TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
8 2014
Số 446

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

ĐN2

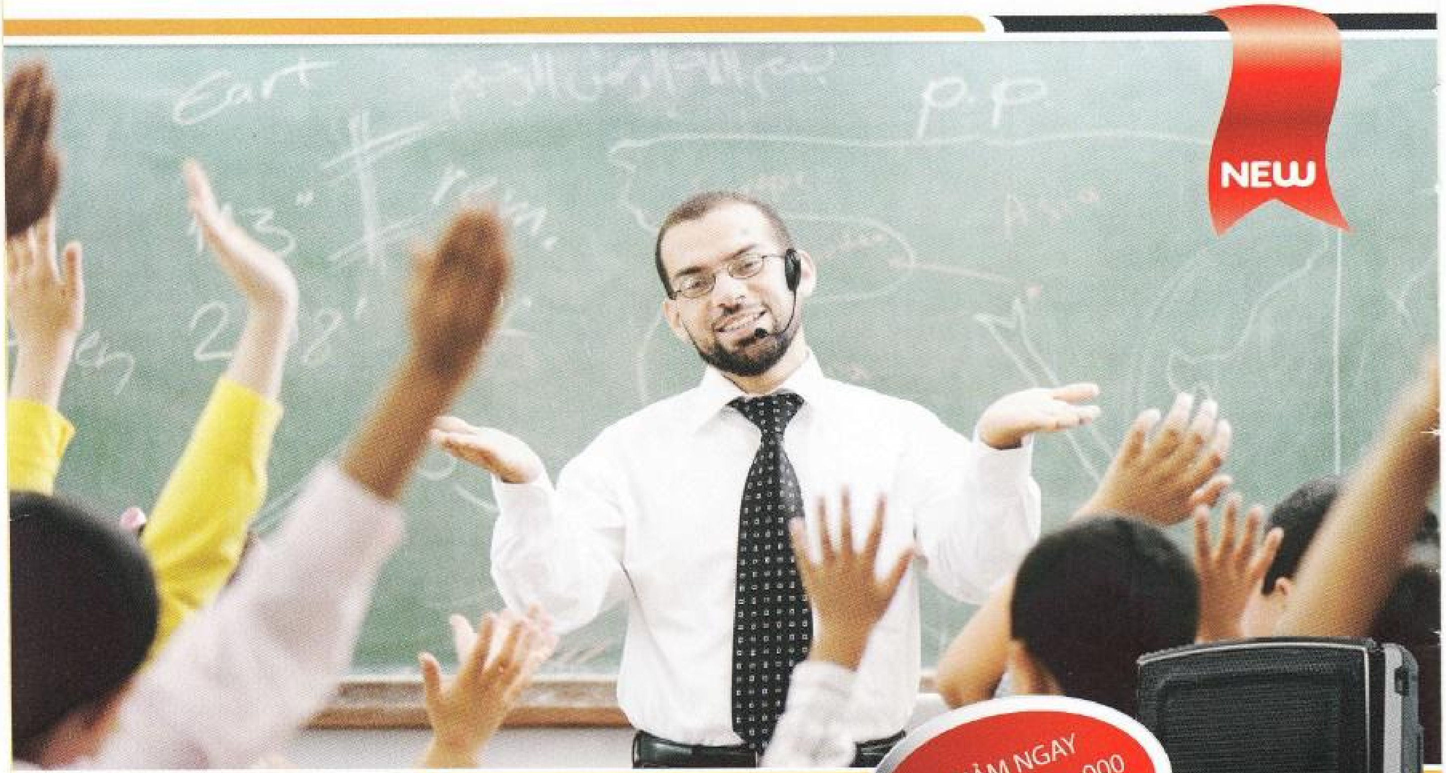
KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 55, NĂM 2014

UNIZONE 9580 F2

Máy trợ giảng không dây thế hệ mới

Bảo hành 12 tháng

Made in KOREA



THUẬN TIỆN

Với thiết kế nhỏ gọn, thời trang giúp các giáo viên hoàn toàn thoải mái trong việc mang theo & di chuyển giữa các lớp học.

KHÔNG DÂY

Unizone 9580 F2 kết nối không dây giữa micro & loa tạo nên xu thế sử dụng mới, thuận tiện & cải thiện chất lượng công việc.

CHỦ ĐỘNG

Được tính hợp màn hình LCD, Unizone 9580 F2 hiển thị rõ tình trạng pin, sóng, thời lượng ghi âm... giúp người dùng chủ động hơn trong công việc.

Giảm 600.000 VNĐ

Thời gian từ 15/07 - 31/08/2014

Gọi ngay 0934. 683. 968

MCRIO AUDIO TECHNOLOGY

Công ty TNHH Thương mại giải trí MCRIO

Địa chỉ: 132 Chùa Láng, Đống Đa, Hà Nội

Website: www.mcrio.vn | Email: support@mcrio.vn | Điện thoại: 0462 828 288

KHAI THÁC BÀI TOÁN LANGLEY

NGƯT NGUYỄN PHƯỚC
(Hiệu trưởng THCS Lê Hồng Phong, Huế)

Bài toán Langley (*Langley's problem*) do nhà toán học *Edward M. Langley* đề xuất tháng 10 năm 1922, được đăng ở "*The Mathematical Gazette*" của *Anh*. *Bài toán Langley* nổi tiếng vì nó là bài toán về "*góc ngẫu nhiên*", mới trông qua thì thấy rất đơn giản nhưng khi tìm cách giải nó thì không dễ tí nào.

BÀI TOÁN LANGLEY. *Cho tam giác ABC cân tại A (AB = AC) với $\widehat{BAC}=20^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC}=50^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{ECB}=60^\circ$. Tính số đo góc DEC.*

Trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi và tham khảo tài liệu trên Internet, tác giả bài viết này đã biên soạn 10 cách giải cho bài toán gốc mà *Edward M. Langley* đề xuất. Sau đây là lời giải vắn tắt của 5 trong 10 cách giải đó.

Cách giải 1 (*h.1*). Tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC}=20^\circ$ nên $\widehat{ABC}=\widehat{BCA}=80^\circ$. Trên AB lấy điểm K sao cho $\widehat{BKC}=80^\circ$. Lúc đó ΔBKC cân tại C, suy ra $CK = BC$ và $\widehat{KCB}=20^\circ$.

Ta có: $\widehat{BEC}=40^\circ$, $\widehat{KCE}=40^\circ$. Suy ra:

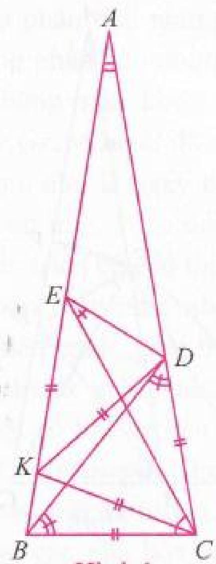
$\widehat{BEC}=\widehat{KCE} \Rightarrow \Delta KEC$ cân tại $K \Rightarrow KE = KC$.

ΔDBC cân tại $C \Rightarrow CB = DC$; ΔCKD đều $\Rightarrow CK = CD = KD \Rightarrow \Delta EKD$ cân tại K.

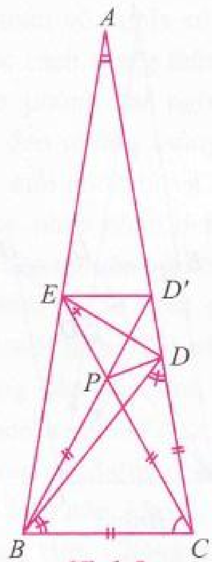
Lại có: $\widehat{DKE}=40^\circ$ nên $\widehat{KED}=70^\circ$.

Mà $\widehat{KED}=\widehat{KEC}+\widehat{DEC}$ và $\widehat{KEC}=40^\circ$,

do đó: $\widehat{DEC}=30^\circ$.



Hình 1



Hình 2

Cách giải 2 (*h.2*). Trên AC lấy D' sao cho $\widehat{CBD'}=60^\circ$; BD' cắt EC tại P.

Dễ thấy ΔBCP và $\Delta EPD'$ là các tam giác đều.

Suy ra: $BC = BP = CP$ và $PE = ED' = PD'$.

ΔDBC cân tại $C \Rightarrow CB = DC \Rightarrow \Delta PCD$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{CPD}=(180^\circ-\widehat{PCD}):2=80^\circ$. Ta có: $\widehat{DPD'}=40^\circ$, $\widehat{PD'D}=40^\circ \Rightarrow \widehat{DPD'}=\widehat{PD'D}$

$\Rightarrow \Delta PD'D$ cân tại $D \Rightarrow DP = D'D$.

$\Delta PED = \Delta D'ED$ (c.c.c) nên

$$\widehat{DEC}=\widehat{D'ED}=\widehat{PED'}:2=60^\circ:2=30^\circ.$$

Cách giải 3 (*h.3*). Trên AC lấy D' sao cho $\widehat{CBD'}=60^\circ$. BD' cắt EC tại P.

Dễ thấy ΔBCP và $\Delta EPD'$ là các tam giác đều.

$\Rightarrow BC = BP = CP$; $PE = ED' = PD'$; $ED' // BC$.

ΔDBC cân tại $C \Rightarrow CB = DC \Rightarrow BP = DC$.

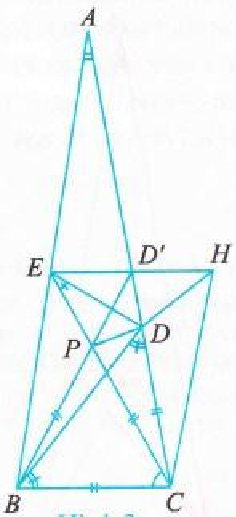
Đường thẳng song song với AB kẻ từ C cắt $D'E$ tại H. Tứ giác $BCHE$ là hình bình hành.

Dễ thấy: $\widehat{EBP} = \widehat{ECD} = \widehat{DCH} = 20^o$.

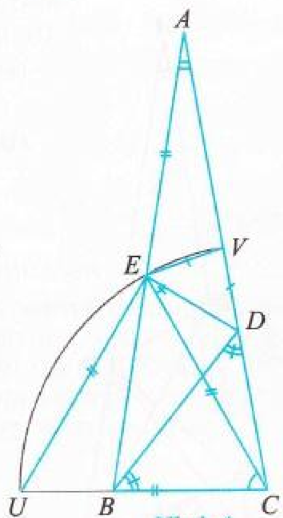
$\Delta BPE = \Delta CDH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{BEP} = 40^o$.

Mặt khác $\widehat{EHC} = \widehat{ABC} = 80^o$ nên HD là phân giác góc EHC. Lại có CD là phân giác của góc $ECH \Rightarrow ED$ là phân giác của góc CEH.

Do đó: $\widehat{DEC} = \widehat{CEH} : 2 = 30^o$.



Hình 3



Hình 4

Cách giải 4 (*h.4*). Dựng đường tròn $(C; CE)$ cắt tia CB tại U và AC tại V.

ΔEUC đều $\Rightarrow EU = UC = CE; \widehat{UEC} = \widehat{ECU} = 60^o$.

ΔAEC cân tại $E \Rightarrow AE = EC$. ΔECV cân tại C

$\Rightarrow \widehat{CVE} = \widehat{CEV} = (180^o - \widehat{ACE}) : 2 = 80^o$.

$\Delta BEU = \Delta VAE$ (c.g.c) $\Rightarrow EV = UB$.

ΔDBC cân tại $C \Rightarrow CB = DC$

$\Rightarrow BU = CU - BC = CV - CD = DV$.

Vì thế ΔDEV cân tại V ($VE = VD$).

Cho nên: $\widehat{DEV} = (180^o - \widehat{EVD}) : 2 = 50^o$.

Do đó: $\widehat{DEC} = \widehat{CEV} - \widehat{VED} = 80^o - 50^o = 30^o$.

Cách giải 5 (*Bạn đọc tự vẽ hình*). Gọi B' là điểm đối xứng với B qua AC; C' là điểm đối xứng với C qua AB, ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{AB'D} = 30^o$;

$\widehat{BAC'} = \widehat{CAB'} = \widehat{ECA} = \widehat{EC'A} = 20^o$;

$\widehat{BEC'} = \widehat{BEC} = 40^o; AC' = AB = AC = AB'$.

$\Delta AB'C'$ đều (vì $AC' = AB'$; $\widehat{C'AB'} = 60^o$).

Lại có $B'D$ là phân giác của góc $AB'C'$ nên $B'D$ là đường trung trực của đoạn thẳng AC'. $\Delta AEC'$ cân tại $E \Rightarrow EA = EC'$. Vì thế E nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AC', tức là $E \in B'D$. $B'D$ cắt AC' tại J, ta có:

$$\widehat{JEC'} + \widehat{BEC'} + \widehat{BEC} + \widehat{DEC} = 180^o$$

$$\Leftrightarrow 70^o + 40^o + 40^o + \widehat{DEC} = 180^o$$

$$\Leftrightarrow \widehat{DEC} = 30^o.$$

Trong thư gửi cho ông *Hyacinthists* về *Bài toán Langley*, ông *Nikos Dergiades* đã sử dụng máy tính, gán cho các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}, \widehat{ECB}$, $\widehat{DBC}$ có số đo là các số nguyên, có tất cả 113564 trường hợp và đã phát hiện 53 trường hợp số đo góc DEC là số nguyên. Tác giả bài viết cũng đã dùng phần mềm *GeoGebra* để kiểm tra chính xác 53 trường hợp là biến thể của *Bài toán Langley* như sau:

STT	$\widehat{BAC}$	$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$	$\widehat{ECB}$	$\widehat{DBC}$	$\widehat{DEC}$
1	120	30	24	12	6
2	120	30	24	18	12
3	72	54	39	21	12
4	72	54	39	27	18
5	72	54	42	24	12
6	72	54	42	30	18
7	72	54	48	24	6
8	72	54	48	42	24
9	72	54	51	39	9
10	72	54	51	42	12
11	56	62	59	31	3
12	56	62	59	56	28
13	52	64	58	32	6
14	52	64	58	52	26
15	48	66	57	33	9
16	48	66	57	48	24
17	44	68	56	34	12
18	44	68	56	44	22

19	40	70	55	35	15
20	40	70	55	40	20
21	36	72	54	36	18
22	32	74	53	32	16
23	32	74	53	37	21
24	28	76	52	28	14
25	28	76	52	38	24
26	24	78	51	24	12
27	24	78	51	39	27
28	20	80	50	20	10
29	20	80	50	40	30
30	20	80	60	30	10
31	20	80	60	50	30
32	20	80	65	25	5
33	20	80	65	60	40
34	20	80	70	50	10
35	20	80	70	60	20
36	16	82	49	16	8
37	16	82	49	41	33
38	12	84	42	18	12
39	12	84	42	30	24
40	12	84	48	12	6
41	12	84	48	42	36
42	12	84	57	33	15
43	12	84	57	42	24
44	12	84	66	42	12
45	12	84	66	54	24
46	12	84	69	21	3
47	12	84	69	66	48
48	12	84	72	42	6
49	12	84	72	66	30
50	8	86	47	8	4
51	8	86	47	43	39
52	4	88	46	4	2
53	4	88	46	44	42

Hoàn toàn không dễ để đưa ra đầy đủ cách giải cho các trường hợp trên. Tác giả bài viết cùng các em học sinh trong lớp bồi dưỡng học sinh giỏi Toán của Phòng GD&ĐT Thành phố Huế năm học 2013 - 2014 đã cố gắng đưa ra cách giải cho một số trường hợp sau:

Trường hợp 28 (*h.5*).

$\widehat{BAC}$	$\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$	$\widehat{ECB}$	$\widehat{DBC}$	$\widehat{DEC}$
20^o	80^o	50^o	20^o	?

Tam giác EBC có $\widehat{BCE}=50^o$, $\widehat{EBC}=80^o$ nên $\widehat{BEC}=50^o$, suy ra ΔEBC cân tại $B \Rightarrow EB=BC$.

Tương tự, ΔBDC cân tại $B \Rightarrow BD=BC$.

Tam giác EBD có $\widehat{EBD}=\widehat{EBC}-\widehat{DBC}=60^o$ và $BE=BD$ $(=BC)$ nên là tam giác đều. Do đó:

$$\widehat{DEC}=\widehat{BED}-\widehat{BEC}=60^o-50^o=10^o.$$

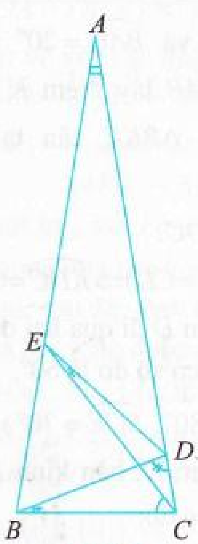
Trường hợp 29 (*h.6*).

$\widehat{BAC}$	$\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$	$\widehat{ECB}$	$\widehat{DBC}$	$\widehat{DEC}$
20^o	80^o	50^o	40^o	?

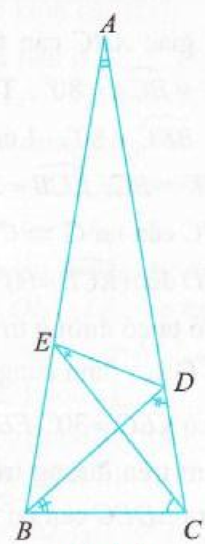
Tam giác BEC cân tại B (vì $\widehat{BEC}=\widehat{BCE}=50^o$).

Lại có BD là phân giác góc BEC (vì $\widehat{CBD}=\widehat{EBD}=40^o$) nên BD là đường trung trực của đoạn thẳng EC.

Suy ra $DE=DC \Rightarrow \Delta EDC$ cân tại D. Vì vậy $\widehat{DEC}=\widehat{DCE}=\widehat{ACB}-\widehat{ECB}=80^o-50^o=30^o$.



Hình 5



Hình 6

Trường hợp 30 (*h.*7).

$\widehat{BAC}$	$\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$	$\widehat{ECB}$	$\widehat{DBC}$	$\widehat{DEC}$
20°	80°	60°	30°	?

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $\widehat{CBF}=60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC, khi đó AM là đường trung trực và là phân giác của tam giác cân ABC, AM cắt FB tại O. ΔBOC cân tại O có $\widehat{CBO}=60^\circ$ nên là tam giác đều. Suy ra $\widehat{BCO}=60^\circ$. Lại có $\widehat{BCE}=60^\circ$ nên $O\in EC$.

Dễ thấy: $\Delta EOB=\Delta FOC$ (c.c.c)

$\Rightarrow OE=OF\Rightarrow \dfrac{OF}{OC}=\dfrac{OD}{OB}\Rightarrow EF\parallel BC$

$\Delta OEF \backsim \Delta COB\Rightarrow \Delta EOF$ đều.

BD là phân giác của tam giác đều BOC nên BD là đường trung trực đoạn thẳng OC

$\Rightarrow DO=DC\Rightarrow \Delta ODC$ cân tại D

$\Rightarrow \widehat{DOC}=\widehat{DCO}=20^\circ$.

Tam giác DOF cân tại $O\Rightarrow DO=OF$.

Lại có: $OF=OE$ suy ra $OD=OE$

$\Rightarrow \Delta EOD$ cân tại O.

Do đó: $\widehat{DEC}=\widehat{DOC}:2=20^\circ:2=10^\circ$.

Trường hợp 34 (*h.*8).

$\widehat{BAC}$	$\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$	$\widehat{ECB}$	$\widehat{DBC}$	$\widehat{DEC}$
20°	80°	70°	50°	?

Tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC}=20^\circ$ nên $\widehat{ABC}=\widehat{BCA}=80^\circ$. Trên AB lấy điểm K sao cho $\widehat{BKC}=80^\circ$. Lúc đó ΔBKC cân tại C $\Rightarrow CK=BC, \widehat{KCB}=20^\circ$.

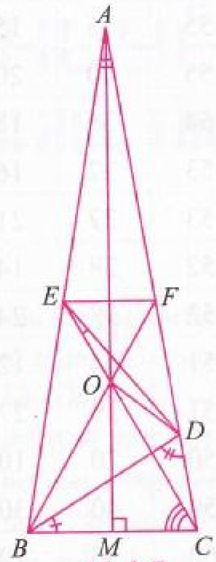
ΔDBC cân tại $C\Rightarrow CB=DC$.

ΔCKD đều $(\widehat{KCD}=60^\circ; CK=CD)\Rightarrow \widehat{KDC}=60^\circ$.

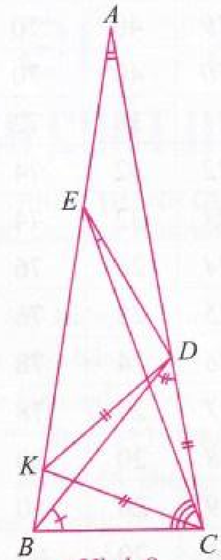
Từ đó ta có đường tròn tâm D đi qua hai điểm K và C xác định cung KC có số đo là 60°.

Lại có $\widehat{KEC}=30^\circ\,(\widehat{EBC}=80^\circ; \widehat{BCE}=70^\circ)$ nên E nằm trên đường tròn tâm D, bán kính DC. Suy ra ΔDEC cân tại D. Do đó:

$$\widehat{DEC}=\widehat{DCE}=10^\circ.$$



Hình 7



Hình 8

Trường hợp 35 (*Bạn đọc tự vẽ hình*).

$\widehat{BAC}$	$\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$	$\widehat{ECB}$	$\widehat{DBC}$	$\widehat{DEC}$
20°	80°	70°	60°	?

Trên AB lấy điểm F sao cho $\widehat{BCF}=60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC, khi đó AM là đường trung trực và là phân giác của ΔABC, AM cắt FC tại O. ΔBOC cân tại O có $\widehat{BCO}=60^\circ$ nên là tam giác đều. Suy ra $\widehat{OBC}=60^\circ$. Từ $\widehat{DBC}=60^\circ$ nên $O\in BC$. Dễ thấy $\Delta FOB=\Delta DOC$ (g.c.g) $\Rightarrow$ OF $=OD\Rightarrow$ $\dfrac{OF}{OC}=\dfrac{OD}{OB}\Rightarrow FD\parallel BC\Rightarrow \Delta OFD\backsim\Delta OBC$

$\Rightarrow \Delta FOD$ đều. Ta thấy ΔAFC cân tại F $\Rightarrow FA=FC$. Dễ chứng minh $EA=OC$. Vậy $EF=OF$. Mặt khác: $OF=FD\Rightarrow EF=FD$ $\Rightarrow \Delta EFD$ cân tại F

$\Rightarrow \widehat{DEF}=(180^\circ-\widehat{EFD}):2=50^\circ$.

Do đó: $\widehat{DEC}=\widehat{DEF}-\widehat{BEC}=50^\circ-30^\circ=20^\circ$.

Có thể có thêm những trường hợp là biến thể của *Bài toán Langley* mà bài viết chưa đề cập đến, rất mong các bạn chung sức để khai thác nó. Riêng những trường hợp còn lại là những bài tập hay, rất cần sự quan tâm, chia sẻ của các bạn !

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI

NĂM HỌC 2014 - 2015

VÒNG 1 (*120 phút*)

Câu 1. 1) Giải phương trình

$$(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(2+2\sqrt{1-x^2})=8.$$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy+y^2=1 \\ x^2+xy+2y^2=4 \end{cases}$.

Câu 2. 1) Giả sử x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2y^2(x+y)+x+y=3+xy.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn với $AB<BC$. D là điểm thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác của $\widehat{BAC}$. Đường thẳng qua C song song với AD cắt trung trực của AC tại E. Đường thẳng qua B song song với AD cắt trung trực của AB tại F.

1) Chứng minh rằng tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE.

2) Chứng minh rằng các đường thẳng BE, CF, AD đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là G.

3) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BF tại Q. Đường thẳng QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại P khác E. Chứng minh rằng các điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng $2abc(a+b+c)\le\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$.

VÒNG 2 (*150 phút*)

Câu 1. 1) Giả sử x, y là những số thực dương phân biệt thỏa mãn

$$\frac{x}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=4.$$

Chứng minh rằng $5y=4x$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-3y^2+xy=12 \\ 6x+x^2y=12+6y+y^2x \end{cases}$.

Câu 2. 1) Cho x, y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x=y$.

2) Giả sử x, y là những số thực không âm thỏa mãn $x^3+y^3+xy=x^2+y^2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}}+\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB=PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

1) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Chứng minh rằng tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB. Chứng minh rằng

$$\widehat{QKL}+\widehat{PAB}=\widehat{QLK}+\widehat{PAC}.$$

Câu 4. Cho tập hợp A gồm 31 phần tử và dãy gồm m tập con của A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: (i) mỗi tập thuộc dãy có ít nhất hai phần tử; (ii) nếu hai tập thuộc dãy có chung nhau ít nhất hai phần tử thì số phần tử của hai tập này khác nhau.

Chứng minh rằng $m\le 900$.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG & PHẠM VĂN HÙNG
(*GV THPT Chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*) ***giới thiệu.***

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM HỌC 2014 - 2015

(Đề thi đăng trên TH&TT số 445, tháng 7 năm 2014)

VÒNG 1

Câu 1. Biến đổi vế trái của đẳng thức:

$$VT=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}-\frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{3a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}-\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$=\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=0.$$

Câu 2. Gọi C là vị trí xe máy bị hỏng, ta tính được $AC = 90$ km, $CB = 30$ km. Nếu x là vận tốc (km/h) của xe máy trên quãng đường AC ($x > 10$) thì vận tốc của xe máy trên quãng đường CB là $x - 10$ (km/h). Khi đó xe máy đi hết quãng đường AC mất $\frac{90}{x}$ h; đi hết quãng đường CB mất $\frac{30}{x-10}$ h.

Thời gian sửa xe máy là 10 phút $=\frac{1}{6}$ h.

Theo giả thiết, thời gian xe máy đi từ A đến B (kể cả thời gian sửa xe) là $4\frac{2}{3}$ h $=\frac{14}{3}$ h.

Từ đó ta có phương trình:

$$\frac{90}{x}+\frac{30}{x-10}+\frac{1}{6}=\frac{14}{3}\Leftrightarrow 3x^2-110x+600=0$$

$$\Leftrightarrow x=30 \text{ hoặc } x=\frac{20}{3} \text{ (loại)}.$$

Suy ra thời gian đi từ A đến C là $\frac{90}{30}=3$ (h).

Vậy xe máy hỏng lúc 10 giờ (trưa cùng ngày).

Câu 3. 1) Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của phương trình: $x^2=\frac{2}{3}(m+1)x+\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow f(x)=3x^2+2(m+1)x-1=0$ (1)

$\Delta'=(m+1)^2+3>0$ với mọi m, suy ra PT (1) luôn có hai nghiệm phân biệt (đpcm).

2) Theo định lí Viète, ta có

$x_1+x_2=-\frac{2}{3}(m+1)$, $x_1x_2=-\frac{1}{3}$, suy ra $m+1=-\frac{3}{2}(x_1+x_2)$ và $-1=3x_1x_2$.

Ta có: $f(x_1)-f(x_2)$

$=(x_1-x_2)\left[x_1^2+x_1x_2+x_2^2+(m+1)(x_1+x_2)-1\right]$

$=(x_1-x_2)\left[x_1^2+x_1x_2+x_2^2-\frac{3}{2}(x_1+x_2)^2+3x_1x_2\right]$

$=\frac{1}{2}(x_1-x_2)(-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2)=-\frac{1}{2}(x_1-x_2)^3.$

Câu 4. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

1) Ta có $\widehat{DBC}=\widehat{DAP}$ (cùng chắn cung CD). Do $KP \,//\, BC$ nên $\widehat{DKP}=\widehat{DBC}=\widehat{DAP}$, suy ra tứ giác $AKPD$ nội tiếp đường tròn.

2) Từ kết quả trên suy ra $\widehat{PKM}=\widehat{DAP}$ (1)

$\widehat{APD}=\widehat{AKD}=90^\circ \Rightarrow \widehat{CPD}=\widehat{CMD}=90^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $CPMD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PMK}=\widehat{DCP}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PMK}+\widehat{PKM}=$ $=\widehat{DCP}+\widehat{DAP}=90^\circ$. Do đó $KP\perp PM$.

3) • Ta có $BK=AK.\cot 60^\circ=\frac{x\sqrt{3}}{3}$.

• Do $\widehat{ADC}=90^\circ$, $\widehat{ACD}=\widehat{ABD}=60^\circ$ nên $CD=\frac{1}{2}AC=R \Rightarrow AD=R\sqrt{3}$

$\Rightarrow DK=\sqrt{AD^2-AK^2}=\sqrt{3R^2-x^2}$.

Vậy $BD=BK+DK=\frac{x\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3R^2-x^2}$.

Câu 5. Điều kiện $x\neq\frac{4}{7}$; $x\neq-\sqrt[3]{2}$.

$$\text{PT}\Leftrightarrow\frac{x^3-56x}{4-7x}-5+1-\frac{21x+22}{x^3+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-21x-20)\left(\frac{1}{4-7x}+\frac{1}{x^3+2}\right)=0.$$

Từ đó ta tìm được tập nghiệm của PT là:

$$S=\{1;5;-4;-1;2;-3\}.$$

VÒNG 2

Câu 1. Đặt $m=\frac{x}{a}, n=\frac{y}{b}, p=\frac{z}{c}$. Ta có:

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=0\Rightarrow mn+np+pm=0$;

$m+n+p=1\Rightarrow m^2+n^2+p^2=(m+n+p)^2=1$, suy ra đpcm.

Câu 2. ĐK: $1-y^2 \ge 0, 2-z^2 \ge 0, 3-z^2 \ge 0$.

Sử dụng BĐT quen thuộc $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$, ta có:

$$3 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2}$$
$$\le \frac{1}{2}(x^2+1-y^2+y^2+2-z^2+z^2+3-x^2) = 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-y^2} \\ y=\sqrt{2-z^2} \\ z=\sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\sqrt{2} \end{cases}.$$

Đáp số: $(x;y;z) = (1;0;\sqrt{2})$.

Câu 3. Ta có $a_n = 1 + \frac{2^n(1.3.5...(2n-1))}{(n+5)(n+6)...(2n)}$

$$=1+\frac{2^n(2n)!}{[2.4.6...(2n)](n+5)(n+6)...(2n)}$$
$$=1+\frac{(2n)!}{n!(n+5)(n+6)...(2n)}$$
$$=1+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = (n^2+5n+5)^2.$$

Câu 4. Sử dụng BĐT quen thuộc:

$$\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right), \forall x>0, y>0,$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$, ta có

$$\frac{1}{ab+a+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{a+1}\right).$$

Suy ra $\frac{1}{ab+a+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$ (1)

Tương tự, $\frac{1}{bc+b+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)$ (2)

$\frac{1}{ca+c+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$ (3)

Cộng theo từng vế (1), (2), (3) ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 5. *(Bạn đọc tự vẽ hình)* Do $NB \parallel AD, BM \parallel DP, MN \parallel PA$ nên $\Delta NBM \backsim \Delta ADP$.

Suy ra $\frac{BN}{BO} = \frac{BN}{\sqrt{2}BM} = \frac{DA}{\sqrt{2}DP} = \frac{DO}{DP}$.

Kết hợp với $\widehat{NBO} = \widehat{PDO} = 45°$, suy ra $\Delta BNO \backsim \Delta DOP$. Suy ra:

$$\widehat{NOP} = 180° - \widehat{NOB} - \widehat{POD}$$
$$=180° - \widehat{NOB} - \widehat{ONB} = \widehat{NBO} = 45°.$$

2) Vì $\Delta BNO \backsim \Delta DOP$ và $BO = DO$ nên $\frac{ON}{OP} = \frac{BO}{DP} = \frac{DO}{DP}$. Mặt khác $\widehat{NOP} = \widehat{NBO} = 45°$, suy ra $\Delta ONP \backsim \Delta DOP \backsim \Delta BNO$.

Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔONP, chú ý rằng $\Delta ONP \backsim \Delta BNO$ ta có

$$\widehat{QON} = \frac{180° - \widehat{OQN}}{2} = 90° - \widehat{OPN}$$
$$= \widehat{COB} - \widehat{BON} = \widehat{CON}.$$

Do đó tia OQ trùng với tia ON.

Vậy Q thuộc OC.

3) Gọi E, F thứ tự là giao điểm của BD với MN, PA. Chú ý rằng $\Delta NBM \backsim \Delta ADP$; BD là đường chéo của hình vuông $ABCD$, ta có

$$\frac{EM}{EN} = \frac{S_{BEM}}{S_{BEN}} = \frac{BM}{BN} = \frac{DP}{DA} = \frac{S_{DFP}}{S_{DFA}} = \frac{FP}{FA}.$$

Kết hợp với $MN \parallel AP$, theo bổ đề hình thang, suy ra BD, AN, PM đồng quy.

Câu 6. Với A là một tập hợp con của tập hợp $\{1; 2; ...; 2014\}$ thoả mãn yêu cầu bài toán, gọi a là phần tử nhỏ nhất của A. Xét $b \in A, b \ne a$

$\Rightarrow b > a$ và $\frac{a^2}{b-a} \in A \Rightarrow \frac{a^2}{b-a} \ge a \Rightarrow b \le 2a$ (1)

Gọi c, d là hai phần tử lớn nhất trong A, $c < d$, từ (1) ta có $d \le 2a \Rightarrow d \le 2c$ (2)

Theo giả thiết, $\frac{c^2}{d-c} \in A$. Mặt khác, do (2) nên $\frac{c^2}{d-c} \ge \frac{c^2}{2c-c} = c$, suy ra $\frac{c^2}{d-c} \in \{c; d\}$.

• *TH1:* $\frac{c^2}{d-c} = d$, ta có $\left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right) - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, không tồn tại do $c; d \in \mathbb{Z}$.

• *TH2:* $\frac{c^2}{d-c} = c$, ta có $c^2 = dc - c^2 \Rightarrow d = 2c$.

Mà $d \le 2a \le 2c$, suy ra $c = a$, $d = 2a$, do đó $A = \{a; 2a\}$, với $a = 1, 2, ..., 1007$.

Các tập hợp trên đều thoả mãn yêu cầu bài toán. Vậy có tất cả 1007 tập hợp thoả mãn.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội) ***giới thiệu.***

IMO 2014
Cape Town - South Africa

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ (IMO) LẦN THỨ 55, NĂM 2014

NGUYỄN KHẮC MINH
(*Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT*)

I. ĐÔI NÉT TỔNG QUAN

IMO lần thứ 55 năm 2014 (IMO 2014) được tổ chức từ ngày 3/7 đến ngày 13/7/2014, tại Đại học Cape Town, thành phố Cape Town, Cộng hòa Nam Phi. Dự thi IMO 2014 có 560 HS, trong đó có 56 HS nữ, thuộc 101 quốc gia và vùng lãnh thổ trên toàn thế giới. Đoàn Việt Nam gồm 6 HS: *Vương Nguyễn Thuỳ Dương* (nữ, lớp 12, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng), *Nguyễn Thế Hoàn* (lớp 11, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), *Phạm Tuấn Huy* (lớp 12, PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh), *Hồ Quốc Đăng Hưng* (lớp 12, PTNK, TP. Hồ Chí Minh), *Trần Hồng Quân* (lớp 12, THPT chuyên Thái Bình, tỉnh Thái Bình) và *Nguyễn Huy Tùng* (lớp 12, THPT chuyên Trần Phú, TP. Hải Phòng). Đoàn do *TS. Lê Bá Khánh Trình*, giảng viên khoa Toán-Tin, trường ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, làm Trưởng đoàn và *PGS. TS. Lê Anh Vinh*, giảng viên trường ĐH Giáo dục, ĐHQG Hà Nội, làm Phó Trưởng đoàn; người viết bài này tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên A (Quan sát viên đi cùng Trưởng đoàn). Tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên còn có: bà *Lê Thị Kim Nhung*, Chánh văn phòng Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD; thầy *Nguyễn Hải Đăng*, GV trường THPT chuyên Thái Bình, tỉnh Thái Bình; thầy *Nguyễn Đình Minh*, GV trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; thầy *Phạm Văn Quốc*, GV trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; thầy *Đoàn Thái Sơn*, GV trường THPT chuyên Trần Phú, TP. Hải Phòng và thầy *Nguyễn Trọng Tuấn*, GV trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

Đại học Cape Town được chính thức thành lập năm 1918; tiền thân của trường là trường Trung học Nam Phi dành cho học sinh nam, được thành lập vào năm 1829. Trong khuôn viên Nhà trường, đôi nét cổ kính phản ánh một thời gian khó của châu Phi thuở xa xưa vẫn còn đọng lại cho tới những ngày hôm nay. Các phòng ở trong khu Ký túc xá của trường rất chật hẹp, tuềnh toàng và không được lắp đặt bất cứ thiết bị chống nóng hay chống lạnh nào. Tại Nam Phi, tháng 7 là mùa đông. Để giúp những người tham dự IMO 2014 chống lạnh ban đêm, Ban tổ chức phát cho mỗi người một chăn bông, xin thêm (nếu cần) không có. Vì thế, có những đoàn đã phải ra cửa hàng mua lò sưởi điện để chống lạnh về đêm. Đoàn ta, rất may, không một ai bị cảm lạnh, không một HS nào phàn nàn cái lạnh Cape Town làm giảm sút hiệu quả làm bài thi.

Sau hai ngày thi, tất cả HS và quan sát viên B, C (quan sát viên đi cùng Phó Trưởng đoàn và HS) được Ban tổ chức bố trí cho đi tham quan ngọn Hải đăng Cape Point và Mũi Hảo Vọng (the Cape of Good Hope) - nơi tiếp giáp giữa Ấn Độ Dương và Đại Tây Dương.

Tại IMO năm nay, Ngài *Geof Smith* (người Anh) đã được bầu làm Chủ tịch Hội đồng Tư vấn các kỳ IMO (IMOAB) thay Ngài *Nazar Agakhanov* (người Nga) đã hết nhiệm kỳ.

II. ĐỀ THI

Đề thi của IMO 2014 được xây dựng theo nguyên tắc và phương thức như tại IMO 2013. Cụ thể, từ các bài toán thuộc danh sách các bài toán được đề xuất sử dụng làm bài toán thi (do Ban tổ chức IMO xây dựng trên cơ sở các bài toán đề xuất của các nước tham dự IMO và được gọi tắt bằng tiếng Anh là *Short List*), Hội đồng các Trưởng đoàn tiến hành bầu chọn cho mỗi phân môn Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học 1 bài dễ và 1 bài trung bình; từ đó, xây dựng các tổ hợp 4 bài toán đảm bảo mỗi phân môn có 1 bài và trong 4 bài toán đó phải có 2 bài ở mức độ dễ, 2 bài ở mức độ trung bình, rồi biểu quyết chọn một tổ hợp trong số đó; tiếp theo, căn cứ 4 bài toán đã được chọn, đề xuất và biểu quyết chọn ra một cặp bài khó cho đề thi. Theo sự sắp xếp phân môn trong *Short List* và kết quả bình chọn của Hội đồng các Trưởng đoàn, trong 6 bài toán của Đề thi, bài 1 là bài dễ thuộc phân môn Đại số, bài 2 là bài trung bình thuộc phân môn Tổ hợp, bài 4 là bài dễ thuộc phân môn Hình học và bài 5 là bài trung bình thuộc phân môn Số học. Dưới đây là phương án tiếng Việt của Đề thi IMO 2014.

NGÀY THI THỨ NHẤT, 8/7/2014

Bài 1. Cho $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ là dãy vô hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số nguyên $n \geq 1$ sao cho $a_n < \dfrac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$.

Bài 2. Cho số nguyên $n \geq 2$. Cho bảng ô vuông $n \times n$ gồm n^2 ô vuông đơn vị. Một cách sắp xếp của n quân xe trong bảng đó được gọi là *bình yên* nếu mỗi hàng và mỗi cột chứa đúng một quân xe. Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho với mỗi cách sắp xếp bình yên của n quân xe đều tồn tại một hình vuông $k \times k$ mà mỗi ô vuông đơn vị trong số k^2 ô vuông đơn vị của nó đều không chứa quân xe.

Bài 3. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{ABC}=\widehat{CDA}=90^\circ$. Điểm H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BD. Các điểm S và T tương ứng nằm trên các cạnh AB và AD sao cho H nằm trong tam giác SCT và $\widehat{CHS}-\widehat{CSB}=90^\circ$, $\widehat{THC}-\widehat{DTC}=90^\circ$.

Chứng minh rằng đường thẳng BD tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác TSH.

NGÀY THI THỨ HAI, 9/7/2014

Bài 4. Các điểm P và Q được lấy trên cạnh BC của tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{PAB}=\widehat{BCA}$ và $\widehat{CAQ}=\widehat{ABC}$. Các điểm M và N được lấy trên các đường thẳng AP và AQ, tương ứng, sao cho P là trung điểm của AM và Q là trung điểm của AN. Chứng minh rằng giao điểm của các đường thẳng BM và CN nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 5. Với mỗi số nguyên dương n, Ngân hàng Cape Town đều phát hành các đồng xu có mệnh giá $\frac{1}{n}$. Cho một bộ sưu tập gồm hữu hạn các đồng xu như vậy (các đồng xu không nhất thiết có mệnh giá khác nhau) mà tổng mệnh giá của chúng không vượt quá $99+\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng có thể phân chia bộ sưu tập đó thành không quá 100 nhóm sao cho tổng mệnh giá của tất cả các đồng xu trong mỗi nhóm không vượt quá 1.

Bài 6. Một tập hợp các đường thẳng trên mặt phẳng được coi là *ở thế tổng quát* nếu không có hai đường thẳng nào thuộc tập hợp đó song song và không có ba đường thẳng nào thuộc tập hợp đó đồng quy. Một tập hợp các đường thẳng ở thế tổng quát phân chia mặt phẳng thành các miền, trong đó có một số miền có diện tích hữu hạn; ta gọi những miền như vậy là *các miền hữu hạn*. Chứng minh rằng với mọi số n đủ lớn, trong mỗi tập hợp gồm n đường thẳng ở thế tổng quát, ta đều có thể tô không ít hơn $\sqrt{n}$ đường thẳng bởi màu xanh sao cho không có miền nào trong số các miền hữu hạn có toàn bộ đường biên có màu xanh.

Lưu ý: Lời giải cho bài toán nhận được từ bài đã ra bằng cách thay thế $\sqrt{n}$ bởi $c\sqrt{n}$ sẽ được cho điểm; điểm số được cho phụ thuộc vào giá trị của hằng số c.

III. KẾT QUẢ

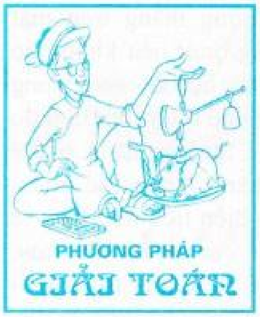
Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế IMO 2014, Hội đồng Quốc tế đã biểu quyết thông qua ngưỡng điểm cho các loại Huy chương như sau:

- Huy chương Vàng (HCV): Từ 29 đến 42 điểm;
- Huy chương Bạc (HCB): Từ 22 đến 28 điểm;
- Huy chương Đồng (HCĐ): Từ 16 đến 21 điểm.

Theo đó, tại IMO 2014 có 295 HS được trao Huy chương; gồm: 49 HS được trao HCV, trong đó có 3 HS đạt điểm tuyệt đối 42/42 (1 HS của Đoàn Ôxtralia, 1 HS của Đoàn Đài Loan và 1 HS của Đoàn Trung Quốc); 113 HS được trao HCB và 133 HS được trao HCĐ. Cả 6 thí sinh của Đoàn Việt Nam đều được trao Huy chương, gồm 3 em được trao HCV, 2 em được trao HCB và 1 em được trao HCĐ. Kết quả chi tiết của các HS Đoàn Việt Nam như sau:

TT	Họ và Tên	Điểm thi							Huy chương
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	Tổng	
1	Vương Nguyễn Thuỳ Dương	7	7	1	7	0	0	22	Bạc
2	Nguyễn Thế Hoàn	7	6	7	7	2	0	29	Vàng
3	Phạm Tuấn Huy	7	7	1	7	7	3	32	Vàng
4	Hồ Quốc Đăng Hưng	7	0	7	7	1	0	22	Bạc
5	Trần Hồng Quân	7	6	7	7	7	0	34	Vàng
6	Nguyễn Huy Tùng	3	6	0	7	2	0	18	Đồng

Với tổng điểm 157, Đoàn Việt Nam đứng thứ 10 trong Bảng tổng sắp không chính thức của IMO 2014, sau các Đoàn: Trung Quốc (201 điểm), Mỹ (193 điểm), Đài Loan (192 điểm), CHLB Nga (191 điểm), Nhật Bản (177 điểm), Ucraina (175 điểm), Hàn Quốc (172 điểm), Singapore (161 điểm) và Canada (159 điểm).



Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp đánh giá đại diện

NGUYỄN VIỆT HÙNG – ĐÀO THỊ AN
(Yên Việt, Đông Cứu, Gia Bình, Bắc Ninh)

I. KIẾN THỨC CƠ SỞ

Số α gọi là nghiệm bội k ($k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$) của đa thức $f(x)$ nếu:

(i) $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^k$,

(ii) $f(x)$ không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$.

Nói cách khác là $f(x)$ có thể viết dưới dạng $f(x) = (x-\alpha)^k.g(x)$, trong đó $g(x)$ là đa thức không chia hết cho $x - \alpha$.

Trường hợp α là nghiệm bội 2 của $f(x)$ thì ta nói rằng $f(x)$ có nghiệm kép $x = \alpha$.

Chúng ta có một kết quả đáng chú ý:

Định lí. *Điều kiện cần và đủ để số α là nghiệm bội k ($k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$) của đa thức $f(x)$ là*

$$\begin{cases} f^{(i)}(\alpha)=0 \text{ với } i=\overline{0,\ k-1} \\ f^{(k)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

trong đó $f^{(i)}(x)$ là đạo hàm cấp i của $f(x)$ với quy ước $f^{(0)}(x) = f(x)$.

II. CÁC THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có:*
$$\frac{a^3}{a^2+ab+2b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+2c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+2a^2}\geq\frac{a+b+c}{4}.$$

Phân tích

Đầu tiên, ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Tiếp theo, ta sẽ tìm một đánh giá đại diện dạng $\frac{a^3}{a^2+ab+2b^2}\geq ma+nb$

$\Leftrightarrow a^3 \geq (ma+nb)(a^2+ab+2b^2)$ hay

$(1-m)a^3-(m+n)a^2b-(2m+n)ab^2-2nb^3\geq 0.$

Xét đa thức $f(a) = (1-m)a^3-(m+n)a^2b-(2m+n)ab^2-2nb^3$ ($a > 0$, $b > 0$). Ta sẽ tìm hai số m, n sao cho $f(a)$ nhận $a = b$ làm nghiệm kép. Muốn vậy thì $\begin{cases} f(b)=0 \\ f'(b)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)b^3-(m+n)b^3-(2m+n)b^3-2nb^3=0 \\ 3(1-m)b^2-2(m+n)b^2-(2m+n)b^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m+4n=1 \\ 7m+3n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{9}{16} \\ n=\dfrac{-5}{16} \end{cases}.$$

Lời giải

Ta chứng minh $\frac{a^3}{a^2+ab+2b^2}\geq\frac{9a-5b}{16}.$

Thật vậy, BĐT này tương đương với $\frac{(a-b)^2(7a+10b)}{16(a^2+ab+2b^2)}\geq 0$ (luôn đúng).

Tương tự, ta có $\frac{b^3}{b^2+bc+2c^2}\geq\frac{9b-5c}{16}$;

$$\frac{c^3}{c^2+ca+2a^2}\geq\frac{9c-5a}{16}.$$

Từ đó ta suy ra đpcm. ❑

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có:*
$$\frac{5a^3-ab^2}{a+b}+\frac{5b^3-bc^2}{b+c}+\frac{5c^3-ca^2}{c+a}\geq 2(a^2+b^2+c^2).$$

Phân tích

Đầu tiên, ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Tiếp theo, ta sẽ tìm một đánh giá đại diện dạng $\frac{5a^3-ab^2}{a+b}\geq ma^2+nb^2$

$\Leftrightarrow (5-m)a^3-ma^2b-(1+n)ab^2-nb^3\geq 0.$

Xét đa thức $f(a)=(5-m)a^3-ma^2b-(1+n)ab^2-nb^3$ $(a>0,\ b>0)$. Ta sẽ tìm hai số m, n sao cho $f(a)$ nhận $a=b$ làm nghiệm kép. Muốn vậy thì điều kiện là $f(b)=f'(b)=0$, hay m, n là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(5-m)-m-(1+n)-n=0\\3(5-m)-2m-(1+n)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=3\\n=-1\end{cases}.$$

Lời giải

Ta chứng minh $\dfrac{5a^3-ab^2}{a+b}\ge 3a^2-b^2$.

Thật vậy, BĐT này tương đương với $\dfrac{(a-b)^2(2a+b)}{a+b}\ge 0$ (luôn đúng).

Tương tự, ta có $\dfrac{5b^3-bc^2}{b+c}\ge 3b^2-c^2$;

$$\dfrac{5c^3-ca^2}{c+a}\ge 3c^2-a^2.$$

Từ đó ta suy ra đpcm. ❑

Thí dụ 3. *Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 9. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9}+\frac{b^3+c^3}{bc+9}+\frac{c^3+a^3}{ca+9}\ge 9.$$

Phân tích

Khi $a=b=c=3$ thì đẳng thức xảy ra.

Ta sẽ tìm một đánh giá đại diện dạng

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9}\ge m(a+b)+n$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3-(ab+9)[m(a+b)+n]\ge 0.$$

Xét đa thức $f(a)=a^3+b^3-(ab+9)[m(a+b)+n]$. Ta sẽ tìm hai số m, n sao cho $f(a)$ nhận $a=b=3$ làm nghiệm kép. Điều này xảy ra khi $f(b)=f'(b)=0$, trong đó

$$f'(a)=3a^2-b[m(a+b)+n]-m(ab+9).$$

Nghĩa là $\begin{cases}2b^3-(b^2+9)(2mb+n)=0\\3b^2-b(2mb+n)-m(b^2+9)=0\end{cases}$.

Trong hệ này, cho $b=3$ ta được

$$\begin{cases}54-18(6m+n)=0\\27-3(6m+n)-18m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=-3\end{cases}.$$

Lời giải

Ta chứng minh $\dfrac{a^3+b^3}{ab+9}\ge a+b-3$ (1)

Thật vậy, $\dfrac{a^3+b^3}{ab+9}\ge\dfrac{4(a^3+b^3)}{(a+b)^2+36}\ge\dfrac{(a+b)^3}{(a+b)^2+36}$.

Xét BĐT $\dfrac{(a+b)^3}{(a+b)^2+36}\ge a+b-3$

$\Leftrightarrow (a+b)^3\ge(a+b-3)((a+b)^2+36)$

$\Leftrightarrow (a+b-6)^2\ge 0$, luôn đúng.

Như vậy BĐT (1) được chứng minh. Tương tự:

$\dfrac{b^3+c^3}{bc+9}\ge b+c-3$ (2) $\quad\dfrac{c^3+a^3}{ca+9}\ge c+a-3$ (3)

Cộng theo từng vế (1), (2), (3) ta có đpcm. ❑

Thí dụ 4 (*Moldova 2005*). *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh rằng:* $\dfrac{1}{4-ab}+\dfrac{1}{4-bc}+\dfrac{1}{4-ca}\le 1.$

Phân tích

Ta tìm một đánh giá đại diện dạng

$$\frac{1}{4-ab}\le m(ab)^2+n$$

hay $m(ab)^3-4m(ab)^2+n(ab)-4n+1\le 0$.

Xét đa thức $f(t)=mt^3-4mt^2+nt-4n+1$ (với $t=ab$). Ta cần tìm hai số m, n sao cho $f(t)$ nhận $t=1$ làm nghiệm kép. Điều này xảy ra khi $f(1)=f'(1)=0$, tức là

$$\begin{cases}m-4m+n-4n+1=0\\3m-8m+n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{18}\\n=\dfrac{5}{18}\end{cases}.$$

Lời giải

Ta chứng minh $\dfrac{1}{4-ab}\le\dfrac{(ab)^2+5}{18}$ (4)

Thật vậy, (4) $\Leftrightarrow (ab)^3-4(ab)^2+5ab-2\le 0$

$\Leftrightarrow (ab-1)^2(ab-2)\le 0.$

BĐT này đúng do

$3=a^4+b^4+c^4>a^4+b^4\ge 2(ab)^2$.

Suy ra $ab<\sqrt{\dfrac{3}{2}}<2$. BĐT (4) được chứng minh.

Tương tự:

$\dfrac{1}{4-bc}\le\dfrac{(bc)^2+5}{18}$ (5); $\quad\dfrac{1}{4-ca}\le\dfrac{(ca)^2+5}{18}$ (6)

Cộng theo từng vế (4), (5), (6) ta có đpcm. ❑

Thí dụ 5. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn* $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca} \geq 15(a^3+b^3+c^3-2).$$

Phân tích

Dựa vào giả thiết, ta dự đoán BĐT đại diện có dạng $\frac{2a^5+3b^5}{ab} \geq ma^3+nab^2+pb^3$

$\Leftrightarrow 2a^5+3b^5-ab(ma^3+nab^2+pb^3) \geq 0.$

Xét đa thức bậc 5:

$f(a)=2a^5+3b^5-ab(ma^3+nab^2+pb^3)$, ta có

$f'(a)=10a^4-4ma^3b-2nab^3-pb^4$,

$f''(a)=40a^3-12ma^2b-2nb^3$,

$f'''(a)=120a^2-24mab.$

Chúng ta cần tìm các số m, n, p để $f(a)$ nhận $a = b$ làm nghiệm bội 4. Điều này xảy ra khi $f(b)=f'(b)=f''(b)=f'''(b)=0$, tức là

$$\begin{cases} 5b^5-b^2(mb^3+nb^3+pb^3)=0 \\ 10b^4-4mb^4-2nb^4-pb^4=0 \\ 40b^3-12mb^3-2nb^3=0 \\ 120b^2-24mb^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n+p=5 \\ 4m+2n+p=10 \\ 12m+n=40 \\ m=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ n=-10. \\ p=10 \end{cases}$$

Lời giải

Ta chứng minh

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab} \geq 5a^3-10ab^2+10b^3 \qquad (7)$$

Thật vậy, $(7) \Leftrightarrow (a-b)^4(2a+3b) \geq 0$ (hiển nhiên).

Tương tự:

$$\frac{2b^5+3c^5}{bc} \geq 5b^3-10bc^2+10c^3 \qquad (8)$$

$$\frac{2c^5+3a^5}{ca} \geq 5c^3-10ca^2+10a^3 \qquad (9)$$

Cộng theo từng vế (7), (8), (9) ta có đpcm. ❑

Thí dụ 6. *Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a, b, c:*

$$\frac{4a^3+5b^3-3a^2b+10ab^2}{3a+b}+\frac{4b^3+5c^3-3b^2c+10bc^2}{3b+c}+\frac{4c^3+5a^3-3c^2a+10ca^2}{3c+a} \geq 5(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca).$$

Phân tích

Ta dự đoán BĐT đại diện có dạng

$$\frac{4a^3+5b^3-3a^2b+10ab^2}{3a+b} \geq ma^2+nb^2-ab$$

$$\Leftrightarrow f(a)=(4-3m)a^3-ma^2b+(11-3n)ab^2+(5-n)b^3 \geq 0.$$

Ta cần chọn m, n sao cho $f(a)$ nhận $a = b$ làm nghiệm kép. Nghĩa là $f(b)=f'(b)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n=5 \\ 11m+3n=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=4 \end{cases}.$$

Lời giải

Ta chứng minh

$$\frac{4a^3+5b^3-3a^2b+10ab^2}{3a+b} \geq a^2+4b^2-ab \quad (10)$$

Thật vậy, BĐT này tương đương với

$a^3-a^2b-ab^2+b^3 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$

(luôn đúng). Tương tự, ta có:

$$\frac{4b^3+5c^3-3b^2c+10bc^2}{3b+c} \geq b^2+4c^2-bc \quad (11)$$

$$\frac{4c^3+5a^3-3c^2a+10ca^2}{3c+a} \geq c^2+4a^2-ca \quad (12)$$

Cộng theo từng vế (10), (11), (12) ta có đpcm. ❑

Thí dụ 7. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $E=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}$.

Phân tích

Ta dự đoán E đạt giá trị nhỏ nhất tại $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và BĐT đại diện có dạng

$$\frac{a}{b^2+c^2} \geq ma^2+n \Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2} \geq ma^2+n$$

$$\Leftrightarrow a \geq (1-a^2)(ma^2+n)$$

$\Leftrightarrow f(a) = ma^4 - (m-n)a^2 + a - n \ge 0.$

Ta cần tìm m, n sao cho $f(a)$ nhận $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ làm nghiệm kép. Tức là $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+6n = 3\sqrt{3} \\ 2m-6n = 3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ n = 0 \end{cases}.$$

Lời giải

Ta chứng minh $\frac{a}{1-a^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.

Thật vậy, BĐT trên tương đương với

$$3\sqrt{3}a^3 - 3\sqrt{3}a + 2 \ge 0$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}a-1)^2(\sqrt{3}a+2) \ge 0$ (luôn đúng).

Tương tự: $\frac{b}{1-b^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$; $\frac{c}{1-c^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$.

Do đó $E \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\min E = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ khi $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$. □

Thí dụ 8 (Crux). *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{4a+1} + \frac{1}{4b+1} + \frac{1}{4c+1} \ge 1$.

Phân tích

Ta cần tìm hai số m, n để có đánh giá

$$\frac{1}{4a+1} \ge \frac{m}{a+1} + n$$

hay $4na^2 + (4m+5n-1)a + m + n - 1 \le 0$.

Đặt $f(a) = 4na^2 + (4m+5n-1)a + m + n - 1$.

Ta nhận thấy đẳng thức xảy ra ở BĐT cần chứng minh khi $a = b = c = \frac{1}{2}$ nên ta phải chọn m, n sao cho $f(a)$ nhận $a = \frac{1}{2}$ làm nghiệm kép. Điều này có được khi $f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, tức là

$$\begin{cases} n + \frac{4m+5n-1}{2} + m + n - 1 = 0 \\ 4n + 4m + 5n - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Lời giải

Ta chứng minh $\frac{1}{4a+1} \ge \frac{1}{a+1} - \frac{1}{3}$.

Thật vậy, BĐT tương đương với $(2a-1)^2 \ge 0$ (hiển nhiên). Tương tự:

$$\frac{1}{4b+1} \ge \frac{1}{b+1} - \frac{1}{3};\ \frac{1}{4c+1} \ge \frac{1}{c+1} - \frac{1}{3}.$$

Do đó $\frac{1}{4a+1} + \frac{1}{4b+1} + \frac{1}{4c+1}$

$$\ge \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} - 1 = 1. \ \square$$

Nhận xét

Chúng ta có kết quả tổng quát:

Nếu $a_i > 0$ $(i = \overline{1,n})$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i+1} = n-1$ thì $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4a_i+1} \ge \frac{2n-3}{3}$.

Thí dụ 9 (Japan 1997). *Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c bất đẳng thức sau luôn đúng:*

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \ge \frac{3}{5}.$$

Lời giải

Vì BĐT cần chứng minh là thuần nhất nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử (chuẩn hóa) $a + b + c = 3$. Khi đó phải chứng minh

$$\frac{(3-2a)^2}{2a^2-6a+9} + \frac{(3-2b)^2}{2b^2-6b+9} + \frac{(3-2c)^2}{2c^2-6c+9} \ge \frac{3}{5}.$$

Ta sẽ tìm một đánh giá có dạng

$$\frac{(3-2a)^2}{2a^2-6a+9} \ge ma + n$$

hay $f(a) = (3-2a)^2 - (ma+n)(2a^2-6a+9) \ge 0$.

Để đa thức bậc ba $f(a)$ nhận $a = 1$ làm nghiệm kép thì điều kiện là $f(1) = f'(1) = 0$. Tức là

$$\begin{cases} 1 - 5(m+n) = 0 \\ 3m - 2n + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{18}{25} \\ n = \frac{23}{25} \end{cases}.$$

Ta chứng minh $\frac{(3-2a)^2}{2a^2-6a+9} \ge \frac{-18a+23}{25}$.

Thật vậy, BĐT tương đương với $(a-1)^2(2a+1) \ge 0$ (luôn đúng). Tương tự:

$$\frac{(3-2b)^2}{2b^2-6b+9} \geq \frac{-18b+23}{25};$$

$$\frac{(3-2c)^2}{2c^2-6c+9} \geq \frac{-18c+23}{25}.$$

Từ đó $\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}$

$$\geq \frac{-18(a+b+c)+69}{25}=\frac{3}{5}. \ \square$$

Thí dụ 10. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} \geq 3.$$

Lời giải

Phân tích tương tự các bài toán trên, chúng ta đi đến việc chứng minh BĐT $\frac{1}{2-a} \geq \frac{a^2+1}{2}$.

Thật vậy, BĐT này tương đương với $a(a-1)^2 \geq 0$, là BĐT đúng với mọi a dương.

Tương tự: $\frac{1}{2-b} \geq \frac{b^2+1}{2}$; $\frac{1}{2-c} \geq \frac{c^2+1}{2}$.

Do đó $\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}$

$$\geq \frac{a^2+b^2+c^2+3}{2}=3. \ \square$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x, y, z \leq 1$ và $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}.$$

2. (*Poland 1996*) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

3. (*USA 2003*) Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có: $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}$

$$+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

4. (*China 2006*) Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2} \leq 5.$$

5. (*France 2007*) Cho các số thực dương a, b, c, d có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}.$$

6. Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b} \leq 1.$$

7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$E=3(a+b+c)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

8. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a, b, c:

$$\frac{3a^3+7b^3}{2a+3b}+\frac{3b^3+7c^3}{2b+3c}+\frac{3c^3+7a^3}{2c+3a} \geq 3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca).$$

9. (*Crux*) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng:

$$a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 4\sqrt{3}.$$

10. (*Toán học và Tuổi trẻ*) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+2y+3z=\frac{1}{4}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$F=\frac{232y^3-x^3}{2xy+24y^2}+\frac{783z^3-8y^3}{6yz+54z^2}+\frac{29x^3-27z^3}{3zx+6x^2}.$$

BẠN CÓ BIẾT?

Giả thuyết Erdös và Szekeres

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV ĐHSP Hà Nội)

Vấn đề của *Erdös* bắt đầu từ một bài toán nhỏ trong hình học tổ hợp. Năm 1932, *E. Klein* đã chứng minh được một kết quả sau, sau này là một bài toán khá quen thuộc đối với học sinh giỏi.

Định lí 1. (*E. Klein*, 1932) *Từ năm điểm bất kì trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, luôn tồn tại bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.*

Từ bài toán này, *Erdös* và *Szekeres* độc lập với nhau đã chứng minh được kết quả mạnh hơn, tổng quát cho mọi số k.

Định lí 2. (*Erdös và Szekeres*, 1935) *Với mỗi số tự nhiên k ($k \geq 4$), luôn tồn tại một số nguyên dương $n(k)$ sao cho từ $n(k)$ điểm tùy ý trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, luôn tồn tại k điểm là đỉnh của một k giác lồi.*

Kết quả của *Erdös* và *Szekeres* không chỉ rõ được số $n(k)$ là số nào. Hai ông đưa ra một đánh giá là $n(k) \leq 2^{k-2} + 1$, được phát biểu cụ thể như sau:

Giả thuyết 1. (*Erdös và Szekeres*, 1935) *Từ $2^{k-2} + 1$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$) điểm tùy ý trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, luôn tồn tại k điểm là đỉnh của một k giác lồi.*

Trường hợp $k = 4$ được chứng minh trong *Định lí 1* bởi *E. Klein*. Trường hợp $k = 5$, theo *Erdös* và *Szekeres*, được chứng minh bởi *Endre Makai*.

Định lí 3. (*Endre Makai*) *Từ chín điểm bất kì trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, luôn tồn tại năm điểm là đỉnh của một ngũ giác lồi.*

Endre Makai cũng chỉ ra là $n(5) = 9$ bằng cách xây dựng một phản ví dụ tám điểm trên mặt phẳng sao cho không có năm điểm nào trong chúng là đỉnh của một ngũ giác lồi.

(Ví dụ của Makai)

Đoàn Hữu Dũng, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 33, tháng 6 năm 1967, trang 14-16, đã có một chứng minh cho trường hợp $n = 5$. Tuy nhiên, các bạn có thể tìm một cách chứng minh thứ hai ngắn gọn hơn nhiều so với chứng minh của anh *Đoàn Hữu Dũng*.

Giả thuyết *Erdös* và *Szekeres* là một bài toán rất khó. Ngay cả với các giá trị nhỏ của n cũng không dễ chứng minh. Trường hợp $n = 6$ được *G. Szekeres* và *L. Peters* giải năm 2006 bằng cách sử dụng máy tính với 300 giờ chạy máy.

Định lí 4. (*G. Szekeres và L. Peters*, 2006) *Từ 17 điểm bất kì trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, luôn tồn tại sáu điểm là đỉnh của một lục giác lồi.*

Hiện nay, người ta mở rộng bài toán của *Erdös* và *Szekeres*, chẳng hạn:

Bài toán. *Với mỗi bộ số tự nhiên k, t ($k \geq 4$) hãy xác định số $n(k, t)$ nhỏ nhất sao cho từ $n(k, t)$ điểm tùy ý trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, luôn tồn tại k điểm lập thành một k giác lồi chứa không quá t điểm đã cho bên trong nó.*

Dễ dàng kiểm tra rằng $n(4, 0) = 5$. Năm 1978, nhà toán học người Đức tên là *Harborth* đã chứng minh được rằng $n(5, 0) = 10$. Năm 1983, *Horton* đã chứng tỏ rằng $n(k, 0)$ không tồn tại cho mọi $k \geq 7$. *Nicolas* (2007) đã chứng minh $n(6, 0) \leq n(25)$ và *Gerken* (2008) đã chỉ ra $n(6, 0) \leq n(9)$, là đánh giá tốt nhất hiện nay cho giá trị $n(6, 0)$. Giá trị chính xác của $n(6, 0)$ chưa được xác định. Rất có thể $n(6, 0) = 30$ như được phát biểu trong giả thuyết sau:

Giả thuyết 2. $n(6, 0) = 30$.

Giả thuyết 1 chắc còn phải lâu mới giải quyết được. *Giả thuyết 2* trông có vẻ đơn giản, nhưng chắc cũng cần nhiều công sức để tìm ra lời giải. Để thử sức, các bạn trẻ có thể tìm một lời giải đơn giản cho *Giả thuyết 1* trong trường hợp $k = 5$. Chúc các bạn thành công!

CÁC LỚP THCS

Bài T1/446 (Lớp 6). Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn phương trình:

$$(p+1)(q+2)(r+3)=4pqr.$$

PHẠM THANH HÙNG
(CH Toán K19, ĐH Cần Thơ)

Bài T2/446 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=75^\circ$, $\widehat{B}=45^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $\widehat{ACD}=45^\circ$. Chứng minh rằng $DA=2DB$.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/446. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+y+2}+x+y=2(x^2+y^2)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\end{cases}.$$

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T4/446. Cho tam giác ABC có (I), (J) lần lượt là đường tròn nội tiếp, đường tròn bàng tiếp của góc A. Đường tròn (J) lần lượt tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng JD cắt đường thẳng EF tại N. Đường thẳng qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt đường thẳng AN tại P. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $MN=MP$.

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T5/446. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^3=4y^3+x^2y+y+13.$$

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/446. Cho $f(x)=\dfrac{4^{x+2}}{4^x+2}$. Tính:

$$f(0)+f\left(\frac{1}{2014}\right)+f\left(\frac{2}{2014}\right)+...+f\left(\frac{2013}{2014}\right)+f(1).$$

PHẠM NGỌC BỘI
(GV khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T7/446. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện AB và CD, AC và BD, AD và BC, Chứng minh rằng: $V_{ABCD}\geq\frac{1}{3}d_1d_2d_3$.

ĐẶNG THANH HẢI
(GV khoa Cơ bản, HV PKKQ, Hà Nội)

Bài T8/446. Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thay đổi và thỏa mãn $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}=1$ (n là số nguyên dương không nhỏ hơn 2, cố định cho trước). Chứng minh rằng:

$$a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+...+a_{n-1}^{a_n}+a_n^{a_1}+a_1+a_2+...+a_n>n^3+n.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/446. Giả sử T là tập hợp gồm n phần tử. Xét các tập con khác nhau của T sao cho mỗi tập con này có ba phần tử và không có hai tập con nào rời nhau. Hãy tìm số lớn nhất các tập con khác nhau của T.

MAI TUẤN ANH
(GV THCS Nga Điền, Nga Sơn, Thanh Hóa)

Bài T10/446. Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên dương n, $f(n)$ là ước của p^n-1.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang, Tiền Giang)

Bài T11/446. Kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $[x].[y]=30^4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=[x[x]]+[y[y]]$.

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT, Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T12/446. Cho tam giác ABC. E, F lần lượt thuộc các đoạn CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Trung trực của BC cắt AC tại M; trung trực của EF cắt AB tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM cắt CF tại P khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EFN cắt CF tại Q khác F. Chứng minh rằng trung trực của PQ đi qua trung điểm của MN.

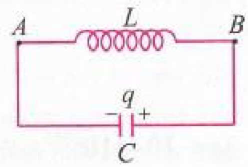
TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/446. Trong một xi lanh cao, cách nhiệt, đặt thẳng đứng, ở dưới pittông có một lượng khí hêli ở nhiệt độ $T_1 = 240K$. Ở trên pittông, người ta đặt một vật nặng có khối lượng bằng một nửa khối lượng pittông. Sau đó người ta đột ngột lấy vật nặng đi và đợi cho hệ trở về trạng thái cân bằng. Xác định nhiệt độ của khí. Biết rằng bên trên pittông không có khí. Bỏ qua mọi ma sát và trao đổi nhiệt.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/446. Mạch dao động gồm tụ điện thuần dung kháng và cuộn cảm thuần điện cảm đang thực hiện dao động điện từ tự do. Tụ điện có điện tích cực đại Q_0 và cường độ dòng điện qua cuộn cảm có giá trị cực đại I_0. Chọn gốc thời gian ($t = 0$) là lúc điện tích tụ điện có độ lớn $|q| = \dfrac{Q_0}{2}$ và có dấu như hình vẽ. Xác định thời điểm dòng điện qua cuộn cảm có chiều từ A đến B và có độ lớn $|i| = \dfrac{I_0}{2}$.



NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/446 (For 6th grade). Find all prime numbers p, q, r satisfying
$$(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr.$$

T2/446 (For 7th grade). Given a triangle ABC with $\widehat{A} = 75^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. On the side AB, choose a point D such that $\widehat{ACD} = 45^\circ$. Prove that $DA = 2DB$.

T3/446. Solve the following system of equations
$$\begin{cases} \sqrt{x+y+2} + x + y = 2(x^2+y^2) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \end{cases}.$$

T4/446. Given a triangle ABC. Let (I) be the inscribed circle and (J) the escribed circle corresponding to the angle A. Suppose that (J) is tangent to the lines BC, CA, and AB at D, E, and F respectively. The line JD meets the line EF at N. The line which contains I and is perpendicular to the line BC intersects the line AN at P. Let M be the midpoint of BC. Prove that $MN = MP$.

T5/446. Find all the integer solutions of the following equation
$$x^3 = 4y^3 + x^2y + y + 13.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/446. Let $f(x) = \dfrac{4^{x+2}}{4^x + 2}$. Find
$$f(0) + f\left(\frac{1}{2014}\right) + f\left(\frac{2}{2014}\right) + \ldots + f\left(\frac{2013}{2014}\right) + f(1).$$

(Xem tiếp trang 27)

Bài T1/442 (Lớp 6). *Tìm hai số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$ và $\overline{ba}$ $(a \neq b)$ thỏa mãn*

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=\frac{\overline{a\underbrace{3...3}_{\substack{2014\\ \text{chữ số 3}}}b}}{\overline{b\underbrace{3...3}_{\substack{2014\\ \text{chữ số 3}}}a}}.$$

Lời giải

Đặt $c = \underbrace{3...3}_{\substack{2014\\ \text{chữ số 3}}}0$. Ta thấy $3c + 10 = 10^{2015}$.

Lúc đó đẳng thức ở đề bài được viết thành:

$$\frac{10a+b}{10b+a}=\frac{a.10^{2015}+c+b}{b.10^{2015}+c+a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10a+b}{10b+a}-1=\frac{a(3c+10)+c+b}{b(3c+10)+c+a}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(a-b)}{10b+a}=\frac{3(a-b)(c+3)}{3bc+10b+c+a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10b+a}=\frac{c+3}{3bc+10b+c+a} \text{ (do } a-b\neq 0).$$

Từ đó ta có:

$9bc + 30b + 3c + 3a = 10bc + 30b + ac + 3a$

$\Leftrightarrow 3c = (a + b)c \Leftrightarrow a + b = 3$ (do $c \neq 0$).

Bài toán có hai nghiệm $\left(\overline{ab}, \overline{ba}\right)$ là (12, 21) và (21, 12). Thử lại đúng. ❐

➢ **Nhận xét**

Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Nguyễn Diệu Linh, Nguyễn Anh Đức, Nguyễn Thùy Dương*, 6A1, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Thái Bá Bảo, Nguyễn Đình Tuấn*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Gia Vy*, 6/4, THCS Phạm Văn Chiêu, Gò Vấp; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành, *Huỳnh Đặng Diệu Huyền, Phạm Thị Vy Vy*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

Bài T2/442 (Lớp 7). *Cho tổng A gồm 2014 số hạng:* $A=\frac{1}{19^1}+\frac{2}{19^2}+\frac{3}{19^3}+...+\frac{n}{19^n}+...+\frac{2014}{19^{2014}}$.

Hãy so sánh A^{2013} và A^{2014}.

Lời giải. Rõ ràng $A > 0$ (*)

và $A^{2014} - A^{2013} = A^{2013}(A - 1)$ (**) nên để so sánh được A^{2013} và A^{2014} ta sẽ so sánh A với 1.

Ta có: $19A=1+\frac{2}{19}+\frac{3}{19^2}+...+\frac{n}{19^{n-1}}+...+\frac{2014}{19^{2013}}$

$$\Rightarrow 18A=19A-A$$

$$=1+\left(\frac{1}{19^1}+\frac{1}{19^2}+...+\frac{1}{19^n}+...+\frac{1}{19^{2013}}\right)-\frac{2014}{19^{2014}}$$

$$<1+\left(\frac{1}{19^1}+\frac{1}{19^2}+...+\frac{1}{19^n}+...+\frac{1}{19^{2013}}\right).$$

Đặt $B=\frac{1}{19^1}+\frac{1}{19^2}+...+\frac{1}{19^n}+...+\frac{1}{19^{2013}}$ suy ra $18A < B + 1$. Ta lại có:

$$19B=1+\frac{1}{19^1}+\frac{1}{19^2}+...+\frac{1}{19^n}+...+\frac{1}{19^{2012}}$$

$$\Rightarrow 18B=19B-B=1-\frac{1}{19^{2013}}<1\Rightarrow B<\frac{1}{18}.$$

Do đó $18A<\frac{1}{18}+1=\frac{19}{18}\Rightarrow A<\frac{19}{18^2}<1.$ (***)

Từ (*), (**), (***) suy ra $A^{2014} - A^{2013} < 0$ hay $A^{2014} < A^{2013}$. ❐

➢ **Nhận xét**

1. Xác định được mấu chốt của bài toán là so sánh A với 1, ta sẽ định hướng được cách giải và lược bớt được nhiều biến đổi, tính toán rườm rà không cần thiết.

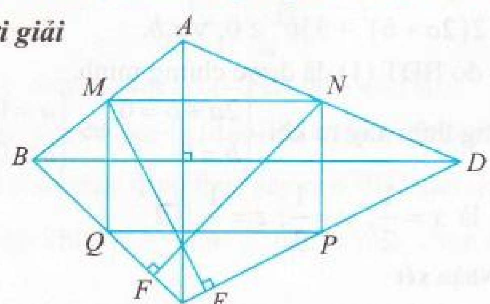
2. Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Đa số các bạn đều giải đúng; một số bạn quên điều kiện $A > 0$; một số bạn đã cố gắng mở rộng, tổng quát bài toán, rút gọn biểu thức bằng cách sử dụng các công thức biến đổi phân số đặc biệt, tổng quát, ... Các bạn có lời giải đơn giản, lập luận chặt chẽ và trình bày ngắn gọn nhất là:

Bình Định: *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Nguyễn Văn Hùng*, *Nguyễn Thị Hoàng Cúc*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TT Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Vĩnh Phúc:** *Bùi Thị Liễu Dương*, *Tạ Thủy Tiên*, 7A5, THCS Yên Lạc; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Phương Duyên*, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang, *Nguyễn Đình Nhật*, 7A, THCS TT Cẩm Xuyên, *Lê Đình Khánh*, *Nguyễn Ngọc Sơn*, *Nguyễn Thị Quỳnh Nga*, 7A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Nghệ An:** *Hồ Nhật Quang*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Bùi Duy Khánh*, *Hồ Mậu Phúc*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Trần Lê Hiệp*, *Nguyễn Thị Như Quỳnh A*, *Nguyễn Văn Mạnh*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Phạm Thị Vy Vy*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T3/442. *Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Kẻ ME vuông góc với CD tại E; NF vuông góc với BC tại F. Chứng minh rằng tứ giác MNEF nội tiếp.*

Lời giải



Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, CB. Dễ thấy $MNPQ$ là hình chữ nhật nên nó nội tiếp đường tròn (O) đường kính MP và NQ. Mặt khác, $\widehat{MEP} = 90^o$ nên E thuộc đường tròn đường kính MP; $\widehat{QFN} = 90^o$ nên F thuộc đường tròn đường kính NQ. Như vậy E và F cùng thuộc đường tròn (O), tức là tứ giác $MNEF$ nội tiếp. ❒

➢ **Nhận xét**

1. Ngoài cách giải trên, đa số các bạn sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác để chỉ ra ME, NF, AC đồng quy rồi đi đến kết luận.

2. Ta có kết quả mở rộng của bài toán:

Với hai điểm M, N theo thứ tự thuộc AB, AD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ thì kết quả vẫn đúng (lấy điểm K trên AC sao cho $\frac{AK}{AC} = \frac{AM}{AB}$).

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Huy*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nam:** *Nhữ Ngọc Ánh*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Hà Nội:** *Lê Phúc Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Khải Hưng*, 8D, *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Phương Duyên*, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vy*, *Phạm Thiên Trang*, 7A, *Vũ Thi Thi*, 8A, THCS Hành Phước, *Phạm Thị Vy Vy*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phước Bách*, 9A8, THCS Trần Đại Nghĩa, *Nguyễn Thanh Hưng*, 9/3, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp; **Cần Thơ:** *Huỳnh Lê Ngọc Trân*, 9A8, THCS Thốt Nốt, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T4/442. *Giải phương trình*

$$4x^3 + 4x^2 - 5x + 9 = 4\sqrt[4]{16x+8} \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $16x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ (*)

Áp dụng BĐT Cauchy cho 4 số không âm, ta có: $4\sqrt[4]{16x+8} = 4\sqrt[4]{2.2.2.(2x+1)}$
$$\leq 2 + 2 + 2 + (2x+1) = 2x + 7.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Do đó từ (1) suy ra: $4x^3 + 4x^2 - 5x + 9 \leq 2x + 7$

$\Leftrightarrow (4x^3 + 8x^2) - (4x^2 + 8x) + (x + 2) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(4x^2 - 4x + 1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(2x-1)^2 \leq 0$ (2)

Vì $x \geq -\frac{1}{2}$ nên $x + 2 > 0$. Do đó:

$(2) \Leftrightarrow (2x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow 2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn PT(1)).

Vậy nghiệm của PT(1) là $x=\frac{1}{2}$. ☐

➢ **Nhận xét.** 1. Đây là một PT vô tỷ khá hay. Điều quan trọng trong cách giải trên là dùng bất đẳng thức Cauchy đánh giá một vế PT và kết hợp với điều kiện cần để tồn tại PT. Từ đó đẳng thức xảy ra cho ta nghiệm của PT. Tuy nhiên, có thể giải PT(1) bằng cách biến đổi biểu thức liên hợp như sau:

Với ĐK (*) thì (1) $\Leftrightarrow 4x^3+4x^2-5x+1=4\sqrt[4]{16x+8}-8$

$\Leftrightarrow (2x-1)(2x^2+3x-1)=\dfrac{32(2x-1)}{(\sqrt[4]{16x+8}+2)(\sqrt{16x+8}+4)}$. (3)

• Với $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm của (3).

• Với $x>\frac{1}{2}$ thì VP(3) < 1 < VT(3), không thỏa mãn (3).

• Với $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$ thì VT(3) < 1 < VP(3), không thỏa mãn (3). Vậy (1) có nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

2) Hầu hết các bạn tham gia đều tìm được đúng nghiệm bài toán. Các lời giải cũng chủ yếu là một trong hai cách trên. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Hà Nam:** *Ngô Nhật Long*, 7A2, THCS Trần Phú; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, *Nguyễn Tiến Long*, 8A1, THCS Lâm Thao; *Đinh Trung Thành*, 9A, THCS Đoan Hùng. **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Thanh Hương*, 9A, THCS Yên phong. **Hà Nội:** *Lê Phúc Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh. **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; *Đặng Quang Anh*, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn. **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Hằng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh. **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Phương Duyên*, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; *Hà Thị Phương Anh*, 9A, THCS TT Kỳ Anh. **Quảng Bình:** *Phan Trần Hướng*, 8Đ, THCS Quách Xuân Kỳ, TT Hoàn Lão, Bố Trạch. **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An. **Quảng Ngãi:** *Vũ Thi Thi*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** *Ngô Lê Phương Trinh*, 9E, THCS Lương Thế Vinh, TP. Tuy Hòa. **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn. **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phước Bách*, 9A8, THCS Trần Đại Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/442. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$44(xy+yz+zx) \le (3x+4y+5z)^2 \quad (1)$$

Lời giải

Cách 1. BĐT(1) tương đương với

$$9x^2+16y^2+25z^2-20xy-4yz-14xz \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 81x^2+144y^2+225z^2-180xy-36yz-126xz \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (81x^2+100y^2+49z^2-180xy+140yz-126xz)+(44y^2-176yz+176z^2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (9x-10y-7z)^2+44(y-2z)^2 \ge 0 \quad (2)$$

Nhận thấy, vế trái của BĐT(2) là tổng của hai biểu thức không âm với mọi x, y, z nên BĐT(2) luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} 9x-10y-7z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3z \\ y=2z. \end{cases}$$

Do đó BĐT(1) được chứng minh. Kết hợp với điều kiện $x+y+z=1$, thì đẳng thức ở BĐT(1) xảy ra khi $x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{3}; z=\frac{1}{6}$.

Cách 2. Từ $x+y+z=1$, ta đặt

$$x=\frac{1}{2}+a;\ y=\frac{1}{3}+b;\ z=\frac{1}{6}-a-b\ (a,b\in\mathbb{R}).$$

Ta có $(3x+4y+5z)^2-44(xy+yz+zx)$

$$=\left(\frac{11}{3}-2a-b\right)^2-44\left(\frac{11}{36}-\frac{a}{3}-\frac{b}{6}-a^2-b^2-ab\right)$$

$$=48a^2+45b^2+48ab$$

$$=12(2a+b)^2+33b^2 \ge 0, \forall a,b.$$

Do đó BĐT (1) đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2a+b=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$,

tức là $x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{3}; z=\frac{1}{6}$. ☐

➢ **Nhận xét**

1. Ngoài hai cách trên, một số bạn đã sử dụng các BĐT Cauchy, Bunyakovsky để chứng minh. Bạn *Lê Đức Thịnh* đã nêu và chứng minh bài toán tổng quát: *Cho các số thực x, y, z. Chứng minh rằng:*

$$((b+c)x+(c+a)y+(a+b)z)^2 \ge 4(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)$$

trong đó a, b, c là các số dương.

(Bài toán đã cho ứng với $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$).

2. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Phúc Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Long*, 8A1, *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hiên*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thương Duyên*, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 9C, THCS Đặng Thai Mai; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chính, Đông Sơn; *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Ninh, Tây Sơn; **Quảng Ngãi:** *Phạm Thị Vy Vy*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, *Vũ Thi Thi*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phước Bách*, 9A8, THCS Trần Đại Nghĩa; **Quảng Nam:** *Lê Phước Thịnh*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/442. *Chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm trên tập số thực:*

$$9x^4 + x(12x^2 + 6x - 1) + (x+1)(9x^2 + 12x + 5) + 1 = 0 \qquad (1)$$

Lời giải

$$\text{PT}(1) \Leftrightarrow 9x^4 + 12x^3 + 5x^2 + x^2 - x + 1 + (x+1)(9x^2+12x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(9x^2+12x+5) + (x+1)(9x^2+12x+5) + x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+1)(9x^2+12x+5) + x^2 - x + 1 = 0. \quad (2)$$

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$9x^2 + 12x + 5 = (3x+2)^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

nên (2) không có nghiệm thực, và do đó (1) không có nghiệm thực. ❐

➤ **Nhận xét.**

1. Rất đông các bạn tham gia giải bài này. Lời giải của các bạn khá phong phú, nhưng chủ yếu vẫn tập trung vào việc biến đổi VT(1) thành tổng, tích của những biểu thức luôn có giá trị dương hoặc không âm. Từ đó dẫn tới kết luận PT(1) vô nghiệm. Dưới đây là một số kết quả của các cách biến đổi đó:

$(1) \Leftrightarrow (x^2+x+1)(3x+2)^2 + 2x^2 + 2 = 0.$

$(1) \Leftrightarrow 9x^4 + 21x^3 + 27x^2 + 16x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2(3x^2 + 7x + 5) + 2(6x^2 + 8x + 3) = 0.$

$(1) \Leftrightarrow (3x^2 + 5x + 3)(3x^2 + 2x + 2) + 2x^2 = 0.$

$(1) \Leftrightarrow x^2(9x^2 + 21x + 16) + 11x^2 + 16x + 6 = 0.$

$(1) \Leftrightarrow \left(3x^2 + \frac{7}{2}x\right)^2 + \frac{59}{4}\left(x + \frac{32}{59}\right)^2 + \frac{98}{59} = 0.$

$(1) \Leftrightarrow \left(3x^2 + \frac{7}{2}x\right)^2 + \left(\frac{7}{2}x + \frac{16}{7}\right)^2 + \frac{10}{4}x^2 + \frac{38}{49} = 0.$

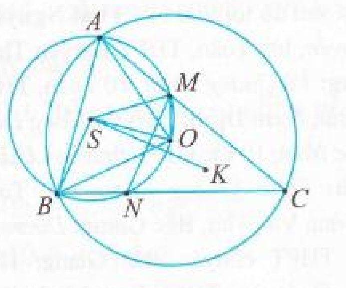
Một vài bạn dùng cách đặt ẩn phụ để đưa PT(1) từ bậc 4 về bậc 4 khuyết số hạng chứa lũy thừa bậc 3 của ẩn, sau đó dùng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá.

2. Các bạn sau có lời giải tốt: **Thái Nguyên:** *Ma Thị Khánh Huyền*, lớp Toán, THPT chuyên Thái Nguyên. **Hải Dương:** *Vũ Quang Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Nguyễn Hồng Đăng*, 10 T1, *Phạm Ngọc Nam*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hòa Bình:** *Đinh Chung Mừng*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Bắc Giang:** *Dương Thị Hạnh*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hưng Yên:** *Phạm Tiến Duật*, 9A, THCS Bình Minh, Khoái Châu; **Thái Bình:** *Phạm Anh Sơn*, 10, Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngọc Thanh Tâm*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, *Lương Thị Hồng Nhi*, 10A1, THPT Đông Quan, Phú Xuyên; **Hà Nam:** *Hoàng Đức Mạnh*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Long*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Huy*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Thanh Xuân*, 13B, phố Phượng Đình 1, phường Tào Xuyên, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Dương Thị Thúy Quỳnh*, *Nguyễn Thanh Thùy Khuyên*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Chu Tự Tâm*, 10A12, THPT Diễn Châu 2, *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I, Đà Sơn; **Hà Tĩnh:** *Phạm Quốc Cường*, *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, *Trần Đoan Trang*, 10 T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Bùi Trung Hoàn*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Trần Lê Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** *Vương Hoài Thanh*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Đăk Lăk:** *Nguyên Ngọc Gia Văn*, 10 CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Mê Thuột; **Cà Mau:** *Lê Minh Phương*, 12 chuyên Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP. Cà Mau; **Gia Lai:** *Vũ Văn Quý*, 12 A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, TP Pleiku; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Xuân Sơn*, 10 Toán, PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Phú Yên:** *Đoàn Phú Thiện*, 12A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa.

HOÀNG CHI

Bài T7/442. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R với CA ≠ CB; $\widehat{ACB} \neq 90^{\circ}$. Một đường tròn tâm S ngoại tiếp tam giác AOB cắt các đường thẳng CA, CB tại các điểm tương ứng M, N. Gọi K là ảnh đối xứng của điểm S qua đường thẳng MN. Chứng minh rằng SK = R.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Long Duy*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**)



Sử dụng góc định hướng theo modun π:

$(MO, MC) \equiv (BO, BA) \pmod{\pi}$

$\equiv (BO, OS) + (OS, BA) \pmod{\pi}$

$\equiv (OB, OS) + \frac{\pi}{2} \equiv (CB, CA) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ (1)

Mặt khác

$(MO, MC) \equiv (MO, BC) + (BC, MC) \pmod{\pi}$

$\equiv (MO, BC) + (BC, CA) \pmod{\pi}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MO \perp BC$, suy ra MO là đường trung trực của BC, nên ΔBMC cân tại M.

Xét các tam giác cân ΔSMK và ΔBSO có

$(SM, SK) \equiv (BM, BN) \equiv (BM, BC) \equiv (CB, CM)$

$\equiv (OB, OS) \equiv (BS, BO) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow (SM, SK) \equiv (BS, BO) \pmod{\pi}$.

Từ đó $\Delta SMK = \Delta BSO$, dẫn tới $SK = BO = R$. ❒

➤ **Nhận xét**

Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán trên, tuy nhiên đa số các lời giải đều phụ thuộc vào hình vẽ. Ngoài bạn *Duy*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Nghệ An: *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam:** *Trần Nhật Huy*, 10/1, THPT chuyên Bắc Quảng Nam, Hội An; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T8/442. *Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức sau:*

$$P = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Do vai trò của x, y, z trong biểu thức $|P|$ như nhau, không mất tính tổng quát, có thể coi $x \le y \le z$ và $|P| = |(z-x)^5 - [(y-x)^5 + (z-y)^5]|$. Đặt $y - x = a$, $z - y = b$ $(a \ge 0, b \ge 0)$. Áp dụng BĐT AM-GM (hoặc Bernoulli, Holder), ta có

$a^5 + b^5 \ge \frac{(a+b)^5}{2^4}$ hay $(y-x)^5 + (z-y)^5 \ge \frac{(z-x)^5}{2^4}$.

Vậy $|P| \le \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)(z-x)^5$ (2)

Nhận xét rằng $x^2 + z^2 + 2y^2 + 2xz \ge 0$

$\Leftrightarrow (z-x)^2 \le 2(x^2 + y^2 + z^2)$

nên $(z-x)^2 \le 16$, kết hợp với (2) suy ra

$|P| \le \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)4^5 = 960$ hay $-960 \le P \le 960$.

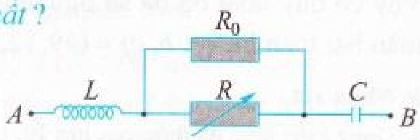
$P = 960$ khi $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$; $P = -960$ khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$.

Vậy $\max P = 960$; $\min P = -960$. ❒

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau gửi bài đến Tòa soạn đều có lời giải đúng: **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phạm Văn Huy*, 11T1, THPT Vũng Tàu; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Ngọc Gia Văn*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Hà Nam:** *Bạch Xuân Đạo*, 12T, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 10A2, THPT chuyên KHTN, *Nguyễn Viết Hoàng*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP, *Vũ Bá Sáng*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Tĩnh:** *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T1, *Lê Văn Trường Nhật, Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10T, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Long Duy*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Nguyễn Hồng Đăng*, 10T, *Nguyễn Đức Trung*, 11T1, *Vũ Anh Tuấn*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Bình:** *Hoàng Thanh Việt*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài L1/442. *Đặt một điện áp xoay chiều $u = U\sqrt{2}\cos\omega t(V)$ vào hai đầu đoạn mạch AB (hình vẽ). Biết tụ điện có dung kháng $Z_C = 60\Omega$, cuộn cảm thuần có cảm kháng $Z_L = 20\Omega$, điện trở thuần R_0 có giá trị xác định và R là một biến trở. Điều chỉnh biến trở để công suất tỏa nhiệt trên nó đạt lớn nhất, khi đó công suất tỏa nhiệt trên R bằng* hai *lần công suất tỏa nhiệt trên R_0. Hỏi phải điều chỉnh biến trở bằng bao nhiêu thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB là lớn nhất ?*



Lời giải

Công suất tỏa nhiệt trên biến trở:

$$\mathcal{P}_R = \frac{U_R^2}{R} = \frac{\left(I\dfrac{RR_0}{R+R_0}\right)^2}{R}$$

$$= \frac{U^2RR_0^2}{(Z_L - Z_C)^2(R+R_0)^2 + R^2R_0^2} =$$

$$\frac{U^2R_0^2}{\left[(Z_L - Z_C)^2 + R_0^2\right]R + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2R_0^2}{R} + (Z_L - Z_C)^2R_0}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho biểu thức ở mẫu ta thấy $\mathcal{P}_R$ lớn nhất khi:

$$\left[(Z_L - Z_C)^2 + R_0^2\right]R = \frac{(Z_L - Z_C)^2R_0^2}{R},$$

suy ra: $R = R_1 = \dfrac{R_0|Z_L - Z_C|}{\sqrt{R_0^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$. (1)

Vì R và R_0 mắc song song nên khi công suất tỏa nhiệt trên R bằng hai lần trên R_0 thì $R_0 = 2R$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $R_0 = \sqrt{3}(Z_C - Z_L) = 40\sqrt{3}\Omega$.

Khi công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB lớn nhất, ta dễ dàng chứng minh được:

$$\frac{R_0R}{R_0 + R} = Z_C - Z_L$$

$$\Rightarrow R = R_2 = \frac{(Z_C - Z_L)R_0}{R_0 - (Z_C - Z_L)} = \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \approx 94{,}6\Omega. \ \square$$

➢ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng: **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Phạm Ngọc Bách*, 12A4, THPT Tĩnh Gia 2.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/441. *Một người pha một lượng trà đá bằng cách trộn lẫn 500g nước trà nóng với một khối lượng bằng nó nước đá đang tan. Nếu nhiệt độ ban đầu của nước trà nóng lần lượt là:*

a) 85°C; b) 75°C

Hỏi nhiệt độ và khối lượng của đá còn lại bằng bao nhiêu khi trà và đá đạt tới cùng một nhiệt độ?

Lời giải

Gọi t_1 là nhiệt độ ban đầu của nước trà nóng; t_2 là nhiệt độ của trà và đá khi cả hai đạt đến cùng một nhiệt độ.

Nhiệt lượng Q_1 do nước trà nóng nhả ra là:

$$Q_1 = cm(t_1 - t_2). \quad (1)$$

Nhiệt lượng Q_2 do nước hấp thụ là:

$$Q_2 = Lm + cmt_2. \quad (2)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng $Q_1 = Q_2$, ta có: $cm(t_1 - t_2) = Lm + cmt_2$.

Suy ra: $(t_1 - t_2) = \dfrac{L}{c} + t_2$ hay $t_2 = \dfrac{1}{2}\left(t_1 - \dfrac{L}{c}\right)$

$$= 0{,}5\left(t_1 - \frac{3{,}33.10^5}{4{,}186.10^3}\right) = 0{,}5(t_1 - 79{,}55). \quad (3)$$

a) Với $t_1 = 85$°C, thay vào (3) ta nhận được:

$$t_2 = 0{,}5(85 - 79{,}55) = 2{,}72\,^\circ\text{C} > 0.$$

Vì $t_2 > 0$, nên nước đá tan hết.

b) Với $t_2 = 75$°C, thay vào (3) thì $t_2 < 0$. Điều đó chứng tỏ là nước đá chưa tan hết, vậy trong PT(1) thì $t_2 = 0$. Ta phải tính như sau:

$Q_1 = cm(t_1 - 0) = 0{,}5.\ 4{,}186.10^3.75 = 1{,}57.10^5$J

Khối lượng m_1 nước đá tan ra để hấp thụ nhiệt lượng Q_1 là:

$$m_1 = \frac{Q_1}{L} = \frac{1{,}57.10^5}{3{,}33.10^5} = 0{,}47 \text{ kg} = 470 \text{ g}.$$

Vậy lượng nước đá chưa tan hết bằng:

$$m_2 = 500 - 470 = 30 \text{ g}. \ \square$$

➢ **Nhận xét**

Bạn *Nguyễn Thị Thanh Xuân*, số nhà 13B, phố Phượng Đình 1, phường Tào Xuyên, TP Thanh Hoá, **Thanh Hoá** có lời giải đúng và lập luận tương đối chặt chẽ.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Giải bài

CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT

KỈ NIỆM 50 NĂM TẠP CHÍ TH&TT

T5/THCS. *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (a; b; c) thỏa mãn a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và*

$$\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}+\sqrt{\frac{5}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}$$

là số tự nhiên lẻ khác 1.

Lời giải. Ta có các nhận xét sau:

1) Nếu x, y là các số hữu tỉ không âm, $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$ thì $\sqrt{x};\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$.

Thật vậy: xét trường hợp $x+y>0$ (trường hợp $x=y=0$ khẳng định đúng). Ta có

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\in\mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})+(\sqrt{x}+\sqrt{y})\in\mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x};\sqrt{y}\in\mathbb{Q}.$$

2) Nếu x, y, z là các số hữu tỉ không âm, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$ thì $\sqrt{x};\sqrt{y};\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$.

Thật vậy, đặt $a=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow a-\sqrt{x}=\sqrt{y}+\sqrt{z}\Rightarrow(a-\sqrt{x})^2=\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2-2a\sqrt{x}+x=y+2\sqrt{yz}+z$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{yz}+a\sqrt{x}\right)=a^2+x-y-z\in\mathbb{Q}.$$

Từ nhận xét 1 suy ra $\sqrt{x}\in\mathbb{Q}$.

Do vai trò tương tự $\sqrt{y};\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$.

Áp dụng vào bài toán:

$$F=\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}+\sqrt{\frac{5}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{19}{a+b-c}},\sqrt{\frac{5}{b+c-a}},\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}\in\mathbb{Q}.$$

Giả sử $\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}=\frac{m}{n}$ $(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1)$

$$\Rightarrow 19n^2=(a+b-c)m^2\Rightarrow 19\,\vdots\,m^2\Rightarrow m=1.$$

Như vậy $\sqrt{\frac{19}{a+b-c}}=\frac{1}{n}$. Tương tự, ta có:

$$\sqrt{\frac{5}{b+c-a}}=\frac{1}{p},\sqrt{\frac{79}{c+a-b}}=\frac{1}{q}\ (n,p,q\in\mathbb{N}^*).$$

Do đó $F=\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\le 1+1+1=3$.

Nhưng theo giả thiết $F\in\{3;5;7;\ldots\}$, từ đó

suy ra $n=p=q=1\Rightarrow\begin{cases}a+b-c=19\\ b+c-a=5\\ c+a-b=79\end{cases}\Rightarrow$

$$a=\frac{1}{2}[(a+b-c)+(c+a-b)]=49, b=12, c=42.$$

Vậy có duy nhất bộ ba số nguyên dương thỏa mãn bài toán là: $(a,b,c)=(49,12,42)$. ❒

➢ **Nhận xét**

1. Dùng kiến thức đa thức của lớp 10, ta chứng minh được khẳng định tổng quát:

Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số hữu tỉ không âm và $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}\in\mathbb{Q}$ thì $\sqrt{x_1},\sqrt{x_2},\ldots,\sqrt{x_n}\in\mathbb{Q}$.

2. Trong số các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn, có ba bạn có lời giải hoàn chỉnh: **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

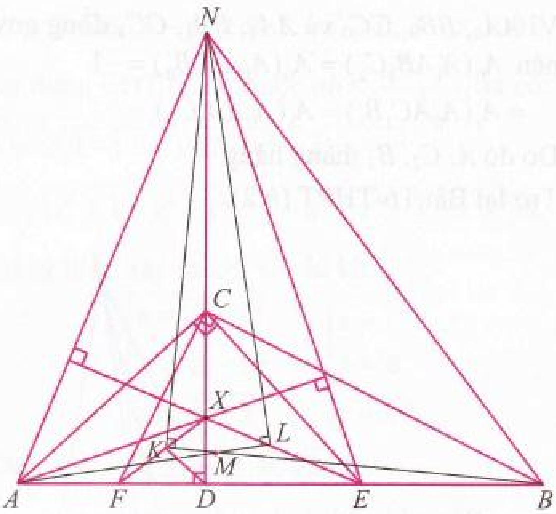
T6/THCS. *Cho tam giác ABC, D là chân đường cao hạ từ C; Trên AB lấy các điểm E, F sao cho $\widehat{ACE}=\widehat{BCF}=90^\circ$. X là điểm trên đoạn CD; K là điểm trên FX sao cho BK = BC và L là điểm trên EX sao cho AL = AC; AL và BK cắt nhau tại M. Chứng minh rằng ML = MK.*

Lời giải. Ta giải bài toán trong trường hợp $\widehat{ACB}>90^\circ$, các trường hợp $\widehat{ACB}=90^\circ$ và $\widehat{ACB}<90^\circ$ chứng minh tương tự.

Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với XE, cắt CD tại N. Khi đó X là trực tâm của ΔNAE, suy ra $AX\perp NE$, từ đó $\widehat{AEX}=\widehat{AND}$. (1)

Do $AL^2=AC^2=AD.AE$ nên AL tiếp xúc với đường tròn $(EDL)\Rightarrow\widehat{ALD}=\widehat{LED}=\widehat{AEX}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AND}=\widehat{ALD}$ nên bốn điểm N, A, L, D cùng nằm trên một đường tròn, dẫn đến $\widehat{NLA}=\widehat{NDA}=90^\circ$ hay $NL\perp AL$.



Lại có $\Delta XED \backsim \Delta AND$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{XD}{AD} = \dfrac{ED}{ND}$ (3)

Vì ΔACE và ΔBCF cùng vuông tại C nên

$CD^2 = AD.DE = BD.FD \Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{FD}{ED}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{XD}{FD} = \dfrac{BD}{ND}$

$\Rightarrow \Delta BDN \backsim \Delta XDF \Rightarrow \widehat{BND} = \widehat{DFX} = \widehat{BFK}$ (5)

Mặt khác, $BK^2 = BC^2 = BD.BF$ suy ra BK tiếp xúc với đường tròn (DKF), dẫn đến $\widehat{BKD} = \widehat{BFK}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{BND} = \widehat{BKD}$, nghĩa là bốn điểm B, D, K, N cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra $NK \perp BK$. Áp dụng định lí Pythagore ta được: $MK^2 - ML^2 = NL^2 - NK^2$

$= (NA^2 - AL^2) - (NB^2 - BK^2)$

$= (NA^2 - NB^2) + (CB^2 - CA^2)$

$= (CA^2 - CB^2) + (CB^2 - CA^2) = 0$ (do $NC \perp AB$).

Vậy $MK = ML$ (đpcm). ❒

➢ **Nhận xét**

1. Trường hợp $\widehat{ACB} = 90^\circ$ chính là nội dung *Bài toán 5* trong kì thi *IMO* năm 2012.

2. Số lời giải gửi về tòa soạn không nhiều. Ba bạn sau có lời giải tốt. **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Thanh Hoá:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá.

HỒ QUANG VINH

T5/THPT. *Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a; b; p) trong đó p là số nguyên tố, a và b nguyên tố cùng nhau sao cho tập ước nguyên tố của $a + b$ trùng với tập ước nguyên tố của $a^p + b^p$.*

Lời giải

i) Nếu $a = b$ thì vì $(a, b) = 1$ nên suy ra $a = b = 1$. Từ đó với mọi p ta có $a + b = 2 = a^p + b^p$. Thành thử $(1, 1, p)$ là một bộ số thỏa mãn.

ii) Xét $a \neq b$. Giả sử $a > b$. Gọi K và H tương ứng là tập ước nguyên tố của $a + b$ và $a^p + b^p$. Giả sử $K = H$.

• Xét $p = 2$. Giả sử $q \in K$, suy ra $a \equiv -b \pmod q$ $\Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod q$. Vì $q \in H$ nên $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod q \Rightarrow 2a^2 \equiv 0 \pmod q$. Nếu $q > 2$ thì $a \equiv 0 \pmod q \Rightarrow b \equiv 0 \pmod q$. Điều này trái giả thiết $(a, b) = 1$. Vậy $q = 2$ và $K = H = \{2\}$. Do đó $a^2 + b^2 = 2^s$ với $s > 1$ (do $a > 1$). Nếu a lẻ thì b lẻ, do đó $a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 4$, mâu thuẫn. Do đó a, b chẵn: $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, suy ra $a_1^2 + b_1^2 = 2^{s-2}$. Sau một số bước, ta đi đến $a_k^2 + b_k^2 = 2$ hoặc $a_k^2 + b_k^2 = 1$. Điều này không xảy ra vì $a \geq 2$, $b \geq 2$.

• Xét $p > 2$. Đặt $B = \dfrac{a^p + b^p}{a + b} = a^{p-1} - a^{p-2}b + \ldots - ab^{p-2} + b^{p-1}$.

Lấy $q \mid B \Rightarrow q \in H \Rightarrow q \in K \Rightarrow a \equiv -b \pmod q$ $\Rightarrow 0 \equiv B \equiv pa^{p-1} \pmod q$. Nếu $q \neq p$ thì $q \mid a$ $\Rightarrow q \mid b$ trái với giả thiết $(a, b) = 1$. Vậy $q = p$, tức là $B = p^s$, $a \equiv -b \pmod q$ và a, b đều không chia hết cho p. Đặt $a = kp - b$ ta có:

$$B = \frac{(kp - b)^p + b^p}{kp}$$

$$= A(kp)^2 - \frac{p(p-1)}{2}kpb^{p-2} + pb^{p-1}$$

$$\equiv pb^{p-1} \pmod{p^2}.$$

Do $b \not\vdots\, p$ nên $B \not\vdots\, p^2$, thành thử $s = 1$, tức là $B = p$.

Vì $a > b$ nên $a \geq b + 1 \Rightarrow a(a - b - 1) \geq 0 \Rightarrow a^2 - ab \geq a$.

Vậy $p = B \geq \dfrac{a^3 + b^3}{a + 3} = a^2 - ab + b^2 \geq a + b \geq p$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $p = 3$, $a = b + 1$, $a + b = 3$. Suy ra $p = 3$, $b = 1$, $a = 2$.

Thử lại ta thấy bộ số $(a, b, p) = (2, 1, 3)$ thỏa mãn.

Đáp số: $(1, 1, p)$; $(2, 1, 3)$; $(1, 2, 3)$. ❐

➢ **Nhận xét**

Trong số 11 bạn tham gia giải bài toán này có 10 bạn cho đáp số đúng. Tuy nhiên lời giải còn dài và còn có đôi chỗ chưa chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải tương đối tốt:

Hà Tĩnh: *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nam Định:** *Vũ Tuấn Anh*, 12, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Trị:** *Trần Trọng Tiến*, 11, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

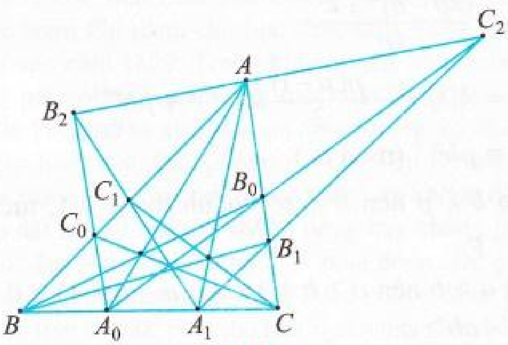
ĐẶNG HÙNG THẮNG

T6/THPT. *Cho tam giác không cân ABC. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_0, B_0, C_0; AI, BI, CI theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1; B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 theo thứ tự cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng A_0A_2, B_0B_2, C_0C_2 đồng quy tại một điểm thuộc (I).*

Lời giải

Bổ đề. *Cho tam giác ABC. Các cặp điểm A_0, A_1; B_0, B_1; C_0, C_1 theo thứ tự thuộc BC, CA, AB sao cho AA_0, BB_0, CC_0 và AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. C_2 là giao điểm của A_0B_0 và A_1B_1, B_2 là giao điểm của A_0C_0 và A_1C_1. Khi đó A, C_2, B_2 thẳng hàng.*

Chứng minh. (*h*.1).



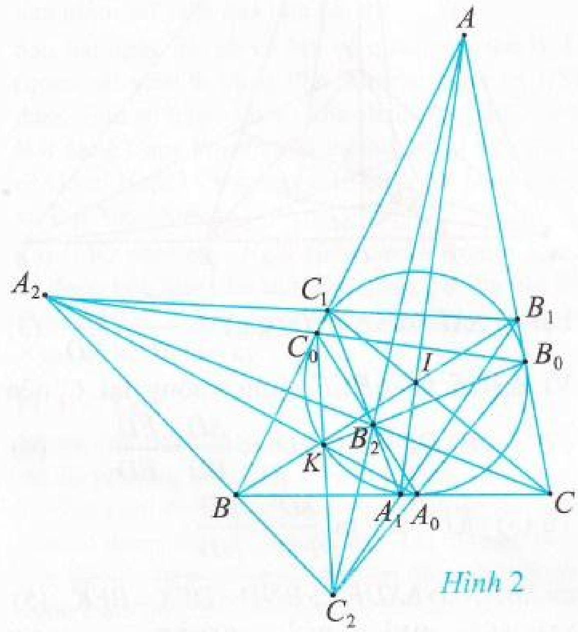
Hình 1

Vì AA_0, BB_0, CC_0 và AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy nên $A_0(A_1AB_2C_2) = A_0(A_1AC_0B_0) = -1$

$= A_1(A_0AC_1B_1) = A_1(A_0AB_2C_2)$.

Do đó A, C_2, B_2 thẳng hàng.

Trở lại Bài T6/THPT (*h*.2).



Hình 2

Áp dụng định lí Menelaus cho ΔAB_0C_0 với sự thẳng hàng A_2, B_1, C_1, ta có

$$\frac{\overline{A_2B_0}}{\overline{A_2C_0}}.\frac{\overline{C_1C_0}}{\overline{C_1A}}.\frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1B_0}} = 1.$$

Tương tự $\dfrac{\overline{B_2C_0}}{\overline{B_2A_0}}.\dfrac{\overline{A_1A_0}}{\overline{A_1B}}.\dfrac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1C_0}} = 1$

và $\dfrac{\overline{C_2A_0}}{\overline{C_2B_0}}.\dfrac{\overline{B_1B_0}}{\overline{B_1C}}.\dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1A_0}} = 1.$

Nhân theo từng vế của ba đẳng thức trên, chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy, áp dụng định lí Ceva cho ΔABC, ta có

$$1 = \frac{\overline{A_0B_2}}{\overline{A_0C_2}}.\frac{\overline{B_0C_2}}{\overline{B_0A_2}}.\frac{\overline{C_0A_2}}{\overline{C_0B_2}}.\frac{\overline{B_1A}}{\overline{C_1A}}.\frac{\overline{C_1B}}{\overline{A_1B}}.\frac{\overline{A_1C}}{\overline{B_1C}}$$

$$= \frac{\overline{A_0B_2}}{\overline{A_0C_2}}.\frac{\overline{B_0C_2}}{\overline{B_0A_2}}.\frac{\overline{C_0A_2}}{\overline{C_0B_2}}.(-1).$$

Vậy $\dfrac{\overline{A_0B_2}}{\overline{A_0C_2}}.\dfrac{\overline{B_0C_2}}{\overline{B_0A_2}}.\dfrac{\overline{C_0A_2}}{\overline{C_0B_2}} = -1.$

Từ đó, áp dụng định lí Ceva cho $\Delta A_0B_0C_0$, suy ra A_0A_2, B_0B_2, C_0C_2 đồng quy, tại K (1)

Mặt khác, theo bổ đề trên, A, B_2, C_2 thẳng hàng. Từ đó, áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} A_0B_0C_0 \\ KC_0B_0 \end{pmatrix}$, chú ý rằng $A = B_0B_0 \cap C_0C_0$; $B_2 = A_0C_0 \cap B_0K$; $C_2 = A_0B_0 \cap C_0K$, suy ra K thuộc (I) (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm. ❐

➢ **Nhận xét**

Bài toán này tương đối khó, chỉ có 7 bạn tham gia giải. Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*, *Lê Văn Trường Nhật*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Bình:** *Nguyễn Minh Ngọc*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình.

NGUYỄN MINH HÀ

Câu lạc bộ *Giải đáp:*

MỘT SỐ TƯỚNG LĨNH TRONG KHỞI NGHĨA HAI BÀ TRƯNG

(Đề đăng trên TH&TT số 442 tháng 4 năm 2014)

A1 - B4 A2 - B8 A3 - B2 A4 - B9
A5 - B6 A6 - B7 A7 - B1 A8 - B10
A9 - B5 A10 - B3

Hoan nghênh các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Lê Đức Thái*, 6A2, THCS Yên Lạc; **Hưng Yên:** *Trần Bá Trung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Phan Xuân Đức*, C4K47, THPT Nam Đàn 2; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đình Nhật Nam*, 10 Toán 1, K23, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Cà Mau:** *Lê Minh Phương*, 12 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP. Cà Mau.

VIỆT AN

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(*Tiếp theo trang* 17)

T7/446. Given a tetrahedron $ABCD$. Let d_1, d_2, d_3 be the distances between the pairs of opposite sides AB and CD, AC and BD, AD and BC. Prove that $V_{ABCD} \geq \frac{1}{3}d_1d_2d_3$.

T8/446. Given an integer n which is greater than 1. Let $a_1, a_2, ..., a_n$ be arbitrary positive real numbers satisfying

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=1.$$

Prove that

$$a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+...+a_{n-1}^{a_n}+a_n^{a_1}+a_1+a_2+...+a_n>n^3+n.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/446. Let T be a set of n elements. What is the maximal number of subsets of T which can be picked so that each subset has exactly 3 elements and any two subsets has nonempty intersection?

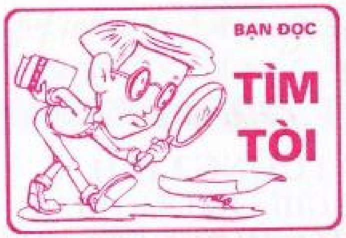
T10/446. Let p be a prime number. Find all the polynomials $f(x)$ with integer coefficients such that for every positive integer n, $f(n)$ is a divisor of $p^n - 1$.

T11/446. Let x, y be the positive real numbers satisfying $[x].[y] = 30^4$, where $[a]$ is the greatest integer not exceeding a. Find the minimum and maximum values of

$$P = [x[x]] + [y[y]].$$

T12/446. Given a triangle ABC. Let E, F be points on CA, AB respectively such that $EF \parallel BC$. The perpendicular bisector of BC intersects AC at M and the perpendicular bisector of EF intersects AB at N. The circle circumscribing the triangle BCM meets CF at P which is different from C. The circle circumscribing the triangle EFN meets CF at Q which is defferent from F. Prove that the perpendicular bisector of PQ contains the midpoint of MN.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
College of Science – Vietnam National University, Ha Noi.



Một dạng khái quát hóa từ một bài toán nhỏ

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

Sau đây tác giả đề xuất một dạng khái quát hóa của bài toán mà tác giả đã đưa vào mục "*Đề ra kì này*" của *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* dành cho các bạn học sinh bậc THCS (bài T5/429, tháng 3 năm 2013).

Phát biểu bài toán

Bài toán. *Giả sử ABC là một tam giác nhọn, nội tiếp đường tròn (O) với BC > CA > AB. Trên (O) ta lấy sáu điểm phân biệt M, N, P, Q, R và S (không trùng với bất cứ đỉnh nào của tam giác ABC) sao cho: QB = BC = CR (I) SC = CA = AM (II) và NA = AB = BP (III) Gọi I_A, I_B và I_C lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APS, BNR và CMQ. Thế thì: $\Delta I_AI_BI_C$ ꩜ ΔABC (*)*

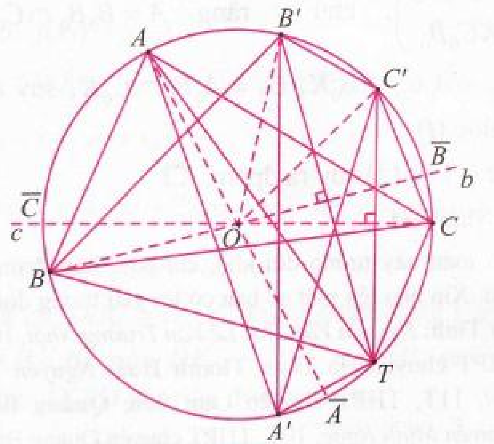
Ghi chú

- Nếu kí hiệu ∽ là (sự) đồng dạng thuận (cùng hướng) thì ꩜ là (sự) đồng dạng nghịch (ngược hướng).
- Nếu phân loại (khó, dễ) thì bài toán phát triển trên có tầm cỡ của một bài toán IMO, không dễ hơn bài toán số 6 của kì thi IMO 2011.

1. Bổ đề. *Gọi T là một điểm bất kì trên (O) (trong bài toán trên). Trên (O) ta lấy ba điểm A', B', C' sao cho các tam giác ATA', BTB' và CTC' lần lượt cân tại A, B, C (lưu ý rằng một trong chúng có thể suy biến thành một đoạn thẳng kẻ hai lần khi $T \in \{\overline{A}; \overline{B}; \overline{C}\}$). Thế thì số đo các góc của tam giác A'B'C' không phụ thuộc vào vị trí của điểm T. ($\overline{A} = \mathcal{D}_O(A)$, ..., xem Hình 1).*

Chứng minh

Kí hiệu số đo các góc của ΔABC và $\Delta A'B'C'$ như sau: $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$ (theo giả thiết thì $0 < \gamma < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$); $\widehat{A'} = x$, $\widehat{B'} = y$, $\widehat{C'} = z$. Ta sẽ tính x, y, z theo α, β, γ (đơn vị đo góc là radian).



Hình 1

• Trước hết, trong $\Delta A'B'C'$ thì rõ ràng là:
$$x = \widehat{B'A'C'} = \frac{1}{2}\widehat{B'OC'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}\right) \ [\mathrm{mod}\,\pi] \quad (1)$$

• Mặt khác, theo cách dựng $\Delta A'B'C'$ thì B' đối xứng với T qua $(B\overline{B}) = b$ và T lại đối xứng với C' qua $(C\overline{C}) = c$. Bởi thế nên C' là ảnh của B' qua tích $\mathcal{D}_c \circ \mathcal{D}_b$ của hai phép đối xứng trục qua hai đường kính $(BO\overline{B}) = b$ và $(CO\overline{C}) = c$. Tích này chính là phép quay tâm O, góc quay $\varphi = 2(b, c)$, kí hiệu là $Q(O, \varphi)$, trong đó
$$(b, c) = \pi - \widehat{BOC} = \pi - 2\widehat{BAC} = \beta + \gamma - \alpha \quad (2)$$
Phép quay $Q(O, \varphi)$ biến $B' \mapsto C'$; $\overrightarrow{OB'} \mapsto \overrightarrow{OC'}$ và vì vậy $\left(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}\right) = \varphi = 2x\ [\mathrm{mod}\,2\pi]$.

• Đối chiếu (1) và (2) ta được $x = \beta + \gamma - \alpha$. Tương tự, $y = \gamma + \alpha - \beta$; $z = \alpha + \beta - \gamma$ (3)

Suy ra đpcm.

Ta có nhận xét quan trọng sau đây:

Trước hết, ta nói rằng: "Tam giác $\mathcal{T}(A'B'C')$ được *sinh bởi điểm T* của đường tròn $(O) = (ABC)$ và *gắn kết đối ngẫu* với tam giác ABC cố định cho trước trên (O)." Khi điểm T thay đổi vị trí trên (O), tất cả các tam giác $\mathcal{T}$ gắn kết đối ngẫu với ΔABC *đều bằng nhau và cùng hướng* nhưng nghịch hướng với ΔABC (do chúng đồng dạng với nhau nhưng cùng nội tiếp một đường tròn là (O); chứng minh tính chất này khá đơn giản).

2. Áp dụng bổ đề vào Bài toán ban đầu

• Trước hết ta dễ dàng kiểm tra được rằng, hệ thống (I, II, III) các bộ điều kiện đặt ra trong *Bài toán* được suy ra từ *Bổ đề* khi chúng ta chọn T ở ba vị trí đặc biệt, đó là các đỉnh A, B, C của ΔABC đã cho, nhưng đã được sắp xếp lại để thuận tiện cho việc vẽ hình (đường gấp khúc (mở), mỗi đường ba đốt bằng nhau) sao cho vẫn thỏa mãn đầy đủ 6 đẳng thức về độ dài.

• Cuối cùng, với T lần lượt trùng với A, B rồi C thì các tam giác $\mathcal{T}(A'B'C')$ gắn kết đối ngẫu với ΔABC và sinh bởi T là ba tam giác bằng nhau sau đây: $\Delta APS = \Delta NBR = \Delta MQC$

$$(= \mathcal{T}(A_iB_iC_i), \text{ với } i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

3. Chứng minh mệnh đề (*)

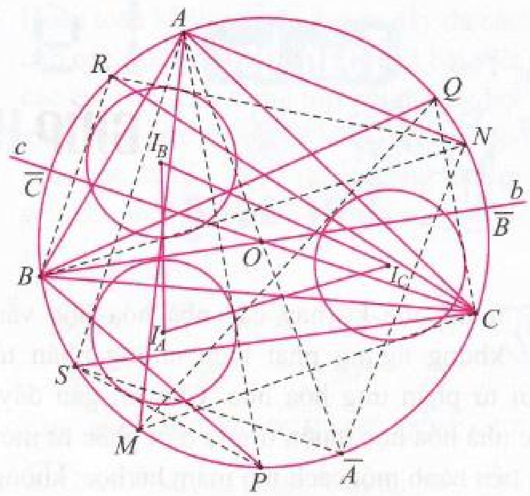
Cuối cùng, ta chứng minh Mệnh đề (*) về mối quan hệ đồng dạng nghịch của tam giác $I_AI_BI_C$ tạo bởi các tâm đường tròn nội tiếp của ba tam giác bằng nhau $\mathcal{T}_i (i = 1, 2, 3)$ (4) (được chỉ ra ở cuối phần 2) và ΔABC đã cho.

a) Trước hết, chúng ta lưu ý rằng ba tam giác APS, NBR và MQC đều *bằng nhau thuận* (cùng hướng) và *cùng nội tiếp* đường tròn (O). Bởi vậy, chúng đôi một là ảnh của nhau qua *một phép dời hình thuận* và biến (O) ngoại tiếp chúng thành chính nó.

Chính vì lẽ đó, các phép dời hình thuận này *chỉ có thể* là những phép quay xung quanh tâm O với góc quay φ [mod2π] phù hợp. *Chẳng hạn*:

b) Từ $AN = BP$ (điều kiện (III)), thực hiện phép quay $Q_1\left(O, \varphi_1 = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON})\right)$ thì $A \mapsto N$, $P \mapsto B$ và $S \mapsto R$. Do đó $\Delta APS \to \Delta NBR$.

c) Thực hiện phép quay $Q_2\left(O, \varphi_2 = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})\right)$ ta được $N \mapsto M$, $B \mapsto Q$ và $R \mapsto C$.



Hình 2

d) Thực hiện phép quay $Q_3\left(O, \varphi_3 = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})\right)$ ta được $M \mapsto A$, $Q \mapsto P$ và $C \mapsto S$.

e) Đến đây, từ tích ba phép quay Q_1, Q_2, Q_3 theo thứ tự đó, là phép quay $Q\left(O, \varphi = \sum \varphi_i\right)$ $= Q_3(O, 2\pi)$ thì ba tam giác APS, NBR và MQC đều *trùng nhau* ở vị trí của tam giác APS. Đồng thời, với Q_1: $I_A \mapsto I_B$; Q_2: $I_B \mapsto I_C$; Q_3: $I_C \mapsto I_A$.

f) Để ý rằng, từ (III): $NA = AB = BP$ (hay $PB = BA = AN$) ta được:

$(OA, ON) = (OB, OA)$, [modπ] (i); tương tự:

$(ON, OM) = (OC, OB)$, [modπ] (ii);

$(OM, OA) = (OA, OC)$, [modπ] (iii)

(với $OA = OB = OC$ là bán kính của (O)).

g) Trở về với các nhận xét nêu ở b), c) và d). Xin nhắc lại là với Q_1 thì $I_A \mapsto I_B$; với Q_2 thì $I_B \mapsto I_C$; với Q_3 thì $I_C \mapsto I_A$ tương ứng với

$$\Delta APS \to \Delta NBR \to \Delta MQC \to \Delta APS$$

lần lượt ứng với $I_A \mapsto I_B \mapsto I_C \mapsto I_A$.

Các tương ứng này kéo theo lần lượt là các *đẳng thức góc* sau đây (với $OI_A = OI_B = OI_C = p$ trong đó p là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta I_AI_BI_C$):

$$\begin{cases} (OI_A, OI_B) = (OB, OA), \text{ [mod}\pi] & \text{(i')} \\ (OI_B, OI_C) = (OC, OB), \text{ [mod}\pi] & \text{(ii')} \\ (OI_C, OI_A) = (OA, OC), \text{ [mod}\pi] & \text{(iii')} \end{cases}$$

h) Từ (i'), (ii') và (iii') có $\Delta I_AI_BI_C$ ∽ ΔABC (đpcm).

Toán học & Đời sống

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ GIÚP HÓA HỌC TÌM RA CHẤT MỚI

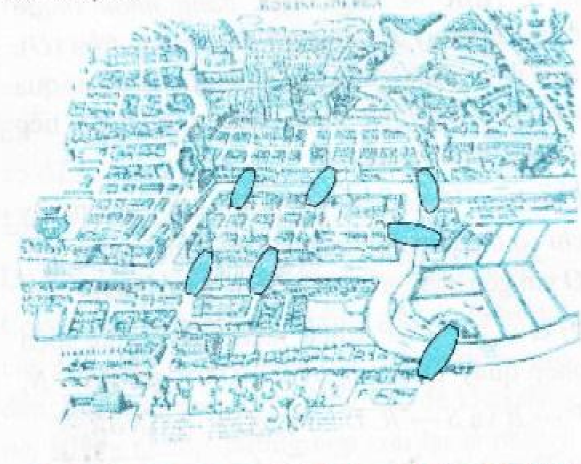
PHAN THANH QUANG
(Theo *Courrier international*)

Từ hai thế kỷ nay các nhà hóa học vẫn không ngừng phát hiện những phân tử mới từ phản ứng hóa học. Cho tới gần đây, các nhà hóa học muốn tìm ra một phân tử mới họ tiến hành một cách mò mẫm hú họa, không chắc đem lại kết quả gì. Ngày nay, họ chỉ cần xử lý một cơ sở của dữ kiện tập hợp khoảng 10 triệu phân tử và 7 triệu phản ứng đã biết, rồi chương trình hóa sự tổng hợp của phân tử mà họ hy vọng rằng có thể thu được. Như vậy sự tổng hợp này cần những thành phần thường có giá rẻ và dễ tìm. Về phương diện thực hành, ít khi có ngay được một phân tử mới trong lần đầu. Quá trình tổng hợp thường diễn ra trong nhiều, thậm chí tới hàng chục giai đoạn. Hơn nữa ở mỗi lần như vậy người ta có thể sử dụng nhiều phương pháp để có cùng một phân tử. Vì thế số thực của những khả năng có thể lên đến hàng nghìn tỷ.

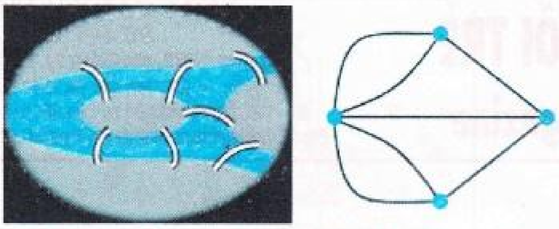
Các nhà hóa học dựa vào cảm tính để chọn một phản ứng mà theo họ hình như thích hợp nhất trong mỗi giai đoạn; nhưng điều đó không đảm bảo gì đi đến thành công của phân tử cuối cùng. Hơn nữa còn có thể xảy ra trường hợp một phân tử ngay từ đầu tỏ ra không quan trọng, nhưng lại thích hợp để làm đơn giản hóa những phản ứng hóa học của những giai đoạn tiếp sau. Vậy thì các nhà chuyên môn phải làm thế nào để tìm được con đường tổng hợp đơn giản nhất, hay là rẻ nhất?

Giải pháp đã tìm được vào thế kỷ 18 nhờ một bài toán khó xuất phát từ một vấn đề thực tế của thành phố Konigsberg (trong thời Xô Viết gọi là Kaliningrad). Đó là *Bài toán bảy chiếc cầu ở Königsberg*: "*Có hay không có con đường đi thăm toàn bộ thành phố bằng cách đi qua bảy chiếc cầu, với điều kiện mỗi chiếc cầu chỉ được đi qua một lần ?*". Năm 1735 nhà toán học tài năng *Léonard Euler* đã chứng minh rằng "*không thể có con đường đi qua 7 cầu mà mỗi cầu chỉ đi qua một lần*". Những kết quả do *Euler* tìm được làm xuất hiện một ngành Toán mới là "*Lý thuyết đồ thị*".

Đồ thị là một tập hợp những điểm gọi là đỉnh và những đoạn nối chúng lại với nhau gọi là cạnh. Ví dụ, *cây gia phả*: chúng ta và các bậc tiền bối gần xa là những đỉnh, và quan hệ gia tộc là các đoạn nối các điểm đó lại. Đối với *Euler*, các đảo và bờ của con sông là đỉnh, cầu là cạnh. Rất dễ để quan sát thấy rằng có ba đỉnh có ba bờ và một đỉnh có năm bờ (xem các hình vẽ). Theo *Euler*, cuộc dạo chơi (mỗi cầu chỉ đi qua một lần) có thể thực hiện được nếu đồ thị hoặc không có đỉnh nào, hoặc tồn tại hai đỉnh có một số lẻ cạnh.



Bản đồ Königsberg thời Euler, mô tả vị trí thực của bảy cây cầu và sông Pregel.



Mô hình về bài toán bảy chiếc cầu ở Königsberg

Vẻ đẹp của khoa học là ở chỗ sự phân tích những bài toán tưởng là "*vô nghĩa*", "*cho vui*", ví dụ như bài toán "*đi qua bảy cầu, mỗi cầu chỉ được đi qua một lần thôi* ", mà lại dẫn đến một cuộc cách mạng khoa học, ở đây là một ngành Toán học mới gọi là "*Lý thuyết đồ thị* ". Người ta cũng đã phát hiện ra rằng *Lý thuyết đồ thị* hoàn toàn có thể áp dụng được trong nhiều lĩnh vực, trong đó có Hóa học.

Chính vào thế kỷ 20 mà *Lý thuyết đồ thị* xuất hiện trong khái niệm và những mô hình của phân tử. Nhưng chính sự phát triển của Tin học vào thế kỷ 21 mà *Lý thuyết đồ thị* được áp dụng rất đắc lực trong Hóa học, Giáo sư *Marcin Fiallkowski* ở Viện Hàn lâm Khoa học Ba Lan, là tác giả chính của cuốn sách về "*Lý thuyết đồ thị trong Hóa học*". Trong thời kỳ ông viết tác phẩm này, ông vẫn còn là "*nghiên cứu sinh sau tiến sĩ*" ở Đại học Northwestern - Chicago, trong phòng thí nghiệm của Giáo sư *Bartosz Grzybowski*. "Người ta có thể biểu diễn hầu hết *Hóa học* dưới dạng đồ thị - theo lời giải thích của *Fialkowsski*. Mạng tạo ra rất lớn nhưng nhờ có Tin học, người ta có thể phân tích mạng này nhanh chóng và tìm ra những đặc tính của nó". Nhờ có sự phân tích mạng, người ta có thể làm việc trên tất cả các ngành của Hóa học cùng một lần, và đó là một cuộc cách mạng.

Trước hết, người ta phát hiện ra rằng nhân cứng của Hóa học hiện đại gồm có khoảng 340 phân tử và 500 phản ứng. Tập hợp nhỏ này đủ để tạo ra gần 80% tất cả những chất được dùng trong công nghiệp hóa học hiện nay. Hơn nữa người ta đã phát hiện ra rằng đồ thị biểu diễn tập hợp những phân tử và phản ứng của hóa học hiện tại là một *hình fractal*: mỗi nhánh rẽ có một cấu trúc giống như một cành mà từ đó nó xuất phát ra. Điều đó được giải thích bởi điều mà tất cả các nhà Hóa học có trong tay một số giới hạn phần tử cơ bản.

Sự phân tích những bài toán vô nghĩa có thể góp phần vào những cuộc cách mạng thật sự. Những nhà khoa học ở phòng thí nghiệm *Pr.Grzybowski* đã chú ý đến những thông số phụ, như là ngày tìm ra mỗi phân tử và mỗi phản ứng. Điều đó đã cho phép phân tích sự tiến triển của đồ thị. Các nhà nghiên cứu cũng nhận thấy rằng những đỉnh từ đó xuất phát nhiều cạnh, phát triển nhanh hơn. "Có nhiều phân tử giống như những sân bay lớn, với một số lớn sự liên hệ, theo lời giải thích của *M. Fialkowski*. Nhưng cũng có những phân tử khác, với số lượng nhiều hơn nữa, không làm cho các nhà hóa học quan tâm. Chúng được xem như là những sân bay địa phương". Các nhà khoa học cũng quan sát thấy rằng những đỉnh có nhiều cạnh có xu hướng phát triển bền vững, điều đó giúp họ dự kiến Hóa học trong tương lai đi theo hướng nào.

Muốn cho sự phân tích hữu hiệu hơn, trong nhiều năm qua các nhà khoa học ở Đại học Northwestern ở Chicago phát triển phần mềm *Chematica*, phần mềm này là một luận án được bảo vệ ở cấp quốc tế. Mục đích của nó là tối ưu hóa những phản ứng hóa học theo nhiều tiêu chuẩn. Ví dụ những tác giả của *Chematica* đã phân tích sự tổng hợp của một dược phẩm chống *cholesterol*, được thiết kế làm 19 giai đoạn. Nhờ có chương trình mà chỉ trong vài giây, các nhà khoa học đã phát hiện ra rằng số giai đoạn có thể rút xuống còn 5. Điều đó có thể kéo theo sự giảm bớt rất quan trọng của giá thành và thời gian sản xuất dược phẩm.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 446 (8.2014)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1. Lễ đón Đoàn Việt Nam dự thi IMO 2014 tại Sân bay Nội Bài.
Từ trái qua phải: Thầy *Lê Anh Vinh*, Thầy *Nguyễn Khắc Minh*, Cục trưởng Cục KT&KĐCLGD *Mai Văn Trinh*, em *Trần Hồng Quân*, em *Phạm Tuấn Huy*, em *Nguyễn Thế Hoàn*, Thứ trưởng Bộ GD&ĐT *Bùi Văn Ga*, em *Vương Nguyễn Thùy Dương*, em *Hồ Quốc Đăng Hưng*, em *Nguyễn Huy Tùng*, Thầy *Lê Bá Khánh Trình*.

TRƯỜNG THCS LÊ HỒNG PHONG - THÀNH PHỐ HUẾ

10 NĂM HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN

Địa chỉ: 214B Lý Nam Đế - TP Huế - ☎ 054.3519437 - Website: thcs-lhphong.thuathienhue.edu.vn

NGƯT Nguyễn Phước
Bí thư chi bộ, Hiệu trưởng nhà trường

Hội đồng Sư phạm nhà trường

Trường THCS Lê Hồng Phong nằm trên đường Lý Nam Đế, cách trung tâm thành phố Huế chừng 5 km về phía Tây. Trường khai giảng năm học đầu tiên vào năm 2004 – 2005 và mang tên *"Trường THCS Hương Long"* (theo Quyết định số 1173/QĐ-UB ngày 13/8/2004 của Chủ tịch UBND Thành phố Huế). Từ tháng 11/2005 Trường được đổi tên thành *"Trường THCS Lê Hồng Phong"*. Lúc mới thành lập, Trường có 16 phòng học được xây theo hình chữ L trên một bãi đất trống. Giờ đây, Trường đã có 26 phòng học được xây 3 tầng theo hình chữ U với cơ sở vật chất khang trang hiện đại: Có khu hiệu bộ, hội trường, sân vận động, phòng thí nghiệm, phòng vi tính, thư viện thông minh SAMSUNG,... Xung quanh trường được bao bọc bằng hệ thống bồn hoa, cây cảnh, non bộ, ... tạo nên một môi trường xanh - sạch- đẹp.

Khởi đầu với 26 giáo viên, 20 lớp học và 832 học sinh, đến nay, Trường đã có 70 cán bộ, giáo viên, với 28 lớp và 882 học sinh. Đội ngũ cán bộ giáo viên ngày càng được nâng cao về chất lượng: 100% giáo viên đạt chuẩn đào tạo, trong đó có trên 85% giáo viên đạt chuẩn trên đào tạo. Nhiều giáo viên của Trường đạt danh hiệu giáo viên giỏi các cấp (Cấp Tỉnh: 7GV, Cấp Thành phố: 25 GV) và nhiều giáo viên vinh dự được tặng *Bằng khen* của Thủ tướng Chính phủ, *Bằng khen* của Bộ GD&ĐT, *Bằng khen* của UBND Tỉnh Thừa Thiên-Huế. Đồng chí Hiệu trưởng nhà trường được Chủ tịch Nước phong tặng danh hiệu *Nhà giáo ưu tú* năm 2010.

Hằng năm, nhiều học sinh của Trường đã đạt giải cao trong các kì thi học sinh giỏi cấp Thành phố, cấp Tỉnh và nhiều học sinh thi đỗ vào trường chuyên Quốc học. Trong hội thi học sinh giỏi cấp Thành phố, Trường đã đạt giải *Nhất* toàn đoàn trong 4 năm, 3 năm giải *Nhì*, 2 năm giải *Ba*, và 1 năm giải *Khuyến khích*. Đặc biệt năm học 2012-2013, trường có 3 học sinh dẫn đầu môn *Máy tính cầm tay* 8, Toán 9, Văn 9 trong hội thi học sinh giỏi cấp Tỉnh.

Từ khi thành lập đến nay, nhà trường liên tục đạt danh hiệu *Tập thể lao động xuất sắc*, được Bộ GD&ĐT tặng *Bằng khen* năm học 2007-2008, UBND Tỉnh tặng *Cờ thi đua* và công nhận *Trường đạt chuẩn Quốc gia* năm học 2008-2009; Thủ tướng Chính phủ tặng *Bằng khen* năm học 2009-2010; Chủ tịch Nước trao tặng *Huân chương Lao động hạng Ba* năm học 2010-2011. Chi bộ nhà trường hằng năm đều được công nhận *Chi bộ trong sạch, vững mạnh*, được Thành ủy tặng *Giấy khen* về *Chi bộ tiêu biểu* 3 năm liền (2010-2013). Công đoàn nhà trường luôn được công nhận *Công đoàn vững mạnh và nhiều lần được nhận bằng khen của Liên Đoàn Lao Động Tỉnh,...*

Tự hào về đội ngũ cán bộ, giáo viên đầy năng lực và nhiệt huyết, tự hào về những thành tích đã đạt được, Trường THCS Lê Hồng Phong sẽ tiếp tục phấn đấu để đạt những thành tích tốt hơn nữa trong những năm học tới, xứng đáng với sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, xứng đáng với sự tin tưởng của nhân dân.

Đội tuyển HSG khối 8 (2013-2014) đoạt giải Nhất toàn đoàn trong Hội thi HSG cấp Thành phố

Học sinh tự học trong Thư viện thông minh

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT08M4

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2014

Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng