TRẦN BÌNH

Bài tập giải sẵn
GIẢI TÍCH II & III

- TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN
- PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
- LÝ THUYẾT CHUỖI

→ TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CHỌN LỌC
→ PHỤ CHƯƠNG CÁC ĐỀ THI HỌC KỲ II CÁC NĂM 2004 - 2008

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRẦN BÌNH

BÀI TẬP GIẢI SẴN
GIẢI TÍCH II+III

TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - LÝ THUYẾT CHUỖI

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CHỌN LỌC

PHỤ CHƯƠNG: CÁC ĐỀ THI HỌC KỲ II CÁC NĂM 2004 - 2008 ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

(In lần thứ năm có sửa chữa và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Sau khi bộ giáo trình GIẢI TÍCH (2 tập) của tác giả do Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật ấn hành (1998 - 2000), nhiều độc giả đã đề nghị tác giả viết tiếp bộ Bài tập giải tích giải sẵn có phần tóm tắt lý thuyết như một ***Sổ tay toán học giải tích*** *cho sinh viên kỹ thuật và kỹ sư, dựa trên bộ giáo trình GIẢI TÍCH.*

Để đáp ứng yêu cầu đó nhằm nâng cao chất lượng đào tạo trong hiện tại và tương lai, tác giả đã soạn bộ bài tập này: GIẢI TÍCH I (II, III), ứng với các nội dung học ở học kỳ I (II, III).

*Phần bài tập, tác giả đã chọn lọc các bài từ dễ, trung bình đến khó, đại diện cho các loại tương ứng với các phần lý thuyết theo chương trình toán giải tích hiện tại. Những bài khó có đánh dấu * nhằm bồi dưỡng thêm cho sinh viên (nhất là các sinh viên khá, giỏi). Cuối sách có phần phụ chương: Các đề thi Giải tích học kỳ II các năm 2004 - 2008 của Đại học Bách khoa để sinh viên tham khảo.*

Tác giả xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp, nhất là PGS. TS. Dương Quốc Việt đã đọc rất kỹ bản thảo và cho ý kiến quý báu.

Trong lần xuất bản thứ năm này, mặc dù đã cố gắng sửa chữa bổ sung song vẫn không tránh khỏi thiếu sót, rất mong bạn đọc đóng góp ý kiến để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn.

TÁC GIẢ

MỤC LỤC

BÀI TẬP GIẢI TÍCH II

CHƯƠNG 1

ÁP DỤNG PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀO HÌNH HỌC (HÌNH HỌC VI PHÂN)

§1. ĐƯỜNG CONG PHẲNG

1.1 Phương trình

Phương trình Descate: $F(x, y) = 0$ hay $y = f(x)$, $a \le x \le b$ (1)

Phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta \qquad (2)$$

Phương trình độc cực: $r = f(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ (3)

Phương trình tự hàm: $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$

s là độ dài cung đường cong tính từ một điểm gốc nào đó của cung.

1.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến

Với (1): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, $y - y_0 = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Với (2): $\frac{y-y_0}{y'_0} = \frac{x-x_0}{x'_0}$, $\frac{y-y_0}{x'_0} = -\frac{x-x_0}{y'_0}$

Với $(x_0, y_0) \in$ đường $x'_0 = x'(t_0)$, $y'_0 = y'(t_0)$

Cosin chỉ hướng của tiếp tuyến:

Với (1): $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2_x}}$, $\sin\alpha = \frac{y'_x}{\sqrt{1+y'^2_x}}$

Với (2): $\cos\alpha = \frac{x'_t}{\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}}$, $\sin\alpha = \frac{y'_t}{\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}}$

1.3. Vi phân cung

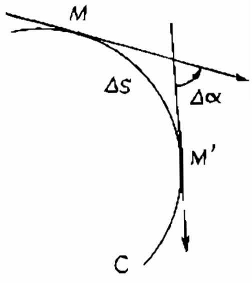
Với (1): $ds = \sqrt{1+y'^2_x}\, dx$

(2): $ds = \sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\, dt$

(3): $ds = \sqrt{r^2+r'^2}\, d\varphi$

1.4. Độ cong

Tại $M \in C$: $k = \lim_{M'\to M}\left|\frac{\Delta\alpha}{\overset{\frown}{MM'}}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$



Hình 1.

Với (1): $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

Với (2): $k = \frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$

Với (3): $k = \frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$

1.5. Đường tròn mặt tiếp - Bán kính và tâm cong

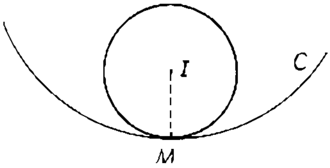
Đường tròn mặt tiếp với đường cong (C) tại M là đường tròn:

- Tiếp xúc với (C) tại M

- Bề lõm trùng với bề lõm của (C)

- Độ cong tại M bằng độ cong của (C) tại M (hình 2)

- Tâm (x_0, y_0) và bán kính R của đường tròn mặt tiếp là tâm cong và bán kính cong của (C) (Bán kính và tâm chính khúc).



Hình 2.

Với (1): $R = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, $\begin{cases} x_0 = x - \dfrac{(1+y'^2)y'}{y''} \\ y_0 = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$

Với (2): $R = \dfrac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-x''y'|}$, $\begin{cases} x_0 = x - \dfrac{(x'^2+y'^2)y'}{x'y''-x''y'} \\ y_0 = y + \dfrac{(x'^2+y'^2)x'}{x'y''-x''y'} \end{cases}$

Với (3): $R = \dfrac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{|r^2+2r'^2-rr''|}$

Phương trình đường tròn mặt tiếp: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

1.6. Túc bế và Thân khai

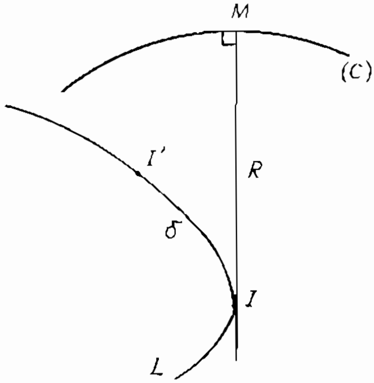
Quỹ tích (L) các tâm cong của đường cong (C) là túc bế của (C) và (C) là thân khai của L (hình 3).

- Tiếp tuyến với (L) là pháp tuyến với (C) (tại các điểm tương ứng).

- Nếu R biến thiên đơn điệu thì $R - \sigma = k = const$.

$\sigma = \overset{\frown}{II'}$ độ dài cung trên L.

Phương trình tham số của L:



Hình 3.

Với (1):

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{(1+y'^2)y'}{y''} \\ Y = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases} \quad \text{(Tham số x)}$$

Với (2):

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{(x'^2+y'^2)y'}{x'y''-x''y'} \\ Y = y + \dfrac{(x'^2+y'^2)x'}{x'y''-x''y'} \end{cases} \quad \text{(Tham số t)}$$

Túc bế của đường tròn tâm O bán kính a:

$x = a(t\sin t + \cos t)$

$y = a(\sin t - t\cos t)$.

1.7. Hình bao

a) Điểm bất thường

$M_0(x_0, y_0) \in$ đường $\mathscr{C}$: $F(x, y) = 0$ gọi là điểm bất thường của $\mathscr{C}$ nếu: $\exists\, F'_x, F'_y$ liên tục tại M_0 và:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 0 \\ F'_x(x_0, y_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

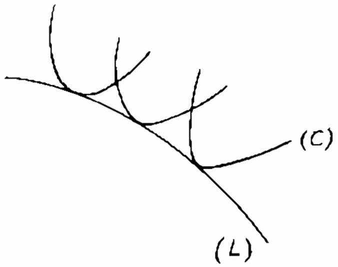
nếu $F'^2_x(x_0, y_0) + F'^2_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ là điểm bình thường của $\mathscr{C}$.

b) Hình bao (L) của họ đường cong (C)

$F(x, y, C) = 0$, L là đường tiếp xúc với mọi đường của họ (C), và tại mỗi điểm của L chỉ có một đường của họ (C) tiếp xúc với nó (hình 4).

Nếu họ (C) có hình bao (L) thì $(x, y) \in L$ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ F'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$



Hình 4.

BÀI TẬP

1. Tìm vi phân cung ds và các cosin chỉ hướng của tiếp tuyến tại M bất kỳ $\in$ đường (C) cho bởi các phương trình:

1) $y^2 = 2px$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

3) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$

5) $r = \dfrac{a}{\cos^2 \dfrac{\varphi}{2}}$

6) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

$\begin{cases} \text{Tìm } \sin V \text{ hoặc } \cos V, \\ V\text{: góc giữa bán kính vecteur và tiếp tuyến} \end{cases}$

Bài giải

1) $2yy' = 2p \Rightarrow y' = \dfrac{p}{y}$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\,dx = \frac{1}{|y|}\sqrt{p^2 + y^2}\,dx$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}};$$

$$\sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y^2}}$$

2) Đưa về tham số: x = acost, y = bsint.

$$ds = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,.dt$$

hay $\quad ds = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,.dt, \quad e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{-a\sin t}{a\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}} = \frac{-\sin t}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\cos t}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}}.$$

3) Đạo hàm 2 vế theo x: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, ta có:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}.y' = 0, \text{ do đó: } y' = \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}} = \frac{\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}}{x^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$$

và: $$ds = \sqrt[3]{\frac{a}{x}}\,dx.$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}\,;\quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{a}{x}}} = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$$

4) Ta có: $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a\sin t$

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,.dt = 2a\sin\frac{t}{2}\,.dt$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{a(1-\cos t)}{2a\sin\frac{t}{2}} = \sin\frac{t}{2}\,;\quad \sin\alpha = \cos\frac{t}{2}$$

5) $$r = \frac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},\quad r'_{\varphi} = \frac{a\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}$$

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,.d\varphi = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\frac{\varphi}{2}} + \frac{a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^6\frac{\varphi}{2}}}\,.d\varphi = \frac{a}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}\,.d\varphi$$

Ta biết: $$\operatorname{tg}V = \frac{r}{r'_\varphi} = \frac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\cos^3\frac{\varphi}{2}}{a\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Do đó: $$\sin V = \cos\frac{\varphi}{2}\ ;\ \cos V = = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

6) Từ $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, đạo hàm 2 vế theo φ ta có:

$$2rr' = -\,2a^2\sin 2\varphi,\quad r' = \frac{-a^2\sin 2\varphi}{r}$$

$$ds = \sqrt{a^2\cos 2\varphi + \frac{a^4\sin^2 2\varphi}{r^2}}\,.d\varphi = \frac{a^2}{r}\,.d\varphi$$

Tương tự 5): $\sin V = \cos 2\varphi$.

2. Tìm độ cong k và bán kính cong R tại một điểm tuỳ ý của các đường cong:

1) $y = x^3$;

2) $y = \operatorname{ch}\frac{x}{a}$

3) $y = a\ln(\cos\frac{x}{a})$;

4) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = a\operatorname{ch}t \\ y = b\operatorname{sh}t \end{cases}$;

6) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

7) $r = a(1 + \cos\varphi)$;

8) $r^2 = a^2.\cos 2\varphi$.

Bài giải

1) Theo (1.4): $$k = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

ở đây: $\quad y = x^3$

$$y' = 3x^2,\ y'' = 6x,\ k = \frac{1}{R} = \frac{6x}{\sqrt{(1+9x^4)^3}}.$$

2) $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a},\ y' = \mathrm{sh}\dfrac{x}{a},\ y'' = \dfrac{1}{a}\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{a}\mathrm{ch}\frac{x}{a}}{\left(1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{3/2}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\mathrm{ch}\frac{x}{a}}{\mathrm{ch}^3\frac{x}{a}} = \frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}.$$

3) $y = a\ln\left(\cos\dfrac{x}{a}\right),\ y' = \dfrac{-\sin\frac{x}{a}}{\cos\frac{x}{a}} = -\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{a}$

$$y'' = \frac{-1}{a\cos^2\frac{x}{a}},\ k = \frac{1}{R} = \frac{1}{a}\left|\cos\frac{x}{a}\right|$$

4) $x = a\cos^3 t,\ x' = -\,3a\cos^2 t\sin t,\ x'' = 6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t$

$y = a\sin^3 t,\ y' = 3a\sin^2 t\cos t,\ y'' = 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t$

$x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^4\sin^4 t\cos^2 t = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$

Tương tự: $\quad x'y'' - x''y' = -\,9a^2\sin^2 t\cos^2 t.$

Do đó: $\quad k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}{(9a^2\sin^2 t\cos^2 t)^{3/2}} = \dfrac{2}{3a|\sin 2t|}$

5) $x = a\,\mathrm{ch}t,\ x' = a\,\mathrm{sh}t,\ x'' = a\,\mathrm{ch}t$

$y = b\,\mathrm{sh}t,\ y' = b\,\mathrm{ch}t,\ y'' = b\,\mathrm{sh}t.$

Do đó: $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{|absh^2t - abch^2t|}{(a^2sh^2t + b^2ch^2t)^{3/2}} = \dfrac{ab}{(a^2sh^2t + b^2ch^2t)^{3/2}}$.

6) $x = a(t - \sin t)$, $x' = a(1 - \cos t)$, $x'' = a\sin t$

$y = a(1 - \cos t)$, $y' = a\sin t$, $y'' = a\cos t$.

$$x'^2 + y'^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

Tương tự: $|x'y'' - x''y'| = 2a^2\sin^2\dfrac{t}{2}$

Do đó: $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{2a^2\sin^2\dfrac{t}{2}}{\left(4a^2\sin^2\dfrac{t}{2}\right)^{3/2}} = \dfrac{1}{4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}$.

7) $r = a(1 + \cos\varphi)$

Theo (1.4), ta tính $r' = -a\sin\varphi$, $r'' = -a\cos\varphi$.

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = a^2(1 + \cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a(1 + \cos\varphi)a\cos\varphi$$

$$= 3a^2(1 + \cos\varphi) = 6a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$(r^2 + r'^2)^{3/2} = [a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi]^{3/2} = (4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2})^{3/2}$$

$$= 8a^3\left|\cos^3\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Vậy: $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \dfrac{6a^2\left(\cos^2\dfrac{\varphi}{2}\right)}{8a^3\left|\cos^3\dfrac{\varphi}{2}\right|} = \dfrac{3}{4a\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|}$.

8) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

Đạo hàm 2 vế theo φ, ta có:

$$2rr' = -2a^2\sin 2\varphi \quad \text{hay } rr' = -a^2\sin 2\varphi$$

Lại đạo hàm theo φ:

$$r'^2 + rr'' = -2a^2\cos 2\varphi = -2r^2$$

Do đó:

$$rr'' = -2r^2 - r'^2$$

và: $$\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right| = \left|r^2 + 2r'^2 + 2r^2 + r'^2\right| = 3(r^2 + r'^2)$$

Vậy: $$k = \frac{1}{R} = \frac{3(r^2 + r'^2)}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{3}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Theo 6) bài 1: $\sqrt{r^2 + r'^2} = \dfrac{a^2}{r}$ nên:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{3r}{a^2}.$$

3. 1) Tìm bán kính cong bé nhất (R_{min}) của đường: $y^2 = 2px$;

2) Tìm độ cong lớn nhất của đường: $y = a\,ch\dfrac{x}{a}$ $(a > 0)$;

3) Lập phương trình đường tròn mật tiếp với đường:

a) $y = x^2 - 6x + 10$ tại $(3, 1)$;

b) $xy = 1$ tại $(1, 1)$.

Bài giải

1) Từ $y^2 = 2px$, đạo hàm 2 vế theo x:

$$y' = \frac{p}{y},\; y'' = \frac{-p}{y^2}.y' = \frac{-p^2}{y^3}$$

Do đó: $$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}$$

Từ công thức này suy ra: $R_{min} = p$ khi $y = 0$.

2) Theo 2) bài 2: $R = a\,ch^2\frac{x}{a}$

$$\Rightarrow \quad R' = 2a\,ch\frac{x}{a}.sh\frac{x}{a}.\frac{1}{a} = sh\frac{2x}{a} = 0 \text{ khi } x = 0.$$

$$R'' = \frac{2}{a}ch\frac{2x}{a}$$

$$\Rightarrow \quad R''(0) = \frac{2}{a} > 0 \text{ nên } R_{min} = R(0) = a.$$

và $\quad k_{max} = \frac{1}{a}$ tại $x = 0$.

3) a) $y = x^2 - 6x + 10$, $y' = 2x - 6$, $y'(3) = 0$

$$y'' = 2,\ R = \frac{(1+0^2)^{3/2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Theo (1.5), các toạ độ tâm của tâm cong ở đây là:

$$x_0 = 3 - \frac{(1+0).0}{2} = 3$$

$$y_0 = 1 + \frac{1+0}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình của đường tròn mật tiếp phải tìm là:

$$(x-3)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

b) $xy = 1$, ta có: $y = \dfrac{1}{x}$, $y' = \dfrac{-1}{x^2}$, $y'' = \dfrac{2}{x^3}$

$$y'(1) = -1,\ y''(1) = 2$$

Do đó: $R = \dfrac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{2} = \sqrt{2}$

$$x_C = 1 - \frac{1+1}{2}(-1) = 2$$

$$y_C = 1 + \frac{1+1}{2} = 2$$

và phương trình đường tròn mật tiếp phải tìm là:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

4. Lập phương trình túc bế của các đường:

1) $y = x^2$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

3) $\begin{cases} x = R(\cos t + t\sin t) \\ y = R(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

6) $r = a(1 + \cos\varphi)$

7) $x = a\ln\dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ (đường Tractrice)

Bài giải

1) $y = x^{3/2},\ y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},\ y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$

Áp dụng các phương trình ở (1.6), ta có phương trình túc bế của đường đã cho, dưới dạng tham số x:

$$X = x - \frac{1 + \frac{9}{4}x}{\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}} = -(9x + 2).\frac{x}{2}$$

$$Y = x^{3/2} + \frac{1 + \frac{9}{4}x}{\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}} = 4(3x + 1)\frac{\sqrt{x}}{3}$$

Chú ý: Nếu đưa phương trình $y = x^{3/2}$ về dạng tham số $x = t^2$, $y = t^3$ thì:

$$X = -(9t^2 + 2).\frac{t^2}{2}$$

$$Y = 4(3t^2 + 1).\frac{t}{3}$$

2) Đưa phương trình của hyperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ về dạng tham số:

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}$$

Ta có: $x' = a\,\mathrm{sh}\,t,\ x'' = a\,\mathrm{ch}\,t$

$y' = b\,\mathrm{ch}\,t,\ y'' = b\,\mathrm{sh}\,t.$

$x'^2 + y'^2 = a^2\mathrm{sh}^2 t + b^2\mathrm{ch}^2 t$

$$x'y'' - x''y' = asht.bsht - acht.bcht$$

$$= - ab(ch^2t - sh^2t) = - ab.$$

Theo (1.6), ta có phương trình túc bế của hyperbole đã cho dưới dạng tham số:

$$X = acht - \frac{a^2sh^2t + b^2ch^2t}{-ab}.bcht = \frac{a^2 + b^2}{a}ch^3t$$

$$Y = asht + \frac{a^2sh^2t + b^2ch^2t}{-ab}.asht = \frac{a^2 + b^2}{b}sh^3t .$$

Khử t ta có: $(aX)^{2/3} - (bY)^{2/3} = c^{4/3}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3) $x = (R\cos t + t\sin t)$, $x' = R(- \sin t + \sin t + t\cos t) = Rt\cos t$.

$x'' = R\cos t - Rt\sin t$.

$y = R(\sin t - t\cos t)$, $y' = R(\cos t - \cos t + t\sin t) = Rt\sin t$.

$y'' = R\sin t + Rt\cos t$

$x'^2 + y'^2 = R^2t^2\cos^2 t + R^2t^2\sin^2 t = R^2t^2$

$x'y'' - x''y' = R^2t^2$

Do đó: $$\begin{cases} X = R(\cos t + t\sin t) - \dfrac{R^2t^2}{R^2t^2}.Rt\sin t \\ Y = R(\sin t - t\cos t) + \dfrac{R^2t^2}{R^2t^2}.Rt\cos t \end{cases}$$

hay: $\begin{cases} X = R\cos t \\ Y = R\sin t \end{cases}$ và: $X^2 + Y^2 = R^2$.

Vậy túc bế của đường đã cho là đường tròn tâm O, bán kính R. Theo định nghĩa thì đường đã cho là đường thân khai của đường tròn này.

4) $x = R(t - \sin t)$, $x' = R(1 - \cos t)$, $x'' = R\sin t$

$$y = R(1 - \cos t),\ y' = R\sin t,\ y'' = R\cos t.$$

$$x'^2 + y'^2 = R^2(1 - \cos t)^2 + R^2\sin^2 t = 2R^2(1 - \cos t) = 4R^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$x'y'' - x''y' = R(1 - \cos t).R\cos t - R\sin t.R\sin t$$

$$= R^2\cos t - R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = -2R^2\sin^2\frac{t}{2}$$

Theo (1.6) phương trình túc bế của đường Cycloïde đã cho là:

$$X = R(t - \sin t) - \frac{4R^2\sin^2\frac{t}{2}}{-2R^2\sin^2\frac{t}{2}}.R\sin t = R(t + \sin t)$$

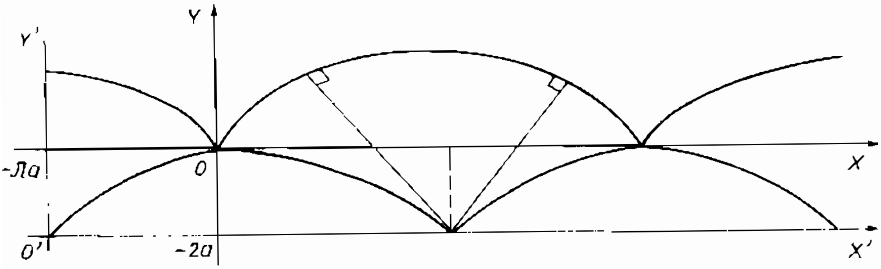
$$Y = R(1 - \cos t) + \frac{4R^2\sin^2\frac{t}{2}}{-2R^2\sin^2\frac{t}{2}}.R(1 - \cos t) = -R(1 - \cos t)$$

Đặt $t = \tau - \pi$ thì:

$$X = -\pi R + R(\tau - \sin\tau)$$

$$Y = -2R + R(1 - \cos\tau)$$

Vậy túc bế của đường Cycloide cũng là một đường Cycloïde, suy từ Cycloide bằng phép tịnh tiến các trục toạ độ: $X = X' - \pi R$, $Y = Y' - 2a$ (hình 5).



Hình 5.

5) $x = a\cos^3 t,\ x' = -3a\cos^2 t\sin t = -3a(\sin t - \sin^3 t)$

$x'' = -3a(\cos t - 3\sin^2 t\cos t)$

$y = a\sin^3 t,\ y' = 3a\sin^2 t\cos t = 3a(\cos t - \cos^3 t)$

$y'' = 3a(-\sin t + 3\cos^2 t\sin t)$

$x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$

$x'y'' - x''y' = -3a\cos^2 t\sin t.3a(-\sin t + 3\cos^2 t\sin t)$

$- (-3a)(\cos t - 3\sin^2 t\cos t).3a\sin^2 t\cos t$

$= 9a^2\sin^2 t\cos^2 t - 27a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^2 t\cos^2 t -$

$- 27a^2\sin^4 t\cos^2 t$

$= -9a^2\sin^2 t\cos^2 t$

Do đó ta có phương trình túc bế của đường astroide đã cho:

$$\begin{cases} X = a\cos^3 t - \dfrac{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}.3a\sin^2 t.\cos t \\ Y = a\sin^3 t + \dfrac{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}{-9a^2\sin^2 t\cos^2 t}.(-3a\cos^2 t.\sin t). \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} X = a\cos^3 t + 3a\sin^2 t\cos t \\ Y = a\sin^3 t + 3a\cos^2 t\sin t \end{cases}$$

Rõ ràng:

$$X + Y = a(\cos t + \sin t)^3 = 2\sqrt{2}a\cos^3(t - \frac{\pi}{4})$$

$$X - Y = a(\cos t - \sin t)^3 = 2\sqrt{2}a\sin^3(t - \frac{\pi}{4})$$

Do đó, nếu làm một phép quay hệ trục toạ độ một góc $\frac{\pi}{4}$:

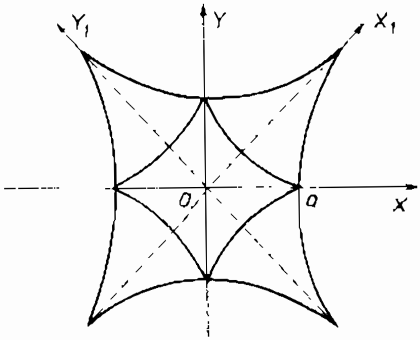
$$X_1 = \frac{X + Y}{\sqrt{2}},\quad Y_1 = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$$

thì trong hệ mới X_1OY_1, phương trình của túc bế là:

$$X = 2a\cos^3\tau$$

$$Y = 2a\sin^3\tau$$

với $\tau = t - \frac{\pi}{4}$ (hình 6).



Hình 6.

Vậy túc bế của đường astroide cũng là một đường astroïde.

6) $r = a(1 + \cos\varphi)$. Ta biết $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Do đó phương trình tham số (với tham số φ) của đường cardioïde đã cho là:

$$x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi = a(\cos\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$y = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi = a(\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$$

Tính toán, ta có:

$$x' = -a(\sin\varphi + 2\cos\varphi),$$

$$y' = a(\cos\varphi + \cos^2\varphi),$$

$$\ldots,$$

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1 + \cos\varphi)$$

$$x'y'' - x''y' = 3a^2(1 + \cos 2\varphi)$$

và phương trình túc bế của đường Cardioïde đã cho là:

$$X = \frac{a}{3}(1 - \cos\varphi)\cos\varphi + \frac{2a}{3}$$

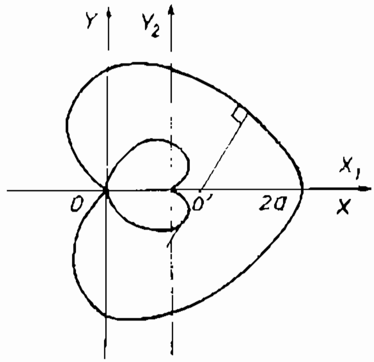
$$Y = \frac{a}{3}(1 - \cos\varphi)\sin\varphi$$

Do đó, ta làm phép tịnh tiến hệ trục toạ độ:

$$X = X_1 + \frac{2a}{3}$$

$$Y = Y_1$$

thì phương trình của túc bé này trong hệ toạ độ độc cực mới $O'X_1$ là $r_2 = \frac{a}{3}(1-\cos\varphi)$ đó cũng là một đường Cardioide kích thước thu lại bằng 1/3 kích thước của Cardioïde đã cho và quay hướng ngược lại theo hướng của OX (hình 7).



Hình 7.

$$7)\ x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$$

Ta đưa phương trình này về dạng tham số, đặt $y = a\sin\varphi$, $0 < \varphi < \pi$ thì:

$$\begin{cases} x = a\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \end{cases}$$

Tính toán ta có:

$$x' = \frac{a\cos^2\varphi}{\sin\varphi},\ y' = a\cos\varphi,\ x'^2 + y'^2 = a^2\operatorname{cotg}^2\varphi$$

$$x'' = \frac{-a\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - a\cos\varphi,\ y'' = -a\sin\varphi$$

$$x'y'' - x''y' = a^2\operatorname{cotg}^2\varphi$$

Do đó, phương trình tham số của túc bế của đường tractrice đã cho là:

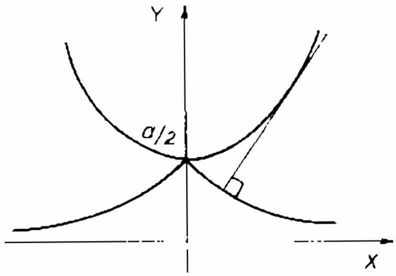
$$\begin{cases} x = a\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right) - a\cos\varphi - \dfrac{a^2\operatorname{cotg}^2\varphi}{a^2\operatorname{cotg}^2\varphi}.a\cos\varphi = a\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right) \\ y = a\sin\varphi + \dfrac{a^2\operatorname{cotg}^2\varphi}{a^2\operatorname{cotg}^2\varphi}\left(\dfrac{a\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\right) = \dfrac{a}{\sin\varphi} \end{cases}$$

Khử φ, ta có:

$$\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{x}{a},\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = e^{\frac{x}{a}}$$

$$y = \frac{a}{\sin\varphi} = \frac{a}{\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1+e^{\frac{2x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}}}$$

hay $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$



Hình 8.

Đó là phương trình của đường dây xích (hình 8).

5. Tìm các điểm bất thường của các đường:

1) $(y - 1)^2 = (x - 1)^3$

2) $y^2 = - x^2 + x^4$

3) $y^2(a - x) = x^3$

4) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Bài giải

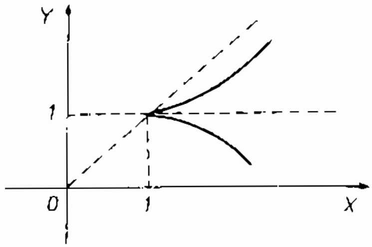
1) Theo a) (1.7), điểm bất thường của đường cong được xác định từ hệ:

$$F'_x = -3(x-1)^2 = 0$$

$$F'_y = 2(y-1) = 0$$

$$F(x, y) = (y-1)^2 - (x-1)^3 = 0$$

Giải hệ này, ta có điểm bất thường của đường cong đã cho: $x = 1$, $y = 1$ (điểm lùi) (hình 9).



Hình 9.

2) Tương tự 1):

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 4x^3 = 0 \\ F'_y = 2y = 0 \\ F(x, y) = y^2 + x^2 - x^4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có: $y = 0$, $x = 0$ hoặc $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

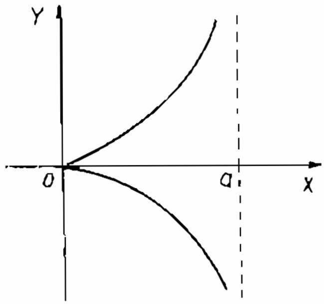
Điểm $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ không thuộc đường cong.

Điểm $(0, 0)$ thuộc đường cong, đó là điểm bất thường cô lập của đường cong (vì lân cận điểm này không có điểm nào thuộc đường cong).

3) $$\begin{cases} F_{(x,y)} = y^2(a - x) - x^3 = 0 \\ F'_x = -y^2 - 3x^2 = 0 \\ F'_y = -2xy = 0 \end{cases}$$

Hệ này cho nghiệm: $x = 0$, $y = 0$.

Vậy $(0, 0)$ là điểm bất thường của đường cong (điểm lùi) (hình 10)



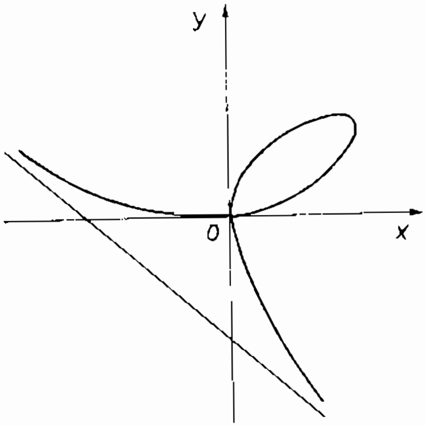
Hình 10.

4) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$

$$F'_x = 3x^2 - 3ay = 0$$

$$F'_y = 3y^2 - 3ax = 0$$

Hệ này cho nghiệm: $x = 0$, $y = 0$ và $(0, 0)$ là điểm bất thường của đường cong (điểm kép) (hình 11).



Hình 11.

6. Tìm hình bao của các họ đường cong:

1) $y = (x - c)^3$

2) $y^3 = (x - c)^2$

3) $(a + x)(y - c)^2 =$

$= x^2(x - a)$,

$a = \text{const} > 0$.

4) $y^2 = 2px + p^2$

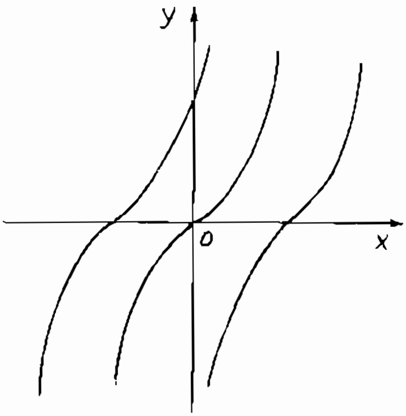
5) Họ đường thẳng lập với các trục toạ độ các tam giác có diện tích không đổi bằng S.

Bài giải

1) Theo b) (1.7), nếu họ đường cong có hình bao L thì $(x, y) \in L$ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} F(x, y, c) = y - (x - c)^3 = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 3(x - c)^2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có $x = c$, $y = 0$.



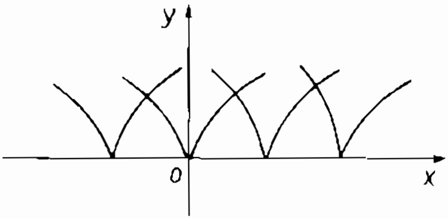
Hình 12.

Theo hình 12, $y = 0$ (trục Ox) là hình bao của họ đường cong (quĩ tích các điểm uốn) (đường cong không có điểm bất thường: $F'_y = 1 \neq 0$).

2) Tương tự 1):

$$\begin{cases} F(x, y, c) = y^3 - (x - c)^2 \\ F'_c(x, y, c) = -2(x - c) = 0 \end{cases}$$

Hệ cho nghiệm $x = c$, $y = 0$.



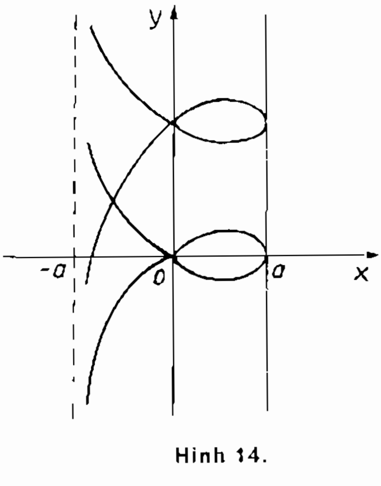
Hình 13.

Theo hình 13, đường cong không có hình bao, $y = 0$ là quỹ tích các điểm bất thường (điểm lùi: $F = 0$, $F'_x = F'_y = 0$ tại $(c,0)$).

3) $$\begin{cases} F(x, y, c) = (a + x)(y - c)^2 - x^2(x - a) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = -2(a + x)(y - c) = 0 \end{cases}$$ (Strophoïde)

Hệ này cho nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = c \end{cases}$,

$\begin{cases} x = a \\ y = c \end{cases}$



Hình 14.

Theo hình 14: $x = a$ là hình bao, còn $x = 0$ là quỹ tích các điểm kép của họ Strophoïde đã cho.

4) Không có hình bao.

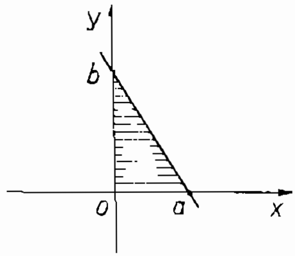
5) Theo giả thiết, phương trình đường thẳng qua (a, 0), (0, b) là:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ và $ab = 2S$ (hình 15).

(vì lý do đối xứng, xét trong góc phần tư thứ nhất).

Ta có:

$$b = \frac{2S}{a} \text{ và } \frac{x}{a} + \frac{ay}{2S} = 1 \quad (1)$$



Hình 15.

Đạo hàm (1) theo a:

$$\frac{-x}{a^2} + \frac{y}{2S} = 0 \qquad (2)$$

Khử a từ (1) và (2):

$$y = \frac{2S}{a^2}x, \quad \frac{x}{a} + \frac{a.2S}{a^2.2S} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$y = \frac{2S}{a^2}.\frac{a}{2} = \frac{S}{a} \Rightarrow xy = \frac{S}{2}$$ là hình bao phải tìm.

§2. ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN R^3

2.1. Hàm Vecteur

Hàm Vecteur đối vô hướng t: $\vec{V} = \vec{V}(t)$ là một ánh xạ từ tập hợp các đại lượng vô hướng t: {t} vào tập hợp các vecteur $\vec{V}$: $\{\vec{V}\}$

Thường xét:

$$\vec{V} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad (1)$$

gọi là hàm bán kính vecteur của điểm M.

Khi t thay đổi, M vẽ nên một đường gọi là tốc đồ của hàm vecteur và (1) gọi là phương trình vecteur của đường đó.

Hệ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in \{t\}$ gọi là phương trình tham số của đường.

Trong không gian: đường cũng có thể cho là giao tuyến của 2 mặt

Hệ $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ gọi là phương trình không giải trong không gian của đường:

$\vec{a} = \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon.$

Hàm $\vec{r} = \vec{r}(t)$ gọi là liên tục tại t_0 nếu $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Đạo hàm của hàm vecteur $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$r'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

$$r''(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

...

$$\vec{r}(t) = \vec{a} = \text{const}, \ r'(t) = 0$$

$$(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 + \vec{r}'_2$$

$$(\alpha\vec{r})' = \alpha'\vec{r} + \alpha\vec{r}', \ \alpha = \alpha(t)$$

$$(\vec{r}_1 . \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 . \vec{r}_2 + \vec{r}_1 . \vec{r}'_2$$

$$(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 \wedge \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \wedge \vec{r}'_2$$

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)' = (\vec{r}'_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}'_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}'_3)$$

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \Rightarrow \vec{r}' = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ với } |\vec{r}(t)| = C = \text{const} \Rightarrow \vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$$

$$\vec{r} = |\vec{r}(t)|\, \vec{r}_0, \ \vec{r}_0 = \text{const} \Rightarrow \vec{r}'(t) \,//\, \vec{r}(t)$$

2.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến của đường - Tam diện Frénet

Cho đường $\mathscr{C} \subset R^3$: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Nếu t = s: độ dài cung của $\mathscr{C}$ (tính từ 1 điểm nào đó) thì:

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

gọi là phương trình tự hàm của $\mathscr{C}$.

Tam diện Frénet tại $M \in \mathscr{C}$ lập nên bởi 3 vecteur:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}: \text{ vecteur tiếp tuyến đơn vị}$$

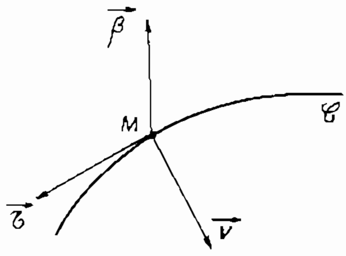
$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|} \perp \vec{\tau}: \text{ vecteur pháp tuyến chính đơn vị}$$

$$\vec{\beta} > \vec{\tau} \wedge \vec{\nu}: \text{ vecteur trùng pháp tuyến đơn vị}$$

và các mặt phẳng mang 2 trong 3 vecteur đó (hình 16).

Đường thẳng mang $\vec{\tau}$ ($\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$) gọi là tiếp tuyến (pháp tuyến chính, trùng pháp tuyến) của $\mathscr{C}$ tại M.

Mặt phẳng mang ($\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$) (($\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$), ($\vec{\beta}$, $\vec{\tau}$)) gọi là mặt phẳng mật tiếp (mặt phẳng pháp (pháp diện), mặt phẳng trực đạc) của $\mathscr{C}$ tại M.



Hình 16.

Cho $\mathscr{C}$:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

thì:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{r}'(t)\wedge\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)\wedge\vec{r}''(t)|}, \quad \vec{v} = \vec{\beta}\wedge\vec{\tau}$$

2.3. Độ cong và độ xoắn

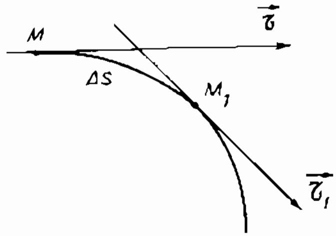
Độ cong: $k = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right|$ (hình 17).

với $\vec{r} = \vec{r}(s)$ thì $k = \left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$

với $\vec{r} = \vec{r}(t)$ thì

$$k = \frac{|\vec{r}'(t)\wedge\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'|^3} \quad (1)$$

$R = \dfrac{1}{k}$ là bán kính cong của Γ tại M.



Hình 17.

Độ xoắn: $T = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{\beta}}{\Delta s}\right| = \left|\dfrac{d\vec{\beta}}{ds}\right|$

với $\vec{r} = \vec{r}(s)$: $T = R^2(\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s))$

với $\vec{r} = \vec{r}(t)$: $T = \dfrac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}'\wedge\vec{r}''|^2}$ (2),

$$\rho = \frac{1}{T} \text{ - bán kính xoắn.}$$

Các công thức Frénet tại $M \in \Gamma$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{v}}{R}, \quad \frac{d\vec{v}}{ds} = \frac{-\vec{\tau}}{R} + \frac{\vec{\beta}}{\rho}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{-\vec{v}}{\rho}$$

BÀI TẬP

5. Xác định tốc đồ (đường cong) của các hàm vecteur trong mặt phẳng:

1) $\bar{r} = \bar{a}t + \bar{c}$

2) $\bar{r} = \bar{a}t^2 - \bar{b}t$

3) $\bar{r} = \bar{a}\cos t + \bar{b}\sin t$

4) $\bar{r} = \bar{a}\,\mathrm{ch}t + \bar{b}\,\mathrm{sh}t$

với $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \text{const}$, $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Bài giải

1) Giả sử $\bar{a} = (a_x, a_y)$, $\bar{c} = (c_x, c_y)$.

Chiếu $\bar{r} = \bar{a}t + \bar{c}$ trên ba trục ta có:

$$x = a_x t + c_x$$

$$y = a_y t + c_y$$

Đây là phương trình tham số (t) của một đường thẳng. Vậy tốc đồ của hàm vecteur đã cho là một đường thẳng.

2) $\bar{r} = \bar{a}t^2 + \bar{b}t$ (1)

$\bar{r}.\bar{a} = |\bar{a}|^2 t^2$, $\bar{r}.\bar{b} = |\bar{b}|^2 t$ (vì $\bar{a} \perp \bar{b}$), khử t: $\dfrac{(\bar{b}\bar{r})^2}{b^4} = \dfrac{\bar{a}.\bar{r}}{a^2}$.

Với $\bar{b} = (b_x, b_y)$, $\bar{a} = (a_x, a_y)$, $\bar{r} = (x, y)$ ta có:

$$(xb_x + yb_y)^2 = \frac{b^4}{a^2}\left(xa_x + ya_y\right)$$

Đặt: $Y = xb_x + yb_y$, $X = xa_x + ya_y$

thì ta có:

$$Y^2 = AX \quad (A = \frac{b^4}{a^2}).$$

Vậy tốc đồ của (1) là một parabole.

3) Từ $\vec{r}' = \vec{a}\cos t + \vec{b}\sin t$, nhân 2 vế lần lượt với $\vec{a}$, $\vec{b}$ và chú ý $\vec{a}\vec{b} = 0$, ta có:

$$\vec{r}'\vec{a} = a^2\cos t$$

$$\vec{r}'\vec{b} = b^2\sin t$$

Do đó ta có phương trình phải tìm:

$$\frac{(\vec{r}.\vec{a})^2}{a^4} + \frac{(\vec{r}.\vec{b})^2}{b^4} = 1$$

Đó là phương trình của một ellipse.

4) Tương tự, phương trình tốc đồ của $\vec{r}' = \vec{a}\text{ch}t + \vec{b}\text{sh}t$ là đường hyperbole.

$$\frac{(\vec{r}.\vec{a})^2}{a^4} - \frac{(\vec{r}.\vec{b})^2}{b^4} = 1.$$

6. 1) Tìm thể tích lớn nhất của hình hộp dựng trên 3 vecteur:

$$\vec{a} = \vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$$

$$\vec{b} = 2t\vec{i} - \vec{j} + t^3\vec{k}$$

$$\vec{c} = -t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + \vec{k} \quad \text{với } 0 \le t \le 1.$$

2) Xác định quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của chuyển động có phương trình:

$$\vec{r} = \vec{i}\cos\alpha\cos\omega t + \vec{j}\sin\alpha\cos\omega t + \vec{k}\sin\omega t$$

Bài giải

1) Ta biết $V = \left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|$

hay $V = \left\|\begin{matrix} 1 & t & t^2 \\ 2t & -1 & t^3 \\ t^2 & t^3 & 1 \end{matrix}\right\| = (t^2 + 1)^2$

$V' = 4t(t^2 + 1) > 0$, do đó V là hàm đơn điệu tang:

$$V_{max} = V(1) = 4 \text{ vì } 0 \leq t \leq 1$$

2) Ta có $x = \cos\alpha.\cos\omega t$

$y = \sin\alpha.\cos\omega t$

$z = \sin\omega t$

Bình phương 2 vế rồi cộng lại ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Từ 2 phương trình đầu ta có: $y = tg\alpha.x$.

Vậy quỹ đạo của chuyển động là đường tròn (lớn):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = tg\alpha.x \end{cases}$$

Vận tốc:

$$\vec{V} = \vec{r}\,' = \vec{i}.(-\omega\cos\alpha.\sin\omega t) + \vec{j}.(-\omega\sin\omega t\sin\alpha) + \vec{k}.\omega\cos\omega t$$

Gia tốc:

$$\vec{a} = \vec{r}'' = \vec{i}.(-\omega^2\cos\alpha\cos\omega t) + \vec{j}.(-\omega^2\sin\alpha\cos\omega t) + \vec{k}.(-\omega^2\sin\omega t)$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\omega^2\cos^2\alpha\sin^2\omega t + \omega^2\sin^2\omega t\sin^2\alpha + \omega^2\cos^2\omega t} = |\omega|$$

$|\vec{a}| = \omega^2$.

7. Tìm các vecteur $\bar{\tau}$, $\bar{V}$, $\bar{\beta}$ của các đường:

1) $x = t\sin t$, $y = t\cos t$, $z = te^t$ tại gốc toạ độ

2) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$ tại một điểm tuỳ ý.

Bài giải

1) Ta có: $x' = \sin t + t\cos t$, $x'' = 2\cos t - t\sin t$

$y' = \cos t - t\sin t$, $y'' = -2\sin t - t\cos t$

$z' = e^t + te^t$, $z'' = 2e^t + te^t$

$x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $z'(0) = 1$, $z''(0) = 2$

Theo (2.2), ta có:

$$\bar{\tau} = \frac{0\bar{i} + 1\bar{j} + 1\bar{k}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{\beta} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}}{\sqrt{12}} = \frac{\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{3}}$$

$$\bar{v} = \bar{\beta} \wedge \bar{\tau} = \frac{2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{6}}$$

2) $x' = -3\cos^2 t\sin t$, $y' = 3\sin^2 t\cos t$, $z' = -2\sin 2t$

$$\bar{\tau} = \frac{-3\cos^2 t\sin t\bar{i} + 3\sin^2 t\cos t\bar{j} - 2\sin 2t\bar{k}}{\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 4\sin^2 2t}}$$

$$= \frac{3\cos t\bar{i} - 3\sin t\bar{j} + 4\bar{k}}{5}$$

Tương tự:

$$\vec{\beta} = \frac{4\cos t\,\vec{i} - 4\sin t\,\vec{j} - 3\vec{k}}{5}$$

$$\vec{v} = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$

8. 1) Viết phương trình của tiếp tuyến và pháp diện với các đường:

a) $x = R\cos^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\sin t$ tại $t = \dfrac{\pi}{4}$;

b) $z = x^2 + y^2$, $x = y$ tại $(1, 1, 2)$.

2) a) Viết phương trình của tiếp tuyến, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến tại 1 điểm M tuỳ ý của đường:

$$x = \frac{t^4}{4},\ y = \frac{t^3}{3},\ z = \frac{t^2}{2}$$

b) Tìm M trên đường tại đó tiếp tuyến song song với mặt phẳng:

$$x + 3y + 2z - 10 = 0$$

Bài giải

1) Tại $t = \dfrac{\pi}{4}$, ta có $x = \dfrac{R}{2}$, $y = \dfrac{R}{2}$, $z = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

$$x' = -2R\sin t\cos t,\ y' = R\cos 2t,\ z' = R\cos t$$

$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -R,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Do đó ta có phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại $t = \dfrac{\pi}{4}$:

$$\frac{x - \frac{R}{2}}{-R} = \frac{y - \frac{R}{2}}{0} = \frac{z - \frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{2}}{2}} \text{ hay } \frac{x - \frac{R}{2}}{2} = \frac{y - \frac{R}{2}}{0} = \frac{z - \frac{R\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}$$

và phương trình của pháp diện với đường cong tại đó là:

$$\left(x-\frac{R}{2}\right).2+\left(y-\frac{R}{2}\right).0+\left(z-\frac{R\sqrt{2}}{2}\right).\left(-\sqrt{2}\right)=0$$

hay $x\sqrt{2}-z=0$

b) Từ $z = x^2 + y^2$, $x = y$, coi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, và lấy đạo hàm 2 vế các phương trình đã cho theo t ta có:

$$\begin{cases} 2xx' + 2yy' = z' \\ x' = y' \end{cases}$$

Tại (1, 1, 2) ta có hệ:

$$\begin{cases} 2x' + 2y' = z' \\ x' = y' \end{cases}$$

Do đó: $$\begin{cases} x' = x' \\ y' = x' \\ z' = 4x' \end{cases}$$

và phương trình của tiếp tuyến và pháp diện với đường cong tại (1, 1, 2) là:

$$\frac{x-1}{x'}=\frac{y-1}{x'}=\frac{z-2}{4x'} \text{ hay } \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{4}$$

$$(x-1).1+(y-1).1+(z-2).4=0$$

hay $x + y + 4z - 10 = 0$

Chú ý

Có thể đưa phương trình của đường cong về dạng tham số:

$$x = t,\ y = t,\ z = 2t^2.$$

2) a) Ta có: $x' = t^3$, $y' = t^2$, $z' = t$

$$x'' = 3t^2,\ y'' = 2t,\ z'' = 1.$$

Theo (2.2), vecteur chỉ phương của:

- Tiếp tuyến: $\vec{T} = \vec{r}'(t) = (t^3, t^2, t)$

- Trùng pháp tuyến:

$$\vec{B} = \vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^3 & t^2 & t \\ 3t^2 & 2t & 1 \end{vmatrix} = (-t^2, 2t^3, -t^4)$$

- Pháp tuyến chính:

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -t^2 & 2t^3 & -t^4 \\ t^3 & t^2 & t \end{vmatrix} = (2t^4 + t^6, -t^7 + t^3, -t^4 - 2t^6).$$

Do đó phương trình cua tiếp tuyến, pháp tuyến chính, trùng pháp tuyến tai M tuỳ ý của đường đã cho là:

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^3} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{t^2} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{t} \text{ hay } \frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^2} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{1}$$

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{2t^4 + t^6} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{-t^7 + t^3} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{-t^4 - 2t^6}$$

$$\text{hay } \frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^3 + 2t} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{1 - t^4} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{-2t^3 - t}$$

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{-t^2} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{2t^3} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{-t^4} \text{ hay } \frac{x - \frac{t^4}{4}}{1} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{-2t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{t^2}$$

b) Điều kiện để tiếp tuyến song song với mặt phẳng $x + 3y + 2z - 10 = 0$ là:

$$t^2.1 + t.3 + 1.2 = 0 \text{ hay } t^2 + 3t + 2 = 0$$

Do đó: t = - 1, t = - 2 và ta tìm được 2 điểm: $M_1(-1/4, -1/3, 1/2)$, $M_2(4, -8/3, 2)$ tại đó tiếp tuyến song song với mặt phẳng đã cho.

9. Viết phương trình mặt phẳng mật tiếp, pháp diện và mặt phẳng trực đạc của các đường:

1) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = bt$ (xoắn ốc conique) tại gốc O;

2) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ tại một điểm bất kỳ;

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ tại M (1, 1, 2);

4) $y^2 = x$, $x^2 = z$ tại một điểm tuỳ ý.

Bài giải

1) Điểm (0, 0, 0) ứng với t = 0.

Ta có: $x' = \cos t - t\sin t$, $y' = \sin t + t\cos t$, $z' = b$.

$x'' = -2\sin t - t\cos t$, $y'' = -t\sin t + 2\cos t$, $z'' = 0$.

Tại t = 0: $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = b$

$x'' = 0$, $y'' = 2$, $z'' = 0$.

Do đó ta có vecteur pháp của pháp diện, mặt phẳng mật tiếp, mặt phẳng trực đạc và phương trình của chúng lần lượt là:

$\vec{T} = (1, 0, b)$, $(x - 0).1 + (y - 0).0 + (z - 0).b = 0$ hay $x + bz = 0$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2b\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}$$

$(x - 0).(-2b) + (y - 0).0 + (z - 0).2 = 0$ hay $bx - z = 0$.

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2b & 0 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 2(b^2+1)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$(x - 0).0 + (y - 0).2(b^2 + 1) + (z - 0).0 = 0$ hay $y = 0$.

2) Tương tự như 1):

Pháp diện:

$$e^{t}x - e^{-t}y + \sqrt{2}.z + 2(t + \mathrm{sh}2t) = 0.$$

Mặt phẳng mật tiếp:

$$e^{-t}x - e^{t}y - \sqrt{2}.z + 2t = 0$$

Mặt phẳng trực đạc:

$$x + y - \sqrt{2}\,\mathrm{sh}t.z + 2(t\,\mathrm{sh}t - \mathrm{ch}t) = 0.$$

3) Coi x = x(t), y = y(t), z = z(t), lấy đạo hàm 2 vế các phương trình đã cho theo t:

$$\begin{cases} 2xx' + 2yy' + 2zz' = 0 \\ 2xx' - 2yy' + 2zz' = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Tại (1, 1, 2) ta có hệ:

$$\begin{cases} x' + y' + 2z' = 0 \\ x' - y' + 2z' = 0 \end{cases}$$

Xét một nghiệm khác không của hệ $x' = 2$, $y' = 0$, $z' = -1$.

Ta có phương trình pháp diện của đường tại (1, 1, 2):

$$(x - 1).2 + (y - 1).0 + (z - 2)(-1) = 0 \ \text{ hay } \ 2x - z = 0.$$

Lại lấy đạo hàm hệ (1) theo t ta có:

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 + xx'' + yy'' + zz'' = 0 \\ x'^2 - y'^2 + z'^2 + xx'' - yy'' + zz'' = 0 \end{cases}$$

Tại (1, 1, 2) ta có hệ:

$$\begin{cases} x'' + y'' + 2z'' = -5 \\ x'' - y'' + 2z'' = -5 \end{cases}$$

Lấy một nghiệm của hệ $x'' = -1$, $y'' = 0$, $z'' = -2$.

Ta có:

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0, 5, 0)$$

và phương trình mặt tiếp phải tìm là:

$$(x - 1).0 + 5(y - 1) + (z - 2) = 0 \text{ hay } y - 1 = 0$$

Ta có: $\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 0, -10).$

do đó phương trình mặt phẳng trực đạc phải tìm là:

$$(x - 1)(-5) + (y - 1).0 + (z - 2)(-10) = 0 \text{ hay } x + 2z - 5 = 0.$$

4) Tương tự như 3):

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2yy' = x' \\ 2xx' = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' = 1 \\ x' = \dfrac{1}{2x} \\ y' = \dfrac{x'}{2y} = \dfrac{1}{4xy} \end{cases}$$

Phương trình của pháp diện:

$$(X - x).\frac{1}{2x} + (Y - y).\frac{1}{4xy} + (Z - z).1 = 0$$

hay $\qquad 2y(X - x) + (Y - y) + 4y^3(Z - z) = 0$

Tương tự, ta có phương trình của các mặt phẳng mật tiếp và trực đạc:

$$6y^2(X - x) - 8y^3(Y - y) - (Z - z) = 0$$

$$(1 - 32y^6)(X - x) - 2y(12y^4 + 1)(Y - y) + 2y^2(8y^2 + 3)(Z - z) = 0$$

10. Tìm độ cong của các đường:

1) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = bt$ tại $(0, 0, 0)$;

2) $x = \ln\cos t$, $y = \ln\sin t$, $z = t\sqrt{2}$ tại (x, y, z);

3) $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ tại (x, y, z);

4) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2y + z = 0$.

Bài giải

1) Theo (1) (2.3) ta tính: $|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|$ và $|\vec{r}'|^3$ tại $t = 0$.

Ta sẽ có: $$k = \frac{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$$

Theo 1) bài 9, ta có:

$$|\vec{r}' \wedge \vec{r}''| = \sqrt{(-2b)^2 + 2^2} = 2\sqrt{1 + b^2}$$

$$|\vec{r}'|^3 = \left(\sqrt{1 + b^2}\right)^3$$

Do đó độ cong phải tìm là:

$$k = \frac{2\sqrt{1 + b^2}}{\left(\sqrt{1 + b^2}\right)^3} = \frac{2}{1 + b^2}$$

2) $x = \ln\cos t$, $x' = \dfrac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t$, $x'' = -\dfrac{1}{\cos^2 t}$

$y = \ln\sin t$, $y' = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{cotg} t$, $y'' = -\dfrac{1}{\sin^2 t}$

$z = t\sqrt{2}$, $z' = \sqrt{2}$, $z'' = 0$

$$\bar r' \wedge \bar r'' = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ -\operatorname{tg} t & \cot g t & \sqrt{2} \\ -\dfrac{1}{\cos^2 t} & -\dfrac{1}{\sin^2 t} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t}, \frac{-\sqrt{2}}{\cos^2 t}, \frac{2}{\sin t \cos t} \right)$$

$$|\bar r' \wedge \bar r''| = \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t \cos^2 t}, \quad |\bar r'|^3 = \left(\frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t} \right)^{3/2}$$

Do đó:

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t \cos^2 t} \cdot \frac{\left(\sin^2 t \cos^2 t\right)^{3/2}}{1} = \frac{|\sin 2t|}{\sqrt{2}}$$

3) $\begin{cases} x^2 = 2az \\ y^2 = 2bz \end{cases}$, đưa về dạng tham số, đặt $x = t$ thì hệ trên có dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}\,t \\ z = \dfrac{t^2}{2a} \end{cases}$$

Ta tính: $x' = 1,\ x'' = 0$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{b}{a}},\ y'' = 0$$

$$z' = \frac{1}{a},\ z'' = \frac{1}{a}$$

Do đó: $\quad |\bar r' \wedge \bar r''| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2 + \dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{(a+b)^{1/2}}{a^{3/2}}$

$$|\vec{r}'|^3 = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{t^2}{a^2}\right)^{3/2} = \left[\left(\frac{a+b}{a} + \frac{2az}{a^2}\right)\right]^{3/2}$$

$$= \frac{(a+b+2z)^{3/2}}{a^{3/2}} \text{ (vì theo trên } t^2 = 2az)$$

Vậy: $$k = \frac{(a+b)^{1/2}}{(a+b+2z)^{3/2}}$$

4) $$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Coi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ và lấy đạo hàm 2 vế của hệ (1) theo t, ta có:

$$\begin{cases} 2xx' - 2yy' + 2zz' = 0 \\ 2yy' - 2x' + z' = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Tại (1, 1, 1) ta có hệ:

$$\begin{cases} x' - y' + z' = 0 \\ -2x' + 2y' + z' = 0 \end{cases}$$

Lấy một nghiệm của hệ này: $x' = 1$, $y' = 1$, $z' = 0$.

Lại lấy đạo hàm 2 vế của (2), theo t ta có:

$$\begin{cases} x'^2 - y'^2 + z'^2 + xx'' - yy'' + zz'' = 0 \\ 2y'^2 + 2yy'' - x'' + z'' = 0 \end{cases}$$

Tại (1, 1, 1) ta có hệ:

$$\begin{cases} x'' - y'' + z'' = 0 \\ 2y'' - 2x'' + z'' = 0 \end{cases}$$

Lấy 1 nghiệm của hệ này:

$$x'' = 1,\ y'' = \frac{1}{3},\ z'' = \frac{-2}{3}$$

Do đó: $$k = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & -2/3 \end{vmatrix}}{\left|\bar{i} + \bar{j}\right|^3} = \frac{\sqrt{12}}{3\left(\sqrt{2}\right)^3} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

11. Tìm độ xoắn của các đường sau tại một điểm tuỳ ý:

1) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t$

2) $x = a\,\mathrm{ch}t,\ y = a\,\mathrm{sh}t,\ z = at$

3) $2ay = x^2,\ 6a^2z = x^3$

4) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ (đường đinh ốc trụ tròn xoay)

(Tính cả độ cong).

Bài giải

1) Theo (2.3), ta tính:

$x' = e^t(\cos t - \sin t),\ y' = e^t(\cos t + \sin t),\ z' = e^t$

$x'' = -2e^t\sin t,\ y'' = 2e^t\cos t,\ z'' = e^t$

$x''' = -2e^t(\sin t + \cos t),\ y''' = 2e^t(\cos t - \sin t),\ z''' = e^t.$

$$\left(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\right) = \begin{vmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) & e^t \\ -2e^t\sin t & 2e^t\cos t & e^t \\ -2e^t(\sin t + \cos t) & 2e^t(\cos t - \sin t) & e^t \end{vmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{vmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t & 1 \\ -(\cos t - \sin t) & \cos t - \sin t & 0 \\ -3\cos t - \sin t & \cos t - 3\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

(lấy hàng đầu trừ các hàng sau)

$$= e^{3t}(-\cos^2 t - \sin t\cos t + 3\sin t\cos t + 3\sin^2 t +$$

$$+ 3\cos^2 t + \sin t\cos t - 3\sin t\cos t - \sin^2 t)$$

$$= 2e^{3t}$$

Tương tự:

$$|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|^2 = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{matrix} \right\|^2$$

$$= \left(e^t\sqrt{(\sin t - \cos t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 4}\right)^2 = 6e^{2t}$$

Vậy: $\quad T = \dfrac{2e^{3t}}{6e^{2t}} = \dfrac{e^t}{3}$

2) $\quad x = a\,\mathrm{ch}t,\ y = a\,\mathrm{sh}t,\ z = at$

$x' = a\,\mathrm{sh}t,\ y' = a\,\mathrm{ch}t,\ z' = a$

$x'' = a\,\mathrm{ch}t,\ y'' = a\,\mathrm{sh}t,\ z'' = 0$

$x''' = a\,\mathrm{sh}t,\ y''' = a\,\mathrm{ch}t,\ z''' = 0$

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \begin{vmatrix} a\,\mathrm{sh}t & a\,\mathrm{ch}t & a \\ a\,\mathrm{ch}t & a\,\mathrm{sh}t & 0 \\ a\,\mathrm{sh}t & a\,\mathrm{ch}t & 0 \end{vmatrix} = a^3(\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t) = a^3$$

$$|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|^2 = \left(\sqrt{a^4\mathrm{sh}^2 t + a^4\mathrm{ch}^2 t + a^4(\mathrm{sh}^2 t - \mathrm{ch}^2 t)^2}\right)^2 = 2a^4\mathrm{ch}^2 t$$

Do đó: $\quad T = \dfrac{a^3}{2a^4\mathrm{ch}^2 t} = \dfrac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}.$

3) $2ay = x^2,\ 6a^2z = x^3 \quad (1)$

Ta đưa phương trình của đường (1) về tham số.

Đặt: $x = t,\ y = \dfrac{t^2}{2a},\ z = \dfrac{t^3}{6a^2}$

Do đó: $x' = 1,\ y' = \dfrac{t}{a},\ z' = \dfrac{t^2}{2a^2}$

$$x'' = 0,\ y'' = \frac{1}{a},\ z'' = \frac{t}{a^2}$$

$$x''' = 0,\ y''' = 0,\ z''' = \frac{1}{a^2}$$

$$\left(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\right) = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{t}{a} & \dfrac{t^2}{2a^2} \\ 0 & \dfrac{1}{a} & \dfrac{t}{a^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^3}$$

$$\left|\bar{r}' \wedge \bar{r}''\right|^2 = \frac{t^4}{4a^6} + \frac{t^2}{a^4} + \frac{1}{a^2}$$

$$T = \frac{1}{a^3\left(\dfrac{t^4}{4a^6} + \dfrac{t^2}{a^4} + \dfrac{1}{a^2}\right)} = \frac{1}{\dfrac{t^4}{4a^3} + \dfrac{t^2}{a} + a}$$

Theo trên: $t^2 = 2ay$, do đó: $T = \dfrac{1}{\dfrac{y^2}{a} + 2y + a} = \dfrac{a}{(y + a)^2}$.

4) Ta có: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$

$$x' = a\sin t,\ y' = a\cos t,\ z' = b$$

$$x'' = -\,a\cos t,\ y'' = -\,a\sin t,\ z'' = 0$$

$$x''' = a\sin t,\ y''' = -a\cos t,\ z''' = 0$$

$$\left|\bar{r}' \wedge \bar{r}''\right| = \sqrt{a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^2} = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\left(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\right) = a^2b,\ \left|\bar{r}'\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Do đó: $$T = \frac{a^2b}{a^2\left(a^2 + b^2\right)} = \frac{b}{a^2 - b^2}$$

$$k = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{\left(a^2 + b^2\right)^{3/2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Vậy, tại mọi điểm của đường đinh ốc, độ cong và độ xoắn của nó là những đại lượng không đổi, người ta cũng dùng tính chất này để định nghĩa đường đinh ốc.

12. Chứng minh rằng:

1) Nếu độ cong tại mọi điểm của một đường bằng không thì đường đó là một đường thẳng.

2) Nếu độ xoắn tại mọi điểm của một đường bằng không thì đường đó là một đường cong phẳng.

3) Đường $\begin{cases} x = 1 + 3t + 2t^2 \\ y = 2 - 2t + 5t^2 \\ z = 1 - t^2 \end{cases}$ là một đường cong phẳng. Tìm mặt phẳng chứa nó.

Bài giải

1) Ta biết độ cong của đường là:

$$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$$

là $$k = \frac{\left|\bar{r}' \wedge \bar{r}''\right|}{\left|\bar{r}'\right|^3}$$

$k = 0 \quad \to \quad |\vec{r}' \wedge \vec{r}''| = 0$: có thể xảy ra ba trường hợp:

$\vec{r}' = 0 \Rightarrow x' = 0,\ y' = 0,\ z' = 0$

$$\Rightarrow x = c_1,\ y = c_2,\ z = c_3\text{: đó là một đường thẳng}$$

hoặc

$\vec{r}'' = 0 \Rightarrow x'' = 0,\ y'' = 0,\ z'' = 0$

$$\Rightarrow x = a_1 t + a_2,\ y = b_1 t + b_2,\ z = c_1 t + c_2$$

Vậy đường cong là một đường thẳng hoặc $\vec{r}' \neq 0,\ \vec{r}'' \neq 0 \Rightarrow \vec{r}' \,//\, \vec{r}''$ hay $\dfrac{x''}{x'} = \dfrac{y''}{y'} = \dfrac{z''}{z'} = \varphi(t)$.

Do đó:

$$d\ln x' = \varphi(t)dt \Rightarrow \ln x' = \int \varphi(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad x' = e^{\int \varphi(t)dt} = \Psi(t) \Rightarrow x = \int \Psi(t)dt + C_1$$

Tương tự:

$$y = \int \Psi(t)dt + C_2,\ z = \int \Psi(t)dt + C_3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - C_1}{1} = \frac{y - C_2}{1} = \frac{z - C_3}{1}$$

Đây là phương trình của một đường thẳng.

2) Ta biết (2.3) độ xoắn T của đường cong $\vec{r} = \vec{r}(t)$ là $T = \left|\dfrac{d\vec{\beta}}{ds}\right|$.

Theo giả thiết $T = 0$, suy ra $\dfrac{d\vec{\beta}}{ds} = 0$ hay $\vec{\beta} = \text{const}$ tại mọi điểm của đường cong, mặt khác $\vec{\beta} \perp \vec{\nu}$, $\vec{\beta} \perp \vec{\tau}$, do đó $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ luôn luôn nằm trong một mặt phẳng, nghĩa là đường cong là đường cong phẳng.

3) $\begin{cases} x = 1 + 3t + 2t^2 \\ y = 2 - 2t - 5t^2 \\ z = 1 - t^2 \end{cases}$,

$x' = 3 + 4t$, $x'' = 4$,

$y' = -2 + 10t$, $y'' = 10$

$z' = -2t$, $z'' = -2$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3+4t & -2+10t & -2t \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix}}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 38\vec{k}}{\sqrt{1198}}$$

Vậy $\vec{\beta}$ = const, theo 2) đường cong là đường cong phẳng.

Lấy 3 điểm trên đường cong (không thẳng hàng):

$M_1(1, 2, 1)$ với $t = 0$; $M_2(6, 5, 0)$ với $t = 1$; $M_3(0, 9, 0)$ với $t = -1$.

Mặt phẳng qua M_1, M_2, M_3 chính là mặt phẳng chứa đường cong, phương trình của mặt phẳng đó là:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ hay } 2x + 3y + z - 27 = 0.$$

§3. TIẾP DIỆN VÀ PHÁP TUYẾN CỦA MỘT MẶT

3.1. Mặt cho theo phương trình không giải

Trong R^3, cho mặt S, có phương trình không giải:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

Nếu F là hàm liên tục trên S thì S gọi là một mặt liên tục.

Nếu tồn tại F'_x, F'_y, F'_z liên tục tại (x, y, z) ∈ S và:

$$F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 \neq 0$$

khi đó (x, y, z) ∈ S gọi là một điểm bình thường.

Điểm M(x, y, z) ∈ S: $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 = 0$, hay ít nhất một trong F'_x, F'_y, F'_z không tồn tại gọi là một điểm bất thường của S.

Xét M(x, y, z) ∈ S là một điểm bình thường.

Phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với S tại M là:

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0$$

và
$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z} \qquad (1)$$

X, Y, Z là toạ độ của M bất kỳ thuộc tiếp diện và pháp tuyến.

$\vec{N} = (F'_x, F'_y, F'_z)$ gọi là vecteur pháp tại M(x, y, z) của S.

Đặc biệt S có phương trình: z = f(x, y) thì phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với S tại M(x, y, z) ∈ S là:

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y - (Z - z) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y} = \frac{Z - z}{-1}$$

3.2. Mặt cho theo phương trình tham số

Trong R^3, xét mặt S cho theo phương trình tham số:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D \qquad (1)$$

Phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với S tại $M(x, y, z) \in S$ là:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}$$

trong đó: $A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$

$N = (A, B, C)$ là vecteur pháp của S.

BÀI TẬP

13. Viết phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với các mặt sau:

1) $3xyz - z^3 = a^3$ tại $M(0, a, -a)$.

2) $z = x^2 + y^2$ tại $M(1, -2, 5)$.

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ tại $M(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$.

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, tiếp diện giao với các trục tọa độ những đoạn thẳng (tính từ gốc) bằng nhau.

5) $x = a\cos\theta\cos\varphi,\ y = b\cos\theta\sin\varphi,\ z = c\sin\theta$ tại (φ, θ)

6) $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = r\cot g\alpha$ tại (φ, r).

Bài giải

1) Ta có $F = 3xyz - z^3 - a^3 = 0$

$$F'_x = 3yz,\ F'_x(M) = -3a^2$$

$$F'_y = 3xz,\ F'_y(M) = 0$$

$$F'_z = 3xy - 3z^2,\ F'_z(M) = -3a^2$$

Theo (1) (3.1), ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt đã cho tại M:

$$-3a^2(x - 0) + 0(y - a) - 3a^2(z + a) = 0 \quad \text{hay} \quad x + z + a = 0$$

$$\text{và} \quad \frac{x - 0}{-3a^2} = \frac{y - a}{0} = \frac{z + a}{-3a^2} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{1} = \frac{y - a}{0} = \frac{z + a}{1}$$

2) $z = x^2 + y^2$ $\quad M(1, -2, 5)$

Ta có: $\quad z'_x = f'_x = 2x,\ f'_x(M) = 2$

$$z'_y = f'_y = 2y,\ f'_y(M) = -4.$$

Theo (2), (3.1), ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt đã cho (paraboloïde tròn xoay) là:

$$(x - 1).2 + (y + 2)(-4) - (z - 5) = 0$$

hay $\quad 2x - 4y - z - 5 = 0$

$$\text{và} \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 5}{-1}.$$

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ $\quad M(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$.

ở đây: $\quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$

$$F'_x = 2x,$$

$$F'_x(M) = 2R\cos\alpha,\ F'_y(M) = 2R\sin\alpha,\ F'_z(M) = 0.$$

Do đó ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt đã cho (mặt cầu) là:

$$(x - R\cos\alpha).2R\cos\alpha + (y - R\sin\alpha).2R\sin\alpha + (z - R).0 = 0$$

hay $\quad x\cos\alpha + y\sin\alpha - R = 0$

và $$\frac{x - R\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y - R\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{z - R}{0}$$

4) Ở đây: $$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$F'_x = \frac{2x}{a^2},\ F'_y = \frac{2y}{b^2},\ F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

Do đó phương trình của tiếp diện với mặt (ellipsoïde) tại M(x, y, z) của mặt là:

$$(X - x)\frac{2x}{a^2} + (Y - y)\frac{2y}{b^2} + (Z - z)\frac{2z}{c^2} = 0.$$

hay $$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1 \ \left(\text{vì } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right).$$

Tiếp diện này cắt các trục tọa độ tại:

$$X = \frac{a^2}{x},\ Y = \frac{b^2}{y},\ Z = \frac{c^2}{z}$$

Theo giả thiết thì: $|X| = |Y| = |Z|$ hay: $\dfrac{a^2}{|x|} = \dfrac{b^2}{|y|} = \dfrac{c^2}{|z|} = t$

Do đó: $$|x| = \frac{a^2}{t},\ |y| = \frac{b^2}{t},\ |z| = \frac{c^2}{t}.$$

Vì M(x, y, z) ∈ mặt nên:

$$\frac{a^4}{a^2t^2} + \frac{b^4}{b^2t^2} + \frac{c^4}{c^2t^2} = 1.$$

Do đó: $$t = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

và:

$$x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ y = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ z = \pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Vậy phương trình của tiếp diện của mặt là:

$$\pm X \pm Y \pm Z = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

và phương trình của pháp tuyến của mặt là:

$$\frac{X-x}{\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} = \frac{Y-y}{\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} = \frac{Z-z}{\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

hay: $$\frac{X-x}{\pm 1} = \frac{Y-y}{\pm 1} = \frac{Z-z}{\pm 1}$$

5) $x = a\cos\theta\cos\varphi,\ y = b\cos\theta\sin\varphi,\ z = c\sin\theta$

Theo (3.2), xét vecteur pháp của mặt tại (φ, θ).

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\theta\cos\varphi & -b\sin\theta\sin\varphi & c\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\varphi & b\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{-bc\cos^2\theta\cos\varphi,\ -ac\cos^2\theta\sin\varphi,\ -ab\sin\theta\cos\theta\right\}$$

Do đó phương trình của tiếp diện và pháp tuyến tại (φ, θ) của mặt là:

$$(x - a\cos\varphi\cos\theta)bc\cos^2\theta\cos\varphi + (y - b\cos\theta\sin\varphi)ac\cos^2\theta\sin\varphi +$$
$$+ (z - c\sin\theta)ab\sin\theta\cos\theta = 0$$

hay: $$\frac{x}{a}\cos\theta\cos\varphi + \frac{y}{b}\cos\theta\sin\varphi + \frac{z}{c}\sin\theta = 1$$

và $$\frac{x - a\cos\theta\cos\varphi}{bc\cos^2\theta\cos\varphi} = \frac{y - b\cos\theta\sin\varphi}{ac\cos^2\theta\sin\varphi} = \frac{z - c\sin\theta}{ab\sin\theta\cos\theta}$$

hay $$\frac{x\sec\theta\sec\varphi - a}{bc} = \frac{y\sec\theta\operatorname{cosec}\varphi - b}{ac} = \frac{z\operatorname{cosec}\theta - c}{ab}$$

6) $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = r\operatorname{cotg}\alpha$.

Tương tự 5):

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \operatorname{cotg}\alpha \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = (-r\operatorname{cotg}\alpha\cos\varphi,\ -r\operatorname{cotg}\alpha\sin\varphi,\ r)$$

Lấy $\vec{N} = (\cos\varphi, \sin\varphi, -\operatorname{tg}\alpha)$.

Ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt tại (r, φ) của mặt là:

$$(x - r\cos\varphi)\cos\varphi + (y - r\sin\varphi)\sin\varphi + (z - r\operatorname{cotg}\alpha)(-\operatorname{tg}\alpha) = 0$$

hay $x\cos\varphi + y\sin\varphi - z\operatorname{tg}\alpha = 0$

và $$\frac{x - r\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y - r\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{z - r\operatorname{cotg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}.$$

14. 1) Trên mặt $x^2 + y^2 - z^2 - 2x$, tìm những điểm tại đó tiếp diện song song với các mặt phẳng tọa độ.

2) Tìm góc giữa các mặt: $x^2 + y^2 = R^2$, $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ tại $M(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0)$.

3) Tìm các điểm trên mặt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

tại đó pháp tuyến của mặt hợp với các trục tọa độ những góc bằng nhau.

4) Chứng minh rằng pháp tuyến tại một điểm bất kỳ trên mặt tròn xoay $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ $(f \neq 0)$ cắt trục quay của nó.

5) Tìm hình chiếu của mặt $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = 0$ trên các mặt phẳng tọa độ

Bài giải

1) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ (1)

Các điểm tại đó tiếp diện song song với các mặt phẳng tọa độ là các điểm tại đó pháp tuyến của mặt thẳng góc với các mặt phẳng tọa độ:

Ở đây: $F'_x = 2x - 2, F'_y = 2y, F'_z = -2z.$

Vậy vecteur pháp của mặt tại (x, y, z) của mặt là:

$$\vec{N} = (2x - 2, 2y, -2z)$$

$\vec{N} \perp yOz \Rightarrow 2y = 0, 2z = 0$, thay vào (1) ta có:

$$x^2 - 2x = 0 \text{ hay } x = 0, x = 2$$

Vậy ta có 2 điểm (0, 0, 0) và (2, 0, 0).

$\vec{N} \perp xOz \Rightarrow 2x - 2 = 0, 2z = 0$ hay $x = 1, z = 0$

Thay vào (1) ta có: $y^2 - 1 = 0$ hay $y = \pm 1$.

Vậy ta được 2 điểm $(1, \pm 1, 0)$.

$\vec{N} \perp xOy \Rightarrow 2x - 2 = 0, 2y = 0$, thay vào (1) ta có: $-z^2 - 1 = 0$ phương trình này vô nghiệm, vậy không có trường hợp này.

2) Góc giữa hai mặt đã cho tại $M\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ là góc giữa 2 tiếp diện của 2 mặt tại điểm đó hay góc giữa hai pháp tuyến của hai mặt tại điểm đó.

Ở đây: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$

$$F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 0$$

$$F'_x(M) = R,\ F'_y(M) = R\sqrt{3},\ F'_z(M) = 0$$

Vậy pháp tuyến của mặt thứ nhất là: $\bar{N}_1 = (\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Tương tự, pháp tuyến của mặt thứ hai là: $\bar{N}_2 = (\frac{-R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Vậy góc giữa 2 mặt đã cho được xác định bởi:

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{R^2}{4} + \frac{3R^2}{4}}{\sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{3R^2}{4}}\sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{3R^2}{4}}} = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

3) Ở đây: $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$$F'_x = \frac{2x}{a^2},\ F'_y = \frac{2y}{b^2},\ F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

Do đó, vecteur pháp của mặt tại một điểm bất kỳ trên mặt là:

$$\vec{N} = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$$

Để pháp tuyến này hợp với các trục tọa độ những góc bằng nhau thì:

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} = t$$

Do đó $x = a^2t$, $y = b^2t$, $z = c^2t$, thay vào phương trình của mặt ta có:

$$\frac{a^4t^2}{a^2} + \frac{b^4t^2}{b^2} + \frac{c^4t^2}{c^2} = 1$$

hay: $$t = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Vậy các điểm phải tìm có các tọa độ:

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};\ y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};\ z = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4) Mặt $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ là mặt tròn xoay trục quay là Oz, vì cho $z = c = \text{const}$ thì $x^2 + y^2 = [f^{-1}(c)]^2$ là phương trình đường tròn tâm trên Oz. Pháp tuyến của mặt này là:

$$\vec{N} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'_u, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'_u, -1\right), u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Rõ ràng để $\vec{N}$ cắt trục Oz thì 3 vecteur $\vec{N}$, $\overrightarrow{OM}$, $\vec{k}$.

(M (x, y, z) ∈ mặt $\vec{k}$: vecteur đơn vị trên Oz)

Mặt khác, điều kiện đồng phẳng của 3 vecteur này là:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'_u & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'_u & -1 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rõ ràng định thức này bằng không với mọi M (x, y, z) của mặt vậy mọi pháp tuyến của mặt đều cắt trục quay.

5) Đường tiếp xúc của mặt với mặt trụ chiếu của mặt này trên một mặt phẳng là quỹ tích những điểm tại đó tiếp diện với mặt đã cho thẳng góc với mặt phẳng chiếu, hay cũng thế: pháp tuyến với mặt đã cho song song với mặt phẳng chiếu.

Ở đây, pháp tuyến của mặt đã cho là:

$$\vec{N} = (2x - y, 2y - x, 2z)$$

Xét: - Mặt phẳng chiếu là mặt phẳng xOy có vecteur pháp $\vec{k} = (0, 0, 1)$, theo điều kiện trên thì $\vec{k}.\vec{N} = 0$

hay: $2z.1 = 0 \Rightarrow z = 0$.

Vậy hình chiếu của mặt đã cho trên mặt phẳng xOy là:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 \le 0 \end{cases}$$

- Mặt phẳng chiếu yOz có vecteur pháp $\vec{i} = (1, 0, 0)$, theo điều kiện trên $\vec{N}.\vec{i} = 0$ hay $(2x - y).1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{y}{2}$, thay vào phương trình của mặt, ta có phương trình hình chiếu của nó trên mặt phẳng yOz là:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{3y^2}{4} + z^2 - 1 \le 0 \end{cases}$$

Tương tự, ta có phương trình hình chiếu của mặt trên mặt phẳng xOz là:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{3x^2}{4} + z^2 - 1 \le 0 \end{cases}$$

CHƯƠNG 2

TÍCH PHÂN BỘI

§1. TÍCH PHÂN KÉP

1.1. Định nghĩa - Tính chất

Tích phân kép của hàm bị chặn $z = f(P) = f(x, y)$ trên miền compact D là:

$$I = \iint_D f(P)ds = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Với mọi cách chia miền D thành n phần riêng biệt ΔS_i có diện tích cũng là ΔS_i, với bất kỳ $P_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i$, $d = \max d_i$, d_i là đường kính của ΔS_i (đường kính của một miền là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm tuỳ ý của miền).

Mọi hàm f(P) có tích phân trên miền D gọi là khả tích trên miền đó.

Điều kiện Riemann. Điều kiện cần và đủ để hàm bị chặn f(P) khả tích trên miền compact D là:

$$\lim_{d \to 0}(S - s) = 0$$

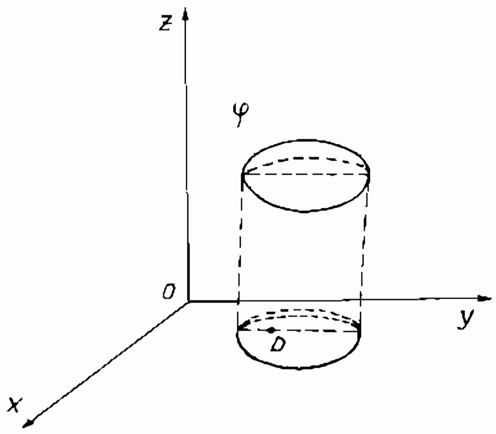
với $$s = \sum_{i}^{n} m_i \Delta S_i \,, \; S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i$$

$$m_i = \inf_{P \in \Delta S_i} f(P), \; M_i = \sup_{P \in \Delta S_i} f(P)$$

- Mọi hàm liên tục trên một miền compact đều khả tích trên miền đó.

Tích phân kép có các tính chất tương tự như các tính chất của tích phân đơn (tích phân xác định).

Về hình học: Tích phân kép $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ với $f(x, y) \geq 0$ biểu thị thể tích hình trụ cong giới hạn bởi mặt $\mathscr{S}$ $z = f(x, y)$ mặt phẳng xOy, và mặt trụ đường chuẩn là biên của D và đường sinh song song với Oz (hình 18). Nếu $f < 0$ thì $V = \iint_D |f(x, y)|dxdy$



Hình 18.

Về cơ học:

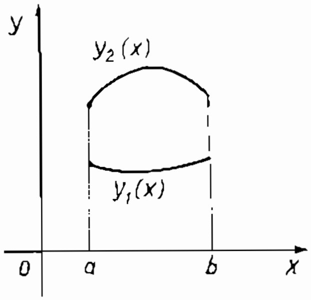
- Nếu coi $\rho = f(x, y) = \rho(x, y) > 0$ là mật độ khối lượng (mặt) của miền D thì khối lượng của miền D là:

$$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy.$$

1.2. Cách tính

- Xét miền giới hạn bởi các đường:

$y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $y_1(x) \le y_2(x)$ $a \le x \le b$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ liên tục và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ (hình 19).



Hình 19.

Nếu hàm f(x, y) khả trên D khi x = const, $\Phi(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$ tồn tại, thì tồn tại $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$

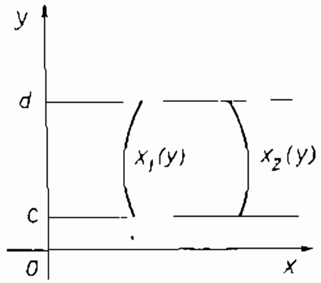
và: $$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

- Nếu D giới hạn bởi các đường:

$x_1(y) \le x \le x_2(y)$, $c \le y \le d$ (hình 20), $x_1(y)$, $x_2(y)$ liên tục

thì: $$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$$

Có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân theo x và theo y.



Hình 20.

1 3. Quy tắc đổi biến tổng quát

Xét $z = f(x, y)$ liên tục trong miền compact D, để tính:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Ta đặt: $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ (1)

Nếu:

1) Các hàm (1) có các đạo hàm riêng liên tục trong miền compact D' của mặt phẳng O'uv

2) Các hàm (1) xác định một song ánh từ D' vào D.

3) $J = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ trong D'

thì $I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\left[x(u, v), y(u, v)\right] |J| dudv$

Chú ý: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ thì:

$$J = \left(\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}\right)^{-1}$$

Đặc biệt: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\ (u = r,\ v = \varphi)$ thì $|J| = r$

và $\quad I = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdrd\varphi$ (Tọa độ độc cực)

$x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi$ thì $J = abr$

và $\quad I = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(ar\cos\varphi,\ br\sin\varphi)abrdrd\varphi$ (Tọa độ độc cực suy rộng)

1.4. Áp dụng

Thể tích vật trụ cong:

$$V = \iint\limits_{D} |f(x,y)|dxdy \qquad (1)$$

Diện tích miền D:

$$S = \iint\limits_{D} dxdy \qquad (2)$$

Diện tích mặt cong $\mathcal{S}$ (trơn): $z = f(x, y)$ có hình chiếu trên mặt phẳng xOy là miền D:

$$\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f'^2_x(x,y) + f'^2_y(x,y)}\,dxdy \qquad (3)$$

Trường hợp mặt S cho theo phương trình tham số:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D$$

thì: $\quad \sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\,dudv$

Với: $$\left.\begin{aligned} E &= x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u \\ G &= x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v \\ F &= x'_u.x'_v + y'_u.y'_v + z'_u.z'_v \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

- Moment tĩnh M_x, M_y của miền D, mật độ khối lượng $\rho(x, y)$ (> 0) đối với các trục Ox, Oy:

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy\ ,\ M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy$$

Toạ độ trọng tâm G của miền D

$$x_G = \frac{M_y}{M}\ ,\ y_G = \frac{M_x}{M} \qquad (5)$$

M là khối lượng của miền D:

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$$

- Moment quán tính I_x, I_y, I_0 của miền D đối với các trục Ox, Oy và gốc O:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)dxdy\ ,$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)dxdy\ ,$$

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy$$

Đặc biệt: miền D là đồng chất: $\rho = 1$.

BÀI TẬP

15. Viết công thức tính tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

1) D là tam giác có các đỉnh O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1).

2) D là hình thang có các đỉnh O(0, 0), A(2, 0), B(1, 1), C(0, 1).

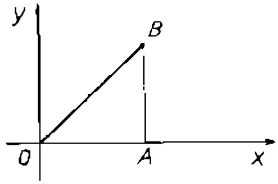
3) D là hình vành tròn $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 < 4$.

4) D giới hạn bởi các đường $y^2 - x^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $(0, 0) \in D$.

Bài giải

1) Phương trình đường thẳng OB là $y = x$

Do đó (hình 21):



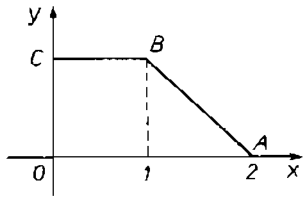
Hình 21.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y)dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y)dx .$$

2) Phương trình đường thẳng AB: $y = 2 - x$.

Vậy (hình 22):



Hình 22.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y)dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x, y)dy$$

3) Phương trình nửa trên (dưới) của các đường tròn là:

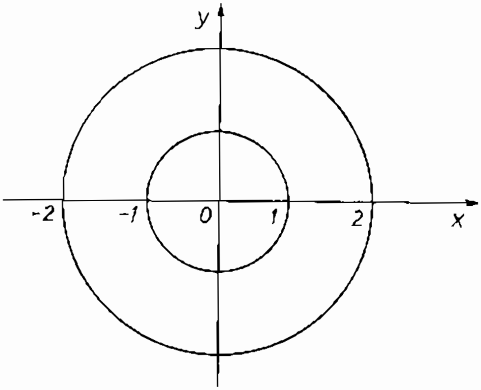
$$y = \sqrt{4 - x^2} , y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(y = - \sqrt{4 - x^2} , y = - \sqrt{1 - x^2})$$

Do đó (hình 23):

$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy +$$

$$+ \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy$$



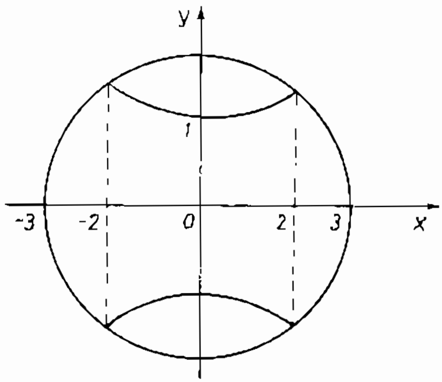
Hình 23.

4) Phương trình nửa trên (dưới) của đường tròn và hyperbole:

$$y = \sqrt{9 - x^2},\ y = \sqrt{1 + x^2}\quad (y = -\sqrt{9 - x^2},\ y = -\sqrt{1 + x^2})$$

Vậy (hình 24):

$$I = \int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)dy + \int_{-2}^{2} dx \int_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)dy + \int_{2}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)dy$$



Hình 24.

16. Thay đổi thứ tự các tích phân:

1) $I = \int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2 - x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y)dy$

2) $I = \int\limits_{2} dx \int\limits_{x}^{x^2} f(x, y)dy$

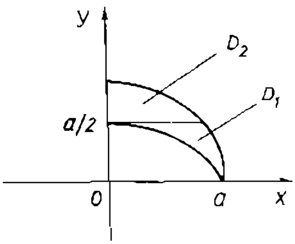
3) $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3 - y^2}} f(x, y)dx$

4) $I = \int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^x f(x, y)dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y)dy$

Bài giải

1) $I = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2}$ (hình 25)

$$D_1: \begin{cases} 0 \le y \le \dfrac{a}{2} \\ \sqrt{a^2 - 2ay} \le x \le \sqrt{a^2 - y^2} \end{cases}$$



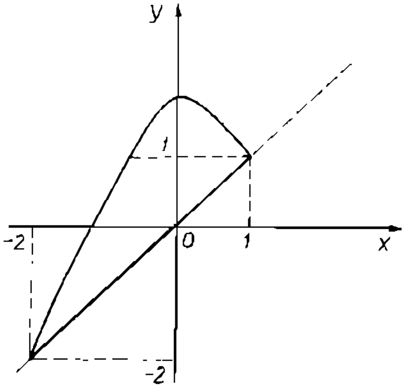
Hình 25.

$$D_2: \begin{cases} \dfrac{a}{2} \le y \le a \\ 0 \le x \le \sqrt{a^2 - y^2} \end{cases}$$

Vậy: $$I = \int\limits_0^{\frac{a}{2}} dy \int\limits_{\sqrt{a^2 - 2ay}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y)dx + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y)dx .$$

2) Theo hình 26:

$$I = \int_{-2}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{y} f(x, y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y)dx$$

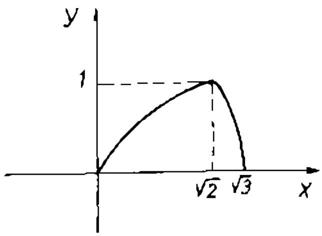


Hình 26.

3) Theo hình 27:

$$I = \int_{0}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2x}} f(x, y)dy +$$

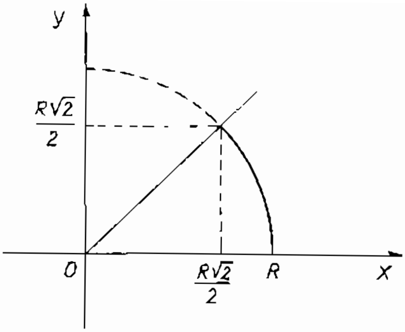
$$+ \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)dy$$



Hình 27.

4) Theo hình 28:

$$I = \int_{0}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_{y}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)dx .$$



Hình 28.

17. Tính các tích phân:

1) $I = \iint\limits_D \frac{x^2 dxdy}{1 + y^2}$, D: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

2) $I = \iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$, D giới hạn bởi: $y^2 = x$, $y = x^2$.

3) $I = \iint\limits_D \sqrt{4x^2 - y^2}dxdy$, D giới hạn bởi: $x = 1$, $y = 0$, $y = x$.

4) $I = \iint\limits_D xydxdy$, D: $\begin{cases}(x - 2)^2 + y^2 \le 1\\ y \ge 0\end{cases}$

*5) $I = \iint\limits_D ydxdy$, D giới hạn bởi $\begin{cases} x = R(t - \sin t)\\ y = R(1 - \cos t), y = 0.\\ 0 \le t \le 2\pi\end{cases}$

*6) $I = \iint\limits_D xydxdy$, D giới hạn bởi $\begin{cases} x = a\cos^3 t\\ y = a\sin^3 t \quad , 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\\ x = 0, y = 0\end{cases}$

7) $I = \iint\limits_D |\cos(x + y)|dxdy$, D: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.

8) $I = \iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}dxdy$, D: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

9) $I = \iint\limits_D \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2)dxdy$, D: $x^2 + y^2 \le 4$; $\operatorname{sign}x = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}$

10) $I = \iint\limits_D E(x - y)dxdy$, D: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$

E(x): phần nguyên của x, $E(x) \le x$.

11) $I = \iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy$, D: $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ $\quad 0 \le y \le x$

12) $I = \iint\limits_D (2 - x - y)^2 dxdy$, D: $0 \le x \le 1$, $-x \le y \le x$

13) Đổi biến $u = x + y$, $v = x - y$, viết công thức tính

$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

Bài giải

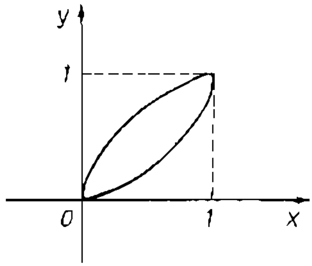
1) $I = \int_0^1 dx \int_0^1 \dfrac{x^2 dy}{1 + y^2} = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \dfrac{dy}{1 + y^2} = \dfrac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 \operatorname{arctg}y\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{12}$

2) $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dxdy$ (hình 29):

$I = \int_0^1 dx\left(x^2 y + \dfrac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}$

$= \int_0^1 \left(\dfrac{x}{2} + x^{5/2} - \dfrac{3x^4}{2}\right)dx$

$= \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{2}{7}x^{7/2} - \dfrac{3x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{33}{140}$



Hình 29.

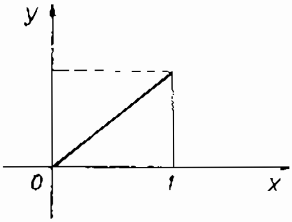
3) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\,dy$ (hình 30):

$$= \int\limits_0^1 dx\left(\frac{y}{2}\sqrt{4x^2 - y^2} + \frac{4x^2}{2}\arcsin\frac{y}{2x}\right)\Bigg|_0^x = \int\limits_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2x^2.\frac{\pi}{6}\right)dx$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{3}\,\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{9}$$

(Áp dụng công thức:

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C\ ).$$



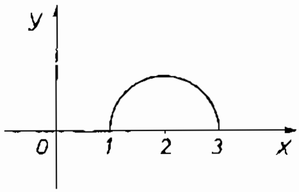
Hình 30.

4) $I = \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,dy$ (hình 31)

$$I = \int\limits_1^3 x\,dx\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}}$$

$$= \int\limits_1^3 \frac{1}{2}x\left[1 - (x-2)^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^3\left(-x^3 + 4x^2 - 3x\right)dx = \frac{4}{3}$$



Hình 31.

5) Hàm $f(x, y) = y$ lấy các giá trị bằng nhau tại các điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $x = \pi R$

Do đó:

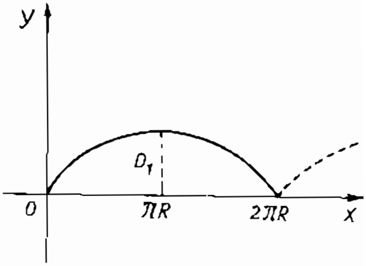
$$I = \iint_D y dxdy = 2\iint_{D_1} y dxdy \quad \text{(hình 32)}$$

$$= 2\int_0^{\pi R} dx \int_0^{y(x)} y dy = \int_0^{\pi R} y^2(x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} R^2(1 - \cos t)^2 . R(1 - \cos t)dt$$

$$= R^3\int_0^{\pi}(1 - \cos t)^3 dt$$

$$= R^3\int_0^{\pi} 8\sin^6\frac{t}{2}.dt = 16R^3\int_0^{\pi/2}\sin^6 u.du.$$



Hình 32.

$$\left(\frac{t}{2} = u,\ dt = 2du,\ 0 \le t \le \pi \Leftrightarrow 0 \le u \le \frac{\pi}{2}\right).$$

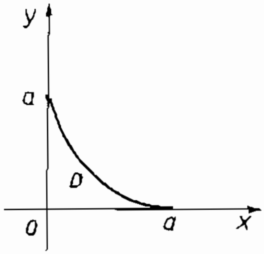
$$I = 16R^3 I_6 = 16R^3.\frac{5.3.1}{6.4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi R^3$$

$$\left[I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n xdx = \frac{(n-1)!!}{n!!}.\begin{cases}\frac{\pi}{2}: \text{n chẵn}\\ 1: \text{n lẻ}\end{cases} \right]$$

6) Tương tự như bài trước:

$$I = \int_0^a dx \int_0^{y(x)} xydy \quad \text{(hình 33)}$$

$$= \int_0^a x\frac{y^2(x)}{2}dx$$



Hình 33.

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{0} a\cos^3 t a^2 \sin^6 t(-3a\cos^2 t\sin t)dt = \frac{3}{2}a^4\int_0^{\pi/2}\cos^5 t\sin^7 t dt$$

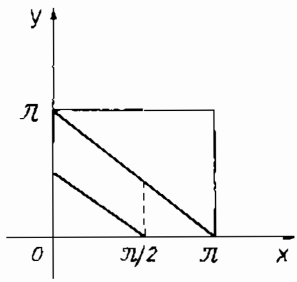
$$= \frac{3}{2}a^4\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)^2\sin^7 t d\sin t$$

$$= \frac{3}{2}a^4\int_0^{\pi/2}(\sin^7 t - 2\sin^9 t + \sin^{11} t)d\sin t$$

$$= \frac{3}{2}a^4\left(\frac{\sin^8 t}{8} - \frac{2\sin^{10} t}{10} + \frac{\sin^{12} t}{12}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^4}{80}.$$

7) Hàm $f(x, y) = |\cos(x + y)|$ nhận các giá trị bằng nhau tại các điểm đối xứng đối với đường chéo $x + y = \pi$ của hình vuông D (hình 34), do đó:

$$I = 2\iint_{D_1}|\cos(x+y)|dxdy,\ D_1: \begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi - x \end{cases}$$



Hình 34.

Rõ ràng, trong miền:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2} - x \end{cases} \Rightarrow 0 \le x + y \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(x + y) \ge 0$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} - x \le y \le \pi - x \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le x + y \le \pi \Rightarrow \cos(x + y) \le 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi - x \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le x + y \le \pi \Rightarrow \cos(x + y) \le 0.$$

Vậy:

$$I = 2\left(\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2 - x} \cos(x + y)dy - \int_0^{\pi/2} dx \int_{\pi/2 - x}^{\pi - x} \cos(x + y)dy - \right.$$

$$\left. - \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{\pi - x} \cos(x + y)dy \right)$$

$$= 2\left(\int_0^{\pi/2} (1 - \sin x)dx + \int_0^{\pi/2} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx \right) = 2\pi.$$

8) Trong miền D_1: $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2$: $y - x^2 \le 0$

D_2: $-1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 2$: $y - x^2 \ge 0$

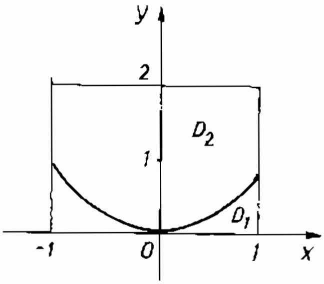
Do đó (hình 35):

$$I = \iint_{D_1} \sqrt{x^2 - y}\,dxdy + \iint_{D_2} \sqrt{y - x^2}\,dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left[\left(x^2 - y\right)^{3/2}\Big|_{0}^{x^2} + \left(y - x^2\right)^{3/2}\Big|_{x^2}^{2}\right]dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left[|x|^3 + (2 - x^2)^{3/2}\right]dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2 - x^2)^{3/2}dx$$



Hình 35.

Đặt $x = \sqrt{2}\sin t$ trong tích phân sau, ta được:

$$I = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/4} 4\cos^4 t\,dt = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/4} 4 \cdot \frac{(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t)}{4}dt$$

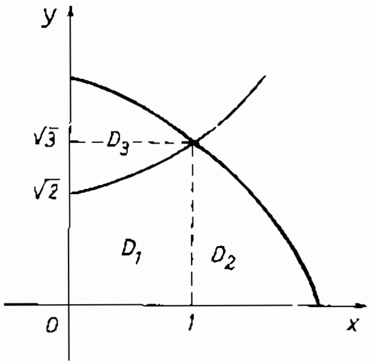
$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}$$

9) Hàm $f(x, y) = \mathrm{sign}(x^2 - y^2 + 2)$ nhận những giá trị bằng nhau tại các điểm đối xứng với các trục tọa độ trong miền D, do đó:

$$I = 4\iint\limits_{\substack{x^2 + y^2 \le 4 \\ x \ge 0,\ y \ge 0}} \mathrm{sign}(x^2 - y^2 + 2)\,dxdy$$

Trong góc phần tư thứ nhất, hyperbole $x^2 - y^2 + 2 = 0$ và đường tròn cắt nhau tại $x = 1$, $y = \sqrt{3}$ và hyperbole chia miền lấy tích phân thành hai phần mà $x^2 - y^2 + 2$ có dấu khác nhau (hình 36). Cụ thể trong D_1 và D_2: $y < \sqrt{x^2 + 2}$ hay $x^2 - y^2 + 2 \geq 0$, theo định nghĩa:

$$\text{sign}(x^2 - y^2 + 2) = 1$$



Hình 36.

Trong D_3 thì $x^2 - y^2 + 2 \leq 0$ và $\text{sign}(x^2 - y^2 + 2) = -1$.

Vậy:

$$I = 4\left(\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right)$$

$$= 4\left(\int_0^1 \left(2\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{4 - x^2}\right) dx + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx\right)$$

$$= 4\left(2\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 2} + 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right)\right)\Bigg|_0^1 -$$

$$- \left(\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^1 + 4\left(\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{3}.$$

10) Chia D thành 4 miền D_1, D_2, D_3, D_4 bởi các đường thẳng:

$$x + y = 1,\ x + y = 2,\ x + y = 3 \text{ (hình 37)}.$$

Diện tích của chúng là S_1, S_2, S_3, S_4 thì $S_1 = S_4 = \frac{1}{2}$, $S_3 = S_2 = \frac{3}{2}$.

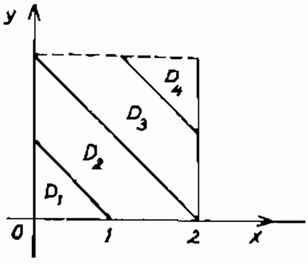
Trong D_1: $0 \le x + y < 1$, $E(x + y) = 0$

D_2: $1 \le x + y < 2$, $E(x + y) = 1$

D_3: $2 \le x + y < 3$, $E(x + y) = 2$

D_4: $3 \le x + y < 4$, $E(x + y) = 3$

(theo định nghĩa của hàm $E(x)$).



Hình 37.

Vậy:
$$I = \sum_{K=1}^{4}\iint_{D_K} E(x + y)dxdy = S_2 + 2S_3 + 3S_4 = 6.$$

11) Đổi biến $\begin{cases} x = v \\ x + y = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v \\ y = u - v \end{cases};\quad \begin{matrix} 0 \le v \le \frac{\pi}{2} \\ v \le u \le 2v \end{matrix}$

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} vdv \int_v^{2v} \sin u du = 1 - \frac{\pi}{2}$$

12) Đổi biến $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases};\quad \begin{matrix} u \ge 0 \\ v \ge 0 \\ 0 \le u \le 2 - v \end{matrix}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^2 dv \int_0^{2-v} (2-u)^2 du = 2$$

13) $D \to D'$: $\begin{cases} -v \le u \le 2 - v \\ v \le u \le 2 + v, \quad J = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_1^0 dv \int_v^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}du + \int_0^1 dv \int_v^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}du$$

18. Chuyển sang tọa độ dọc cực, tính:

1) $I = \iint\limits_D y\,dxdy$, D: $\begin{cases} \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 \le \dfrac{a^2}{4} \\ y \ge 0 \end{cases}$

2) $I = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$

a) D: $\begin{cases} x^2 + y^2 < a^2 \\ y \ge 0 \end{cases}$ b) D: $\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2(x^2 - y^2) \\ x \ge 0 \end{cases}$

3) $I = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, D: $\pi^2 < x^2 + y^2 \le 4\pi^2$

4) $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, D: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$

5) $I = \iint\limits_D dxdy$, D giới hạn bởi các đường:

$$y = x,\ y = 4x,\ xy = 1,\ xy = 2.$$

6) $I = \iint\limits_D dxdy$, D giới hạn bởi đường: $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{h^2} + \dfrac{y^2}{k^2}$, $(x, y) \ge 0$.

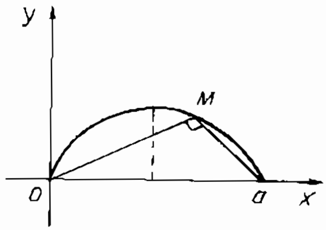
Bài giải

1) Ta có $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$D \to D'$: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le r \le a\cos\varphi$

Do đó (hình 38):

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r\sin\varphi . r dr$$



Hình 38.

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 dr = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \left(\frac{r^3}{3} \right)\Bigg|_0^{a\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_{\pi/2}^{0} \cos^3\varphi d\cos\varphi = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \frac{a^3}{12}.$$

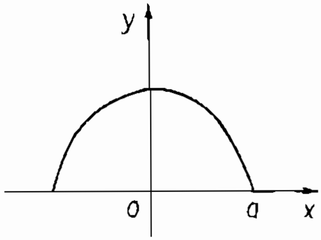
2) a) Chuyển sang tọa độ độc cực D → D': $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le r \le a$ (hình 39).

Do đó:

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} \sqrt{a^2 - r^2}.rdr$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{3}\left(a^2 - r^2\right)^{3/2} \right)\Bigg|_0^{a}$$

$$= \frac{\pi a^3}{3}$$



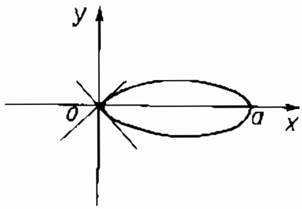
Hình 39.

b) D: $\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2(x^2 - y^2) \\ x \ge 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow D' \begin{cases} 0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi} \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{(hình 40)}$$

Do đó:

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - r^2}.rdr$$



Hình 40.

Xét:

$$I = \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - r^2}\,.rdr = -\frac{1}{3}\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(1 - 2\sqrt{2}\left|\sin\varphi\right|^3\right)$$

Vậy:

$$I = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1 - 2\sqrt{2}\left|\sin\varphi\right|^3\right)d\varphi = \frac{a^3}{3}\left[\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi d\varphi\right]$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\left(\cos^2 - 1\right)d\cos\varphi\right]$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2}\left(\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4}\right] = \frac{a^3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2} - 20}{9}\right)$$

3) Chuyển sang tọa độ độc cực: $D \to D'$: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\pi \le r \le 2\pi$.

Do đó:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\pi^{2\pi} \sin r.rdr = 2\pi\left[-r\cos r\Big|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi}\cos rdr\right] = -6\pi^2.$$

4) Chuyển sang tọa độ độc cực suy rộng:

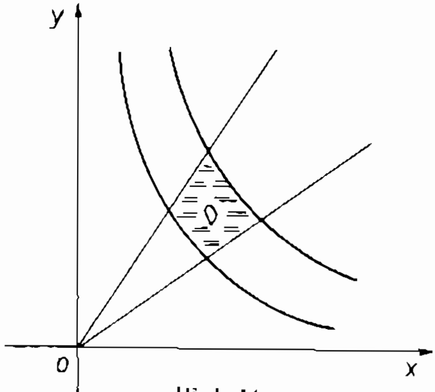
$$x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi$$

thì $D \to D'$: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, $|J| = abr$.

Theo (1.3):

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\,abrdr = 2\pi ab\left(-\frac{1}{3}\left(1 - r^2\right)^{3/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}.$$

5) Theo giả thiết D giới hạn bởi 2 hyperbole và 2 đường thẳng (hình 41).



Hình 41.

Đặt $\begin{cases} xy = u \\ y = vx \end{cases}$ thì $D \to D'$: $\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 4 \end{cases}$

và $\begin{cases} x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \\ y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \end{cases}$, $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$

$(J = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}^{-1} = \left(\frac{2y}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{2v}$; chú ý 1, 3)

Vậy theo công thức đổi biến số tổng quát (1.3):

Ta có:

$$I = \int_1^2 du \int_1^4 \frac{1}{2v} dv = \frac{1}{2} \ln v \Big|_1^4 = \ln 2.$$

6) Chuyển sang tọa độ độc cực suy rộng (1.3):

$$x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi, |J| = abr$$

Phương trình đường cong là:

$$r^4 = r^2\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right)$$

hay: $$r = \pm\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}$$

Vì $r(0) = r(2\pi)$ nên đường cong là kép kín.

Đường cong đối xứng đối với các trục toạ độ và xác định khi:

$$\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi \ge 0,$$

do đó trong góc phần tư thứ nhất ta có điều kiện:

$$\operatorname{tg}\varphi \le \frac{ak}{bh} \qquad \text{và} \qquad I = 4\iint_{D_1} abrd\varphi dr\,.$$

Với $$D_1\colon 0 \le \varphi \le \operatorname{artg}\frac{ak}{bh}$$

$$0 \le r \le \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}$$

Vậy:

$$I = 4ab\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}} rdr$$

$$= 2ab\int_0^{\alpha}\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right)d\varphi,\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}$$

$$= ab\left[\frac{a^2}{h^2}\int_0^{\alpha}(1 + \cos 2\varphi)d\varphi - \frac{b^2}{k^2}\int_0^{\alpha}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi\right]$$

$$= ab\left[\frac{a^2}{h^2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\alpha} - \frac{b^2}{k^2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\alpha}\right]$$

$$= ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right)\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\sin 2\alpha\right]$$

$$= ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk}\right]$$

(Vì $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2\dfrac{ak}{bh}}{1 + \dfrac{a^2k^2}{b^2h^2}} = \dfrac{2akbh}{a^2k^2 + b^2h^2}$,

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}\right)\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2k^2 + b^2h^2}{h^2k^2} \cdot \dfrac{2akbh}{a^2k^2 + b^2h^2} = \dfrac{ab}{hk}$).

19. 1) Xét dấu của các tích phân:

a) $I = \iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)dxdy$, D: $\begin{cases} |x| + |y| \le 1 \\ x^2 + y^2 \ne 0 \end{cases}$

b) $I = \iint \arcsin(x + y)dxdy$, D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 - x \end{cases}$.

2) Tìm giá trị trung bình của các hàm:

a) $f(x, y) = \sin^2x\sin^2y$ trong D: $0 \le x, y \le \pi$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ trong D: $(x - a)^2 + (y - b)^2 \le R^2$.

Bài giải

1) a) Từ $|x| + |y| \le 1$, suy ra: $x^2 + y^2 + 2|xy| \le 1$.

hay $x^2 + y^2 < 1$, $(x^2 + y^2 \neq 0)$, do đó: $0 < x^2 + y^2 < 1$.

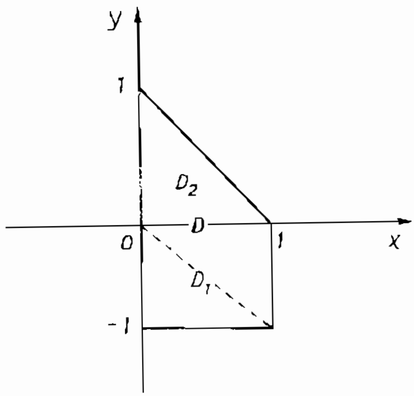
và $\ln(x^2 + y^2) < 0$, theo tính chất của tích phân:

$$I = \iint\limits_D \ln\left(x^2 + y^2\right)dxdy < 0.$$

b) Theo hình 42:

$$I = \iint\limits_D \arcsin(x + y)dxdy = \iint\limits_{D_1} \arcsin(x + y)dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{D_2} \arcsin(x + y)dxdy = I_1 + I_2$$



Hình 42.

Với D_1: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y < 0 \end{cases}$

Tại các điểm đối xứng với đường chéo $y = -x$ hàm $f(x, y) = \arcsin(x + y)$ nhận các giá trị đối nhau nên $I_1 = 0$.

Với D_2: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}$, hàm $f(x, y) = \arcsin(x + y) > 0$.

(Trừ tại (0, 0): $f(x, y) = 0$). Do đó $I = I_1 + I_2 = 0 + I_2 = I_2 > 0$ theo tính chất của tích phân.

2) a) Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, giá trị trung bình của $f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$ trong D là:

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{\pi^2}\iint_D \sin^2 x \sin^2 y dy = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} \sin^2 x dx \int_0^{\pi} \sin^2 y dy = \frac{1}{4}$$

b) Tương tự như a):

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dy$$

Dùng tọa độ cực: $x = a + r\cos\varphi$, $y = b + r\sin\varphi$, ta có:

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \left[\left(a^2 + b^2\right)r + 2r^2\left(a\cos\varphi + b\sin\varphi\right) + r^3\right] dr$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\left[\pi R^2\left(a^2 + b^2\right) + \frac{\pi R^4}{2}\right] = a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}$$

20. Tính diện tích S của miền D giới hạn bởi các đường:

1) $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$

2) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$

3) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $r = a\cos\varphi$ $(a > 0)$

4) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$

5) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

6) $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$

$$0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta$$

7) $(y - x)^2 + x^2 = 1$

8) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

9) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{xy}{c^2}$

Bài giải

1) Tìm giao điểm của hai đường:

$$\frac{y^2}{4a} = 3a - y$$

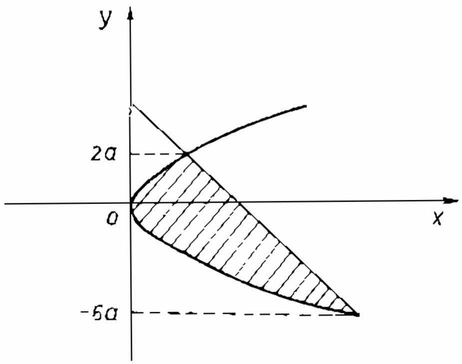
$$\Rightarrow \quad y^2 + 4ay - 12a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 2a,\ y_2 = -6a$$

Theo hình 43 và theo (1. 4) diện tích của hình đã cho là:

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-6a}^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx = \int_{-6a}^{2a} \left(3a - y - \frac{y^2}{4a}\right) dy$$

$$= \left(3ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12a}\right)\Bigg|_{-6a}^{2a} = \frac{64}{3} a^2 \text{ (đvdt)}.$$



Hình 43.

2) Chuyển sang tọa độ dọc cực:

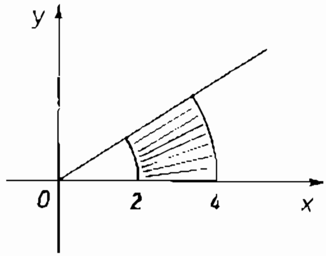
$$D \to D': \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ \cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \end{cases} \quad \text{(hình 44).}$$

$$S = \iint_{D'} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$= 6\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\varphi = 3\int_0^{\pi/4}(1 + \cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= 3\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \text{ (dvdt).}$$



Hình 44.

3) Miền D giới hạn bởi đường Cardioïde: $r = a(1 + \cos\varphi)$ và đường tròn $r = a\cos\varphi$ (hình 45).

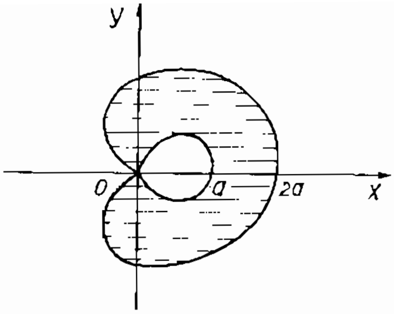
Do đối xứng nên:

$$S = 2\left[\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr + \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr\right]$$

$$= 2\,\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2}\left(r^2\Big|_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)}\right)d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(r^2\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)}\right)d\varphi\right]$$

$$= a^2\left\{\int_0^{\pi/2}\left[(1+\cos\varphi)^2 - \cos^2\varphi\right]d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi\right\}$$

$$= \frac{5\pi a^2}{4} \text{ (dvdt).}$$



Hình 45.

4) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$

Chuyển sang tọa độ độc cực:

$$r^4 = 2ar^3\cos^3\varphi \quad \text{hay} \quad r = 2a\cos^3\varphi.$$

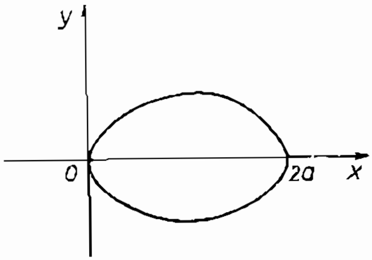
Do đối xứng (hình 46), ta có:

$$S = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos^3\varphi} r dr$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^6\varphi d\varphi$$

$$= 4a^2 \cdot \frac{5.3.1}{6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{5}{8}\pi a^2 \text{ (đvdt) ((2.3) C.5 I.1)}$$



Hình 46.

5) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

Đường cong đối xứng với các trục tọa độ.

Điểm (0, 0) thuộc đường cong nhưng là điểm cô lập (hình 47), chuyển sang tọa độ độc cực, do đối xứng nên:

$$S = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}} r\,dr$$

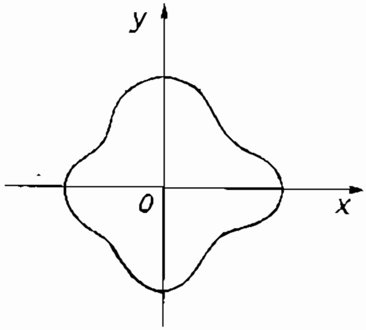
$$((r^2)^3 = a^2(r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi)$$

$$\Rightarrow r = \pm a\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}\,)$$

$$S = 2a^2\int_0^{\pi/2}\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right)d\varphi$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\,d\varphi = 4a^2.\frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2}$$

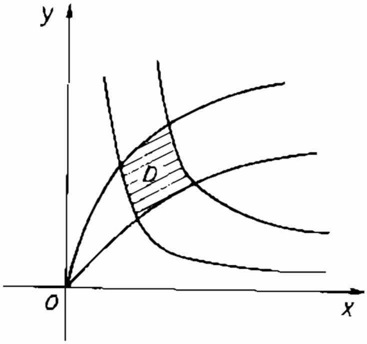
$$= \frac{3}{4}a^2\pi \text{ (đvdt).}$$



Hình 47.

6) $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$

Chuyển sang tọa độ cong tổng quát: (u, v) bằng cách đặt: $\frac{y^2}{x} = u$, $xy = v$ thì miền D (hình 48) thành D': $a \le u \le b$, $\alpha \le v \le \beta$.



Hình 48.

$$x = u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}},\quad y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}},$$

$|J| = \frac{1}{3u}$ và:

$$S = \int_a^b du\int_\alpha^\beta \frac{dv}{3u}$$

$$= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)\ln\frac{b}{a} \quad \text{(đvdt).}$$

7) $(y - x)^2 + y^2 = 1$ (đường ellipse).

Đặt $y - x = u$, $x = v$, $D \to D'$: $u^2 + v^2 \le 1$

$$x = v$$

$$y = u + v,\ J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$S = \iint\limits_{D'} |J| dudv = \pi.1^2 = \pi \ \text{(dvdt)}.$$

8) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$ (đường ellipse).

Đặt $u = x - 2y + 3$, $v = 3x + 4y - 1$ thì $D \to D'$: $u^2 + v^2 = 100$.

Theo đại số: $J = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{10}$.

Vậy: $$S = \frac{1}{10}\iint\limits_{D'} dudv = \frac{1}{10}\pi.10^2 = 10\pi \ \text{(dvdt)}.$$

9) Chuyển sang tọa độ độc cực suy rộng: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ thì phương trình độc cực của đường cong là: $r^2 = \dfrac{ab}{c^2}\sin\varphi\cos\varphi$ (đường Lenniscate).

Đường cong đối xứng với gốc tọa độ:

$$S = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\varphi\cos\varphi}} abrdr = \frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{a^2b^2}{2c^2} \ \text{(dvdt)}.$$

21. Tính thể tích V của hình giới hạn bởi các mặt:

1) $az = y^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

2) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$

3) $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\frac{3}{2}x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$

4) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = - a^2$

5) $2az \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

6) $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$

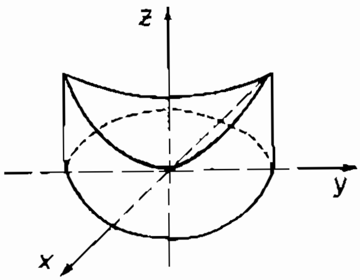
7) $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(x, y \geq 0)$, $z = 0$

8) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$

9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $(z > 0)$.

Bài giải

1) Hình cần tính thể tích là một hình trụ cong giới hạn bởi mặt trụ parabole $y^2 = az$, mặt trụ tròn xoay $x^2 + y^2 = R^2$ và mặt phẳng xOy (hình 49).



Hình 49.

Do đó:

$$V = \iint_D \frac{y^2}{a} dxdy$$

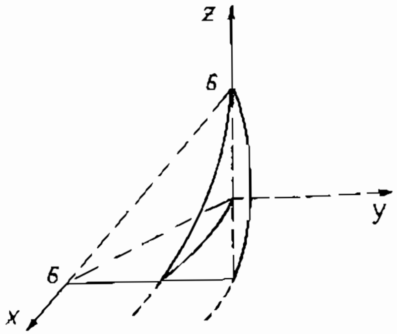
$$D: x^2 + y^2 \leq R^2$$

Chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$V = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \sin^2\varphi . r dr$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{a}\left(\frac{4}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} . \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{4a} \text{ (dvdt).}$$

2) Hình đã cho giới hạn bởi các mặt trục parabole: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, mặt phẳng $x + z = 6$ và mặt phẳng xOy (hình 50).



Hình 50.

Do đó:

$$V = \iint_D (6 - x)dxdy \quad \text{với} \quad D: \begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x} \end{cases}$$

Vậy:

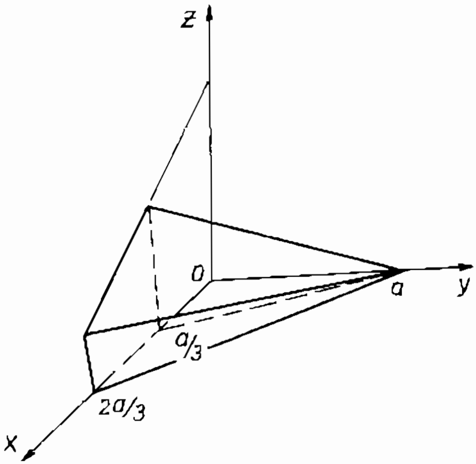
$$V = \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6 - x)dy = \int_0^6 (6 - x)\sqrt{x}dx$$

$$= \left(6.\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^6 = \frac{48\sqrt{6}}{5} \text{ (dvdt).}$$

3) Hình đã cho giới hạn bởi các mặt phẳng (hình 51):

Do đó:

$$V = \iint_D (a - x - y)dxdy$$



Hình 51.

D: $0 \leq y \leq a$

$$\frac{a - y}{3} \leq x \leq \frac{2(a - y)}{3}$$

Vậy:

$$V = \int_0^a dy \int_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2(a-y)}{3}} (a - x - y)dx = \int_0^a \left[(a - y)x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2(a-y)}{3}} dx$$

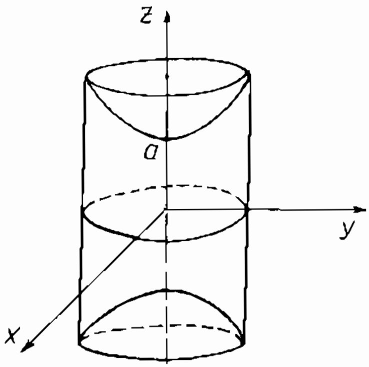
$$= \frac{1}{6}\int_0^a (a - y)^2 dy = \frac{1}{6}\left(a^2 y - ay^2 + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{18} \text{ (đvdt).}$$

4) Hình đã cho giới hạn bởi mặt trụ: $x^2 + y^2 = a^2$ và mặt hyperboloide 2 tầng tròn xoay: $x^2 + y^2 - z^2 = - a^2$ (hình 52).

Do đối xứng nên:

$$V = 2\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}\,dxdy$$

Với D: $x^2 + y^2 \le a^2$



Hình 52.

Chuyển sang tọa độ độc cực, ta có:

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 + r^2}\,rdr$$

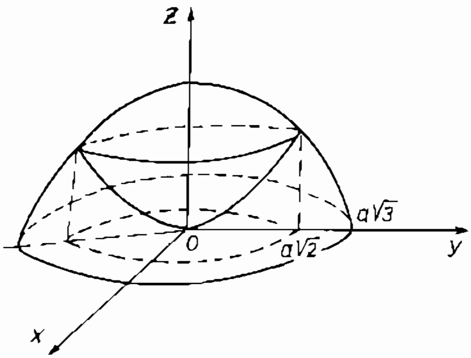
$$= 4\pi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(a^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^a = \frac{4\pi a^3}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \text{ (đvdt).}$$

5) Hình đã cho giới hạn bởi mặt paraboloïde tròn xoay $x^2 + y^2 = 2az$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ (phần chứa nửa dương của trục Oz) (hình 53).

Khử z ở hai phương trình trên, ta có phương trình hình chiếu của giao tuyến của hai mặt đã cho trên mặt phẳng xOy chính là phương trình đường biên giới của miền D:

$$x^2 + y^2 = 2az \Rightarrow z^2 + 2az - 3a^2 = 0 \Rightarrow z = a \Rightarrow x^2 + y^2 = 2a^2$$

Vậy: $$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2a} \right) dxdy$$



Hình 53.

Chuyển sang tọa độ độc cực, ta có:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a} \right) rdr$$

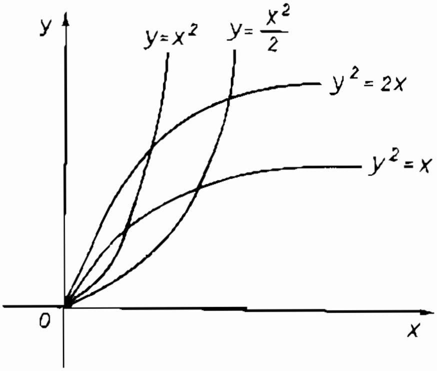
$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}\left(3a^2 - r^2\right)^{3/2} - \frac{r^4}{8a} \right]_0^{a\sqrt{2}} = \frac{\pi a^3}{3}\left(6\sqrt{3} - 5\right) \text{ (đvtt)}.$$

6) Hình đã cho giới hạn phía trên bởi mặt paraboloïde hyperbolique $z = xy$ (dùng phép biến đổi $x = X - Y$, $y = X + Y$, $z = Z$, thì phương trình của mặt là $Z = X^2 - Y^2$), phía dưới bởi mặt phẳng xOy. Hình chiếu của hình đã cho trên mặt phẳng xOy là tứ giác cong D giới hạn bởi các đường:

$$x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ y^2 = x,\ y^2 = 2x \text{ (hình 54)}.$$

Do đó:

$$V = \iint_D xy\,dxdy$$



Hình 54.

Chuyển sang tọa độ cong tổng quát: đặt $\frac{x^2}{y} = u$, $\frac{y^2}{x} = v$

thì $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 2$ và $x = u^{2/3}v^{1/3}$, $y = u^{1/3}v^{2/3}$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

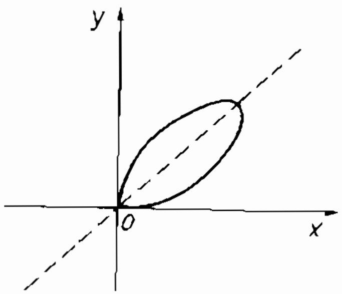
Vậy: $$V = \int_1^2 du\int_1^2 uv.\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 udu\int_1^2 vdv = \frac{3}{4} \text{ (dvtt).}$$

7) Hình đã cho giới hạn phía trên bởi mặt phẳng $z = x + y$, phía dưới bởi mặt phẳng xOy, và xung quanh giới hạn bởi mặt trụ:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy \ (x \geq 0, y \geq 0)$$

nghĩa là miền D giới hạn bởi các đường $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $x = 0$, $y = 0$.

Chuyển sang tọa độ độc cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ thì miền D giới hạn bởi $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ ($r = \sqrt{\sin 2\varphi}$: đường Lemniscate, vì thay $\varphi = \dfrac{\pi}{4} - \varphi'$ thì $r = \sqrt{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\varphi'\right)} = \sqrt{\cos 2\varphi'}$, đường này đối xứng đối với đường thẳng $y = x$, (hình 55)).



Hình 55.

Vậy chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$V = \iint_D (x + y)dxdy$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} 2\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \left[1 - (\sin\varphi - \cos\varphi)^2\right]^{3/2} d(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Đặt $\sin\varphi - \cos\varphi = u$ thì: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \le u \le 1$.

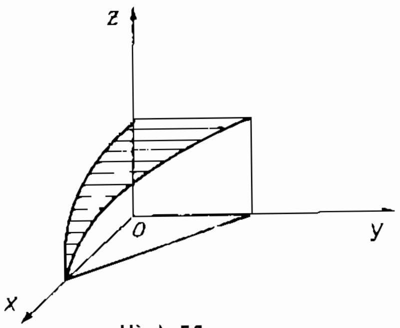
Khi đó: $V = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1 - u^2)^{3/2} du = \dfrac{2}{3}\int_0^1 (1 - u^2)^{3/2} du$

Lại đặt $u = \sin t$ thì $0 \le u \le 1 \Leftrightarrow 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

và $V = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^4 t dt = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3.1}{4.2}.\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{8}$ (đvtt).

8) Hình đã cho giới hạn bởi mặt trụ trục Oz: $x^2 + y^2 = a^2$ và mặt trụ trục Oy: $x^2 + z^2 = a^2$ (hình 56, trong góc phần tám thứ nhất). Do đối xứng nên:

$$V = 8\iint_D \sqrt{a^2 - x^2}\, dxdy$$



Hình 56.

Với D: $0 \le x \le a,\ 0 < y < \sqrt{a^2 - x^2}$

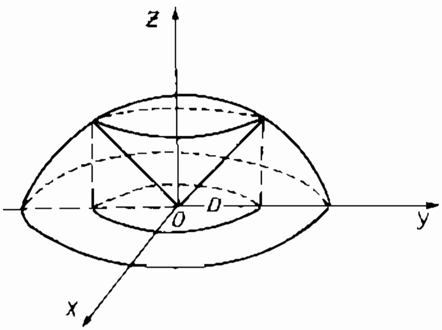
Vậy: $$V = 8\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = 8\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{16a^3}{3} \text{ (đvtt)}.$$

9) Hình đã cho giới hạn bởi mặt ellipsoïde: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ và mặt nón $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ với $z > 0$ (hình 57).

Do đó:

$$V = \iint_D \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) dxdy .$$

Với D là miền có biên giới là hình chiếu của đường giao của hai mặt trên.



Hình 57.

Khử z ở hai phương trình trên ta có phương trình của hình chiếu đó:

$$\frac{2z^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

Chuyển sang tọa độ độc cực suy rộng:

$$x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi,\ |J| = abr$$

Ta có:

$$V = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(r\sqrt{1 - r^2} - r^2\right)dr$$

$$= \frac{2}{3}\pi abc\left[\left(1 - r^2\right)^{3/2} - r^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}$$

$$= \frac{\pi}{3}abc(2 - \sqrt{2})\ \text{(dvtt)}.$$

22. Tính diện tích σ của:

1) Phần mặt $x^2 + y^2 = R^2$ gồm giữa 2 mặt phẳng $z = mx$, $z = nx$ $(m > n > 0)$

2) Phần mặt $x^2 - y^2 = z^2$ trong góc phần tám thứ nhất và giới hạn bởi mặt phẳng $y + z = a$.

3) Phần mặt $x^2 + y^2 = 2ax$ gồm giữa mặt phẳng $z = 0$ và mặt $x^2 + y^2 = z^2$

4) Phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ở phía ngoài các mặt $x^2 + y^2 = \pm Ry$

5) Phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ở phía trong mặt $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

6) Phần mặt $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ở phía trong mặt $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

7) Phần mặt giới hạn bởi các mặt: $x^2 + z^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$.

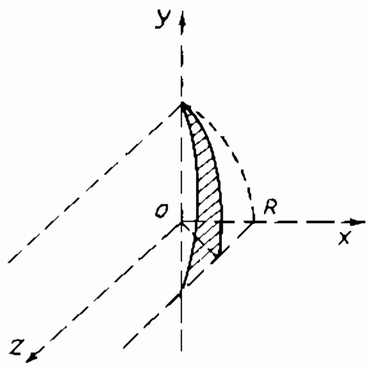
8) Phần mặt $x^2 + y^2 = Rx$ bao gồm trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (mặt bên của vật thể Viviani).

9) Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ giới hạn bởi hai kinh tuyến và hai vĩ tuyến.

Bài giải

1) $x^2 + y^2 = R^2$ là mặt trụ tròn xoay trục Oz

$z = mx$, $z = nx$ là các mặt phẳng qua Oy (hình 58)



Hình 58.

Xét: $y = y(x, z) = \sqrt{R^2 - x^2}$

Do đối xứng nên theo (1.4):

$$\sigma = 4\iint_D \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\,dxdz$$

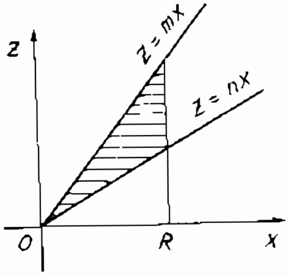
Với D là miền giới hạn bởi các đường: $z = mx$, $z = nx$, $x = R$ trong mặt phẳng xOz (hình 59):

Ta có:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$y'_z = 0,$$



Hình 59.

$$\sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\sigma = 4\int_0^R dx \int_{nx}^{mx} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dz = 4R(m - n)\int_0^R \frac{xdx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= 4(m - n)R^2 \text{ (đvdt)}.$$

2) Mặt $x^2 - y^2 = z^2$ hay $y^2 + z^2 = x^2$ là mặt nón trục là trục Ox,

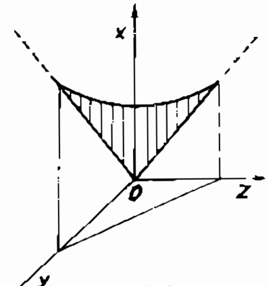
$y + z = a$ là mặt phẳng song song với trục Ox (hình 60).

Do đó: $\sigma = \iint_D \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}\, dydz$

Với D là miền trong mặt phẳng yOz, giới hạn bởi các đường: $y = 0$, $z = 0$, $y + z = a$.

$$x = \sqrt{y^2 + z^2},\ x'_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}},\ x'_z = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$\sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + z^2}} = \sqrt{2}$$

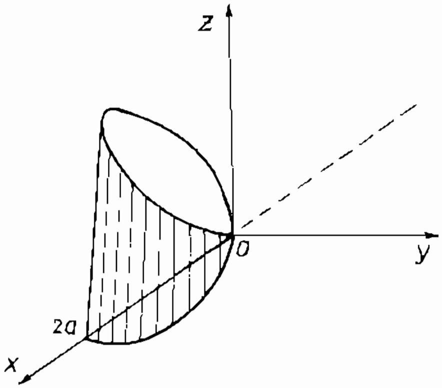


Hình 60.

Vậy: $\sigma = \iint\limits_D \sqrt{2}dxdy = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ (dvdt)

3) Phần mặt đã cho là mặt trụ $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ đường sinh song song với Oz, giới hạn giữa mặt phẳng $z = 0$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Phần mặt đã cho có phương trình $y = \pm\sqrt{2ax - x^2}$ đối với mặt phẳng xOz.



Hình 61.

Do đối xứng nên xét $y = \sqrt{2ax - x^2}$

$$y'_x = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}},\ y'_z = 0,\ \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

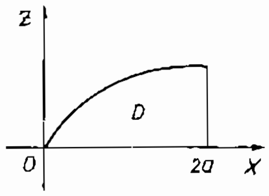
Theo (1.4) ta có:

$$\sigma = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\,dxdz = 2\iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}\,dxdz.$$

Với D là miền trong mặt phẳng xOz giới hạn bởi trục Ox, đường thẳng $x = 2a$ và đường L là hình chiếu của giao tuyến của mặt trụ và mặt nón trên mặt phẳng xOz. Phương trình của L có được bằng cách khử y ở các phương trình:

$x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = z^2$:

$z^2 = 2ax$, với $z \geq 0$



Hình 62.

Ta có:

$$z = \sqrt{2ax} \text{ (hình 62).}$$

Vậy:

$$\sigma = 2a\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax}} \frac{dz}{\sqrt{2ax - x^2}} = 2a\int_0^{2a} \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}}\,dx$$

$$= 2a\int_0^{2a} \sqrt{\frac{2a}{2a - x}}\,dx = 2a\sqrt{2a}\left(-2\sqrt{2a - x}\right)\Big|_0^{2a} = 8a^2 \text{ (đvdt).}$$

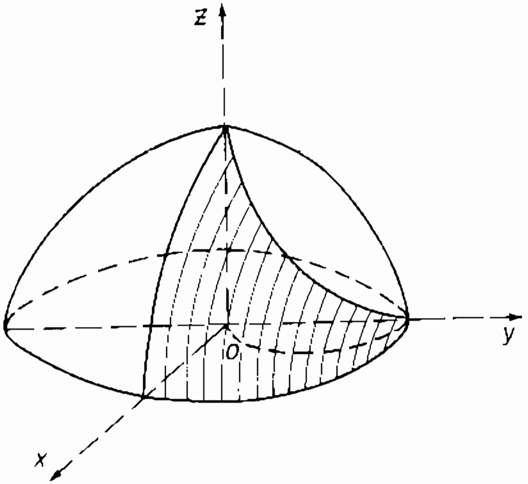
4) Phần mặt đã cho là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ở ngoài các mặt trụ: $x^2 + y^2 = \pm Ry$ (hình 63).

Vì lý do đối xứng nên xét phần mặt cầu trong góc phần tám thứ nhất:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Do đó: $\sigma = 8R\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$



Hình 63.

D là hình chiếu của phần mặt trên mặt phẳng xOy (trong góc phần tám thứ nhất):

$$0 \le y \le R,\ \sqrt{Ry - y^2} \le x \le \sqrt{R^2 - y^2}$$

Chuyển sang tọa độ độc cực $y = r\cos\varphi$, $x = r\sin\varphi$, ta có:

$$\sigma = 8R\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{R\cos\varphi}^{R} \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 8R\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{R^2 - r^2}\right)\Big|_R^{R\cos\varphi} d\varphi$$

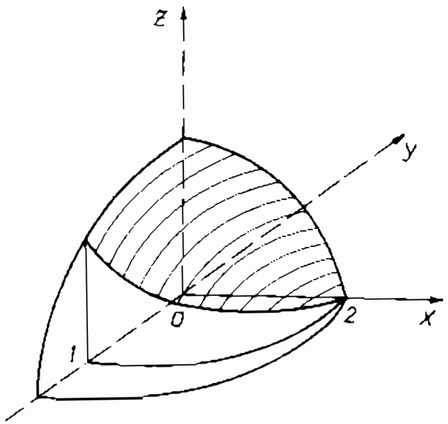
$$= 8R^2\int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = 8a^2 \text{ (đvdt)}.$$

5) Phần mặt đã cho là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ở trong mặt trụ ellipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Do đối xứng, ta xét trong góc phần tám thứ nhất (hình 64):

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$



Hình 64.

Do đó: $$\sigma = 8\iint_D \frac{2dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Với D là hình chiếu của phần mặt cầu trong góc phần tám thứ nhất trên mặt phẳng xOy, đó là hình ellipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Vậy:

$$\sigma = 16\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \frac{dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = 16\int_0^2 \arcsin\frac{y}{\sqrt{4 - x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx$$

$$= 16\int_0^2 \arcsin\frac{1}{2}dx = 16.\frac{\pi}{6}.2 = \frac{16}{3}\pi \text{ (đvdt)}.$$

6) Phần mặt đã cho là mặt nón $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ hay $y^2 + z^2 = x^2$ với $z \geq 0$, mặt nón này đỉnh tại gốc O và trục là Ox. Rõ ràng 1/4 diện tích cần tính nằm trong góc phần tám thứ nhất và có hình chiếu trên mặt phẳng xOy là miền D:

$$(x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2),\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ (Lemniscate)}$$

ở đây: $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, $z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$,

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Do đó: $\sigma = 4\sqrt{2}\iint\limits_D \dfrac{xdxdy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

Chuyển sang tọa độ độc cực, ta có:

$$\sigma = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\varphi.d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rdr = 2\sqrt{2}a^2 \int_0^{\pi/4} \cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}d\varphi$$

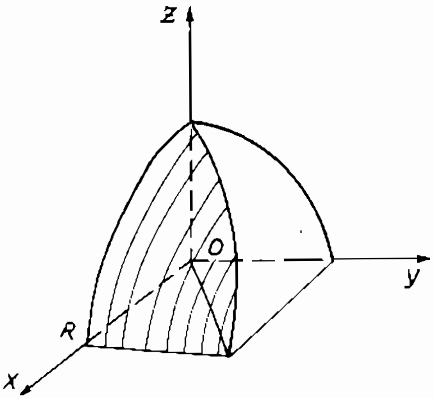
$$= 2a^2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right)^2}\, d\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right)$$

Đặt $\sqrt{2}\sin\varphi = t$ ta được:

$$\sigma = 2a^2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi a^2}{2}\ \text{(dvdt)}.$$

7) Phần mặt đã cho giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + z^2 = R^2$ trục Oy và mặt trụ $y^2 + z^2 = R^2$ trục Ox (hình 65). Do đối xứng nên ta có:

$$\sigma = 16\iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy$$



Hình 65.

ở đây: $\quad z = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Còn D là miền: $0 \le x \le R$, $0 \le y \le x$.

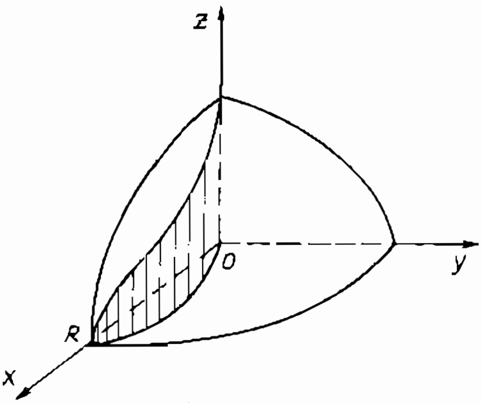
Vậy:

$$\sigma = 16R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}\int_0^x dy = 16R\int_0^R \frac{x\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= 16R\sqrt{R^2 - x^2}\Big|_R^0 = 16R^2 \text{ (đvdt).}$$

8) Phần mặt đã cho là phần mặt trụ: $x^2 + y^2 = Rx$, đường sinh song song với Oz, bao gồm trong hình cầu tâm O, bán kính R.

Vì lý do đối xứng nên xét trong góc phần tám thứ nhất (hình 66).



Hình 66.

Phương trình của phần mặt trụ đó là:

$$y = \sqrt{Rx - x^2} \quad \text{(đối với mặt phẳng xOz)}$$

$$y'_x = \frac{\frac{R}{2} - x}{\sqrt{Rx - x^2}},\ y'_z = 0,\ \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} = \frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{Rx - x^2}}$$

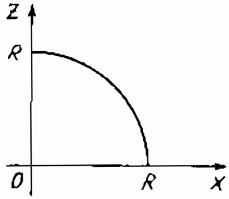
Do đó: $\sigma = 4.\frac{R}{2}\iint\limits_D \frac{dxdz}{\sqrt{Rx - x^2}}$.

Với D là miền trong mặt phẳng xOz, giới hạn bởi các trục Ox, Oz và hình chiếu của đường $\begin{cases} x^2 + y^2 = Rx \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$ trên mặt phẳng đó, nghĩa là đường parabole: $z = \sqrt{R^2 - Rx}$ (hình 67).

Vậy:

$$\sigma = 2R\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - Rx}} \frac{dz}{\sqrt{Rx - x^2}} = 2R\int_0^R \sqrt{R}\sqrt{\frac{R - x}{x(R - x)}}dx$$

$$= 2R\sqrt{R}\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2R\sqrt{R}.2\sqrt{x}\Big|_0^R = 4R^2 \text{ (dvdt)}.$$



Hình 67.

9) Giả sử phần mặt cầu giới hạn bởi hai kinh tuyến φ_1, φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$) và hai vĩ tuyến ψ_1, ψ_2 ($\psi_1 > \psi_2$). Khi đó phương trình tham số của mặt cầu là:

$$x = R\cos\varphi\cos\psi,\ y = R\sin\varphi\cos\psi,\ z = R\sin\psi$$

Theo các công thức ở (1.4) ta tính:

$$E = x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = R^2\cos^2\psi$$

$$G = x'^2_\psi + y'^2_\psi + z'^2_\psi = R^2$$

$$F = x'_\varphi x'_\psi + y'_\varphi y'_\psi + z'_\varphi z'_\psi = 0$$

$$\sigma = \iint\limits_D R^2\cos\psi d\varphi d\psi = R^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2}\cos\psi.d\psi$$

$$= R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)$$

$$D: \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ \psi_1 \le \psi \le \psi_2 \end{cases}$$

23. 1) Tìm tọa độ trọng tâm của hình đồng chất ($\rho = 1$) giới hạn bởi:

a) $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$

b) $r = 1 + \cos\varphi$

2) Tìm moment quán tính của hình đồng chất ($\rho = 1$) giới hạn bởi:

a) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

$y = 0$ đối với Ox

b) $y^2 = ax$, $x = a$ đối với đường thẳng D: $y = -a$

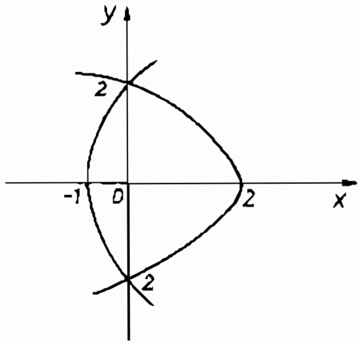
Bài giải

1) a) Hình đã cho giới hạn bởi 2 paraboles là đối xứng với Ox (hình 68).

Theo các công thức (5) (1.4) và do đối xứng ta có:

$y_G = 0$, $M_x = 0$

$$x_G = \frac{M_y}{M},$$



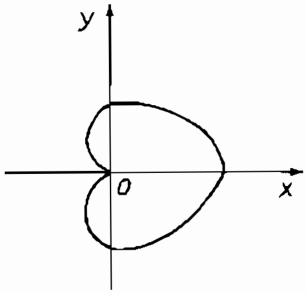
Hình 68.

$$M_y = \iint_D x\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} x\,dx = \frac{16}{5}$$

$$M = \iint_D dx\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dx = 8.$$

Vậy: $x_G = \dfrac{1}{8}.\dfrac{16}{5} = \dfrac{2}{5}$, $y_G = 0$.

b) $r = a(1 + \cos\varphi)$: đường Cardioïde (hình 69).



Hình 69.

Do đối xứng với Ox nên:

$y_G = 0 \Rightarrow M_x = 0$

$$x_G = \frac{M_y}{M}, \quad M = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr$$

$$M = \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2$$

$$M_x = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \cos\varphi . r^2 dr = \frac{2}{3}a^3 \int_0^{\pi} \cos\varphi (1 + \cos\varphi)^3 d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \int_0^{\pi} (\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \int_0^{\pi} (3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)d\varphi$$

$$\left(\text{vì} \int_0^{\pi} (\cos\varphi + 3\cos^3\varphi)d\varphi = 0\right)$$

$$= \frac{5\pi}{4}a^3$$

Vậy:

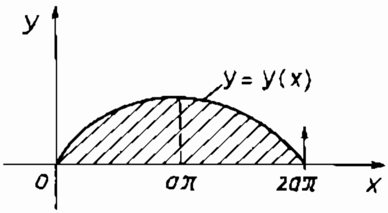
$$x_G = \frac{\dfrac{5\pi}{4}a^3}{\dfrac{3}{2}\pi a^2} = \frac{5a}{6}.$$

2) a) Theo (6) (1.5) ta có:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 dxdy$$

Theo hình 70:

$$I_x = \int_0^{2a\pi} dx \int_0^{y(x)} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^{2a\pi} y^3(x)dx$$



Hình 70.

Đổi sang biến t ta có:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1 - \cos t)^3 a(1 - \cos t)dt$$

$$= \frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^4 dt = \frac{16a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{32a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8 u du \text{ , } (u = \frac{t}{2})$$

$$I_x = \frac{64}{3}a^4\int_0^{\pi/2}\sin^8 u du = \frac{64}{3}a^4.\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{35}{12}\pi a^4$$

(giá trị của $\sin^8 u$ đối xứng đối với đường thẳng $u = \frac{\pi}{2}$).

b) Tịnh tiến gốc tọa độ về O': x = X, y = Y - a thì phương trình của parabole là:

$$(Y - a)^2 = aX$$

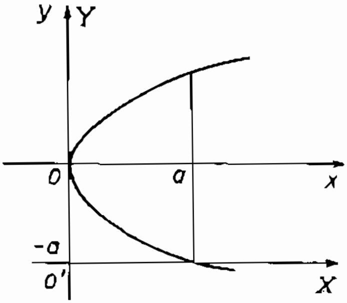
Parabole có hai nhánh: $Y = a \pm \sqrt{aX}$ (hình 71).

Do đó:

$$I_D = \int_0^a dX \int_{a-\sqrt{aX}}^{a+\sqrt{aX}} Y^2 dY$$

Đặt $Y = t + a$ thì $-\sqrt{aX} \le t \le \sqrt{aX}$

và: $$I_D = \int_0^a dX \int_{-\sqrt{aX}}^{\sqrt{aX}} (t + a)^2 dt = \frac{1}{3}\int_0^a \left[\left(a + \sqrt{aX}\right)^3 - \left(a - \sqrt{aX}\right)^3\right] dX = \frac{8a^4}{5}.$$



Hình 71.

§2. TÍCH PHÂN BỘI BA

2.1. Định nghĩa

- Tích phân bội ba của hàm bị chặn $f(x, y, z)$ trong (trên) miền compact $V \subset R^3$:

$$I = \iiint_V f(M)dV = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

$$= \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i, \quad M_i(x_i, y_i, z_i)$$

- Với mọi cách chia miền V thành n phần riêng biệt ΔV_i (thể tích cũng gọi là ΔV_i) $i = 1, 2, \ldots n$.

- Với mọi cách chọn các điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \subset \Delta V_i$, d_i là đường kính của ΔV_i

Hàm f(x, y, z) có tích phân trên miền V gọi là khả tích trên miền đó.

Mọi hàm f(x, y, z) liên tục trên miền V đều là khả tích trên miền đó.

Tích phân bội ba có các tính chất tương tự như các tính chất của tích phân kép.

- Về hình học, tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V dV = V$ là thể tích của miền V.

- Về cơ học, $I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV$ là khối lượng của miền V có mật độ khối lượng (thể tích) $f(x, y, z) > 0$.

2.2. Cách tính trong tọa độ Descartes

Miền V giới hạn bởi các mặt liên tục:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$$

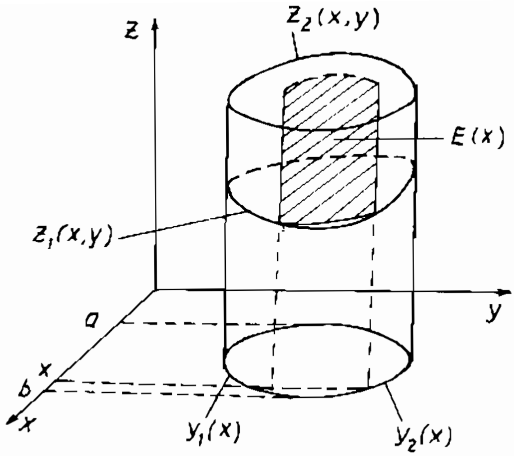
thì tương tự như tích phân kép:

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

$$= \iint\limits_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz = \int_a^b dx \iint\limits_{E(x)} f(x, y, z)dydz$$

E(x) là thiết diện của mặt phẳng X = x và miền V (hình 72).



Hình 72.

2.3. Cách tính trong tọa độ cong bất kỳ

Nếu đổi biến: $x = x(u, v, w)$

$$y = y(u, v, w) \qquad (u, v, w) \in V' \qquad (1)$$

$$z = z(u, v, w)$$

Các hàm (1) có các đạo hàm riêng liên tục trong V', xác định một song ánh từ V' vào V và định thức Jacobi:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong } V'. \quad \left[J = \frac{1}{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} \right]$$

thì: $$I = \iiint_V f(x, y, z)dV$$

$$= \iiint_{V'} f\left[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right]|I|\,dudvdw$$

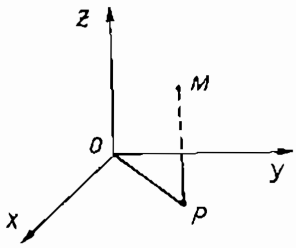
(u, v, w) là các tọa độ cong bất kỳ.

2.4. Tọa độ trụ

$$\varphi = \left(Ox \,\hat{}\, \overrightarrow{OP}\right),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$r = \left|\overrightarrow{OP}\right|,\ 0 \le r < +\infty$$

$$z = \overline{PM},\ -\infty < z < +\infty$$



Hình 73.

(r, φ, z) gọi là tọa độ trụ của M: M(r, φ, z).

Liên hệ: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$.

Công thức tính tích phân bội ba chuyển từ toạ độ Descartes sang tọa độ trụ:

$$I = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, rdrd\varphi dz$$

2.5. Tọa độ cầu

$$\varphi = \left(Ox \,\hat{}\, \overrightarrow{OP}\right),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\theta = \left(Oz \,\hat{}\, \overrightarrow{OM}\right),\ 0 \le \theta \le \pi$$

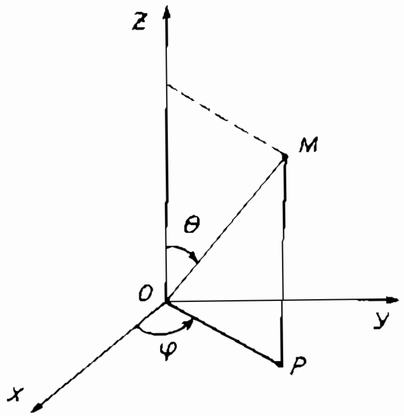
$$\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|,\ 0 \le \rho < +\infty$$

(ρ, φ, θ) gọi là tọa độ cầu của M: M(ρ, φ, θ)

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$$

$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$$

$x = \rho\cos\theta$



Hình 74.

Công thức tính tích phân bội ba chuyển từ tọa độ Descartes sang tọa độ cầu:

$$I = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

$$= \iiint_{V'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta .$$

2.6. Áp dụng hình học

$$V = \iiint_V dxdydz$$

2.7 Áp dụng cơ học

- Cho $\rho(x, y, z)$ là mật độ khối lượng (thể tích) của miền V.

- Moment tĩnh của V đối với các mặt phẳng tọa độ:

$$M_{xy} = \iiint_V z.\rho(x, y, z)dV,$$

$$M_{yz} = \iiint_V x.\rho(x, y, z)dV,$$

$$M_{zx} = \iiint_V y.\rho(x, y, z)dV$$

- Đối với các trục tọa độ:

$$M_x = \iiint_V \sqrt{y^2 + z^2}\,\rho(x, y, z)dV,$$

$$M_y = \iiint_V \sqrt{x^2 + z^2}\,\rho(x, y, z)dV,$$

$$M_z = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\,\rho(x, y, z)dV$$

- Tọa độ trọng tâm của V:

$$x_G = \frac{M_{yz}}{M},\ y_G = \frac{M_{zx}}{M},\ z_G = \frac{M_{xy}}{M}$$

$M = \iiint_V \rho(x, y, z)dV$ là khối lượng của miền V.

- Moment quán tính của V đối với các mặt phẳng tọa độ, các trục tọa độ và gốc tọa độ:

$$I_{xy} = \iiint_V z^2\rho(x, y, z)dV,$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2\rho(x, y, z)dV,$$

$$I_{zx} = \iiint_V y^2\rho(x, y, z)dV$$

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

BÀI TẬP

24. Tính các tích phân bội ba

1) $I = \iiint_V \dfrac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3}$, V: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$

2) $I = \iiint_V \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdydz$, V: $2az \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$

3) $I = \iiint_V zdxdydz$, V: giới hạn bởi $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ và $z = h > 0$

4) $I = \iiint_V dxdydz$, V giới hạn bởi: $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$ và chứa (0, 0, R).

5) $I = \iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, V giới hạn bởi $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$, $z = 0$, $z = a$ $(a > 0)$

6) $I = \iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz$, V: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

7) $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$, V: $x^2 + y^2 + z^2 \leq x$.

8) $I = \iiint\limits_V x^2y^2z^2dxdydz$, V: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$

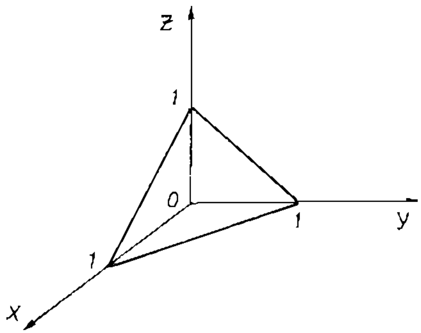
9) $I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$, V giới hạn bởi:

$$z = x^2 + y^2,\ z = \frac{x^2 + y^2}{2},\ xy = a^2,\ xy = b^2,\ y = \alpha x,\ y = \beta x,$$

$$0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta,\ (x, y, z \ge 0).$$

Bài giải

1) Miền lấy tích phân V là tứ diện giới hạn bởi ba mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y + z = 1$ (hình 75).



Hình 75.

Do đó:

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x + y + z + 1)^3}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left. -\frac{1}{2(x + y + z + 1)^2} \right|_{1-x-y}^{0} dy$$

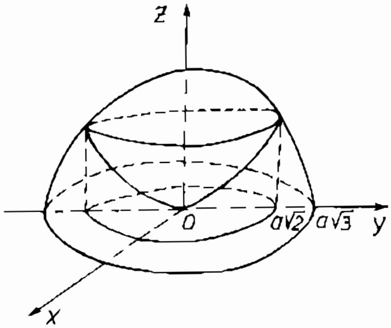
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+y+1)^2} - \frac{1}{4}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{1}{x+y+1}\Big|_0^{1-x} - \frac{1}{4}y\Big|_0^{1-x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

2) Miền tích phân V giới hạn bởi paraboloide tròn xoay $x^2 + y^2 = 2az$, và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ phần chứa Oz dương (hình 76).



Hình 76.

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là miền D, phương trình đường biên giới của D có được bằng cách khử z ở hai phương trình trên:

$2az = 3a^2 - z^2 \Rightarrow z = a$, do đó D xác định bởi $x^2 + y^2 \le 2a^2$

và: $$I = \int_{-a\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2a^2 - x^2}}^{\sqrt{2a^2 - x^2}} dy \int_{\frac{x^2 + y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dz .$$

Chuyển sang tọa độ trụ: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ thì $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le a\sqrt{2}$, $\frac{r^2}{2a} \le z \le \sqrt{3a^2 - r^2}$ và:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} r dr \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - r^2}} \frac{z}{r} dz = 2\pi . \int_0^{a\sqrt{2}} \left. \frac{z^2}{2} \right|_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - r^2}} dr$$

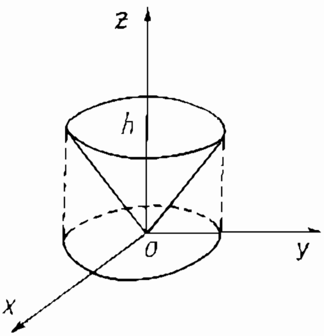
$$= \pi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(3a^2 - r^2 - \frac{r^4}{4a^2} \right) dr = \pi \left. \left(3a^2 r - \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{20a^2} \right) \right|_0^{a\sqrt{2}}$$

$$= \frac{32\sqrt{2}a^3}{15} \pi .$$

3) Miền lấy tích phân V giới hạn bởi tầng trên $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ của mặt nón và mặt phẳng $z = h$ (hình 77).

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ (thay $z = h$ vào $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$).

Do đó chuyển sang tọa độ trụ ta có:



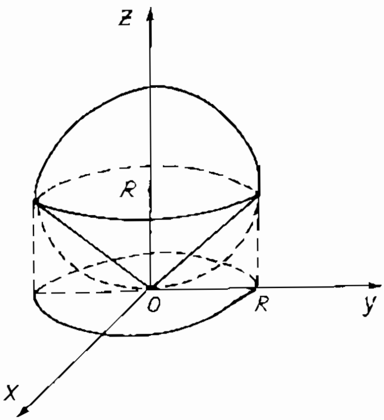
Hình 77.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{\frac{h}{R}r}^{h} z dz = 2\pi \int_0^R r\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{h}{R}r}^{h} dr = \pi \int_0^R r\left(h^2 - \frac{h^2}{R^2} r^2\right) dr$$

$$= \pi\left(h^2 \frac{r^2}{2} - \frac{h^2}{R^2}.\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi h^2 R^2}{4}$$

4) Miền lấy tích phân V giới hạn bởi tầng trên của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2 \text{ (hình 78).}$$



Hình 78.

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là miền D:

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

(Thay $x^2 + y^2 = z^2$ vào $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$: $2z^2 = 2Rz \Rightarrow z = 0, z = R$)

Chuyển sang tọa độ trụ ta có:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_r^{R+\sqrt{R^2 - r^2}} dz$$

($z = R + \sqrt{R^2 - r^2}$: phương trình nửa trên của mặt cầu).

$$I = 2\pi \int_0^R r\left(R + \sqrt{R^2 - r^2} - r\right)dr$$

$$= 2\pi\left[\int_0^R \left(rR - r^2 - r\sqrt{R^2 - r^2}\right)dr\right]$$

$$= 2\pi\left[R\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{3}\left(R^2 - r^2\right)^{3/2}\right]\Bigg|_0^R = \pi R^3.$$

5) Miền lấy tích phân V giới hạn bởi mặt trụ: $y = \sqrt{2x - x^2}$ đường sinh song song với Oz, các mặt phẳng xOz, xOy và mặt phẳng $z = a$ (hình 79).

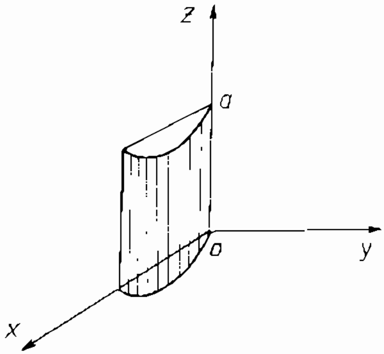
Chuyển sang tọa độ trụ ta có:

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dr \int_0^a z.r dz = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{6}\int_0^{\pi/2} 8\cos^3\varphi d\varphi = \frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d\varphi$$

$$= \frac{4a^2}{3}.\frac{2}{3}$$

$$= \frac{8}{9}a^2$$



Hình 79.

6) Miền lấy tích phân là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$

Chuyển sang tọa độ cầu:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta$$

Ta có:

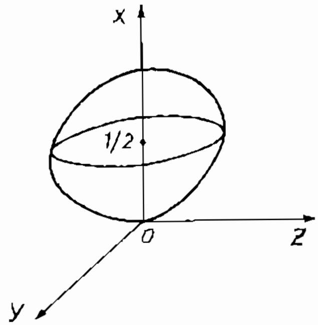
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} \left(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)\rho^2 d\rho$$

$$= \frac{2\pi.R^5}{5}\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta$$

$$= \frac{2\pi R^5}{5}\int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2\theta\right) d\cos\theta$$

$$= \frac{2\pi R^5}{5}\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

7) Miền lấy tích phân V là hình cầu $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ (hình 80).



Hình 80.

Chuyển sang tọa độ cầu:

$$y = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ z = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ x = \rho\cos\theta$$

Khi đó V: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le \cos\theta \end{cases}$

$$(x^2 + y^2 + z^2 = x \Rightarrow \rho^2 = \rho\cos\theta \Rightarrow \rho = \cos\theta).$$

Và: $$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{\cos\theta} \rho.\rho^2.d\rho = 2\pi \int_{\pi/2}^{0} -\frac{\cos^4\theta}{4} d\cos\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \frac{\pi}{10}.$$

8) Miền lấy tích phân giới hạn bởi ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, chuyển sang tọa độ cầu suy rộng $x = a\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = b\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = c\rho\cos\theta$ khi đó ellipsoïde biến thành mặt cầu $\rho = 1$, do đối xứng nên:

$$I = 8\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 a^2b^2c^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\sin^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta\rho^6 abc\rho^2 d\rho$$

$$= 8a^3b^3c^3\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^1\rho^8 d\rho$$

$$= 8a^3b^3c^3\int_0^{\pi/2}(\sin^2\varphi - \sin^4\varphi)d\varphi\int_0^{\pi/2}(\sin^5\theta - \sin^7\theta)d\theta.\frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{9}a^3b^3c^3(I_2 - I_4)(I_5 - I_7)$$

$$= \frac{8}{9}a^3b^3c^3\left(\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{4}{5}.\frac{2}{3} - \frac{6}{7}.\frac{4}{5}.\frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi}{945}a^3b^3c^3.$$

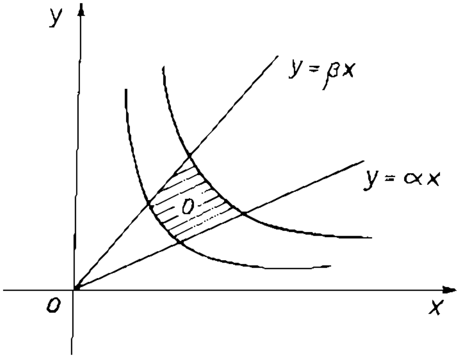
9) Miền lấy tích phân trong góc 1/8 thứ nhất giới hạn bởi hai paraboloïde tròn xoay $z = x^2 + y^2$, $2z = x^2 + y^2$, hai mặt trụ $xy = a^2$, $xy = b^2$ và hai mặt phẳng $y = \alpha x$, $y = \beta x$. Hình chiếu của V trên mặt phẳng xOy là miền D (hình 81). Dùng phép biến đổi tổng quát:

$$u = xy,\ v = \frac{y}{x},\ w = z \text{ thì } a^2 \le u \le b^2,\ \alpha \le v \le \beta$$

Từ đó:

$$x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}},\ y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$$

Phương trình của các paraboloïde trong hệ tọa độ (u, v, w) là $w = u(v + v^{-1})$, $w = \frac{u(v + v^{-1})}{2}$.



Hình 81.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} u\,du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{v} \int_{\frac{u\left(v - v^{-1}\right)}{2}}^{\frac{u\left(v + v^{-1}\right)}{2}} w\,dw = \frac{3}{16}\int_{a^2}^{b^2} u^3\,du \int_{\alpha}^{\beta}\left(v + \frac{1}{v}\right)^2 \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{3}{64}\left(b^8 - a^8\right)\int_{\alpha}^{\beta}\left(v + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^3}\right)dv$$

$$= \frac{3}{128}\left(b^8 - a^8\right)\left[\left(\beta^2 - \alpha^2\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right) + 4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$$

25. 1) Tìm giá trị trung bình của hàm $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ trong miền $x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z$

2) Tính $F'(t)$ nếu $F(t) = \iiint\limits_V f(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$.

với $V: x^2 + y^2 + z^2 \le t^2$, f là hàm liên tục

3) Chứng minh rằng nếu f là hàm liên tục trong miền compact V và $\iiint\limits_\omega f(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = 0\ \forall\omega \subset V$ thì $f(x, y, z) \equiv 0, \forall(x, y, z) \in V$

4) Chứng minh: $\iiint\limits_V f(x).f(y).f(z)dV = \dfrac{1}{6}\left(\int\limits_0^1 f(u)du\right)^3$

với $V: 0 \le x \le 1, x \le y \le 1, x \le z \le y$ và f liên tục trên $[0,1]$.

Bài giải

1) Theo định lý lấy giá trị trung bình của một hàm trong một miền compact V thì giá trị trung bình của hàm đã cho là:

$$f(\overline{M}) = \frac{1}{V}\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz \qquad (1)$$

với V là thể tích hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z$ hay:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

do đó: $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^3 = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Để lấy tích phân (1), tịnh tiến gốc tọa độ về $O\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ theo các công thức $x = X + \dfrac{1}{2}$, $y = Y + \dfrac{1}{2}$, $z = Z + \dfrac{1}{2}$.

Khi đó phương trình mặt cầu với góc O' là:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{3}{4}$$

và:

$$f(\overline{M}) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \iiint\limits_{X^2+Y^2+Z^2 \le \frac{3}{4}} \left[\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Z + \frac{1}{2}\right)^2\right] dXdYdZ$$

Chuyển sang tọa độ cầu:

$$X = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ Y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ Z = \rho\cos\theta.$$

Ta có:

$$f(\overline{M}) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rho^2\left[\frac{3}{4} + \rho^2 + \rho\big(\sin\theta(\sin\varphi + \cos\varphi) + \cos\theta\big)\right] d\rho$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \left(\frac{\rho^3}{4} + \frac{\rho^5}{5} + \frac{\rho^4}{4}\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2} \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi} \left(\frac{3\sqrt{3}}{32} + \frac{9\sqrt{3}}{100}\right) \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{32}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}.$$

2) Miền lấy tích phân V là hình cầu tâm O bán kính t (> 0).

Chuyển sang tọa độ cầu thì V: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 < \rho < t$.

Do đó:

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{t} f(\rho^2).\rho^2 d\rho = 4\pi \int_0^{t} \rho^2 f(\rho^2) d\rho$$

Áp dụng đạo hàm tích phân theo cận trên, ta có:

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$$

3) Xét điểm tuỳ ý: $M \in V$ và hình cầu V_ε tâm M, bán kính ε, $V_\varepsilon \subset V$ theo định lý lấy giá trị trung bình và theo giả thiết, ta có:

$$0 = \frac{1}{\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}} \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(x, y, z)dV = f(\overline{M}), \overline{M} \in V_\varepsilon.$$

Cho $\varepsilon \to 0$ thì $\overline{M} \to M$, theo giả thiết f liên tục trong V nên $f(\overline{M}) \to f(M) = 0$. Vậy $f(M) = 0$, $\forall M$ trong V. Theo giả thiết f liên tục trong miền đóng V nên f = 0 tại các điểm biên của V, nghĩa là f = 0 tại $\forall M \in V$.

4) Theo giả thiết hàm f liên tục trên [0, 1] nên tồn tại hàm $F(t) = \int_0^t f(u)du$ xác định trên [0, 1].

Cũng theo giả thiết thì:

$$I = \int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy\int_x^y f(z)dz = \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 F'(y)\big[F(y) - F(x)\big]dy$$

$$= \int_0^1 f(x)\left[\frac{1}{2}\big(F(y)\big)^2 - F(x)F(y)\right]\Bigg|_x^1 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \big[F(x) - F(1)\big]^2 .f(x)dx$$

$$= \frac{1}{6}\big[F(x) - F(1)\big]^3\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{6}\big[F(1) - F(0)\big]^3$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(u)du\right)^3.$$

26. Tính thể tích miền V giới hạn bởi các mặt:

1) $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$ $(h > 0)$

2) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2az$, $z = 0$

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ $(z \geq 0)$

4) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$

5) $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

6) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

*7) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$

*8) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$

*9) $a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$

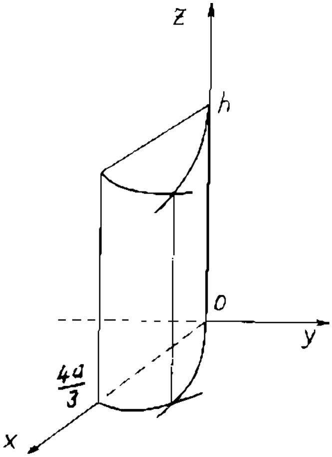
$$\text{với } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (h_1, h_2, h_3 > 0)$$

*10) $(a_1u + b_1v + c_1w)^2 + (a_2u + b_2v + c_2w)^2 + (a_3u + b_3v + c_3w)^2 = R^2$

$$\text{với } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Bài giải

1) Miền V giới hạn bởi hai mặt trụ $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, đường sinh song song với Oz và 2 mặt phẳng $z = \pm h$ vuông góc với Oz (hình 82).



Hình 82.

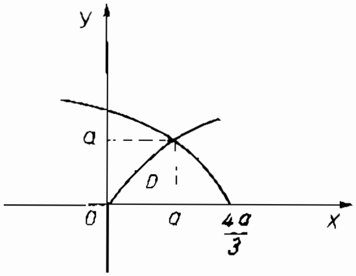
Do đối xứng:

$$V = 4\iint\limits_D dxdy\int_0^h dz\,,$$

D là miền ở hình 83.

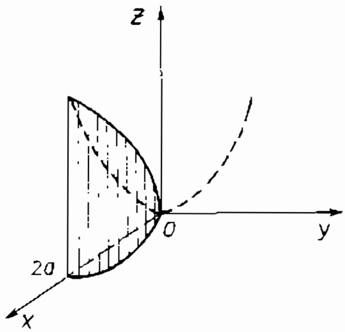
$$V = 4\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{a}}^{\frac{4a^2 - y^2}{3a}} dx \int_0^h dz = 4h\int_0^a \left(\frac{4a^2 - y^2}{3a} - \frac{y^2}{a^2}\right) dy$$

$$= 4h\left(\frac{4}{3}ay - \frac{4y^3}{9a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{32}{9}a^2h \ \text{(dvtt)}.$$



Hình 83.

2) Miền V giới hạn bởi paraboloide tròn xoay $x^2 + y^2 = 2az$, mặt trụ $x^2 + y^2 = 2ax$ và mặt phẳng xOy (hình 84).



Hình 84.

Do đối xứng: $$V = 2\iiint_V dxdydz = 2\iint_D dxdy \int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} dz$$

với D là nửa hình tròn: $(x - a)^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$.

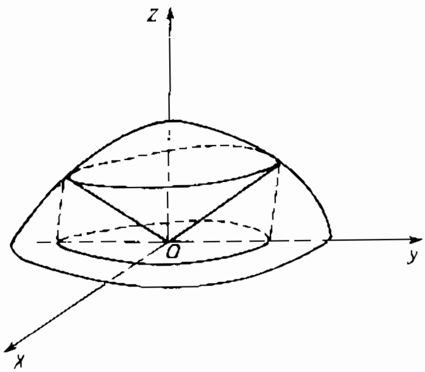
Chuyển sang tọa độ trụ, ta có:

$$V = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr \int_0^{\frac{r^2}{2a}} dz = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \frac{r^3}{2a}\,dr$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^4}{8a}\right|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \frac{16a^4\cos^4\varphi}{8a}\,d\varphi$$

$$= 4a^3\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 4a^3\,\frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^3}{4} \text{ (đvtt).}$$

3) Miền V giới hạn bởi ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2$ và tầng trên của mặt nón $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (hình 85).



Hình 85.

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là hình ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

(Khử z từ hai phương trình trên:

$$2 - \frac{z^2}{c^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow z = c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = 1).$$

Chuyển sang tọa độ trụ suy rộng: x = arcosφ, y = brsinφ, z = z ta có:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{cr}^{c\sqrt{2-r^2}} ab dz = 2\pi abc \int_0^1 \left(c\sqrt{2 - r^2} - cr\right) r dr$$

$$= 2\pi abc \left(\frac{1}{3} \left(2 - r^2\right)^{3/2} \Big|_1^0 - \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \right)$$

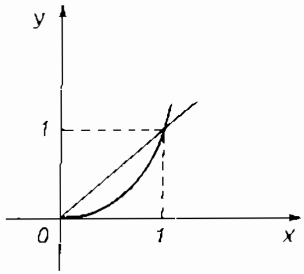
$$= \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right) abc \text{ (đvtt).}$$

4) Miền V giới hạn bởi hai paraboloïde tròn xoay: $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, mặt phẳng y = x và mặt trụ: $y = x^2$

Do đó:

$$V = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz$$

với D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$



Hình 86.

(hình 86).

Vậy:

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{0}^{x^2+y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2\right) dy$$

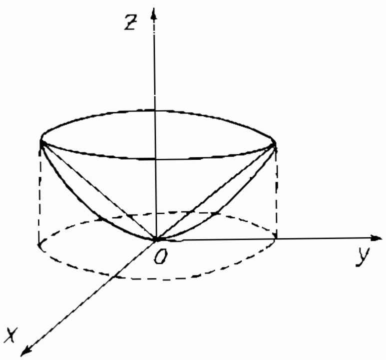
$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{x^2}^{x} dx = \frac{3}{35} \text{ (đvtt).}$$

5) Miền V giới hạn bởi paraboloide tròn xoay $az = x^2 + y^2$ và tầng trên của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (hình 87).

Hình chiếu của V trên mặt phẳng xOy là hình tròn: $x^2 + y^2 \le a^2$.

(Từ hai phương trình đã cho ta có: $az = z^2 \Rightarrow z = a \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$).

Chuyển sang tọa độ trụ, ta có:

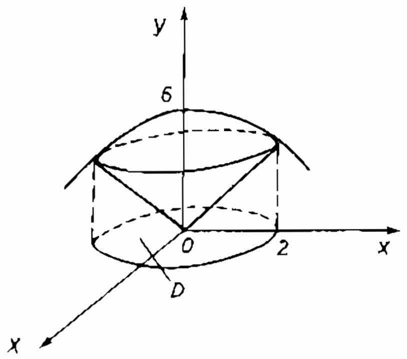


Hình 87.

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{\frac{r^2}{a}}^{r} dz = 2\pi \int_0^a \left(r - \frac{r^2}{a} \right) r dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right) \Bigg|_0^a = \frac{\pi a^3}{6} \text{ (đvtt).}$$

6) Miền V giới hạn bởi paraboloïde tròn xoay: $z = 6 - x^2 - y^2$ và tầng trên của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (hình 88).



Hình 88.

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là hình tròn D: $x^2 + y^2 \leq 4$.

$$(6 - z = z^2 \Rightarrow z = 2;\ x^2 + y^2 = 4).$$

Do đó chuyển sang tọa độ trụ, ta có:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^{6-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 r\left(6 - r^2 - r\right) dr$$

$$= 2\pi\left(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32\pi}{3}\ (\text{dvtt}).$$

7) Miền V đối xứng đối với các mặt phẳng tọa độ. Do đó thể tích của miền V bằng 8 lần thể tích của nó trong góc 1/8 thứ nhất.

Chuyển sang tọa độ cầu, ta có phương trình của mặt cầu là:

$$\rho^4 = \rho^2 a^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) \quad \text{hay} \quad \rho = a\sqrt{-\cos 2\theta}$$

Do đó ρ chỉ xác định khi $-\cos 2\theta \ge 0$ hay $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Trong góc phần tám thứ nhất thì: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Vậy:

$$V = 8\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{a\sqrt{-2\cos\theta}} \rho^2 d\rho = \frac{4\pi a^3}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\left(\sqrt{-\cos 2\theta}\right)^3 d\theta$$

Đặt $\frac{\pi}{2} - \theta = t$, thì:

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/4} \cos t \cos^{3/2} 2t dt = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/4} \left(1 - 2\sin^2 t\right)^{3/2} d\sin t$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(1 - 2u^2\right)^{3/2} du \quad \text{với } u = \sin t$$

Lại đặt $\sqrt{2}\,u = \sin v$ thì:

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \cos^4 v dv = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}.\frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3 a^3}{4\sqrt{2}} \text{ (dvtt).}$$

8) Miền V đối xứng đối với các mặt phẳng toạ độ, do đó:

$$V = 8.\iiint_{V'} dxdydz$$

V' là $\frac{1}{8}$ thứ nhất của V (trong góc $\frac{1}{8}$ thứ nhất) chuyển sang toạ độ cầu suy rộng:

$$x = a\rho\cos^3\varphi\sin^3\theta,\ y = b\rho\sin^3\varphi\sin^3\theta,\ z = c\rho\cos^3\theta \qquad (1)$$

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 1.$$

(Thay (1) vào phương trình $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$ ta được $\rho = 1$).

$$J = 9abc\rho^2\cos^2\theta\sin^5\theta\sin^5\varphi\cos^2\varphi$$

Ta có:

$$V = 72abc\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^5\theta d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int_0^1\rho^2 d\rho$$

$$V = 72abc(I_5 - I_7)(I_2 - I_4).\frac{1}{3} = \frac{4\pi abc}{35}.$$

9) Thực hiện phép đổi biến:

$$\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1z \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z \end{aligned} \quad \text{thì} \quad \begin{cases} -h_1 \le u \le h_1 \\ -h_2 \le v \le h_2 \\ -h_3 \le w \le h_3 \end{cases}$$

mặt khác theo (2.3), đối với phép biến đổi ngược:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{D}$$

Vậy: $$V = \frac{1}{|D|}\int_{-h_1}^{h_1}du\int_{-h_2}^{h_2}dv\int_{-h_3}^{h_3}dw = \frac{8h_1h_2h_3}{|D|} \quad (\text{dvtt}).$$

10) Đổi biến: $x = a_1u + b_1v + c_1w$

$y = a_2u + b_2v + c_2w$

$$z = a_3u + b_3v + c_3w$$

thì mặt giới hạn miền V biến thành mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ giới hạn miền V'.

$$J = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}} = \frac{1}{D}$$

Vậy: $$V = \frac{1}{|D|}\iiint_{V'} dxdydz = \frac{4\pi R^3}{3|D|} \text{ (đvtt)}.$$

27. 1) Tìm tọa độ trọng tâm của hình đồng chất ($\rho = 1$) giới hạn bởi các mặt:

a) $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

b) $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$).

2) Tìm moment quán tính của hình đồng chất ($\rho = 1$) giới hạn bởi các mặt sau, đối với các mặt phẳng tọa độ:

a) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

Bài giải

1) a) Hình đã cho giới hạn bởi mặt paraboloïde tròn xoay $z = x^2 + y^2$, các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y = a$.

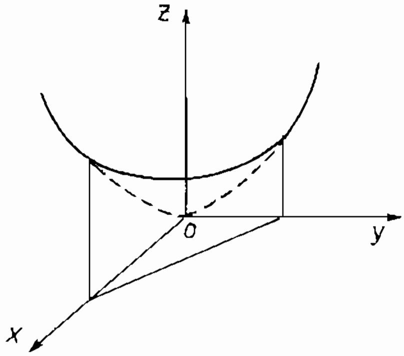
Theo các công thức (2.6), (hình 89) và do đối xứng ta có:

$$x_G = y_G = \frac{\iiint\limits_V x\,dV}{\iiint\limits_V dV} = \frac{\int_0^a x\,dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz}{\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz}$$

Tính toán ta có:

$$x_G = y_G = \frac{2}{5}a$$

$$z_G = \frac{\iiint\limits_V z\,dV}{\iiint\limits_V dV} = \frac{\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z\,dz}{\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz} = \frac{7}{30}a^2$$



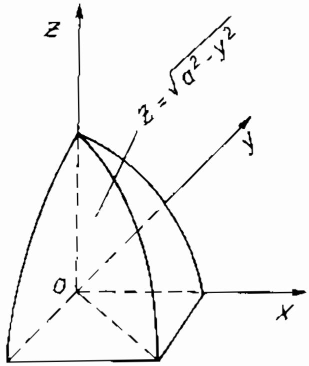
Hình 89.

b) Hình đã cho giới hạn bởi 2 mặt trụ tròn xoay và ở phía trên mặt phẳng xOy (hình 90) trong góc phần tám thứ hai một phần tám của hình, chiếu xuống mặt phẳng xOy là tam giác: $-a \le y \le 0$, $0 \le x \le -y$.

Do đó thể tích của hình là:

$$V = 8\int_{-a}^{0} dy \int_0^{-y} dx \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dz = 8\int_{-a}^{0} -y\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$= \frac{8}{3}\left(a^2 - y^2\right)^{3/2}\Big|_{-a}^{0} = \frac{8}{3}a^3.$$



Hình 90.

Do đối xứng: trọng tâm của hình ở trên trục Oz nên $x_G = y_G = 0$, còn:

$$z_G = \frac{8}{V}\int_0^a dy\int_0^y dx\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} z\,dz = \frac{8}{2V}\int_a^0 -y\left(a^2-y^2\right)dy$$

$$= \frac{8}{2V}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(a^2-y^2\right)^2\Big|_a^0$$

$$= \frac{a^4}{\frac{8}{3}a^3} = \frac{3}{8}a.$$

Vậy trọng tâm của hình là: $G\left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}a\right)$.

2) a) Theo các công thức (2.7) thì moment quán tính của hình đã cho đối với mặt phẳng xOy là:

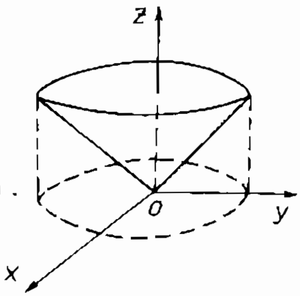
$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 dV = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int\limits_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} z^2 dz = \frac{abc^3}{60}$$

Tương tự: $\quad I_{yz} = \dfrac{a^3bc}{60}, \; I_{zx} = \dfrac{ab^3c}{60}.$

b) Hình đã cho giới hạn bởi tầng trên của mặt nón ($z = c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}$) và mặt phẳng $z = c$ (hình 91), hình chiếu của nó trên mặt phẳng xOy là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

(thay $z = c$ vào phương trình $z = c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}$).



Hình 91.

Vậy: $\quad I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 dV$

Chuyển sang tọa độ trụ suy rộng và do đối xứng ta có:

$$I_{xy} = 4ab\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \int\limits_{cr}^{c} z^2 dz = \frac{2}{3}\pi abc^3 \int\limits_0^1 r\left(1 - r^3\right) dr = \frac{\pi}{5} abc^3$$

Tương tự ta có:

$$I_{yz} = \frac{\pi}{20} a^3bc, \; I_{zx} = \frac{\pi}{20} ab^3c.$$

CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§1. TÍCH PHÂN THƯỜNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

1.1. Định nghĩa

$I(x) = \int_a^b K(x, t)dt$ gọi là tích phân phụ thuộc tham số x, nếu K(x, t) khả tích trên [a, b], $\forall x \in [c, d]$.

1.2. Định lý Leibniz

1) Nếu K(x, t) liên tục trong hình chữ nhật D: $a \le t \le b$, $c \le x \le d$

thì: (1) $\lim\limits_{x \to x_0} I(x) = \int_a^b \left[\lim\limits_{x \to x_0} K(x, t)\right]dt$, $x_0 \in [c, d]$.

(2) I(x) liên tục trên [c, d].

(3) $\int_\alpha^\beta I(x)dx = \int_a^b dt\int_\alpha^\beta K(x, t)dx$, $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$.

(Quy tắc tích phân dưới dấu tích phân).

2) Nếu $K(x, t)$ liên tục trong D và tồn tại $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ cũng liên tục trong D thì:

$$(4) \quad I'(x) = \int_a^b \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} dt$$

(Quy tắc đạo hàm dưới dấu tích phân).

3) Nếu $K(x, t)$ liên tục trong D; $\alpha(x)$, $\beta(x)$ khả vi trên $[c, d]$, $a \le \alpha(x) \le b$, $a \le \beta(x) \le b$, $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trong D thì:

a) $I(x)$ liên tục trên $[c, d]$; b) $\lim\limits_{x \to x_0} I(x) = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} K(x_0, t)dt$; $x_0 \in [c, d]$)

$$\text{c) } I'(x) = \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t)dt \right)'_x = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} dt + \beta'(x)K[x, \beta(x)] -$$

$$- \alpha'(x)K[x, \alpha(x)]$$

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

2.1. Định nghĩa $\qquad I(x) = \int_a^{+\infty} K(x, t)dt$

gọi là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số x nếu nó hội tụ $\forall x \in [c, d]$.

$I(x)$ gọi là hội tụ đều trên $[c, d]$ nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$, $\forall b > N(\varepsilon)$, $\forall x \in [c, d] \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} K(x, t)dt \right| < \varepsilon$.

Tiêu chuẩn Weinstrass

Nếu tồn tại hàm $\varphi(t)$ sao cho:

1) $|K(x, t)| \le \varphi(t), \forall x \in [c, d], \forall t \in [a, +\infty]$

2) $\int_a^{+\infty} \varphi(t)dt$ tồn tại

thì : $\int_a^{+\infty} K(x, t)dt$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[c, d]$.

2.2. Định lý

1) Nếu $K(x, t)$ liên tục trong miền D: $a \le t < +\infty$, $c \le x \le d$ và $I(x) = \int_a^{+\infty} K(x, t)dt$ hội tụ đều $\forall x \in [c, d]$ thì:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} I(x) = \int_a^{+\infty} \lim\limits_{x \to x_0} K(x, t)dt$, $x_0 \in [c, d]$.

(2) $I(x)$ liên tục trên $[c, d]$.

(3) $\int_\alpha^\beta I(x)dx = \int_a^{+\infty} dt \int_\alpha^\beta K(x, t)dx$, $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$.

2) Nếu $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trong miền D, $\int_a^{+\infty} K(x, t)dt$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}dt$ hội tụ đều trên $[c, d]$ thì:

$$I'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}dt.$$

Tích phân suy rộng

$$I(x) = \int_a^b K(x, t)dt \qquad (1)$$

Với $K(x, t)$ không bị chặn theo t tại b $(a, c \in (a, b))$.

Ta cũng có các khái niệm và kết quả tương tự như ở (2. 2), với sự thay đổi bằng ngôn ngữ thích hợp, chẳng hạn (1) gọi là hội tụ đều trên $[c, d]$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, b - b' < \delta(\varepsilon), \forall x \in [c, d], (a < b' < b)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{b'}^{b} K(x, t)dt \right| < \varepsilon.$$

2.3. Các tích phân quan trọng

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ (Dirichlet)}$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (Euler - Poison)}$$

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}, \; L_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}$$

$a, b > 0$ (Laplace)

$$F = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ (Fresnel).}$$

§3. HÀM GAMMA VÀ BÊTA

3.1. Hàm Gamma (Tích phân Euler loại hai)

Định nghĩa $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ (1) hội tụ và có đạo hàm mọi cấp $\forall x > 0$.

Tính chất

(2) $\Gamma(1) = 1$

(3) $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, $(x > 0)$

(4) $\Gamma(n + 1) = n!$ $(n \in N)$

(5) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(6) $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}.n!}\sqrt{\pi} = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)...\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

3.2. Hàm Bêta (Tích phân Euler loại một)

Định nghĩa $$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1}dt \quad (1)$$

hội tụ và có đạo hàm mọi cấp $\forall p, q > 0$.

Tính chất

(2) $B(p, q) = B(q, p)$

(3) $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}$

(4) $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1 + t)^{p+q}}dt$

(5) $\Gamma(p)\Gamma(1 - p) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1 + t}dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

Xem chứng minh ở cuối Bài tập giải sẵn Giải tích III.

BÀI TẬP

28. Xét sự hội tụ đều của:

1) $I(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$

2) $I(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} t^{\alpha} \cos t dt \quad (\alpha \ge 0)$

3) $I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x dx$

4) $I(y) = \int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x^y} dx, \ y \le y_0 \le 2.$

Bài giải

1) $\forall x \ge x_0 > 0$: $e^{-xt^2} \le e^{-x_0 t^2}$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x_0 t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x_0} t)^2} d\left(\sqrt{x_0} t\right) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(theo (2.4)). Vậy theo (2.1), $I(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều $\forall x \ge x_0 > 0$.

2) $\forall x \ge x_0 > 0$: $\left|e^{-xt} t^{\alpha} \cos t\right| \le e^{-x_0 t} t^{\alpha}$, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x_0 t} t^{\alpha} dt$ hội tụ vì $\forall \lambda > 1$: $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha + \lambda} e^{-x_0 t} = 0$ (Tiêu chuẩn Dirichlet 11).

Vậy $I(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều $\forall x \ge x_0 > 0$.

3) $I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(a+1)x + \sin(a-1)x}{x} dx$

mặt khác $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ hội tụ đều $\forall \alpha \ge \alpha_0 > 0$.

vì $\forall\varepsilon > 0$ và với b_0 đủ lớn, $\forall b > b_0$: $\left|\int_b^{b'} \frac{\sin\alpha x}{x}dx\right| = \left|\int_{b\alpha}^{b'\alpha} \frac{\sin z}{z}dz\right| < \varepsilon$ chỉ khi $b > \frac{b_0}{\alpha_0}$.

Vậy I(a) hội tụ đều $\forall a \neq \pm 1$.

4) Với $y \leq y_0 < 2$: $\frac{\sin x}{x^y} \leq \frac{1}{x^{y_0 - 1}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^{y_0 - 1}} = \left.\frac{x^{2 - y_0}}{2 - y_0}\right|_0^1 = \frac{1}{2 - y_0}$

Vậy I(y) hội tụ đều $\forall y \leq y_0 < 2$.

29. Xét sự liên tục của:

1) $I(x) = \int_0^1 \sqrt{x^2 + t^2}\,dt$, tìm $\lim_{x \to 0} I(x)$

2) $I(x) = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$, tìm $\lim_{n \to \infty} I(x)$

3) $I(x) = \int_x^{1 + x^2} \frac{dt}{1 + t^2 + x^3}$, tìm $\lim_{x \to 0} I(x)$

4) Tính $F'(x)$ nếu $F(x) = \int_0^x f(t + x, t - x)dt$

với f'_u, f'_v liên tục, $u = t + x$, $v = t - x$

5) $I(\alpha) = \int_\alpha^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy$ $(\alpha > 0)$.

Bài giải

1) $K(x, t) = \sqrt{x^2 + t^2}$ liên tục $\forall(x, t) \in R^2$ do đó, theo (1.2), $I(x)$ là liên tục $\forall x \in R$.

và: $$\lim_{x \to 0} I(x) = \int_0^1 \lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + t^2}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$

2) $K(n, x) = \dfrac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n}$ liên tục $\forall x \geq 0$ và $n > 0$, do đó $I(x)$ liên tục $\forall x \geq 0$ và $n > 0$.

Và:

$$\lim_{n \to \infty} I(n) = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}$$

$$= \int_1^e \frac{dt}{t(1 + t)} = \ln \frac{2e}{e + 1}, \ (e^x = t).$$

3) $K(x, t) = \dfrac{1}{1 + t^2 + x^3}$ liên tục $\forall(x, t) \in R^2$ do đó $I(x)$ là liên tục $\forall(x, t) \in R^2$.

và: $$\lim_{x \to 0} I(x) = \lim_{x \to 0} \int_x^{1+x^2} \frac{dt}{1 + t^2 + x^3} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

4) Theo giả thiết và theo (3), (1.2)', ta có:

$$F'(x) = \int_0^x \left[f'_u(u, v) - f'_v(u, v)\right]dt + 1.f(2x, 0)$$

với $u = t + x$, $v = t - x$.

Mặt khác: $\dfrac{df}{dt} = f'_u + f'_v$ hay $f'_v = \dfrac{df}{dt} - f'_u$.

Do đó:

$$\int_0^x (f'_u - f'_v)dt = \int_0^x 2f'_u dt - \int_0^x \frac{df}{dt}dt = 2\int_0^x f'_u dt - f(2x, 0) + f(x, -x)$$

và: $F'(x) = f(x, -x) + 2\int_0^x f'_u dt$.

5) $K(x, y) = e^{-\alpha y^2}$ và $\dfrac{\partial K(x, y)}{\partial \alpha} = -y^2 e^{-\alpha y^2}$ liên tục trong D: $\forall \alpha > 0$, $\forall y \in R$. Rõ ràng $\int_\alpha^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy$ hội tụ và $\int_\alpha^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2}dy$ hội tụ đều trong D.

Mặt khác:

$$I(\alpha) = \int_\alpha^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy = \int_\alpha^a e^{-\alpha y^2}dy + \int_a^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy$$

Do đó, theo 3) (1.2) và 2) (2.2), ta có:

$$I'(\alpha) = \int_\alpha^a -y^2 e^{-\alpha y^2}dy - e^{-\alpha^3} + \int_a^{+\infty} -y^2 e^{-\alpha y^2}dy$$

$$= -\int_\alpha^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2}dy - e^{-\alpha^3}$$

30. Chứng minh rằng:

1) Hàm Bessel: $I_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)dt$

thỏa mãn phương trình Bessel:

$$x^2J''_n(x) + xJ'_n(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0, n \in Z.$$

2) Hàm $u(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x - at) + f(x + at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)dz$

thỏa mãn phương trình (dao động của dây):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

và các điều kiện ban đầu:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x)$$

với f(x) khả vi 2 lần (có f"(x)) và F(x) khả vi

Bài giải

1) Rõ ràng K(x, t) = cos(nt - xsint) thỏa mãn các điều kiện để lấy đạo hàm dưới dấu tích phân ((2), (1.2)):

$$J'_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt - x\sin t)d(\cos t)$$

Tích phân từng phần, ta được:

$$J'_n(x) = -\frac{1}{\pi}\sin(nt - x\sin t)\cos t\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t).\cos t dt$$

$$= \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t.\cos(nt - x\sin t)dt -$$

$$-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - \sin^2 t)\cos(nt - x\sin t)dt$$

$$= \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - x\sin t)\cos t dt - xJ_n(x) - xJ''_n(x) \quad (1)$$

Mặt khác vì:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - x\sin t)(n - x\cos t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\sin(nt - x\sin t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\sin(nt - x\sin t)\Big|_0^{\pi} = 0$$

nên: $$\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - x\sin t)\cos t\, dt = \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - x\sin t)dt = nJ_n(x) \quad (2)$$

Nhân (1) với x và theo (2) ta có:

$$xJ'_n(x) = \frac{nx}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - x\sin t)\cos t dt - x^2J_n(x) - x^2J''_n(x)$$

$$= n^2J_n(x) - x^2J_n(x) - x^2J''_n(x)$$

hay: $$x^2J''_n(x) + xJ'_n(x) + (x^2 - n^2)\, J_n(x) = 0 \text{ (đ.c.m).}$$

2) Rõ ràng các điều kiện để lấy đạo hàm dưới dấu tích phân đều thỏa mãn.

Ta tính:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[f'(x - at) + f'(x + at)\right] + \frac{1}{2a}\left[F(x + at) + F(x - at)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left[f''(x - at) + f''(x + at)\right] + \frac{1}{2a}\left[F'(x + at) + F'(x - at)\right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{2}\left[f'(x + at) - f'(x - at)\right] + \frac{1}{2a}\left[F(x + at) + F(x - at)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}\left[f''(x+at) + f''(x-at)\right] + \frac{a}{2}\left[F'(x+at) + F'(x-at)\right] \quad (2)$$

Nhân (1) với a^2 và so sánh với (2) ta được: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Rõ ràng: $\quad u(x, 0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = F(x)$.

31. Tính:

1) $I = \int_0^1 x^{n-1}\ln x dx$, biết $\int_0^1 x^{n-1}dx = \dfrac{1}{n}\ (n > 0)$

2) $I = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}dt$, biết $\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \dfrac{1}{p}\ (p > 0)$

*3) $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx$ (Dirichlet)

*4) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (Euler - Poisson)

*5) $L_1 = \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos bx}{a^2 + x^2}dx$, $L_2 = \int_0^{+\infty} \dfrac{x\sin bx}{a^2 + x^2}dx$ $a, b > 0$ (Laplace)

*6) $F = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty}\cos x^2 dx$ (Fresnel)

Bài giải

1) Rõ ràng $K(n, x) = x^{n-1}$ với $0 \le x \le 1$, $n > 0$ thỏa mãn các điều kiện của 2) (2.2) do đó lấy đạo hàm theo n 2 vế của: $\int_0^1 x^{n-1}dx = \dfrac{1}{n}$

Ta được: $I = \int_0^1 x^{n-1} \ln x\,dx = -\dfrac{1}{n^2}$

2) Tương tự như 1):

$$I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p},\ (p > 0),$$

$$I'(p) = \int_0^{+\infty} -te^{-pt}dt = -\frac{1}{p^2},$$

$$I''(p) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}dt = \frac{2}{p^3}.$$

3) Xét $J(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx$ (1) $k > 0,\ a \geq 0$.

Rõ ràng $J(a)$ hội tụ: $\forall a \geq 0\ (k > 0)$.

$$K(a, x) = \begin{cases} e^{-kx}.\dfrac{\sin ax}{x} & : x > 0 \\ a & : x = 0 \end{cases}$$

và $K'_a(a, x) = e^{-kx}\cos ax$ là liên tục trong miền D: $a \geq 0,\ x \geq 0$,

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos ax\,dx$ hội tụ đều trong D.

Vì theo (2.1):

$$\left|e^{-kx}\cos ax\right| \leq e^{-kx} \text{ và } \int_0^{+\infty} e^{-kx}dx \text{ hội tụ } (k > 0).$$

Vậy có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$J'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos ax\,dx = \left.\frac{e^{-kx}(-k\cos ax + a\sin ax)}{a^2 + k^2}\right|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{k}{a^2 + k^2} \text{ (tích phân từng phần hai lần).}$$

Tích phân theo a ta có:

$$J(a) = \operatorname{arctg}\frac{a}{k} + C.$$

Theo (1): $J(0) = 0$, do đó:

$$0 = \operatorname{arctg}0 + C \quad \text{hay} \quad C = 0 \quad \text{và} \quad J(a) = \operatorname{arctg}\frac{a}{k}$$

Khi a = const thì $J = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx$ là một hàm của k: $J = J(k) = \operatorname{arctg}\frac{a}{k}$ liên tục khi $k = 0$.

Do đó:

$$\lim_{k \to +0} J(k) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ khi } a > 0$$

Vậy:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0)$$

Khi $a = 1$: $\qquad I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

Chú ý

1) Ta có thể dùng phương pháp tích phân dưới dấu tích phân để tính I như sau:

Ta có: $$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt \quad (x > 0)$$

Do đó: $$I = \int_0^{+\infty}\left(\sin x \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt\right)dx$$

Theo (2.2):

$$I = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin x dx$$

(vì: $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin x dx$ hội tụ đều trong miền được xét).

hay: $$I = \int_0^{+\infty}\left[e^{-xt}\left(\frac{t\sin x - \cos x}{t^2+1}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\right]dt = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

2) Dễ dàng suy ra: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}a$, $a \neq 0$

4) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$, đặt $x = ut$ ta được $I = u\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt$, nhân 2 vế với e^{-u^2} và lấy tích phân theo u từ 0 đến $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} I.e^{-u^2}du = \int_0^{+\infty}\left(e^{-u^2}u\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt\right)du$$

hay: $$I.\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = I^2 = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt\right)du$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} u e^{-u^2(1+t^2)} du$$

(vì $\int_0^{+\infty} u e^{-u^2(1+t^2)} du$ hội tụ đều trong miền được xét)

Do đó:

$$I^2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-u^2(1+t^2)} d\left(u^2(1+t^2)\right) \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

và: $$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5) $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx\, d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$, đặt $\frac{x}{a} = u$, ta được:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos abu}{1+u^2} du = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta u}{1+u^2} du = \frac{1}{a} I \quad \text{với} \quad \beta = ab$$

vì $\frac{1}{1+u^2} = \int_0^{+\infty} e^{-ut} \sin t dt$ nên:

$$I = \int_0^{+\infty} \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-ut} \cos \beta u du = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t dt}{\beta^2 + t^2},$$

đặt $t = \beta z$, ta được:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\beta z \sin \beta z \beta dz}{\beta^2 (1 + z^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{z \sin \beta z}{1 + z^2} dz = -\frac{dI}{d\beta}$$

hay $\frac{dI}{I} = -d\beta$ và $I = Ce^{-\beta}$.

Mặt khác $\beta = 0$ thì $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{2} = Ce^0$ hay $C = \frac{\pi}{2}$.

Vậy $I = \frac{\pi}{2}e^{-\beta}$ và $L_1 = \frac{1}{a}I = \frac{\pi}{2a}e^{-ab}$ $(\beta = ab)$.

Ta có:

$$L_2 = \int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2}dx = \frac{-dL_1}{db} = \frac{-\pi}{2a}(-a)e^{-ab} = \frac{\pi}{2}e^{-ab}$$

6) Xét: $F = \int\limits_0^{\infty} \sin x^2 dx$, đặt $x^2 = t$ thì:

$$F = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

mặt khác:
$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-tu^2}du$$

$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-tu^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_0^{\infty} e^{-tu^2}d\sqrt{t}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right.$ theo 4)).

Do đó:

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} \sin t dt \int\limits_0^{\infty} e^{-tu^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} du \int\limits_0^{\infty} e^{-tu^2}\sin t dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{-tu^2}\frac{(-u^2\sin t - \cos t)}{u^4+1}\Bigg|_0^{\infty}\right)du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\frac{du}{u^4+1}$$

Đặt $u = \frac{1}{v}$ ta có:

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4 + 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{0} \frac{-\,dv}{v^2\left(\frac{1}{v^4} + 1\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{v^2 dv}{v^4 + 1} = J.$$

Do đó:

$$I = \frac{1}{2}(I + J) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{v^2 + 1}{v^4 + 1} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{v^2}}{v^2 + \frac{1}{v^2}} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{d\left(v - \frac{1}{v}\right)}{\left(v - \frac{1}{v}\right)^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{v - \frac{1}{v}}{\sqrt{2}} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

và: $$F = \frac{1}{2} I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Tương tự:

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

32. Dùng phương pháp lấy đạo hàm hoặc tích phân dưới dấu tích phân, tính các tích phân:

1) $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)dx$, a, b > 0

2) $I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, a, b > 0.

3) $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} \frac{dx}{\cos x}$ $(|a| < 1)$

4) $I = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

5) $I = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} dx$ $(|a| < 1)$

6) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx$, $(a, b > 0)$

7) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1 + x^2)} dx$, a > 0

8) $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos mx dx$, a > 0

9) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$ $(a, b > 0)$

10) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx$ $(a > b > 0)$

11) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx$ $(a > 0)$

12) $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

13) Chứng minh $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{a}{b}$ với a, b > 0, f liên tục và $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ tồn tại $\forall A > 0$ (Định lý Frunali). Áp dụng tính $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x}dx$ (a, b > 0)

Bài giải

1) Xét $I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)dx$ (1), (a > 0, b > 0)

Rõ ràng:

$$K(a, x) = \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) \text{ và } K'_a(a, x) = \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

là liên tục trong miền D: $a \geq a_0 > 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Vậy theo (1.2):

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}dx,$$

đặt t = cotgx, thì:

$$I'(a) = 2a\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2t^2)(1+t^2)}$$

Phân tích:

$$\frac{1}{(a^2 + b^2t^2)(1+t^2)} = \frac{At + B}{a^2 + b^2t^2} + \frac{Ct + D}{1+t^2}$$

Tính toán ta có:

Khi đó: $A = C = 0,\ B = \dfrac{-b^2}{a^2 - b^2},\ D = \dfrac{1}{a^2 - b^2}$

$$I'(a) = 2a\left[\int_0^{+\infty} \frac{-b^2}{a^2 - b^2}\,\frac{dt}{a^2 + b^2t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 - b^2}\,\frac{dt}{1 + t^2}\right]$$

$$= 2a\left[-\frac{b^2}{a^2 - b^2}\cdot\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{a^2 - b^2}\operatorname{arctg}t\bigg|_0^{+\infty}\right]$$

$$= \frac{\pi}{a + b}$$

và: $I(a) = \pi\ln(a + b) + C$ (2)

Cho $a = b$ trong (1) ta được:

$$I(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ln b\,dx = \pi\ln b$$

và (2) viết được: $\pi\ln b = \pi\ln 2b + C$ hay $C = -\pi\ln 2$

Vậy: $I = I(a) = \pi\ln\left(\dfrac{a + b}{2}\right)$.

2) Xét: $I(b) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx,\ b > 0$ (1).

Rõ ràng:

$$K(b, x) = \begin{cases} \dfrac{x^b - x^a}{\ln x} & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x = 0 \\ b - a & : x = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad K'_b(b, x) = \frac{x^b\ln x}{\ln x} = x^b$$

là liên tục trong miền D: $\begin{cases} b \geq b_0 > 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Do đó theo (1.2):

$$I'_b(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}$$

và $I(b) = \ln(b+1) + C$, thay $b = a$ trong (1) ta được: $I(a) = 0$, suy ra $0 = \ln(a+1) + C$ hay $C = -\ln(a+1)$.

Vậy: $$I = I(b) = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Chú ý

Vì $\dfrac{x^b - x^a}{\ln x} = \displaystyle\int_a^b x^t dt$, nên có thể áp dụng quy tắc lấy tích phân dưới dấu tích phân như sau:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^t dt \right) dx = \int_a^b dt \int_0^1 x^t dx = \int_a^b \frac{dt}{t+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

3) Xét $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\frac{dx}{\cos x}$ (1) ($|a| < 1$).

ở đây: $$K(a, x) = \begin{cases} \ln\dfrac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}.\dfrac{1}{\cos x}, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 2a & , x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

và: $K'_a(a, x) = \dfrac{2}{1 - a^2\cos^2 x}$ là liên tục trong miền D:

$$|a| \le a_0 < 1,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Do đó có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$I'(a) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - a^2\cos^2 x},$$

đặt tgx = t, ta được:

$$I'(a) = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{1 - a^2 + t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Do đó: $I(a) = \pi\arcsin a + C$.

Theo (1): $I(0) = 0$ do đó $0 = \pi\arcsin 0 + C$ hay $C = 0$.

Vậy:

$$I = I(a) = \pi\arcsin a.$$

4) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\text{arctg}x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

vì $\dfrac{\text{arctg}x}{x} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1 + x^2t^2}$ nên:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}\int_0^1 \frac{dt}{1 + x^2t^2} = \int_0^1 dt\int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2t^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

($K(t, x) = \dfrac{1}{(1 + x^2t^2)\sqrt{1 - x^2}}$ liên tục trong miền D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le x_0 < 1 \\ 0 \le t \le 1 \end{cases})$$

Để tính:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2t^2)\sqrt{1 - x^2}},$$

đặt x = sinu, thì:

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + t^2 \sin^2 u} = \int_0^{\pi/2} \frac{\dfrac{du}{\cos^2 u}}{1 + tg^2 u + t^2 tg^2 u}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d(tgu)}{1 + (t^2 + 1)tg^2 u} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2 + 1}.tgu\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{t^2 + 1}}$$

Do đó:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{\pi}{2}\ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Chú ý

Có thể dùng phương pháp lấy đạo hàm dưới dấu tích phân để tính I bằng cách xét:

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

5) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} dx$, $|a| < 1$ (1)

Xét I = I(a), rõ ràng các hàm:

$$K(a, x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}, & x \neq 0 \\ -a^2, & x = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad K'_a(a, x) = \frac{-2a}{(1 - a^2x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

là liên tục trong miền D: $\begin{cases} |a| \le a_0 < 1 \\ |x| \le x_0 < 1 \end{cases}$

Rõ ràng I(a) hội tụ và $\int\limits_0^1 \dfrac{-2adx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$ (2) hội tụ đều trên $|x| \le x_0 < 1$.

$\left(K(a, x) \sim \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}\right.$ $(x \to 1)$, $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ (1) hội tụ

$|K'_a(a, x)| \le \dfrac{2}{(1-a_0^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \varphi(x)$. $\int\limits_0^1 \varphi(x)dx$ hội tụ

do đó theo tiêu chuẩn Weierstrass (2.1) thì (2) hội tụ đều trên $|x| \le x_0 < 1$).

Vậy: $$I'(a) = -2a\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

đặt $x = \sin t$ thì:

$$I'(a) = -2a\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{1-a^2\sin^2 t} = \frac{-\pi a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Do đó: $$I(a) = \pi\sqrt{1-a^2} + C$$

Theo (1), $I(0) = 0$ nên $0 = \pi + C$ hay $C = -\pi$.

Vậy: $$I = I(a) = \pi(\sqrt{1-a^2} - 1).$$

6) Xét $I = I(m) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx dx$ (1) $(a, b > 0)$

Xét tương tự như 5) ta đi đến:

$$I'(m) = \int_0^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) \cos mx dx$$

$$= e^{-ax} \frac{(-a\cos mx + m\sin mx)}{a^2 + m^2}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$- e^{-bx} \frac{(-b\cos mx + m\sin mx)}{b^2 + m^2}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{a}{a^2 + m^2} - \frac{b}{b^2 + m^2}$$

Do đó:

$$I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m}{a} - \operatorname{arctg}\frac{m}{b} + C$$

Theo (1): $I(0) = 0$ nên $0 = C$.

Vậy:

$$I = I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m}{a} - \operatorname{arctg}\frac{m}{b} = \operatorname{arctg}\frac{m(b-a)}{ab + m^2}$$

Chú ý

Có thể dùng phương pháp tích phân dưới dấu tích phân để tính I như sau:

vì: $$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xt} dt, \ (x \neq 0)$$

nên: $$I = \int_a^b dt \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin mx dx$$

$$= \int_a^b \left(e^{-xt} \frac{(-t\sin mx - m\cos mx)}{t^2 + m^2} \Bigg|_0^{+\infty} \right) dt = \int_a^b \frac{+\, m dt}{t^2 + m^2}$$

$$= +\operatorname{arctg} \frac{t}{m} \Bigg|_a^b = \operatorname{arctg} \frac{m}{a} - \operatorname{arctg} \frac{m}{b}$$

7) Xét $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1 + x^2)} dx \ \ (a > 0) \ (1).$

Rõ ràng tích phân này thỏa mãn các điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + a^2x^2)}$$

Phân tích:

$$\frac{1}{(1 + x^2)(1 + a^2x^2)} = \frac{Ax + B}{1 + x^2} + \frac{Cx + D}{1 + a^2x^2}$$

Ta có: $\quad A = C = 0,\ B = \dfrac{1}{1 - a^2},\ D = \dfrac{a^2}{a^2 - 1}$

Do đó:

$$I'(a) = \frac{1}{1 - a^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{a^2}{a^2 - 1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + a^2x^2}$$

$$= \frac{1}{1 - a^2} \operatorname{arctg} x \Bigg|_0^{+\infty} - \frac{a}{1 - a^2} \operatorname{arctg} ax \Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1 - a}{1 - a^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(1 + a)} \quad \text{và} \quad I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + a) + C$$

Theo (1): $I(0) = 0$, do đó: $0 = 0 + C$ hay $C = 0$

vậy: $I(a) = I = \frac{\pi}{2}\ln(1 + a)$

Chú ý

Từ nhận xét: $\frac{\operatorname{arctg}ax}{x} = \int_0^a \frac{dt}{1 + x^2t^2}$ nên có thể tính I bằng cách lấy tích phân dưới dấu tích phân.

8) Xét $I(m) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos mx dx$ $(a > 0)$ (1).

Các hàm $K(m, x) = e^{-ax^2}\cos mx$ và $K'_m(m, x) = -xe^{-ax^2}\sin mx$ là liên tục trong miền D: $x \geq 0, -\infty < m < +\infty$.

Rõ ràng I(m) hội tụ $\forall m \in R$, còn $\int_0^{+\infty} K'_m(m, x)dx$ hội tụ đều $\forall m \in R$ theo tiêu chuẩn Weierstrass (2.1).

Do đó, theo (2.2):

$$I'(m) = -\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin mx dx$$

Lấy tích phân từng phần, đặt $u = \sin mx$, $xe^{-ax^2}dx = dv$ thì:

$$I'(m) = \frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin mx\Big|_0^{+\infty} - \frac{m}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos mx dx$$

hay $\quad I'(m) = \frac{-m}{2a}I(m)$

Từ đó:

$$\frac{dI}{I} = \frac{-m}{2a}dm$$

và: $$\ln I = \frac{-m^2}{4a} + \ln|C|,\ C = \text{const} \neq 0 \text{ hay } I = Ce^{-\frac{m^2}{4a}}$$

Theo (1):

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}d\left(\sqrt{a}.x\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(Tích phân Poisson).

Do đó:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = Ce^0 \text{ hay } C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ và } I = I(m) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\frac{m^2}{4a}} \quad (a > 0).$$

9) Xét $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}dx$ $(a, b > 0)$ (1)

Rõ ràng $K(a, x) = \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}$ và $K'_a(a, x) = -x e^{-ax^2}$ liên tục trong D: $x \geq x_0 > 0$, $a > a_0 > 0$.

I(a) hội tụ và $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}dx$ hội tụ đều $\forall a \geq a_0 > 0$

$$(x e^{-ax^2} \leq x e^{-a_0x^2})$$

Vậy:

$$I'(a) = -\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}d(-ax^2) = -\frac{1}{2a}$$

và $$I(a) = -\frac{1}{2}\ln a + C.$$

Theo (1): I(b) = 0, do đó:

$$0 = -\frac{1}{2}\ln b + C \quad \text{hay} \quad C = \frac{1}{2}\ln b.$$

Vậy: $\quad I = I(a) = \ln\sqrt{\frac{b}{a}}$.

10) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}dx \quad (a > b > 0)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a+b)x}{x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a-b)x}{x}dx$$

Theo (2.4):

$$I = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Chú ý: Nếu a, b $\in$ R, a $\neq \pm$b thì $I = \frac{\pi}{4}\left[\text{sign}(a+b)+\text{sign}(a-b)\right]$

11) Vì $\sin^3 ax = \frac{3}{4}\sin ax - \frac{1}{4}\sin 3ax$

Do đó:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x}dx = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3ax}{x}dx$$

$$= \frac{3}{4}.\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \quad (a > 0).$$

12) Xét $I(a) = \int_0^1 \frac{\text{arctg}ax}{x\sqrt{1-x^2}}dx \quad (1)$

Rõ ràng I(a) thỏa mãn các điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân, do đó:

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{xdx}{(1+a^2x^2)x\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Đặt x = cost thì: $I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a^2\cos^2 t}$, lại đặt t = tgu thì:

$$I'(a) = \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + a^2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

và: $$I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) + C$$

Theo (1): I(0) = 0, do đó:

$$0 = \frac{\pi}{2}.0 + C \quad \text{hay} \quad C = 0.$$

Vậy: $$I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \text{ và } I = I(1) = \ln(1 + \sqrt{2})\frac{\pi}{2}$$

Chú ý

Vì $\frac{\operatorname{arctg}x}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + x^2t^2}$ nên có thể tính I bằng phương pháp tích phân dưới dấu tích phân (các điều kiện đều thỏa mãn):

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dt}{1 + x^2t^2} dt \right) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2t^2)\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln(t + \sqrt{1 + t^2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln(1 + \sqrt{2}).$$

13) Xét $F(x) = \int \frac{f(x)}{x}dx$, $A > 0$ xét:

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}dx = \int_{aA}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = F(+\infty) - F(aA)$$

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}dx = \int_{bA}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = F(+\infty) - F(bA)$$

$$\Rightarrow \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = F(bA) - F(aA) = \int_{aA}^{bA} \frac{f(bx)}{x}dx = f(\xi)\ln\frac{b}{a}, \ aA \le \xi \le bA$$

(DLTQTQ, tr 222 TI)

$$I = \lim \lim_{A \to +0} f(\xi)\ln\frac{b}{a} = f(0)\ln\frac{b}{a}$$

Áp dụng: $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{x}dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|, \ a \neq \pm b$$

33. Tính các tích phân: (*Trong các đề thi Giải tích học kỳ II, 1997 1998, ĐHBK*)

1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx \ (a, b > 0)$

2) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x}dx$

3) $I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x}dx \ (a > 0)$

4) $I = \int_0^{y} \frac{\ln(1 + yx)}{1 + x^2}dx$

Bài giải

1) Xét $I(b) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$ (1)

Xét tương tự như các bài trước, ta thấy I(b) thỏa mãn mọi điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân, do đó:

$$I'(b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-bx}\,dx = \frac{1}{b} \quad \text{và} \quad I(b) = \ln b + C$$

Theo (1): $I(a) = 0$ nên $\ln a + C$ hay $C = -\ln a$.

Vậy $\quad I = I(b) = \ln b - \ln a = \ln\dfrac{b}{a}$ $(a, b > 0)$.

Có thể tính I theo phương pháp tích phân dưới dấu tích phân:

vì: $$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int\limits_a^b e^{-tx}\,dt$$

nên: $$I = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_a^b e^{-tx}\,dt = \int\limits_a^b dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx$$

$$= \int\limits_a^b \left. \frac{e^{-tx}}{-t} \right|_0^{+\infty} dt = \int\limits_a^b \frac{dt}{t} = \ln\frac{b}{a}$$

$\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx\right.$ hội tụ đều $\forall t \geq t_0 > 0$).

2) Ta có: $$\frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1 + t\cos x}$$

Do đó: $$I = \int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^1 \frac{dt}{1 + t\cos x} = \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + t\cos x}$$

vì $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + t\cos x}$ hội tụ đều trong miền được xét.

Đặt $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ta được:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + t\cos x} = 2\int_0^1 \frac{dz}{1 + t + (1 - t)z^2} = \frac{2}{\sqrt{1 - t^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}z\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - t^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}} \quad \text{và } I = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1 - t^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}dt$$

Đặt $u = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}$, $dv = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ thì $du = -\frac{1}{2\sqrt{1 - t^2}}$,
$v = \arcsin t$

Theo công thức tích phân từng phần:

$$I = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}\arcsin t\Big|_0^1 + \int_0^1 \arcsin t.\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin t)^2\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}$$

Chú ý. Xét $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}dx$, $0 \le a < 1$.

Và ta thấy I(a) thỏa mãn các điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a\cos x},$$

đặt $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ ta có:

$$I'(a) = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+a)+(1-a)t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\,\text{arctg}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$$

Tích phân từng phần như trên ta được:

$$I(a) = \arcsin a.\ \text{arctg}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \frac{(\arcsin a)^2}{2} + C$$

$I(0) = 0$ nên $C = 0$.

Do đó: $$I = \lim_{a\to 1} I(a) = \frac{\pi^2}{8}.$$

3) Ta có $I = I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,dx$, $(a > 0)$

Rõ ràng $I(a)$ có đủ điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân (?)

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x}\,dx = \frac{1}{a+1}$$

Do đó $I(a) = \ln(a+1) + C$. $I(0) = 0$, nên $C = 0$.

Vậy: $$I = I(a) = \ln(a+1).$$

Chú ý

Vì $\dfrac{1-e^{-ax}}{x} = \displaystyle\int_0^a e^{-xt}\,dt$, nên có thể dùng quy tắc lấy tích phân dưới dấu tích phân để tính I:

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_0^a e^{-(t+1)x}\,dt = \int_0^a dt \int_0^{+\infty} e^{-(t+1)x}\,dx$$

($\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(t+1)x}\,dx$ hội tụ trong miền được xét).

$$I = \int_0^a \frac{dt}{t+1} = \ln(t+1)\Big|_0^a = \ln(a+1).$$

4) Ta có $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}dx$, $I(y)$ thỏa mãn các điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân (?)

Theo 3) (1.2):

$$I'(y) = \int_0^y \frac{xdx}{(1+yx)(1+x^2)} + 1.\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}$$

Tính toán ta có:

$$I'(y) = \frac{1}{2}\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{y}{1+y^2}\operatorname{arctg}y$$

Lấy tích phân và xác định hằng số C, cuối cùng ta được:

$$I = I(y) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}y.\ln(1+y^2).$$

34. Biểu diễn các tích phân sau qua các hàm B, Γ và tính các tích phân đó trong trường hợp không cần dùng bảng.

1) $I = \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx$.

Xét trường hợp $\nu = n$; $n = 0, 1, 2\ldots$; $\mu = 0$.

2) $I = \int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx$, $n > 0$.

3) $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\alpha} x dx$

4) $I = \int\limits_0^{+\infty} x^{\mu} e^{-ax} \ln x dx \;\; (a > 0).$

5) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n}, \; (n > 0)$

6) $I = \int\limits_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

7) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1 + x)^2} dx$

8) $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}} \;\; (n > 1).$

9) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1 + x} dx \qquad 0 < p < 1.$

10) $K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}}$ (Tích phân elliptique loại 1)

$E = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi} d\varphi$ (Tích phân elliptique loại 2).

11) Tính diện tích hình $\quad x^3 + y^3 \le x^2 + y^2; \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0$

12) Tính thể tích hình $\quad \begin{cases} z^2 \le xy \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$

Bài giải

1) Đặt $\sin x = \sqrt{t}$, $t \ge 0$, khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{\nu - 1}{2}} (1 - t)^{\frac{\mu - 1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{\nu + 1}{2}, \frac{\mu + 1}{2}\right)$$

I hội tụ khi $\nu + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$ hay $\nu > -1$, $\mu > -1$.

Trường hợp $\nu = n$, $\mu = 0$ ta có:

$$I = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Xét $n = 2m$ (chẵn), ta có:

$$I = I_n = \frac{1}{2} B\left(m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}$$

Theo (3) và (4) (3.1) ta có:

$$I_{2m} = \frac{1}{2} \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}.}{1.2.3\ldots m}$$

$$= \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots3.1.\frac{\pi}{2}}{2m(2m-2)\ldots4.2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}.\frac{\pi}{2}$$

Tương tự:

$$I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\ldots4.2}{(2m+1)(2m-1)\ldots3.1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

Đó là các công thức đã biết (chương Tích phân xác định 11).

2) Đặt $x = \sqrt{t}$, $t > 0$ thì: $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$

và:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} \quad \text{(theo (6), (3.1))}.$$

3) $I = \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^n x dx$, đặt $\mathrm{tg}x = \sqrt{t}$ thì:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < t < +\infty,\ x = \mathrm{arctg}\sqrt{t},\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}dt$$

và:
$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{1+t}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, 1 - \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{n+1}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi n}{2}}$$

Rõ ràng tích phân đã cho chỉ hội tụ khi $n + 1 > 0$, $1 - \frac{n+1}{2} > 0$ hay $|n| < 1$.

4) $I = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-ax} \ln x dx$, $(a > 0)$

Đặt $ax = t$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^{\alpha+1}}\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} \ln t dt - \frac{\ln a}{a^{\alpha+1}}\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt$$

Mặt khác:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt,\quad \Gamma'(\alpha + 1) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} \ln t dt$$

Do đó: $$I = \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{a^{\alpha+1}} - \frac{\ln a}{a^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha + 1) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{a^{\alpha+1}}\right)$$

I tồn tại khi $\alpha + 1 > 0$ hay $\alpha > -1$.

5) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n}$ $(n > 0)$. Đặt $x^n = t$ thì:

$$I = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{n}-1}dt}{1+t} = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

Tích phân hội tụ khi $1 - \frac{1}{n} > 0$ hay $n > 1$.

6) $I = \int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$. Đặt $x = 2\sqrt{t}$, $t > 0$ thì:

$$I = \int_0^1 4t\sqrt{4 - 4t}\cdot\frac{2dt}{2\sqrt{t}} = 8\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1 - t)^{\frac{1}{2}}dt = 8B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$= 8\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = 8\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \pi.$$

7) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1 + x)^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1 + x)^2}dx = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

8) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}}$ $(n > 1)$. Đặt $x = t^{\frac{1}{n}}$ $(t > 0)$ thì:

$$I = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}} \quad (n > 1).$$

9) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$, $0 < p < 1$.

Xét:

$$B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

thì:

$$I = B'_p = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} = \frac{d}{dp}[\Gamma(p)\Gamma(1-p)]$$

$$= \frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right) = \frac{-\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}.$$

10) $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$, đặt $\cos\varphi = t$ (1).

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 \ge t \ge 0$, $\varphi = \arccos t$.

$$d\varphi = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}},\ K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}(1-t^2)}}$$

$K = \sqrt{2}\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ lại đặt $t^4 = z$ (2) thì $K = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\displaystyle\int_0^1 z^{-\frac{3}{4}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz$

$$K = \frac{\sqrt{2}}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}$$

Cũng với phép thế (1) và (2) ta được:

$$E = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\int_0^1 z^{-\frac{3}{4}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz + \int_0^1 z^{-\frac{1}{4}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz\right\}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}\right] = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{4}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2\pi^2}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}\right]$$

Chú ý

Người ta đã lập bảng các giá trị của hàm $\Gamma(x)$ (trang 386), theo bảng đó:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} + 1\right) = 0{,}9064$$

Do đó: $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 4\Gamma\left(\frac{1}{4} + 1\right) = 3{,}6256.$

11) Đổi sang toạ độ độc cực: $x = r\cos^{2/3}\varphi$, $y = r\sin 2/3\varphi$

$x^4 + y^4 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \cos^{4/3}\varphi + \sin^{4/3}\varphi$

$$I = \frac{2}{3} r \cos^{-\frac{1}{3}}\varphi \sin^{-\frac{1}{3}}\varphi$$

$$S = \iint_D dxdy = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi \sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\, d\varphi \times \int_0^{\cos^{4/3}\varphi + \sin^{4/3}\varphi} r dr$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{3}\left(1 + \int_0^{\pi/2}(\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{\frac{7}{3}}\varphi + \sin^{\frac{7}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi)d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2\int_0^{\pi/2}\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{\frac{7}{3}}\varphi\, d\varphi\right).$$ Theo 1):

$$S = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1/3)\cdot\frac{2}{3}\Gamma(2/3)}{\Gamma(2)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

12) $V = 4\iint\limits_D \sqrt{xy}\, dx\, dy \qquad D:\ x^2 + \varphi^2 \le a^2$

Đổi sang toạ độ độc cực:

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\sin^{\frac{1}{2}}\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\, d\varphi\int_0^a r^2 dr$$

Theo 1): $V = \dfrac{2a^3}{3}\dfrac{\Gamma^2(\frac{3}{4})}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \dfrac{4a^3}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2(\frac{3}{4})$

với: $\dfrac{4}{3}\Gamma(1+\dfrac{3}{4}) = \dfrac{4}{3}\times$ 0,9190 (Bảng ở trang 386).

CHƯƠNG 4

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Đường. Đường $C \subset R^2$: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $\alpha \le t \le \beta$ (1) là:

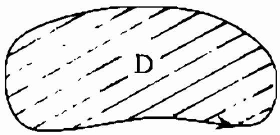
- liên tục nếu các hàm (1) là liên tục.

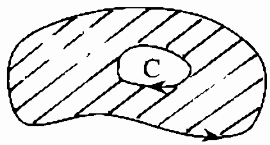
- trơn nếu $\exists\ x'_t,\ y'_t$ liên tục và $x'^2_t + y'^2_t \ne 0$ $(\alpha \le t \le \beta)$.

- trơn từng phần nếu nó là liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần trơn.

- khép kín nếu $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$.

- miền D là đơn (đa) liên nếu nó giới hạn bởi (có biên giới là) một (nhiều) đường trơn từng phần và khép kín.





Quy ước: chiều dương (+) trên biên giới C của D là chiều đi của một QSV sao cho phần của D kề bên QSV ở bên trái, chiều âm (–) là chiều ngược lại.

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

1.1. Định nghĩa

Tích phân đường loại một của hàm f(x, y) lấy theo hay trên cung đường cong C nối 2 điểm A, B: $C = \overset{\frown}{AB}$ là:

$$I = \int_C f(M)ds = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

Với một cách chia bất kỳ $C = \overset{\frown}{AB}$ thành n phần độ dài Δs_i ($i = 1, 2 \ldots$) và một cách chọn bất kỳ điểm $M_i(x_i, y_i)$ trên phần được chia Δs_i:

C là đường khép kín, ký hiệu $\oint\limits_C$

C là đường trong R^3, định nghĩa tương tự: $\int f(x, y, z)ds$

Đặc biệt $f \equiv 1$ thì $I = \int\limits_C ds = s$ là độ dài của C.

Mọi hàm f(x, y) có tích phân trên C gọi là khả tích trên C. Mọi hàm f(x, y) liên tục trên đường trơn từng phần C đều khả tích trên C.

- Tích phân đường loại 1 có các tính chất tương tự như tích phân xác định, trừ tính chất đổi chiều đường lấy tích phân:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)ds$$

Về cơ học nếu xét $f(x, y) > 0$ là mật độ khối lượng của C thì khối lượng của C là:
$$m = \int\limits_C f(x, y)ds .$$

1.2. Cách tính

$$I = \int\limits_C f(x, y)ds \quad (f(x, y) \text{ liên tục trên đường trơn từng phần } C)$$

$$C \begin{cases} y = y(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad (1)$$

$$C \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \alpha \le t \le \beta \Rightarrow I = \int\limits_\alpha^\beta f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\,dt \qquad (2)$$

$$C \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\,dt \qquad (3)$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

2.1. Định nghĩa

- Tích phân đường loại hai (hay tích phân đường theo các tọa độ) của hàm vecteur $\vec{F} = \vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$, $M(x, y) \in R^2$ hay của các hàm P, Q lấy trên hay theo đường cong $C \in R^2$ nối hai điểm A, B là:

$$I = \int_C \vec{F}.\vec{\tau}ds = \int_C [P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)]ds$$

Ký hiệu: $I = \int_C P(M)dx + Q(M)dy = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$\vec{\tau} = (\cos\alpha(M), \sin\alpha(M))$: vecteur tiếp tuyến tại $M \in C$

$\oint_C$: C khép kín

Về cơ học, nếu coi $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ là lực tác dụng vào một chất điểm chuyển động trên đường cong $C = \overset{\frown}{AB}$ thì công của lực đó là:

$$\Gamma = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

- **Tích** phân đường loại hai của hàm:

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k},$$

$M(x, y, z) \in R^3$ hay của ba hàm P(M), Q(M), R(M) trên đường $C \subset R^3$ là:

$$I = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

$$= \int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

Với $\vec{\tau} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ là vecteur tiếp tuyến với C tại $M \in C$ (α, β, γ là góc giữa tiếp tuyến với ba trục Ox, Oy, Oz).

Mọi hàm liên tục $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ trên đường trơn từng phần C: $x = x(t)$, $y = y(t)$ đều khả tích (có tích phân) trên C.

Các tính chất của tích phân đường loại hai đều tương tự như các tính chất của tích phân xác định.

2.2. Cách tính

(với giả thiết: tích phân tồn tại)

$$\begin{cases} y = y(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \qquad I = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$= \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\}dx$$

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$$

$$I = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[x(t), y(t)]x'_t + Q[x(t) + y(t)]y'_t\}dt$$

$$C \subset R^3 \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$I = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[x(t), y(t), z(t)]x'_t + Q[x(t), y(t), z(t)]y'_t + R[x(t), y(t), z(t)]z'_t\}dt$$

§3. CÔNG THỨC GREEN - SỰ ĐỘC LẬP CỦA TÍCH PHÂN ĐỐI VỚI ĐƯỜNG LẤY TÍCH PHÂN

3.1. Công thức Green

Nếu $P(x, y)$, $Q(x, y)$ cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền Compact D giới hạn bởi đường khép kín, trơn từng phần C (liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần trơn).

thì: $$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

với tích phân đường lấy theo chiều dương của C (chiều đi trên C của một quan sát viên nhìn thấy phần của D kề bên quan sát viên ở bên trái).

3.2. Sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân

Nếu các hàm P(x, y), Q(x, y) cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền đơn liên D thì 4 mệnh đề sau là tương đương:

1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall (x, y) \in D$.

2) $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, $\forall L \in D$ (L: khép kín).

3) $\int_{C\ \overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường nối các điểm $A, B \in D$.

4) $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y)$ nào đó trong miền D: $du = Pdx + Qdy$.

§4. ÁP DỤNG

4.1. Tính diện tích miền D

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \oint_C xdy = -\oint_C ydx$$

C là biên giới cua D theo chiều dương.

4.2. Tính tích phân đường

$I = \int_{C\ \overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$, P, Q có các đạo hàm riêng liên tục:

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (không phụ thuộc đường lấy tích phân C nối A, B) trong miền đơn liên D, thì: $Pdx + Qdy = du$

và:

$$I = \int_{C=\overset{\frown}{AB}} = \int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} du = u\Big|_{(A)}^{(B)} = u(B) - u(A).$$

Tìm u khi biết $du = Pdx + Qdy$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dy + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

hay: $$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dy + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C$$

với $(x_0, y_0), (x, y) \in D$ đơn liên.

Trong không gian R^3:

$$I = \int_{C=\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

P, Q, R có các đạo hàm liên tục trong miền: đơn liên V và:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

thì:

$$du(x, y, z) = Pdx + Qdy + Rdz$$

và:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C$$

$(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in V$.

4.3. Công của lực

$$T = \int_{C=\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$$

với $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j}$ là lực tác động vào một chất điểm chuyển động theo đường C.

Nếu $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ thì công không phụ thuộc đường C nối A, B.

4.4. Moment tĩnh M_x, M_y - Moment quán tính

I_x, I_y của đường $C = \overset{\frown}{AB}$ đối với Ox, Oy và toạ độ trọng tâm của C:

$$M_x = \int_C y\rho(x,y)ds, \; M_y = \int_C x\rho(x,y)ds,$$

$$I_x = \int_C y^2\rho(x,y)ds, \; I_y = \int_C x^2\rho(x,y)ds,$$

$$x_G = \frac{M_y}{M}, \; y_G = \frac{M_x}{M}$$

với $M = \int_C \rho(x,y)ds$ là khối lượng và ρ là mật độ khối lượng (dài) của C.

- Với $C \subset R^3$:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)ds,$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)ds,$$

$$z_G = \frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)ds,$$

$M = \int_C \rho(x,y,z)ds$ là khối lượng và ρ là mật độ khối lượng (dài) của C.

BÀI TẬP

35. Tính các tích phân đường loại một:

1) $I = \oint\limits_C xyds$, C là chu vi của hình: $|x| + |y| \leq a$ $(a > 0)$.

2) $I = \int\limits_C \dfrac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, C là đoạn thẳng nối O(0, 0) đến A(1, 2).

3) $I = \int\limits_C y^2 ds$, C là cung $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$.

4) $I = \int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, C là cung $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$.

5) $I = \int\limits_C (x + y)ds$, C là cung $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, $-\dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4}$.

6) $I = \oint\limits_C \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right)ds$, C là đường: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

7) $I = \int\limits_C zds$, C là cung $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq t_0$.

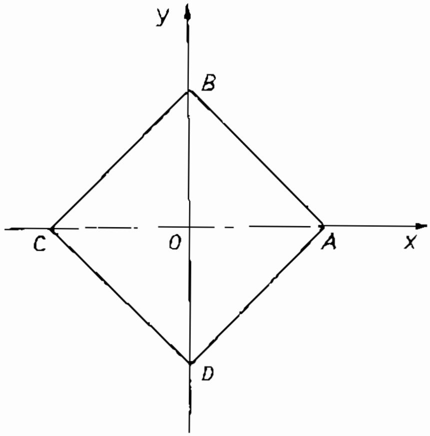
8) $I = \int\limits_C zds$, C là cung $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ từ điểm (0, 0, 0) đến điểm $(a, a, a\sqrt{2})$.

9) $I = \oint\limits_C \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, C là đường $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}$

Bài giải

1) Theo giả thiết, C là chu vi hình vuông ABCD (hình 92):

$$I = \int_C = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$



Hình 92.

Phương trình của AB: $x + y = a$ hay $y = a - x$, $0 \le x \le a$, $y' = -1$.

Theo (1.2):

$$\int_{AB} xyds = \int_{BA} xyds = \int_0^a x(a - x)\sqrt{1 + 1^2}\,dx = \sqrt{2}\int_0^a x(a - x)dx \quad (1)$$

Phương trình của DA: $x - y = a$, $y = x - a$, $0 \le x \le a$, $y' = 1$.

$$\int_{DA} xyds = \int_0^a x(x - a)\sqrt{1 + 1^2}\,dx = \sqrt{2}\int_0^a x(x - a)dx$$

$$= -\int_{AB} xyds \text{ (theo (1))}$$

Do đó: $\int_{DA} xyds + \int_{AB} xyds = 0$, tương tự $\int_{BC} xyds + \int_{CD} xyds = 0$

2) Phương trình đường thẳng OA là $y = 2x$, $0 \le x \le 1$, $y' = 2$.

Do đó:

$$I = \int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + 2^2}\,dx}{\sqrt{x^2 + (2x)^2 + 4}}$$

$$= \int_0^1 \frac{d\left(\sqrt{5}x\right)}{\sqrt{5x^2 + 4}} = \ln\left(\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \ln\frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$$

3) $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a\sin t$. Theo (1.2):

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

$$I = \int_C y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 .2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

vì: $0 \le t \le 2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{t}{2} \le \pi \Rightarrow \sin\frac{t}{2} \ge 0$

nên:

$$I = 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt = 8a^3\left(\int_0^{\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt + \int_{\pi}^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt\right)$$

$$= 16a^3\left[\int_0^{\pi/2}\sin^5 u\,du + \int_0^{\pi/2}\sin^5\left(u + \frac{\pi}{2}\right)du\right]$$

(trong tích phân thứ nhất: $u = \frac{t}{2}$, thứ hai: $u = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}$)

$$= 32a^3\int_0^{\pi/2}\sin^5 u\,du.\left(\int_0^{\pi/2}\sin^5\left(u+\frac{\pi}{2}\right)du = \int_0^{\pi/2}\cos^5 u\,du = \int_0^{\pi/2}\sin^5 u\,du\right)$$

$$= 32a^3.\frac{4.2}{5.3} = \frac{256}{15}a^3.$$

4) Ta có: C: $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$

C là đường túc bế của đường tròn: $x^2 + y^2 = a^2$

$x' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$

$y' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t$

$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\,dt = a|t|\,dt.$

$$I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(\cos t + t\sin t)^2 + a^2(\sin t - t\cos t)^2}\,.\,a|t|\,dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\,t\,dt = \frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{3/2} - 1\right].$$

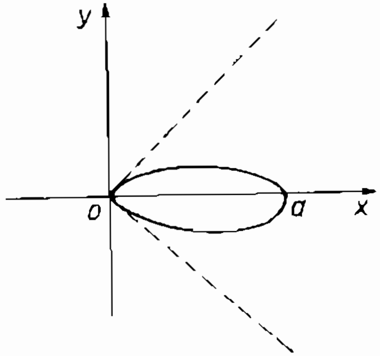
5) C là $\frac{1}{2}$ bên phải của đường Lemniscate (hình 93).

Ta có:

$r^2 = a^2\cos 2\varphi,$

$2rr' = -2a^2\sin 2\varphi,$

$$r' = \frac{-a^2\sin 2\varphi}{r}$$



Hình 93.

Trong tọa độ độc cực:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,.d\varphi = \sqrt{r^2 + \frac{a^4 \sin^2 2\varphi}{r^2}}\,.d\varphi$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 2\varphi + a^4 \sin^2 2\varphi}{r^2}}\,.d\varphi = \frac{a^2}{r}\,d\varphi$$

Vậy: $$I = \oint_C (x + y)ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r(\cos\varphi + \sin\varphi)\,.\,\frac{a^2}{r}\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} a^2 \cos\varphi d\varphi = 2a^2 \sin\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2\sqrt{2}\,.$$

6) C là đường astroïde, phương trình tham số của nó là:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t,\ y' = 3a\sin^2 t\cos t$$

$$ds = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\ dt$$

$$= \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\ .dt = 3a\left|\sin t\cos t\right| dt$$

Vì lý do đối xứng nên:

$$I = 4\int_0^{\pi/2}\left[(a\cos^3 t)^{4/3} + (a\sin^3 t)^{4/3}\right]3a\sin t\cos t dt$$

$$= 12a^{7/3}\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sin t\cos t dt$$

$$= 12a^{7/3}\int_0^{\pi/2}(\cos^5 t\sin t + \sin^5 t\cos t)dt$$

$$= 12a^{7/3}\left(-\frac{1}{6}\cos^6 t + \frac{1}{6}\sin^6 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 4a^{7/3}$$

7) C là đường đinh ốc nón tròn xoay $(x^2 + y^2 = z^2)$

$$x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le t_0$$

$$x'_t = \cos t - t\sin t,\ y'_t = \sin t + t\cos t,\ z'_t = 1$$

$$ds = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\,dt = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}\,dt$$

$$= \sqrt{t^2 + 2}\,dt$$

$$I = \int_C z ds = \int_0^{t_0} t\sqrt{t^2 + 2}\,dt = \frac{1}{3}(t^2 + 2)^{3/2}\Bigg|_0^{t_0}$$

$$= \frac{1}{3}\left[(t_0^2 + 2)^{3/2} - 2^{3/2}\right]$$

8) C là giao của mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$ và mặt trụ $y^2 = ax$, đưa phương trình của C về phương trình tham số, đặt $x = t$, $y = \sqrt{at}$.

$$z = \sqrt{t^2 + at}\ ,\ 0 \le t \le a \Leftrightarrow (0, 0, 0) \to (0, 0, a\sqrt{2}\,)$$

$$x'_t = 1,\ y'_t = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}},\ z'_t = \frac{2t + a}{2\sqrt{t^2 + at}}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{a}{4t} + \frac{(2t + a)^2}{4(t^2 + at)}}\,dt = \frac{\sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2}}{2\sqrt{t^2 + at}}\,dt$$

$$I = \int_C z\,ds = \int_0^a \sqrt{t^2 + at}\,.\,\frac{\sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2}}{2\sqrt{t^2 + at}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2}\,dt$$

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^a \sqrt{\left(2\sqrt{2}t + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{17}{32}a^2}\;d\left(2\sqrt{2}t + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\left(2\sqrt{2}t + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)\sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2}\ -\right.$$

$$\left.- \frac{17a^2}{32}\ln\left(2\sqrt{2}t + \frac{9a}{4\sqrt{2}} + \sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38} - 72 - 17\ln\frac{25 + 4\sqrt{38}}{17}\right)$$

9) C là đường tròn lớn trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ và mặt phẳng $x = y$ qua gốc O.

Đưa phương trình của C về tham số:

đặt $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t$, $y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t$, $z = a\sin t$ thì khi $0 \le t \le 2\pi$ ta có cả đường tròn.

$$x'_t = \frac{-a}{\sqrt{2}}\sin t,\ y' = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t,\ z = a\cos t$$

$$ds = \sqrt{\frac{a^2}{2}\sin^2 t + \frac{a^2}{2}\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,dt = a\,dt$$

$$I = \oint_C \sqrt{2y^2 + z^2}\,ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{2a^2}{2}\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\,.a\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 dt = 2\pi a^2$$

Chú ý

Vì $x = y$ nên:

$$I = \oint_C \sqrt{2y^2 + z^2}\,ds = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,ds$$

$$= \oint_C \sqrt{a^2}\,ds = a\oint_C ds = a.\ 2\pi a = 2\pi a^2$$

($\oint_C ds = 2\pi a$: độ dài đường tròn bán kính a).

36. 1) Tính diện tích S của phần mặt trụ $y = \dfrac{3}{8}x^2$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

2) Tính độ dài s của đường $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$ từ điểm (0, 0, 0) đến điểm (0, 0, a).

3) Tính khối lượng M của đường $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ nếu mật độ khối lượng (dài) của đường đó là $\rho(x, y) = |y|$.

4) Tìm tọa độ trọng tâm của:

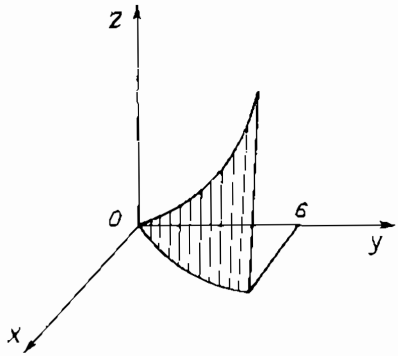
a) Cung đồng chất ($\rho = 1$): $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le \pi)$

b) Chu vi tam giác cầu đồng chất ($\rho = 1$), $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$

5) Tìm moment quán tính I_z đối với trục Oz của cung đồng chất ($\rho = 1$): $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$.

Bài giải

1) Tích phân đường $\int\limits_C f(x, y)ds$ $(f > 0)$, về hình học có thể xem là diện tích phần mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là đường lấy tích phân C và chiều cao là những giá trị của hàm dưới dấu tích phân f (hình 94).



Hình 94.

Do đó, ở đây: $$S = \int\limits_C z ds = \int\limits_C x ds$$

C là cung $y = \frac{3}{8}x^2$ từ điểm (0, 0) đến điểm (4, 6). Ta có:

$$y' = \frac{3}{4}x,\ ds = \sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2}\ dx$$

Do đó: $$S = \int_0^4 x\sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2}\ dx = \frac{8}{9}\left(1 + \frac{9}{16}x^2\right)^{3/2}\frac{2}{3}\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{16}{27}.(10\sqrt{10} - 1)\ (\text{dvdt}).$$

2) Về hình học $\int_C f(x, y)ds$ khi $f \equiv 1$ là độ dài cung đường cong C.

ở đây: $x' = ae^t\cos t - ae^t\sin t,$

$y' = ae^t\sin t + ae^t\cos t,$

$z' = ae^t$

Do đó:

$$s = \int_{-\infty}^0 \sqrt{a^2e^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1]}dt$$

$(t \to -\infty,\ x, y, z \to 0,\ t = 0,\ x = a,\ y = 0,\ z = a)$

$$s = \int_{-\infty}^0 ae^t.\sqrt{3}dt = a\sqrt{3}\ e^t\Big|_{-\infty}^0 = a\sqrt{3}\ (\text{dvd}).$$

3) Theo ý nghĩa cơ học

$$M = \int_C \rho(x, y)ds = \int_C |y|ds.$$

Xét $a > b$, $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$

và do đối xứng, nên:

$$M = b\int_0^{2\pi}|b\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.dt$$

$$= 4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.\sin t dt$$

$$= 4b\int_{\pi/2}^{0}\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}.d(\cos t)$$

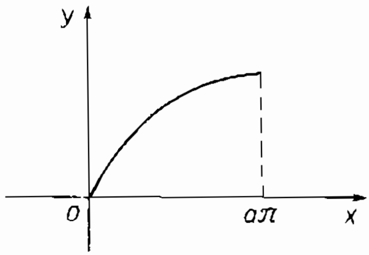
$$= \frac{4ab}{e}\int_0^{2\pi}\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}.d(e\cos t)$$

với $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ là tâm sai của ellipse

$$= \frac{4ab}{e}\left(\frac{e\cos t}{2}\sqrt{1 - e^2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\arcsin(e\cos t)\right|_{\pi/2}^{0}$$

$$= 2b(b + \frac{a}{e}\arcsin e)\ (\text{đvkl}).$$

4) a) Theo (4.4), ở đây: (hình 95)



Hình 95.

$$M = \int_C 1 ds = \int_0^{\pi} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a$$

$$x_G = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{4a}\int_C x ds = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(t - \sin t) 2a \sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi} (t - \sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$= \frac{a}{2}\left(2t\cos\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{0} + 4\sin\frac{t}{2}\Big|_{0}^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt \right)$$

$$= \frac{a}{2}\left(4 - 4\int_0^{\pi} \sin^2\frac{t}{2}\,d(\sin\frac{t}{2}) \right) = 2a\left(1 - \frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4a}{3}$$

$$y_G = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{4a}\int_C y ds = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{a}{2}\left(2\cos\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{0} - 2\int_{\pi}^{0} (2\cos^2\frac{t}{2} - 1)\,d\left(\cos\frac{t}{2}\right) \right)$$

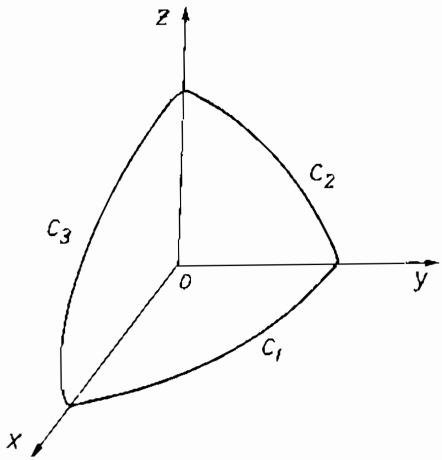
$$= \frac{a}{2}\left(2 - \left(\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2} \right) \right)\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{4a}{3}$$

b) Theo (4.4), ở đây:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_C x ds = \frac{1}{M}\left[\int_{C_1} x ds + \int_{C_2} x ds + \int_{C_3} x ds \right]$$

$$= \frac{1}{M}\left[\int_{C_1} xds + \int_{C_3} xds\right]$$

($\int_{C_2} xds = 0$ vì trong mặt phẳng yOz: x = 0) (hình 96)



Hình 96.

Phương trình tham số của C_1 là $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$, của C_3 là $x = a\cos t$, $z = a\sin t$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$.

Khi đó trên C_1 và C_3:

$$ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + a^2\cos^2 t}.dt = adt$$

Khối lượng:

$$M = \frac{3}{4}.2\pi a = \frac{3\pi a}{2}$$

Vậy:

$$x_G = \frac{2}{3\pi a}\left[\int_0^{\pi/2} a^2\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} a^2\cos\varphi d\varphi\right] = \frac{4a}{3\pi}$$

vì lý do đối xứng nên $y_G = z_G = x_G = \dfrac{4a}{3\pi}$.

5) Ta có: $I_z = \int_C (x^2 + y^2)ds$

ở đây: $ds = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\,dt$

$$= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}.dt = \sqrt{a^2 + b^2}dt$$

Do đó:

$$I_z = \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\sqrt{a^2 + b^2}dt$$

$$= a^2\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi}dt = 2a^2\sqrt{a^2 + b^2}\pi.$$

37. Tính các tích phân đường loại hai:

1) $I = \int_{\overset{\frown}{AB}}(x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, $\overset{\frown}{AB}$: $y = x^2$ nối A (1, 1) đến **B** (2, 4).

2) $I = \int_C (2a - y)dx - xdy$, C: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$

3) $I = \oint_C \dfrac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, C: $x^2 + y^2 = a^2$ theo chiều ngược kim đồng hồ

4) $I = \oint\limits_C \dfrac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$: C: phần bên phải của đường $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, ngược chiều kim đồng hồ

5) $I = \oint\limits_C \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$: C: chu vi hình vuông A (1, 0), B (0, 1), C (- 1, 0), D (0, - 1), ngược chiều kim đồng hồ.

6) $I = \int\limits_C ydx + zdy + xdz$, C: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$ theo chiều tăng của t

7) $I = \oint\limits_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$

C: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\,\mathrm{tg}\alpha$, ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của Ox

8) $I = \oint\limits_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$

C là chu vi tam giác cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ theo chiều sao cho phía ngoài của tam giác ở bên trái.

Bài giải

1) Theo (2.2):

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$$

$$= \int_1^2 \left[x^2 - 2x^3 + (2x^3 + x^4).2x\right]dx$$

$$= \int_1^2 (x^2 - 2x^3 + 4x^4 + 2x^5)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{1}{3}x^6\right)\Bigg|_1^2 = 40.\frac{19}{30}$$

2) Theo (2.2):

$$I = \int_C (2a - y)dx + xdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \{[2a - a(1 - \cos t)]a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)(a \sin t)\}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 t \sin t dt = a^2 \left(-t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt\right) = -2\pi a^2.$$

3) Phương trình tham số của C: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Do đó:

$$I = \oint_C \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{[(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)a\cos t]}{a^2}.dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-a^2}{a^2} dt = -2\pi$$

4) C là nửa bên phải của đường Lemniscate (hình 97).

Phương trình của C là: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ với $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Phương trình tham số φ của C là:

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}.\cos\varphi,\ y = a\sqrt{\cos 2\varphi}.\sin\varphi,\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

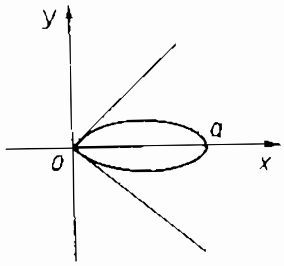
mặt khác: $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -d(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}) = -d\varphi.$

Do đó:

$$I = \oint_C \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$$

$$= -\int_{\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi . \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = 0$$

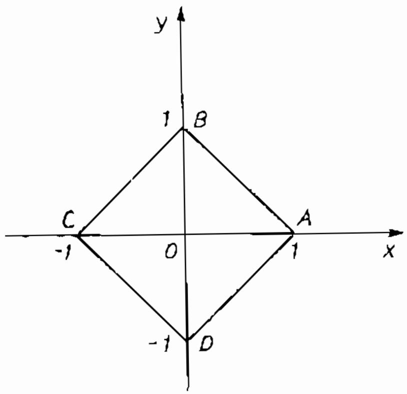
Vì hàm dưới dấu tích phân là lẻ.



Hình 97.

5) $I = \int \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$

(hình 98).



Hình 98.

Phương trình của AB: x + y = 1, do đó trên AB: dx + dy = 0, vậy:

$$\int_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0$$

Phương trình của BC: y - x = 1 ⇒ dx = dy. Do đó:

$$\int_{BC} \frac{dx - dy}{|x| + |y|} = \int_0^1 \frac{2dx}{-x + x + 1} = 2\int_0^1 dx = -2.$$

Phương trình của CD: $x + y = -1 \Rightarrow dx + dy = 0$. Do đó:

$$\int_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0.$$

Phương trình của DA: $y - x = -1 \Rightarrow dx = dy$. Do đó:

$$\int_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 2\int_0^1 dx = 2.$$

$$(|x| = x,\ |y| = |x - 1| = 1 - x,\ |x| + |y| = x + 1 - x = 1)$$

Vậy $I = 0 - 2 + 0 + 2 = 0$.

6) Theo (2.2) $dx = -a\sin t dt$, $dy = a\cos t.dt$, $dz = bdt$

$$I = \int_C ydx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi} \{(a\sin t)(-a\sin t) + bta\cos t + a\cos t.b\}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-a^2\sin^2 t + 2abt\cos t)dt = -\pi a^2$$

7) C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\,tg\alpha$ (1)

(nằm trong mặt phẳng $y = tg\alpha.x$) bán kính a.

Phương trình tham số của C là:

$$x = a\cos\alpha\cos t,\ y = a\sin\alpha\cos t,\ z = a\sin t \qquad (2).$$

Vì x, y, z xác định bởi (2), thỏa mãn hệ (1).

Rõ ràng t tăng từ 0 đến 2π thì hướng đi trên đường tròn là ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ phía dương của Ox.

Do đó:

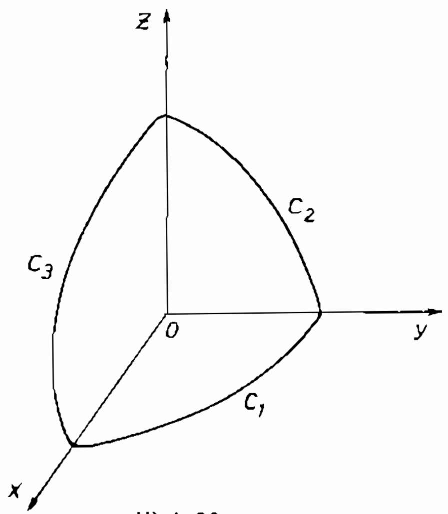
$$I = \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[(a\sin\alpha\cos t - a\sin t)(-a\cos\alpha\sin t) + (a\sin t - a\cos\alpha\cos t).$$

$$.(-a\sin\alpha\sin t) + (a\cos\alpha\cos t - a\sin\alpha\cos t)a\cos t\Big]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)dt = 2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha) = 2\sqrt{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

8) $I = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$ (hình 99) trên C_1: $z = 0$, $dz = 0$



Hình 99.

Do đó $I_1 = \int_{C_1} y^2dx - x^2dy$, phương trình tham số của C_1:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Vậy:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 t \cos t)dt$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = -2.\frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

Rõ ràng: $\quad I_2 = \int\limits_{C_2} = I_3 = \int\limits_{C_3} = I_1 = \int\limits_{C_1} = \frac{-4}{3}$

Vậy: $\quad I = I_1 + I_2 + I_3 = -4.$

38. Tính các tích phân đường:

1) $I = \oint\limits_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, C: chu vi tam giác A (1, 1), B (2, 2), C (1, 3) theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

2) $I = \oint\limits_C -x^2 y dx + xy^2 dy$, C: $x^2 + y^2 = R^2$, theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

3) $I = \int\limits_C (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, C: nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ từ A (a, 0) đến O (0, 0).

4) $I = \oint\limits_C \frac{dx - dy}{x + y}$, C: chu vi hình vuông: A (1, 0), B (0, 1), C (- 1, 0), D (0, - 1) theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

5) $I = \int\limits_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

6) $I = \int\limits_{(1,1)}^{(3,2)} \dfrac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$, C: không cắt đường $y = -x$.

7) $I = \int\limits_{(1,0)}^{(1,1)} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right)dy$

8) $I = \int\limits_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, với $(x_1, y_1, z_1) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(x_2, y_2, z_2) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

9) $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xydx + yzdy - zxdz$, $\overset{\frown}{AB}$: $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$, $y > 0$ $(R > 0)$.

10) $G = \oint\limits_{C} \dfrac{\cos(\overline{r}, \overline{n})}{r} ds$ (tích phân Gauss)

$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, $A(\xi, \eta)$, $M(x, y) \in C$, $\overline{r} = \overrightarrow{AM}$

$(\overline{r} \,\hat{}\, \overline{n})$ góc giữa $\overline{r}$ và $\overline{n}$, $\overline{n}$ là pháp tuyến ngoài đơn vị tại M của C.

Bài giải

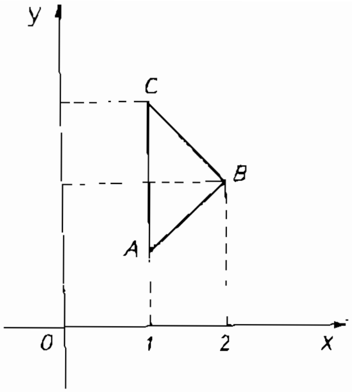
1) Phương trình các cạnh của tam giác (hình 100).

$$AB: y = x,\ 1 \le x \le 2,$$

$$BC: \frac{y - 2}{3 - 2} = \frac{x - 2}{1 - 2} \text{ hay } y = -x + 4,\ 1 \le x \le 2$$

ở đây: $P = 2(x^2 + y^2)$, $Q = (x + y)^2$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 4y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y)$ là các hàm liên tục trong miền compact D là tam giác ABC.



Hình 100.

Vậy áp dụng công thức Green ta có:

$$I = \oint_C = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 2(x - y)dxdy$$

$$= 2\int_1^2 dx \int_x^{-x+4} (x - y)dy = 2\int_1^2 \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{(4 - x)^2}{2} \right] dx$$

$$= 2\left(2x^2 - \frac{3x^3}{6} + \frac{(4 - x)^3}{6} \right)\Bigg|_1^2 = \frac{-4}{3}.$$

2) Tương tự như 1), ở đây:

$$P = -x^2y,\ Q = xy^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$$

Áp dụng công thức Green:

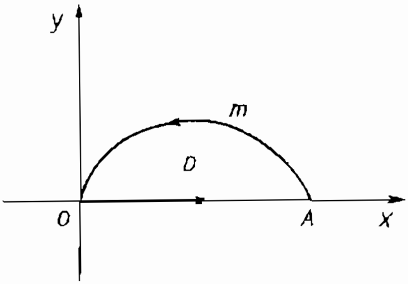
$$I = \oint_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$$

với D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$

Chuyển sang toạ độ độc cực:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 .rdr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

3) Ta có: $I = \int\limits_C = \oint\limits_{\overset{\frown}{OAmO}} - \int\limits_{OA}$ (hình 101).



Hình 101.

Trên $\overline{OA}$: $y = 0$, do đó:

$$\int_{OA} = \int_0^a 0.dx + (e^x - m)0 = 0$$

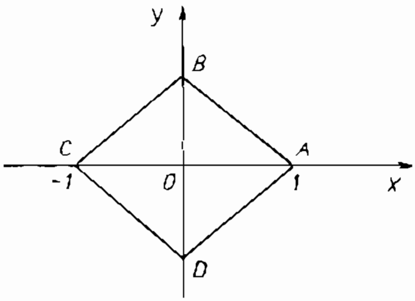
Áp dụng công thức Green:

$$\oint_{\overset{\frown}{OAmO}} = \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + m)dxdy = m\iint_D dxdy$$

D là nữa trên hình tròn, bán kính $\frac{a}{2}$.

Do đó: $\displaystyle\oint\limits_{\overset{\frown}{OAmO}} = m\frac{\pi a^2}{8}$. Vậy $I = \frac{m\pi a^2}{8} - 0 = \frac{m\pi a^2}{8}$.

4) Ở đây $P = \frac{1}{x+y}$, $Q = \frac{-1}{x+y}$ không liên tục tại $(0, 0) \in$ hình vuông (hình 102) nên không áp dụng được công thức Green để tính I.



Hình 102.

Tính trực tiếp, ta có:

$$I = \oint\limits_{C} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA}$$

Phương trình của $\overline{AB}$: $x + y = 1$, $1 \geq x \geq 0$, $\displaystyle\int\limits_{AB} = \int_1^0 \frac{2dx}{x + (1 - x)} = -2$.

Phương trình của $\overline{BC}$: $y - x = 1 \Rightarrow dx = dy \Rightarrow \displaystyle\int\limits_{BC} = 0$.

Phương trình của $\overline{CD}$: $x + y = -1$, $-1 \leq x \leq 0$, $\displaystyle\int\limits_{CD} = \int_1^0 \frac{2dx}{x + (-1 - x)}$

$= -2$

Phương trình của $\overline{DA}$: $x - y = 1 \Rightarrow dx = dy \Rightarrow \int\limits_{DA} = 0.$

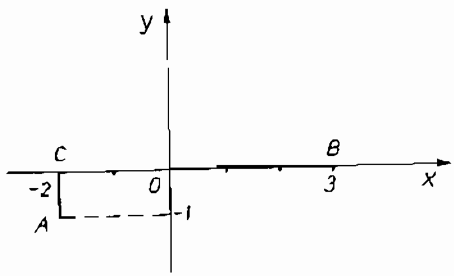
Vậy $I = -4$.

5) Ở đây: $\quad P = x^4 + 4xy^3,\ Q = 6x^2y^2 - 5y^4$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$$

Vậy I không phụ thuộc đường lấy tích phân. Chọn C là đường gấp khúc ACB: $x = -2$ và $y = 0$.

Nối 2 điểm A $(-2, -1)$ và B $(3, 0)$ (hình 103).



Hình 103.

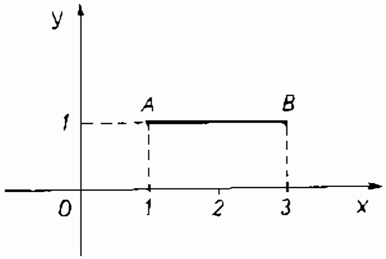
$$I = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} = \int\limits_{-1}^{0} (\ ).0 + (24y^2 - 5y^4)dy + \int\limits_{-2}^{3} x^4dx + (\ ).0 = 62.$$

(Trên $\overline{AC}$: $x = -2$, $dx = 0$, trên CB: $y = 0$, $dy = 0$).

6) Ở đây: $\quad P = \dfrac{x + 2y}{(x + y)^2},\ Q = \dfrac{y}{(x + y)^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x + y)^2.2 - 2(x + y)(x + 2y)}{(x + y)^4} = \frac{-2y}{(x + y)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Vậy I không phụ thuộc đường lấy tích phân không cắt đường $y = -x$ trên $\overline{AB}$, A (1, 1), B (3, 1) (hình 104).



Hình 104.

Ta có: $y = 1$, $dy = 0$.

Vậy:

$$I = \int_1^3 \frac{(x + 2)dx}{(x + 1)^2} = \int_1^3 \frac{dx}{x + 1} + \int_1^3 \frac{dx}{(x + 1)^2} = \ln 2 + \frac{1}{4}.$$

7) Biểu thức dưới dấu tích phân có thể viết:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right)dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + ydx + xdy$$

$$= d\sqrt{x^2 + y^2} + d(xy).$$

Theo (4.2):

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d\left(\sqrt{x^2 + y^2} + xy\right) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + xy\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(1,1)} = \sqrt{2} + 1.$$

8) Tương tự như (7):

$$I = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} d\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = b - a$$

(vì $(x_1, y_1, z_1) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(x_2, y_2, z_2) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$).

9) Phương trình tham số của cung $\overset{\frown}{AB}$:

$$x = t,\ z = t,\ y = \sqrt{2}.\sqrt{Rt - t^2},\ 0 \le t \le R.$$

Do đó:

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} xydx + yzdy + zxdz = \int_0^R \left(2\sqrt{2}t.\sqrt{Rt - t^2} + t^2\right)dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^R \left\{(2t - R)\sqrt{Rt - t^2} + R\sqrt{Rt - t^2}\right\}dt + \int_0^R t^2 dt$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{2}{3}(Rt - t^2)^{3/2}\right)\Bigg|_0^R +$$

$$+ R\sqrt{2}\left(\frac{t - \frac{R}{2}}{2}\sqrt{Rt - t^2} + \frac{R^2}{8}\arcsin\frac{t - \frac{R}{2}}{\frac{R}{2}}\right)\Bigg|_0^R + \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^R$$

$$= R\sqrt{2}.\frac{R^2}{8}.\pi + \frac{R^3}{3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)R^3$$

10) Ta có $\cos(\bar{r}, \bar{n}) = \dfrac{\bar{r}.\bar{n}}{r}$, do đó:

$$G = \oint_C \frac{\bar{r}.\bar{n}}{r} ds = \oint_C \frac{(\xi - x)\cos\alpha' + (\eta - y)\cos\beta'}{r^2} ds$$

$$= \oint_C \frac{(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi}{r^2} \quad \text{với } \bar{n} = (\cos\alpha', \cos\beta').$$

Nếu $A(\xi, \eta) \not\subset C$ thì:

$$G = \int_C \frac{\partial}{\partial \xi}(\ln r)d\eta - \frac{\partial}{\partial \eta}(\ln r)d\xi$$

và áp dụng công thức Green:

$$G = \iint_D \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\ln r) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\ln r)\right] d\xi d\eta = 0$$

Nếu A nằm trong đường C, thì G không phụ thuộc đường lấy tích phân, do đó lấy C là đường tròn tâm A, bán kính ε thì:

$$G = \oint_C \frac{(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi}{r^2}$$

Đặt: $\xi - x = \varepsilon\cos\varphi$, $\eta - y = \varepsilon\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ thì:

$$G = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

39. Tìm hàm u biết:

1) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$

2) $du = \dfrac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$

3) $du = e^{x-y}[(1 + x + y)dx + (1 - x - y)dy]$

4) $du = \dfrac{(x - y - z)dx + (x - y - z)dy + (x + y + z)dz}{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}$

5) $du = (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$

6) $du = \dfrac{y(1 - x^2 + ay^2)dx + x(1 - y^2 + bx^2)dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$: Xác định a, b?

7) $du = \dfrac{(x - y)dx + (x + y)dy}{(x^2 + y^2)^n}$: Xác định n?

Bài giải

1) $P = 3x^2 - 2xy + y^2$, $Q = - x^2 + 2xy - 3y^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = - 2x + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Vậy Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm u(x, y) nào đó.

Theo (4.2), lấy $x_0 = y_0 = 0$ trong miền liên tục của P, Q.

Ta có:

$$u(x, y) = \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (- x^2 + 2xy - 3y^2)dy + C$$

$$= x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C.$$

2) $P = \dfrac{y}{3x^3 - 2xy + 3y^2}$, $Q = - \dfrac{x}{3x^3 - 2xy + 3y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{3(x^2 - y^2)}{3x^3 - 2xy + 3y^2},$$

do đó, lấy $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ($\in$ miền liên tục của P, Q).

Ta có:

$$u(x, y) = \int_1^x 0dx + \int_0^y \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2}dy + C.$$

$$u(x, y) = -x\int_0^y \frac{dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}dy = -\frac{x}{3}\int_0^y \frac{dy}{\left(y - \frac{x}{3}\right)^2 + \frac{8x^2}{9}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{3y - x}{2\sqrt{2}.x} + C.$$

3) $P = e^{x-y}(1 + x + y)$, $Q = e^{x-y}(1 - x - y)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = - e^{x-y}(x + y)$$

Lấy $x_0 = y_0 = 0$ thuộc miền liên tục của P, Q:

$$u(x, y) = \int_0^x e^x(1 + x)dx + \int_0^y e^{x-y}(1 - x - y)dy$$

$$= e^{x-y}(x + y) + C.$$

4) Theo (4.2), lấy $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 1$ trong miền liên tục của:

$$P = Q = \frac{(x + y - z)}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}, R = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$$

Rõ ràng P, Q, R thoả mãn (4.2).

Ta có:

$$u(x, y, z) = \int_0^x \frac{x - 1}{x^2 + 1}dx + \int_0^y \frac{x + y - 1}{(x + y)^2 + 1}dy + \int_1^z \frac{(x + y + z)dz}{(x + y)^2 + z^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \text{arctg}x\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}\ln|(x + y^2) + 1|\right] -$$

$$= \operatorname{arctg}(x + y)\Big|_0^x + \left(\frac{1}{2}\ln\left[(x + y)^2 + z^2\right] + \operatorname{arctg}\frac{z}{x + y}\right)\Bigg|_0^z$$

$$= \ln\sqrt{(x + y)^2 + z^2} + \operatorname{arctg}\frac{z}{x + y} + C.$$

5) Ở đây:

$$du = x^2dx + y^2dy + z^2dz - (yzdx + xzdy + xydz)$$

$$= d\left[\frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)\right] - d(xyz)$$

Vậy: $\quad u(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz + C.$

6) Ở đây: $\quad P = \dfrac{y - yx^2 + ay^3}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \; Q = \dfrac{x - xy^2 + bx^3}{(1 + x^2 + y^2)^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1 - x^4 + 3(a + 1)x^2y^2 + 3(a - 1)y^2 - ay^4}{(1 + x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 + 3(b - 1)x^2 - bx^4 + 3(b + 1)x^2y^2 - y^4}{(1 + x^2 + y^2)^3}$$

Theo (3.2): $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad$ khi $\begin{cases} 3(a + 1) = 3(b + 1) \\ 3(a - 1) = 0 \\ a = 1 \\ b - 1 = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

Do đó $a = b = 1$ thì $du = Pdx + Qdy$.

Lấy $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ trong miền liên tục của P, Q và các đạo hàm của nó, ta có:

$$u(x, y) = \int_0^x 0dx + \int_0^y \frac{x - xy^2 + x^3}{(1 + x^2 + y^2)^2}dy$$

$$= x(1 + x^2)\int_0^y \frac{dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} - x\int_0^y \frac{1}{2}y\frac{d(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$= x(1 + x^2)\left[\frac{y}{2(1 + x^2)(1 + x^2 + y^2)} + \frac{1}{2(1 + x^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{1 + x^2}}\right] +$$

$$+ \frac{xy}{2(1 + x^2 + y^2)} - \frac{x}{2\sqrt{1 + x^2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} + C$$

(với tích phân thứ nhất, ta đã áp dụng công thức:

$$I_2 = \int\frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C).$$

7) Ta có: $P = \dfrac{x - y}{(x^2 + y^2)^n}$, $Q = \dfrac{x + y}{(x^2 + y^2)^n}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) - 2ny(x - y)}{(x^2 + y^2)^{n+1}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2nx(x + y)}{(x^2 + y^2)^{n+1}}$$

Ta phải có điều kiện: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, hay:

$$2(x^2 + y^2) = 2n(x^2 + xy - xy + y^2) = 2n(x^2 + y^2)$$

suy ra 2 = 2n và n = 1.

Vậy khi n = 1:

$$du = \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

$$= d\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) + d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

Tích phân ta có:

$$u = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C.$$

40. Tính diện tích S (bằng tích phân đường) các hình giới hạn bởi:

1) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

2) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$

3) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

4) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{y}{b}\right)$, $x = 0$, $y = 0$, $(a, b > 0)$

Bài giải

1) Hình giới hạn bởi đường astroïde (bài 75. TI).

Theo (4. 1) và do đối xứng (hình 105):

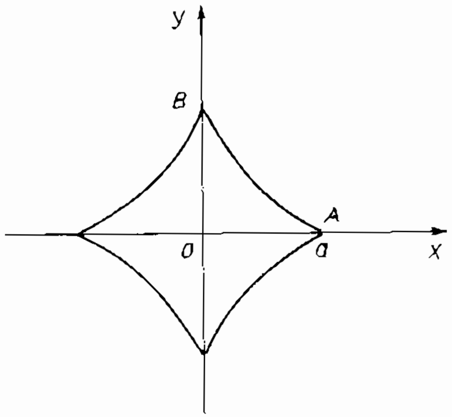
$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\left(4\int_{AB} xdy - ydx\right)$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\left[a\cos^3 t.3a\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)\right]dt$$

$$= 6a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = 6a^2(I_2 - I_4)$$

$$= 6a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16}\right)$$

$$= \frac{3a^2\pi}{8} \text{ (dvdt).}$$



Hình 105.

2) Hình giới hạn bởi đường Cardioïde (bài 75. T1).

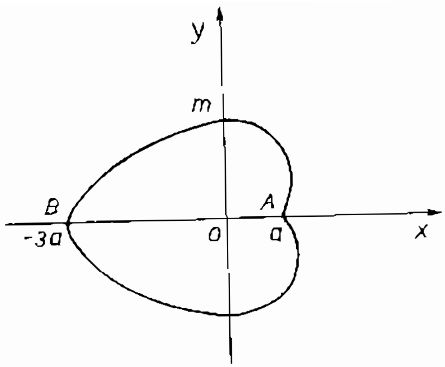
Ta có:

$$S = \frac{1}{2}\left(2\int_{\overset{\frown}{AmB}} xdy - ydx\right) \text{ (Hình 106)}$$

$$= \int_0^{\pi}\Big[(2a\cos t - a\cos 2t)(2a\cos t - 2a\cos 2t) -$$

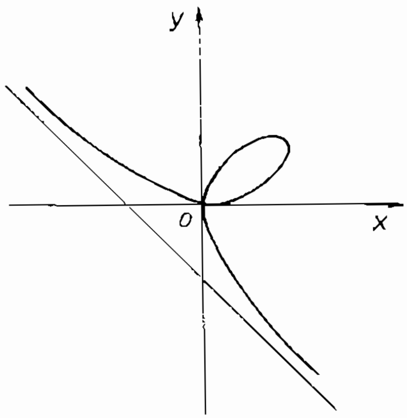
$$- (2a\sin t - a\sin 2t)(-2a\sin t - 2a\sin 2t)\Big]dt$$

$$= \int_0^{\pi}(6a^2 - 6a^2\cos t)dt = 6a^2\pi \text{ (dvdt).}$$



Hình 106.

3) Hình giới hạn bởi đường C (lá Descaste) (hình 107) (bài 75. II).



Hình 107.

Phương trình tham số của đường C:

$$x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3},\ 0 \le t < +\infty.$$

(Đặt y = tx, ta có phương trình này).

Vậy:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int \left[\frac{3at}{1+t^3}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)'_t - \frac{3at^2}{1+t^3}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)'_t\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0 \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt = \frac{3a^2}{2}\ \text{(dvdt)}.$$

4) Đưa phương trình của C về phương theo toạ độ độc cực suy rộng:

$$x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi.$$

Ta có: $r = \cos\varphi + \sin\varphi$.

Do đó phương trình tham số của C là:

$$x = a(\cos\varphi + \sin\varphi).\cos\varphi = \frac{a(\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

$$y = b(\cos\varphi + \sin\varphi).\cos\varphi = \frac{b(\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi)}{\cos\varphi}$$

với $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Mặt khác:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{b}{a}.\frac{1}{\cos^2\varphi}.d\varphi$$

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{ab}{2}(\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi)d\varphi,\ 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Do đó:

$$S = ab\left(\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi\right) = ab\left(\left.\frac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{ab}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\ (\text{dvdt}).$$

41. 1) Tính công của lực đàn hồi hướng về gốc tọa độ, độ lớn của nó tỉ lệ với khoảng cách từ chất điểm đến gốc tọa độ, nếu chất điểm vạch một cung ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

2) Tính công của lực $\vec{F}$, $|\vec{F}| = \frac{k}{r^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tác dụng vào một chất điểm M khối lượng m, chuyển động từ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ đến điểm $M_2(x_2, y_2, z_2)$. $(M_1, M_2 \neq (0,0,0))$

Bài giải

1) Theo giả thiết độ lớn của lực:

$$|\vec{F}| = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

k là hệ số tỷ lệ.

Do đó:

$$\vec{F} = k\sqrt{x^2 + y^2}.\cos\alpha'\,\vec{i} + k\sqrt{x^2 + y^2}.\sin\alpha'\,\vec{j}$$

$$= k\sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}\right)$$

$$= k(-x\vec{i} - y\vec{j})$$

Theo ý nghĩa cơ học, công T của lực phải tìm là:

$$T = -k\int_C xdx + ydy = -k\int_0^{\pi/2}[a\cos t(-a\sin t) + b\sin t.b\cos t]dt$$

$$= -k\int_0^{\pi/2}(b^2 - a^2)\sin t\cos t.dt = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)\ \text{(dvC)}$$

2) Theo giả thiết:

$$\vec{F} = |\vec{F}|\cos\alpha.\vec{i} + |\vec{F}|\cos\beta.\vec{j} + |\vec{F}|\cos\gamma.\vec{k}$$

$$= \frac{k}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right) = \frac{k}{r^3}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

Do đó:

$$T = k\int_{(M_1)}^{(M_2)}\frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= k\int_{(M_1)}^{(M_2)}\frac{1}{2}.\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -k\frac{1}{r}\Big|_{M_1}^{M_2}$$

$$= k\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$,

$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$

*42. 1) Xác định các hàm P(x, y), Q(x, y) hai lần khả vi liên tục (có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục) sao cho tích phân:

$$I = \oint_C P(x + \alpha, y + \beta)dx + Q(x + \alpha, y + \beta)dy$$

không phụ thuộc các hằng số α, β với C là đường khép kín bất kỳ.

2) Hàm khả vi f(x, y) phải thỏa mãn các điều kiện nào để $\int_{AB} f(x, y)(ydx + xdy)$ không phụ thuộc đường nối A, B.

3) Tìm $\lim_{d \to 0} \frac{1}{S}\oint_C \vec{F}\vec{n}ds$, S là diện tích miền D giới hạn bởi đường C bao quanh điểm (x_0, y_0), d là đường kính của miền D, $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của C. $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ khả vi liên tục trong D.

4) Chứng minh:

a) $\iint_D \Delta u dxdy = \oint_C \frac{\partial u}{\partial n}ds$, trong đó:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)\text{: vecteur pháp của C}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}.\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}.\cos\beta$$

b) $\iint_D v\Delta u dxdy = -\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + \oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds$

c) $\iint_D (v\Delta u - u\Delta v)dxdy = \oint_C \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds$

Bài giải

1) Giả sử P, Q thỏa mãn các điều kiện của bài toán thì:

$$\oint_C P(x + \alpha, y + \beta)dx + Q(x + \alpha, y + \beta)dy$$

$$= \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Do đó: $\quad I_1 = \oint_C P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$

với: $\quad P_1 = P(x + \alpha, y + \beta) - P(x, y);$

$\quad Q_1 = Q(x + \alpha, y + \beta) - Q(x, y)$

Theo (3.2): $\dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = \dfrac{\partial P_1}{\partial y}$ (1), đặt $u = x + \alpha$, $v = y + \beta$ thì (1) viết được:

$$\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$

hay
$$\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \qquad (2)$$

vế trái chỉ phụ thuộc u, v, vế phải chỉ phụ thuộc x, y, vậy để có (2) thì:

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C = \text{const}$$

hay:
$$\frac{\partial}{\partial x}(Q(x, y) - Cx) = \frac{\partial}{\partial y}(P(x, y)).$$

Do đó:
$$Q(x, y) - Cx = \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \varphi(y)$$

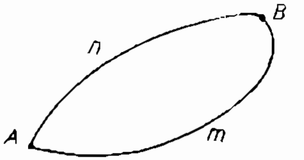
hay: $\quad Q(x, y) = Cx + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \varphi(y)\quad$ và $\quad P(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \Psi(x)$

với $\varphi(y)$, $\Psi(x)$ là hai hàm tuỳ ý của y và x và hai lần khả vi liên tục.

2) Theo giả thiết:

$$\int_{\widehat{AmB}} f(x, y)(ydx + xdy) = \int_{\widehat{AnB}} f(x, y)(ydx + xdy) \quad \text{(hình 108)}$$

hay: $$\oint_{\widehat{AmBnA}} f(x, y)(ydx + xdy) = 0$$



Hình 108.

Theo (3.2):

$$\frac{\partial}{\partial x}(xf(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(yf(x, y)) \quad (1)$$

Đó là điều kiện phải tìm.

3) Giả sử $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ và gọi α là góc giữa tiếp tuyến của C với trục Ox thì pháp tuyến $\vec{n} = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$ và:

$$\oint_C \vec{F}\vec{n}ds = \oint_C (P\sin\alpha - Q\cos\alpha)ds = \oint_C Pdy - Qdx$$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\oint_C Qdx + Pdy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$$

Theo giả thiết $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ liên tục, áp dụng định lý trung bình, ta có:

$$\lim_{d \to 0} \frac{1}{S}\oint_C \vec{F}\vec{n}ds = \lim_{d \to 0} \frac{1}{S}\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \lim_{d \to 0} \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial Q(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y}$$

4) a) Theo 3): $$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}ds = \oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)ds = \oint_C \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(- \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\right] dxdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy = \iint_D \Delta u dxdy$$

b) Theo 3):

$$\oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_C v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

$$= \iint_D v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy + \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

Từ đó suy ra công thức phải chứng minh.

(*Chú ý*: a) là trường hợp đặc biệt của b) khi $v = 1$.

c) Theo b):

$$\iint_D v\Delta u dxdy = - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy + \oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Thay $v\Delta u$ bởi $u\Delta v$ ta có:

$$\iint_D u\Delta v dxdy = - \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + \oint_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

Trừ vế với vế ta có:

$$\iint_D (v\Delta u - u\Delta v) dxdy = \oint_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

B. TÍCH PHÂN MẶT

§1. MẶT ĐỊNH HƯỚNG

Cho đường $C \subset R^3$:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta \qquad (1)$$

C gọi là *liên tục* nếu các hàm (1) là liên tục.

C gọi là *trơn* nếu tồn tại x'_t, y'_t, z'_t liên tục và $x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2 \neq 0$.

C gọi là *trơn từng phần* nếu nó là liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần trơn.

Cho $S \subset R^3$:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

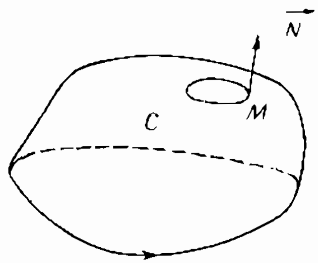
là một mặt liên tục (hàm (2) liên tục trên S).

S gọi là trơn nếu tồn tại F'_x, F'_y, F'_z liên tục và $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 \neq 0$ trên S. ($\forall M \in S$ đều là điểm bình thường).

S gọi là trơn từng phần nếu nó là liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần trơn bởi các đường trơn từng phần.

Mặt trơn S gọi là một mặt hai phía (hình 109) nếu di chuyển pháp tuyến $\vec{N}$ tại $M \in S$, đi theo một đường $L \subset S$.

không cắt biên giới của S, trở lại vị trí xuất phát $\vec{N}$ không đổi hướng. Nếu ngược lại thì S gọi là một mặt một phía.



Hình 109.

Mặt hai phía S gọi là

mặt định hướng được. S gọi là định hướng được từng phần nếu nó là liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần định hướng được.

Quy ước: Chiều dương trên C ứng với một phía đã chọn của S với pháp tuyến $\vec{N}$ là chiều từ chân đến đầu của một quan sát viên nằm theo C và nhìn thấy phía đã chọn của S ở bên trái (hình 109).

Mặt S: $z = f(x, y)$ là mặt hai phía: phía trên (dưới) ứng với pháp tuyến làm với Oz một góc nhọn (tù).

Mặt kín S (mặt cầu, ellipsoïde ...) là một mặt hai phía, phía trong có pháp tuyến hướng vào phía trong của thể tích giới hạn bởi S phía ngược lại gọi là phía ngoài của S.

§2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

2.1. Định nghĩa

- Tích phân mặt loại một của hàm $f(x, y, z)$ xác định trên mặt trơn S là:

$$I = \iint_S f(x, y, z)ds = \lim_{n\to\infty,\ \max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

với mọi cách chia mặt S thành n phần phân biệt ΔS_i, có diện tích ΔS_i $(i = 1, 2, \dots n)$ và với mọi cách chọn $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$, d_i là đường kính của ΔS_i, $i = 1, 2, \dots n$. Nếu S là mặt kín thì ký hiệu $\oiint_S$

Đặc biệt $f = 1$ thì:

$$I = \iint_S ds = \lim_{n\to\infty,\ \max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = S \text{ là diện tích của mặt S.}$$

Nếu coi $f(x, y, z) > 0$ là mật độ khối lượng (mặt) của mặt S thì khối lượng của mặt S là $M = \iint_S f(x, y, z)ds$.

Mọi hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt trơn S đều có tích phân hay khả tích trên mặt đó.

Mọi tính chất của tích phân mặt loại một đều tương tự như các tính chất của tích phân đường loại một.

2.2. Cách tính

Nếu mặt trơn S có phương trình $z = z(x, y)$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy là miền D thì:

$$I = \iint_S f(x, y, z)ds = \iint_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

§3. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

3.1. Định nghĩa

- Tích phân mặt loại hai của hàm:

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k},$$

hay của các hàm P(M), Q(M), R(M), $M = M(x, y, z)$ xác định trên mặt định hướng S lấy theo một phía đã chọn của S ứng với pháp tuyến $\vec{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ tại $M \in S$ là:

$$I = \iint_S P(M)dydz + Q(M)dzdx + R(M)dxdy = \iint_S \vec{F}.\vec{N}.ds$$

$$= \iint_S [P(M)\cos\alpha + Q(M)\cos\beta + R(M)\cos\gamma]ds.$$

Nếu S là mặt kín thì ký hiệu $\oiint_S$

Xét mặt S đặt trong một chất lỏng nào đó, $\vec{F}(M)$ là vecteur vận tốc của chất lỏng tại M thì lưu lượng của chất lỏng qua mặt S trong một đơn vị thời gian theo hướng của pháp tuyến $\vec{N}$ tại $M \in S$ là:

$$I = \iint_S \bar{F}.\bar{N}.ds = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

- Mọi hàm $\bar{F}(M)$ liên tục trên mặt định hướng S đều có tích phân hay khả tích trên mặt đó.

- Các tính chất của tích phân mặt loại hai đều tương tự như các tính chất của tích phân đường loại hai.

3.2. Cách tính

$$I = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

- Nếu mặt S có phương trình $z = z(x, y)$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy là miền D_1 thì:

$$I_1 = \iint_S R(x, y, z)dxdy = +\iint_{D_1} R[(x, y, z(x, y)]dxdy$$

$\left(-\iint_{D_1} R[(x, y, z(x, y)]dxdy\right)$ nếu lấy theo phía trên (dưới) của S.

Tương tự:

$$I_2 = \iint_S Q(x, y, z)dzdx = \iint_{D_2} Q[(x, y(x, z), z]dzdx$$

$$I_3 = \iint_S P(x, y, z)dydz = \iint_{D_3} R[(x(y, z), y, z]dydz$$

lấy theo phía trên của S đối với các mặt phẳng zOx, yOz:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Nếu S là mặt kín (định hướng).

S có hình chiếu trên mặt phẳng xOy là miền D và đường trên S có hình chiếu là biên giới của D, chia S làm 2 phần, phần trên (dưới) có phương trình $z = z_2(x, y)$, $(z = z_1(x, y))$ và tích phân lấy theo phía ngoài của S thì:

$$I_3 = \oiint_S R(x, y, z)dxdy$$

$$= \iint_D \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\}dxdy$$

Tương tự cho I_2, I_3 và $I = I_1 + I_2 + I_3$.

§4. CÔNG THỨC OSTROGRADSKI VÀ STOCKES

4.1. Công thức Ostrogradski

Nếu các hàm P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền compact V giới hạn bởi mặt kín, định hướng từng phần S thì ta có công thức Ostrogradski:

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

tích phân mặt lấy theo phía ngoài của S.

Đặt P = x, Q = y, R = z, ta có công thức tính thể tích của miền V bằng tích phân mặt:

$$V = \frac{1}{3}\oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

4.2. Công thức Stokes

Nếu các hàm P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên mặt định hướng từng phần S giới hạn bởi đường khép kín, trơn từng phần C thì ta có công thức Stokes:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$$

$$= \oint_C [P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma']ds\ .$$

Tích phân mặt lấy theo hướng đã chọn ứng với pháp tuyến $\bar{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ của S.

Tích phân đường lấy theo chiều dương với tiếp tuyến $\bar{\tau}(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ ứng với phía đã chọn của S.

Dạng khác:

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

hay ký hiệu hình thức:

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz .$$

§5. ÁP DỤNG

Cho mặt $S \subset \mathbb{R}^3$ có mật độ khối lượng (mặt) $\rho(x, y, z)$:

- Khối lượng **M** của S:

$$M = \iint_S \rho(x, y, z)dS$$

- Các moment tĩnh M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} của S đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx:

$$M_{xy} = \iint_S \rho(x, y, z)zdS ,$$

$$M_{yz} = \iint_S \rho(x, y, z)xdS ,$$

$$M_{zx} = \iint_S \rho(x, y, z)ydS$$

- Toạ độ trọng tâm x_G, y_G, z_G của S:

$$x_G = \frac{M_{yz}}{M},\ y_G = \frac{M_{zx}}{M},\ z_G = \frac{M_{xy}}{M}$$

- Các moment quán tính $I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, I_0, I_x, I_y, I_z$ đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx, gốc toạ độ O và các trục tọa độ Ox, Oy, Oz:

$$I_{xy} = \iint_S \rho(x, y, z)z^2 ds,\ I_{yz} = \iint_S \rho(x, y, z)x^2 ds;\ I_{zx} = \iint_S \rho(x, y, z)y^2 ds$$

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds,\ I_x = \iint_S \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)ds$$

$$I_y = \iint_S \rho(x, y, z)(x^2 + z^2)ds,\ I_z = \iint_S \rho(x, y, z)(x^2 + y^2)ds$$

BÀI TẬP

43. Tính các tích phân mặt loại 1:

1) $I = \iint_S (x^2 - y^2)ds$, S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

2) $I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$, S là phần mặt nón $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$, $0 \le z \le b$

3) $I = \iint_S (xy + yz + zx)ds$, S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ: $x^2 + y^2 = ax$.

4) $I = \oiint_S z\,ds$, S là mặt giới hạn của hình giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = x + a$, $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Bài giải

1) Do đối xứng nên:

$$I = 2\iint_{S_1}(x^2 + y^2)dS$$

S_1 là nửa trên của mặt cầu đã cho, phương trình của nó là:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Theo (2.2), ta tính:

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Do đó:

$$I = 2\iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy$$

$$= 2\iint_D \frac{a(x^2 + y^2)}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dxdy$$

D là hình chiếu của S_1 trên mặt phẳng xOy, đó là hình tròn:

$$x^2 + y^2 \le a^2$$

Chuyển sang tọa độ độc cực:

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{ar^3}{\sqrt{a^2 - r^2}}dr = 4\pi a\int_0^a \frac{r^3dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Đặt $r = a\sin t$, $0 \le r \le a \Leftrightarrow 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Do đó: $$I = 4\pi a\int_0^{\pi/2} \frac{a^3\sin^3 t\cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}} = 4\pi a^4\int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt$$

$$= 4\pi a^4 . I_3 = 4\pi a^4 . \frac{2}{3} = \frac{8\pi a^4}{3}$$

2) Phương trình của phần mặt nón là:

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ 0 \le z \le b.$$

Do đó:

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{b^2}{a^2}\frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

và: $$I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\cdot\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}dxdy\ .$$

D là hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy, đó là hình tròn:

$$x^2 + y^2 \le a^2$$

(thay z = b trong phương trình của mặt nón).

Chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\ .r.\ \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}dr = \frac{2\pi\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\cdot\int_0^a r^2dr$$

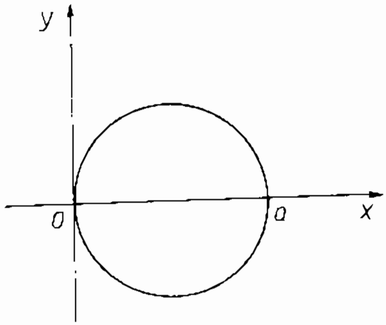
$$= \frac{2\pi a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{3}\ .$$

3) Hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy là miền D: $x^2 + y^2 \le ax$ (hình 110).

Ta có:

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ;\ z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ;$$

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$



Hình 110.

Do đó:

$$I = \sqrt{2}\iint\limits_D \left[(xy + \sqrt{x^2+y^2}(x+y)\right]dxdy$$

Chuyển sang tọa độ độc cực, ta có:

$$I = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi}\left[r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\right]rdr$$

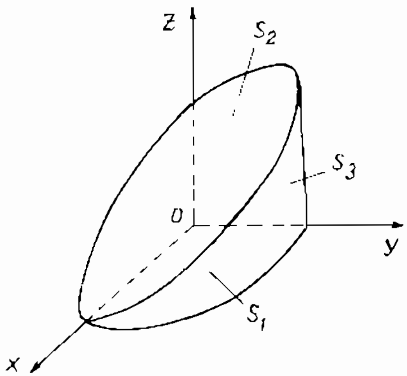
$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^3dr$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)a^4\cos^4\varphi d\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{2}a^4}{4}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\sin\varphi d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^4}{2} I_5 = \frac{\sqrt{2}a^4}{2}\frac{4.2}{5.3} = \frac{4\sqrt{2}a^4}{15}.$$

4) Mặt S gồm các mặt S_1, S_2, S_3 (hình 111).



Hình 111.

Do đó:

$$I = \oiint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}$$

Trên S_1: $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1$

Do đó: $$I_1 = \iint_{S_1} 0dxdy = 0.$$

- Trên S_2: $z = -x + 1$, $x^2 + y^2 \le 1$, $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Do đó:

$$I_2 = \iint_{S_2} zds = \iint_{x^2+y^2 \le 1} (-x+1)\sqrt{2}dxdy$$

Chuyển sang tọa độ độc cực, ta có:

$$I_2 = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (-r\cos\varphi + 1)rdr = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{r^3}{3}\cos\varphi + \frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos\varphi + \frac{1}{2}\right)d\varphi = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{2}.\pi.$$

- Trên S_3: $0 \le z \le -x + 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

S_3 đối xứng với mặt phẳng xOz do đó: $I_3 = \iint_{S_3} = 2\iint_{S_3'} zds$.

Đối với mặt phẳng xOz, phương trình của S_3' là $y = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2} + 0} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Hình chiếu của S_3' trên mặt phẳng xOz là miền D:

$$-1 \le x \le 1, 0 \le z \le -x + 1$$

Do đó:

$$I_3 = 2\iint_D \frac{zdxdz}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{-x+1} zdz = \int_{-1}^{1}\frac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

đặt $x = \sin t$, $-1 \le x \le 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$$I_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin t)^2\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t - 2\sin t)\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} (1 + \sin^2 t)\,dt = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Vậy: $$I = I_1 + I_2 + I_3 = \pi\left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right).$$

44. Tính các tích phân mặt loại hai:

1) $I = \iint\limits_S yz\,dydz - zx\,dzdx + xy\,dxdy$

S là phía ngoài của tứ diện: $x = y = z = 0$, $x + y + z = a$ $(a > 0)$.

2) $I = \oiint\limits_S z\,dxdy$

S là phía ngoài của mặt ellipsoïde: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

3) $I = \iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$

S là phía ngoài của:

a) Nửa hình cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$

b) Hình cầu: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = a^2$

4) $I = \iint\limits_S (y - z)\,dydz + (z - x)\,dzdx + (x - y)\,dxdy$

S là phía ngoài của mặt nón: $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$

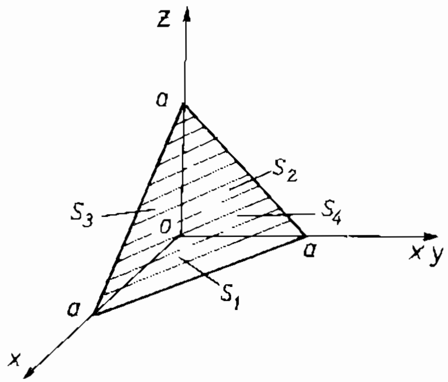
5) $F(t) = \iint\limits_S f(x, y, z)\,ds$

$$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ f = \begin{cases} x^2 + y^2 & : z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 & : z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Bài giải

1) Ta có (hình 112):

$$I = \iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4}$$



Hình 112.

Trên S_1: $z = 0$, $dz = 0$.

Phía ngoài của tứ diện ứng với phía dưới của S_1.

Do đó và theo (3.2):

$$I_1 = \iint_{S_1} xydxdy = -\int_0^a dx \int_0^{a-x} xydy = -\frac{1}{2}\int_0^a x(a-x)^2 dx = \frac{-a^4}{24}$$

Tương tự:

$$I_2 = \iint\limits_{S_2} = I_3 = \iint\limits_{S_3} = \frac{-a^4}{24}$$

Cũng theo (3.2):

$$I_4 = +\iint\limits_{S_4} = \iint\limits_{S_1} xydxdy + \iint\limits_{S_2} yzdydz + \iint\limits_{S_3} zxdzdx$$

S_1, S_2, S_3 là hình chiếu trên các mặt phẳng tọa độ xOy, yOz, zOx của S_4. Dấu + chỉ phía trên của mặt phẳng $x + y + z = a$, ứng với phía ngoài của tứ diện đối với các mặt phẳng tọa độ đó.

Theo trên thì: $I_4 = \dfrac{3a^4}{24}$.

Vậy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{-a^4}{24} - \frac{a^4}{24} - \frac{a^4}{24} + \frac{3a^4}{24} = 0.$$

2) Ta có phương trình của nửa trên (dưới) của ellipsoïde đã cho là $z = c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ $\left(z = -\ c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\right)$, các nửa này có hình chiếu trên mặt phẳng xOy là miền D: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Do đó, theo (1.2):

$$I = \iint\limits_D \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \left(-c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) \right) dxdy$$

$$= 2c \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy$$

Chuyển sang tọa độ dộc cực suy rộng: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, ta có:

$$I = 2c\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\, abr dr = 4\pi abc\left(-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{4\pi abc}{3}.$$

3) a) Phương trình của nửa mặt cầu đã cho đối với các mặt phẳng tọa độ xOy, yOz, zOx là:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ x = \pm\sqrt{a^2 - y^2 - z^2},\ y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$$

Do đó:

$$I_1 = \iint_S x^2 dydz$$

$$= \iint_{y^2+z^2 \le a^2, z \ge 0} \left[\left(\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\right)^2 - \left(-\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\right)^2\right] dydz$$

$$= 0$$

Tương tự: $I_2 = \iint_S y^2 dzdx = 0,$

$$I_3 = \iint_S z^2 dxdy = \iint_{x^2+y^2 \le a^2} \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)^2 dxdy$$

Chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = 2\pi\left(\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}$$

Vậy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 0 + \frac{\pi a^4}{2} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

b) Xét $I_1 = \iint\limits_S z^2 dxdy$

Mặt S gồm 2 phần:

S_1 (phía trên mặt phẳng z = 2): $z = 2 + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

S_2 (phía dưới mặt phẳng z = 2): $z = 2 - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

Hình chiếu của S_1, S_2 trên mặt phẳng xOy là miền D:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \le a^2$$

Theo (1.2):

$$I_1 = \iint\limits_D \left[\left(2 + \sqrt{a^2 - (x-1)^2 - (y-1)^2} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(2 - \sqrt{a^2 - (x-1)^2 - (y-1)^2} \right)^2 \right] dxdy$$

$$= 8 \iint\limits_D \sqrt{a^2 - (x - 1)^2 - (y - 1)^2} dxdy$$

Chuyển sang tọa độ độc cực:

$$x - 1 = r\cos\varphi,\ y - 1 = r\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

thì:

$$I_1 = 8 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr = 16\pi \left(-\frac{1}{3} \left(a^2 - r^2\right)^{3/2} \right)\Bigg|_0^a = \frac{16\pi}{3} a^3$$

Tương tự: $I_2 = \dfrac{8\pi}{3} a^3$, $I_3 = \dfrac{8\pi}{3} a^3$.

Vậy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{32}{3} \pi a^3$$

4) Xét $I_1 = \iint\limits_S (x - y)dxdy$, hình chiếu của mặt nón trên mặt phẳng xOy là miền D: $x^2 + y^2 \le h^2$, phía ngoài của mặt nón có pháp tuyến hợp với Oz một góc tù, do đó:

$$I_1 = -\iint\limits_S (x - y)dxdy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r(\cos\varphi - \sin\varphi) r dr$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sin\varphi) d\varphi \int_0^h r^2 dr = 0$$

Xét $I_2 = \iint\limits_S (z - x)dzdx$, đối với mặt phẳng xOy, S gồm 2 phần S_1: $y = \sqrt{z^2 - x^2}$, S_2: $y = -\sqrt{z^2 - x^2}$ cùng có hình chiếu trên mặt phẳng xOy là miền D giới hạn bởi: z = x, z = - x, z = h và có pháp tuyến ngược hướng nhau. Do đó $I_2 = 0$, tương tự $I_3 = 0$.

Vậy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

5) Ở đây: $z = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$

$$S = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{t^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{t^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

vì $f \ne 0$ trên mặt cầu S_1 giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nên:

$$F(t) = \iint\limits_{S_1} (x^2 + y^2) ds = |t| \iint\limits_D \frac{(x^2 + y^2)dxdy}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}$$

D là hình chiếu của phần mặt cầu S_t trên mặt phẳng xOy:

$$x^2 + y^2 \le \frac{t^2}{2}$$

(khử z từ: $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ và $z = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Chuyển sang tọa độ độc cực và do đối xứng, ta có:

$$F(t) = 4|t| \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{r^3 dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \pi|t| \int_0^{t^2/2} \frac{r^2 dr^2}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

$$= \pi|t| \int_0^{t^2/2} \frac{(t^2 - r^2 - t^2)d(t^2 - r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

$$= \pi|t| \left(\int_0^{t/\sqrt{2}} \sqrt{t^2 - r^2}\, d(t^2 - r^2) - t^2 \int_0^{t/\sqrt{2}} \frac{d(t^2 - r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right)$$

$$= \pi|t| \left[\frac{2}{3}(t^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{t/\sqrt{2}} - t^2 . 2\sqrt{t^2 - r^2} \Big|_0^{t/\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{6} t^4 (8 - 5\sqrt{2}) .$$

45. Áp dụng công thức Ostrogradski, tính:

1) $I = \oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, S: phía ngoài của hình lập phương: $0 \le x, y, z \le a$

2) $I = \oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, S: phía ngoài của tứ diện:

$$x + y + z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

3) $I = \oiint\limits_S (x - y + z)dydz + (y - z + x)dzdx + (z - x + y)dxdy$

S: phía ngoài của mặt: $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

4) $I = \iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)ds$

S: phía ngoài của phần mặt nón: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $(0 \le z \le b)$

5) $I(x, y, z) = \oiint\limits_S \cos(\bar{n}, \bar{e})dS$

S: mặt trơn kín, $\bar{e}$ = const, $\bar{n}$ là pháp tuyến ngoài của S.

6) $I(x, y, z) = \oiint\limits_S \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2}dS$ (tích phân Gauss)

S: trơn, kín giới hạn miền V; $\bar{n}$: pháp tuyến ngoài của S tại $(\xi, \eta, \zeta) \in S$, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, $(x, y, z) \in R^3$.

Bài giải

1) Các hàm $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$ là các hàm luỹ thừa nên chúng cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong hình lập phương $0 \le x, y, z \le a$, đó là một miền compact.

Do đó theo (4.1):

$$I = \oiint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = 2\iiint\limits_V (x + y + z)dV$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x + y + z)dz = 2\int_0^a dx\int_0^a \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^a dy$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2}\right)dy = 2\int_0^a \left(axy + a\frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2}y\right)\Bigg|_0^a dx$$

$$= 2\int_0^a (a^2x + a^3)dx = 2\left(\frac{a^2x^2}{2} + a^3x\right)\Big|_0^a = 3a^4.$$

2) Tương tự như 1):

$$I = \oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V (1 + 1 + 1)dV = 3V$$

V là thể tích tứ diện: $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Do đó: $I = 3.\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{a^3}{2}$.

3) Ở đây: $P = x - y + z$, $Q = y - z + x$, $R = z - x + y$

Do đó:

$$I = \iiint_V (1 + 1 + 1)dV = 3V$$

V: thể tích của miền giới hạn bởi S.

Dùng phép đổi biến tổng quát:

$$u = x - y + z,\ v = y - z + x,\ w = z - x + y.$$

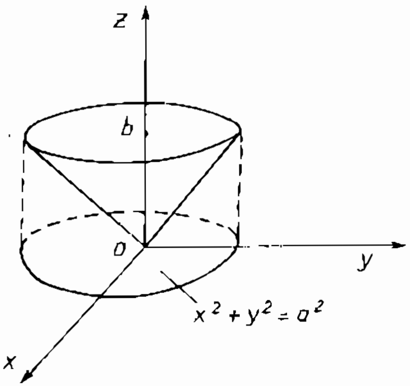
Ta có:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4}$$

Do đó:

$$I = \frac{3}{4}\iiint_{|u|+|v|+|w|\le 1} dudvdw = \frac{3}{4}.8\iiint_{\substack{u+v+w\le 1\\ u,v,w\ge 0}} dudvdw = 6.\frac{1}{6} = 1.$$

4) S: không kín, ta bổ xung thêm mặt S_1: $z = b$ để được mặt $S + S_1$ kín (hình 113).



Hình 113.

Áp dụng công thức Ostrogradski, đối với mặt kín $S + S_1$ ta có:

$$I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

$$= \oiint_{S+S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy - \iint_{S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

Trên S_1: $z = b$, $dz = 0$

nên:

$$\iint_{S_1} = \iint_{x^2+y^2 \le a^2} b^2 dxdy = b^2.a^2.\pi, \quad \oiint_{S+S_1} = 2\iiint_V (x + y + z)dV$$

Chuyển sang toạ độ trụ:

$$\iint\limits_{S+S_1} = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{\frac{b}{a}r}^{b} [r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z] dz$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[(br^2 - \frac{b}{a} r^3 (\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{b^2}{2} r - \frac{b^2}{2a^2} r^3 \right] dr$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^3 b}{12} (\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{a^2 b^2}{8} \right) d\varphi$$

$$= 0 + 2.\frac{a^2 b^2}{8}.2\pi = \frac{a^2 b^2}{2}.\pi$$

Vậy: $\quad I = \dfrac{a^2 b^2 \pi}{2} - a^2 b^2 \pi = \dfrac{-a^2 b^2 \pi}{2}.$

5) Giả sử $\bar{c} = (a, b, c) = \text{const}$, $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

$$\cos(\bar{c}, \bar{n}) = \frac{\bar{n}.\bar{c}}{|\bar{n}||\bar{c}|} = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$I(x, y, z) = \oiint\limits_S \cos(\bar{n}, \bar{c}) ds = \oiint\limits_S \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ds$$

$$= \oiint\limits_S \frac{adydz + bdzdx + cdxdy}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \right] dV$$

$$= \iiint_V 0.dV = 0.$$

6) Xét:

a) S không bao quanh điểm (x, y, z):

Ta có: $\cos(\bar{r}, \bar{n}) = \dfrac{\bar{r}.\bar{n}}{|\bar{r}||\bar{n}|}$

và: $I(x, y, z) = \oiint_S \left[\dfrac{\xi - x}{r^3}\cos\alpha + \dfrac{\eta - y}{r^3}\cos\beta + \dfrac{\zeta - z}{r^3}\cos\gamma\right]ds$

Áp dụng công thức Ostrogradski (các hàm thỏa mãn các điều kiện của công thức):

$$I(x, y, z) = \iiint_V \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2 + 3(\eta - y)^2 + 3(\zeta - z)^2}{r^5}\right)dv$$

$$= \iiint_V \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3}\right)dV = 0.$$

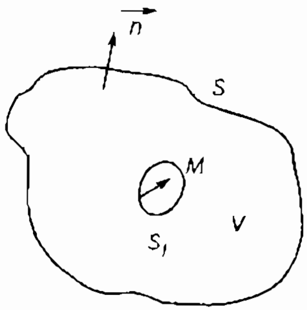
b) Mặt S bao quanh điểm (x, y, z) (hình 114).

Xét mặt cầu S_1 tâm M bán kính ε. Khi đó các hàm lại có đủ các điều kiện để áp dụng công thức Ostrogradski trong miền V_1 gồm giữa S và S_1.

$$\oiint_{S+S_1} \frac{\cos(\bar{r}.\bar{n})}{r^2}ds = \iiint_{V_1} 0.dV = 0$$

(theo a)

Do đó:



Hình 114.

$$I(x, y, z) = \oiint_{S} -\frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} ds = \oiint_{S_1} \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} ds$$

(Pháp tuyến ngoài của S và pháp tuyến trong của S_1 là ngược nhau, cùng là pháp tuyến ngoài của $S + S_1$).

Vậy:

$$I(x, y, z) = \oiint_{S_1} \frac{\bar{r}.\bar{n}}{r^3} ds = \oiint_{S_1} \frac{r}{r^3} ds = \frac{1}{\varepsilon^2} \oiint_{S_1} ds = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2$$

$$= 4\pi$$

(vì với S_1: $\bar{r} \,//\, \bar{n}$ và $r = \varepsilon$).

46. Áp dụng công thức Stockes, tính:

1) $I = \oint_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$

C là đường $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

2) $I = \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$

C là ellipse $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$, theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của Ox.

3) $I = \oint_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$

C là đường $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ $(0 < r < R, z > 0)$ theo chiều sao cho phần nhỏ nhất của phía ngoài của phần mặt cầu giới hạn bởi C ở bên trái.

4) $I = \oint_C y^2z^2dx + z^2x^2dy + x^2y^2dz$

C là đường khép kín: $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, theo chiều tăng của t.

Bài giải

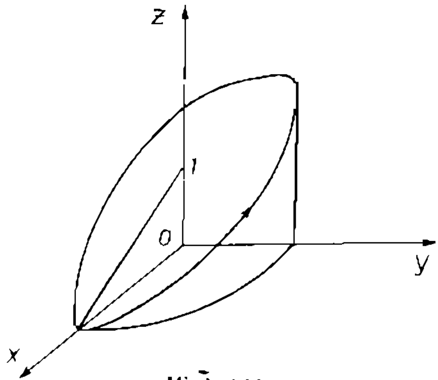
1) Áp dụng công thức Stockes đối với S là mặt tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ (ở đây $P = y + z$, $Q = z + x$, $R = x + y$ thỏa mãn các điều kiện của công thức). Theo (4.2):

$$I = \oint_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y + z & z + x & x + y \end{vmatrix} ds$$

$$= \iint_S \left[(1 - 1)\cos\alpha + (1 - 1)\cos\beta + (1 - 1)\cos\gamma\right] ds = 0.$$

2) Áp dụng công thức Stockes vào S là hình ellipse giới hạn bởi ellipse $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$ (hình 115).



Hình 115.

Ta có:

$$I = \oint_C (y - z)dx - (z - x)dy + (x - y)dz$$

$$= -2\iint_S dydz + dzdx + dxdy$$

$$= -2\left(\iint_{D_1} dydz + \iint_{D_2} dzdx + \iint_{D_3} dxdy\right)$$

D_3: hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy: $x^2 + y^2 \le 1$, do đó:

$$\iint_{D_3} dxdy = \pi.1^2 = \pi$$

D_2: hình chiếu của S trên mặt phẳng xOz: $D_2 = 0$, do đó:

$$\iint_{D_2} dzdx = 0.$$

D_1: hình chiếu của S trên mặt phẳng yOz: khử x từ $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$, ta có: D_3: $y^2 + (z - 1)^2 \le 1$, do đó:

$$\iint_{D_3} dydz = \pi.1^2 = \pi$$

Vậy:

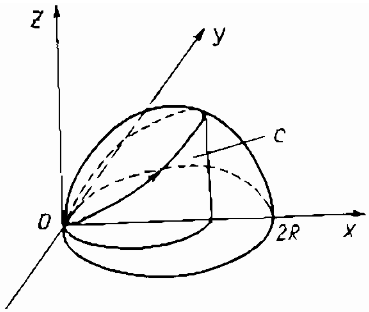
$$I = -2(\pi + 0 + \pi) = -4\pi.$$

3) Áp dụng công thức Stockes đối với phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2rx$ với $z \ge 0$ (hình 116).

Ta có:

$$I = \oint_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

$$= 2\iint_S \left[(y - z)\cos\alpha + (z - x)\cos\beta + (x - y)\cos\gamma\right]ds$$



Hình 116.

ở đây phương trình của S:

$$z = \sqrt{R^2 - (x - R)^2 - y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} = \frac{x - R}{z\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

$$\cos\beta = \frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} = \frac{y}{z\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

(lấy $\cos\gamma > 0$, vì pháp tuyến của phía trên của S làm với Oz một góc tù).

Do đó:

$$\cos\alpha = \frac{x - R}{z}\cos\gamma, \ \cos\beta = \frac{y}{z}\cos\gamma$$

và: $$I = 2\iint_S \left[\frac{(y - z)(x - R)}{z} + \frac{(z - x)y}{z} - x - y\right]\cos\gamma dS$$

$$= 2\iint_{x^2 + y^2 \le 2rx}\left[\frac{(y - z)(x - R) + (z - x)y}{z} + x - y\right]dxdy$$

$$= 2R\iint_{x^2 + y^2 \le 2rx}\left(1 - \frac{y}{z}\right)dxdy = 2\pi R r^2$$

(vì $\displaystyle\iint_{x^2 + y^2 \le 2rx}\frac{y}{z}dxdy = 0$ do hàm $\dfrac{y}{z}$ trên hai nửa hình tròn lấy các giá trị $\left|\dfrac{y}{z}\right|$ như nhau nhưng trái dấu nhau).

4) Khi $0 \le t \le \pi$ thì $M(x, y, z)$ vẽ đường C tại $A(a, a, a)$ đến $B(-a, a, -a)$ và khi $\pi \le t \le 2\pi$, M vẫn vẽ đường C nhưng theo hướng ngược lại từ $B(-a, a, -a)$ đến $A(a, a, a)$, do đó đường C là khép kín nhưng không giới hạn mặt S nào, do đó theo công thức Stockes: $I = 0$.

47. Tìm tọa độ trọng tâm của:

1) Phần mặt đồng chất ($\rho = 1$): $az = x^2 + y^2$ ($0 \le z \le a$)

2) Phần mặt đồng chất ($\rho = 1$): $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$.

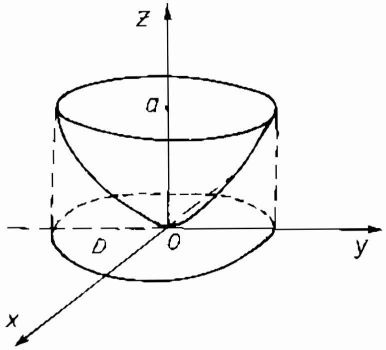
Tìm moment quán tính đối với gốc tọa độ của các mặt đồng chất ($\rho = 1$).

3) Mặt toàn phần: $-a \le x, y, z \le a$

4) Mặt toàn phần: $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$ của hình trụ.

Bài giải

1) Vì là mặt đồng chất và do đối xứng nên trọng tâm của nó phải ở trên trục Oz (hình 117) nghĩa là $x_G = y_G = 0$.



Hình 117.

Theo (5.1) ta có:

$$z_G = \frac{M_{xy}}{M}$$

với: $$M_{xy} = \iint_S z\,ds = \frac{1}{a^2}\iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)}\,dxdy,$$

với D: $x^2 + y^2 \le a^2$

Chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$M_{xy} = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\sqrt{a^2 + 4r^2}\,r\,dr$$

$$= \frac{\pi}{16a^2}\left\{\int_0^a \left[(a^2 + 4r^2)^{3/2} - a^2(a^2 + 4r^2)^{1/2}\right] d(a^2 + 4r^2)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{16a^2}\left[\frac{2}{5}(a^2 + 4r^2)^{5/2}\Big|_0^a - a^2.\frac{2}{3}(a^2 + 4r^2)^{3/2}\Big|_0^a\right]$$

$$= \frac{\pi}{60} a^3 (25\sqrt{5} + 1)$$

Tương tự:

$$M = \iint_S dS = \frac{1}{a} \iint_D \sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)}\,dxdy$$

$$= \frac{\pi a^2}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

Vậy:

$$z_G = \frac{\frac{\pi}{60} a^3 (25\sqrt{5} + 1)}{\frac{\pi a^2}{6}(5\sqrt{5} - 1)} = \frac{25\sqrt{5} + 1}{10(5\sqrt{5} - 1)}.a.$$

2) Tương tự như 1), ta có:

$$M = \iint_S dS = \iint_{x^2 + y^2 \le ax} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy$$

ở đây:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

Vậy:

$$M = \iint_{x^2 + y^2 \le ax} \sqrt{2}\,dxdy = \frac{\sqrt{2}.\pi.a^2}{4}$$

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_S x ds = \frac{4}{\sqrt{2}.\pi a^2} \iint_{x^2 + y^2 \le ax} x\sqrt{2}\,dxdy$$

$$= \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 dr = \frac{4a}{3\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{8a}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{8a}{3\pi} \cdot \frac{3.1}{4.2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_S y ds = \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 dr$$

$$= \frac{4a}{3\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin\varphi d\varphi = 0.$$

vì $\cos^3\varphi\sin\varphi$ là hàm lẻ

$$z_G = \frac{1}{M} \iint_S z ds = \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 dr$$

$$= \frac{4a}{3\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4a}{3\pi} . 2 . \frac{2}{3}$$

$$= \frac{16a}{9\pi}.$$

3) Theo (5.2) moment quán tính của mặt toàn phần của hình lập phương đã cho đối với gốc tọa độ là:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{6} \iint_{S_i} (x^2 + y^2 + z^2) ds.$$

S_i (i = 1, ... 6) là các mặt của khối lập phương

Xét S_1: $-a \le x \le a$, $-a \le y \le a$, $z = a$, $ds = dxdy$.

Do đó:

$$\iint_{S_1}(x^2 + y^2 + z^2)ds = \int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}(x^2 + y^2 + a^2)dy$$

$$= 4\int_0^a dx\int_0^a (x^2 + y^2 + a^2)dy$$

$$= 4\int_0^a \left(ax^2 + \frac{4}{3}a^3\right)dx = \frac{20a^4}{3}.$$

Do đối xứng nên:

$$I_0 = 6I_1 = \frac{6.20a^4}{3} = 40a^4.$$

5) Moment quán tính của mặt toàn phần S của hình trụ đối với gốc tọa độ là:

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)ds = \iint_{S_d} + \iint_{S_t} + \iint_{S_b}$$

S_d, S_t, S_b là đáy dưới, đáy trên và mặt bên của hình trụ.

Với S_d: $z = 0$, S_t: $z = H$, $ds = dxdy$, hình chiếu của chúng trên mặt phẳng xOy cùng là miền D: $x^2 + y^2 \le R^2$, do đó:

$$\iint_{S_d} + \iint_{S_t} = \iint_D \left[2(x^2 + y^2) + H^2\right]dxdy$$

$$= \pi R^2H^2 + 2\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

$$= \pi R^2H^2 + 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^3dr \text{ (tọa độ độc cực)}$$

$$= \pi R^2H^2 + \pi R^4$$

với S_b: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ đối với mặt phẳng xOz, $dS = \dfrac{R\,dx\,dz}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ và hình chiếu của S_b trên mặt phẳng xOz là D :

$$-R \le x \le R,\ 0 \le z \le H,$$

do đó:

$$\iint\limits_{S_b} = 2R\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}\int_0^H (R^2 + z^2)dz$$

$$= 2\pi RH\left(R + \frac{H^2}{3}\right)$$

Vậy:

$$I_0 = \pi R\left[R(R + H)^2 - \frac{2}{3}H^3\right].$$

C. CÁC YẾU TỐ GIẢI TÍCH VECTEUR

(LÝ THUYẾT TRƯỜNG)

§1. TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

1.1. Định nghĩa

- Trường vô hướng u là phần không gian $\Omega \subset R^3$ mà tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in \Omega$ có một đại lượng vô hướng $u = u(M)$.

$\Rightarrow$ u là hàm của M, gọi là hàm vô hướng của trường.

Quỹ tích các điểm $M \in \Omega$: $u(M) = C = \text{const}$ gọi là mặt đồng mức hay mặt đẳng trị của trường. Trường dừng: u không phụ thuộc thời gian, trường phẳng: $u = u(M)$, $M(x, y) \in R^2$.

1.2. Đạo hàm theo hướng

- Cho trường vô hướng Ω với hàm vô hướng $u = u(M)$ và vecteur $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Đạo hàm của u tại M theo hướng của $\vec{e}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\rho}$$

với $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M(x, y, z)$, $\overrightarrow{MM_1} \,//\, \vec{e}$.

$$x_1 = x + \rho\cos\alpha,\ y_1 = y + \rho\cos\beta,\ z_1 = z + \rho\cos\gamma,$$

$$\rho = \left|\overrightarrow{MM_1}\right|,$$

$$\vec{e} \,//\, Ox\ (Oy, Oz)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

- Nếu hàm $u = u(x, y, z)$ khả vi tại $M(x, y, z)$ thì:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

nếu $\vec{e}'$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì:

$$\frac{\partial u}{\partial e'} = -\frac{\partial u}{\partial e}$$

1.3. Gradient

Gradient của trường vô hướng $u = u(M)$ tại M:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \overrightarrow{\mathrm{grad}u}.\vec{e} = \mathrm{proj}_{\vec{e}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u)$$

$$\max\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right| = \left|\overrightarrow{\text{grad}\,u}\right|$$

Tính chất

1°. $\overrightarrow{\text{grad}}(C_1u + C_2v) = C_1\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u + C_2\,\overrightarrow{\text{grad}}\,v$

2°. $\overrightarrow{\text{grad}}(u.v) = u\,\overrightarrow{\text{grad}}\,v + v\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u$

3°. $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(u) = f'_u\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u$

4°. $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\overrightarrow{\text{grad}\,u} - u\overrightarrow{\text{grad}\,v}}{v^2}$

§2. TRƯỜNG VECTEUR

2.1. Định nghĩa

- Trường vecteur $\vec{F}$ là phần không gian Ω mà tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in \Omega$ có một vecteur $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{F}(M) \Rightarrow \vec{F} \text{ là hàm của } M$$

Trường dừng: $\vec{F}$ không phụ thuộc thời gian

Trường phẳng: $\vec{F} = \vec{F}(M)$, $M(x, y) \in R^2$.

- Đường dòng của trường vecteur $\vec{F}$ là mọi đường C mà tiếp tuyến với C tại $\forall M \in C$ đồng phương với vecteur của trường qua M

- Hệ phương trình xác định đường dòng của trường vecteur $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

2.2. Thông lượng và divergence

- Thông lượng Φ của trường vecteur $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ qua mặt S đặt trong trường theo hướng của pháp tuyến $\vec{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ của S là:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}.\vec{n}dS$$

$$= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

$$= \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

- Divergence của trường $\vec{F}$ tại M:

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- Công thức Ostrogradski dạng vecteur:

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{N}ds = \iiint_V \text{div}\vec{F}.dV$$

$\text{div}\vec{F}(M) > 0$ (< 0), M: điểm nguồn (rò).

Tính chất

1°. $\text{div}(C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2) = C_1\text{div}\vec{F}_1 + C_2\text{div}\vec{F}_2$

$C_1, C_2 = \text{const}.$

2°. $\text{div}(u\vec{F}) = \vec{F}\overrightarrow{\text{grad}u} + u\,\text{div}\vec{F}$

2.3. Lưu số (hoàn lưu) và rotation

- Lưu số của trường $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc đường C trong trường là:

$$= \int_C \vec{F}.\vec{\tau}.ds$$

$\vec{\tau}$ $(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$: vecteur tiếp tuyến với C.

- Rotation của trường $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ tại M trong trường là vecteur:

$$\text{rot}\,\vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$\text{rot}\,\vec{F}(M) > 0$ (< 0): M là điểm xoáy thuận (ngược).

- Dạng vecteur của công thức Stockes:

$$\oint_C \vec{F}.\vec{\tau}.ds = \iint_S \text{rot}\vec{F}.\vec{N}.ds$$

($\vec{N}$ vecteur pháp của mặt S)

- ***Tính chất***

1°. $\text{rot}(C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2) = C_1\text{rot}\,\vec{F}_1 + C_2\text{rot}\,\vec{F}_2$, $C_1, C_2 = \text{const}$.

2°. $\text{rot}(u\vec{F}) = u\,\text{rot}\,\vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}}\,u \wedge \vec{F}$

2.4. Các toán tử vi phân

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

với $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, gọi là các toán tử vi phân

- Toán tử **Nabla** hay toán tử Hamilton là vecteur tượng trưng:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

sao cho:

$$\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}$$

$$\vec{\nabla}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\vec{F}$$

- Toán tử Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

sao cho:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \vec{\nabla}^2 = \Delta$$

Tính chất

1°. $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} u) = \Delta u$

2^0. $\mathrm{rot}(\overrightarrow{\mathrm{grad} u}) = 0$

3^0. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{F}) = 0$.

2.5. Trường ống và trường thế

- Trường $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ gọi là một trường *ống* nếu:

$$\mathrm{div}\vec{F}(M) = 0$$

- Gọi là một trường *thế* nếu $\mathrm{rot}\vec{F}(M) = 0$, $\forall M \in$ trường.

- Gọi là một trường *điều hòa* nếu $\vec{F}$ vừa là trường ống vừa là trường thế.

- Nếu $\vec{F}$ là trường thế thì $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad} u}$. u gọi là *thế vô hướng* (hàm thế vị) của trường.

- Nếu $\vec{F}$ lại là trường ống, nghĩa là $\vec{F}$ là một trường điều hòa thì: $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad} u}) = \Delta u = 0$: thế vô hướng u của trường thỏa mãn phương trình Laplace, u cũng gọi là một hàm *điều hòa*.

BÀI TẬP

48. 1) Xác định mặt đồng mức (đẳng trị) của các trường vô hướng:

a) $u = f(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

b) $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $u = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2) Xác định đường dòng của các trường vecteurs:

a) $\vec{F}(M) = \vec{C} = \text{const}$

b) $\vec{F}(P) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$, $\omega = \text{const}$.

c) $\vec{F} = \dfrac{m\vec{r}}{r^3}$, $m = \text{const}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$

Bài giải

1) a) Theo định nghĩa, mặt đồng mức của trường vô hướng u là quỹ tích những điểm M(x, y, z) thỏa mãn phương trình:

$$u = f(\rho) = C = \text{const}.$$

Giả sử tồn tại f^{-1} thì $\rho = f^{-1}(c)$ hay $x^2 + y^2 + z^2 = [f^{-1}(c)]^2$.

Đó là những mặt cầu đồng mức tâm O.

b) Tương tự như a) đường đồng mức của trường là các đường tròn đồng tâm: $x^2 + y^2 = [f^{-1}(c)]^2$.

c) Từ $u = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C$ suy ra $\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin C$

hay $z^2 = \sin^2 C(x^2 + y^2)$ nghĩa là mặt đồng mức là các mặt nón cùng đỉnh O và trục là trục Oz.

2) a) Giả sử $\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k} = \text{const}$

Theo định nghĩa, đường dòng của trường thỏa mãn hệ:

$$\frac{dx}{C_x} = \frac{dy}{C_y} = \frac{dz}{C_z} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{C_x} = \frac{y}{C_y} = \frac{z}{C_z}$$

vậy đường dòng của trường là các đường thẳng song song với $\vec{C}$.

b) Tương tự như a), từ: $\dfrac{dx}{-\omega y} = \dfrac{dy}{\omega x}$ ta có $xdx + ydy = 0$ hay $x^2 + y^2 = C = \text{const}$.

Vậy đường dòng của trường là những đường tròn đồng tâm O.

c) Ta có:

$$\vec{F} = \frac{m(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{r^3}$$

Đường dòng của trường thỏa mãn hệ:

$$\frac{dx}{\dfrac{mx}{r^3}} = \frac{dy}{\dfrac{my}{r^3}} = \frac{dz}{\dfrac{mz}{r^3}}$$

hay: $$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Từ hệ này suy ra (lấy tích phân):

$$\frac{x}{k_1} = \frac{y}{k_2} = \frac{z}{k_3},\ k_1, k_2, k_3 = \text{const tuỳ ý}$$

Vậy các đường dòng của trường là một họ đường thẳng qua gốc O.

49. Tính đạo hàm theo hướng của:

1) $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ tại $M(x, y, z)$ theo hướng bán kính vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Khi nào thì: $\dfrac{\partial u}{\partial e} = \left|\overrightarrow{\text{grad}\,u}\right|$.

2) $u = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, theo hướng của $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ tại $M(x, y, z) \neq 0$. Khi nào thì: $\dfrac{\partial u}{\partial e} = 0$.

3) $u = xy - z^2$ tại $M(-9, 12, 10)$ theo hướng của phân giác thứ nhất của góc tọa độ xOy. Tính $\overrightarrow{\text{grad}\,u}$ tại M.

Bài giải

1) Ở đây $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$

Do đó theo (1.2) ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$= \frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$+ \frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2u}{r}$$

Mặt khác theo (1.3):

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = 2\left(\frac{x}{a^2}\vec{i} + \frac{y}{b^2}\vec{j} + \frac{z}{c^2}\vec{k}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}u}\right| = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

Do đó:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}u}\right|$$

hay:

$$2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

khi a = b = c.

2) Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\cos\gamma$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x\cos\alpha}{r} + \frac{y\cos\beta}{r} + \frac{z\cos\gamma}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\cos(\vec{r},\vec{e}).$$

Do đó $\frac{\partial u}{\partial e} = 0$ khi $\vec{e} \perp \vec{r}$.

3) Rõ ràng $\vec{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 0\vec{k}$ hướng theo phân giác thứ nhất của gốc tọa độ xOy, ta tính:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = y\big|_M = 12,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = x\big|_M = -9,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -2z\big|_M = -20$$

Do đó: $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{12\sqrt{2}}{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\overrightarrow{\text{grad}u}(M) = 12\vec{i} - 9\vec{j} - 20\vec{k}$$

50. 1) Cho $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại điểm nào:

a) $\overrightarrow{\text{grad}u} \perp Oz$

b) $\overrightarrow{\text{grad}\,u} = 0$

2) Cho $u = \ln\dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ tại điểm nào: $\left|\overrightarrow{\text{grad}\,u}\right| = 1$.

3) Tìm góc giữa $\overrightarrow{\text{grad}\,u}$, $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ tại các điểm A(1, 2, 2), B(- 3, 1, 0).

4) Chứng minh:

a) $\overrightarrow{\text{grad}}(C_1u + C_2v) = C_1\overrightarrow{\text{grad}\,u} + C_2\overrightarrow{\text{grad}\,v}$, $C_1, C_2 = \text{const}$.

b) $\overrightarrow{\text{grad}}(u.v) = u\,\overrightarrow{\text{grad}\,v} + v\,\overrightarrow{\text{grad}\,u}$

c) $\text{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\overrightarrow{\text{grad}\,u} - u\overrightarrow{\text{grad}\,v}}{v^2}$

Bài giải

1) Ta có:

$$\overrightarrow{\text{grad}\,u} = 3\left[(x^2 - yz)\vec{i} + (y^2 - xz)\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}\right]$$

a) $\overrightarrow{\text{grad}\,u} \perp Oz$ khi $z^2 - xy = 0$ nghĩa là tại các điểm trên mặt nón $z^2 = xy$

b) $\overrightarrow{\text{grad}\,u} = 0$ khi $x^2 - yz = 0$, $y^2 - xz = 0$, $z^2 - xy = 0$ nghĩa là tại các điểm trên đường thẳng $x = y = z$.

2) Ta có: $u = -\ln\dfrac{1}{r} = -\ln r$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r}r'_x = -\frac{(x-a)}{r^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(y-b)}{r^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-(z-c)}{r^2}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}u} = -\frac{1}{r^2}\left[(x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k}\right]$$

$$\left|\overrightarrow{\text{grad}u}\right| = \sqrt{\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^4}} = \frac{1}{r}$$

Vậy: $\left|\overrightarrow{\text{grad}u}\right| = 1$ khi $\frac{1}{r^2} = 1$ hay $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$

nghĩa là tại các điểm trên mặt cầu tâm (a, b, c), bán kính R = 1.

3) Ta có $u = \frac{x}{r^2}$ với $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{r^4},\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2xz}{r^4}$$

$r(A) = 3$, $r(B) = \sqrt{10}$.

Do đó:

$$\overrightarrow{\text{grad}u}(A) = \frac{1}{81}(7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}),$$

$$\overrightarrow{\text{grad}u}(B) = \frac{-2}{25}\vec{i} + \frac{3}{50}\vec{j} + 0\vec{k}$$

Vậy góc φ giữa $\overrightarrow{\text{grad}u}(A)$, $\overrightarrow{\text{grad}u}(B)$ được xác định bởi:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{\text{grad}u}(A).\overrightarrow{\text{grad}u}(B)}{\left|\overrightarrow{\text{grad}u}(A)\right|\left|\overrightarrow{\text{grad}u}(B)\right|}$$

$$= \frac{-4}{405} : \frac{1}{90} = \frac{-8}{9}.$$

4) a) Theo định nghĩa:

$\overrightarrow{\text{grad}}(C_1u + C_2v) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(C_1u + C_2v)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(C_1u + C_2v)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(C_1u + C_2v)\vec{k}$$

$$= C_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) + C_2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= C_1\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u + C_2\,\overrightarrow{\text{grad}}\,v.$$

b), c): chứng minh tương tự như a).

51. Tính thông lượng của các trường vecteurs:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua phía ngoài:

a) Mặt toàn phần

b) Mặt bên của hình trụ $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \le z \le H$

2) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ qua phía ngoài

a) Mặt bên S_b

b) Mặt toàn phần S của hình nón: $\dfrac{x^2 + y^2}{R^2} = \dfrac{z^2}{H^2}$, $0 \le z \le H$.

c) Phía ngoài của $x^2 + y^2 + z^2 = y$.

3) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ qua phía ngoài mặt cầu:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

4) $\vec F = \dfrac{m\vec r}{-r^3}$, m = const, $\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$, $r = |\vec r|$ qua phía ngoài của mặt kín S bao quanh gốc toạ độ.

Bài giải

1) a) Theo (2.2) thông lượng của trường qua mặt toàn phần S của hình trụ là:

$$\Phi = \oiint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$$

ở đây các hàm P = x, Q = y, R = z liên tục và có các đạo hàm liên tục $\forall(x, y, z) \subset R^3$, đặc biệt nó liên tục trong hình trụ trên, do đó áp dụng công thức Ostrogradski ta có:

$$\Phi = \iiint_V (1 + 1 + 1)dxdydz = 3V = 3.\pi R^2 H$$

b) Rõ ràng thông lượng qua mặt bên (xung quanh):

$$\Phi_b = \Phi - \Phi_d - \Phi_t,$$

Φ_d, Φ_t là thông lượng qua đáy dưới và đáy trên.

với đáy dưới: z = 0 và do đó: $\Phi_d = 0$.

với đáy trên: z = H, $\Phi_t = \displaystyle\iint_{x^2+y^2\le R^2} H\,dxdy = \pi R^2 H$

Vậy:

$$\Phi_b = 3\pi R^2 H - \pi R^2 H = 2\pi R^2 H$$

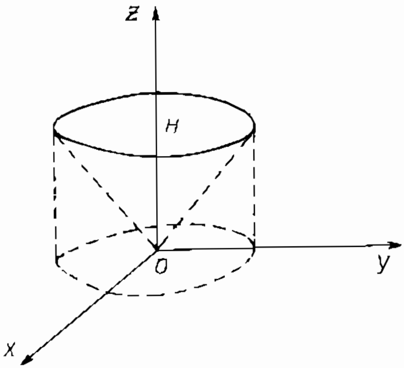
2) a) Theo (2.2) thông lượng Φ qua mặt bên S_b của hình nón là:

$$\Phi = \oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy \quad \text{(hình 118)}$$

Xét: $$I = \iint_{S_b} z^2 dxdy = -\iint_D \frac{H^2}{R^2}(x^2 + y^2)^{2/2} dxdy$$

với D: $x^2 + y^2 \le R^2$.

(- : vì pháp tuyến của phía ngoài của mặt nón làm với làm với Oz một góc tù).



Hình 118.

Chuyển sang tọa độ độc cực, ta có:

$$I_1 = \frac{-H^3}{R^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 . r . dr = -\frac{2}{5}\pi R^2 H^3$$

Xét: $I_2 = \iint_{S_k} x^3 dydz$,

đối với mặt phẳng yOz, phương trình của S_k:

$$x = \pm\sqrt{a^2 z^2 - y^2}\ ,\ a = \frac{R}{H}$$

hình chiếu của S_k trên mặt phẳng yOz là miền D_1:

$$0 \le z \le H,\ -az \le y \le az.$$

Do đó:

$$I_2 = 2\int_0^H dz \int_{-az}^{az} (a^2z^2 - y^2)^{3/2} dy$$

đặt $y = az\sin t$, $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$$I_2 = 2\int_0^H dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3z^3\cos^3 t . az\cos t dt$$

$$= 2a^4 \int_0^H z^4 dz . 2\int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt$$

$$= \frac{2a^4H^5}{5} . 2\left(\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi R^4 . H}{20}$$

Tương tự: $I_3 = \iint_{S_b} y^3 dzdx = \dfrac{3\pi R^4 . H}{20}$.

Vậy:

$$I = \iint_{S_b} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$$

$$= \frac{-2}{5}\pi R^2H^3 + 2.\frac{3\pi R^4 . H}{20}$$

$$= \frac{1}{10}\pi R^2H(3R^2 - 4H^2).$$

b) Thông lượng Φ của trường qua mặt toàn phần S của hình nón là:

$$\Phi = \oiint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$$

Các hàm $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$, cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong hình nón V đã cho, do đó áp dụng công thức Ostrogradski, ta có:

$$\Phi = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dV .$$

Chuyển sang tọa độ trụ, ta được:

$$\Phi = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{\frac{H}{R}r}^{H} (r^2 + z^2)dz$$

$$= 6\pi\int_0^R r\left(r^2 z + \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{H}{R}r}^{H} dr$$

$$= 6\pi\int_0^R \left(r^3 H + \frac{H^3}{3}r - \frac{H}{R}r^4 - \frac{H^3}{3R^3}r^4\right)dr$$

$$= \frac{3}{10}\pi R^2 H(R^2 + 2H^2) .$$

Chú ý: - Có thể tính thông lượng qua mặt bên: Φ_b bằng cách tính thông lượng qua mặt toàn phần: Φ_{tp} trừ đi thông lượng qua đáy: $\Phi_đ$, ở đây:

$$\Phi_đ = \iint_{x^2+y^2\le R^2} H^3 dxdy = H^3\pi R^2$$

Theo b):

$$\Phi_b = \frac{3}{10}\pi R^2 H(R^2 + 2H^2) - H^3\pi R^2$$

$$= \frac{1}{10}\pi R^2 H(3R^2 - 4H^2)$$

c) Thông lượng Φ của trường qua mặt ngoài (từ trong ra ngoài) của mặt cầu S: $x^2 + y^2 + z^2 = y$ là:

$$\Phi = \oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

Tương tự như b) áp dụng công thức Ostrogradski, ta có:

$$\Phi = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dV,\ V: x^2 + y^2 + z^2 \le y$$

Chuyển sang tọa độ cầu:

$$z = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ x = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ y = \rho\cos\theta,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Ta có phương trình của mặt cầu là:

$$\rho^2 = \rho\cos\theta \quad \text{hay} \quad \rho = \cos\theta \quad \text{và} \quad 0 \le \rho \le \cos\theta$$

Do đó:

$$\Phi = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{\cos\theta} \rho^4 d\rho = 6\pi \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^5\theta}{5} d(\cos\theta)$$

$$= 6\pi \cdot \frac{\cos^6\theta}{5.6}\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \frac{\pi}{5}.$$

3) Thông lượng Φ của trường qua phía ngoài mặt cầu S:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

là: $$\Phi = \oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

ở đây $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$ cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền V giới hạn bởi S, do đó áp dụng công thức Ostrogadski ta được:

$$\Phi = 2\iiint_V (x + y + z)dV.$$

Dùng biến đổi $x - a = X$, $y - b = Y$, $z - c = Z$ ta được:

$$\Phi = 2\int_{-R}^{R} dX \int_{-\sqrt{R^2 - X^2}}^{\sqrt{R^2 - X^2}} dY \int_{-\sqrt{R^2 - X^2 - Y^2}}^{\sqrt{R^2 - X^2 - Y^2}} (X + Y + Z)dZ + 2(a + b + c)\iiint_V dV$$

hay: $$\Phi = 2I + 2(a + b + c) - \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Với:

$$I = 4\int_{-R}^{R} dX \int_{-\sqrt{R^2 - X^2}}^{\sqrt{R^2 - X^2}} \left((X+Y)\sqrt{R^2 - X^2 - Y^2}\right) dY$$

$$= 8\int_{-R}^{R} dX \int_{0}^{\sqrt{R^2 - X^2}} X\sqrt{R^2 - X^2 - Y^2}\, dY$$

$$= 8\int_{-R}^{R} \frac{X\sqrt{R^2 - X^2}}{2}.\frac{\pi}{2} dX = 0 \text{ (hàm lẻ)}.$$

Vậy: $$\Phi = \frac{8}{3}(a + b + c).\pi R^3$$

Chú ý, khi tính I ta đã dùng công thức:

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = \int_{0}^{c} [f(x) + f(-x)]dx.$$

4) Theo định nghĩa, thông lượng Φ của trường: $\bar{F} = \frac{m\bar{r}}{r^3} = \frac{m}{r^3}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})$ qua mặt trơn, kín S bao quanh gốc tọa độ O là:

$$\Phi = \oiint_S \bar{F}.d\bar{S} = m\iint_S \left[\frac{x}{r^3}\cos\alpha + \frac{y}{r^3}\cos\beta + \frac{z}{r^3}\cos\gamma\right] dS$$

$$= m\oiint_S \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} ds = 4\pi m.$$

(Theo 6) bài 45: Tích phân Gauss).

52. Tính lưu số của các trường vecteur:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ trên đường C:

$x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$ theo chiều tăng của t.

2) $\vec{F} = (y - z)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ dọc theo cung bé nhất C của đường tròn lớn nhất của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ nối các điểm M(3, 4, 0), N(0, 0, 5).

3) $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$ dọc theo đường C:

a) không bao quanh Oz; b) bao quanh Oz

4) $\vec{F} = x^2y^2\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ dọc theo đường tròn: $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ giới hạn mặt cầu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ theo chiều dương.

Bài giải

1) Theo định nghĩa, lưu số của trường dọc theo C:

$$\mathcal{C} = \int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

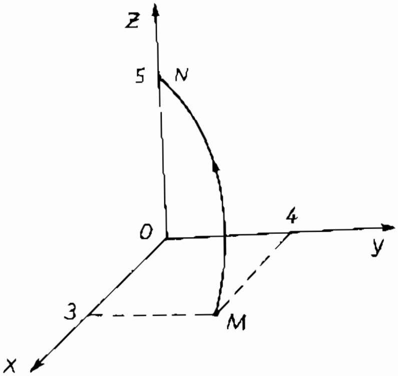
$$= \int_0^{2\pi} [a\cos t(-a\sin t) + a\sin t(a\cos t) + b.t.b]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} b^2 t\,dt = b^2\frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2 b^2.$$

2) Phương trình tham số của C (hình 119).

$$x = 3\cos\varphi,\ y = 4\cos\varphi,\ z = 5\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Do đó lưu số của trường dọc theo C là:



Hình 119.

$$= \int_0^{\pi/2} \left[(-4\cos\varphi + 5\sin\varphi)(-3\sin\varphi) + (5\sin\varphi + 3\sin\varphi)(-4\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + (3\cos\varphi + 4\cos\varphi).5\cos\varphi\right] d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} (35\cos^2\varphi - 24\sin\varphi\cos\varphi)\, d\varphi = -12.$$

3) a) Ta có: $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{arctg}\,\frac{y}{x}\right) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2} + 0\vec{k}$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2} & \dfrac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = 0,\ (x, y) \neq 0.$$

Do đó khi C không bao quanh trục Oz, giả thiết C là biên của mặt S thì $\vec{F}$ là liên tục và có các đạo hàm liên tục trên S + C, áp dụng công thức Stockes, ta có lưu số:

$$\mathcal{C} = \oint_C \vec{F}.\vec{\tau}dS = \iint_S \mathrm{rot}\vec{F}.\vec{n}.dS = 0$$

$\vec{\tau}$ là vecteur tiếp tuyến đơn vị của C

$\vec{n}$ là vecteur pháp của mặt S theo phía ứng với chiều dương trên C.

b) Khi C bao quanh trục Oz, ta có:

$$\mathcal{C} = \oint_C \vec{F}.\vec{\tau}ds = \oint_C \overline{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right).\vec{\tau}ds$$

$$= \oint_C \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)ds = \mathrm{arctg}\left.\frac{y}{x}\right|_C$$

$$= \varphi|_C = 2\pi n,$$

n là số vòng đi theo C, (ta đã sử dụng công thức $\frac{\partial u}{\partial \vec{c}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}u}.\vec{c}$. với $\frac{d}{dc} = \frac{d}{ds}$).

4) Ta tính:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = -3x^2y^2\vec{k}.$$

Áp dụng công thức Stockes đối với nửa mặt cầu S:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

bị căng bởi đường tròn C: $x^2 + y^2 = R^2$ $(z = 0)$, ta có lưu số:

$$I = \oint_C \vec{F}.\vec{\tau}ds = -\iint_S 3x^2y^2\,dxdy$$

$$= -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2\cos^2\varphi . r^2\sin^2\varphi\, r dr$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^R r^5 dr$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}(1-\cos 4\varphi)d\varphi.\frac{R^6}{6}$$

$$= -3.\frac{2\pi}{8}.\frac{R^6}{6} = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

53. Các trường sau đây là trường ống hay trường thế, nếu là trường thế thì tìm hàm thế vị của trường:

1) $\vec{F} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$

2) $\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$

3) $\vec{F} = yz(2x + y + z)\vec{i} + zx(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x - y + 2z)\vec{k}$

4) $\vec{F} = f(r).\vec{r}$, (lực xuyên tâm), $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, f: hàm khả vi

Bài giải

Theo định nghĩa (2.5) ta phải tính $\mathrm{div}\vec{F}$ hoặc $\mathrm{rot}\vec{F}$.

1) $\mathrm{div}\vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(5x^2y - 4xy) + \dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2y) = 10xy - 2$

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 5x^2y - 4xy & 3x^2 - 2y & 0 \end{vmatrix} = (5x^2 - 10x)\vec{k}$$

Ta thấy $\vec{F}$ xác định $\forall(x, y) \in R^2$, div$\vec{F}$ và rot$\vec{F}$ không bằng không tại $\forall(x, y) \in R^2$, do đó $\vec{F}$ không phải là trường ống và cũng không phải là trường thế.

2) $\operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(y + z) + \dfrac{\partial}{\partial y}(z + x) + \dfrac{\partial}{\partial z}(x + y) = 0$

Vậy $\vec{F}$ là trường ống $\forall(x, y, z) \in R^3$.

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y + z & z + x & x + y \end{vmatrix} = (1 - 1)\vec{i} + (1 - 1)\vec{j} + (1 - 1)\vec{k} = 0$$

Vậy $\vec{F}$ là trường thế $\forall(x, y, z) \in R^3$.

Theo (2.5) hàm thế của trường được xác định từ $\overrightarrow{\text{grad}u} = \vec{F}$, hay:

$$\begin{aligned} du &= (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz \\ &= ydx + xdy + zdx + xdz + ydz + zdy \\ &= d(xy) + d(zx) + d(yz) \end{aligned}$$

do đó:

$$u = xy + xz + yz + C.$$

3) $\vec{F} = yz(2x + y + z)\vec{i} + zx(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$

xác định $\forall(x, y, z) \in R^3$.

$\operatorname{div}\vec{F} = 2yz + 2zx + 2xy$ không triệt tiêu tại $\forall(x, y, z) \in R^3$.

Vậy $\vec{F}$ không phải là trường ống.

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz(2x + y + z) & zx(x + 2y + z) & xy(x + y + 2z) \end{vmatrix}$$

$$= [x(x + 2y + 2z) - x(x + 2y + 2z)]\,\vec{i} + [y(2x + y + 2z) -$$

$$- y(2x + y + 2z)]\,\vec{j} + [z(2x + 2y + z) - z(2x + 2y + z)]\,\vec{k}$$

$$= 0 \ , \ \forall x, y, z \in R^3$$

Vậy $\vec{F}$ là trường thế.

Hàm thế u được xác định từ:

$$du = yz(2x + y + z)dx + zx(x + 2y + z)dy + xy(x + y + 2z)dz$$

Do đó, theo (4.2):

$$u = \int_0^x 0dx + \int_0^y 0dy + \int_0^z xy(x + y + 2z)dz$$

$$= xyz^2 + xy^2z + x^2yz + C$$

$$= xyz(x + y + z) + C.$$

(lấy $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ trong miền xác định của $\vec{F}$).

4) Ta có: $\vec{F} = f(r).(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$$\text{div}\vec{F} = f(r) + f'(r)\frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r)\frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r)\frac{z^2}{r}$$

$$= 3f(r) + rf'(r)$$

$$\text{div}\vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3f(r) + rf'(r) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}dr$$

$$\Rightarrow \quad \ln f(r) = -3\ln r + \ln C$$

$$f(r) = \frac{C}{r^3}$$

Vậy $\vec{F}$ là trường ống khi $f(r) = \dfrac{C}{r^3}$.

Xét:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge f(r)\,\vec{r} = f(r)(\vec{\nabla} \wedge \vec{r}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}f(r) \wedge \vec{r}$$

Nhưng: $\vec{\nabla} \wedge \vec{r} = \operatorname{rot}\vec{r} = 0$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}}f(r) = \dfrac{f'(r)}{r}.\vec{r}$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}f(r) \wedge \vec{r} = \frac{f'(r)}{r}.\vec{r} \wedge \vec{r} = 0$$

Vậy $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ và $\vec{F}$ là trường thế. Hàm thế u của trường được xác định từ:

$$du = f(r)(xdx + ydy + zdz)$$

$$= f(r).\frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \frac{1}{2}f(r)dr^2 = f(r)dr$$

Do đó: $$u = \int_{r_0}^{r} f(r)dr .$$

Đặc biệt: $f(r) = \dfrac{C}{r^3}$ thì:

$$u = \int_{r_0}^{r} \frac{C}{r^3}dr = -\frac{C}{2r^2} + \overline{C},$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \neq 0.$$

54. Chứng minh các công thức: (với giả thiết tồn tại các đạo hàm trong miền được xét):

1) $\operatorname{div}\left(C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2\right) = C_1\operatorname{div}\vec{F}_1 + C_2\operatorname{div}\vec{F}_2$, $C_1, C_2 = \text{const}$.

2) $\operatorname{div}\left(u\vec{C}\right) = \vec{C}.\overrightarrow{\operatorname{grad}u}$, $\vec{C} = \text{const}$

3) $\operatorname{div}\left(u\vec{F}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{\operatorname{grad}u} + u\operatorname{div}\vec{F}$

4) $\operatorname{rot}\left(C_1\vec{F}_1 + C_2\vec{F}_2\right) = C_1\operatorname{rot}\vec{F}_1 + C_2\operatorname{rot}\vec{F}_2$, $C_1, C_2 = \text{const}$.

5) $\operatorname{rot}\left(u\vec{C}\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}u} \wedge \vec{C}$, $\vec{C} = \text{const}$

6) $\operatorname{rot}\left(u\vec{F}\right) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \overrightarrow{\operatorname{grad}u} \wedge \vec{F}$

7) $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}u}\right) = \Delta u$ $\left(\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$

8) $\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}u}\right) = 0$

9) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$

10) $\vec{\nabla}^2(u, v) = u\vec{\nabla}^2 v + v\vec{\nabla}^2 u + 2\,\vec{\nabla}u\,.\vec{\nabla}v$ $(\vec{\nabla}^2 = \Delta)$

11) $\operatorname{div}(u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}u}) = \left|\overrightarrow{\operatorname{grad}u}\right|^2 + u\Delta u$

12) $\operatorname{div}(u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}v}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}u}.\overrightarrow{\operatorname{grad}v} + u\Delta v$

*13) $\operatorname{div}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = \vec{F}_2\operatorname{rot}\vec{F}_1 - \vec{F}_1\operatorname{rot}\vec{F}_2$

*14) $\operatorname{rot}(\vec{C} \wedge \vec{F}) = \vec{C}\operatorname{div}\vec{F} - (\vec{C}, \vec{\nabla})\vec{F}$, $\vec{C} = \text{const}$

*15) $\operatorname{rot}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = (\vec{F}_2, \vec{\nabla})\vec{F}_1 - (\vec{F}_1, \vec{\nabla})\vec{F}_2 + \vec{F}_1\operatorname{div}\vec{F}_2 - \vec{F}_2\operatorname{div}\vec{F}_1$

Bài giải

Ta chỉ chứng minh một số công thức, các công thức khác chứng minh tương tự.

3) Giả sử $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ thì $u\vec{F} = uP\vec{i} + uQ\vec{j} + uR\vec{k}$

Theo định nghĩa:

$$\operatorname{div}(u\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(uP) + \frac{\partial}{\partial y}(uQ) + \frac{\partial}{\partial z}(uR)$$

$$= u\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= u\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}.\overrightarrow{\operatorname{grad}u} \ \left(\text{vì } \overrightarrow{\operatorname{grad}u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)$$

Có thể chứng minh cách khác như sau:

$$\operatorname{div}(u\vec{F}) = \vec{\nabla}(u\vec{F}),$$

toán tử $\vec{\nabla}$ là toán tử đạo hàm, áp dụng vào tích $u.\vec{F}$:

$$\operatorname{div}(u\vec{F}) = \vec{\nabla}(u\vec{F}) = \vec{\nabla}u.\vec{F} + u\vec{\nabla}\vec{F}$$

$$= \vec{F}.\overrightarrow{\operatorname{grad}u} + u\operatorname{div}\vec{F} \ \text{(theo định nghĩa).}$$

6) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge (u\vec{F})$, tương tự như 3):

$$\operatorname{rot}(u\vec{F}) = \vec{\nabla}u \wedge \vec{F} + u\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

$$= \overrightarrow{\operatorname{grad}u} \wedge \vec{F} + u\operatorname{rot}\vec{F} \ \text{(theo định nghĩa)}$$

7) $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}u) = \vec{\nabla}^2 u = \Delta u.$

8) $\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}u}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}u) = 0$ (tích có hướng 2 vecteur bằng nhau)

9) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}, \vec{F})$ (tích hỗn hợp có 2 vecteur bằng nhau).

10) $\vec{\nabla}^2(u, v) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}(u, v)$

$$= \vec{\nabla}(u\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}u) = (\vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v) + u\vec{\nabla}^2 v + \vec{\nabla}v\ \vec{\nabla}u + v\vec{\nabla}^2 u$$

$$= 2\vec{\nabla}u\,.\,\vec{\nabla}v + u\vec{\nabla}^2 v + v\vec{\nabla}^2 u \ (\vec{\nabla}^2 = \Delta).$$

12) $\operatorname{div}(u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}v}) = \vec{\nabla}(u\vec{\nabla}v) = \vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v + u\vec{\nabla}^2 v$

$$= \overrightarrow{\operatorname{grad}u}.\overrightarrow{\operatorname{grad}v} + u\Delta v$$

v = u, ta có 11).

13) Ký hiệu $\vec{F}^c$: chỉ toán tử $\vec{\nabla}$ không tác dụng vào $\vec{F}$

Ta có:

$$\operatorname{div}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = \vec{\nabla}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2)$$

$$= (\vec{\nabla}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) = (\vec{\nabla}, \vec{F}_1, \vec{F}_2^c) + (\vec{\nabla}, \vec{F}_1^c, \vec{F}_2)$$

$$= (\vec{F}_2^c, \vec{\nabla}, \vec{F}_1) + (\vec{F}_1^c, \vec{F}_2, \vec{\nabla})$$

$$= \vec{F}_2.(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_1) - (\vec{F}_1(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_2)$$

$$= \vec{F}_2\operatorname{rot}\vec{F}_1 - \vec{F}_1\operatorname{rot}\vec{F}_2$$

(Ta đã sử dụng tính chất của tích hỗn hợp $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$).

15) Ta có:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2)$$

$$= \vec{\nabla} \wedge (\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2^c) + \vec{\nabla} \wedge (\vec{F}_1^c \wedge \vec{F}_2)$$

$\vec{F}^c$ chỉ: toán tử $\vec{\nabla}$ không tác dụng vào $\vec{F}$.

Bây giờ áp dụng tính chất của tích có hướng của 3 vecteur:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

ta có:

$$\text{rot}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = \vec{F}_1(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2) - \vec{F}_2(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1) + \vec{F}_1(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2) - \vec{F}_2(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1)$$

$$= (\vec{F}_2 \cdot \vec{\nabla})\vec{F}_1) - \vec{F}_2 \cdot \text{div}\vec{F}_1) + \vec{F}_1 \cdot \text{div}\vec{F}_2 - (\vec{F}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{F}_2$$

Trường hợp $\vec{F}_1 = \vec{C} = \text{const}$, $\vec{F}_2 = \vec{F}$ ta có 14).

PHỤ CHƯƠNG

CÁC ĐỀ GIẢI TÍCH HK II 2004 - 2008 (ĐHBK)

ĐỀ 1

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K49 (Thời gian làm bài 90')

Câu I. 1) Lập phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

$x = e^t\cos t$, $z = t - 1$ tại điểm ứng với $t = 0$

2) Cho $U = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ và 2 điểm: $A(1; -1; 0)$, $B(2; 1; -2)$. Tính đạo hàm của U tại điểm B theo hướng $\overrightarrow{AB}$. Tìm $\max\left|\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}(B)\right|$.

Câu II. 1) Tính $\iint\limits_D e^{|x-y|}dxdy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

2) Tính $\iiint\limits_V \dfrac{2x^2 + z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$, $V = \{(x, y, z.) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

Câu III. 1) Dùng tích phân đường tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi các đường: $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e$.

2) Tính $\int\limits_{ABC} x\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}dx + \mathrm{arc\,cotg}\dfrac{y}{x}dy$, với ABC là đường gấp khúc $A(1; 1)$, $B(2; 1)$, $C(2; 2)$.

Câu IV. 1) Tính $\iint\limits_S x^2(y^2 + z^2)dydx$, S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $x \le 0$, hướng của S là phía ngoài mặt cầu.

2) Chứng minh rằng với mọi a < 3 ta có $\int_0^{+\infty}\frac{2^{ax}-1}{x.2^{3x}}dx + \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{ax}}{x.e^{3x}}dx = 0.$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) $x' = e^t.(\cos t - \sin t)$, $y' = e^t.(\sin t + \cos t)$, $z' = 1$

Tại $t = 0 \Rightarrow$ điểm $M_0(1; 0; -1)$, vecteur tiếp tuyến $\vec{v}_M = (1; 1; 1)$ (0,5đ)

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$; phương trình pháp diện:

$x + y + z = 0$ (0,5đ)

2) $U'_x = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $U'_y = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$;

$U'_z = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

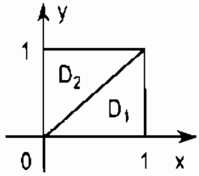
$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}U(B) = \left(\frac{-2}{27}; \frac{-1}{27}; \frac{2}{27}\right)$ (0,5đ)

$\overrightarrow{AB} = (1; 2; -2) \Rightarrow \vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(B) = \frac{-2}{27}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{27}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{27}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{81}$ (0,5đ)

$\text{Max}\frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(B) = |\overrightarrow{\text{grad}}U(B)| = \frac{1}{27}\sqrt{2^2+1^2+2^2} = \frac{1}{9}$ (0,5đ)

Câu II. (2,5đ)



1) $D_1 = \{(x, y) \in D, x \geq y\}$, $D_2 = \{x, y) \in D, x \leq y\}$

$\iint_{D_1} e^{|x-y|}dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x e^x.e^{-y}dy$

$= \int_0^1 e^x\left(-e^{-y}\Big|_0^x\right)dx = \int_0^1 (e^x - 1)\,dx = e - 2$ (0,5đ)

Tương tự $\iint\limits_{D_2} e^{|x-y|}dxdy = e - 2 \Rightarrow I = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} = 2.(e-2)$ (0,5đ)

Chú ý: Lấy đối xứng qua đường y = x thì $D_1 \to D_2$; $e^{|x-y|}$ không đổi

$$\Rightarrow I = 2\iint\limits_{D_1} = 2.(e-2)$$

2) $I = 2\iiint\limits_V \frac{x^2}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz + \iiint\limits_V \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz = 2I_1 + I_2$

Đổi sang toạ độ cầu $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$\Rightarrow |J| = r^2\sin\theta$; $V \to V'$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)

$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 \frac{r^2.\cos^2\varphi.\sin^2\theta}{1+r^2}\cdot r^2\sin\theta\, dr = \ldots = \frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$ (0,5đ)

Tương tự $I_2 = \frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$. Vậy $I = 4\pi\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) = \pi^2 - \frac{8\pi}{3}$ (0,5đ)

Chú ý: x, y, z, đối xứng trong V $\Rightarrow I = 3I_2$; tính I_2 đơn giản hơn I_1 (xem đáp án đề 2).

Cách 2: Hoặc hoán vị x, y, z

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_V \frac{x^2+y^2+z^2}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint\limits_V \left[1 - \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\right]dxdydz$$

$= V - \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+x^2+y^2+z^2} = V - J$ (0,5đ)

Đổi sang toạ độ cầu... $\Rightarrow J = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 \frac{1}{1+r^2}\cdot r^2\sin\theta\, dr = 4\pi - \pi^2$ (0,5đ)

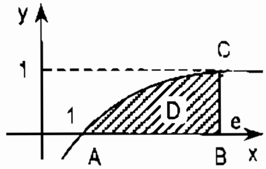
V = khối cầu, R = 1 $\Rightarrow V = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow I = \frac{4\pi}{3} - (4\pi - \pi^2) = \pi^2 - \frac{8\pi}{3}$ (0,5đ)

Chú ý: Sinh viên không tách, thay toạ độ cầu thẳng vào I, tính đúng đến đâu cho điểm tương ứng đến đó.

Câu III. (2,5đ)

1) Biên của D là $L = AB \cup BC \cup \overset{\frown}{CA}$ (hình vẽ)

$$S(D) = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$$



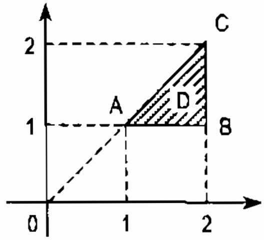
Phương trình AB: y = 0; phương trình BC: x = e

$$\Rightarrow \int_{BC} = \int_0^1 edx = e \qquad (1) \qquad (0,5đ)$$

Phương trình $\overset{\frown}{CA}$: y = lnx

$$\Rightarrow \int_{\overset{\frown}{CA}} = \int_e^1 \left(x \cdot \frac{1}{x} - \ln x\right)dx = \left[x - (x\ln x - x)\right]\Big|_e^1 = 2 - e \qquad (2)$$

$$(2) + (1) \Rightarrow S(D) = 1 \qquad (0,5đ)$$



$$2)\ P = x\text{arctg}\frac{x}{y} \Rightarrow P'_y = \frac{-x^2}{x^2 + y^2}$$

$$Q = \text{arccotg}\frac{y}{x} \Rightarrow Q'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow Q'_x - P'_y = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2} \qquad (0,5đ)$$

Phương trình CA: y = x

$$\Rightarrow \int_{CA} Pdx + Qdy = \int_2^1 \left(x \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_2^1 = -\frac{5\pi}{8} \qquad (0,5đ)$$

Áp dụng Green: $I = \int_{ABC} Pdx + Qdy = \oint_{ABCA} - \int_{CA} = \iint_D \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}dxdy + \frac{5\pi}{8}$

$$= \ldots = \frac{3}{2}\text{arctg}2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{8}{5} \qquad (0,5đ)$$

Cách 2: (Tính trực tiếp)

Phương trình AB: $y = 1 \Rightarrow \int_{AB} = \int_1^2 x\text{arctg}xdx = \frac{1}{2}\int_1^2 \text{arctg}xdx^2$

$$= \ldots = \frac{1}{2}\left(5\text{arctg}2 - 1 - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (0{,}5đ)$$

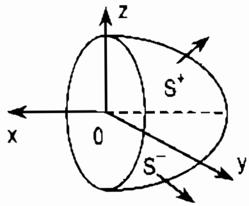
Phương trình BC: $x = 2$

$$\Rightarrow \int_{BC} = \int_1^2 \text{arc}\cot g\frac{y}{2}dy = y.\text{arc}\cot g\frac{y}{2}\Big|_1^2 - \int_1^2 y\cdot\frac{-1}{1+\frac{y^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}dy$$

$$= \ldots = \frac{\pi}{2} - \text{arccotg}\frac{1}{2} + \ln\frac{8}{5} \qquad (0{,}5đ)$$

Vì $\text{arccotg}\frac{1}{2} = \text{arctg}2 \;\Rightarrow\; I = \frac{3}{2}\text{arctg}2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{8}{5}$ (0,5đ)

Câu IV. (2,5đ)



1) $S = S^+ \cup S^-$, S^+ (S^-) là phần mặt S ứng với $z \geq 0$ $(z \leq 0)$ $I = \iint_{S^-} + \iint_{S^-}$

S^+, S^- đối xứng qua Oxy

$\Rightarrow$ chúng có cùng hình chiếu D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$ trên Oxy (0,5đ)

Phương trình S: $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, $\overrightarrow{n}_{S^+}$ tạo với $\overrightarrow{Oz}$ góc nhọn

$$\Rightarrow \iint_{S^+} = \iint_D x^2(1-x^2)dydx \quad (1) \qquad (0{,}5đ)$$

$\overrightarrow{n}_{S^-}$ tạo với $\overrightarrow{Oz}$ góc tù

$$\Rightarrow \iint_{S^-} = -\iint_D x^2(1-x^2)dydz; \quad (2)+(1) \;\Rightarrow\; I = 0 \qquad (0{,}5đ)$$

Cách 2:

Bổ sung mặt D hướng lên trên theo $\overrightarrow{Ox}$, phương trình D: $z = 0$

$$\Rightarrow \iint_D = 0 \;\Rightarrow\; I = \oiint_{S\cup D} x^2(y^2+z^2)dydx \qquad (0{,}5đ)$$

Áp dụng Ostrogradxki $\Rightarrow\; I = \iiint_V x^2 2zdxdydz$

$(V = \frac{1}{2}$ khối cầu: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \leq 0;\; x \leq 0)$ (0,5đ)

V đối xứng qua mặt z = 0, hàm lấy tích phân lẻ theo z $\Rightarrow I = 0$ (0,5đ)

2) Đặt $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{2^{ax} - 1}{x.2^{3x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{ax}}{x.e^{3x}} dx$. Với a < 3, I(a) thoả mãn điều kiện lấy được đạo hàm.

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{(2^{ax} \ln 2).x}{x.2^{3x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{-e^{ax}.x}{x.e^{3x}} dx \qquad (0,5đ)$$

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} 2^{(a-3)x} \ln 2 dx - \int_0^{+\infty} e^{(a-3)x} dx$$

$$= \left.\frac{2^{(a-3)x}}{(a-3)}\right|_0^{+\infty} - \left.\frac{e^{(a-3)x}}{(a-3)}\right|_0^{+\infty} = \frac{0-1}{a-3} - \frac{0-1}{a-3} = 0$$

$\Rightarrow$ I(a) không đổi $\forall a < 3$. $I(0) = 0 \Rightarrow I(a) = 0, \forall a < 3$ (đpcm) (0,5đ)

Cách 2: Có thể tính trực tiếp từng tích phân rồi lấy tổng:

$$\left(\text{có: } \frac{2^{ax} - 1}{x} = \int_0^a 2^{yx} \ln 2 dy \Rightarrow ... \right)$$

Chú ý: + Nếu sinh viên không nói gì cứ tính đạo hàm hoặc đổi thứ tự lấy tích phân (cách 2) thì trừ 0,25 điểm.

+ Tổng điểm cả bài làm tròn 0,75 = 1.

ĐỀ 2

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K49 (Thời gian làm bài 90')

Câu I. 1) Lập phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt:

$$2x - e^{-yz} + \operatorname{arctg} \frac{z}{y} = 1 \text{ tại } M(1; -1; 0)$$

2) Cho $U = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ và điểm A(1; 2; −2).

Tính đạo hàm của U tại điểm A theo hướng $\overrightarrow{OA}$. Tìm max $\left|\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(A)\right|$.

Câu II. 1) Tính $\iint_D |x - y| dxdy$, $D = \{(x, y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

2) Tính $\iiint\limits_V \frac{5y^2+z^2}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz$, $V = \{(x, y, z,) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 3\}$.

Câu III. 1) Dùng tích phân đường tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi các đường: $y = e^{-x}$; $y = e$; $x = 0$.

2) Tính $\int\limits_{ABC} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}(xdx + ydy)$, với ABC là đường gấp khúc A(1; 1), B(1; 2), C(2; 2).

Câu IV. 1) Tính $\iint\limits_S y^2(x^2+z^2)dxdz$, S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \ge 0$ $(a > 0)$, hướng của S là phía ngoài mặt cầu.

2) Chứng minh rằng với mọi $a < 2$ ta có $\int\limits_0^{+\infty} \frac{3^{ax}-1}{x.3^{2x}}dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{ax}}{x.e^{2x}}dx = 0$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) Phương trình mặt: $F(x, y, z) = 2x - e^{-yz} + \operatorname{arctg}\frac{z}{y} - 1 = 0$

$$\begin{cases} F'_x = 2; \quad F'_y = z.e^{-yz} - \dfrac{z}{y^2+z^2} \\ F'_z = y.e^{-yz} + \dfrac{y}{y^2+z^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vecteur pháp tuyến tại M, $\vec{n} = (2; 0; -2) = 2(1; 0; -1)$ (0,5đ)

Phương trình tiếp diện: $1 \times (x - 1) + 0 - 1 \times (z - 0) = 0$ hay: $x - z - 1 = 0$

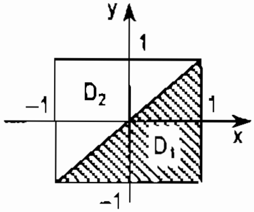
Phương trình pháp tuyến: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$ (0,5đ)

2) $U'_x = \dfrac{x}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, thay x bởi y, z ta có U'_y, $\overrightarrow{U'_z}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{grad}U(A) = \left(\frac{1}{12}; \frac{2}{12}; \frac{-2}{12}\right)$ (0,5đ)

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(A) = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{12}\cdot\frac{2}{3} - \frac{2}{12}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \qquad (0{,}5đ)$$

$$\text{Max}\,\frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(A) = |\overrightarrow{\text{grad}U(A)}| = \frac{1}{12}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{4} \qquad (0{,}5đ)$$



Câu II. (2,5đ)

1) $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) \in D,\ x \geq y\}$;

$D_2 = \{x, y) \in D,\ x \leq y\}$.

$$\iint\limits_{D_1} |x - y|\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} (x - y)dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(xy - \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-1}^{x}\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1}\frac{x^2 + 1}{2}dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{4}{3} \qquad (0{,}5đ)$$

Tương tự $\iint\limits_{D_2} = \frac{4}{3}$. Vậy $\iint\limits_{D} |x - y|\,dxdy = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ (0,5đ)

2) (Tương tự đề 1): $I = 5I_1 + I_2$; $I_2 = \iiint\limits_{V} \frac{z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$

Đổi sang toạ độ cầu...; $V \rightarrow V' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3} \end{cases}$ (0,5đ)

$$I_2 = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} d\theta \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{r^2.\cos^2\theta}{1 + r^2}\cdot r^2 \sin\theta\,dr$$

$$= 2\pi.\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_{0}^{\pi}\right).\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(r^2 - 1 + \frac{1}{1 + r^2}\right)dr$$

$$= 2\pi.\frac{2}{3}.\left(\frac{r^3}{3} - r + \text{arctgr}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi^2}{9} \qquad (0,5đ)$$

Tương tự $I_1 = I_2 \Rightarrow I = 6\cdot\frac{4\pi^2}{9} = \frac{8\pi^2}{3}$ (0,5đ)

Cách 2: Hoán vị x, y, z

$\Rightarrow$ Tổng: $3I = \iiint\limits_V \frac{6.(x^2 + y^2 + z^2)}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$

$$\Rightarrow I = 2\iiint\limits_V \left[1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\right]dxdydz = 2V - 2J \qquad (0,5đ)$$

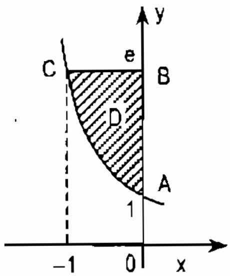
Đổi sang toạ độ cầu... $\Rightarrow J = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1 + r^2}\right)\sin\theta\, dr$

$$\Rightarrow J = 2\pi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{1 + r^2}\right)dr$$

$$= 2\pi.2.(r - \text{arctgr})\Big|_0^{\sqrt{3}} = 4\pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \qquad (0,5đ)$$

$V =$ khối cầu, $R = \sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 = 4\pi\sqrt{3}$

$$\Rightarrow I = 2.\left[4\pi\sqrt{3} - 4\pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{8\pi^2}{3} \qquad (0,5đ)$$



Câu III. (2,5đ)

1) Biên của D là $L = AB \cup BC \cup \overset{\frown}{CA}$ (hình vẽ)

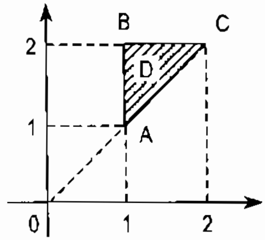
$S(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$.

Phương trình AB: $x = 0$; $\int\limits_{AB} = 0$; phương trình BC: $y = e$

$$\Rightarrow \int\limits_{BC} = -\int\limits_0^{-1} edx = +e \quad (1) \qquad (0,5đ)$$

Phương trình CA: $y = e^{-x}$

$$\Rightarrow \int_{\overset{\frown}{CA}} = \int_{-1}^{0}(-xe^{-x} - e^{-x})dx = \int_{-1}^{0}(x+1)de^{-x} = 2 - e \quad (2)$$



$(2) + (1) \Rightarrow S(D) = 1$ (0,5đ)

2) $P = x\text{arctg}\dfrac{y}{x} \Rightarrow P'_y = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

$Q = y\text{arctg}\dfrac{y}{x} \Rightarrow Q'_x = \dfrac{-y^2}{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow Q'_x - P'_y = -1$ (0,5đ)

Áp dụng Green: $I = \oint\limits_{ACBA} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D}(-1)\,dxdy = -S(ABC) = -\dfrac{1}{2}$

Mặt khác: $\oint\limits_{ACBA} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CBA} \Rightarrow I = \int\limits_{ABC} Pdx + Qdy = \int\limits_{AC} - \oint\limits_{ACBA}$ (0,5đ)

Phương trình AC: $y = x \Rightarrow \int\limits_{AC} Pdx + Qdy = \int_{1}^{2}\text{arctg}1.(2xdx)$

$$= \frac{\pi}{4}x^2\Big|_1^2 = \frac{3\pi}{4}. \text{ Vậy } I = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad (0{,}5đ)$$

Cách 2: (Trực tiếp)

Phương trình AB: $x = 1 \Rightarrow \int\limits_{AB} = \int_{1}^{2}(\text{arctg}y).ydy$

$$= \ldots = \frac{1}{2}\left(5\text{arctg}2 - \frac{\pi}{2} - 1\right) \quad (0{,}5đ)$$

Phương trình BC: $y = 2$

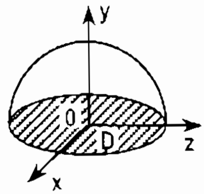
$$\Rightarrow \int\limits_{BC} = \int_{1}^{2}\left(\text{arctg}\frac{2}{x}\right)xdx = \ldots = \frac{1}{2}\left(4\text{arctg}\frac{1}{2} - \text{arctg}2 + 2\right) \quad (0{,}5đ)$$

Vì $\text{arctg}2 + \text{arctg}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow I = \dfrac{1}{2}\left(4\cdot\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} + 1\right) = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$ (0,5đ)

Câu IV. (2,5đ)

1) Hình chiếu S lên Oxz là D: $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 \le a^2 \end{cases}$

Phương trình S: $y^2 = a^2 - x^2 - z^2$



$\overrightarrow{n_S}$ tạo với Oy góc nhọn

$$\Rightarrow \quad I = \iint_D (a^2 - x^2 - z^2)(x^2 + z^2)dxdz \qquad (0{,}5đ)$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r;\ D \to D' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2) r^2 r dr \qquad (0{,}5đ)$$

$$I = 2\pi . \left[a^2 \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right]\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^6}{6} \qquad (0{,}5đ)$$

Cách 2:

Bổ sung mặt D hướng ngược với $\overrightarrow{Oy}$. Vì phương trình D: $y = 0$

$$\Rightarrow \iint_D = 0 \Rightarrow \iint_S = \oiint_{S \cup D} = \iiint_V 2y(x^2 + z^2)dxdydz$$

Đổi sang toạ độ cầu $\Rightarrow \ I = \dfrac{\pi a^6}{6}$

2) (Tương tự đề 1)

Đặt $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3^{ax} - 1}{x.3^{2x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{ax}}{x.e^{2x}} dx$.

Với $a < 2 \ \Rightarrow$ I(a) thoả mãn điều kiện lấy được đạo hàm.

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{(3^{ax} \ln 3).x}{x.3^{2x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{-e^{ax}.x}{x.e^{2x}} dx \qquad (0{,}5đ)$$

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} 3^{(a-2)x} \ln 3 dx - \int_0^{+\infty} e^{(a-2)x} dx$$

$$= \frac{3^{(a-2)x}}{(a-2)}\Bigg|_0^{+\infty} - \frac{e^{(a-2)x}}{(a-2)}\Bigg|_0^{+\infty} = 0$$

$\Rightarrow$ I(a) không đổi $\forall a < 2$. Mà $I(0) = 0 \Rightarrow I(a) = 0,\ \forall a < 2$ (đpcm) (0,5đ)

Chú ý: Có thể tính trực tiếp từng tích phân rồi lấy tổng.

ĐỀ 3

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K49 (Thời gian làm bài 90')

Câu I. 1) Tính độ cong của đường: $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = 1$

2) Cho $\vec{F} = [y\cos(xy)].\vec{i} + [x\cos(xy)].\vec{j} + \left(z\sqrt{1+z^2}\right).\vec{k}$. Chứng minh rằng $\vec{F}$ là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

Câu II. 1) Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

2) Tính thể tích miền V xác định bởi $0 \le z \le 2 - y - x$, $y \ge 0$, $y + 2x \ge 1$, $y + x \le 1$.

Câu III. 1) Tính $\int\limits_{AB} (4x^3 + 3y)dx - (2x - 3y^2)dy$

AB là nửa đường tròn $y = \sqrt{1-x^2}$, chiều đi từ A(1; 0) đến B(−1; 0).

2) Gọi C_a là đường elip:

$$ax^2 + y^2 = 1,\ a > 0 \text{ và } I_a = \oint\limits_{C_a} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$$

Chứng minh rằng $I_a = -2\pi$ với mọi $a > 0$.

Câu IV. 1) Tính $\iint\limits_{S} y^2\sqrt{x^2+z^2}\,dxdz$. S là biên của miền V: $y^2 \ge x^2 + z^2$, $-1 \le y \le 0$, hướng ra ngoài.

2) Tính $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{3^{ax^2} - 1}{x.3^{x^2}}dx$, với $a < 1$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) $x'_t = t\sin t$; $y'_t = t\cos t \Rightarrow x_t'^2 + y_t'^2 = t^2$ (0,5đ)

$\begin{cases} x'' = \sin t + t\cos t \\ y'' = \cos t - t\sin t \end{cases} \Rightarrow |y''x' - y'x''| = ... = |-t^2|$

Với $t = 1 \Rightarrow C = \dfrac{t^2}{|t|^3} = 1$ (0,5đ)

2) Đặt $P = y\cos xy$, $Q = x\cos xy$, $R = z\sqrt{1+x^2}$, ta có:

$R'_y - Q'_z = 0$; $P'_z - R'_x = 0$ (0,5đ)

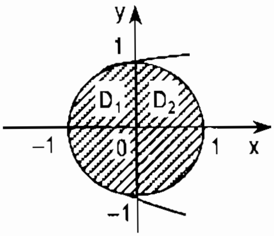
$Q'_x = \cos xy - xy\sin xy = P'_y \Rightarrow Q'_x - P'_y = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F} = 0$ (đpcm) (0,5đ)

Hàm thế vị $U = \int_0^x 0.dx + \int_0^y x\cos xy\,dy + \int_0^z z\sqrt{1+z^2}\,dz + C$

$= \sin xy + \dfrac{1}{3}\sqrt{(1+z^2)^3} + C$ (0,5đ)

Câu II. (2,5đ)



1) Miền lấy tích phân D: $\begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y^2 - 1 \le x \le \sqrt{1-y^2} \end{cases}$

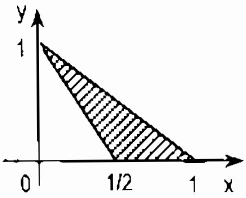
$D = D_1 \cup D_2$; D_1: $\begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ -\sqrt{x+1} \le x \le \sqrt{x+1} \end{cases}$

D_2: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ (0,5đ)

$\Rightarrow I = \iint\limits_D = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} = \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ (0,5đ)

2) $V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dydx \int_0^{2-y-x} dz$,

$D = \{(x,y): y \ge 0,\ y + 2x \ge 1,\ y + x \le 1\}$ (0,5đ)



$\Leftrightarrow D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \dfrac{1-y}{2} \le x \le 1 - y \end{cases}$

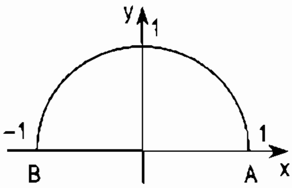
$\Rightarrow V = \int_0^1 dy \int_{\frac{1-y}{2}}^{1-y} (2 - y - x)dx$ (0,5đ)

$$V = \int_0^1 \left[(2-y).x - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1-y}{2}}^{1-y} dy = \int_0^1 \left[\frac{1-y}{2} + \frac{(1-y)^2}{8}\right] dy$$

$$= \left[\frac{(1-y)^2}{4} + \frac{(1-y)^3}{8.3}\right]_1^0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{24}$$

$$V = \frac{7}{24} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu III. (2,5đ)



1) $\overset{\frown}{AB}: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t_A = 0, t_B = \pi$

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} 4x^3 dx + \int_{\overset{\frown}{AB}} 3y^2 dy + \int_{\overset{\frown}{AB}} (3y dx - 2x dy)$$

$$= \int_0^{\pi} (4\cos t)^3 d\cos t + \int_0^{\pi} 3\sin^2 t d\sin t + \int_0^{\pi} (-3\sin^2 t - 2\cos^2 t) dt \qquad (0{,}5đ)$$

$$I = (\cos^4 t + \sin^3 t)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= 0 - \left(\frac{5}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{-5\pi}{2} \qquad (0{,}5đ)$$

Cách 2: $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AB} \cup BA} - \int_{BA}$;

Phương trình BA: $y = 0 \Rightarrow \int_{BA} = \int_{-1}^{1} 4x^3 dx = 0$

$$\oint_{\overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BA}} = \iint_D (-2-3) dx dy = -5S(D), \ D = \frac{1}{2} \text{ hình tròn, } R = 1$$

$$\Rightarrow S(D) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = -\frac{5\pi}{2}$$

2) Với $a = 1 \Rightarrow$ phương trình C_1 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, t từ 0 đến 2π

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -2\pi \qquad (0{,}5đ)$$

Đặt $P = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$; $Q = \dfrac{y-x}{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \quad Q'_x = \frac{-1(x^2+y^2)-2x(y-x)}{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = P'_y \text{ , } \forall(x, y) \neq (0; 0) \qquad (0,5đ)$$

$\forall a \neq 1$, $C_1 \cup C_a$ giới hạn miền D không chứa O(0; 0)

$$\Rightarrow \oint_{C_a} Pdx + Qdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy = -2\pi$$

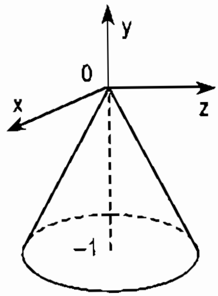
Vậy $\forall a > 0$ ta có $I_a = -2\pi$ (đpcm) (0,5đ)

Câu IV. (2,5đ)

1) Áp dụng Ostrogradxki $\Rightarrow$ $I = \iiint\limits_V 2y\sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$ (0,5đ)

Đổi sang toạ độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ y = y \end{cases} \Rightarrow |J| = r \text{ ; } V \to V': \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ -1 \le y \le -r \end{cases}$$



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{-1}^{-r} rzydy \qquad (0,5đ)$$

$$I = 2\pi \int_0^1 r^2\left(y^2\Big|_{-1}^{-r}\right)dr = 2\pi \int_0^1 r^2(r^2-1)\,dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{-4\pi}{15} \qquad (0,5đ)$$

2) $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3^{ax^2}-1}{x.3^{x^2}}dx$, với $a < 1$, I(a) thoả mãn điều kiện lấy được đạo hàm (0,5đ)

$$I'(a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{(a-1)x^2}}{a-1}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\cdot\left(0 - \frac{1}{a-1}\right) = \frac{1}{2.(1-a)}$$

Vì $I(0) = 0 \Rightarrow I(a) = \int_0^a \frac{1}{2.(1-t)} dt$

$$= \frac{-1}{2} \ln|1-t| \Big|_0^a = -\frac{1}{2}\ln(1-a) \qquad (0{,}5đ)$$

ĐỀ 4

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K49 (Thời gian làm bài 90')

Câu I. 1) Tính độ cong của đường: $r = 1 + \sin\varphi$ tại điểm ứng với $\varphi = 0$.

2) Cho $\vec{F} = e^x.\vec{i} + [z\sin(yz)].\vec{j} + [(y\sin(yz)].\vec{k}$. Chứng minh rằng $\vec{F}$ là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

Câu II. 1) Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} f(x, y)dy$.

2) Tính thể tích miền V xác định bởi $x \geq 0$, $x + 2y \geq 2$, $x + y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3 - x - y$.

Câu III. 1) Tính $\int_{AB} (5x^4 + 4y)dx - (4y^3 + 3x)dy$

AB là nửa đường tròn $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, chiều đi từ $A(0; -a)$ đến $B(0; a)$, $(a > 0)$.

2) Gọi C_b là đường elip:

$$x^2 + by^2 = 1,\ b > 0 \text{ và } I_b = \oint_{C_b} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$$

Chứng minh rằng $I_b = 2\pi$ với mọi $b > 0$.

Câu IV. 1) Tính $\iint_S x^3 \sqrt{y^2 + z^2} dydz$, S là biên của miền V: $x^2 \geq y^2 + z^2$, $0 \leq x \leq 1$, hướng ra ngoài.

2) Tính $\int_0^{+\infty} \frac{1 - 2^{a\sqrt{x}}}{x.2^{\sqrt{x}}} dx$, với $a < 1$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) $r' = \cos\varphi$; $r'' = -\sin\varphi$

Tại $\varphi = 0 \Rightarrow r = 1, r' = 1, r'' = 0, r^2 + r'^2 = 2$ (0,5đ)

$|r^2 + 2r'^2 - rr''| = |1 + 2 - 0| = 3 \Rightarrow C = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ (0,5đ)

2) Đặt $P = e^x$, $Q = z\sin yz$, $R = y\sin yz$, ta có:

$R'_y = Q'_z = \sin yz + yz\cos yz \Rightarrow R'_y - Q'_z = 0$ (0,5đ)

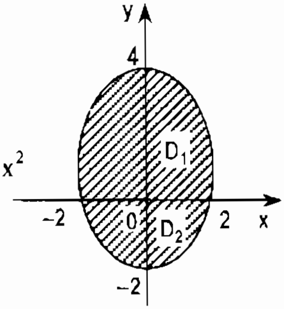
$P'_z - R'_x = 0 - 0 = 0$, $Q'_x - P'_y = 0 - 0 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{F} = 0$ (đpcm) (0,5đ)

Hàm thế vị $U = \int_0^x e^x.dx + \int_0^y 0.dy + \int_0^z y\sin yz dz + C$

$= e^x - \cos yz + C$ (0,5đ)

Câu II. (2,5đ)



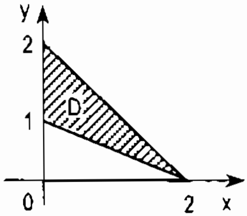
1) Miền lấy tích phân D: $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{4 - x^2} \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$

$D = D_1 \cup D_2$; D_1: $\begin{cases} -2 \le y \le 0 \\ -\sqrt{4 - y^2} \le x \le \sqrt{4 - y^2} \end{cases}$

D_2: $\begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ -\sqrt{4 - y} \le x \le \sqrt{4 - y} \end{cases}$ (0,5đ)

$\Rightarrow I = \iint\limits_D = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} = \int_{-2}^{0} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)dx + \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y)dx$ (0,5đ)

2) $V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_0^{3-x-y} dy$,



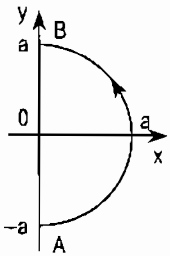
$D : x \ge 0,\ x + 2y \ge 2,\ x + y \le 2$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow D : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{2 - x}{2} \le y \le 2 - x \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad V = \int_0^2 dx \int_{\frac{2-x}{2}}^{2-x} (3-x-y)dy \qquad (0{,}5đ)$$

$$V = \int_0^2 \left[(3-x).y - \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{2-x}{2}}^{2-x} dx = \int_0^2 \left[\frac{2-x}{2} + \frac{(2-x)^2}{8} \right] dx$$

$$= -\left[\frac{(2-x)^2}{4} + \frac{(2-x)^3}{8.3} \right]_0^2 = \frac{4}{4} + \frac{8}{24} = \frac{4}{3} \qquad (0{,}5đ)$$



Câu III. (2,5đ)

1) Phương trình $\overset{\frown}{AB}$: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, $t_A = -\dfrac{\pi}{2}$, $t_B = \dfrac{\pi}{2}$

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}}^{\frac{\pi}{2}} 5x^4 dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} 4y^3 dy + \int_{\overset{\frown}{AB}} 4ydx - 3xdy$$

$$= a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5\cos^4 t\, d\cos t - a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^3 t\, d\sin t +$$

$$+ a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [4(-\sin^2 t) - 3\cos^2 t]\, dt \qquad (0{,}5đ)$$

$$I = (a^4 \cos^5 t - a^3 \sin^4 t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7 - \cos 2t}{2} dt$$

$$= a^2.\left(0 - \frac{7\pi}{2}\right) = \frac{-7\pi a^2}{2} \qquad (0{,}5đ)$$

Cách 2: $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AB} \cup BA} - \int_{BA}$;

Phương trình BA: $x = 0 \;\Rightarrow\; \int_{BA} = \int_a^{-a} 4y^3 dy = 0$ (0,5đ)

$$\oint\limits_{\overset{\frown}{AB}\cup BA} = \iint\limits_D(-3-4)dxdy = -7S(D),\ D = \frac{1}{2} \text{ hình tròn, } R = a$$

$$\Rightarrow \quad S(D) = \frac{\pi a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{-7\pi a^2}{2}$$

2) Với b = 1 $\Rightarrow$ phương trình C_1 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, t từ 0 đến 2π

$$\Rightarrow \quad I_b = \int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi \qquad (0{,}5đ)$$

Đặt $P = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$; $Q = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \quad Q'_x = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = P'_y,\ \forall(x, y) \neq (0; 0) \qquad (0{,}5đ)$$

$\forall b \neq 1$, $C_1 \cup C_b$ giới hạn miền D không chứa O(0; 0)

$$\Rightarrow \quad \oint\limits_{C_b} Pdx + Qdy = \oint\limits_{C_1} Pdx + Qdy = 2\pi$$

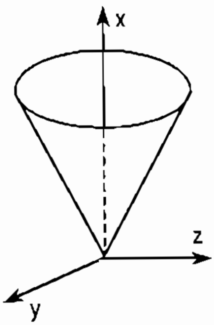
Vậy $\forall b > 0$ ta có $I_b = 2\pi$ (đpcm) (0,5đ)

Câu IV. (2,5đ)

1) Áp dụng Ostrogradxki $\Rightarrow$ $I = \iiint\limits_V 3x^2\sqrt{z^2+y^2}\,dxdydz$ (0,5đ)

Đổi sang toạ độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ x = x \end{cases} \Rightarrow |J| = r\ ;\ V \to V': \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r \le x \le 1 \end{cases}$$



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_r^1 r3x^2dx \qquad (0{,}5đ)$$

$$I = 3.2\pi\int_0^1 r^2\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_r^1\right)dr = 2\pi\int_0^1 r^2(1-r^3)\,dr$$

$$= 2\pi\left.\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^6}{6}\right)\right|_0^1 = \frac{\pi}{3} \qquad (0{,}5đ)$$

2) $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1-2^{a\sqrt{x}}-1}{x.2^{\sqrt{x}}}dx$, với $a < 1$, $I(a)$ thoả mãn điều kiện lấy được đạo hàm:

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{(-2^{a\sqrt{x}}\ln 2).\sqrt{x}}{x.2^{\sqrt{x}}}dx = -\int_0^{+\infty}\left(2^{(a-1)\sqrt{x}}\ln 2\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad (0{,}5đ)$$

$$I'(a) = -2\cdot\frac{2^{(a-1)\sqrt{x}}}{a-1}\Bigg|_0^{+\infty} = -2\cdot\left(0-\frac{1}{a-1}\right) = \frac{2}{a-1}$$

$$\text{Vì } I(0) = 0 \Rightarrow I(a) = \int_0^a \frac{2}{t-1}dt$$

$$= 2\ln|t-1|\Big|_0^a = 2\ln|a-1| = 2\ln(1-a) \qquad (0{,}5đ)$$

ĐỀ 1

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K50 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5đ)

1) Tính độ cong tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{4}$ của đường $\begin{cases} x = \sin^4 t \\ y = \cos^4 t \end{cases}$

2) Tính $\iint\limits_S x^3 dydz$, trong đó S là nửa mặt elipxoit $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$, hướng ra ngoài elipxoit là hướng của S.

Câu II. (2,5đ)

1) Tìm giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\int_{\sin y}^{1+y^2} \operatorname{arctg}(y-x)dx$.

2) Tính $\iiint\limits_V ze^{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó V xác định bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \\ z \geq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

Câu III. (2,5đ)

1) Chứng minh rằng biểu thức $\dfrac{3xdx + 2ydy}{(3x^2 + 2y^2 + 1)^4}$ là vi phân toàn phần của một hàm số U(x, y) nào đó. Tìm U(x, y).

2) Tính $\int\limits_{AB} \sqrt[4]{x^3y}\,[(x + y)dx - (x - y)dy]$, trong đó AB là đoạn thẳng đi từ A(0;2) đến B(2;0).

Câu IV. (2,5đ)

1) Tính $\iint\limits_D (x + y)e^{x-y}dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

2) Tính thông lượng của trường vectơ $\vec{F} = (x^2y + y^2z + z^2x)(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ qua nửa mặt cầu S: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ hướng ra ngoài mặt cầu là hướng của S.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5)

1) $\left.\begin{array}{l} x' = 4\sin^3t\cos t; \quad x'' = 12\sin^2t\cos^2t - 4\sin^4t \\ y' = -4\cos^3t\sin t; \quad y'' = 12\cos^2t\sin^2t - 4\cos^4t \end{array}\right\}$ (0,5đ)

Tại $t = \dfrac{\pi}{4} \to \begin{cases} x' = 1; & x'' = 2 \\ y' = -1; & y'' = 2 \end{cases} \Rightarrow C = \dfrac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ } (0,5đ)

2) Gọi D là mặt $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$, hướng ngược với $\overrightarrow{Oz}$

$\to \iint\limits_S x^3dydz = 0 \to I = \iint\limits_S = \iint\limits_{SUD}$ (0,5đ)

Áp dụng Ostro $\Rightarrow I = \iiint\limits_V 3x^2dxdydz$, với

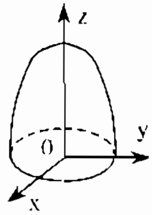
V: $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (0,5đ)

Đặt (1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \rightarrow |J| = \dfrac{1}{\sqrt{6}} r^2\sin\theta \,;\, V \rightarrow V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 3.\frac{1}{3} r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta . \frac{1}{\sqrt{6}} r^2\sin\theta dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)(-d\cos\theta) \int_0^1 r^4 dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}.\pi.(1-\frac{1}{3}).\frac{1}{5} = \frac{2\pi}{15\sqrt{6}}$$ (0,5đ)



Chú ý: (1) Có thể đặt: $z = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\sin\theta$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} r\cos\theta$

$$\rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \frac{3}{3} r^2\cos^2\varphi . \frac{1}{\sqrt{6}} r^2\sin\theta dr$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{6}}.\pi.\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}\right).\left(\frac{r^5}{5}\Big|_0^1\right) = \frac{2\pi}{15\sqrt{6}}$$

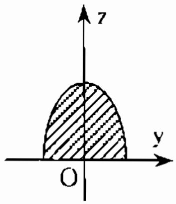
Cách 2: Có thể đưa I về thẳng tích phân kép: $S = S^+OS^-$ $\vec{n}_{S^+}, \vec{n}_{S^-}$ tạo với $\vec{Ox}$ góc nhọn, tù

$$\Rightarrow I = 2\iint_D \left(\frac{1-2y^2-z^2}{3}\right)^{3/2} dydz \,;\; D: \begin{cases} 2y^2+z^2 \le 1 \\ z \ge 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow |J| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r \,;\, D \rightarrow D' \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$I = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{(1-r^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} r dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{6}} \cdot \left[-\frac{(1-r^2)^{5/2}}{5}\Bigg|_0^1\right] = \frac{2\pi}{15\sqrt{6}}$$



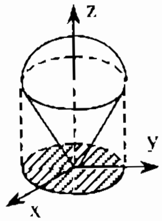
Câu II. (2,5đ)

1) Hàm $f(x,y) = \text{arctg}(y - x)$ liên tục $\forall(x,y)$; cận $\sin y$ và $1 + y^2$ liên tục $\forall y \to$ I liên tục $\forall y \to \lim\limits_{y\to 0} I(y) = I(0)$. (0,5đ)

$$\lim_{y\to 0} I(y) = \int_0^1 \text{arctg}(-x)dx = -x\,\text{arctg}x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} \qquad (0{,}5đ)$$

2) Đổi sang toạ độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r$



$$V \to V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r \le z \le \sqrt{2-r^2} \end{cases} \qquad (0{,}5đ)$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} e^{r^2}.zdz = 2\pi \cdot \int_0^1 r\,e^{r^2}\left[\frac{z^2}{2}\Big|_r^{\sqrt{2-r^2}}\right]dr = \pi\int_0^1 e^{r^2}(2-2r^2)rdr$$
(0,5đ)

$$= \pi\int_0^1 e^{r^2}(1-r^2)dr^2 = \pi\int_0^1 e^t(1-t)dt = \pi[(1-t)e^t + e^t)]\Big|_0^1 = \pi(e-2) \qquad (0{,}5đ)$$

Cách 2: Đổi sang toạ độ cầu $\to |J| = r^2\sin\theta$; $V \to V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \end{cases}$ (0,5đ)

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\theta.e^{r^2\sin^2\theta} r^2\sin\theta d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} rdr \int_0^{\pi/4} e^{r^2\sin^2\theta}\,\frac{1}{2}dr^2\sin^2\theta$$
(0,5đ)

(Đổi thứ tự θ, r)

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(e^{r^2\sin^2\theta}\Big|_0^{\pi/4}\right) rdr = \pi\int_0^{\sqrt{2}} (e^{r^2/2} - 1)d\frac{r^2}{2} = \pi(e-2) \qquad (0{,}5đ)$$

Câu III. (2,5đ)

1) $P = \dfrac{3x}{(3x^2 + 2y^2 + 1)^4} \Rightarrow P'_y = \dfrac{3x.(-4).4y}{(3x^2 + 2y^2 + 1)^5}$ (0,5đ)

$$Q = \frac{2y}{(3x^2+2y^2+1)^4} \Rightarrow Q'_x = \frac{2y.(-4).6x}{(3x^2+2y^2+1)^5} \qquad (0,5đ)$$

$$\rightarrow Q'_x = P'_y \text{ (đpcm)}$$

$$U(x, y) = \int_0^{x} \frac{3xdx}{(3x^2+1)^4} + \int_0^{y} \frac{2ydy}{(3x^2+2y^2+1)^4} =$$

$$= \left.\frac{-1/2}{3(3x^2+1)^3}\right|_0^x + \left.\frac{-1/2}{3(3x^2+2y^2+1)^3}\right|_0^y + C = \frac{-1}{6(3x^2+2y^2+1)^3} + C \quad (0,5đ)$$

Cách 2. Nhận thấy: $3xdx + 2ydy = \frac{1}{2} d\underbrace{(3x^2+2y^2+1)}_{t} \rightarrow$

$$\rightarrow Pdx + Qdy = \frac{\frac{1}{2}dt}{t^4} = \frac{\frac{1}{2}dt^{-3}}{-3} = d\frac{t^{-3}}{-6}$$

hay $Pdx + Qdy = d\left(\frac{1}{-6(3x^2+2y^2+1)^3}\right) \rightarrow u = \frac{1}{-6(3x^2+2y^2+1)^3} + C$

2) Phương trình AB: $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$; $x_A = 0$; $x_B = 2$

$$I = \int_{AB} = \int_0^2 \sqrt[4]{x^3(2-x)}\,[2 + (2x-2)]dx = 2\int_0^2 x\sqrt[4]{x^3(2-x)}dx \quad (*) \qquad (0,5đ)$$

Đặt $x = 2t \Rightarrow dx = 2dt$; $x\big|_0^2 \rightarrow t\big|_0^1$;

$$I = 2\int_0^1 2t\sqrt[4]{2^3t^3.2(1-t)}.2dt = 16\int_0^1 t^{7/4}(1-t)^{1/4}dt = 16B\left(\frac{11}{4};\frac{5}{4}\right).$$

$$I = 16\cdot\frac{\Gamma(\frac{11}{4})\cdot\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(4)} = 16\cdot\frac{\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\Gamma(\frac{3}{4})\cdot\frac{1}{4}\cdot\Gamma(\frac{1}{4})}{3\cdot2\cdot1} = \frac{7}{8}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{7\pi}{4\sqrt{2}} \qquad (0,5đ)$$

Câu IV. (2,5đ)

$$1)\ I = \int_0^1 dx\int_0^1 xe^{x-y}dy + \int_0^1 dx\int_0^1 e^{x-y}dy =$$

$$= \int_0^1 xe^x dx\int_0^1 e^{-y}dy + \int_0^1 e^x dx\int_0^1 ye^{-y}dy = I_1 + I_2 \qquad (0,5đ)$$

$$I_1 = (xe^x - e^x)\Big|_0^1 \cdot (-e^{-y})\Big|_0^1 = (0+1).(-\frac{1}{e}+1) = \frac{e-1}{e}$$

$$I_2 = (e^x)\Big|_0^1 \cdot (-ye^{-y} - e^{-y})\Big|_0^1 = (e-1).(-\frac{2}{e}+1) = \frac{(e-1)(e-2)}{e}$$

$$\Rightarrow I = \frac{(e-1)^2}{e} \qquad (0{,}5đ)$$

2) Thông lượng cần tìm $\Phi = \iint\limits_S (x^2y + y^2z + z^2x)(dydz + dzdx + dxdy)$

Gọi D là mặt tròn: $\begin{cases} y^2 + z^2 \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$, hướng ngược với Ox $\to \Phi = \iint\limits_{S \cup D} \left(\text{do} \iint\limits_D = 0 \right)$

Áp dụng Ostro với V: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$

$$\to \Phi = \iiint\limits_V [x^2 + (z^2 - y^2) + 2(xy + yz - zx)]dxdydz \qquad (0{,}5đ)$$

Vai trò y, z trong V như nhau $\to \iiint\limits_V (z^2 - y^2)dxdydz = 0$

Miền V đối xứng qua y = 0 (z = 0) hàm lấy tích phân lẻ theo y(z) $\to$

$$\to \iiint\limits_V 2(xy + yz - zx)dxdydz = 0 \qquad (0{,}5đ)$$

$\to \Phi = \iiint\limits_V x^2dxdydz$. Chuyển toạ độ cầu $(x = r\cos\theta)$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2\cos^2\theta . r^2\sin\theta\, dr = 2\pi.\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\pi/2}\right).\left(\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^1\right) = \frac{2\pi}{15} \qquad (0{,}5đ)$$

(*) ***Chú ý:*** Câu III 2)

$I = 2\int_0^1 x\sqrt[4]{x^3(2-x)}dx$ có thể đặt $x = 2\sin^2 t \to dx = 4\sin t\cos t dt$

$$\to I = 8.4\int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{9}{2}} t\cos^{\frac{3}{2}} t dt = 32.\frac{1}{2}B\left(\frac{\frac{9}{2}+1}{2}, \frac{\frac{3}{2}+1}{2}\right) = 16B\left(\frac{11}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

ĐỀ 2

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K50 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5đ)

1) Viết phương trình tiếp tuyến và tiếp diện tại điểm $A(1;-1;\pi)$ của mặt

$$Z = 4\text{arctg}xy.$$

2) Tính $\iint\limits_S y^3 dzdx$, trong đó S là nửa mặt elipxoit $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$ hướng ra ngoài elipxoit là hướng của S.

Câu II. (2,5đ)

1) Tìm giới hạn $\lim\limits_{y \to 0} \int\limits_y^{\cos y} \arccos(x - y^2)dx$.

2) Tính $\iiint\limits_V z\cos(x^2 + y^2)dxdydz$, trong đó V xác định bởi

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \\ z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

Câu III. (2,5đ)

1) Chứng minh rằng biểu thức $\dfrac{x^3dx + 2y^3dy}{(x^4 + 2y^4 + 5)^2}$ là vi phân toàn phần của một hàm số $U(x, y)$ nào đó. Tìm $U(x, y)$.

2) Tính $\int\limits_{AB} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}\left[xdy - (x - y)dx\right]}{(x - y)^2}$

trong đó AB là đoạn thẳng đi từ $A(3;0)$ đến $B(0;-3)$

Câu IV. (2,5đ)

1) Tính $\iint\limits_D xy\ln(xy)dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $x = 1$, $x = e$, $y = 1$, $y = e$.

2) Tính thông lượng của trường vectơ:

$\vec{F} = \left(xy^2 + yz^2 - zx^2\right)\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$, qua nửa mặt cầu

S: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$, hướng ra ngoài mặt cầu là hướng của S.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) Viết phương trình mặt dạng F(x, y, z) = z – 4arctgxy = 0

$\Rightarrow F'_x = \dfrac{-4y}{1 + x^2y^2}$, $F'_y = \dfrac{4y}{1 + x^2y^2}$, $F'_z = 1$.

$\Rightarrow$ Tại A(1;–1;–π), vectơ pháp tuyến của mặt: $\overrightarrow{n_A} = (2, -2, 1)$ (0,5đ)

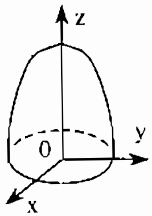
$\Rightarrow$ Phương trình pháp tuyến tại A: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+\pi}{1}$

Phương trình tiếp diện tại A:

$2(x-1) - 2(y+1) + 1(z+\pi) = 0$ hay $2x - 2y + z + \pi - 4 = 0$ (0,5đ)

2) Gọi D là mặt $\begin{cases} x^2 + 2y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$, hướng ngược với $\overrightarrow{Oz}$

$\rightarrow \iint\limits_D y^3 dydx = 0 \rightarrow I = \iint\limits_S = \iint\limits_{S \cup D}$ (0,5đ)



Áp dụng Ostro $\Rightarrow I = \iiint\limits_V 3y^2 dxdydz$, với

V: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r\sin\varphi\sin\theta \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} r\cos\theta \end{cases} \rightarrow |J| = \dfrac{1}{\sqrt{6}} r^2 \sin\theta$; $V \rightarrow V'\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$ (0,5đ)

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 3.\frac{1}{3} r^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta . \frac{1}{\sqrt{6}} r^2 \sin\theta dr$$

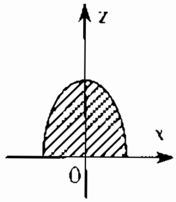
$$= \frac{3}{2\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)(-d\cos\theta) \int_0^1 r^4 dr$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{6}} .\pi.(1-\frac{1}{3}).\frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5\sqrt{6}} \qquad (0{,}5đ)$$

Cách 2: Gọi S^+, S^- là hai nửa mặt S tương ứng với $y \ge 0$ và $y \le 0 \Rightarrow$ $\overrightarrow{n_{S^+}}$ và $\overrightarrow{n_{S}}$ tạo với $\overrightarrow{Oy}$ góc nhọn, tù

Phương trình S^+: $y = \left(\frac{1-x^2-3z^2}{2}\right)^{1/2}$, phương trình S^-: $y = -\left(\frac{1-x^2-3z^2}{2}\right)^{1/2}$

S^+, S^- có cùng hình chiếu D: $\begin{cases} x^2+3z^2 \le 1 \\ z \ge 0 \ (y=0) \end{cases}$



$$\rightarrow \quad I = 2\iint_D \left(\frac{1-x^2-3z^2}{2}\right)^{3/2} dxdz \qquad (0{,}5đ)$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow |J| = \frac{r}{\sqrt{3}}$; $D \rightarrow D' \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)

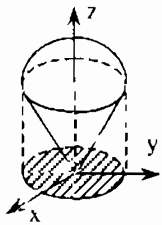
$$I = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{1-r^2}{2}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}} dr = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} \left[-\frac{(1-r^2)^{5/2}}{5} \Big|_0^1 \right] = \frac{\pi}{5\sqrt{6}} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu II. (2,5đ)

1) Hàm $f(x,y) = \arccos(x - y^2)$ liên tục $[0;1] \times [-\varepsilon;\varepsilon]$; cận $\cos y$, y liên tục $[-\varepsilon;\varepsilon] \rightarrow I(y)$ liên tục $[-\varepsilon;\varepsilon] \rightarrow \lim\limits_{y\to 0} I(y) = I(0)$. (0,5đ)

$$\lim_{y\to 0} I(y) = \int_0^1 \arccos x dx = x\arccos x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{-dx}{1-x^2} = 0 - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1 \qquad (0{,}5đ)$$

2) Đổi sang toạ độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r$



$$V \rightarrow V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r \le z \le \sqrt{2-r^2} \end{cases} \qquad (0{,}5đ)$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z.\cos r^2 dz = 2\pi \cdot \int_0^1 r\cos r^2 \left(\frac{z^2}{2} \right|_1^{\sqrt{2-r^2}}) dr = \pi \int_0^1 \cos r^2.(2-2r^2) rdr$$

(0,5đ)

$$= \pi \int_0^1 \cos t(2-2t)\frac{dt}{2} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (2-2t)d\sin t = \pi\left[[(1-t)\sin t]\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin t(-dt) \right] =$$

$$= \pi\,(1-\cos 1)$$ (0,5đ)

Cách 2: Đổi sang toạ độ cầu $\to |J| = r^2\sin\theta$; $V \to V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \end{cases}$ (0,5đ)

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\theta.\cos(r^2\sin^2\theta) r^2 \sin\varphi dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} rdr \int_0^{\pi/4} \cos(r^2\sin^2\theta)\frac{1}{2}d(r^2\sin^2\theta) = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sin(r^2\sin^2\theta)\Big|_0^{\pi/4} \right) rdr$$ (0,5đ)

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{r^2}{2}\right) d\left(\frac{r^2}{2}\right) = \pi\left(-\cos\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} \right) = \pi(1-\cos 1)$$ (0,5đ)

Câu III. (2,5đ)

1) $P = \dfrac{x^3}{(x^4+2y^4+5)^2} \Rightarrow P'_y = \dfrac{x^3.(-2).8y^3}{(x^4+2y^4+5)^3}$ (0,5đ)

$Q = \dfrac{2y^3}{(x^4+2y^4+5)^2} \Rightarrow Q'_x = \dfrac{2y^3(-2).4x^3}{(x^4+2y^4+5)^3}$ (0,5đ)

$\to Q'_x = P'_y$ (dpcm)

$$U(x,y) = \int_0^x \frac{x^3dx}{(x^4+5)^2} + \int_0^y \frac{2y^3dy}{(x^4+2y^4+5)^2} + C =$$

$$= \frac{-1/4}{(x^4+5)}\Bigg|_0^x + \frac{-1/4}{(x^4+2y^4+5)}\Bigg|_0^y + C = \frac{-1}{4(x^4+2y^4+5)} + C$$ (0,5đ)

Cách 2. Nhận thấy: $\dfrac{x^3dx + 2y^3dy}{(x^4+2y^4+5)^2} = \dfrac{\frac{1}{4}d(x^4+2y^4+5)}{(x^4+2y^4+5)^2} =$

$$= \left(\frac{\frac{1}{4}dt}{t^2} = \frac{-dt}{4t} \right) = d\left[\frac{-1}{4(x^4 + 2y^4 + 5)} + C \right]$$

2) Phương trình AB: $x - y = 3 \Leftrightarrow y = x - 3$; $x_A = 3$, $x_B = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \int_{AB} = \int_3^0 \frac{\sqrt[3]{x(x-3)^2}\,[x-3]dx}{3^2} \quad (*) \qquad (0,5đ)$$

Đặt $x = 3t \Rightarrow dx = 3dt$; $x\Big|_3^0 \to t\Big|_1^0 \Rightarrow I = \int_1^0 \sqrt[3]{t(t-1)^2}\,(t-1)3dt$

$$\Rightarrow I = 3\int_0^1 t^{1/3}(1-t)^{5/3}dt = 3B\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

$$I = 3\cdot\frac{\Gamma(\frac{4}{3})\cdot\Gamma(\frac{8}{3})}{\Gamma(4)} = 3\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\Gamma(\frac{1}{3})\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\Gamma(\frac{2}{3})}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{5}{27}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{10\pi}{27\sqrt{3}} \qquad (0,5đ)$$

Câu IV. (2,5đ)

$$1)\ I = \iint_D xy(\ln x + \ln y)dxdy = \int_1^e x\ln x dx\int_1^e ydy + \int_1^e xdx\int_1^e y\ln ydy =$$

$$= 2\int_1^e xdx\int_1^e y\ln ydy \qquad (0,5đ)$$

$$= \int_1^e xdx\int_1^e \ln ydy^2 = \left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e\right)\cdot\left(y^2\ln y\Big|_1^e - \int_1^e y^2\frac{1}{y}dy\right) =$$

$$= \frac{e^2-1}{2}\cdot\left[e^2 - \frac{e^2-1}{2}\right] = \frac{e^4-1}{4} \qquad (0,5đ)$$

2) Thông lượng $\Phi = \iint_S (xy^2 + yz^2 - zx^2)(dydz - dzdx + dxdy)$

Gọi D là mặt tròn: $\begin{cases} x^2 + z^2 \le 1 \\ y = 0 \end{cases}$, hướng ngược với Oy $\to \Phi\ \iint_S = \iint_{S\cup D} \left(\text{vì} \iint_D = 0\right)$.

Áp dụng Ostro với V: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

$$\to \Phi = \iiint_V [y^2 + (z^2 - x^2) + 2(xy + yz - zx)]dxdydz \qquad (0,5đ)$$

Vai trò x, z trong V như nhau $\rightarrow \iiint_V (z^2 - x^2)dxdydz = 0$

Miền V đối xứng qua x = 0 (z = 0) hàm lấy tích phân lẻ

$$\rightarrow \iiint_V 2(xy + yz - zx)dxdydz = 0 \qquad (0,5đ)$$

$\rightarrow \Phi = \iiint_V y^2 dxdydz$. Chuyển qua toạ độ cầu ($y = r\cos\theta$)

$$\ldots \rightarrow \Phi = \frac{2\pi}{15} \qquad (0,5đ)$$

(Xem đáp án đề 5).

ĐỀ 3

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K50 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5đ)

1) Tìm hình bao của họ đường thẳng $x\cos\alpha + 2y\sin\alpha = 3$ (α là tham số).

2) Cho hàm số $U = x\sin y - \text{arctg}\frac{x}{z}$ và 2 điểm A(−1;0;1), B(1;1;−1).

Tính $\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(A)$ theo hướng $\overrightarrow{AB}$. Tìm max $\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(A)$.

Câu II. (2,5đ)

1) Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^{\pi/2} dx \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\cos x} f(x,y)dy$.

2) Tính $\iiint_V \sqrt[3]{(x^2 + y^2)z^3}\,dxdydz$, trong đó V xác định bởi $\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$

Câu III. (2,5đ)

1) Tìm hệ thức giữa a và b để tích phân $\int_{AB} \frac{axdx - bydy}{(x^2 + 2y^2 + 3)^3}$ không phụ thuộc

đường đi từ A đến B.

2) Tính $\iint\limits_S x^3dydz - 2y^3dzdx + z^3dxdy$, trong đó S là mặt elipxoit $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Câu IV. (2,5đ)

1) Tính $\int_0^{+\infty} \frac{x^5dx}{2^{x^4}}$

2) Gọi L là biên của miền phẳng D xác định bởi: $1 \le x^2 + y^2 \le a^2$, hướng dương.

Chứng minh rằng với mọi a > 1 ta có $\oint\limits_L \frac{\ln(x^2 + ay^2)(xdy + ydx)}{x^2 + y^2} = 0$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) Phương trình họ đường thẳng: $F(x,y,\alpha) = x\cos\alpha + 2y\sin\alpha - 3 = 0$ (1)

$F'_\alpha = -x\sin\alpha + 2y\cos\alpha = 0$ (2) (0,5đ)

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = \frac{3}{2}\sin\alpha \end{cases}$ → Đó là phương trình tham số của hình bao (hay: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(3/2)^2} = 1$) (0,5đ)

2) $U'_x = \sin y - \frac{z}{x^2 + z^2}$; $U'_y = x\cos y$; $U'_z = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Tại A (−1;0;1) ta có $\overline{\text{grad}}\,U(A) = \left(\frac{-1}{2}; -1; \frac{-1}{2}\right)$ (0,5đ)

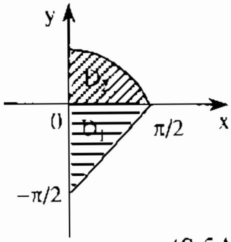
$\overrightarrow{AB} = (2;1;-2) \rightarrow \vec{l} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{-2}{3}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(A) = \frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3} - 1\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{3} = \frac{-1}{3}$ (0,5đ)

$\text{Max}\,\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(A) = \left|\overline{\text{grad}}\,U(A)\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (0,5đ)

Câu II. (2,5đ)

1) Miền lấy tích phân D: $\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x - \dfrac{\pi}{2} \le y \le \cos x \end{cases} \Rightarrow$



$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2$ (như hình vẽ)

$D_1 = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le y \le 0 \\ 0 \le x \le y + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ (0,5đ)

$D_2 = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le \arccos y \end{cases} \to I = \int\limits_{-\pi/2}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+\frac{\pi}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f(x,y)dx$ (0,5đ)

2) Chuyển sang toạ độ trụ

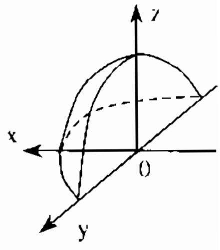
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \to |J| = r \qquad V \to V' \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 1 - r^2 \end{cases}$ (0,5đ)

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r dr \int\limits_{0}^{1-r^2} (r^2.z^3)^{1/4} dz = \pi \int\limits_{0}^{1} r^{2/4} \left(\frac{7}{4} z^{7/4} \Big|_{0}^{1-r^2} \right) \frac{dr^2}{2} =$$

$$= \frac{2\pi}{7} \int\limits_{0}^{1} r^{2/4}(1-r^2)^{7/4} dr^2 = \frac{2\pi}{7} \int\limits_{0}^{1} t^{1/4}(1-t)^{7/4} dt = \frac{2\pi}{7} B\left(\frac{5}{4}; \frac{11}{4}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{\pi}{64} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi^2}{32\sqrt{2}}$$ (0,5đ)



Câu III. (2,5đ)

1) $P = \dfrac{ax}{(x^2 + 2y^2 + 3)^3} \to P'_y = \dfrac{ax \cdot (-3) \cdot 4y}{(x^2 + 2y^2 + 3)^4}$

$Q = \dfrac{-by}{(x^2 + 2y^2 + 3)^3} \to Q'_x = \dfrac{-by \cdot (-3) \cdot 2x}{(x^2 + 2y^2 + 3)^4}$ (0,5đ)

Điều kiện: $Q'_x = P'_y \Leftrightarrow 4a = -2b$ hay $2a + b = 0$ (0,5đ)

2) Áp dụng Ostro: $I = \iiint\limits_V (3x^2 - 6y^2 + 3z^2)dxdydz$,

$$V: x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 1 \qquad (0{,}5đ)$$

Đặt $x = X,\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}Y,\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}Z \rightarrow |J| = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $V \rightarrow V^o:\ X^2 + Y^2 + Z^2 \le 1$

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_V (3X^2 - 3Y^2 + Z^2)\frac{1}{\sqrt{6}}dXdYdZ. \qquad (0{,}5đ)$$

Hoán vị vòng quanh X, Y, Z rồi cộng lại (V^o không đổi)

$$\Rightarrow 3I = \frac{1}{\sqrt{6}}\iiint\limits_{V^o}(X^2 + Y^2 + Z^2)dXdYdZ$$

Chuyển sang toạ độ cầu $\Rightarrow 3I = \frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2.r^2\sin\theta dr = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow I = \frac{4\pi}{15\sqrt{6}} \qquad (0{,}5đ)$$

Chú ý:

Sinh viên có thể tách I thành 3 tích phân để tính (đổi sang toạ độ cầu mở rộng).

Tính đúng đến đâu cho điểm tới đó.

Câu IV. (2,5đ)

1) $I = \int_0^{+\infty} x^5 \cdot e^{-x^4 \ln 2}dx$.

Đặt $t = x^4\ln 2 \rightarrow x = \left(\frac{t}{\ln 2}\right)^{1/4}$; $dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}-1}dt}{(\ln 2)^{1/4}}$; $x\big|_0^{+\infty} \rightarrow t\big|_0^{+\infty}$ $\Rightarrow I = \int_0^{+\infty}\frac{t^{5/4}}{(\ln 2)^{5/4}}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}-1}\cdot e^{-t}dt}{4(\ln 2)^{1/4}}$ (0,5đ)

$$I = \frac{1}{4(\ln 2)^{3/2}}\cdot\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{4(\ln 2)^{3/2}}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4(\ln 2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{8(\ln 2)^{3/2}} \qquad (0{,}5đ)$$

2) Gọi C_1, C_a lần lượt là đường tròn: $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = a$; hướng dương.

$\rightarrow \oint\limits_L = \oint\limits_{C_a} - \oint\limits_{C_1}$. Phương trình $C_1 \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, phương trìnht $C_a \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

(t tăng từ 0 đến 2π) (0,5đ)

$$\oint\limits_{C_1} = \int_0^{2\pi} \ln(\cos^2 t + a\sin^2 t)(\cos^2 t - \sin^2 t)dt = I_1$$

$$\oint\limits_{C_a} = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(a^2\cos^2 t + a^3\sin^2 t)(a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t)dt}{a^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln[a^2(\cos^2 t + a\sin^2 t)]\cdot\cos 2t\cdot dt \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln a^2\cdot\cos 2t + I_1 = \ln a^2 \left.\frac{\sin 2t}{2}\right|_0^{2\pi} + I_1 = 0 + I_1$$

$$\Rightarrow \oint\limits_L = \oint\limits_{C_a} - \oint\limits_{C_1} = 0 \quad \text{(đpcm)} \qquad (0{,}5đ)$$

ĐỀ 4

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K50 (Thời gian làm bài 90')

Câu I. (1,5đ)

1) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại điểm A(1;0;−1) của đường $x = e^{-t}\cos t$; $y = e^{-t}\sin t$; $z = t - 1$.

2) Cho hàm số $U = y\cos x - \operatorname{arccotg}\frac{z}{y}$ và điểm M(0;−1;1). Tính $\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(M)$ theo hướng $\overrightarrow{OM}$ (O là gốc toạ độ). Tìm x sao cho theo hướng $\vec{a} =)1;x;x^2)$ thì $\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(M = 0$.

Câu II. (2,5đ)

1) Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^{\pi/2} dx \int_{-x}^{\sin x} f(x,y)dy$.

2) Tính $\iiint\limits_V \sqrt[3]{z(x^2+y^2)^2}\,dxdydz$, trong đó V: $\begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$

Câu III. (2,5đ)

1) Tìm hệ thức giữa a và b để tích phân $\int\limits_{AB} \dfrac{ax^3dx + by^3dy}{(3x^4 + y^4 + 1)^2}$ không phụ thuộc đường đi từ A đến B.

2) Tính $\iint\limits_S 2xy^2dydz + yz^2dzdx - 3zx^2dxdy$, trong đó S là mặt elipxoit $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Câu IV. (2,5đ)

1) Tính $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^4dx}{3^{x^2}}$

2) Gọi L là biên của miền phẳng D: $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, hướng dương.

Chứng minh rằng với mọi $0 < a < 1$ ta có $\oint\limits_L \dfrac{\ln(ax^2 + y^2)(xdy + ydx)}{x^2 + y^2} = 0$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) $x' = e^{-t}(-\cos t - \sin t)$; $y' = e^{-t}(-\sin t + \cos t)$; $z' = 1$

Điểm A(1;0;−1) ứng với t = 0 ⇒ Vectơ tiếp tuyến tại A là

$$\vec{v}_a = (-1;1;1) \qquad (0,5đ)$$

Phương trình tiếp tuyến tại A: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$

Phương trình pháp diện: $-1(x-1) + y + (z+1) = 0$

$$\text{hay } x - y - z - 2 = 0 \qquad (0,5đ)$$

2) $U'_x = -y\sin x$; $U'_y = \cos x - \dfrac{z}{y^2 + z^2}$; $U'_z = \dfrac{y}{y^2 + z^2}$

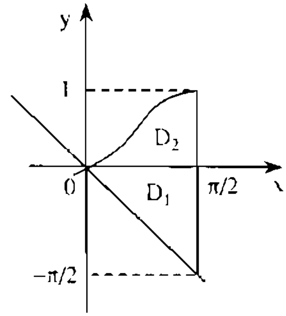
$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\, U(M) = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right). \qquad (0,5đ)$$

$$\vec{l} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \left(0;\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{+1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(M) = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{2}\cdot\frac{+1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad (0{,}5đ)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(M) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,U(M)\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 0.1 + \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad (0{,}5đ)$$

Câu II. (2,5đ)



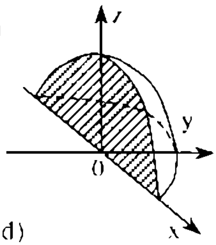
1) Miền lấy tích phân D: $\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -x \le y \le \sin x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2$ (như hình vẽ) (0,5đ)

$$D_1 = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le y \le 0 \\ -y \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad D_2 = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \arcsin y \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad (0{,}5đ)$$

$$I = \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \to I = \int_{-\pi/2}^{0} dy \int_{-y}^{\pi/2} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi/2} f(x,y)dx \quad (0{,}5đ)$$

2) Chuyển sang toạ độ trụ



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \to |J| = r \qquad V \to V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 1 - r^2 \end{cases} \quad (0{,}5đ)$$

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r^2} \sqrt{z.r^4}\,dz = \pi \int_0^1 r^{4/3}\left(\frac{3}{4} z^{4/3}\Big|_0^{1-r^2}\right)\frac{dr^2}{2}$$

$$\text{Đặt } t = r^2 \Rightarrow I = \frac{3\pi}{8}\int_0^1 t^{2/3}(1 - t^{4/3})dt = \frac{3\pi}{8}\cdot B\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right) \quad (0{,}5đ)$$

$$I = \frac{3\pi}{8}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{3\pi}{8}\cdot\frac{\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{\pi}{54}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{27\sqrt{3}} \quad (0{,}5đ)$$

Câu III. (2,5đ)

1) $P = \dfrac{ax^3}{(3x^4 + y^4 + 1)^2} \to P'_y = \dfrac{ax^3 \cdot (-2) \cdot 4y^3}{(3x^4 + y^4 + 1)^3}$

$Q = \dfrac{by^3}{(3x^4 + y^4 + 1)^2} \to Q'_x = \dfrac{by^3 \cdot (-2) \cdot 12x^3}{(3x^4 + y^4 + 1)^2}$ (0,5đ)

$\Rightarrow Q'_x = P'_y \Leftrightarrow 4a = 12b \Leftrightarrow a = 3b$ (0,5đ)

2) Áp dụng Ostro: $I = \iiint\limits_V (2y^2 + z^2 + 3x^2)dxdydz$.

$V: 3x^2 + 2y^2 + z^2 \le 1$ (0,5đ)

Đặt $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}X$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y$, $z = Z \Rightarrow I = \iiint\limits_{V''} (Y^2 + Z^2 - X^2)\dfrac{1}{\sqrt{6}}dXdYdZ$.

$V'' : X^2 + Y^2 + Z^2 \le 1$

Hoán vị X, Y, Z rồi cộng lại (V'' không đổi):

$3I = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \iiint\limits_V (X^2 + Y^2 + Z^2)dXdYdZ$ (0,5đ)

Chuyển sang toạ độ cầu

$\Rightarrow 3I = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{1} r^2.r^2 \sin\theta d\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\pi}{5\sqrt{6}}$

$\Rightarrow I = \dfrac{4\pi}{\sqrt{6}}$ (0,5đ)

Chú ý:

Sinh viên có thể tách I thành 3 tích phân để tính, đúng đến đâu cho điểm tới đó.

$I_1 = \iiint\limits_V 2y^2dxdydz = \iiint\limits_V z^2dxdydz = \iiint\limits_V 3x^2dxdydz$

(Mỗi tích phân đúng = 1/4 điểm)

Câu IV. (2,5đ)

1) $I = \int\limits_0^{+\infty} x^4 \cdot e^{-x^2 \ln 3}dx$.

Đặt $t = x^2\ln 3 \to x = \left(\frac{t}{\ln 3}\right)^{1/2}$: $x\Big|_0^{+\infty} \to t\Big|_0^{+\infty}$; $dx = \frac{dt}{2(t\ln 3)^{1/2}}$;

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{\ln 3}\right)^2 e^{-t}\cdot\frac{dt}{2(t\ln 3)^{1/2}} = \frac{1}{2(\ln 3)^{5/2}}\cdot\int_0^{+\infty} t^{3/2}\cdot e^{-t}dt = \frac{1}{2(\ln 3)^{5/2}} \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \frac{1}{2(\ln 3)^{5/2}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8(\ln 3)^{3/2}} \qquad (0{,}5đ)$$

2) Gọi C_1, C_a lần lượt là đường tròn: $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = a$; hướng dương.

$\to \oint\limits_L = \oint\limits_{C_a} - \oint\limits_{C_1}$. Phương trình $C_1\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t\end{cases}$, phương trình $C_a\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t\end{cases}$

(t tăng từ 0 đến 2π) (0,5đ)

$$\oint\limits_{C_1} = \int_0^{2\pi}\ln(a\cos^2 t + \sin^2 t)(\cos^2 t - \sin^2 t)dt =$$

$$\oint\limits_{C_a} = \int_0^{2\pi}\frac{\ln(a^3\cos^2 t + a^2\sin^2 t)(a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t)dt}{a^2} = I_1 =$$

$$= \int_0^{2\pi}[\ln a^2(a\cos^2 t + \sin^2 t)]\cdot\cos 2t\cdot dt \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \int_0^{2\pi}(\ln a^2)\cdot\cos 2tdt + I_1 = I_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint\limits_L = 0 \qquad \left(\int_0^{2\pi}(\ln a^2).\cos 2tdt = \ln a^2\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0\right) \quad \text{(đpcm)} \qquad (0{,}5đ)$$

ĐỀ 1

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K51 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (1 điểm)

Tìm hình bao của họ đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có diện tích giới hạn bởi elip: S = const.

Câu II. (1 điểm)

Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, trong đó D là hình phẳng

$$x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \leq x\sqrt{3}.$$

Câu IV. (1 điểm)

Tính $I = \iiint_\Omega y\cos(x+z)dxdydz$, trong đó Ω là vật thể được giới hạn bởi các mặt $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.

Câu V. (1 điểm)

$$I = \oint (\frac{1}{2}x^2 \sin 2y + x\cos y + x^3)dy - (y^3 + x\cos^2 y - \sin y)dx$$

trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ lấy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Câu VI. (1 điểm)

Tính $I = \oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$, trong đó L là đường cong kín giao của các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y - 3z = 0$, có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía hướng dương của trục Oz.

Câu VII. (1 điểm)

$\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, trong đó S là phần của mặt nón

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h$, $(h > 0)$, hướng ra phía ngoài.

Câu VIII. (1 điểm)

Tính $\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\frac{1}{r}$ với $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Câu IX. (1 điểm)

Tính $\int\limits_0^{\pi/2} (\mathrm{tg}x)^{\frac{1}{3}} dx$.

Câu X. (1 điểm)

Tính diện tích của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm phía trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

ĐÁP ÁN

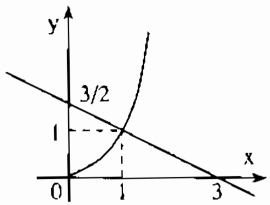
Câu I. (1đ)

$F = x^2 + \dfrac{\pi^2}{s^2}a + y^2 - a^2 = 0$ (0,5đ)

Hình bao: $xy = \pm\dfrac{s}{2\pi}$ (0,5đ)

Câu II. (1đ)

Vẽ hình (0,5đ)



$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$$ (0,5đ)

Câu III. (1đ)

Đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Miền D trở thành miền D': $\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$, $1 \le r \le 3$.

$$I = \iint\limits_{D'} \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\varphi).rdrd\varphi = \iint\limits_{D} \varphi rdrd\varphi$$ (0,5đ)

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \varphi d\varphi . \int\limits_1^3 rdr = \frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_1^3 = \frac{\pi^2}{6}$$ (0,5đ)

Câu IV. (1đ)

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{\pi/2-x} \cos(x+z) dz \qquad (0{,}5đ)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \sin(x+z)\Big|_0^{\pi/2-x} \; ; \; I = \int_0^{\pi/2} (1-\sin x) dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x(1-\sin x) dx \; ; \; I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\sin x dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu V. (1đ)

Đặt $P = -(y^3 + x\cos^2 y - \sin y)$, $Q = \frac{1}{2}x^2\sin 2y + x\cos y + x^3$ ta có:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3(x^2 + y^2).$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 3\iint_D (x^2 + y^2) dxdy \qquad (0{,}5đ)$$

Đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Miền D trở thành miền D': $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le a$.

Khi đó $I = 3\iint_{D'} r^2.rdrd\varphi = 3\int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^a r^3 dr$

$$= 3\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{4}r^4\Big|_0^a = 6\pi\frac{a^4}{4} = \frac{3\pi a^4}{2} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu VI. (1đ)

Theo công thức Stokes, ta có:

$$\oint (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = -2\iint_S dydz + dzdx + dxdy,$$

trong đó S là mặt tròn có biên là đường tròn L, có hướng lên trên so với trục Oz. Khi đó cosin chỉ hướng của vectơ pháp tuyến của mặt S: $x + y - 3z = 0$ là $\left\{\frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right\}$. (0,5đ)

$$I = 2\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)ds =$$

$$= \iint_S \left(\frac{-1}{\sqrt{11}} + \frac{-1}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}}\right) dS = \frac{2}{\sqrt{11}}\iint_S dS = \frac{2}{\sqrt{11}}\pi. \qquad (0,5đ)$$

Câu VII. (1đ)

Mặt S_1 $z = h$, vectơ pháp tuyến hướng lên trên, nên

$\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$, từ đó:

$$\iint_{S_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint_{S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$$

$$= \iint_{S_1} h^2dxdy = \pi h^4 \qquad (0,5đ)$$

Gọi V là khối nón $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h$, $h > 0$, theo công thức Ostrogradski ta có:

$$\iint_{S\cup S_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = 2\iiint_V (x + y + z)dxdydz$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h rdr \int_0^h [r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z]dz = \frac{1}{2}\pi h^4$$

Vậy $I = \frac{1}{2}\pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2}\pi h^4$ (0,5đ)

Câu VIII. (1đ)

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)''_{xx} + \left(\frac{1}{r}\right)''_{yy} + \left(\frac{1}{r}\right)''_{zz} \qquad (0,5đ)$$

Đặt $u = \frac{1}{r} \Rightarrow u'_x = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$,

$$u''_{xx} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},\ u''_{yy} = \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},\ u''_{zz} = \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}.$$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\frac{1}{r} = \frac{3}{r^5}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{3}{r^3} = 0 \qquad (0,5đ)$$

Cách khác: $\mathrm{div}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\dfrac{1}{r} = \mathrm{div}\left(-\dfrac{1}{r}\overrightarrow{\mathrm{grad}}r\right) = \mathrm{div}\left(-\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}\right) = 0$ với

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Câu IX. (1đ)

Đặt $tg^2x = t \Rightarrow 2tgx\,\dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt,\ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)}$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}(tgx)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/6}dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{2}{3}-1}dt}{(1+t)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu X. (1đ)

Hình chiếu của phần mặt nón cần tính diện tích trên mặt phẳng Oxy là hình tròn D giới hạn bởi $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ hay $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$.

$$\text{Ta có } \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2} \qquad (0{,}5đ)$$

Diện tích của phần mặt nón cần tính là

$$S_L = \iint_D\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \sqrt{2}S_D = 2\sqrt{2}\pi \ \ (\text{đvdt}) \qquad (0{,}5đ)$$

ĐỀ 2

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K51 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (1 điểm)

Tìm độ cong của đường cong $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ tại điểm $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Câu II. (1 điểm)

Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$.

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D \operatorname{arccotg}\frac{x}{y}dxdy$, trong đó D là hình phẳng

$x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq x$, $y \leq x\sqrt{3}$.

Câu IV. (1 điểm)

Tính $I = \iiint_\Omega y\sin(x+z)dxdydz$, trong đó Ω là vật thể được giới hạn bởi các mặt $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.

Câu V. (1 điểm)

Tính $\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(3y-x)dx + (y-3x)dy}{(x+y)^3}$ trong đó $\overset{\frown}{AB}$ là cung parabol $y = 2 - x^2$ đi từ điểm A(0;2) đến điểm B(1;1).

Câu VI. (1 điểm)

Tính $I = \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dx$, trong đó L là đường cong kín giao của các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + 2y + 3z = 0$, có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía hướng dương của trục Oz.

Câu VII. (1 điểm)

Tính $I = \iint_S x^3dydz + 4y^3dzdx + z^3dxdy$, trong đó S là phần của mặt elipxoit $z = -\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$, hướng ra phía ngoài.

Câu VIII. (1 điểm)

Trường vectơ $\overline{F} = [y + \ln(x+1)]\,\overline{i} + [x + 1 - e^y]\,\overline{j}$ có phải là trường thế không? Nếu đúng, tìm hàm thế vị của nó.

Câu IX. (1 điểm)

Tính $\int_{0}^{\pi/2} (\cot gx)^{\frac{1}{3}} dx$.

Câu X. (1 điểm)

Tính diện tích của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm phía trong mặt trụ $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (1đ)

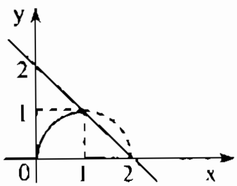
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3\cos^2 t \sin t \\ y' = 3\sin^2 t \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t \\ y'' = 6\cos^2 t \sin t - 3\sin^3 t \end{cases} \qquad (0{,}5đ)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \\ y' = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \\ y'' = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}} = \frac{2}{3} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu II. (1đ)

Vẽ hình (0,5đ)



$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2x - x^2}} f(x,y)dy + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy \qquad (0{,}5đ)$$

Câu III. (1đ)

Đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Miền D': $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, $1 \le r \le 3$.

$$I = \iint_{D'} \operatorname{arccotg}(\cot g\varphi).r dr d\varphi = \iint_{D'} \varphi r dr d\varphi \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \varphi d\varphi . \int_1^3 r dr = \left.\frac{\varphi^2}{2}\right|_{\pi/4}^{\pi/3} . \left.\frac{r^2}{2}\right|_1^3 = \frac{7\pi^2}{72} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu IV. (1đ)

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{\pi/2 - x} \sin(x+z) dz \qquad (0{,}5đ)$$

$$I = -\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \cos(x+z)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \cos x dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \frac{1}{2}\left[x\sin x\Big|_0^{\pi/2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] \qquad (0{,}5đ)$$

Câu V. (1đ)

Đặt $P = \frac{3y - x}{(x+y)^3}$, $Q = \frac{y - 3x}{(x+y)^3}$ ta có: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{6x - 6y}{(x+y)^4}$, $x \ne y$.

I không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ điểm A(0;2) đến B(1;1) (0,5đ)

Chọn đường lấy tích phân là đường thẳng AB, có phương trình $y = 2 - x$, $x: 0 \to 1$

$$I = \frac{1}{8}\int_0^1 4 dx = \frac{1}{2} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu VI. (1đ)

Theo Stokes, ta có:

$$\oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = -2\iint_S dydz + dzdx + dxdy,$$

trong đó S là mặt tròn có biên là đường tròn L hướng lên trên so với trục Oz. Khi đó cosin chỉ hướng của vectơ pháp tuyến của mặt S: $x + 2y + 3z = 0$ là

$\left\{\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$. (0,5đ)

Vậy $I = -2\iint\limits_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)ds =$

$$= -2\iint\limits_S\left(\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\right)dS = -\frac{12}{\sqrt{14}}\iint\limits_S dS = -\frac{12}{\sqrt{14}}\pi. \quad (0,5đ)$$

Câu VII. (1đ)

Mặt S_1 $z = 0$, $I_1 = \iint\limits_{S_1} x^3dydz + 4y^3dxdz + z^3dxdy = 0$

Theo Ostrogradski $I_2 = \iint\limits_{S\cup S_1} x^3dydz + 4y^3dxdz + z^3dxdy =$

$$= 3\iiint\limits_\Omega(x^2+4y^2+z^2)dxdydz \quad (0,5đ)$$

trong đó Ω: $-\sqrt{1-x^2-4y^2} \le z \le 0$, $I = I_2 - I_1 = I_2$

$$I = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi/2}^{0}d\theta\int_0^1\rho^4\sin\theta d\rho = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi/2}^{0}\sin\theta d\theta\int_0^1\rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\theta)\Big|_{-\pi/2}^{0}\cdot\frac{r^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\cdot 2\pi(-1)\cdot\frac{1}{5} = -\frac{3\pi}{5} \quad (0,5đ)$$

Câu VIII. (1đ)

$P = y + \ln(x+1)$, $Q = x + 1 - e^y$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = [1-1]\vec{k} = 0 \quad (0,5đ)$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow u = yx + x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow C'(y) = 1 - e^y$, $C(y) = y - e^y$

Vậy $u = yx + x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + y - e^y$ (0,5đ)

Câu IX. (1đ)

$$\cot g^2 x = t \Rightarrow -2\operatorname{tg}x\frac{dx}{\sin^2 x} = dt,\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}(\cot gx)^{\frac{1}{3}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{6}}dt}{\sqrt{t}(1+t)} \qquad (0{,}5đ)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{2}{3}-1}dt}{(1+t)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2}B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu X. (1đ)

Hình chiếu của phần mặt nón cần tính diện tích trên mặt phẳng Oxy là hình tròn D giới hạn bởi $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ hay $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Ta có $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$ (0,5đ)

Diện tích của phần mặt nón cần tính là

$$S_c = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \sqrt{2}S_D = 5\sqrt{2}\pi \text{ (đvdt)} \qquad (0{,}5đ)$$

ĐỀ 3

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K51 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (1 điểm)

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

$x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^3$ tại điểm (1;0;1).

Câu II. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D (x + y)(x + 2y)dxdy$, trong đó D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x$, $y = 1 - x$, $2x + y = 0$, $2x + y = 2$.

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, trong đó D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{a^2-x^2}$, $y = 0$, $(a > 0)$.

Câu IV. (1 điểm)

Tính $I = \iiint\limits_\Omega xy^2z^3dxdydz$, trong đó Ω là vật thể được giới hạn bởi các mặt $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

Câu V. (1 điểm)

Sử dụng tích phân bội ba tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2-y^2}$.

Câu VI. (1 điểm)

Tính $\int\limits_{\widehat{AB}} (2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$ trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $y = \dfrac{1}{\pi}x^2$ đi từ A(0;0) đến B(π;π).

Câu VII. (1 điểm)

Tính $\iint\limits_S 2xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$, trong đó S là mặt ngoài của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

Câu VIII. (1 điểm)

Tính lưu số của trường $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ dọc theo đường tròn $x^2 + (y-2)^2 = 1$, $z = 0$, có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía hướng dương của trục Oz.

Câu IX. (1 điểm)

Tính $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3-x^4}}$.

Câu X. (1 điểm)

Tính $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$, $(\alpha \in R, k \in R^+)$.

Câu I. (1đ)

$t = 1$, $x' = 2t$, $y' = -1$, $z' = 3t^2$, $t = 1 \Rightarrow x' = 2$, $y' = -1$, $z' = 3$. (0,5đ)

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện

$$2x - y + 3z - 5 = 0,\quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu II. (1đ)

Đặt $u = x + y$, $v = 2x + y$, ta có $J = -1$, D': $\begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2 \end{matrix}$ (0,5đ)

$$I = \iint_{D'} u.v.1.dudv = \int_0^1 udu \cdot \int_0^2 vdv = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 \frac{1}{2}v^2\Big|_0^2 = 1 \qquad (0{,}5đ)$$

Câu III. (1đ)

Đổi biến $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $J = r$, D': $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le r \le a$.

$$I = \iint_{D'} \ln(1+r^2)rdrd\varphi = \int_0^\pi d\varphi . \int_0^a \ln(1+r^2)rdr \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi d\varphi . \int_0^a \ln(1+r^2)d(1+r^2) = \frac{\pi}{2}[(1 + a^2)\ln(1 + a^2) - a^2] \qquad (0{,}5đ)$$

Câu IV. (1đ)

$$I = \int_0^1 xdx \int_0^x y^2dy \int_0^{xy} z^3dz \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx \int_0^x y^6dy = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{364} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu V. (1đ)

$$V = \iiint_\Omega dxdydz;\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,\ J = r,$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{r} rdz \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 - r^3)dr = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6} \text{ (đvtt)} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu VI. (1đ)

$P = 2x\cos y - y^2\sin x$, $Q = 2y\cos x - x^2\sin y$.

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin x - 2x\sin y = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ liên tục trên R^2, I không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ $A(0;0)$ đến $B(\pi;\pi)$. (0,5đ)

Ta chọn đường lấy tích phân là đường gấp khúc ACB, trong đó $C(0;\pi)$. Khi đó ta được:

$$I = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy$$

$$= \int_0^{\pi} 2ydy - \int_0^{\pi} (2x + \pi^2 \sin x)dx = -2\pi^2 \qquad (0{,}5đ)$$

Câu VII. (1đ)

$I = \iiint_{\Omega} (2z + x^2 + y^2)dxdydz$, Ω là vật thể $x^2 + y^2 - 2x \le 0$, $0 \le z \le x^2 + y^2$

$$I = \iint_D dxdy \int_0^{x^2+y^2} (2z + x^2 + y^2)dz = 2\iint_D (x^2 + y^2)^2 dxdy$$

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $|J| = r$, D': $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le r \le 2\cos\varphi$ (0,5đ)

$$I = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^5 dr = 2\cdot\frac{1}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2^6 \cos^6\varphi d\varphi = \frac{1}{3}\cdot 2^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^3 d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 3\cos 2\varphi + \frac{3}{2}(1 + \cos 4\varphi) + (1 - \sin^2 2\varphi)\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi + \frac{3}{2}\varphi + \frac{3}{8}\sin 4\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{20\pi}{3} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu VIII. (1đ)

Lưu số của trường $\vec{F}$ trên đường cong kín $I = \oint_L -ydx + xdy + 2dz$

trong đó L là đường tròn $x^2 + (y-2)^2 = 1$, $z = 0$

Phương trình tham số của đường tròn $\begin{cases} x = \cos t \\ y - 2 = \sin t \end{cases}$ $t: 0 \to 2\pi$ (0,5đ)

$$I = \int_0^{2\pi}[(-2-\sin t)(-\sin t) + \cos t.\cos t]\,dt = \int_0^{2\pi}[1 + 2\sin t]\,dt =$$

$$= [t - 2\cos t]\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$ (0,5đ)

Câu IX. (1đ)

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3 - x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}} = \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{4}}dx =$ (0,5đ)

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{4}-1}(1-x)^{\frac{3}{4}-1}dx = B\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \pi\sqrt{2}$$ (0,5đ)

Câu X. (1đ)

$f(x,\alpha) = e^{-kx}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$, đạo hàm $f'_\alpha(x,\alpha) = e^{-kx}\cos\alpha x$.

$\left|e^{-kx}\cos\alpha x\right| \le e^{-kx}$, $\forall x$, $\forall\alpha$;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx$ hội tụ nên $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos\alpha x dx$ hội tụ đều. 0,5đ)

Do đó $\dfrac{\partial I}{\partial\alpha} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos\alpha x dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}$, $I(\alpha) = \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{k} + C$.

$I(0) = 0$. Vậy $I = \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{k}$ (0,5đ)

ĐỀ 4

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K51 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (1 điểm)

Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy \text{ tại điểm } (3;4;-7).$$

Câu II. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D (y - x)(y + 2x)dxdy$, trong đó D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = 1 + x$, $2x + y = 0$, $2x + y = 2$.

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D \text{arctg}(1 + x^2 + y^2)dxdy$, trong đó D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $(a > 0)$.

Câu IV. (1 điểm)

Tính $I = \iiint_\Omega xyzdxdydz$, trong đó Ω là vật thể được giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z = 0$.

Câu V. (1 điểm)

Sử dụng tích phân bội ba tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = h^2$, $hz = x^2 + y^2$, $z = 0$, $(h > 0)$.

Câu VI. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \int_{(1,2)}^{(3;-1)} (y^2e^x + 6xy)dx + (3x^2 + 2ye^x)dy$.

Câu VII. (1 điểm)

Tính $I = \iint_S 4x^3dydz + 9y^3dxdz + y^3dxdy$, trong đó S là mặt ngoài của vật thể giới hạn bởi $z = \sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2}$, $z = 0$.

Câu VIII. (1 điểm)

Tính lưu số của trường $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ dọc theo đường tròn $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía hướng dương của trục Oz.

Câu IX. (1 điểm)

Tính $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2 - x^4}}$.

Câu X. (1 điểm)

Tính $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$, $(\alpha \in R, k \in R^+)$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (1đ)

$F(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2} + xy = 0$,

$F_x = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y$, $F_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x$, $F_z = 1$

$F_x(M) = \dfrac{17}{5}$, $F_x(M) = \dfrac{11}{5}$, $F_z(M) = 1$, chọn $\vec{n} = (17;11;5)$ (0,5đ)

Phương trình tiếp diện $17(x-3) + 11(y-4) + 5(z+7) = 0$

Phương trình tiếp tuyến $\dfrac{x-3}{17} = \dfrac{y-4}{11} = \dfrac{z+7}{5}$ (0,5đ)

Câu II. (1đ)

Đặt $u = x - y$, $v = 2x + y$, ta có $|J| = -1$, D': $\begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2 \end{cases}$ (0,5đ)

$I = \displaystyle\iint_{D'} u.v.\frac{1}{3}.dudv = \frac{1}{3}\int_0^1 udu \cdot \int_0^2 vdv = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2}v^2\Big|_0^2 = \frac{1}{3}$ (0,5đ)

Câu III. (1đ)

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ta có D': $\pi \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le a$.

$$I = \iint_{D'} \text{arctg}(1+r^2)rdrd\varphi = \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi . \int_0^a \text{arctg}(1+r^2)rdr = \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi . \int_0^a \text{arctg}(1+r^2)d(1+r^2) = \frac{\pi}{2}\int_1^{1+a^2} \text{arctg}t dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}[(1 + a^2)\text{arctg}(1 + a^2) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1 + (1 + a^2)^2) + \frac{1}{2}\ln 2] \qquad (0{,}5đ)$$

Câu IV. (1đ)

$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, $|J| = \rho^2\sin\theta$,

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho^3 \sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi).\rho^2\sin\theta d\rho \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 \rho^5 d\rho = 0 \qquad (0{,}5đ)$$

Câu V. (1đ)

$V = \iiint_{\Omega} dxdydz$: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $J = r$,

$$I = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^h dr \int_0^{r^2/h} rdz \qquad (0{,}5đ)$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^h \frac{r^3}{h} dr = \varphi\Big|_0^{\pi/2} . \frac{r^4}{h}\Bigg|_0^h = \frac{\pi h^3}{2} \text{ (đvtt)} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu VI. (1đ)

$P = y^2e^x + 6xy$, $Q = 3x^2 + 2ye^x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 2ye^x = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ liên tục trên R^2, tích phân I không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ A(1;2) đến B(3;−1).

(0,5đ)

Ta chọn đường lấy tích phân là đường gấp khúc ACB, trong đó C(1;−1). Khi đó ta được:

$$I = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy = \int_{2}^{-1} (3 + 2ey)dy + \int_{1}^{3} (e^x - 6x)dx =$$

$$= (3y + ey^2)\Big|_2^{-1} + (e^x - 3x^2)\Big|_1^3 = e^3 - 4e - 33 \qquad (0{,}5đ)$$

Câu VII. (1đ)

Theo công thức Ostrogradski

$$I = \iiint_{\Omega} (4x^2 + 9y^2 + z^2)dxdydz,\ \Omega:\ 0 \le z \le \sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2}.$$

$$x = \frac{1}{2}\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \frac{1}{3}\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta,\ J = \frac{1}{6}\rho^2\sin\theta,$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^4 \sin\theta d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{5} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu VIII. (1đ)

Lưu số của trường $\vec{F}$ trên đường cong kín $I = \oint_L -ydx + xdy + 3dz$

trong đó L là đường tròn $(x - 2)^2 + y^2 = 1,\ z = 0$

Phương trình tham số của đường tròn $\begin{cases} x - 2 = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $t: 0 \to 2\pi$ (0,5đ)

$$I = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + (2 + \cos t).\cos t]\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [1 + 2\cos t]\,dt = [t + 2\sin t]\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \qquad (0{,}5đ)$$

Câu IX. (1đ)

Đặt $x^2 = t,\ x = t^{\frac{1}{2}},\ dx = t^{\frac{1}{2}-1}dt$

Ta có $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2 - x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{1 - x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1}(1-t)^{-\frac{1}{4}} dt =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1}(1-t)^{\frac{3}{4}-1} dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu X. (1đ)

$f(x,\alpha) = e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}$, đạo hàm $f'_\alpha(x,\alpha) = e^{-kx}\cos\alpha x$.

$\left|e^{-kx}\cos\alpha x\right| \le e^{-kx}$, $\forall x$, $\forall\alpha$;

$\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx$ hội tụ nên $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos\alpha x dx$ hội tụ đều. (0,5đ)

Do đó $\frac{\partial I}{\partial\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos\alpha x dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}$, $I(\alpha) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k} + C$.

$I(0) = 0$. Vậy $I = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k}$ (0,5đ)

ĐỀ 1

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K52 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

a) Lập phương trình tiếp diện và pháp tuyến tại $A(1;-1;\pi)$ của mặt $Z = 4\operatorname{arctg}\sqrt{2x^2 - y^2}$.

b) Chứng minh rằng trường vectơ

$\vec{F} = \left[\sin(x^2 + 2y^2 - 3z^2)\right](x\vec{i} + 2y\vec{j} - 3z\vec{k})$ là trường thế.

Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

Câu II. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint_D \frac{dxdy}{1 + (x^2 + y^2)^2}$, với $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$

b) Tính $\iiint\limits_V \frac{\sin x\sin(y+z)}{\sin y\sin z}dxdydz$

với V là hình hộp: $0\le x\le\pi$, $\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}\le z\le\frac{\pi}{2}$.

Câu III. (2,5 điểm)

a) Chứng minh rằng tích phân đường

$I=\int\limits_{AB}(3y^2\cos^2x+1)y\sin x dx-(3y^2\cos^3x+\cos x)dy$ không phụ thuộc đường đi từ A đến B. Tính I, biết $A(0;\pi)$, $B(\pi;0)$.

b) Tính $\int\limits_{AB}(2y+y\sin xy)dx-(2x-x\sin xy)dy$ với AB là cung nhỏ của đường tròn $x^2+y^2=1$; $A(0;1)$, $B(1;0)$.

Câu IV. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint\limits_S z^2\sqrt{2x-x^2-y^2}\,dxdy$, với S là mặt kín giới hạn vật thể: $0\le z\le\sqrt{2x-x^2-y^2}$, hướng ra ngoài.

b) Tính $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+4x^4)^2}$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

a) Phương trình mặt $F(x,y,z)=4\operatorname{arctg}\sqrt{2x^2-y^2}-z$

$\Rightarrow F'_x=\frac{8x}{(1+2x^2-y^2)\sqrt{2x^2-y^2}}$; $F'_y=\frac{-4y}{(1+2x^2-y^2)\sqrt{2x^2-y^2}}$; $F'_z=-1$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến tại A: $\vec{n}_A=(4;2;-1)$ (0,5đ)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp diện tại A:

$4(x-1)+2(y+1)-(z-\pi)=0$ hay $4x+2y-z-2+\pi=0$

Phương trình pháp tuyến: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-\pi}{-1}$ (0,5đ)

b) $R'_y = 4y(-3z)\cos(x^2+2y^2-3z^2) = Q'_z = -6z\cdot 2y\cdot\cos(x^2+2y^2-3z^2)$

$P'_z = -6z\cdot x\cdot\cos(x^2+2y^2-3z^2) = R'_x$;

$Q'_z = 2x\cdot 2y\cdot\cos(x^2+2y^2-3z^2) = P'_x$

$\Rightarrow \vec{F}$ là trường thế (0,5đ)

Hàm thế vị

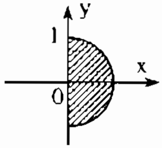
$$U = \int_0^x x\sin x^2dx + \int_0^y 2y\sin(x^2+2y^2)dy + \int_0^z -3z.\sin(x^2+2y^2-3z^2)dz + C \quad (0,5đ)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^x - \frac{1}{2}\cos(x^2+2y^2)\Big|_0^y - \frac{1}{2}\cos(x^2+2y^2-3z^2)\Big|_0^z + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2+2y^2-3z^2) + C \quad (0,5đ)$$

Câu II. (2,5đ)

a) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r;\ D \to D' : \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)



$$\Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{1+r^4} = \pi\cdot\frac{1}{2}\text{arctgr}^2\Big|_0^1 = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8} \quad (0,5đ)$$

b) $I = \displaystyle\iiint_V \frac{\sin x(\sin y\cos z + \cos y\sin z)}{\sin y\sin z}dxdydz =$

$$= \int_0^{\pi}\sin xdx\int_{\pi/4}^{\pi/2}dy\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\cos y}{\sin y}\right)dz \quad (0,5đ)$$

$$= \left(-\cos\Big|_0^{\pi}\right)\left[\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\ln\sin z + z\cdot\frac{\cos y}{\sin y}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}dy\right]$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\left(0 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\cos y}{\sin y}\right]dy \quad (0,5đ)$$

$$= 2\left[\left(y\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\ln\sin y\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}\right] = 2\left[\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\left(0-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{4}\left(\ln\sqrt{2}+\ln\sqrt{2}\right) = \pi\ln\sqrt{2} \qquad (0{,}5đ)$$

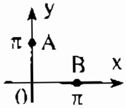
Câu III (2,5đ)

a) $P'_y = 9y^2\cos^2x\sin x + \sin x = Q'_x \rightarrow$ I không phụ thuộc đường đi. (0,5đ)

$I = \int\limits_{AO} + \int\limits_{OA}$;

phương trình AO: $x = 0 \rightarrow \int\limits_{AO} = \int\limits_{\pi}^{0} -(3y^2+1)dy = \pi^3 + \pi$ (0,5đ)

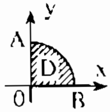
phương trình OB: $y = 0 \rightarrow \int\limits_{OB} = 0$. Vậy $I = \pi^3 + \pi$ (0,5đ)



b) *Cách 1*:

$I = \int\limits_{\widehat{AB}\cup BO\cup OA} - \int\limits_{BO} - \int\limits_{OA}$.

Dễ thấy $\int\limits_{OB} = 0 = \int\limits_{OA}$, $I = -\oint\limits_{AOB\widehat{A}}$ (0,5đ)



$Q'_x = -2 + \sin xy + xy\cos xy$

$P'_x = 2 + \sin xy + xy\cos xy$

Gọi D là $\frac{1}{4}$ hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Áp dụng Gren $\rightarrow I = -\iint\limits_{D}(-2-2)dxdy = 4SCD = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$ (0,5đ)

Cách 2: (trực tiếp, chú ý chiều từ t_A đến $t_B \rightarrow$ sai 0 điểm)

Phương trình $\widehat{AB}$: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t_A = \frac{\pi}{2}$, $t_B = 0$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{\pi/2}^{0}\left[(2\sin t + \sin t.\sin(\cos t\sin t)(-\sin t) - (2\cos t - \cos t\sin(\cos t\sin t)\cos t\right]dt \quad (0{,}5đ)$$

$$= \int_{\pi/2}^{0}\left\{(-2\sin^2 t-2\cos^2 t)+\left[\sin(\cos t\sin t)\right](-\sin^2 t+\cos^2 t\right\}dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}2dt - \int_0^{\pi/2}\sin\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)\cdot\cos 2t\,dt = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2}\sin\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)d\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)$$

$$= \pi + \cos\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi + 0 = \pi \qquad (0{,}5đ)$$

Câu IV (2,5đ)

a) *Cách 1:* Gọi S^+ là nửa mặt cầu $z=\sqrt{2x-x^2-y^2}$, hướng ra ngoài mặt cầu.

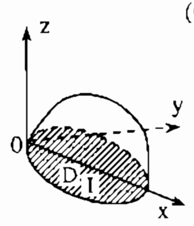
D là hình tròn $\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$, hướng ngược với $\overrightarrow{Oz}$.

Vì phương trình D: $z=0 \Rightarrow \iint\limits_D z^2\sqrt{2x-x^2-y^2}\,dxdy=0$

$$\rightarrow \iint\limits_S = \iint\limits_{S^+\cup D} = \iint\limits_{S^+}$$

phương trình S^+: $z=\sqrt{2x-x^2-y^2} \Rightarrow I = \iint\limits_{S^+} z^2\sqrt{2x-x^2-y^2}\,dxdy$

$$= \iint\limits_{S^+} z^2 z\,dxdy = \iint\limits_{S^+\cup D} z^3dxdy \qquad (0{,}5đ)$$



Áp dụng Ostrogradski $\rightarrow I = \iiint\limits_V 3z^2dxdydz$

(V giới hạn bởi S $\rightarrow$ V: $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2\le 1\\ z\ge 0\end{cases}$)

Đặt $\begin{cases}x=1+r\cos\varphi\sin\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases} \rightarrow |J|=r^2\sin\theta$; $V\rightarrow V'$: $\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\pi/2\\ 0\le r\le 1\end{cases}$ (0,5đ)

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 3r^2 \cos^2\theta \cdot r^2 \sin\theta d\theta$$

$$= 2\pi \left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/2} \right) \cdot \left(3\frac{r^5}{5}\Big|_0^1 \right) = \frac{2\pi}{5} \qquad (0{,}5đ)$$

Cách 2: Vì phương trình D: $z = 0 \to I = \iint_{S^+} z^2 \sqrt{2x - x^2 - y^2}\,dxdy$,

hình chiếu của S lên Oxy là $D^+ : x^2 + y^2 \le 2x$

$\vec{\eta}_s$ tạo với $\overrightarrow{Oz}$ góc nhọn $\to I = \iint_{D^+} (2x - x^2 - y^2)^{3/2} dxdy$ (0,5đ)

Đặt $\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to |J| = r,\ D^+ \to D'$: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)

$$\to I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2)^{3/2} r dr = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - r^2\right)^{5/2} \frac{2}{5}\Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right)\left(-\frac{2}{5} \right) = \frac{2\pi}{5} \qquad (0{,}5đ)$$

Cách 3: Áp dụng ngay Ostrogradski $\to I = \iiint_V 2z\sqrt{2x - x^2 - y^2}\,dxdydz$

Đặt $\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$$\to I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 2r\cos\theta(1 - r^2\sin^2\theta)^{1/2} r^2 \sin\theta\, dr \qquad (0{,}5đ)$$

$$= 4\pi \int_0^1 rdr \int_0^{\pi/2} (1 - r^2\sin^2\theta)^{1/2} \left(\frac{1}{2} d(1 - r^2\sin^2\theta) \right)$$

$$= -2\pi \int_0^1 r\left[(1 - r^2\sin^2\theta)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\Big|_0^{\pi/2} \right] dr = -\frac{4\pi}{3} \int_0^1 r\left[(1 - r^2)^{3/2} - 1\right] dr \qquad (0{,}5đ)$$

$$= +\frac{4\pi}{3}\left[\frac{r^2}{2} + \frac{1}{2}(1-r^2)^{5/2}\frac{2}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right) = \frac{2\pi}{5} \qquad (0{,}5đ)$$

b) Đặt $y = 4x^4 \Leftrightarrow x = \left(\frac{y}{4}\right)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{1}{4}} \rightarrow dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}y^{\frac{1}{4}-1}dy$ (0,5đ)

$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}y^{\frac{1}{4}-1}dy}{(1+y)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{3}{16\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{16} \qquad (0{,}5đ)$$

ĐỀ 2

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K52 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

a) Lập phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến tại A(1; 1) của đường $2\sin(x^2 - y^2) = \pi - 4\text{arctg}\frac{y}{x}$.

b) Chứng minh rằng trường vectơ

$\vec{F} = \left[\cos(3x^2 - 2y^2 - z^2)\right](3x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} - z\,\vec{k})$ là trường thế.

Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

Câu II. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$, với $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 3 \\ y \ge 0 \end{cases}$

b) Tính $\iiint\limits_V \frac{\cos x\cos(y-z)}{\cos y\sin z}dxdydz$

với V là hình hộp: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6} \le z \le \frac{\pi}{2}$.

Câu III. (2,5 điểm)

a) Chứng minh rằng tích phân đường

$$I = \int_{AB} (x^2\cos^3 y - \cos y)dx - (x^2\cos^2 y - 1)x\sin y dy$$ không phụ thuộc

đường đi từ A đến B. Tính I, biết A(π; 0), B(0; π).

b) Tính $\int_{AB} (3y + ytgxy)dx - (x - xtgxy)dy$ với AB là cung nhỏ của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$; A(1; 0), B(0; −1).

Câu IV. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint_S z^2\sqrt{2y - y^2 - x^2}\,dxdy$, với S là mặt kín giới hạn vật thể:

$0 \le z \le \sqrt{2y - y^2 - x^2}$, hướng ra ngoài.

b) Tính $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^2}$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

a) Phương trình đường $F(x,y) = 2\sin(x^2 - y^2) + 4\text{arctg}\frac{y}{x} - \pi = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x = 4x\cos(x^2 - y^2) - \dfrac{4y}{x^2 + y^2} \\ F'_y = -4y\cos(x^2 - y^2) + \dfrac{4x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

→ Vectơ pháp tuyến tại A(1;1): $\overrightarrow{\eta_A} = (2; -2) = 2(1; -1)$ (0,5đ)

Phương trình tiếp tuyến tại A: (x − 1) − (y − 1) = 0 hay x − y = 0

Phương trình pháp tuyến: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1}$ hay x + y − 2 = 0 (0,5đ)

b) $R'_y = -4y.z.\sin(x^2 - 2y^2 - 2z^2) = Q'_z$

$P'_z = +6z.x.\sin(3x^2 - 2y^2 - z^2) = R'_x$;

$Q'_x = 12x.y.\sin(3x^2 - 2y^2 - z^2) = P'_y$

$\Rightarrow \vec{F}$ là trường thế (0,5đ)

Hàm thế vị

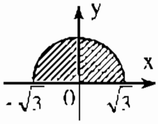
$$U = \int_0^x 3x\cos(3x^2)dx + \int_0^y (-2y)\cos(3x^2 - 2y^2)dy +$$

$$+ \int_0^z (-z).\cos(3x^2 - 2y^2 - z^2)dz + C \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \frac{1}{2}\sin(3x^2 - 2y^2 - z^2) + C \qquad (0{,}5đ)$$

Câu II. (2,5đ)

a) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r;\ D \to D' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le \sqrt{3} \end{cases}$ (0,5đ)



$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{rdr}{\sqrt{4 - r^2}} = \pi\left(-\sqrt{4 - r^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi(-1 + 2) = \pi \qquad (0{,}5đ)$$

b) $$I = \iiint_V \frac{\cos x(\cos y\cos z + \sin y\sin z)}{\cos y\sin z} dxdydz =$$

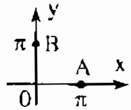
$$= \int_0^{\pi} \cos x dx \left[\int_{\pi/4}^{\pi/3} dy \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\sin y}{\cos y}\right) dz\right] \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}\right)\left[\int_0^{\pi/3} dy \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos z}{\sin z} dz + \int_{\pi/6}^{\pi/2} dz \int_0^{\pi/3} \frac{\sin y}{\cos y} dy\right] \qquad (0{,}5đ)$$

$$= 1\left[\frac{\pi}{3}\ln\sin z\Big|_{\pi/46}^{\pi/2} + \frac{\pi}{3}(-\ln\cos y\Big|_0^{\pi/3}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[-\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}\right] = \frac{2\pi\ln 2}{3}$$ (0,5đ)

Câu III. (2,5đ)



a) $P'_y = -3x^2\cos^2 y\sin y + \sin y = Q'_x$

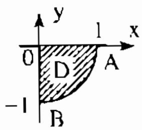
→ I không phụ thuộc đường đi. (0,5đ)

$I = \int\limits_{AO} + \int\limits_{OA}$;

phương trình AO: $y = 0 \to \int\limits_{AO} = \int_{\pi}^{0}(x^2-1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = \pi - \frac{\pi^3}{3}$ (0,5đ)

phương trình OB: $x = 0 \to \int\limits_{OB} = 0$. Vậy $I = \pi - \frac{\pi^3}{3}$ (0,5đ)

b) *Cách 1*:



$I = \int\limits_{\widehat{AB}\cup BO\cup OA} - \int\limits_{BO} - \int\limits_{OA}$.

Dễ thấy $\int\limits_{OB} = 0 = \int\limits_{OA} \Rightarrow I = -\oint\limits_{AO\widehat{BA}}$ (0,5đ)

$$Q'_x = 1 - \left(\mathrm{tg}xy + \frac{xy}{\cos^2 xy}\right)$$

$$P'_x = \left[3 - \left(\mathrm{tg}xy + \frac{xy}{\cos^2 xy}\right)\right]$$

Gọi D là $\frac{1}{4}$ hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \le 0$.

Áp dụng Gren → $I = -\iint\limits_{D}(Q'_x - P'_y)\,dxdy = \frac{\pi}{2}$ (0,5đ)

Cách 2: (trực tiếp)

Phương trình $\widehat{AB}$: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t_A = 0$; $t_B = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{-\pi/2} [3\sin t \cdots] dt \qquad (0{,}5đ)$$

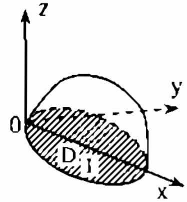
$$= \cdots \qquad (0{,}5đ)$$

Câu IV. (2,5đ)

a) Tương tự đề 1.

Cách 1. Gọi S^+ là nửa mặt cầu $z = \sqrt{2y - y^2 - x^2}$, hướng ra ngoài mặt cầu.

D là hình tròn $\begin{cases}(y-1)^2 + x^2 \le 1 \\ z = 0\end{cases}$, hướng ngược với $\overrightarrow{Oz}$.



Vì phương trình D: $z = 0 \Rightarrow \iint_D z^2\sqrt{2y - y^2 - x^2}\,dxdy = 0$

$$\rightarrow \iint_S = \iint_{S^+\cup D} = \iint_{S^+} = \iint_{S^+} z^2 z\,dxdy = \iint_S z^3 dxdy \qquad (0{,}5đ)$$

Áp dụng Ostrogradski $\rightarrow I = 3\iiint_V z^2 dxdydz$

(V là nửa khối cầu có biên là S)

$$\text{Đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = 1 + r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \rightarrow |J| = r^2\sin\theta;\ V \rightarrow V': \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 1 \end{cases} \qquad (0{,}5đ)$$

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2\cos^2\theta \cdot r^2\sin\theta d\theta$$

$$= 3.2\pi\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^1\right) = \frac{2\pi}{5} \qquad (0{,}5đ)$$

Cách 2: (tương tự đề 1)...

$$I = \iint_D (2y - y^2 - x^2)^{3/2} dxdy\ ;\ D: x^2 + y^2 \le 2y^2 \qquad (0{,}5đ)$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 1 + r\sin\varphi \end{cases} \to |J| = r,\ D \to D': \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)

$$\to I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{3/2}\, r dr = \cdots = \frac{2\pi}{5}$$ (0,5đ)

Cách 3. Áp dụng ngay Ostrogradski, tương tự đề 1 (với y = 1 + r.sinφcosθ)

b) Đặt $x^2 = 2y \Leftrightarrow x = \sqrt{2y} \to dx = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, $y\Big|_0^{+\infty}$

$$\to I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}y^{\frac{1}{2}-1}dy}{2\cdot(2+2y)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2^3}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{1}{2}-1}dy}{(1+y)^2}$$ (0,5đ)

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$ (0,5đ)

ĐỀ 3

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K52 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

a) Tìm hình bao của họ đường cong $1 + k^2(x+1) = ky^2$ (k là tham số).

b) Cho hàm số $u = \ln(x + y^2 + z^3)$ và điểm M (2;−2;1). Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M)$ theo hướng $\overrightarrow{OM}$, (O là gốc toạ độ). Tìm $\max\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M)\right|$

Câu II. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint_D \frac{\cos(x-y)}{\sin x\cos y}dxdy$, với D là hình vuông $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6} \le y \le \frac{\pi}{3}$.

b) Tính $\iiint\limits_V |z|\sin(x^2+y^2)dxdydz$ với V xác định bởi: $x^2 + y^2 \le \pi$, $x \ge 0$,

$|z| \le 2$.

Câu III. (2,5 điểm)

a) Tìm a để biểu thức $y\left(ax^3 - \sqrt[3]{1+xy}\right)dx + x\left(x^3 - \sqrt[3]{1+xy}\right)dx$ là vi phân toàn phần của hàm số u(x,y) nào đó. Tìm u.

b) Tính $\int\limits_{AB}\left[\sin(x^2+y^2)\right](y^3dx - x^3dy)$ với AB là cung tròn

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - x^2},\ A\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}};0\right),\ B\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}};0\right)$$

Câu IV. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint\limits_S 2xy^2dydz + 2yz^2dzdx + 3zx^2dxdy$,

với S là mặt elipxoit $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

b) Chứng minh rằng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{3^{yx} - 1}{x9^x}dx$ $(x < 2)$, là hàm số khả vi trong khoảng $(-\infty, 2)$. Tính $I'(y)$ và $I(y)$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

a) Phương trình họ đường cong $F(x,y,k) = 1 + k^2(x+1) - ky^2 = 0$ (1).

Dễ thấy không có điểm kỳ dị.

$$F'_k = 2k(x+1) - y^2 = 0 \quad (2) \quad (0,5đ)$$

Từ (1), (2) $\rightarrow (x+1) \neq 0 \rightarrow k = \frac{y^2}{2(x+1)}$. Thế vào (1) ta được:

$$1 + \frac{y^4}{4(x+1)} - \frac{y^4}{2(x+1)} = 0 \Rightarrow y^4 = 4(x+1) \quad (0,5đ)$$

b) $U'_x = \dfrac{1}{x+y^2+z^3}$, $U'_y = \dfrac{2y}{x+y^2+z^3}$, $U'_z = \dfrac{3z^2}{x+y^2+z^3}$

$$\rightarrow \overrightarrow{\text{Grad}}\, U(M) = \left(\frac{1}{7}; \frac{-4}{7}; \frac{3}{7};\right) \qquad (0{,}5đ)$$

$$|\overrightarrow{OM}| = 3 \Rightarrow \vec{e} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \left(\frac{2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3};\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(M) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7} = \frac{13}{21} \qquad (0{,}5đ)$$

$$\text{Max}\left|\frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(M)\right| = |\overrightarrow{\text{Grad}}\, U(M)| = \frac{\sqrt{26}}{7} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu II. (2,5đ)

$$\text{a) } I = \iint_D \frac{\cos x\cos y + \sin x \sin y}{\sin x \cos y}\,dxdy = \iint_D \frac{\cos x}{\sin x}\,dxdy + \iint_D \frac{\sin y}{\cos x}\,dxdy \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} dy \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin x} + \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin y}{\cos y}\,dy = \frac{\pi}{6}\left[\ln\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \ln\cos y\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot 2\ln\sqrt{3} = \frac{\pi\ln\sqrt{3}}{3} \qquad (0{,}5đ)$$

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r;\quad V \rightarrow V': \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le \sqrt{\pi} \\ -2 \le z \le 2 \end{cases} \qquad (0{,}5đ)$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\pi}} dr \int_{-2}^{2} |z|\cdot(\sin r^2)\cdot r dz = \pi\cdot\int_0^{\sqrt{\pi}} (\sin r^2)\frac{dr^2}{2}\cdot\int_{-2}^{2}|z|\,dz$$

$$= \pi\,\frac{1}{2}\left(-\cos r^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}\right)\cdot 2\int_0^2 z dz = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(z^2\Big|_0^2\right) = 4\pi \qquad (0{,}5đ)$$

Câu III. (2,5đ)

a) $P'_y = ax^3 - \left[\sqrt[3]{1+xy} + \dfrac{1}{3}xy(1+xy)^{\frac{1}{3}-1}\right]$

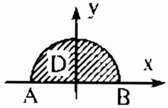
$$Q'_x = 4x^3 - \left[\sqrt[3]{1+xy} + \frac{1}{3}xy(1+xy)^{\frac{1}{3}-1}\right]$$

Điều kiện $Q'_x = P'_y \Rightarrow a = 4$ (0,5đ)

$U(x,y) = \displaystyle\int_0^x 0\cdot dx + \int_0^y \left(x^4 - x\sqrt[3]{1+xy}\right)dy + C = x^4y - \frac{3}{4}(1+xy)^{4/3} + C$ (0,5đ)

b) *Cách 1:* Phương trình $\overset{\frown}{AB}$: $x^2 + y^2 = \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} 1\cdot(y^3dx - x^3dy)$ (0,5đ)



Vì phương trình BA: $y = 0 \to \displaystyle\int_{BA} y^3dx - x^3dy = 0$

$\to I = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}\cup BA} - \oint_{AB\cup \overset{\frown}{BA}}$ (0,5đ)

Áp dụng Gren $\to I = 3\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy =$

$$= 3\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} r^2 r.dr = 3\pi\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{3\pi^3}{16}$$ (0,5đ)

Cách 2: (trực tiếp)

Phương trình $\overset{\frown}{AB}$: $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cos t \\ y = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sin t \end{cases}$; $t_A = \pi;\ t_B = 0$

$$\Rightarrow\ I = \int_0^{\pi} \sin\frac{\pi}{2}\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin t\right)^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}(-\sin t) - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos t\right)^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos t\right]dt \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \int_0^{\pi} 1\cdot\left(\frac{\pi^2}{4}\sin^4 t + \frac{\pi^2}{4}\cos^4 t\right)dt = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi}(1 - 2\sin^2 t\cos^2 t)\,dt$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1-\cos 4t}{4}\right)dt = \frac{3\pi^3}{16} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu IV. (2,5đ)

a) Áp dụng Ostrogradski $\rightarrow$ $I = \iiint\limits_V (2y^2 + 2z^2 + 3x^2)\,dxdydz$

$$3x^2 + 2y^2 + 2z^2 \le 1$$

Đặt $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r\sin\varphi\sin\theta \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r\cos\varphi \end{cases}$; $|J| = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot r^2\sin\theta$; $V \rightarrow V'$: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^2\,\frac{r^2 dr}{2\sqrt{3}} = 2\pi\cdot\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \qquad (0{,}5đ)$$

b) Chứng minh I(y) khả vi

$$I'(y) = \int_0^{+\infty}\frac{3^{yx}\ln 3}{9^x}dx = \int_0^{+\infty} 3^{(y-2)x}(\ln 3)dx = \frac{3^{(y-2)x}}{y-2}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{-1}{y-2} \qquad (0{,}5đ)$$

Vì $I(0) = 0 \rightarrow I(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{-1}{t-2}dt = -\ln|t-2|\,\Big|_0^y$

$$= -\ln|y-2| + \ln 2 = \ln\frac{2}{2-y} \quad (y < 2) \qquad (0{,}5đ)$$

ĐỀ 4

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K52 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

a) Tìm độ cong tại điểm ứng với $t = 1$ của đường $\begin{cases} x = t\cos t - \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$

b) Cho hàm số $u = \sqrt[3]{x^3 - y^3 - z^3}$ và 2 điểm $M(1;1;-1)$, $N(-1;2;1)$. Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M)$ theo hướng $\overrightarrow{MN}$. Tìm $\max \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) \right|$

Câu II. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint\limits_D \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} dxdy$, với D là hình vuông $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{4}$.

b) Tính $\iiint\limits_V |z| \cos(x^2 + y^2) dxdydz$ với V xác định bởi: $x^2 + y^2 \le \frac{\pi}{2}$, $y \ge 0$, $|z| \le 1$.

Câu III. (2,5 điểm)

a) Tìm a để biểu thức $\left(y^3 + \frac{y}{1 + x^2 y^2} \right) dx + \left(axy^2 + \frac{y}{1 + x^2 y^2} \right) dy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$ nào đó. Tìm u.

b) Tính $\int\limits_{AB} \left[\cos(x^2 + y^2) \right] (y^3 dx - x^3 dy)$ với AB là cung tròn

$$x = \sqrt{\pi - y^2},\ A\left(0; \sqrt{\pi}\right),\ B\left(0; -\sqrt{\pi}\right)$$

Câu IV. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint\limits_S 3x^3 dxdz + 2y^3 dzdx + z^3 dxdy$,

với S là mặt elipxoit $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

b) Chứng minh rằng $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1-2^{yx}}{x8^x} dx$ $(y < 3)$, là hàm số khả vi trong khoảng $(-\infty, 3)$. Tính $I'(y)$ và $I(y)$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

a) $x' = -t\sin t,\ x'' = -\sin t - t\cos t$

$y' = t\cos t,\ y'' = \cos t - t\sin t$ (0,5đ)

$\rightarrow x'^2 + y'^2 = t^2 - 1,$

$y''x' - y'x'' = (-t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t) - (-t\sin t\cos t - t^2\cos^2 t) = t^2 = 1$

$$\rightarrow C = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad (0,5đ)$$

b) $$U'_x = \frac{x^2}{(x^3 - y^3 - z^3)^{2/3}},\ U'_y = \frac{-y^2}{(x^3 - y^3 - z^3)^{2/3}},\ U'_z = \frac{-z^2}{(x^3 - y^3 - z^3)^{2/3}}$$

$\rightarrow \overrightarrow{\text{Grad}}\, U(M) = (1; -1; -1)$ (0,5đ)

$$\overrightarrow{MN} = (-2;1;2) \rightarrow |\overrightarrow{MN}| = 3 \Rightarrow \vec{e} = \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \left(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3};\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(M) = \frac{-2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{3} \qquad (0,5đ)$$

$$\text{Max} \left|\frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(M)\right| = |\overrightarrow{\text{Grad}}\, U(M)| = \sqrt{3} \qquad (0,5đ)$$

Câu II. (2,5đ)

a) $$I = \iint_D \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y} dxdy = \iint_D \frac{\sin x}{\cos x} dxdy + \iint_D \frac{\sin y}{\cos y} dxdy \quad (0,5đ)$$

$$= \int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{\cos x} + \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\pi/4} \frac{\sin y}{\cos y} dy$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{4}(-\ln\cos x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi\ln\sqrt{2}}{2}$$ (0,5đ)

b) $I = 2\iiint\limits_{V^+} z(r)(x^2+y^2)\,dxdy$ với V^+: $\begin{cases} x^2+y^2 \le \dfrac{\pi}{2} \\ y \ge 0 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow \ |J| = r;\quad V^+ \to V'$: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le \sqrt{\pi/2} \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)

$$\Rightarrow\ I = 2\int_0^1 zdz\int_0^{\pi} d\varphi \int_{-2}^{\sqrt{\pi/2}} (\cos r^2)\cdot rdr$$

$$= 2\cdot\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^1\right)\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\sin r^2\Bigg|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\pi}{2}$$ (0,5đ)

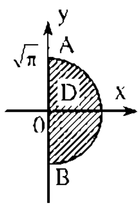
Câu III. (2,5đ)

a) $$P'_y = 3y^2 + \frac{1}{1+x^2y^2} - \frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$Q'_x = ay^2 + \frac{1}{1+x^2y^2} - \frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

Điều kiện $Q'_x = P'_y \ \Rightarrow\ a = 3$ (0,5đ)

$$U(x,y) = \int_0^x 0\cdot dx + \int_0^y\left(3xy^2 + \frac{x}{1+x^2y^2}\right)dy + C = xy^3 + \text{arctg}xy + C$$ (0,5đ)



b) *Cách 1:* Phương trình $\widehat{AB}$: $x^2 + y^2 = \pi$

$$\Rightarrow\ I = \int_{\widehat{AB}} (-1)(y^3dx - x^3dy)$$ (0,5đ)

Vì phương trình BA: $x = 0 \to \int\limits_{BA}(-1)(y^3dx - x^3dy) = 0$

$$\to I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}\cup BA}(-1)(y^3dx - x^3dy) - \oint\limits_{\overset{\frown}{AB}\cup BA} y^3dx - x^3dy \qquad (0,5đ)$$

Áp dụng Gren $\to I = \iint\limits_D -3(x^2 + y^2)\,dxdy$

$$= -3\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{\pi}}r^2 r.dr = -3\pi\cdot\frac{r^4}{4}\bigg|_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{-3\pi^3}{4} \qquad (0.5đ)$$

Cách 2. (trực tiếp) (tương tự đề 3)

Phương trình $\overset{\frown}{AB}$: $\begin{cases} x = \sqrt{\pi}\cos t \\ y = \sqrt{\pi}\sin t \end{cases}$; $t_A = \frac{\pi}{2}$; $t_B = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_{+\pi/2}^{-\pi/2}(-1)(-\pi^2\sin^4 t - \pi^2\cos^4 t)\,dt = -\frac{3\pi^3}{4} \qquad (0,5đ)$$

Câu IV. (2,5đ)

a) Áp dụng Ostrogradski $\to I = \iiint\limits_V 3(3x^2 + 2y^2 + z^2)\,dxdydz$

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 \le 1$$

Đặt $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$; $|J| = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot r^2\sin\theta$; $V \to V'$: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ (0,5đ)

$$I = 3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1 r^2\,\frac{r^2dr}{\sqrt{6}} = 3\cdot 2\pi\cdot\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\cdot\frac{r^5}{5\sqrt{6}}\bigg|_0^1 = \frac{2\pi\sqrt{6}}{5} \qquad (0,5đ)$$

b) Chứng minh I(y) khả vi

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln 2}{2^{(3-y)x}}\,dx = \left.\frac{-2^{(y-2)x}}{-(3-y)}\right|_0^{+\infty} = \frac{-1}{3-y} \qquad (0{,}5đ)$$

$$\text{Vì } I(0) = 0 \to I(y) = \int_0^y I'(t)\,dt = \int_0^y \frac{1}{t-3}\,dt$$

$$= \ln|t-3|\Big|_0^y = \ln\frac{3-y}{3} \qquad (0{,}5đ)$$

VII. BẢNG HÀM GAMMA

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad \text{với } 1 \le x \le 2$$

(với các giá trị khác sử dụng công thức $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$)

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	,90640	1,50	,88623	1,75	,91906
1,01	,99433	1,26	,90440	1,51	,88659	1,76	,92137
1,02	,98884	1,27	,90250	1,52	,88704	1,77	,92376
1,03	,98355	1,28	,90072	1,53	,88757	1,78	,92623
1,04	,97844	1,29	,89904	1,54	,88818	1,79	,92877
1,05	,97350	1,30	,89747	1,55	,88887	1,80	,93138
1,06	,96874	1,31	,89600	1,56	,88964	1,81	,93408
1,07	,96415	1,32	,89464	1,57	,89049	1,82	,93685
1,08	,95973	1,33	,89338	1,58	,89142	1,83	,93969
1,09	,95546	1,34	,89222	1,59	,89243	1,84	,94264
1,10	,95136	1,35	,89115	1,60	,89352	1,85	,94561
1,11	,94740	1,36	,89018	1,61	,89468	1,86	,94869
1,12	,94359	1,37	,88931	1,62	,89592	1,87	,95184
1,13	,93993	1,38	,88854	1,63	,89724	1,88	,95507
1,14	,93642	1,39	,88785	1,64	,89864	1,89	,95838
1,15	,93304	1,40	,88726	1,65	,90012	1,90	,96177
1,16	,92980	1,41	,88676	1,66	,90167	1,91	,96523
1,17	,92670	1,42	,88636	1,67	,90330	1,92	,96788
1,18	,92373	1,43	,88604	1,68	,90500	1,93	,97240
1,19	,92089	1,44	,88581	1,69	,90678	1,94	,97610
1,20	,91817	1,45	,88566	1,70	,90864	1,95	,97988
1,21	,91558	1,46	,88560	1,71	,91057	1,96	,98374
1,22	,91311	1,47	,88563	1,72	,91258	1,97	,98768
1,23	,91075	1,48	,88575	1,73	,91467	1,98	,99171
1,24	,90852	1,49	,88595	1,74	,91683	1,99	,99581
						2,00	1,00000