất sắc. Huân chương Lao động hạng nhất và Huân chương Độc lập hạng ba mà Nhà nước trao tặng Viện Toán học cùng với hai Giải thưởng Hồ Chí Minh về Khoa học Kĩ thuật trao cho Giáo sư Lê Văn Thiêm và Giáo sư Hoàng Tụy là sự ghi nhận những đóng góp to lớn của Viện với sự nghiệp Khoa học Kĩ thuật của đất nước.

Ngày 3/11/2000, viện Toán học đã tổ chức kỉ niệm 30 năm ngày thành lập và nhân dịp này Viện Toán học đã vinh dự được nhận Huân chương Độc lập hạng ba của Nhà nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam.

ISN : 0866-0853 Chế bản tại Tòa soạn
Chỉ số : 12884 In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ **Giá : 3.000đ**
Mã số : 8BT85M1 In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2001 **Ba nghìn đồng**