BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

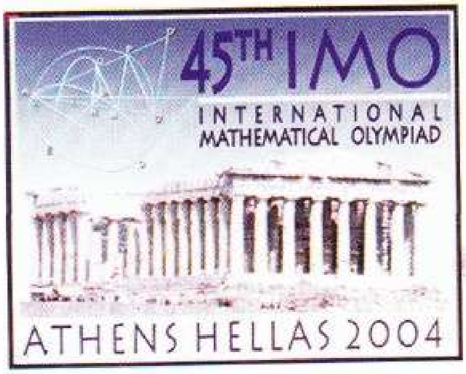
Toán học & Tuổi trẻ

8
2004

SỐ 326 - NĂM THỨ 41 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

CHÚC MỪNG THÀNH TÍCH CỦA ĐOÀN HỌC SINH VIỆT NAM DỰ THI IMO 2004 ATHENS



KÌ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 45 (IMO 2004 HELLAS)

ĐẶNG HÙNG THẮNG - NGUYỄN VŨ LƯƠNG

Kì thi Olympic Toán Quốc tế (IMO) lần thứ 45 diễn ra tại Athens, thủ đô của Hy Lạp (Hellas) từ ngày 6/7/2004 đến 18/7/2004. (Cũng tại đây vào đầu tháng 8/2004 sẽ diễn ra Thế vận hội Quốc tế 2004). Tham dự kì thi này có 486 thí sinh đến từ 85 nước và vùng lãnh thổ. Đây là kì thi có số nước cũng như số thí sinh tham dự đông nhất từ trước tới nay.

Đội tuyển Toán Việt Nam gồm 6 thí sinh :

Lê Hùng Việt Bảo (Lớp 12) và *Phạm Kim Hùng* (Lớp 11) khối PTCT-Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội ; *Nguyễn Kim Sơn* (Lớp 12), *Hứa Khắc Nam* (Lớp 12), và *Nguyễn Đức Thịnh* (Lớp 11) khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội ; *Nguyễn Minh Trường* (Lớp 12) THPT NK Trần Phú, Hải Phòng.

Đi cùng với 6 thí sinh là các thầy : PGS. TSKH *Đặng Hùng Thắng* (ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội) Trưởng đoàn, TS *Nguyễn Vũ Lương* (ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội) Phó Trưởng đoàn và bốn Quan sát viên : Th.S *Phạm Văn Hùng*, Th.S *Đỗ Thanh Sơn* (ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), Th.S *Doãn Minh Cường* (ĐHSP Hà Nội) và Chuyên viên *Nguyễn Khắc Minh* (Bộ GD-ĐT).

1. Diễn biến cuộc thi

Trong các ngày từ 7/7 đến 11/7 tại thành phố cổ Delphi, cách Athens 300km Ban Giám khảo Quốc tế (gồm 85 trưởng đoàn của các nước tham dự) đã họp kín để soạn thảo đề thi. Trước đó, trên cơ sở các bài toán đề xuất của các nước tham gia gửi tới (mỗi nước được đề xuất tối đa 6 bài, chủ nhà không được tham gia đề xuất đề), Ban đề thi của nước chủ nhà đã làm việc trong nhiều tháng để chọn ra 30 bài toán phù hợp nhất (theo quan điểm của Ban) và phân loại theo 4 chủ đề : Đại số, Hình học, Số học và Tổ hợp. 30 bài toán này (giấu tên nước đề xuất) được đưa ra cho Ban Giám khảo Quốc tế xem xét, thảo luận. Mỗi bài toán được đánh giá trên các tiêu chí : Mức độ khó dễ, vẻ đẹp và tính mới lạ của nó. Nếu bài toán nào được phát hiện là tương tự với một bài toán đã biết thì bị loại. Mục tiêu là chọn được 6 bài để làm đề thi trong hai ngày, trong đó mỗi ngày thi có một bài toán dễ (nhưng phải hay), một bài toán trung bình và một bài toán khó. Ngoài ra, còn yêu cầu mỗi chủ đề phải có tối thiểu một bài nhưng không quá hai bài.

Sau khi chọn ra được đề thi (bằng biểu quyết theo đa số), các trưởng đoàn thống nhất đáp án chấm, rồi tiến hành dịch đề thi ra tiếng nước mình. Các bản dịch được trưng bày công khai để tất cả các trưởng đoàn các nước cùng xem và kiểm tra.

Kì thi diễn ra vào hai ngày 12/7 và 13/7, mỗi ngày 4 giờ 30 phút (từ 9 giờ sáng tới 1 giờ 30 chiều). Sau khi các thí sinh thi xong, việc chấm thi được tiến hành ngay. Các trưởng phó đoàn phải gặp các thành viên của Ban chấm điểm (đều là người của nước chủ nhà) để bảo vệ bằng miệng các bài làm của học sinh nước mình rồi quyết định điểm số. Trong thời gian ấy các thí sinh được tổ chức đi tham quan giải trí và giao lưu văn hóa.

Theo truyền thống, IMO lần thứ 45 kết thúc bằng lễ trao giải trọng thể và buổi tiệc chia tay. Buổi tiệc tràn đầy tình hữu nghị và bầu không khí tươi vui giữa học sinh, thầy giáo của 85 nước từ khắp năm châu là một kỉ niệm đẹp khó quên đối với chúng tôi.

2. Kết quả cuộc thi

Căn cứ trên kết quả và quy chế, Hội đồng thi đã quyết định trao

• 45 Huy chương vàng (HCV) cho các thí sinh có số điểm từ 32 đến 42.

• 78 Huy chương bạc (HCB) cho các thí sinh có số điểm từ 24 đến 31.

• 120 Huy chương đồng (HCĐ) cho các thí sinh có số điểm từ 16 đến 23.

(mỗi bài tối đa được 7 điểm).

Kết quả của Đội tuyển Việt Nam như sau :

(Xem tiếp trang 6)

TRUNG HỌC CƠ SỞ

VẬN DỤNG TÍNH CHẤT CÁC GÓC KỀ NHAU LIÊN TIẾP ĐỂ TÍNH SỐ ĐO GÓC

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

Chúng ta bắt đầu từ một bài toán lớp 6 :

Bài toán 1. *Cho các góc AOB, BOC, COD, DOE đôi một không có điểm trong chung, trong đó số đo của góc sau gấp đôi số đo của góc liền trước. Tính số đo của góc AOB biết rằng $\widehat{AOE} = 150^o$.*

Lời giải của một học sinh:

Đặt $\widehat{AOB} = x$ (h. 1). Ta có

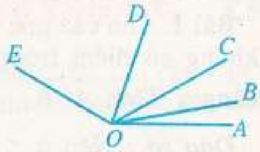
$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}+\widehat{DOE} = \widehat{AOE}$

$\Rightarrow x + 2x + 4x + 8x = 150^o$

$\Rightarrow 15x = 150^o$

$\Rightarrow x = 10^o$.

Vậy $\widehat{AOB} = 10^o$.



Hình 1

Chú ý. Lời giải trên chỉ đúng trong trường hợp các tia *OA, OB, OC, OD, OE* đều nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia *OA*. Trong trường hợp các tia đó nằm trong cả hai nửa mặt phẳng có bờ chứa tia *OA* (h. 2) thì :

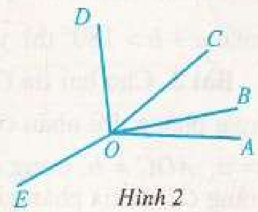
$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}+\widehat{DOE} = 360^o - \widehat{AOE}$

$\Rightarrow x + 2x + 4x + 8x = 360^o - 150^o$

$\Rightarrow 15x = 210^o$

$\Rightarrow x = 14^o$

Khi đó $\widehat{AOB} = 14^o$.

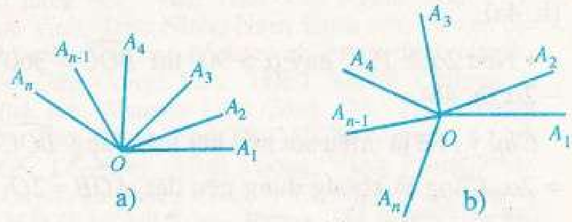


Hình 2

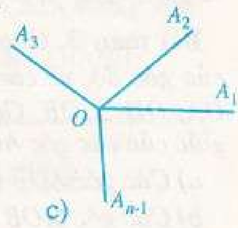
Như vậy khi giải phải xét hai trường hợp và bài toán 1 có hai nghiệm.

Có thể diễn đạt sự kiện trên một cách tổng quát bằng cách dùng khái niệm *các góc kề nhau liên tiếp.*

Ta gọi các góc A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, ..., $A_{n-1}OA_n$ đôi một không có điểm trong chung (h. 3) là các góc kề nhau liên tiếp. Cạnh OA_1 gọi là *cạnh đầu* và OA_n gọi là *cạnh cuối.*



Hình 3



Vì các góc kề nhau liên tiếp không có điểm trong chung nên số đo các góc đều dương và tổng số đo của chúng không lớn hơn 360^o. Xét ba trường hợp ở hình 3 ta rút ra các góc kề nhau liên tiếp có tính chất sau :

Tính chất. *Nếu các góc kề nhau liên tiếp :*

1) có góc tạo bởi cạnh đầu và cạnh cuối bằng α ($0^o \le \alpha \le 180^o$) thì tổng các góc đó hoặc bằng α khi $\alpha > 0^o$, hoặc bằng $360^o - \alpha$ khi $\alpha \ge 0^o$.

2) có tổng các số đo bằng α ($0^o < \alpha \le 360^o$) thì góc tạo bởi cạnh đầu và cạnh cuối hoặc bằng α nếu $0^o < \alpha \le 180^o$, hoặc bằng $360^o - \alpha$ nếu $180^o < \alpha \le 360^o$.

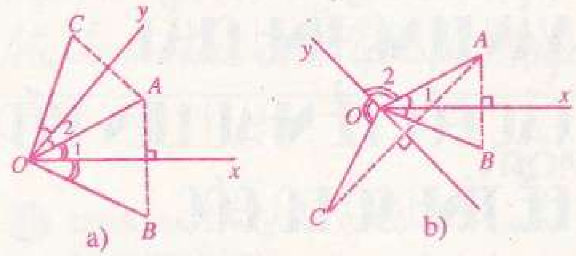
Khi giải bài toán 1 ta đã sử dụng tính chất 1.

Chúng ta cùng vận dụng tính chất trên để giải các bài toán sau :

Bài toán 2. *Cho điểm A nằm trong góc xOy với $\widehat{xOy} = \alpha$. Gọi B là điểm đối xứng với A qua Ox, gọi C là điểm đối xứng với A qua Oy. Tính $\widehat{BOC}$.*

Giải. (h. 4) Đặt $\widehat{BOx} = \widehat{xOA} = \widehat{O_1}$, $\widehat{AOy} = \widehat{yOC} = \widehat{O_2}$. Ta có $\widehat{BOx}+\widehat{xOA}+\widehat{AOy}+\widehat{yOC} = 2(\widehat{O}_1+\widehat{O}_2) = 2\widehat{xOy} = 2\alpha$.

Theo tính chất các góc kề nhau liên tiếp :



Hình 4

• Nếu $2\alpha \le 180^\circ$ hay $\alpha \le 90^\circ$ thì $\widehat{BOC} = 2\alpha$ (h. 4a).

• Nếu $2\alpha \ge 180^\circ$ hay $\alpha > 90^\circ$ thì $\widehat{BOC} = 360^\circ - 2\alpha$ (h. 4b)

Chú ý : Sẽ là thiếu sót nếu kết luận rằng $\widehat{BOC} = 2\alpha$. Cũng là không đúng nếu đặt $\widehat{AOB} = 2\widehat{O_1}$ và $\widehat{AOC}=2\widehat{O_2}$ vì có thể $\widehat{O_1}$ hoặc $\hat{O}_2$ lớn hơn 90° !

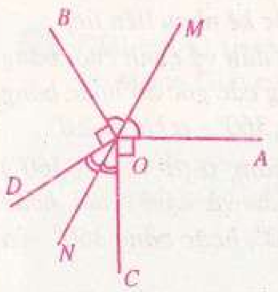
Bài toán 3. *Cho góc tù AOB. Ở miền ngoài của góc đó, vẽ các tia OC, OD sao cho $OC \perp OA$, $OD \perp OB$. Gọi OM, ON là các tia phân giác của các góc AOB, COD. Chứng minh rằng:*

a) Các góc AOB và COD bù nhau.

b) Các góc MOB và DON phụ nhau.

c) OM, ON là hai tia đối nhau.

Giải. (h. 5)



Hình 5

a) Giả sử $\widehat{AOB} = \alpha$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Vì $\widehat{COA}+\widehat{AOB}+\widehat{BOD} = 90^\circ + \alpha + 90^\circ = 180^\circ + \alpha < 360^\circ$ nên các góc *COA, AOB, BOD* là ba góc kề nhau liên tiếp (không có điểm trong chung). Theo tính chất nêu trên ta có $\widehat{COD} = 360^\circ - (180^\circ + \alpha) = 180^\circ - \alpha$ hay $\widehat{AOB}+\widehat{COD} = 180^\circ$. Vậy các góc *AOB* và *COD* bù nhau.

b) $\widehat{MOB}+\widehat{DON} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}+\dfrac{\widehat{COD}}{2} =$

$= \dfrac{\widehat{AOB}+\widehat{COD}}{2} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$

Vậy các góc *MOB* và *DON* phụ nhau.

c) *MOB, BOD, DON* là các góc kề nhau liên tiếp $\widehat{MOB}+\widehat{BOD}+\widehat{DON} = (\widehat{MOB}+\widehat{DON}) + \widehat{BOD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Theo tính chất trên $\widehat{MON} = 180^\circ$

Vậy *OM, ON* là hai tia đối nhau.

Chú ý : 1) Sẽ là không chuẩn xác nếu viết $\widehat{COA}+\widehat{AOB}+\widehat{BOD}+\widehat{DOC} = 360^\circ$ vì chưa chỉ ra hai góc *COA* và *BOD* không có điểm trong chung ! (chẳng hạn ở đề bài cho $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = \beta$ mà $\alpha + 2\beta > 360^\circ$).

2) Sẽ là thiếu sót nếu viết $\widehat{MON} = \widehat{MOB} + \widehat{BOD} + \widehat{DON}$ bằng 180°, bởi vì trước khi kết luận rằng $\widehat{MON}= \widehat{MOB}+\widehat{BOD}+\widehat{DON}$, phải tính được $\widehat{MOB}+\widehat{BOD}+\widehat{DON}$ nhỏ hơn hoặc bằng 180°, nếu tổng ngày (bằng α) lớn hơn 180° thì $\widehat{MON} = 360^\circ - \alpha$.

Như vậy,tính chất của các góc kề nhau liên tiếp đã giúp ta giải nhiều bài toán về tính số đo góc một cách thuận lợi, không cần phải xét đến điều kiện lần lượt từng tia nằm giữa hai tia khác và không bỏ sót các trường hợp có thể xảy ra của bài toán.

Các bài toán sau dành cho bạn đọc tự giải :

Bài 1. Cho các góc *AOB, BOC, COD* đôi một không có điểm trong chung và đều có số đo bằng α. Tính $\widehat{AOB}$.

Đáp số : Nếu $\alpha \le 60^\circ$ thì $\widehat{AOD} = 3\alpha$, nếu $\alpha > 60^\circ$ thì $\widehat{AOD} = 360^\circ - 3\alpha$.

Bài 2. Cho hai tia *Oy, Oz* nằm trong hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia *Ox* với $\widehat{xOy} = a$, $\widehat{yOz} = b$. Tính $\widehat{yOz}$.

Đáp số : Nếu $a + b \le 180^\circ$ thì $\widehat{yOz} = a + b$, nếu $a + b > 180^\circ$ thì $\widehat{yOz} = 360^\circ - (a + b)$.

Bài 3. Cho hai tia *OB, OC* nằm trong hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia *OA* và $\widehat{AOB} = a$, $\widehat{AOC} = b$, trong đó $a > b$. Tính $\widehat{AOD}$ biết rằng *OD* là tia phân giác của góc *BOC*.

Đáp số : $\widehat{AOD} = \dfrac{a-b}{2}$ nếu $a + b \le 180^\circ$.

$\widehat{AOD} = 180^\circ - \dfrac{a-b}{2}$ nếu $a + b > 180^\circ$

Bài 4. Cho các góc *AOB, BOC, COD*đôi một không có điểm trong chung, trong đó góc sau lớn hơn góc liền trước là 20°. Tính số đo của mỗi góc đó.

Đáp số : 24°, 44°, 64° hoặc 56°, 76°, 96°.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9 TỈNH THỪA THIÊN - HUẾ NĂM HỌC 2003 - 2004

VÒNG 1

(Thời gian làm bài : 120 phút)

Bài 1. (*3 điểm*) a) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+z = 6 \\ xy+yz-zx = -1 \\ x^2+y^2+z^2 = 14 \end{cases}$$

b) Cho hai số x, y thỏa mãn đẳng thức :

$$8x^2+y^2+\frac{1}{4x^2}=4$$

Xác định x, y để tích xy đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2. (*3,5 điểm*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi M là trung điểm của cạnh BC, H là trực tâm tam giác ABC và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC.

Tính độ dài AK và diện tích tam giác ABC biết rằng : $OM = HK = \frac{1}{4}KM$ và $AM = 30$cm.

Bài 3. (*3,5 điểm*)

a) Tìm m để cho phương trình :

$(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$ có nghiệm dương .

b) Giải phương trình :

$x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$

VÒNG 2

(Thời gian làm bài : 120 phút)

Bài 4. (*3, 5 điểm*)

a) Giải phương trình :

$$\frac{x^2+\sqrt{3}}{x+\sqrt{x^2+\sqrt{3}}}+\frac{x^2-\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2-\sqrt{3}}}=x$$

b) Chứng minh :

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\geq\frac{2}{1+ab} \text{ với } a\geq 1, b\geq 1.$$

Bài 5. (*3,5 điểm*)

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). I là trung điểm của BC, M là điểm trên đoạn CI (M khác C và I), đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại D. Tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMI tại M cắt các đường thẳng BD, DC lần lượt tại P và Q.

Chứng minh $DM.IA = MP.IB$ và tính tỉ số $\frac{MP}{MQ}$.

Bài 6. (*3 điểm*)

a) Giải phương trình : $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[3]{x+8}=-x^3+1$

b) Tìm các số x, y, z nguyên dương thỏa mãn:

$$2(y+z) = x(yz-1)$$

CÙNG SÁNG TÁC BIỂU TƯỢNG TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Hướng tới kỉ niệm 40 năm *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (Mathematics and Youth Magazine)* Tòa soạn tổ chức chọn biểu tượng (lôgô) của THTT. Mời các bạn tham gia sáng tác biểu tượng cho Tạp chí THTT.

Yêu cầu :

- Có hình vẽ toán và chữ tiếng Việt hoặc tiếng Anh thể hiện tên tạp chí (có thể viết tắt THTT, MYM). Hình nên đơn giản.
- Càng ít màu càng tốt.
- Có thể in trên báo và làm huy hiệu.
- Không có con số 40. Không có dấu hiệu cá nhân trên biểu tượng

Hình thức thể hiện :

Trên một tờ giấy A4 không có dòng kẻ :

- Một hình trong khuôn khổ 4 × 4 cm
- Một hình nhỏ trong khuôn khổ không quá 2 × 2cm.
- Có bản thuyết minh nội dung không quá 200 chữ.
- Ghi đầy đủ họ tên, tuổi, giới tính, nghề nghiệp, địa chỉ của người vẽ ở phía dưới.

Thời gian nhận bản thảo:

Chậm nhất 30.9.2004 (theo dấu *bưu điện*)

Ngoài phong bì đề rõ :

SÁNG TÁC BIỂU TƯỢNG THTT

Tất cả các hình vẽ đẹp đều được quà tặng của tòa soạn. Hình được chọn sẽ có giải thưởng và công bố tên tác giả. Mong các bạn xa gần hưởng ứng. Trân trọng cảm ơn.

TC THTT (MYM)

SINGAPORE MATHEMATICAL OLYMPIAD (SMO) 2004

LTS : *Cuộc thi Olympic toán Singapo do Hội Toán học Singapo tổ chức. Năm nay cuộc thi mời thêm học sinh các nước Đông Nam Á tham gia trong đó có Việt Nam. Có hai đề thi ứng với các độ tuổi khác nhau. Senior Section là dành cho các thí sinh sinh sau ngày 1.1.1988. Junior Section là dành cho các thí sinh sinh sau ngày 1.1.1990. Ngày 3.6.2004 hai cuộc thi đã diễn ra đồng thời ở Singapo cùng các nước được mời và được coi là vòng 1. Học sinh phải "đọc" đề thi trực tiếp bằng tiếng Anh và lời giải cũng viết bằng tiếng Anh. Tất cả mỗi đề có 35 câu hỏi trong đó 10 câu đầu là trắc nghiệm, 25 câu còn lại phải trình bày lời giải.* ***Thí sinh không được sử dụng máy tính.*** *Thời gian làm bài là 180 phút. Bài làm của học sinh do Singapo chấm và kết quả được công bố vào tháng 9.2004. Khoảng 5% số học sinh dự thi có điểm cao nhất được cấp bằng chứng nhận và một tỉ lệ nhất định do Ban tổ chức quyết định được dự thi tiếp vòng sau.*

Sau đây là đề thi SMO cho Senior Section.

1. Find the smallest positive integer n such that $5^n > 1000n$.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

2. Find the value of $\dfrac{12000000}{300001^2 - 299999^2}$

(A) 100000 (B) 10000 (C) 1000
(D) 100 (E) 10

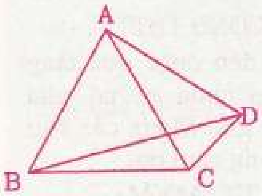
3. Peter left home at 8 am to keep an appointment in Malacca 360 km away. If he drove at an average speed of V km/h, he would be a quarter hour late for his appointment. However, if he increased his average speed by 10km/h, he would be a quarter hour early. What time is his appointment ?

(A) 11:45 am (B) 12 noon (C) 12:15pm
(D) 12:30 pm (E) : 12:45pm

4. Find the sum of the last two digits of 9^{103}.

(A) 11 (B) : 12 (C) 13
(D) 14 (E) : 15.

5. In the following diagram, ΔABC is an equilateral triangle and $AC = AD$. Suppose that $\widehat{CDB} = x^o$. Find the value of x.



(A) 24 (B) 30 (C) 36
(D) 40 (E) 45

6. Consider the polynomial $f(x) = x^2 + ax + b$, where a, b are real constants. If $f(1) = 1$ and $f(2) = 2$, what is the value of $f(4)$?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

7. How many real numbers x satisfy the equation

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-7x-1}=\frac{x^2-x-6}{2x^2+x+15}\ ?$$

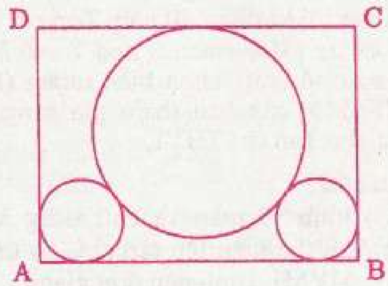
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

8. Initially both John and Peter have \$100 each. On the first day, John gives \$0.10 to Peter. On the second day, Peter gives \$0.30 to John. On the third day, John gives \$0.50 to Peter and so on. In particular, the person who was given money on the previous day gives \$0.20 more than what he got the previous day to the other person. How much money will John have at the end of the 101st day ?

(A) \$79.90 (B) \$89.90 (C) \$99.90
(D) \$109.90 (E) \$119.90

9. The diagram below shows a rectangle $ABCD$ and 2 small identical circles of radius 5 cm and a big circle of radius 8cm. As shown in the diagram, the sides of the rectangle are tangents to the circles, and the two small circles touch the big circle at 2 points. Suppose AB = 34cm, and the area of the rectangle $ABCD$ is x cm^2. Find the value of x.

(A) 578 (B) 612 (C) 646
(D) 680 (E) 714



10. Let n be an integer. If the second last digit of n^2 is odd, what is the last digit of n^2 ?

(A) 1 (B) 4 (C) 5
(D) 6 (E) none of the above

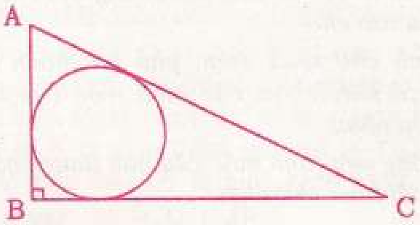
11. Suppose x and y are two real numbers such that $x - y = 8$ and $x^2 + y^2 = 194$. Find the value of xy.

12. Suppose that $|x + y - 2| + (x - y + 1)^2 = 0$. Find the value of $y - x$.

13. When 5 new classrooms were built in a school, the average class size was reduced by 6. When another 5 classrooms were built, the average class size was reduced by another 4. If the number of students in the school remained the same throughout, how many students were there in the school ?

14. A book has n pages. The book is numbered from page 1 to page n. Mary added up all the page numbers and got the sum equal to 3250. However she added up the numbers wrongly because there is a particular page number that she added up twice. What is the page number that she counted twice in her calculation ?

15. In the diagram below, ΔABC is a right-angled triangle with right angle at B. A circle of radius r cm is inscribed inside the triangle so that the three sides of the triangle are tangents to the circle. Suppose AB = 18 cm and BC = 24cm. Find the value of r.



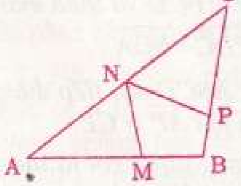
16. Find the largest prime factor of 99999744.

17. Suppose that $\sec^6 x = 49 + \tan^6 x$ and $0^\circ < x < 90^\circ$. Find the value of $\sec x \tan x$.

18. What is the product of the last two digits of 2004^{2004} ?

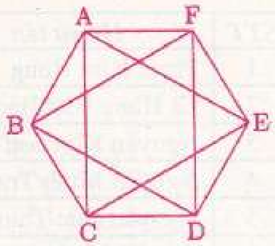
19. Simplify $144(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}})$.

20. Suppose α and β are two angles such that
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\sin\beta = 3.$$
Find the value of $(1 + \cos\alpha)^2 + (1 + \cos\beta)^2$.



21. In the diagram below, $\widehat{ABC} = 100^\circ$, $AM = AN$ and $CN = CP$. Suppose that $\widehat{MNP} = x^\circ$. Find the value of x.

22. Find the two-digit integer N such that $10 < N < 40$, and the sum of the digits of N is equal to the sum of the digits of the product when N is multiplied by any positive one-digit integer.



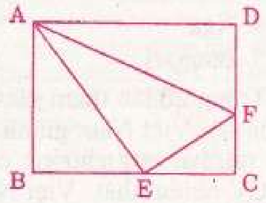
23. In the diagram below, $ABCDEF$ is a regular hexagon with area 54cm^2. Suppose the area of the hexagonal region common to both triangles ΔACE and ΔBDF is $Y\text{cm}^2$. Find the value of Y.

24. Let x, y be real numbers such that $x+y+|x-y| = -148$. Find the smallest possible value of xy.

25. Find the value of
$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + ... + \sin^2 360^\circ$

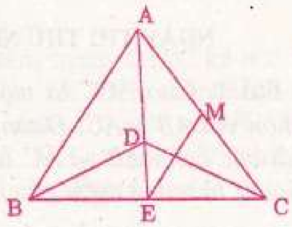
26. Suppose a and b are the roots of the quadratic equation $x^2 + (\sin 10^\circ)x + 1 = 0$, and c and d are the roots of the equation $x^2 + (\cos 10^\circ)x - 1 = 0$. Find the value of
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}.$$

27. Simplify
$$\sqrt{\log_2 3\times\log_2 12\times\log_2 48\times\log_2 192+16} - \log_2 12\times\log_2 48+10$$



28. In the diagram below, E and F lie on the sides BC and CD of the rectangle $ABCD$ respectively. Suppose that AE = 16cm, EF = 12cm, AF = 20cm, and the area of the trapezium $ABCF$ is x cm^2. Find the largest possible value of x.

29. Five cards are numbered 1, 2, 3, 6, 6 respectively. Suppose those cards with the number 6 can also be used to represent the number 9. Find the number of positive integers that can be formed with some or all of the cards.



30. In the diagram below, E is the midpoint of BC, and M is the midpoint of AC. Suppose that D is a point on AE such that $AD = BD = CD$ = 169cm, and EM = 156cm. If the length of DE is x cm, find the value of x.

(Xem tiếp trang 24)

KÌ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 45 *(Tiếp bìa 2)*

STT	*Họ và tên*	*B1*	*B2*	*B3*	*B4*	*B5*	*B6*	*Điểm*	*Huy chương*
1	Phạm Kim Hùng	7	7	2	7	7	7	**37**	HCV
2	Lê Hùng Việt Bảo	6	7	2	7	7	7	**36**	HCV
3	Nguyễn Kim Sơn	6	4	4	7	7	7	**35**	HCV
4	Nguyễn Minh Trường	7	7	0	7	7	7	**35**	HCV
5	Nguyễn Đức Thịnh	6	2	2	7	3	7	**27**	HCB
6	Hứa Khắc Nam	6	1	3	7	7	2	**26**	HCB

Sau đây là thứ tự của 5 đội đầu tiên xếp hạng theo tổng số điểm.

1. Trung Quốc 220 6 HCV
2. Mỹ 212 5 HCV 1 HCB
3. Nga 205 4 HCV 1 HCB 1 HCĐ
4. Việt Nam 196 4 HCV 2 HCB
5. Bungari 194 3 HCV 3 HCB

Ngoài ra người ta còn xếp hạng dựa vào huy chương theo công thức : Số điểm = (số HCV) × 1 + (số HCB) × (0,75) + (số HCĐ) × (0,5). Với chỉ tiêu đó thì kết quả xếp hạng theo huy chương là

1. Trung Quốc 6 điểm
2. Mỹ 5,75 điểm
3. Việt Nam 5,5 điểm
4. Nga 5,25 điểm
5. Bungari 5,25 điểm

Trong 28 lần tham gia thi IMO, đây là lần đầu tiên đội Việt Nam giành được 4 HCV trong một kì thi, hai huy chương còn lại là Bạc. Đó là số HCV nhiều nhất Việt Nam đạt được trong một kì thi IMO cho đến nay.

Như vậy là cho đến năm nay Việt Nam đã có 153 huy chương, trong đó 35 HC Vàng, 70 HC Bạc và 48 HC Đồng. Những học sinh được 2 huy chương Vàng trong hai kì thi là : *Ngô Bảo Châu, Ngô Đắc Tuấn, Đào Hải Long, Vũ Ngọc Minh, Lê Hùng Việt Bảo.*

Dưới đây là đề thi của IMO 2004.

NGÀY THI THỨ NHẤT. 12/7/2004

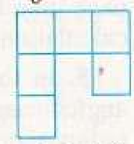
Bài 1. *Cho ABC là một tam giác có ba góc nhọn với $AB \neq AC$. Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB và AC tương ứng tại M và N. Gọi O là trung điểm của cạnh BC. Đường phân giác trong của các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{MON}$ cắt nhau tại R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMR và CNR có một điểm chung nằm trên cạnh BC.*

Bài 2. *Tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn đẳng thức*

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

với mọi số thực a, b, c mà $ab+bc+ca = 0$

Bài 3. *Một hình **móc câu** là một hình được tạo thành từ 6 hình vuông đơn vị và có dạng như hình bên hoặc một hình bất kì nhận được từ hình trên bởi phép quay hay phép lấy đối xứng.*



Xác định tất cả các hình chữ nhật kích thước $m \times n$ mà ta có thể phủ kín chúng bởi các hình móc câu sao cho

• Hình chữ nhật được phủ kín hoàn toàn, không có khe hở và các hình móc câu không chờm lên nhau.

• Không một hình móc câu nào được chờm ra bên ngoài hình chữ nhật.

NGÀY THI THỨ HAI. 13/7/2004

Bài 4. *Cho số nguyên dương $n \geq 3$. Giả sử $t_1, t_2, ..., t_n$ là các số thực dương sao cho*

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + ... + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_n}\right)$$

Chứng minh rằng t_i, t_j, t_k là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi i, j, k với $1 \leq i < j < k \leq n$.

Bài 5. *Cho một tứ giác lồi ABCD trong đó đường chéo BD không là đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$ và góc $\widehat{CDA}$. Giả sử P là một điểm nằm bên trong tứ giác ABCD và thỏa mãn điều kiện $\widehat{PBC} = \widehat{DBA}$ và $\widehat{PDC} = \widehat{BDA}$.*

Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp được trong đường tròn khi và chỉ khi $AP = CP$.

Bài 6. *Một số nguyên dương được gọi là **luận phiên** nếu trong biểu diễn thập phân của nó, hai chữ số bất kì đứng cạnh nhau đều khác tính chẵn lẻ. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n có một bội số là một số luân phiên.*

Trong số 325 (tháng 7.2004) bài ***Bàn luận về cách giải đề thi tuyển sinh đại học Môn Toán – Khối A*** *đã đề cập đến các câu 1, 2, 3, 4. Bài viết này tiếp tục bàn đến câu 5 của đề thi đó. Vấn đề được trình bày ở bài báo này là sử dụng phương pháp hàm số để giải* ***Câu 5*** *của đề thi khối A và một số bài ở đề khối B và D. Phần tiếp theo để bạn đọc, nhất là các bạn sẽ thi năm sau, có cái nhìn sâu sắc hơn, chúng tôi cũng nêu thêm các cách giải khác của câu 5 đề khối A năm nay.*

CÂU 5 ĐỀ THI ĐẠI HỌC VÀ PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

ĐẶNG THANH HẢI
(Học viện PKKQ, Hà Tây)

Bài toán 1. (câu V – Đề khối A)

Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện :

$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3$ (1)

Tính ba góc của tam giác ABC.

Lời giải. Từ giả thiết :

$0 < A \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{A}{2} \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \sin\frac{A}{2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có

$(1) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 A + 2\sqrt{2}(\cos B + \cos C) = 3$

$\Leftrightarrow -\sin^2 A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 1$ (2)

$2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}$ (3)

Từ (2), (3) có $-\sin^2 A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 1 \ge 0$

Đặt $t = \sin\frac{A}{2}$ thì $-4t^2(1-t^2) + 2\sqrt{2}t - 1 \ge 0$ (4)

Xét hàm $f(t) = 4t^4 - 4t^2 + 2\sqrt{2}t - 1$, theo (4) phải có $f(t) \ge 0$ với $0 < t \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ (5)

Tính $f'(t) = 16t^3 - 8t + 2\sqrt{2}$

$f''(t) = 48t^2 - 8 \Rightarrow f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ta có $f''(t) < 0$ trong $(0, \frac{1}{\sqrt{6}})$ và $f''(t) > 0$ trong $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Suy ra $f'(t) \ge f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \Rightarrow f(t) \le f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

Từ đó thì điều kiện (5) xảy ra chỉ khi $f(t) = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$.

Thay vào (2) được $\cos\frac{B-C}{2} = 1 \Rightarrow B = C = \frac{\pi}{4}$.

Nhận xét 1. Giả thiết của bài toán (BT) cho biểu thức đối xứng của hai góc B và C, vì vậy có thể dự đoán ΔABC cân tại đỉnh A. Một cách giải các BT dạng này là sử dụng các công thức biến đổi lượng giác để đưa biểu thức $f(A, B, C) = 0$ về $g(A) = 0$ hoặc $g(A) \ge 0$, hoặc $g(A) \le 0$. Từ đó bằng công cụ đạo hàm, khảo sát hàm $g(A)$ và tìm ra lời giải cho bài toán.

Bài luyện tập 1: Tính ba góc của tam giác ABC nếu $\cos A + \sqrt{3}(\cos B + \cos C) = \frac{5}{2}$

Bài luyện tập 2. Cho tam giác ABC có $A = \mathrm{Max}\{A, B, C\}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $S = \sin 2B + \sin 2C + \frac{2}{\sin A}$

Bài toán 2. (Câu V – Đề khối B)

Xác định m để phương trình sau có nghiệm :

$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ (1)

Lời giải. ĐK : $-1 \le x \le 1$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ thì $t \ge 0$

và $t^2 = 2-2\sqrt{1-x^4} \le 2$ (*)

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le t \le \sqrt{2} \\ 2\sqrt{1-x^4} = 2-t^2 \end{cases} \quad (1)$$

$\Leftrightarrow m(t+2) = 2 - t^2 + t$ (2)

Xét hàm $f(t) = \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$

Tính $f'(t) = \dfrac{-t(t+4)}{(t+2)^2} < 0, \forall t \in (0,\sqrt{2})$

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $[0,\sqrt{2}] \Rightarrow$ hàm $f(t)$ có tập giá trị là $[f(\sqrt{2}), f(0)] = [\sqrt{2}-1, 1]$ (3)

Mặt khác phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m$ thuộc tập giá trị của hàm $f(t)$. Từ (3) suy ra $\sqrt{2}-1 \le m \le 1$, đó là các giá trị m cần tìm.

Nhận xét 2. • Cần đổi biến để chuyển PT (1) về PT $m = f(t)$ đơn giản hơn. Để xác định m sao cho phương trình $m = f(t)$ có nghiệm với t thuộc miền D nào đó, ta sử dụng công cụ đạo hàm tìm được tập giá trị của hàm $f(t)$ với $t \in D$, và từ đó tìm được các giá trị của tham số m.

• Sai lầm dễ mắc ở BT này là các bạn không tìm đúng điều kiện (*) cho biến mới t nên dẫn đến đáp số sai.

Bài luyện tập 3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{4-x^2} = mx - m + 2$

Bài toán 3. (Câu V - Đề khối D)

Chứng minh rằng phương trình sau có đúng 1 nghiệm : $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ (1)

Lời giải. Ta có (1) $\Leftrightarrow x^5 = (x+1)^2$ (2)

Do $(x+1)^2 \ge 0$ nên $x^5 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$

Với $0 \le x < 1$ thì vế trái nhỏ hơn vế phải suy ra (2) vô nghiệm. Do đó chỉ xét $x \ge 1$. Xét hàm $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1, \forall x \ge 1, f'(x) = 5x^4 - 2x - 2 = 2x(x^3 - 1) + 2(x^4 - 1) + x^4 > 0, \forall x \ge 1 \Rightarrow$ $f(x)$ đồng biến trên $[1, +\infty)$ và $f(1).f(2) < 0$. Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất trong $(1, 2)$.

Nhận xét 3. • Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm $x \in D$ ta làm theo 2 bước sau :

• Chứng tỏ $f(x) = 0$ có nghiệm $x_o \in D$ (dựa vào tính chất liên tục của $f(x)$ trên miền D và chỉ ra $f(x_1).f(x_2) < 0$ với $x_1, x_2 \in D$).

• Bằng công cụ đạo hàm, chứng tỏ $f(x)$ đơn điệu trên miền D. Từ đó suy ra nghiệm x_o là duy nhất.

Bài toán 3 có thể giải theo hướng : Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^5}{(x+1)^2} - 1$ trên $[0, +\infty)$ sau đó chứng minh $f(x)$ đồng biến trên $[0, +\infty)$ và $f(0).f(2) < 0$.

Nhận xét 4. Sai lầm dễ mắc ở bài toán 3 là các bạn xét hàm $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ có $f(1).f(2) < 0$, từ tính chất hàm liên tục thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in (1, 2)$. Lại có $f'(x) = 5x^4 - 2x - 2$; $f''(x) = 20x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$. Lập bảng xét dấu $f''(x)$ thấy $f'(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}, +\infty\right)$ $\Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $(1, 2) \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 1 > 0, \forall x \in (1, 2) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1, 2)$ và từ đó suy ra tính duy nhất của nghiệm. Sai lầm ở chỗ các bạn mới chỉ xét tính đơn điệu của $f(x)$ trên $(1, 2)$.

Bài luyện tập 4. Cho phương trình $x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x = 1$ với $n \in N^*$. Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm dương duy nhất x_n và tìm giới hạn của x_n khi n tăng lên vô hạn

Ngoài phương pháp hàm số (cách 1), có thể giải bài toán 1 theo một số cách khác :

Cách 2. Từ giả thiết có

$$1 + \sin^2 A - 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 0$$

(xem lời giải cách 1 BT 1)

$$\Leftrightarrow 1 + 4\sin^2\frac{A}{2}\left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right) - 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 + 2\sin^2\frac{A}{2}\cos A + \sin^2\frac{B-C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2} = 0 \\ \cos A = 0 \text{ (do } \cos A \ge 0 \text{ vì } 0 < A \le \frac{\pi}{2}) \\ \sin\frac{B-C}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \text{ và } B = C = \frac{\pi}{4}.$$

Cách 3. Giả thiết tương đương với

$$2 + 2(1 - \cos^2 A) - 2\sqrt{2}\cos B - 2\sqrt{2}\cos C = 0$$

$\Leftrightarrow 1 + (\cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C) - \sqrt{2}\cos B - \sqrt{2}\cos C = 0$ (1)

(sử dụng : $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$)

$(1) \Leftrightarrow \left(\cos B - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\cos C - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\cos A.\cos B.\cos C = 0$

mà ΔABC không tù nên $\cos A.\cos B.\cos C \ge 0$, do đó $\cos B = \cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos A = 0$. Suy ra $B = C = \frac{\pi}{4}$ và $A = \frac{\pi}{2}$

Cách 4. Từ biểu thức $\sin^2 A - 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} + 1 \le 0$ (xem lời giải cách 1 BT1) biến đổi ta được

$$\sin^2 A - \sqrt{2}.\frac{1}{\cos(A/2)}.\sin A + 1 \le 0 \quad (2)$$

Đặt $x = \sin A$. Từ (2) bất phương trình $x^2 - \frac{\sqrt{2}}{\cos(A/2)}x + 1 \le 0$ phải có nghiệm.

Suy ra $\Delta = \frac{2}{\cos^2(A/2)} - 4 \ge 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos^2\frac{A}{2} \ge 0$

$\Leftrightarrow \cos A \le 0$ mà $\cos A \ge 0$ do $0 < A \le \frac{\pi}{2}$. Vậy phải có $A = \frac{\pi}{2}$.

Từ đó (xem lời giải cách 1 BT 1) $B = C = \frac{\pi}{4}$

Cách 5. Đặt $M = \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3$

$= 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 4$.

Vì $\sin\frac{A}{2} > 0$; $\cos\frac{B-C}{2} \le 1$ nên $M \le 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4$. Từ giả thiết ΔABC không tù có $\cos A \ge 0$, $\cos^2 A \le \cos A$ suy ra

$M \le 2\cos A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4 =$

$= 2\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4$

$= -2\left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 1\right)^2 \le 0$. Do đó $M \le 0$.

Theo giả thiết $M = 0$, suy ra

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = C = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Cách 6. Ta có :

$1 + \sin^2 A - 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \sin^2 A = 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$ (3)

Ta có $2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}$ (4)

Lại có : $1 + \sin^2 A \ge 2\sin A = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \ge 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}$ (5)

Từ (3) (4) (5) có

$1 + \sin^2 A = 2\sin A = 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}$ suy ra $\sin A = 1$ và $\cos\frac{B-C}{2} = 1$.

Từ đó $A = \frac{\pi}{2}$ và $B = C = \frac{\pi}{4}$.

Nhận xét 5. Trong cách 2 và 3 biến đổi biểu thức thành dạng tổng các số hạng không âm bằng 0, suy ra từng số hạng phải bằng 0. Cách 4 đưa về xét PT bậc hai có nghiệm. Trong cách 5 và 6 sử dụng khéo léo bất đẳng thức để đánh giá các giá trị của các biểu thức dẫn đến các điều kiện xác định các góc của tam giác.

KHÁM PHÁ MỚI *(Tiếp trang 21)*

Sự phân bố các số nguyên tố có liên hệ chặt chẽ với một trong những vấn đề nổi tiếng nhất về toán học "Giả thuyết Riemann", liên quan đến một tổng vô hạn gọi là hàm dê-ta $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Năm 2000, Viện toán học Clay ở Cambridge, Massachusetts, đã treo giải thưởng một triệu đôla cho người chứng minh được giả thuyết Riemann. Theo Daniel A.Goldston, kết quả mới nói trên sẽ cho phép cung cấp những lời giải thích rõ ràng hơn về hàm dê-ta.

NGUYỄN VĂN THIÊM

(Theo Courrier International 23-4-2003)

Sử dụng máy tính bỏ túi giúp bạn hiểu rõ hơn các khái niệm toán học, và quan trọng nhất là giúp bạn tiết kiệm thời gian, công sức trong khi tính toán. Nhưng trước hết các bạn phải biết và nhớ các phím bấm trên máy tính. Chúng tôi giới thiệu ý nghĩa kí hiệu các phím trên *máy tính khoa học **SHARP EL-506W*** vì máy này có đến 469 chức năng tính toán. Các kí hiệu này cũng có trên các máy tính SHARP loại khác.

TRẦN VĂN VUÔNG (*Hà Nội*)

CHỨC NĂNG CÁC PHÍM TRÊN MÁY TÍNH SHARP EL - 506W

TT	*Phím*	*Tác dụng chính*	*TT*	*Phím*	*Tác dụng chính*
1	2ndF	Chuẩn bị sử dụng phím với chữ màu vàng	20	AND	Phép hội
2	ON/C	Mở máy (khi máy đang tắt) hoặc xoá số trên màn hình (khi máy đang mở)	21	cos	Tính cosin của một góc
3	OFF	Tắt máy	22	$\cos^{-1}$	Tính góc khi biết cosin của nó
4	ALPHA	Chuẩn bị sử dụng phím với một chữ cái	23	OR	Phép tuyển không loại
5	M-CLR	Xoá số trong ô nhớ kí hiệu bởi chữ cái M	24	tan	Tính tang của một góc
6	◁	Chuyển dịch con trỏ sang kí tự bên trái	25	$\tan^{-1}$	Tính góc khi biết tang của nó
7	△	Chuyển dịch con trỏ lên màn hình trước	26	XOR	Phép tuyển loại
8	▷	Chuyển dịch con trỏ sang kí tự bên phải	27	$\int dx$	Tính tích phân
9	▽	Chuyển dịch con trỏ xuống màn hình sau	28	XNOR	Phủ định loại
10	MODE	Chọn kiểu tính toán (MODE)	29	MATH	Tính số phức liên hợp
11	CA	Xoá hết dữ liệu	30	ALGB	Tính toán về đại số
12	SET UP	Xác định đơn vị đo góc (độ, radian hoặc grat)	31	CNST	Chọn hằng số
13	DEL	Xoá kí tự ở chỗ con trỏ nhấp nháy	32	CONV	Đổi đơn vị đo
14	INS	Chuẩn bị chèn một kí tự vào chỗ con trỏ nhấp nháy	33	A, B, ..., X, Y, M	Chữ cái và cũng là ô nhớ tương ứng
15	hyp	Chuẩn bị sử dụng hàm số hypebolic	34	y^x	Tính luỹ thừa
16	arc hyp	Chuẩn bị sử dụng hàm số ngược của hypebolic	35	$\sqrt[x]{\ }$	Tính căn bậc bất kì của một số dương
17	NOT	Phép phủ định	36	x^2	Tính bình phương của một số
18	sin	Tính sin của một góc	37	$\sqrt{\ }$	Tính căn bậc hai của số không âm
19	$\sin^{-1}$	Tính góc khi biết sin của nó	38	x^3	Tính lập phương của một số

TT	*Phím*	*Tác dụng chính*	*TT*	*Phím*	*Tác dụng chính*
39	$\sqrt[3]{\ }$	Tính căn bậc ba của số	66	$\bar{x}$	Tính giá trị trung bình cộng của các dữ liệu của đại lượng x
40	log	Tính lôgarit thập phân của một số	67	n!	Tính giai thừa
41	10^x	Tính luỹ thừa của 10	68	sx sy	Tính độ lệch chuẩn đã điều chỉnh của đại lượng x hoặc y
42	ln	Tính lôgarit tự nhiên của một số	69	nCr	Tính số tổ hợp chập r của n
43	e^x	Tính luỹ thừa của e	70	nPr	Tính số chỉnh hợp chập r của n
44	Exp	Nhập luỹ thừa của 10 với số mũ nguyên	71	×	Phép tính nhân
45	←,→	Lấy phần ảo hoặc phần thực của nghiệm ảo	72	→HEX	Chuyển đổi sang hệ thập lục phân
46	a^b/c	Nhập hỗn số, phân số	73	÷	Phép tính chia
47	d/c	Chuyển đổi hỗn số thành phân số	74	→BIN	Chuyển đổi sang hệ nhị phân
48	i	Nhập đơn vị ảo	75	Σxy	Tính tổng các tích giá trị của hai đại lượng x, y
49	D°M'S	Nhập số độ, phút, giây	76	%	Tính toán về phần trăm
50	↔DEG	Chuyển đổi góc sang đơn vị độ, phút , giây	77	Σy	Tính tổng các giá trị của đại lượng y
51	RCL	Gọi số từ ô nhớ ra	78	x^{-1}	Tính số nghịch đảo của một số khác 0
52	,	Nhập dấu phẩy (dấu ngăn cách giữa hai toạ độ của một điểm)	79	Σy^2	Tính tổng bình phương các giá trị của đại lượng y
53	STO	Đưa số vào ô nhớ	80	+	Phép tính cộng
54	(x,y)	Nhập tần số của số liệu thống kê	81	→DEC	Chuyển đổi sang hệ thập phân
55	M+	Thay số trong ô nhớ kí hiệu M bởi tổng của nó với số trên màn hình	82	−	Phép tính trừ
56	M−	Thay số trong ô nhớ kí hiệu M bởi hiệu của nó với số trên màn hình	83	→OCT	Chuyển đổi sang hệ bát phân
57	CD	Xoá số liệu thống kê	84	n	Tính kích thước mẫu (tổng tần số)
58	RANDOM	Nhập số ngẫu nhiên	85	•	Dấu phẩy (dấu ngăn cách giữa phần nguyên và phần thập phân của một số thập phân)
59	$\bar{y}$	Tính giá trị trung bình cộng của các dữ liệu của đại lượng y	86	Σx	Tính tổng các giá trị của đại lượng x
60	→rθ	Chuyển đổi sang dạng lượng giác (hoặc toạ độ cực)	87	DRG▷	Chuyển đổi đơn vị đo góc (giữa độ, radian và grat)
61	1 2 ... 0	Nhập số 1, 2, ..., 9, 0	88	+/-	Nhập dấu âm hoặc đổi dấu của số trên màn hình
62	σy	Tính độ lệch chuẩn của đại lượng y	89	Σx^2	Tính tổng bình phương các giá trị của đại lượng x
63	→xy	Chuyển đổi sang dạng đại số (hoặc toạ độ Đêcac)	90	=	Dấu bằng
64	(	Dấu mở ngoặc	91	ANS	Kết quả của phép tính trước
65	)	Dấu đóng ngoặc	92	→PEN	Chuyển đổi sang hệ ngũ phân

CÁC LỚP THCS

Bài T1/326. (Lớp 6). Phân tích số 2003^{2004} thành tích của hai số tự nhiên a, b. Hỏi $a+b$ có chia hết cho 2004 không ?

HUỲNH QUANG LÂU
(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)

Bài T2/326. (Lớp 7). Các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện $\frac{a^4}{b}+\frac{c^4}{d}=\frac{1}{b+d}$ và $a^2+c^2=1$. Chứng minh rằng $\frac{a^{2004}}{b^{1002}}+\frac{c^{2004}}{d^{1002}}=\frac{2}{(b+d)^{1002}}$

VŨ ANH NAM
(GV THCS Từ Liêm, Nam Ban, Lâm Hà, Lâm Đồng)

Bài T3/326. Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất sao cho viết được p thành 10 tổng dạng

$p = x_1^2+y_1^2 = x_2^2+2y_2^2 = x_3^2+3y_3^2 = ...$
$= x_{10}^2+10y_{10}^2$; trong đó x_i, y_i $(i = 1, 2, ..., 10)$ là các số nguyên dương.

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/326. Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$$

NGUYỄN QUANG VŨ
(GV THPT Lục Ngạn 1, Bắc Giang)

Bài T5/326. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{abc+1}$$

trong đó a, b, c là các số dương.

TRẦN THỊ THUẬN
(GV CĐ Xây dựng 1, Hà Nội)

Bài T6/326. Chứng minh rằng trong một đa giác luôn tồn tại ít nhất hai cạnh có độ dài a, b thỏa mãn $a\leq b\leq 2a$.

MAI ĐÌNH SINH
(SV K39 Học viện Kĩ thuật Quân sự)

Bài T7/326. Từ một điểm P nằm ngoài một đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến PA, PB. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AP và OP. Đường thẳng BM cắt đường tròn lần nữa tại K. Chứng minh rằng $KN\perp AK$.

NGUYỄN ĐÌNH SƠN
(GV THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ, Quảng Nam)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/326. Giải phương trình hai ẩn nguyên dương : $x^{y^x}=y^{x^y}$.

NGUYỄN VIỆT HÀ
(SV 1A K51 khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/326. Cho hai số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=1$. Chứng minh rằng

$$xy+\max\{x, y\}\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

PHẠM VĂN THUẦN
(ĐH KHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/326. Tìm tất cả các hàm f: $R^+\to R^+$ thỏa mãn điều kiện $x\,f(xf(y)) = f(f(y))$ với mọi x, y thuộc R^+.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)

Bài T11/326. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{IA.IB}+\frac{1}{IB.IC}+\frac{1}{IC.IA}\leq\frac{5R+2r}{8Rr^2}$$

PHẠM KIM THOA
(1T Y tế Kiến Xương, Thái Bình).

Bài T12/326. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Một mặt phẳng bất kì đi qua HK cắt các cạnh BC và AD của tứ diện tại E và F theo thứ tự. Chứng minh rằng $EF\perp HK$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác $HEKF$.

MẠC VĂN DŨNG
(GV THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn, Hải Dương)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/326. (for 6th grade).

Factorize 2003^{2004} in the product of two natural numbers a and b. Is the sum $a + b$ divisible by 2004 ?

T2/326. (for 7th grade)

The positive integers a, b, c, d satisfy the conditions $\frac{a^4}{b}+\frac{c^4}{d}=\frac{1}{b+d}$ and $a^2 + c^2 = 1$.

Prove that

$$\frac{a^{2004}}{b^{1002}}+\frac{c^{2004}}{d^{1002}}=\frac{2}{(b+d)^{1002}}$$

T3/326. Find the least prime number p such that p can be written in ten sums of the forms :

$$p = x_1^2+y_1^2 = x_2^2+2y_2^2 = x_3^2+3y_3^2 = \ldots$$

$= x_{10}^2+10y_{10}^2$, where x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, 10$) are positive integers.

T4/326. Solve the equation

$$\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$$

T5/326. Prove that

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{abc+1}$$

for arbitrary positive numbers a, b, c.

T6/326. Prove that for every polygon, there exist at least two sides such that the measures a, b of which satisfy the conditions $a \leq b \leq 2a$.

T7/326. From a point P at the outside of a circle with center O, draw two tangents PA, PB to the circle. Let M and N be respectively the midpoints of AP and OP. The line BM cuts again the circle at K. Prove that $KN \perp AK$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/326. Find integer-solutions of the equation of two unknowns $x^{y^x} = y^{x^y}$.

T9/326. Prove that $xy + \max\{x, y\} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ for arbitrary real nonnegative numbers x, y satisfying the condition $x^2 + y^2 = 1$.

T10/326. Find all functions $f : R^+ \to R^+$ satisfying the condition $x f(xf(y)) = f(f(y))$ for all x, y in R^+.

T11/326. Let R and r be respectively the circumradius and the inradius of a triangle ABC and let I be its incenter. Prove that

$$\frac{1}{IA.IB}+\frac{1}{IB.IC}+\frac{1}{IC.IA}\leq\frac{5R+2r}{8Rr^2}$$

T12/326. Let $ABCD$ be a regular tetrahedron with side a. Let H and K be the midpoints of AB and CD respectively. An arbitrary plane containing the line HK cuts the sides BC and AD at E and F respectively. Prove that $EF \perp HK$. Find the least value of the area of the quadrilateral $HEKF$.

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

L1/326. Một ô tô chuyển động theo đường thẳng nằm ngang trong mưa, các hạt mưa rơi theo phương thẳng đứng với vận tốc không đổi. Biết rằng vận tốc của ôtô là $v_1 = 36$km/h, mưa rơi trên kính phía trước với số hạt là $N_1 = 200$ (hạt/s), khi tốc độ ôtô $v_2 = 72$km/h thì số hạt lúc này là $N_2 = 300$ (hạt/s). Hỏi nếu ôtô dừng lại thì có bao nhiêu hạt mưa rơi vào kính trong 1 giây.

TRỊNH VĂN MÙNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

L2/326. Trên quãng đường AB dài 81km, có một chiếc xe đi từ A đến B. Cứ sau 15 phút chuyển động thẳng đều xe lại dừng và nghỉ 5 phút. Trong khoảng thời gian 15 phút đầu xe có vận tốc $v_1 = 10$km/h và trong các khoảng thời gian kế tiếp xe có vận tốc lần lượt $2v_1$, $3v_1$, $4v_1$, ... Xuất phát cùng lúc là một xe khác chuyển động thẳng đều từ B về A với vận tốc $v_2 = 30$km/h.

a) Tìm thời điểm và vị trí gặp nhau của hai xe.

b) Tìm vị trí hai xe gặp nhau nếu xe đi từ B xuất phát muộn hơn xe đi từ A là 12 phút.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành II, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T1/322. (Lớp 6).

Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn :

$|x-3| + |x-10| + |x+101| + |x+990| + |x+1000| = 2004$

Lời giải. Trước hết lưu ý rằng, với bất kì a, ta có $|a| = |-a|$. Do đó :

$|x-3| = |3-x|$ và $|x-10| = |10-x|$.

Phương trình trong đầu bài tương đương với :

$|3-x| + |10-x| + |x+101| + |x+990| + |x+1000| = 2004$ (1)

Mặt khác, ta cũng luôn có $|a| \ge a$.

$$\text{Nên : } \begin{cases} |3-x| \ge 3-x \\ |10-x| \ge 10-x \\ |x+990| \ge x+990 \\ |x+1000| \ge x+1000 \end{cases}$$

Từ (1) và các BĐT trên, ta được :

$2004 = |3-x| + |10-x| + |x+101| + |x+990| + |x+1000| \ge$

$\ge (3-x) + (10-x) + |x+101| + (x+990) + (x+1000)$

hay : $2004 \ge |x+101| + 2003$.

Vậy nếu x là nghiệm của phương trình đã cho thì nó phải thỏa mãn bất đẳng thức : $|x+101| \le 1$.

Vì x là một số nguyên nên $(x+101)$ chỉ có thể nhận các giá trị : -1 ; 0 ; 1.

Do đó $x = -102$; $x = -101$; $x = -100$.

Bằng cách thử trực tiếp từng giá trị trên vào phương trình trong đầu bài, ta được các nghiệm: $x = -102$; $x = -100$.

Bằng cách thử trực tiếp từng giá trị trên vào phương trình trong đầu bài, ta được các nghiệm: $x = -102$; $x = -100$.

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán như sau : Trước hết chứng tỏ rằng nếu $x > 3$ hoặc $x < -990$ thì vế trái của phương trình lớn hơn 2004. Trong mỗi trường hợp $-101 \le x \le 3$ hoặc $-990 \le x < -101$, bằng cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta tìm được các nghiệm của phương trình.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Nghệ An :** *Hoàng Trung Đức, Nguyễn Thị Mai, Tăng Văn Bình, Lê Thị Nga, Nguyễn Thị Kim Chi, Lê Duy Nam, Lê Tuấn Sĩ*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Gia Lai :** *Nguyễn Thị Hồng Phúc*, 5A, Tiểu học Kim Đồng, KBang ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Văn Hiếu*, 6A, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định.

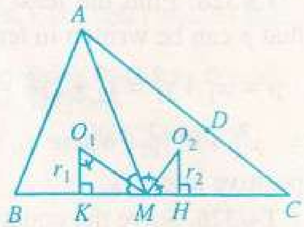
NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/322. (Lớp 7).

Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM. Gọi O_1 và O_2 theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác trong của các tam giác ABM và ACM. Chứng minh rằng $MO_1 = MO_2$ khi và chỉ khi $AB = AC$.

Lời giải. a) Giả sử tam giác ABC cân tại A. Khi đó dễ dàng suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c) $\Rightarrow \Delta O_1KM = \Delta O_2HM$ (g.c.g) $\Rightarrow MO_1 = MO_2$

b) Ngược lại, giả sử $MO_1 = MO_2$, ta phải chứng minh $AB = AC$.



Giả sử $AB < AC$. Gọi r_1, r_2 ; p_1, p_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và nửa chu vi của các tam giác ABM và ACM. Do $AB < AC$ nên $p_1 < p_2$. Mặt khác, $S_{ABM} = S_{ACM}$ (hai tam giác có cùng đường cao hạ từ đỉnh A và hai đáy $BM = CM$), suy ra $p_1r_1 = p_2r_2 \Rightarrow r_1 > r_2$ (1). Vì tam giác O_1MO_2 vuông cân tại $M \Rightarrow \Delta O_1KM = \Delta MHO_2$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow KM = O_2H = r_2$.

Trên AC lấy $AD = AB$. Có $\Delta ABM = \Delta ADM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMD} < \widehat{AMC} \Rightarrow \widehat{AMB} < 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{O_1MK} < 45^\circ \Rightarrow O_1K < KM \Rightarrow r_1 < r_2$ (2).

Rõ ràng (1) và (2) mâu thuẫn. Vậy không thể xảy ra $AB < AC$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được không thể xảy ra $AC < AB$.

Vậy $AB = AC$ (đpcm).

Nhận xét. 1) Đây là bài toán tương đối khó với các bạn lớp 7. Trong số các bạn tham gia giải, chỉ có rất ít bạn có lời giải chính xác. Hầu hết các lời giải sai là do ngộ nhận các kết quả mà giả thiết không cho, chẳng hạn cho rằng BO_1 và CO_2 cắt nhau tại một điểm trên AM, hoặc ngộ nhận $\widehat{BMO_1} = \widehat{AMO_1} = \widehat{AMO_2} = \widehat{CMO_2}$. Một sai lầm phổ biến nữa là không nắm vững bản chất của điều kiện cần và đủ, dùng điều cần phải chứng minh để chứng minh.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hưng Yên : *Nguyễn Văn Thọ*, THCS Tiên Lữ, huyện Tiên Lữ ; **Thanh Hóa :** *Lê Thị Hạnh*, 7A5, THCS Quang Trung, Tp. Thanh Hóa ; **Đắk Lắk:** *Vũ Xuân Cường*, 7A1, THCS Lương Thế Vinh, huyện Cư M–Gar ; **Hải Phòng :** *Trần Vân Anh*, *Vũ Thị Vân Anh*, 7A1, THCS Hồng Bàng.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/322. *Có bốn viên bi mà tổng khối lượng của từng cặp viên bi là a, b, c, d, e, f và thỏa mãn $a + b + c + d + e + f = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 = 6$ (đvkl). Tìm khối lượng của các viên bi đó.*

Lời giải. Kí hiệu x, y, z, t là khối lượng của bốn viên bi.

Cách 1. Rõ ràng a, b, c, d, e, f là các số dương. Áp dụng bất đẳng thức Cô–si, ta có :

$$a^3 + 2 = a^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^3.1.1} = 3a$$

Tương tự, ta cũng có : $b^3 + 2 \geq 3b$; $c^3 + 2 \geq 3c$; $d^3 + 2 \geq 3d$; $e^3 + 2 \geq 3e$; $f^3 + 2 \geq 3f$.

Cộng từng vế các BĐT trên, ta được :

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 + 12 \geq$$
$$\geq 3(a+b+c+d+e+f) \qquad (1)$$

Theo đầu bài thì $a + b + c + d + e + f = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 = 6$, nên đẳng thức ở (1) phải xảy ra, điều này tương đương với $a = b = c = d = e = f = 1$.

Do đó $x + y = x + z = x + t = y + z = y + t = z + t = 1$. Suy ra $x = y = z = t = \dfrac{1}{2}$ (đvkl).

Cách 2. Theo bài ra ta có :

$a + b + c + d + e + f = 3(x + y + z + t) = 6$; do đó $x + y + z + t = 2$.

Mặt khác : $6 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 = [(x + y)^3 + (z + t)^3] + [(x + z)^3 + (y + t)^3] + [(x + t)^3 + (y + z)^3]$
$= (x + y + z + t)(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2)$
$= 6(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$,
nên $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.

Do đó $4 = 2^2 = (x+y+z+t)^2 \leq 4(x^2+y^2+z^2+t^2) = 4$.

Suy ra $x = y = z = t = \dfrac{1}{2}$ (đvkl).

Nhận xét. 1) Có nhiều cách để giải bài toán đã cho. Sử dụng bất đẳng thức Cô–si (như ở cách 1) hay bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, nhiều bạn đã giải một số bài toán tổng quát hơn bài toán đã cho. Bạn *Đỗ Tuấn Hoàng Anh*, 9A14, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **Tp. Hồ Chí Minh**) đã khái quát hóa bài toán đã cho tới bài toán :

Cho n viên bi. Gọi k là số nguyên dương bé hơn n và đặt $m = C_n^k$. Gọi tổng khối lượng của từng nhóm k viên bi là $a_1, a_2, ..., a_m$. Biết rằng

$$a_1 + a_2 + ... + a_m = a_1^p + a_2^p + ... + a_m^p \geq m \text{ (đvkl)}$$

($p \in Z^+$, $p \neq 1$). Tìm khối lượng của các viên bi đó.

Như vậy : bài toán đã cho là trường hợp đặc biệt của bài toán này ứng với $n = 4$, $k = 2$, $m = C_4^2 = 6$, $p = 3$.

2) Các bạn có lời giải tốt là : **Phú Thọ :** *Nguyễn Văn Hải*, *Lương Đức Hoàng*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; *Nguyễn Tiến Thanh*, 8C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Vĩnh Phúc :** *Đoàn Mạnh Hùng*, 9A, THCS Yên Lạc ; *Nguyễn Văn Đại*, 8C, THCS Tự Lập, Mê Linh ; **Hà Nội :** *Nguyễn Kim Dũng*, 9A, THPT Amsterdam ; **Hà Nam :** *Nguyễn Mạnh An*, 9B, THCS Trần Phú, Tx. Phủ Lí ; **Nam Định :** *Phạm Duy Hiệp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thái Bình :** *Nguyễn Thị Mây*, 9B, THCS Thanh Nê, Kiến Xương ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Huy Giang*, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Trịnh Văn Vương*, 9B,THCS Điện Biên, Tp. Thanh Hóa ; *Nguyễn Bá Tuấn Anh*, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Tấn Hưng*, 7A, THCS Trịnh Châu ; **Đắk Lắk :** *Phan Duy Khánh*, 9A7, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Buôn Mê Thuột; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Đỗ Tuấn Hoàng Anh*, 9A14, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/322. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{a^6}{b^3+c^3} + \dfrac{b^6}{c^3+a^3} + \dfrac{c^6}{a^3+b^3}$ trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.*

Lời giải. Đặt M là biểu thức đã cho, $N = a^3 + b^3 + c^3$, $P = a^2 + b^2 + c^2$. Sử dụng bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki cho những bộ ba số thực dương thích hợp, ta có

$$M.2N = \left(\frac{a^6}{b^3+c^3} + \frac{b^6}{c^3+a^3} + \frac{c^6}{a^3+b^3}\right) \times$$
$$\times (b^3+c^3+c^3+a^3+a^3+b^3) \geq (a^3+b^3+c^3)^2 = N^2$$
$$N = (a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq (a^2+b^2+c^2)^2 = P^2$$
$$9P^2 = (1+1+1)^2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (a+b+c)^4 = 1.$$

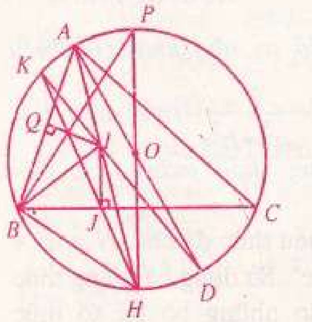
Nhân theo từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được $18M \geq 1$ hay $M \geq \dfrac{1}{18}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{1}{18}$ đạt được tại $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Nhận xét. Tòa soạn nhận được 270 bài dự thi, trong đó có đến 265 bài giải đúng với nhiều phương pháp khác nhau. Thật là một kết quả đáng khích lệ. Ba bạn lớp 7 đã có lời giải ngắn gọn : *Võ Văn Tuấn*, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk, **Đăk Lăk** ; *Đỗ Đức Tâm*, 7A, THCS Thạch Thất, **Hà Tây** ; *Đại Thị Ánh*, 7A, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

Các bạn sau có lời giải đơn giản và tổng quát hóa hay : *Trần Mạnh Trung*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**, *Phan Duy Khánh*, 9A7, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột, **Đăk Lăk** ; *Bùi Thế Thứ*, 9A, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, **Thanh Hóa** ; *Thân Ngọc Thức*, 9A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên, **Bắc Giang** ; *Nguyễn Văn Thọ*, 9A, THCS Tiên Lữ, **Hưng Yên** ; *Trương Việt Đức*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** ; *Nguyễn Bá Tuấn Anh*, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Tài Đại*, 8A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, KBang, **Gia Lai** ; *Phạm Thị Ngọc Ánh*, 8D, THCS DươngThành, Phú Bình, Thái Nguyên.

PHAN DOÃN THOẠI

Bài T5/322. *Cho đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC với đường kính AD. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Các đường thẳng AI và DI cắt đường tròn tâm O lần nữa tại H và K theo thứ tự. Kẻ IJ ⊥ BC tại J. Chứng minh rằng ba điểm H, K, J thẳng hàng.*



Lời giải. Kẻ đường kính HP. Hạ $IQ \perp AB$. Dễ thấy $\Delta AQI \backsim \Delta PBH$.

Suy ra $\dfrac{AI}{HP} = \dfrac{IQ}{BH}$

Từ đó $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{IJ}{BH}$ (1)

Mặt khác

$$\widehat{HBI} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{BAC}) = \widehat{HIB}.$$

Nên ΔHBI cân tại H, hay $HB = HI$. Cùng với (1) suy ra : $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{IJ}{IH}$ (2)

Do phân giác AI cắt đường tròn tại H nên $\overset{\frown}{HB} = \overset{\frown}{HC}$. Suy ra $OH \perp BC$. Nên $IJ \,//\, OH$. Suy tiếp ra $\widehat{JIH} = \widehat{IHO} = \widehat{HAO}$ (Do ΔOAH cân).

Từ đó $\widehat{JIH} = \widehat{HAD}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\Delta IJH \backsim \Delta AID$

Do đó $\widehat{IHJ} = \widehat{ADI}$ (*)

Mặt khác $\widehat{ADK} = \widehat{AHK}$ $\left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \overset{\frown}{AH} \right)$ (**)

Từ (*) và (**) có $\widehat{IHJ} = \widehat{AHK}$. Vì K, J nằm cùng phía đối với đường thẳng AH nên H, K, J thẳng hàng.

Nhận xét. 1) Một số bạn phải dùng tới hệ thức Ơ-le để giải.

2) Các bạn giải tốt bài này :

Vĩnh Phúc : *Đoàn Mạnh Hùng*, 9A, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Văn Ngọc*, 9A, THCS Lãng Công, Lập Thạch ; **Hải Dương :** *Hà Hữu Cao Trình*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Nam Định :** *Phạm Quốc Doanh*, 9A4, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Nguyễn Xuân Trường*, 9A6, THCS Trần Đăng Ninh, *Ngô Duy Tiệm*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên, TP Nam Định ; **Thanh Hóa :** *Tạ Trần Tùng*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Nguyễn Bá Tuấn Anh*, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; **Nghệ An :** *Trương Việt Đức*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Khánh Hòa:** *Đỗ Phú Thịnh*, 9^{12}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Đăk Lăk :** *Võ Văn Tuấn*, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk, *Phan Duy Khánh*, 9A7, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thột ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Đức Phong*, 9A14, Trần Đại Nghĩa.

3) Lời giải trên dựa theo chứng minh của *Nguyễn Mạnh An*, 9B, THCS Trần Phú, **Hà Nam**.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/322. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n - 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad (*)$$

trong đó x_i ($i = 1, 2, ..., n$) là các số thực dương thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$, còn n là số nguyên lớn hơn 1.

Lời giải. (của nhiều bạn)

Ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 2(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 2n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 2(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 2n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j + n + \sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j} - 2(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 2n$$

$$= \sum_{i \neq j}\left(x_i x_j + \frac{x_i}{x_j}\right) - 2(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= \sum_{i \neq j}\left(x_i x_j + \frac{x_i}{x_j} - 2x_i\right) = \sum_{i \neq j} x_i \frac{(x_j - 1)^2}{x_j} \geq 0$$

Chia hai vế cho $2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ ta suy ra bất đẳng thức (*). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Nhận xét. Đây là bài toán có nhiều biến đổi cơ bản. Một số không ít bạn giải theo cách rất phức tạp. Các bạn lớp 9, 10 sau có lời giải tốt : **Phú Thọ :** *Lê Bá Long, Nguyễn Quang Huy,*, 10T, THPT Hùng Vương ; **Nam Định :** *Vương Hồng Quang*, 10A5, THPT A Hải Hậu ; **Vĩnh Phúc :** *Đỗ Việt Kiên, Vũ Văn Quang, Lê Công Truyền*, 10A1, THPT chuyên ; **Hưng Yên :** *Vũ Thanh Xuân*, 10T, THPT chuyên ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hoài Phương*, 10A2, *Nguyễn Hoàng Việt*, 10A1, PTCTT, ĐHSP I ; **Hải Dương :** *Hoàng Văn Hùng*, 10A1, THPT Kinh Môn ;*Nguyễn Anh Tuấn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** *Phạm Quỳnh Anh*, 10T, THPT Trần Phú ; **Thanh Hóa :** *Trần An*, 10A3,THPT Lương Đắc Bằng, *Nguyễn Tuấn Dương*, 10T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An** *Nguyễn Đức Tùng*, 10A1, PTCTT, ĐH Vinh ; **Thừa Thiên – Huế :** *Lê Viết Ân*, 10^9, THPT Quốc học ; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Ninh*, 10T, THPT Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Tấn Việt*, 10T, THPT Lê Khiết ; **Đà Nẵng :** *Phan Minh Tiến*, 10/1, THPT Lê Quý Đôn ; **Tp.Hồ Chí Minh :** *Mai Thanh Long*, 10A6, THPT Trần Đại Nghĩa, *Nguyễn Tuấn Tú*, 10T, THPT Lê Hồng Phong; **Đồng Nai:** *Nguyễn Đào Xuân Uyên*, 9A1, THCS Lê Thánh Tông ;**Đắk Lắk :** *Tôn Thất Nhật Trường*, 9A5, THCS Phan Chu Trinh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/322. *Dãy số (u_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^2}$ với $n = 1, 2, 3, ...$*

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn và giới hạn đó là số vô tỉ.

Lời giải. *(Của đa số các bạn)*

a) *Chứng minh dãy (u_n) là một dãy có giới hạn*

Ta có $\frac{1}{(k!)^2} > 0$ nên (u_n) là một dãy tăng và $u_n > 1 + \frac{1}{4}$ với $n > 2$. Mặt khác (u_n) bị chặn trên. Thật vậy, ta có

$\frac{1}{(k!)^2} < \frac{1}{(k-1)k}$, $\forall k > 1$ nên

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^2} < 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)k}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < 1 + \frac{3}{4} < 2.$$

Từ đó suy ra dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn a với $1 < a < 2$.

b) *Chứng minh a là một số vô tỉ.*

Thật vậy, giả sử a hữu tỉ, tức $a = \frac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ và $q > 1$ (do $1 < a < 2$). Khi đó, ta có

$$(q!)^2 a = p(p-1)!q!$$

là một số nguyên dương. Nhận xét rằng

$$(q!)^2 a = (q!)^2 \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{(q!)^2}{(k!)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \frac{(q!)^2}{(k!)^2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=q+1}^{n} \frac{(q!)^2}{(k!)^2} \quad (1)$$

Do $\sum_{k=1}^{q} \frac{(q!)^2}{(k!)^2}$ là một số nguyên dương nên từ (1) suy ra $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=q+1}^{n} \frac{(q!)^2}{(k!)^2}$ cũng là một số nguyên (2)

Mặt khác ta lại có

$$0 < \sum_{k=q+1}^{n} \frac{(q!)^2}{(k!)^2} < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(q+1)^{2j}}$$

và $0 < \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(q+1)^{2j}} = \frac{1}{q(q+2)} < \frac{1}{3}$

Suy ra $0 < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=q+1}^{n} \frac{(q!)^2}{(k!)^2} < 1$

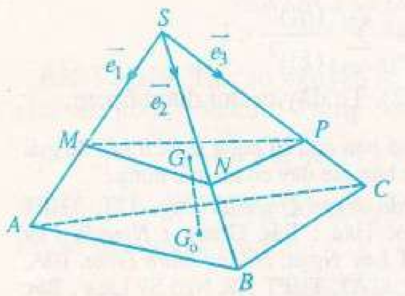
mâu thuẫn với (2). Từ đây ta thu được đpcm.

Nhận xét. Một số bạn còn sử dụng *định lí kẹp* để giải quyết bài toán. Các bạn sau đây có lời giải đúng :

An Giang : *Trần Ngọc Quốc Trường*, 12T, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu ; **Bắc Giang :** *Nguyễn Việt Toàn*, 12A5, THPT Lục Ngạn, *Hoàng Minh Tuân*, 10A, *Thân Ngọc Thành*, 11A1, THPT NK Ngô Sỹ Liên ; **Bắc Ninh :** *Cát Văn Khôi*, 10T, THPT NK , *Nguyễn Trường Giang*, 10A1, THPT Yên Phong 1 ; **Bình Định :** *Nguyễn Phúc Thọ*, 11T, THPT Lê Quý Đôn ; **Đắk Lắk :** *Nguyễn Đình Minh Anh*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du ; **Đà Nẵng :** *Phan Minh Tiến, Trương Minh Tiến, Thái Thanh Hải, Nguyễn Tường Huân*, 10/1, *Nguyễn Tấn Cường, Đỗ Quốc Khánh, Dương Đại Nguyện* THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Đồng Nai :** *Lưu Thiện Xuân*, 11T, THPT Lương Thế Vinh ; **Đồng Tháp :** *Lý Duy Khiêm*, 11T, THPT Cao Lãnh ; **Hà Nội :** *Phạm Tiến Hải*, 11A1, *Lê Hùng Việt Bảo*, 12A, ĐHKHTN, *Nguyễn Minh Phương*, 11A2, THPT Sóc Sơn, *Nguyễn Lệnh Quân*, 11A1, ĐHSP Hà Nội; **Hải Dương :** *Phạm Văn Thuấn*, 11A7, THPT Phúc Thành, Kim Môn, *Nguyễn Anh Tuấn*, 10T, *Nguyễn Duy Trung*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** *Phạm Thái Hoàn*, 11A1, THPT Thái Phiên ; **Hòa Bình :** *Lưu Như Hòa*, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Huế :** *Nguyễn Tuấn Minh*, 10/S, *Lê Viết Ân*, 10G, THPT Quốc học ; **Hưng Yên :** *Lương Xuân Bách*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên ; **Lạng Sơn :** *Nguyễn Trọng Đại*, 11A, THPT Chu Văn An ; **Lâm Đồng :** *Nguyễn Ngọc Quang Minh*, THPT chuyên Thăng Long ; **Nghệ An :** *Nguyễn Đức Tùng*, 10A1, ĐH Vinh, *Nguyễn Ngọc Cường*, 12A1, THPT Phan Bội Châu ; **Phú Thọ :** *Hoàng Văn Sơn, Triệu Ngọc Anh Khởi*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương ; **Quảng Bình :** *Phạm Hùng, Trương Phúc Toại, Lê Đức Dũng*, 11T, THPT chuyên ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Đình Duy*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Quảng Ninh :** *Hoàng Trung Hiếu*, 10T, THPT Dân Lập, Yên Hưng ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Hữu Ninh*, 10T, *Lê Tiến Triển, Nguyễn Đình Duy*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Thái Bình :** *Nguyễn Văn Chuyển*, 10T, THPT chuyên, *Nguyễn Đức Thiện*, 12A2, THPT Đông Thụy Anh, *Nguyễn Sỹ Ngọc*, 11A1, THPT Quỳnh Côi ; **Thanh Hóa :** *Trần Mạnh Tuấn*, 11T, THPT Lam Sơn, *Trần Văn Thiện*, 12C5, THPT Như Thanh, *Trần Mạnh Tuấn*, 11T, THPT Lam Sơn ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Tuấn Tú*, 10T, *Nguyễn Đình Hiển*, 12CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Ngọc Sơn, Hà Đình Thiệu, Bùi Hữu Đức, Nguyễn Ngọc Tuấn*, 11A 1, THPT chuyên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/322. *Cho hình tứ diện SABC. Các điểm M, N, P theo thứ tự nằm trên các cạnh SA, SB, SC và thỏa mãn AM = BN = CP (M, N, P không trùng các đỉnh S, A, B, C). Gọi G là trọng tâm của ΔMNP. Chứng minh rằng điểm G luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi M, N, P di động trên SA, SB, SC.*



Lời giải. (Của bạn *Lê Nam Trường*, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**).

Gọi $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ là các véctơ đơn vị, theo thứ tự cùng hướng với các tia *SA, SB, SC*. Đặt $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$

$k = AM = BN = CP$ (*k* thay đổi)

Gọi G_o là trọng tâm ΔABC. Vì *G* là trọng tâm ΔMNP nên ta có :

$$\overrightarrow{G_oG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = k\,(-\vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}) = -k\vec{u}.$$

Suy ra : *G* thuộc đường thẳng cố định *d* qua G_o và song song với $\vec{u}$ khi *M, N, P* thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, rất nhiều bạn tham gia giải và đã giải đúng. Tuy nhiên, nhiều bạn cho lời giải quá dài.

2) Một số bạn dùng phương pháp tọa độ (hệ tọa độ xiên) cũng cho lời giải đúng.

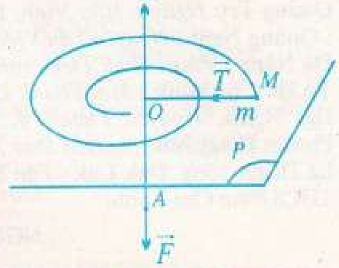
3) Bạn *Nguyễn Hoàng Việt*, 10CT, THPT Lê Hồng Phong, **Tp. Hồ Chí Minh** đã mở rộng bài toán cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$.

4) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Đà Nẵng : *Phan Minh Tiến*, 10/1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Thái Bình :** *Nguyễn Sĩ Ngọc*, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ ; **Hải Dương :** *Phạm Văn Thuấn*, 11A7, THPT Phú Thành, Kinh Môn, *Hà Nam*, 11A, THPT Kim Bảng, Kim Bảng ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Tuấn Dương*, 10T, *Nguyễn Trọng Hòa, Trần Mạnh Tuấn*, 11T, THPT Lam Sơn ; **Quảng Ngãi :** *Lương Bá Linh*, 10T, THPT Lê Khiết ; *Ngô An Hòa Kỳ*, 12CI, THPT II Mộ Đức ; **Hà Nội :** *Đỗ Hoàng Khiêm*, 11A1, PTCTT, ĐHSP Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/322. *Trên mặt bàn nằm ngang nhẵn P có một quả cầu nhỏ khối lượng m được buộc vào một sợi dây không dãn MOA. Sợi dây xuyên qua lỗ O (hình vẽ). Đầu A của dây chịu tác dụng lực $\vec{F}$ sao cho A chuyển động thẳng đứng đi xuống với vận tốc không đổi. Hãy tìm biểu thức của lực căng của sợi dây phụ thuộc vào khoảng cách OM = r, biết rằng lúc đầu quả cầu cách O một đoạn OM = r_o và đoạn dây OM có vận tốc góc là ω_o.*



Lời giải. Quả cầu *m* chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$, phản lực vuông góc $\vec{N}$ của mặt bàn và lực căng $\vec{T}$ của sợi dây (có cường độ bằng *F*). Tổng mômen các lực đó đối với trục *Oz* bằng không nên mômen động lượng của quả cầu (đối với *Oz*) được bảo toàn. Ta có: $mr_o^2\omega_o = mr^2\omega$ (1)

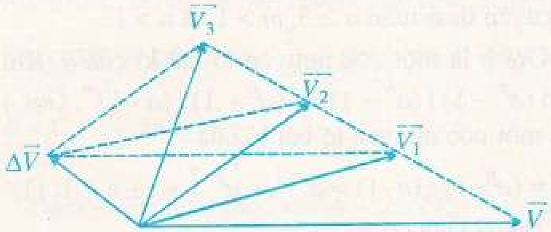
Từ đó : $T = F = m\omega^2 r = \dfrac{m\omega_o^2 r^4}{r^3}$

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Bắc Ninh : *Nguyễn Anh Cương*, 10 Lí, *Nguyễn Công Dưỡng*, 10 Lí ; *Trần Thái Hà*, 10 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Ngọc Hưng*, 10A3, *Khổng Trọng Nghĩa, Nguyễn Thị Phương Dung*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Giang :** *Phạm Thế Mạnh, Dương Trung Hiếu*, 11B, THPT Năng khiếu Bắc Giang ; **Đồng Nai :** *Triệu Anh Tuấn*, 11 Lí I, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Hưng Yên :** *Trần Quốc Việt*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Hải Dương :** *Lê Hoàng Dũng*, 10 Lí, THPT Nguyễn Trãi ; **Thái Nguyên :** *Chu Tuấn Anh*, 10 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên ; **Nghệ An :** *Nguyễn Mạnh Thành*, A3, K31, THPT Phan Bội Châu.

MAI ANH

Bài L2/322. *Một lực không đổi $\vec{F}$ bắt đầu tác dụng lên một vật đang chuyển động với vận tốc $\vec{v}$. Sau khoảng thời gian Δt độ lớn vận tốc của vật giảm 2 lần. Cũng sau khoảng thời gian Δt tiếp theo, độ lớn vận tốc lại giảm 2 lần. Hãy xác định độ lớn vận tốc của vật sau khoảng thời gian $3\Delta t$ kể từ khi lực $\vec{F}$ bắt đầu tác dụng lên vật.*



Lời giải. Kí hiệu $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$ lần lượt là vận tốc của vật sau các khoảng thời gian Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$ kể từ khi tác dụng lực. Áp dụng định luật II Niutơn ta có : $\Delta\vec{V} = \dfrac{\vec{F}.\Delta t}{m}$. Ta có giản đồ véctơ như hình trên. Áp dụng định lí về trung tuyến ta có :

$$V_1^2 = \frac{V^2 + V_2^2}{2} - \left(\frac{2\vec{F}.\Delta t}{m}\right)^2.\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$V_2^2 = \frac{V_1^2 + V_3^2}{2} - \left(\frac{2\vec{F}.\Delta t}{m}\right)^2.\frac{1}{4} \quad (2)$$

Biết $V_1 = \dfrac{V}{2}$, $V_2 = \dfrac{V}{4}$, từ (1) và (2) tìm được : $V_3 = \dfrac{\sqrt{7}}{4}V$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :
Bắc Ninh : *Nguyễn Văn Cương, Nguyễn Văn Ngọc*, 10 Lí, *Trần Văn Hòa*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Đồng Nai :** *Triệu Anh Tuấn*, 11 Lí I, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Đà Nẵng :** *Đinh Văn Tuấn*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Vĩnh Phúc :** *Khổng Trọng Nghĩa, Nguyễn Thị Phương Dung, Đoàn Anh Quân*, Nguyễn Đăng Thành, 11A3, *Lương Văn Thưởng*, 10A3, *Trịnh Hữu Phước*, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hà Tây :** *Lê Đắc Hải*, 11 L2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Hải Dương :** *Mạc Đăng Lên*, 11A1, THPT DL Thành Đông ; **Hưng Yên :** *Phạm Quốc Việt*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Quảng Ngãi:** *Lê Hà Kiệt*, 11A2, THPT Đức Phổ I ; **Tiền Giang :** *Trần Thị Mỹ Phương*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu, Phạm Thế Mạnh*, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Thanh Hóa :** *Lê Hoàng Long*, 10F, THPT chuyên Lam Sơn ; **Thái Nguyên :** *Vũ Văn Tuấn*, Lí 10K15, THPT chuyên Thái Nguyên ; **Hà Nội :** *Nguyễn Tiến Hùng*, 10B chuyên Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, *Bùi Phi Anh*, 11 Lí, THPT Hà Nội – Amsterdam; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Lê Quốc Khánh*, 11 Lí, PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh ; **Nghệ An :** *Bạch Hưng Đoàn*, A3, K31, THPT chuyên Phan Bội Châu.

MAI ANH

CUỘC THI KỈ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bài T3/THCS. *Gọi x, y là hai số nguyên khác –1 sao cho : $\dfrac{x^3+1}{y+1} + \dfrac{y^3+1}{x+1}$ là một số nguyên.*

Chứng minh rằng $x^{2004} - 1$ chia hết cho $y + 1$.

Lời giải. Đặt $\dfrac{x^3+1}{y+1} = \dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{y^3+1}{x+1} = \dfrac{c}{d}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên và $b > 0$, $d > 0$, $(a, b) = 1$, $(c, d) = 1$.

Từ giả thiết có $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$ là số nguyên nên $(ad + bc) \vdots bd \Rightarrow ad \vdots b$.

Vì $(a, b) = 1$ nên $d \vdots b$ (1)

Mặt khác $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d} = \dfrac{x^3+1}{y+1}.\dfrac{y^3+1}{x+1} =$
$= (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)$ là số nguyên nên $ac \vdots d$. Vì $(c, d) = 1$ nên $a \vdots d$. (2)

Từ (1) và (2) có $a \vdots b$, nhưng $(a, b) = 1$ nên chỉ có thể $b = 1$. Do đó $x^3 + 1 = a(y + 1)$ hay $(x^3 + 1) \vdots y + 1$ (3)

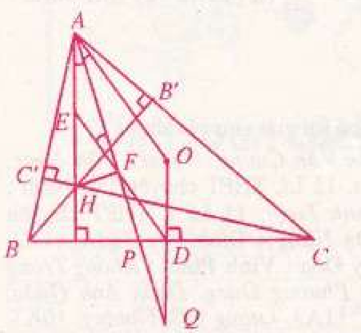
Ta có $x^{2004} - 1 = (x^6)^{334} - 1$ chia hết cho $x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1)$.

Từ đó và (3) suy ra $x^{2004} - 1$ chia hết cho $y + 1$.

Nhận xét. Cách giải khác : Coi $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$ là hai nghiệm hữu tỉ của phương trình bậc hai $x^2 - mx + n = 0$ với hệ số m, n nguyên. Do hệ số của x^2 bằng 1 nên suy ra $b = d = 1 \Rightarrow$ có (3).

VIỆT HẢI

Bài T4/THCS. *Gọi H là trực tâm của một tam giác ABC không vuông. Gọi D và E lần lượt là trung điểm của BC và AH. Gọi F là hình* *chiếu vuông góc của H trên đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.*



Lời giải 1. Gọi B' và C' lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh B và C, thế thì B', C' và F nằm trên đường tròn tâm E đường kính AH. Ta có $EB' = EC'$. Vì B' và C' nằm trên đường tròn đường kính BC nên ta có $DB' = DC'$. Vậy đường thẳng DE là đường trung trực của $B'C'$. Mặt khác vì $HF \perp AP$ tại F thuộc tia phân giác AP của góc BAC nếu góc A nhọn, hoặc F thuộc tia phân giác AP' của góc đối đỉnh của góc BAC nếu góc A tù nên trong cả hai trường hợp, F đều là trung điểm của cung nhỏ $\overset{\frown}{B'C'}$ của đường tròn tâm E, do đó $FB' = FC'$ suy ra F thuộc đường thẳng DE. Vậy ba điểm D, E và F thẳng hàng trên trung trực của đoạn thẳng $B'C'$.

Lời giải 2. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và Q là giao điểm của tia phân giác AP của góc BAC với đường thẳng OD. Dễ dàng chứng minh rằng AH và AO đối xứng với nhau qua phân giác AP của góc ABC, đồng thời ΔEAF cân ở E ; suy ra $\widehat{EFA} = \widehat{EAF} = \widehat{OAF}$ và do đó : $EF // OA$ (1)

Mặt khác, ta có (một tính chất quen thuộc của trực tâm tam giác) $OD = AE = EH$ và $AH // OD$ nên $OAED$ là một hình bình hành, và vì vậy $ED // OA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai đường thẳng EF và ED trùng nhau hay D, E, F thẳng hàng.

Nhận xét. 1) Cả hai lời giải trên đều đòi hỏi phải xét đầy đủ các trường hợp góc BAC nhọn hay tù, lúc đó trực tâm H nằm trong hay ngoài ΔABC.

2) Có ba bạn nhận xét thêm rằng, hình chiếu vuông góc G của H trên phân giác ngoài của góc BAC cũng nằm trên đường thẳng DE.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T3/THPT. *Tìm tất cả các số nguyên dương a, m, n thỏa mãn điều kiện :*

$$(a-1)^m = a^n - 1.$$

Lời giải. Dễ thấy các bộ ba $(1 ; m ; n)$, $(a ; 1 ; 1)$, $(2 ; m ; 1)$với các số nguyên dương a, m và n tuỳ ý đều nghiệm đúng phương trình đã cho.

Sau đây, ta sẽ tìm các nghiệm $(a ; m ; n)$ của phương trình với giả thiết rằng a, m, n là các số nguyên thoả mãn $a \geq 3$, $m > 1$ và $n > 1$.

Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của n. Khi đó $(a^p - 1) \mid (a^n - 1) \Rightarrow (a^p - 1) \mid (a-1)^m$. Gọi q là một ước nguyên tố bất kì của

$A = (a^p - 1) : (a-1) = a^{p-1} + a^{p-2} + ... + a + 1.$ (1)

Theo (1) ta có :

$q \mid (a^p - 1) \Rightarrow q \mid (a-1)^m \Rightarrow a \equiv 1 \pmod q$
$\Rightarrow A \equiv p \pmod q \Rightarrow 0 \equiv p \pmod q \Rightarrow p = q.$

Điều đó chứng tỏ A có dạng $A = p^s$ (với s nguyên dương). Nếu như $p \geq 3$ thì bằng cách đặt $a = kp + 1$, ta có :

$$p^s = A = \frac{a^p - 1}{a-1} = \frac{(kp+1)^p - 1}{kp} = Bp^2 + p$$

(với $B \in N^*$) $\Rightarrow A = p$.

Nhưng đó là điều vô lí vì $A = a^{p-1} + a^{p-2} + ... + a + 1 > 2^p - 1 > p$. Vậy, $p = 2$ và n phải là một lũy thừa của 2. Giả sử $n = 2^s$.

Giả sử p là một ước nguyên tố bất kì của $a-1$, tức là $a \equiv 1 \pmod p$.

Chia hai vế của phương trình cho $a - 1$, ta được $(a-1)^{m-1} = a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1$ (2).

Từ (2) ta có $(a-1)^{m-1} \equiv n$ (mod p), kéo theo $n = 2^s \equiv 0 \pmod p$, tức là $p = 2$. Vậy $a - 1$ cũng không có ước nguyên tố lẻ. Đặt $a - 1 = 2^t$, phương trình trở thành

$$2^{tm} = \left(2^t + 1\right)^{2^s} - 1 \qquad (3)$$

Vì $n > 1$ nên $s \geq 1$ và vế phải của (3) luôn chia hết cho $\left(2^t + 1\right)^2 - 1 = 2^{t+1}(2^{t-1} + 1)$, suy ra $t = 1$, nghĩa là $a = 3$.

(Xem tiếp trang 23)

KHÁM PHÁ MỚI VỀ SỰ PHÂN BỐ CÁC SỐ NGUYÊN TỐ

Từ nhiều thế kỉ, các nhà toán học tìm kiếm một công thức nêu lên sự phân bố các số nguyên tố trong dãy các số tự nhiên. Những kết quả mới đây có thể dẫn đến chìa khóa đúng của vấn đề.

Hai nhà toán học, Daniel A. Goldston, Trường Đại học Quốc gia San José ở California và Cem Y. Yildirim, Trường Đại học Bogazici ở Istanbul, vừa đạt được những tiến bộ kì diệu trong việc tìm hiểu sự phân bố những số nguyên tố. "Khám phá mới này là lí thú nhất trong 30 năm gần đây về vấn đề đó. Tuy vậy, các chuyên gia vẫn kiểm tra tính xác thực của khám phá đó" - nhà toán học Hugl L.Montgomerry, Trường Đại học Michigan ở Ann Harbor đánh giá.

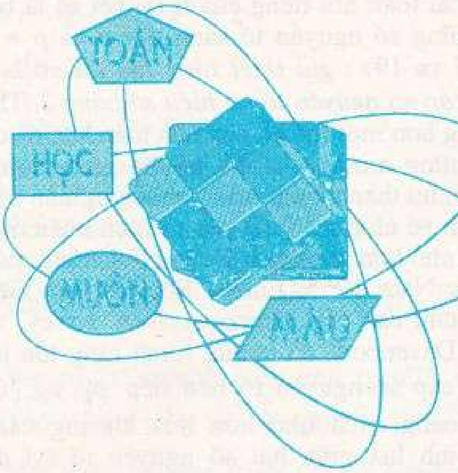
Trong dãy n số nguyên liên tiếp $k+1$, $k+2$, ..., $k+n$ với k nhỏ thì có nhiều số nguyên tố, nhưng với k khá lớn lại hiếm số nguyên tố. Đến số hàng tỉ thì cứ khoảng 20 số nguyên mới có một số nguyên tố.

Đến cuối thế kỉ 19, các nhà toán học đã tìm được sự phân bố các số nguyên tố theo một công thức gần đúng đơn giản lạ kì : khoảng cách trung bình giữa hai số nguyên tố liên tiếp p_k, p_{k+1} với $p_k < x < p_{k+1}$ gần bằng lôgarit tự nhiên (cơ số $e = 2{,}71828...$) của x, nghĩa là $p_{k+1} - p_k \approx c\ln x$, với hằng số c gần bằng 1 (ví dụ, nếu $x = 60$ thì hai số nguyên tố gần kề nó nhất là 59 và 61. Khoảng cách của chúng là 2, mà $\ln 60 \approx 4{,}09$). Nhưng có lúc, khoảng cách giữa những số nguyên tố lại bé hơn nhiều hoặc lớn hơn nhiều so với $\ln x$ (ví dụ khoảng cách giữa hai số nguyên tố 523 và 541 bằng 18, nhưng lấy $x = 530$ thì $\ln 530 \approx 6{,}27$. Một trong những bài toán nổi tiếng của lí thuyết số là bài toán những số nguyên tố sánh đôi p và $p + 2$ (như 17 và 19) : *giả thiết rằng tồn tại vô hạn những cặp số nguyên tố có hiệu số bằng 2*. Thế mà trong hơn một thế kỉ, các nhà toán học đã cố gắng chứng minh điều đó, nhưng uổng công. Tuy vậy, họ thành công trong những nghiên cứu rộng hơn về những số nguyên tố cách nhau một khoảng nhỏ hơn khoảng mà công thức tổng quát dự kiến. Năm 1965, Enrico Bombieri, ở Viện nghiên cứu cao cấp Princeton, New Jersey, và Harold Davenport, đã chứng minh rằng tồn tại vô hạn cặp số nguyên tố liên tiếp p_k, p_{k+1} có một khoảng cách nhỏ hơn nửa khoảng cách trung bình $\ln x$ giữa hai số nguyên tố (ví dụ khoảng cách giữa 101 và 103 là 2 thì $\ln 102 \approx 4{,}6$) và $103 - 101 < \frac{\ln 102}{2}$ nghĩa là $c < \frac{1}{2}$. Cuối những năm 80, sự ước lượng số c chuyển từ một nửa đến một phần tư đối với các số nguyên tố khá lớn. Ngày nay, A. Goldston và Cem Y. Yildirim vừa có một khám phá còn quan trọng hơn nhiều : *cho một phân số $\frac{a}{b}$, dù nhỏ đến đâu cũng tồn tại vô hạn cặp số nguyên tố liên tiếp p_k, p_{k+1} có một khoảng cách nhỏ hơn tích a/b với khoảng cách trung bình của chúng tức là $\frac{a}{b}\ln x$ với $p_k < x < p_{k+1}$*

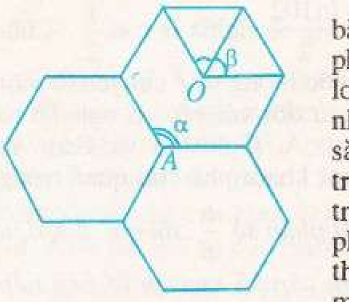
"Những kết quả này phá tan cả một chuỗi kỉ lục trước đó. Phần nào như thể một ai đó chạy 1000 mét hết hai phút", Carl Pomerance, phòng thí nghiệm Bell ở Murray Hill, New Jersey, nói.

Brian Conrey, phụ trách Viện Toán học Mỹ ở Palo Alto, California, cũng có ý kiến như vậy: "Đó là một khám phá khác thường". Ý tưởng đổi mới của Goldston và Yildirim là không hạn chế ở sự phân bố các cặp số nguyên tố, mà còn nghiên cứu chúng theo những dãy ba, bốn hoặc hơn nữa. Mở rộng phạm vi nghiên cứu như vậy đã cho phép họ đơn giản hóa các công thức ước lượng khoảng cách giữa các số nguyên tố. Và họ hết sức ngạc nhiên là đã có được kết quả mới về những khoảng cách đó, nhỏ hơn nhiều khoảng cách trung bình. "Kết quả này tốt hơn nhiều, đến nỗi tôi tưởng mình đã nhầm. Như mọi người, tôi cực kì ngạc nhiên thấy đạt được kết quả đó dễ dàng đến như vậy", A. Goldston, người đã làm việc từ 20 năm nay với vấn đề đó, nhớ lại.

(Xem tiếp trang 9)



PHỦ MẶT PHẲNG bởi các ĐA GIÁC ĐỀU



Hình 1

Ta thường gặp bài toán phủ mặt phẳng bởi một số loại hình bằng nhau như khi lát sàn nhà, vẽ hình trên tường, trang trí mảnh vải... mà phần mặt bị phủ có thể mở rộng về mọi phía. Điều kiện để phủ mặt phẳng bởi các hình là giữa các hình không có chỗ hở và các hình không chờm lên nhau.

Trường hợp đơn giản nhất là chỉ dùng một loại đa giác đều để phủ mặt phẳng. Xét các đa giác đều bằng nhau có m cạnh (m nguyên dương), có góc ở đỉnh là α, góc ở tâm đa giác là β thì $m\beta = 360^o$ và $\alpha + \beta = 180^o$ (ở hình 1 vẽ $m = 6$). Từ đó $\alpha = 180^o\left(1-\dfrac{2}{m}\right)$ suy ra $m \geq 3$ và

$60^o \leq \alpha < 180^o$ (1)

Giả sử quanh đỉnh chung A có k (k nguyên dương) đa giác đều m cạnh kề nhau thì $k\alpha = 360^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $3 \leq k \leq 6$. Xảy ra các trường hợp sau :

- Với $k = 3$ thì $\alpha = 120^o$, $\beta = 60^o$, $m = 6$: hình lục giác đều.
- Với $k = 4$ thì $\alpha = 90^o$, $m = 4$: hình vuông.
- Với $k = 5$ thì $\alpha = 72^o$, $\beta = 108^o$, không tồn tại m nguyên.
- Với $k = 6$ thì $\alpha = 60^o$, $\beta = 120^o$, $m = 3$: hình tam giác đều.

Như vậy nếu dùng *một loại đa giác đều* bằng nhau để phủ mặt phẳng thì chỉ dùng được 3 loại hình : lục giác đều, hình vuông, tam giác đều.

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

Bạn dùng các loại đa giác đều nào để phủ mặt phẳng sao cho ở mỗi đỉnh chung có 3 đa giác kề nhau, trong đó :

1) có ba đa giác khác loại ?

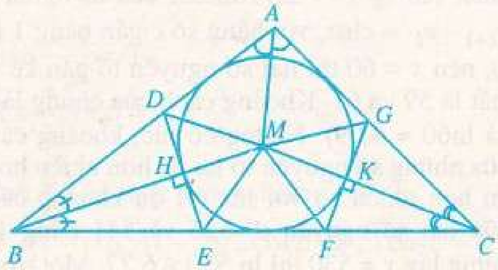
2) có hai đa giác cùng loại bằng nhau và một đa giác loại khác ?

Giải đáp : PHÂN CHIA TAM GIÁC THÀNH CÁC TAM GIÁC

(Đề đăng trong THTT số 322 tháng 4.2004)

Ta chỉ ra *sự phân chia tam giác có một góc tù thành 7 tam giác nhọn* và chứng minh rằng *không thể phân chia ít hơn thế.*

a) Một trong nhiều cách phân chia ΔABC với góc A tù thành 7 tam giác nhọn : Gọi M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC (h. 2). Từ các giao điểm H và K của đường tròn đó với MB và MC theo thứ tự, kẻ $DE \perp BM$ và $FG \perp MC$ ($D \in AB$; $G \in AC$; E, $F \in BC$). Dễ thấy các góc $\widehat{DAM} = \widehat{GAM}$, $\widehat{BDH} = \widehat{BEH}$, $\widehat{CGK} = \widehat{CFK}$, $\widehat{MDA} = \widehat{MDH}$, $\widehat{MEH} = \widehat{MEF}$, $\widehat{MFE} = \widehat{MFK}$, $\widehat{MGA} = \widehat{MGK}$ đều là góc nhọn. Từ đó các góc MAD, MAG, MDA, MDH, MEH, MEF, MFE, MFK, MGK, MGA đều lớn hơn 45^o. Suy ra



Hình 2

GIẢI BÀI ... *(Tiếp trang 20)*

Nếu như $s > 1$ thì vế phải của (3) luôn chia hết cho $\left(2^t+1\right)^2+1 = 10$, mâu thuẫn với (3). Điều đó chứng tỏ $s = 1$ và $n = 2$. Từ đó suy ra $m = 3$.

Thử lại ta thấy bộ ba $(a\ ;\ m\ ;\ n) = (3\ ;\ 3\ ;\ 2)$ nghiệm đúng phương trình.

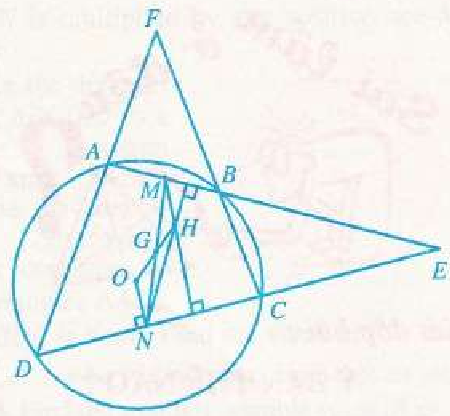
Tóm lại, phương trình đã cho có các nghiệm : $(3\ ;\ 3\ ;\ 2)$, $(1\ ;\ m\ ;\ n)$, $(a\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $(2\ ;\ m\ ;\ 1)$ với a, m, n nguyên dương tuỳ ý.

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài T4/THPT. *Cho bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh rằng ba trục đẳng phương của các cặp đường tròn với các đường kính AB và CD, BC và DA, AC và BD là đồng quy.*

Lời giải. Giả sử A, B, C, D được sắp xếp trên đường tròn tâm O theo chiều kim đồng hồ. Kí hiệu $\mathscr{C}_i$ $(i = 1, 2, ..., 6)$ là các đường tròn đường kính AB, CD, BC, DA, AC, BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD ; G là trung điểm của MN ; H là điểm đối xứng của O qua G.

Nếu A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình thang cân (hình chữ nhật, hình vuông) thì kết quả là hiển nhiên (*bạn đọc tự kiểm tra*). Bây giờ ta giả sử E là giao điểm của AB và CD. Nhận thấy tứ giác $MONH$ là hình bình hành, suy ra $\begin{cases} OM \parallel NH \\ ON \parallel MH \end{cases}$ mà $\begin{cases} OM \perp AB \\ ON \perp CD \end{cases}$ nên $MH \perp CD$ và



$NH \perp AB$. Từ đó H là *trực tâm* $\Delta\ EMN$, do đó $EH \perp MN$ (1). Vì AB là trục đẳng phương của hai đường tròn $\mathscr{C}_1$ và (O) ; CD là trục đẳng phương của hai đường tròn $\mathscr{C}_2$ và (O) nên E là tâm đẳng phương của ba đường tròn $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, (O). Từ (1) suy ra EH là trục đẳng phương của hai đường tròn $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$. Nói cách khác trục đẳng phương của $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$ đi qua H. Chứng minh tương tự ta cũng thấy các trục đẳng phương của các cặp đường tròn $(\mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4)$, $(\mathscr{C}_5, \mathscr{C}_6)$ đi qua H (đpcm).

Nhận xét. Điểm đồng quy của ba trục đẳng phương cũng chính là điểm đồng quy của các đường thẳng *đi qua trung điểm một cạnh và vuông góc với cạnh đối diện* của tứ giác nội tiếp $ABCD$ (một kết quả mà nhiều bạn đọc đã quen thuộc). Đồng thời nó cũng là điểm đồng quy của *bốn đường thẳng R. Simson* của các điểm A, B, C, D ứng với các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC (*xem bài T9/232, THTT số tháng 10 năm 1996*).

HỒ QUANG VINH

---

các góc AMD, DME, EMF, FMG, GMA đều là góc nhọn.

b) Gọi số tam giác được phân chia từ ΔABC là $f(ABC)$. Theo câu a thì $\min f(ABC) \le 7$.

Ta chứng minh không thể phân chia ΔABC thành ít hơn 7 tam giác nhọn lần lượt dựa vào các nhận xét (NX) sau :

1) Phải dựng tia AM nằm giữa hai tia AB, AC để phân chia góc A tù thành hai góc nhọn.

2) Nếu trong sự phân chia ΔABC thành $n+1$ tam giác $(n > 0)$ mà *vẫn tồn tại một tam giác không nhọn*, chẳng hạn MNP, lúc đó $f(ABC) = n + f(MNP) \Rightarrow \min f(ABC) = n + \min f(MNP)$ mà $\min f(ABC) = \min f(MNP) \Rightarrow n = 0$, mâu thuẫn.

3) Từ NX2 rút ra điểm M của tia AM không thể nằm trên một cạnh BC mà phải nằm trong ΔABC.

4) Từ điểm M trong ΔABC kẻ n tia thì $n \ge 5$ vì nếu $n \le 4$ thì tồn tại ΔMNP có góc NMP không nhọn. Lúc đó $f(ABC) \ge 3 + f(MNP)$ dẫn đến mâu thuẫn theo NX 2.

5) Nếu từ điểm M nằm trong ΔABC kẻ $n \ge 5$ tia mà có tia MA, MB thì ΔAMB nhọn. Xét các tia còn lại dẫn đến mâu thuẫn theo NX3. Suy ra không thể kẻ MB, MC.

6) Vậy từ điểm M nằm trong ΔABC kẻ $n \ge 5$ tia (mà không mâu thuẫn với NX3) thì phải có ít nhất một tia MD cắt cạnh AB, một tia MG cắt cạnh AC và hai tia ME, MF cắt cạnh BC như ở hình 2, số tam giác được phân chia lúc này ít nhất là 7.

Bạn *Nguyễn Kim Dũng*, 12C, THPT Tam Nông, **Phú Thọ** có lời giải đúng, được nhận tặng phẩm.

PHI PHI

Giải đáp bài :

Ý BẠN THẾ NÀO ?

Nhiều bạn đã nhận xét rất đúng : lời giải phạm sai lầm từ bước biến đổi :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2+3x+3}+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\frac{x^2+3x+3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}} \quad (!)$$

Lí do : bạn học sinh đó đã đưa một số thực vào căn bậc hai vì đã công nhận $\sqrt{x^2}=x$ (?), mặc dù chưa biết dấu của x như thế nào. Từ đó đưa ra kết quả thiếu chính xác.

Lời giải đúng. Biến đổi

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+3}-\sqrt{x^2+x+1}) = ...$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

Suy ra :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+3}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+3}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=-1$$

Nhận xét. Ngoài một số bạn kết luận rằng giới hạn không tồn tại (?) còn lại đều có đáp án đúng. Những bạn sau có đáp án tốt hơn cả :

Nguyễn Thị Vân Anh, 11K3, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Lưu Văn Cường*, 11A6, THPT Sào Nam, Duy Xuyên, **Quảng Nam** ; *Mai Thị Quy*, 11 Tin, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Nguyễn Thị Kim Phụng*, 11A3, THPT Tuy Phước, **Bình Định** ; *Đinh Ngọc Thạch*, 11 Tin, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. **Vũng Tàu**.

NGỌC HIỀN

SAI Ở ĐÂU ?

Bài toán : Giải phương trình :

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=5 \quad (1)$$

Lời giải như sau :

ĐK : $x\geq 1$. (*)

Đặt $U=\sqrt{x-1}\geq 0$ và $V=\sqrt{2x-1}\geq 0$.

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} U+V=5 & (2)\\ V^2-2U^2=1 & (3)\end{cases}$$

Từ (2) rút U theo V rồi thế vào (3) ta được :

$V^2-2(5-V)^2=1$ hay $V^2-20V+51=0$

Giải phương trình này ta được 2 nghiệm $V_1=17$ và $V_2=3$ đều là số dương. Từ đó tính được $x_1=145$ và $x_2=5$ đều thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x_1=145$, $x_2=5$.

Bạn hãy phát hiện xem lời giải trên sai ở đâu ?

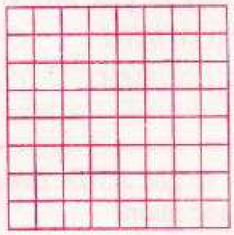
NGUYỄN THANH HẢI

(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)

SINGAPORE MATHEMATICAL...

(Tiếp trang 5)

31. The diagram below shows an 8 × 8 square board. Find the number of squares which exist as part of the square board. (As an example, 14 squares exist as part of a 3 × 3 square board).



32. Find the number of positive integers x such that $4x^4+1$ is prime.

33. Find the number of integers N such that $1\leq N\leq 2004$ and N can be expressed as the difference between the squares of two integers.

34. Find the sum of the squares of all real roots of the equation $x^4+4+11x^2=8(x^3+2x)$

35. How many real solutions does the following system of simultaneous equations have ?

$$\begin{cases} 8(x^3+y^3+z^3)=73,\\ 2(x^2+y^2+z^2)=3(xy+yz+zx),\\ xyz=1\end{cases}$$

VKT giới thiệu.

HÀM SỐ VỀ HẠNH PHÚC

Nghiên cứu quan hệ gia đình với tất cả những khía cạnh phức tạp của nó là một nhiệm vụ của các nhà khoa học xã hội và nhân văn, có thể có sự hỗ trợ của các nhà sinh lí học. Không ai nghĩ rằng các nhà toán học, mà đối tượng nghiên cứu là lí luận, tư duy trừu tượng, lại cũng có tiếng nói trong vấn đề này.

Tiến sĩ Murray và nhà tâm lí học John Gotln ở Đại học Washington ở Seattle đã nghiên cứu 700 cặp vợ chồng người Mỹ, và đưa ra hai công thức toán học cho phép xác định xem một cuộc hôn nhân tốt hay xấu (theo nghĩa đem lại hạnh phúc, hay không chắc đưa đến hạnh phúc). Độ chính xác theo họ là 94%. Tất cả những cặp tham gia vào thí nghiệm đều được quan sát sau ngày cưới, trong một cuộc nói chuyện mười lăm phút.

Họ trao đổi với nhau những vấn đề dễ xảy ra *mâu thuẫn* trong gia đình, thường gọi là những vấn đề *nhạy cảm* như tiền bạc, quan hệ "chăn gối" cách đối xử với gia đình hai bên, con cái... Mức độ đánh giá được cho theo thang điểm : điểm cộng và điểm trừ. Điểm cộng dành cho những *dấu hiệu tốt* biểu hiện qua thái độ vui vẻ, câu trả lời có tính hóm hỉnh (humour), nụ cười và cử chỉ thỏa mãn, dịu dàng, nói tóm lại là thái độ bằng lòng, phấn khởi, yêu đời của đối tượng. Điểm trừ dành cho những *dấu hiệu xấu* biểu hiện qua thái độ buồn, không muốn đả động đến quan hệ gia đình, có vẻ chán nản, bất mãn, thậm chí còn chỉ trích, chế diễu người bạn đời.

Hai nhà nghiên cứu nói : "Chúng tôi đã sử dụng một hệ thống cho điểm đã được công nhận trong tâm lí học, theo đó

- Sự khinh bỉ được -3
- Sự hóm hỉnh được +2

Sau đó chúng tôi đặt những điểm trên đồ thị và biến đổi những đường cong thành hàm số đại số, qua đó chúng tôi kết luận rằng có hay không có sự li dị trong tương lai. Tất nhiên chúng tôi không bao giờ thông báo kết quả xấu cho đương sự, vì không ai muốn nghe nói rằng đám cưới của họ sẽ dẫn đến tan vỡ. Những kết quả thu được cho từng cá nhân của mỗi cặp đã được đặt thành phương trình, rồi các nhà nghiên cứu đã gặp các cặp hai năm một lần để xem thử tình hình cuộc sống vợ chồng của họ ra sao. Nhiều điều khác đã được xét đến trong quá trình thực nghiệm để xác định sự tương thích giữa hai bên, như là ảnh hưởng của người này trên tính cách của người khác trong lúc trò chuyện. "Chúng tôi có thể tính được cách mà những người có liên hệ ảnh hưởng đến nhau. Ví dụ nếu có người vợ có tính nhường nhịn, tránh mọi va chạm, mà người chồng có cá tính nóng nảy, hay làm ầm ĩ, thì cuộc hôn nhân sẽ không bền được. Công thức đó cũng có một khía cạnh tích cực. Nó nói cho chúng ta biết tại sao một số người nào đó có những vấn đề và cần phải làm gì để cứu vãn hạnh phúc"

Sau đây là các hàm số cho vợ và cho chồng.

Hàm số cho vợ :

$f(t+1) = a + r1^{*}f(t) + \mathrm{imf}[m(t)]$

f : vợ ;

m : chồng

t : thời gian

a : hằng số biểu thị trạng thái tinh thần của người vợ khi không có mặt của người chồng ;

$r1^{*}f(t)$: sự dễ dàng thay đổi trạng thái tinh thần của người vợ khi bàn cãi với chồng ;

imf : " hàm ảnh hưởng" đo ảnh hưởng của những nhận xét của chồng về người vợ ;

$m(t)$: số điểm của người chồng trong cuộc nói chuyện kéo dài 15 phút.

$f(t + 1)$: phản ứng của người vợ về người chồng.

Hàm số cho chồng

$m(t + 1) = b + r2^{*}m(t) + \mathrm{ifm}[f(t)]$

b : hằng số biểu thị trạng thái tinh thần của người chồng khi không có mặt của người vợ

X hỏi ? Y, Z trả lời.

HỎI – SỐ NÀY

1.(8.04). Giả sử trong một bài giải hệ phương trình hai ẩn, ta tìm được cặp nghiệm $x = 1$, $y = -1$ và $x = -1$, $y = 1$ thì trong khi làm (hay viết kết luận) ta có thể viết : Nghiệm của hệ đã cho là $x = \pm 1$, $y = \mp 1$ được không ?

(Lý Thị L. 10A$_1$, THPT Nguyễn Tất Thành, Hà Nội)

2. (8.04). Khi thi học sinh giỏi lớp 9, ta có thể sử dụng các công thức không có trong SGK như $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S = \dfrac{abc}{4R}$ hay các bất đẳng thức Trêbưsep, Becnuli mà không phải chứng minh được không ?

(TVD lớp 10A10, THPT BX, Vĩnh Phúc)

TRẢ LỜI - NHỮNG SỐ TRƯỚC

1. (5.04). Ý kiến thứ nhất là đúng vì đây hỏi là số chia hết cho cả 2 và 5 chứ không phải là chia hết cho 2, không chia hết cho 5 và ngược lại. Do đó, ý kiến thứ hai sai vì hai số không đúng là 234, 1345 ($234 \not\vdots\, 5$, $1345 \not\vdots\, 2$). Ở đây chú ý từ "cả"

(Một bạn trường THCS Nghĩa Sơn, Nghĩa Hưng, Nam Định)

2. (5.04). Một số câu văn, thơ giúp nhớ các con số biểu thị số π ở các nước :

Tiếng Anh: How I wish I could recollect of circle round the exact relation Archimede unwound !

(ứng với 3,1415926535897).

Tiếng Pháp : Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages ! Immortel Archimède, sublime ingénieur. Que de ton jugement peut sonder la valeur. Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

(ứng với 3,14159265358979323846264338327 9)

Việt Nam : (Tác giả Nguyễn Bá Thái - 1943).

Cầu Ô tuân ý cao - xa
Ngân - giang lẻ phượng đậm - đà bắc ngang
Tưng - bừng nghênh - đón cô - nương
Chàng - Ngưu vui tỏ nỗi thương - ai tràn
Thường là chuyện khóc khó can
Hóa - thành mưa lũ miên - man tháng - ngày
Trăng tròn đôi tám xuân - xanh.

(Do tiếng Việt đơn âm và từ ngắn nên các tiếng có gạch nối được coi như một tiếng. Ví dụ Ngân - giang chỉ chữ số 9. Riêng câu cuối chữ *tròn* chỉ chữ số 0, chữ *đôi* chỉ chữ số 2 và chữ tám *chỉ chữ số 8*. Cả bài ứng với 3,14159265358979323846264338327950288)

(Nguyễn Nhật Huy, 175 Thái Phiên, Thuận Lộc, Thừa Thiên - Huế)

THỦY VŨ

$r2^*m(t)$: sự dễ dàng thay đổi trạng thái tinh thần của người chồng khi bàn cãi với vợ.

ifm : "hàm ảnh hưởng" do ảnh hưởng của những nhận xét của vợ về người chồng.

$f(t)$: số điểm của người vợ trong cuộc nói chuyện kéo dài 15 phút.

$m(t + 1)$: phản ứng của người chồng về người vợ.

Kết quả càng cao thì nguy cơ li dị càng lớn.

Lời bàn : Khi lấy vợ, lấy chồng ai cũng muốn có hạnh phúc gia đình nồng thắm, đầm ấm, bền lâu cho đến "đầu bạc, răng long". Những hàm số trên là *những điều nghiêm túc* hay chỉ là *chuyện tầm phào* ? Xin để bạn đọc đánh giá.

Chỉ biết rằng bài này được đăng vào ngày tình yêu Valentine năm 2004 trên báo Pháp *Courrier International* của tác giả Chris Lackner số 263 ra vào tuần 12 - 18 tháng 2 năm 2004. Xin viết lại để bạn đọc tham khảo.

PHAN THANH QUANG
(Sưu tầm)

Giải đáp : DU LỊCH HÈ

Theo hàng ngang, từ trên xuống :

Ngũ Động Thi Sơn (Hà Nam), Nhà thờ đá Phát Diệm (Ninh Bình), Côn Sơn (Hải Dương), Chùa Dâu (Bắc Ninh), Chùa Thầy (Hà Tây), Tức Mạc (Nam Định), Phủ Giầy (Nam Định), Đền Và (Hà Tây), Bích Động (Ninh Bình), Đồ Sơn (Hải Phòng), Tam Cốc (Ninh Bình), Kiếp Bạc (Hải Dương), Chùa Tháp (Nam Định), Chùa Mía (Hà Tây), Thác Đa (Hà Tây), Đền Sóc (Hà Nội), Cổ Loa (Hà Nội), Chùa Bà Đá (Hà Nội), Chùa Keo (Thái Bình, Nam Định đều có chùa Keo), Quất Lâm (Nam Định), Ba Lạt(cửa sông Hồng), Chùa Cổ Lễ (Nam Định), Hoa Lư (Ninh Bình), Đền Trần (Nam Định), Hương Tích (Hà Tây).

Theo hàng dọc, từ trái sang :

Bia Bà (Hà Tây), Phú Nhai (Nam Định), Tháp Bút (Bắc Ninh), Tam Đảo (Vĩnh Phúc), Hải Thịnh, Thịnh Long (Nam Định), Hồ Tây (Hà Nội), Ba Vì (Hà Tây), Cồn Lu (Nam Định).

Nhận xét. Nhiều bạn không phát hiện ra các ô chữ hàng dọc. Bạn Trần Văn Nghĩa, xóm PT1, Trực Tĩnh, Trực Ninh, **Nam Định** nêu đủ các địa danh trên. Các bạn kể được nhiều địa danh nữa là : *Ngô Đức Công*, 11A, THPT Thanh Chương 1, **Nghệ An**, *Nguyễn Văn Công*, 9A, THCS Hưng Hóa, Tam Nông, **Phú Thọ**, *Vũ Thị Hương*, 11A4, THPT Lê Xoay, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**, *Phan Cường*, Văn phòng Công ty CP Đào tạo nghiệp vụ và HTQT 59 Vũ Trọng Phụng, **Hà Nội**, *Triệu Thị Thắm*, phố Đức Hinh 1, TT Văn Quan, **Lạng Sơn**.

VŨ THANH THÀNH

HIỂU BIẾT VỀ THỦ ĐÔ - CÁC CON SỐ VÀ MẢNH BÌA

Kỉ niệm 50 năm Giải phóng Thủ đô, các bạn hãy sắp xếp các con số cho ở bảng bên vào các mảnh bìa thích hợp dưới đây nhé.

30
923
233
2930600
5
1010
9
1800000
58
1075
2080
11
462
466

- Có ... huyện
- Hà Nội là kinh đô nước Việt từ năm ......
- Toàn thành phố Hà Nội rộng .... km^2
- Dân số thành phố ....
- Số phố của Khu phố cổ bảo tồn ......
- Dân số nội thành ....
- Có ..... phường, xã, thị trấn
- Có ...... quận
- Hồ Tây rộng ..... ha
- Chiều dài sông Hồng phần qua Hà Nội là ....km
- Núi cao nhất là ....m
- Tỉnh lị gần nhất cách Hà Nội ... km
- Tỉnh lị xa nhất cách Hà Nội ..... km
- Năm ra đời trường đại học đầu tiên.......

Bạn nào ghép đúng và gửi sớm sẽ được nhận tặng phẩm.
Danh sách bạn giải đúng sẽ in trên số 328 tháng 10.2004.

VŨ ĐỖ QUAN

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

NĂM THỨ 41
Số 326 (8-2004)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh bìa 1 (từ trái sang phải) Thầy Doãn Minh Cường, Phạm Kim Hùng, Nguyễn Đức Thịnh, Thầy Đỗ Thanh Sơn, Lê Hùng Việt Bảo, Thầy Nguyễn Vũ Lương, Thầy Đặng Hùng Thắng, Mr. Jozsef Pelikan (Chủ tịch Ban cố vấn IMO), thầy Nguyễn Khắc Minh, Nguyễn Minh Trường, Thầy Phạm Văn Hùng, Hứa Khắc Nam, Nguyễn Kim Sơn

Bìa 2: Kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 45 (IMO 2004 Hellas)

Bìa 3: **Giải trí toán học - Math Recreation**

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 327 (9/2004)

- Đường hình tim
- Nguồn gốc phát sinh môn Giải tích
- Vài ứng dụng của phương tích của một điểm đối với một đường tròn.
- Hướng dẫn giải Đề thi chọn HS giỏi lớp 9 Thừa Thiên - Huế 2004.
- Kết quả Cuộc thi chọn học sinh giỏi toán THPT Quốc gia 2003 - 2004
- Lời giải Cuộc thi Toán 40 năm THTT (tiếp theo)

Mời các bạn đặt mua THTT tại các cơ sở Bưu điện !

THTT

Giải đáp :

VẼ BẢN ĐỒ THAM QUAN

Ta thấy con đường ngắn nhất (xem bảng) giữa TT An và TT Dài là AD = 2 (1)

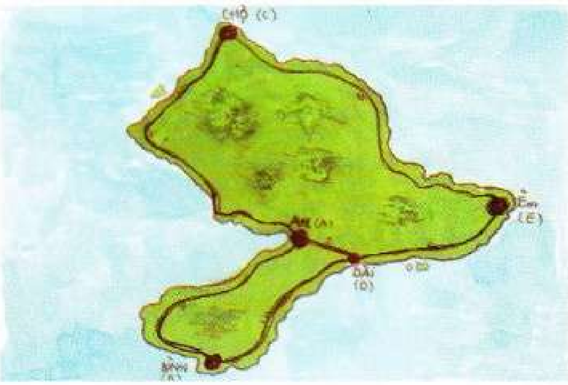
Mặt khác CB = 11 = 7 + 4 = CA + AB

DC = DA + AC = 2 + 7 = 9

EA = ED + DA = 4 + 2 = 6

BE = BD + DE = 3 + 4 = 7

Mà các thị trấn A, B, D đều nằm trên bờ biển. Vậy A nằm trên con đường ngắn nhất nối B và C, nối D và C.



D nằm trên con đường ngắn nhất nối E và A, nối B và E. Suy ra thứ tự các thị trấn đi từ Bắc xuống Tây, Nam, Đông và trở lại Bắc là C → A → B → D → E → C (2)

B	4			
C	7	11		
D	2	3	9	
E	6	7	10	4
	A	B	C	D

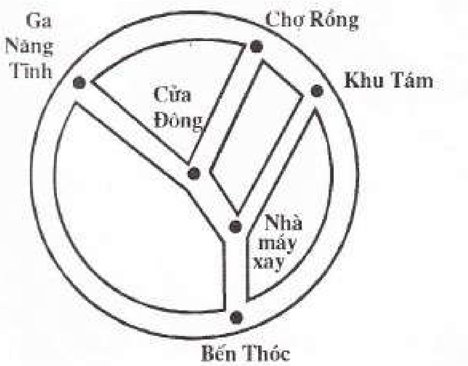
Từ (1) và (2)ta có con đường cắt ngang đảo nối A và D. Vậy có bản đồ đảo như hình bên.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Lệ Quyên*, số 14 tổ 1 Finom, Đức Trọng, **Lâm Đồng** làm đúng và vẽ bản đồ rất đẹp (hình bên). Bạn gọi đảo này là đảo Toán học. Các bạn khác được nhận quà của tòa soạn là *Nguyễn Bá Đông*, 10A26, THPT Lê Quý Đôn, Hà Đông, **Hà Tây**, *Bùi Phi Anh*, 11 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**, *Nguyễn Khắc Dũng*, 12A2, PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Viết Dũng*, 12B, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Văn Hải*, 12G, THPT Nghĩa Đàn, **Nghệ An**. *Lư Thị Lệ Thương*, 12A1, THPT số 1 Bảo Thắng, TT Phố Lu, Bảo Thắng, **Lào Cai**. Rất tiếc một bạn ở Hải Phòng đã quá máy móc, lập luận *A, B, C, D* thẳng hàng (!) rồi kết luận không vẽ được.

VKT

CÙNG RA GA

Nhà Nam ở Bến Thóc, Tùng ở Khu Tám. Nam đến nhà Tùng rồi cả hai cùng ra ga Năng Tĩnh, không quay lại nhà Nam. Hỏi hai bạn có bao nhiêu cách cùng đi nếu không đi lặp lại bất cứ đoạn đường nào.



BÍNH NAM HÀ

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT28M4

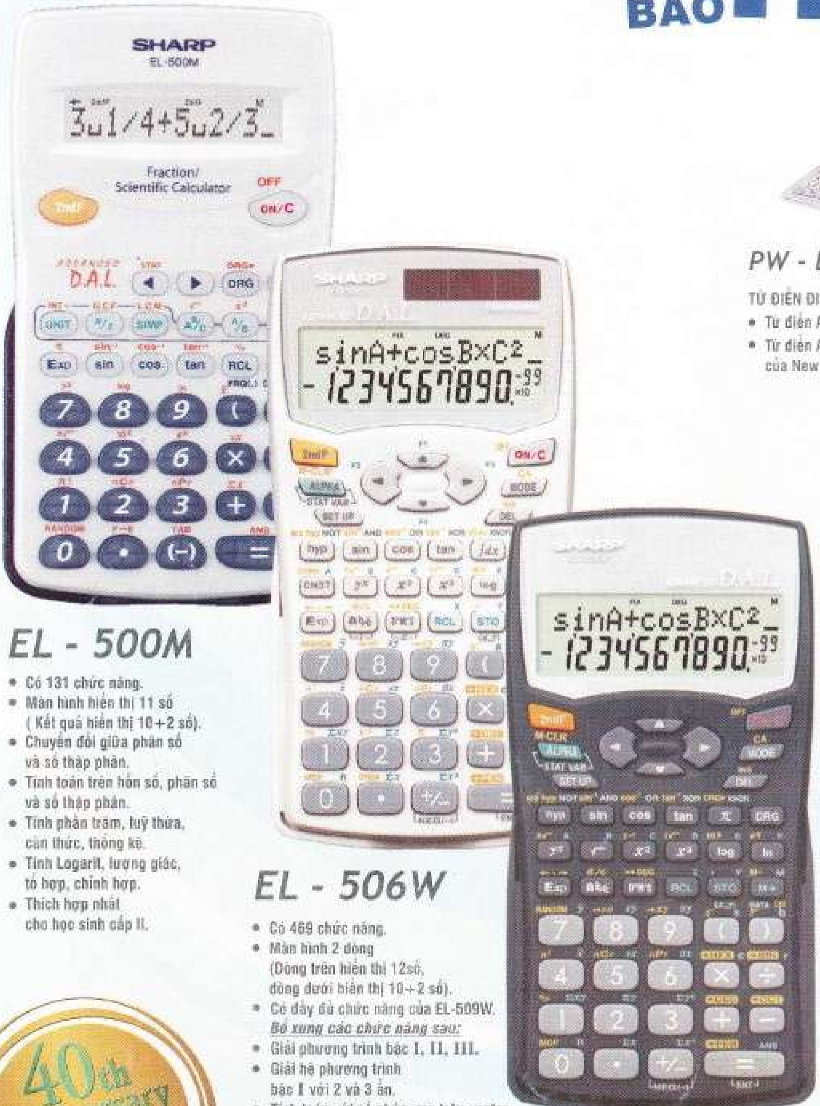
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2004

Giá : 3500 đồng
Ba nghìn năm trăm đồng

SHARP®
SHARP CORPORATION OSAKA, JAPAN

MÁY TÍNH KHOA HỌC

SẢN PHẨM CHÍNH HIỆU
CHẤT LƯỢNG HÀNG ĐẦU THẾ GIỚI
BẢO HÀNH 1 NĂM



PW - E300

TỪ ĐIỂN ĐIỆN TỬ:
- Từ điển Anh ngữ Oxford (335.000 từ).
- Từ điển Anh ngữ chuyên ngành của New Oxford (600.000 từ).

PW - E500

TỪ ĐIỂN ĐIỆN TỬ:
- Từ điển Anh ngữ Oxford (335.000 từ).
- Từ điển Anh ngữ chuyên ngành của New Oxford (600.000 từ).
- Từ điển trích dẫn của Oxford (20.000 từ).

EL - 9900

- Màn hình hiển thị được 132 x 64 điểm ảnh.
- Có 827 chức năng.
- Khả năng lưu trữ 64 KB.
- Có đầy đủ các chức năng của máy EL-9400.
- Có chức năng vẽ đồ thị.
- Bàn phím với 2 chế độ (chuyên sâu & cơ bản).
- Thích hợp cho nghiên cứu và giảng dạy.

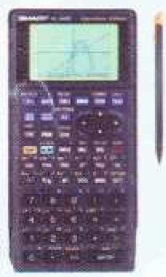
EL - 500M

- Có 131 chức năng.
- Màn hình hiển thị 11 số (Kết quả hiển thị 10+2 số).
- Chuyển đổi giữa phân số và số thập phân.
- Tính toán trên hỗn số, phân số và số thập phân.
- Tính phần trăm, luỹ thừa, căn thức, thống kê.
- Tính Logarit, lượng giác, tổ hợp, chỉnh hợp.
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp II.

EL - 506W

- Có 469 chức năng.
- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Có đầy đủ chức năng của EL-509W.

<u>Bổ xung các chức năng sau:</u>
- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Giải hệ phương trình bậc I với 2 và 3 ẩn.
- Tính toán với số phức, ma trận,vector. trong dạng đại số và lượng giác.
- Thích hợp nhất cho SV Đại học.



EL - 9400

- Màn hình hiển thị được 132 x 64 điểm ảnh.
- Có 801 chức năng.
- Khả năng lưu trữ 32 KB.
- Tính thống kê nâng cao.
- Giải phương trình.
- Giải hệ phương trình tuyến tính.
- Giải phương trình vi phân.
- Sử dụng được bút cảm ứng.
- Kết nối được với máy vi tính.
- Có chức năng vẽ đồ thị.
- Thích hợp cho nghiên cứu và giảng dạy.

EL - 509W

- Có 272 chức năng.
- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp III.

- Đầy đủ các chức năng của máy EL-500M.

<u>Bổ xung các chức năng sau:</u>
- Giải phương trình hồi quy.
- Tính toán có sử dụng ô nhớ.
- Tính số ngẫu nhiên.
- Tính đạo hàm, tích phân, thống kê.

- Toàn bộ máy tính SHARP chính hiệu đều được dán tem chống hàng giả. Tem do Trung tâm kỹ thuật tài liệu nghiệp vụ - Bộ Công An phát hành
- Máy tính SHARP chính hiệu được bảo hành 1 năm.

Đơn vị Nhập khẩu & Phân phối duy nhất tại Việt Nam

limex
CÔNG TY CỔ PHẦN XUẤT NHẬP KHẨU LÊ MINH
LEMINH IMPORT EXPORTATION JOINT STOCK COMPANY

VĂN PHÒNG TẠI HÀ NỘI
111A - Thụy Khuê - Quận Tây Hồ, Hà Nội
ĐT: 84.4.8474577 - Fax: 84.4.8474592
E-mail: limexhn@hn.vnn.vn

VĂN PHÒNG TẠI HỒ CHÍ MINH
164 Đường Cộng Hoà, P12, Quận Tân Bình, HCM
ĐT: 84.8.8116417 - Fax: 84.8.8424237
E-mail: limexhcm@hcm.vnn.vn