TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH I

Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến

DÙNG CHO SINH VIÊN KỸ THUẬT, CAO ĐẲNG, ĐẠI HỌC, SAU ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH I

PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

DÙNG CHO SINH VIÊN KỸ THUẬT,
CAO ĐẲNG, ĐẠI HỌC, SAU ĐẠI HỌC

In lần thứ 9, có sửa chữa và bổ sung

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2009

Lời giới thiệu

Trong những năm gần đây yêu cầu về giảng dạy và học tập môn toán cao cấp trong các Trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học) ngày càng cấp bách về số lượng và chất lượng. Các sinh viên kỹ thuật cần nhiều giáo trình toán cao cấp theo hướng hiện đại về lý thuyết cũng như bài tập. Các thầy giáo cũng cần nhiều bộ giáo trình như thế để tham khảo, chuẩn bị bài giảng và chọn cho mình một chiến lược giảng dạy thích hợp. Trong lúc đó số lượng các giáo trình về toán cao cấp dành cho các trường kỹ thuật chỉ đếm được trên đầu ngón tay. Nhiều bộ giáo trình về toán cao cấp đã được xuất bản hiện nay chưa đạt trình độ cao, sâu sắc, đáp ứng được yêu cầu học toán và dạy toán cho các kỹ sư trong thời đại khoa học kỹ thuật và thông tin phát triển bùng nổ như hiện nay.

Giáo trình này của tác giả ra đời đáp ứng được nhiều nhu cầu hết sức cấp bách hiện nay về mặt giáo trình toán cao cấp cho sinh viên các Trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học). Về toàn cục nội dung của giáo trình này bao gồm các vấn đề cơ bản và quan trọng nhất của toán học cao cấp cần thiết cho một kỹ sư: đó là những cơ sở quan trọng của phép tính vi phân của hàm một biến và hàm nhiều biến, các định lý và phương pháp cơ bản của phép tính tích phân của hàm một biến và nhiều biến, cơ sở của giải tích vecteur, hình học vi phân, lý thuyết cơ bản về phương trình vi phân, chuỗi hàm, chuỗi Fourier và tích phân Fourier. Các thông tin đề cập đến các vấn đề trên của cuốn sách là cơ bản, đảm bảo tính chính xác về nội dung toán học. Các chứng minh đưa ra đều ngắn gọn, chặt chẽ.

Đặc biệt phần lý thuyết về hàm nhiều biến là một vấn đề rất tinh tế trong giải tích toán học, vì ở đây nhiều tình huống xảy ra phức tạp hơn nhiều ở trong Topo nhiều chiều so với Topo một chiều. Do nắm vững các kiến thức cơ bản của giải tích toán học dựa trên kinh nghiệm giảng dạy toán học cho các Trường Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, tác giả đã trình bày toàn bộ giáo trình và nói riêng nội dung của phần này rất đầy đủ và hiện đại (ví dụ phần đề cập đến cực trị của hàm nhiều biến, tác giả đã sử dụng nhuần nhuyễn các định lý về dạng toàn phương để chứng minh các điều kiện đủ của cực trị).

Giáo trình được viết một cách sáng sủa và chặt chẽ theo một dây chuyền tư duy logique, đó là hai yếu tố rất khó trong khi đề cập đến một vấn đề về toán học. Thông thường để vấn đề đặt ra đảm bảo tính chặt chẽ và chính xác của toán học thì người đọc sẽ rất khó hiểu hoặc phải có một khả năng tư duy tốt, nói cách khác là một thói quen tư duy toán học. Ở đây tác giả đã kết hợp được hai điều nói trên : vẫn không mất tính chính xác mà vẫn đảm bảo tính dễ hiểu cho sinh viên (ví dụ phần xây dựng hệ tiên đề về số thực, phần tích phân phụ thuộc tham số, tích phân suy rộng ...)

Giáo trình cũng đề cập đến một số vấn đề khá hiện đại của toán học mà trước đây trong các giáo trình về toán cao cấp ít đề cập tới như khái niệm không gian métrique, hội tụ đều, chuỗi Fourier tổng quát v.v... Ngoài ra tác giả còn đưa vào các phân bố xung rất cần thiết cho người kỹ sư như các phần ... toán tử Laplace giải phương trình vi phân, các bài toán cơ bản của vật lý toán học (truyền nhiệt, truyền sóng v.v...), phần phụ lục các công thức cơ bản của giải tích toán học. Việc mạnh dạn đưa vào giáo trình các vấn đề cơ bản nhất của toán học như thế này là một việc làm rất cần thiết để nâng cao chất lượng đào tạo người kỹ sư, vì ngày nay người kỹ sư cần toán học ở mức độ sâu sắc và hiện đại trong quá trình học tập để tiếp cận với công nghệ và tin học hiện đại.

Hà nội, ngày 30 tháng 4 năm 1997

GS. TSKH. Lê Hùng Sơn

Lời nói đầu

Trong những năm vừa qua, Khoa Toán trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã nghiên cứu đề tài: "**Xây dựng nội dung chương trình toán cao cấp cho các ngành kỹ thuật trên cơ sở ở trung học, học sinh đã học toán theo chương trình mới (12 năm)**" và đã đề ra được một chương trình toán cao cấp theo yêu cầu đó.

Qua giảng dạy môn giải tích ở các Trường Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, và dựa theo chương trình mà Khoa Toán đã đề ra, tôi đã viết giáo trình này, nhằm mục đích giúp các sinh viên kỹ thuật có tài liệu tham khảo, góp phần nâng cao chất lượng đào tạo, để trình độ toán của người kỹ sư nước ta hoà nhập được vào khu vực và Quốc tế.

Trong phần đầu của giáo trình, vì sinh viên đã được học một số nội dung ở trung học, nên mục đích là hệ thống hoá và nâng lên một mức độ tương đối hiện đại (Phương pháp tiên đề về số thực) nhằm giúp sinh viên có một tư duy logique chặt chẽ trong việc học toán và các ngành khác.

Trong các phần sau của giáo trình, dựa trên cơ sở phần đầu đã trình bày, giáo trình sẽ cung cấp những kiến thức cơ bản của giải tích từ thấp lên cao phù hợp với yêu cầu của người kỹ sư trong hiện tại và tương lai.

Giáo trình này có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho các sinh viên kỹ thuật ở cả ba đối tượng: Cao đẳng, Đại học và sau Đại học.

Giáo trình được chia thành [illegible]

Tập I : Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến (Giải tích I)

Tập II : Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến

Phương trình vi phân và lý thuyết về chuỗi (Giải tích II + III)

Các phần nâng cao và các bài tập khó có đánh dấu *.

Tôi rất cám ơn Hội đồng khoa học Khoa Toán Trường Đại học Bách khoa Hà nội và các bạn đồng nghiệp trong khoa đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi viết giáo trình này, nhất là các GS. PGS Trần Xuân Hiển, Đặng Khải, Lê Hùng Sơn, Dương Quốc Việt đã đọc rất kỹ bản thảo và cho nhiều ý kiến quí báu.

Giáo trình đã in đến lần thứ 8 vẫn không tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc cho nhiều ý kiến.

Tác giả

MỤC LỤC

Chương 3

DAO HÀM VÀ VI PHÂN

Chương 4

CAC ĐINH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ÁP DỤNG

Chương 5

TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Chương 6

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Chương 7

HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

Chương 1

TẬP HỢP CÁC SỐ THỰC

§1. HỆ TIÊN ĐỀ CỦA R

1.1. Đặt vấn đề

Do nhu cầu thực tiễn, đầu tiên loài người có tập hợp các số tự nhiên, rồi có tập hợp các số nguyên, các số hữu tỉ, v.v....

Ở trung học ta đã định nghĩa: số hữu tỉ là số có dạng p/q, trong đó p, q là các số nguyên, $q \neq 0$. Sau khi có tập hợp các số hữu tỉ, một bài toán lớn đã đặt ra: Cho a là 1 số hữu tỉ dương ($a > 0$), n là một số tự nhiên thì có tồn tại số hữu tỉ x sao cho $x^n = a$ (1).

Rõ ràng, nói chung thì có thể không tồn tại số hữu tỉ x thoả mãn (1).

Chẳng hạn khi $a = 2$, $n = 2$ thì không tồn tại số hữu tỉ x để $x^2 = 2$. Thực vậy, giả sử ngược lại có số hữu tỉ $x = p/q$ (p/q là 1 phân số tối giản) để $x^2 = 2$ hay $p^2/q^2 = 2$ hay $p^2 = 2q^2$, nghĩa là p^2 là một số chẵn, suy ra p là một số chẵn, mặt khác p/q là tối giản, nên q là một số lẻ, vì p là chẵn: $p = 2m$ ta có $4m^2 = 2q^2$ chứng tỏ q^2 lại là một số chẵn và q là một số chẵn. Mâu thuẫn này chứng tỏ điều khẳng định trên là đúng. Do đó, người ta đã mở rộng tập hợp số hữu tỉ thành một tập hợp số gọi là tập hợp các số thực, trong tập hợp các số thực, ngoài các số hữu tỉ, còn có những số không phải hữu tỉ chẳng hạn: số x mà $x^2 = 2$ hay số π xuất hiện khi đo độ dài đường tròn . Để có một khái niệm hiện đại về tập hợp các số thực, sau đây ta sẽ định nghĩa tập hợp đó theo phương pháp tiên đề.

1.2. Hệ tiên đề của tập hợp các số thực *R*

Tập hợp các số thực, ký hiệu là R là tập hợp có các phần tử gọi là các số thực, thoả mãn các tiên đề sau:

I. Trong R có xác định hai phép toán gọi là phép cộng (+) và phép nhân (.) sao cho:

$\forall\, a,b \in R$: $a + b \in R$, $ab \in R$, $a + b$, ab là duy nhất, gọi $a + b$ là tổng, ab là tích của a và b. $\forall\, a,b \in R$: $a + b = b + a$, $ab = ba$

$\forall\, a,b,c \in R$: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a.b)c = a(bc)$,

$a(b + c) = ab + ac$

II. $\forall a,b \in R$ có một phần tử duy nhất $x \in R$ sao cho: $a + x = b$

x gọi là hiệu của b và a, ký hiệu $x = b - a$ (đọc là b trừ a). Đặc biệt khi $b = a$ thì x gọi là số không, ký hiệu $x = 0$

Như vậy $\forall a \in R$, $a + 0 = a$, nếu $a + b = 0$ thì b gọi là phần tử đối của a, ký hiệu $b = -a$ như vậy $\forall a \in R$, $a + (-a) = 0$

III. $\forall a,b \in R$ ($a \neq 0$; $\neq$: khác) có một phần tử duy nhất $x \in R$ sao cho $a.\ x = b$, x gọi là thương của b và a, ký hiệu $x = b/a$.

Đặc biệt khi $b = a$ thì x gọi là đơn vị hay số một

ký hiệu: 1, như vậy, $\forall a \in R$: $a.1 = a$.

Nếu $ab = 1$ $(a \neq 0)$ thì b gọi là số nghịch đảo của a

Ký hiệu $b = a^{-1}$ như vậy:

$\forall a \in R$, $a \neq 0$, $a.a^{-1} = 1$

IV. Trong R có xác định một quan hệ gọi là quan hệ thứ tự: nhỏ hơn hoặc bằng ($\leq$) hay lớn hơn hoặc bằng ($\geq$) sao cho:

$\forall a,b \in R$ thì hoặc $a \leq b$, hoặc $a \geq b$

$\forall a,b \in R$: $a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow a = b$

$\forall a,b,c \in R$: $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

$\forall a,b,c \in R$; $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

$\forall a,b \in R$, $a \geq 0$, $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

Khi $a \leq b$, $a \neq b$ thì viết $a < b$ hoặc $b > a$

(đọc là a nhỏ hơn b, hoặc b lớn hơn a)

Số $a > 0$ gọi là số dương, $a < 0$ gọi là số âm.

Đặt $|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$

$|a|$ gọi là trị số tuyệt đối của a

Rõ ràng: $\forall a \in R$

$-|a| \leq a \leq |a|$ (1)

$|a| \leq M$ $(M > 0) \Leftrightarrow -M \leq a \leq M$ (2)

$\forall a,b \in R$: $|a + b| \leq |a| + |b|$ (3)

$|a - b| \geq |a| - |b|$ (4)

$$|ab| = |a| . |b| ; \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (5)$$

Thực vậy chẳng hạn:

- Xét (2) nếu $a \geq 0$ thì $|a| \leq M$ suy ra $a \leq M$, nếu $a < 0$ thì suy ra $-a \leq M$ hay $a \geq -M$. Vậy $-M \leq a \leq M$, ngược lại từ $-M \leq a \leq M$ suy ra $a \leq M$ và $-a \leq M$ hay $|a| \leq M$

Xét (3). Theo (1) $-|a| \leq a \leq |a|$

$-|b| \leq b \leq |b|$

Cộng vế với vế $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

Vậy: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Tập hợp các phần tử của R:

$N = \{1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1 ... \}$

gọi là tập hợp các số tự nhiên hay tập hợp các số nguyên dương.

Tập hợp $\{-1, -2, -3...\}$ gọi là tập hợp các số nguyên âm.

Tập hợp $Z = \{... -3, -1, 0, 1, 2, 3... \}$ gọi là tập hợp các số nguyên.

Tập hợp $Q = \{x = \frac{p}{q} ; \forall p,q \in Z, q \neq 0\}$ gọi là tập hợp các số hữu tỉ

Rõ ràng, $N \subset Z \subset Q \subset R$

Tập hợp các số hữu tỉ Q có một tính chất quan trọng sau đây, mà tập hợp các số nguyên Z không có gọi là tính chất trù mật của Q:

$\forall a,b \in Q , a < b \Rightarrow \exists r \in Q : a < r < b$

Thực vậy, chẳng hạn có thể lấy $r = \frac{a+b}{2}$ thì $a < r < b$

V. Tiên đề Supremum:

Cho $A \subset R$, tập hợp A gọi là bị chặn trên (dưới) nếu:

$\exists c \in R, \forall x \in A : x \leq c \; (\geq c)$

Số c gọi là cận trên (dưới) của A

Tập hợp A gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới, nghĩa là

$\exists a, b \in R ; \forall x \in A : a \leq x \leq b$

hay $\exists c \in R, c > 0 , \forall x \in A : |x| < c$

Theo định nghĩa thì cận trên (dưới) của A có thể thuộc A hoặc không, nếu $c \in A$ thì c gọi là phần tử lớn (nhỏ) nhất của A.

Rõ ràng một tập hợp A bị chặn trên (dưới) có thể có nhiều cận trên (dưới) vì nếu c là một cận trên (dưới) của A thì $c' > c$, ($c' < c$) cũng là một cận trên(dưới) của nó.

Cận trên (dưới) nhỏ (lớn) nhất của A (nếu có) gọi là cận trên (dưới) đúng hay Sumpremum (infimum) của A.

Ký hiệu: Sup A (inf A)

Rõ ràng M = Sup A (m = inf A) khi và chỉ khi:

1°. $\forall x \in A, x \le M$ $(\ge m)$

2°. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > M - \varepsilon$ $(< m + \varepsilon)$

Vì nếu không thì $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, x \le M - \varepsilon$ $(\ge m + \varepsilon)$

Khi đó M (m) không phải lớn (nhỏ) nhất, vì M (m) cũng là một cận trên (dưới) của A nên nếu M $(m) \in A$ thì nó là phần tử lớn (nhỏ) nhất của A.

Rõ ràng $M(m)$ là duy nhất, vì nếu có $M' \neq M$, M' = Sup A thì hoặc $M' < M$ khi đó M không phải nhỏ nhất, hoặc $M' > M$ khi đó M' cũng không phải nhỏ nhất (tương tự đối với m).

Một vấn đề lớn đặt ra: khi nào một tập hợp có Sup (inf)?

Đối với tập hợp các số hữu tỉ Q có những bộ phận có thể không có Sup (inf) thuộc Q.

Chẳng hạn: xét các tập hợp số hữu tỉ

$$A = \{x : x \in Q, x > 0, x^2 < 2\}$$

$$B = \{x : x \in Q, x > 0 : x^2 > 2\}$$

Rõ ràng: $\forall x \in Q$ $(x > 0)$ thì hoặc $x \in A$ hoặc $x \in B$

Vì như đã biết không có $x \in Q$, $x^2 = 2$

$\forall x \in A, \forall x' \in B$ thì $x < x'$, vì từ $x^2 < 2 < x'^2$ và $x, x' > 0$ suy ra $x < x'$.

Do đó, A (B) là tập hợp bị chặn trên (dưới) chẳng hạn bởi một phần tử bất kỳ $x' \in B$ $(x \in A)$.

Có thể chứng minh A (B) không có Sup (inf) $\in Q$

* Thực vậy, giả sử ngược lại có M = Sup A, m = inf $A \in Q$ thì có thể chứng minh $m = M$ và $M^2 = 2$, nhưng không có $M \in Q$, $M^2 = 2$ nên A (B) không có Sup (inf) $\in Q$.

Để chứng minh $m = M$, ta giả sử ngược lại $m \neq M$ khi đó hoặc $M < m$ hoặc $M > m$. Xét $M < m$, theo tính chất trù mật của Q thì $\exists r \in Q : M < r < m$ nhưng theo trên hoặc $r \in A$ hoặc $r \in B$, nếu $r \in A$ thì $M \neq$ sup A, nếu $r \in B$ thì m $\neq$ inf B, điều này mâu thuẫn với giả thiết, xét $M > m$ ta cũng đi đến mâu thuẫn. Thực vậy, theo tính chất 2° của Sup (inf) thì

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > M - \varepsilon$

$\exists x' \in B, x' < m + \varepsilon$

suy ra, $x' - x < m - M + 2\varepsilon$ lấy $\varepsilon = \dfrac{M - m}{2}$ thì

$x' - x < 0$ hay $x' < x$: vô lý

Để chứng minh $M^2 = 2$, ta cũng giả sử ngược lại $M^2 \neq 2$ khi đó hoặc $M^2 < 2$ hoặc $M^2 > 2$; xét $M^2 < 2$ theo tính chất 1° của Sup (inf) thì $\forall x \in A, \forall x' \in B$.

$x \leq M < x'$ hay $x^2 \leq M^2 \leq x'^2$ mặt khác theo giả thiết:

$x^2 < 2 < x'^2$

do đó, $x'^2 - x^2 \geq 2 - M^2$ hay $x' - x \geq \dfrac{2 - M^2}{x + x'} > 0$ (1)

Nhưng theo tính chất 2° của Sup (inf) thì $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists x' \in B$:

$M - \varepsilon/2 < x < x' < M + \varepsilon/2$

hay $x' - x < (M + \varepsilon/2) - (M - \varepsilon/2) = \varepsilon$

Lấy $\varepsilon = \dfrac{2 - M^2}{x + x'}$ thì $x' - x < \dfrac{2 - M^2}{x' + x}$

Điều này mâu thuẫn với (1), tương tự, nếu $M^2 > 2$ ta cũng đi đến mâu thuẫn. Vậy $M^2 = 2$

Bây giờ ta xét $A, B \subset R$ và công nhận rằng: $M = \text{Sup } A = \inf B \in R$ thì ta suy ra được: có 1 số duy nhất $M \in R, M \notin Q, M^2 = 2$, nghĩa là ta đã mở rộng tập hợp các số hữu tỉ thành tập hợp số thực R, trong đó có một số thực duy nhất M không phải hữu tỉ $M^2 = 2$, M gọi là căn bậc 2 của 2 ký hiệu $M = \sqrt{2}$. Nhưng chỉ mở rộng tập hợp các số hữu tỉ như vậy thì vẫn chưa đáp ứng được nhiều yêu cầu trong thực tiễn, vì có những số có thực trong thực tiễn nhưng không phải là số hữu tỉ và số $\sqrt{2}$. Chẳng hạn số π xuất hiện khi đo độ dài đường tròn.

Do đó để tập hợp R đáp ứng được đòi hỏi trên người ta đã công nhận tiên đề sau đây (bao hàm đều công nhận A, B có Sup (inf) $\in R$) gọi là tiên đề Supremum.

Mọi tập hợp $A \subset R, A \neq \varnothing$** (tập hợp trống) **bị chặn trên đều có Supremum $\in R$

xét $A' = \{x' \mid x' = -x, x \in A\}$ thì $\inf A = -\text{Sup } A'$

Do đó tiên đề trên tương đương với mệnh đề:

Mọi tập hợp $A \subset R, A \neq \varnothing$ bị chặn dưới đều có infimum $\in R$

Theo trên và từ tiên đề này suy ra:

Tồn tại một số duy nhất $x \in R, x > 0, x \notin Q, x^2 = 2$

Tổng quát: có thể chứng minh (tương tự như trên) cho $a \in R$, $a > 0$, $n \in N$ thì tồn tại một số thực duy nhất $x \in R$, $x > 0$: $x^n = a$, x có thể là số hữu tỉ hoặc không, gọi là căn bậc n của a, ký hiệu $x = \sqrt[n]{a}$

Người ta cũng chứng minh được tồn tại những số thực không phải hữu tỉ khác, như số π ..

Một số thực không phải là số hữu tỉ, gọi là số vô tỉ, như vậy các số $\sqrt{2}$, π, .. là các số vô tỷ, nếu gọi I là tập hợp các số vô tỷ thì : $R = Q \cup I$

Như trên đã thấy: tập hợp các số hữu tỷ Q cũng thoả mãn các tiên đề từ I đến IV, nhưng không thoả mãn tiên đề V, nghĩa là giữa các phần tử của Q còn những chỗ "trống". Tiên đề V đã cho phép lấp những chỗ "trống" đó bằng các số vô tỷ để Q trở thành R. Điều này biểu thị một tính chất gọi là tính chất liên tục của R, vì từ tiên đề V suy ra tính chất này nên V cũng gọi là tiên đề liên tục của R.

Vì tập hợp các số thực R có tính chất liên tục nên tập hợp đó cũng gọi là đường thẳng hay trục số thực R. Mỗi số thực gọi là 1 điểm trên đường thẳng đó. Do đó nói số x hay điểm x là như nhau. Nếu $a < b$ thì ta nói a ở bên trái b hay b ở bên phải a nếu.

$a < c < b$ hay $b < c < a$ thì c gọi là ở khoảng giữa a, b.

Các bộ phận của R:

$\{x : a \le x \le b\}$, $\{x : a < x < b\}$

$\{x : a \le x < b\}$, $\{x : a < x \le b\}$

gọi lần lượt là đoạn hay khoảng đóng, khoảng hay khoảng mở, nửa đoạn hay nửa khoảng nửa đóng nửa mở và ký hiệu lần lượt là.

$[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ $(a, b]$

Hiệu $b - a$ gọi là độ dài của đoạn hay khoảng a, b; cho $x_0 \in R$, ta gọi lân cận của x_0 là mọi khoảng (khoảng mở) bất kỳ chứa x_0 , người ta thường xét các lân cận $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$ của điểm x_0.

Từ hệ tiên đề của R có thể suy ra mọi tính chất của nó đã biết ở trường phổ thông, ở đây ta xét thêm hai tính chất quan trọng.

1°. Tính chất Archimède:

$\forall a, b \in R, a > 0 \Rightarrow \exists n \in N : na > b$

* Thực vậy, vì nếu không thì $\forall n \in N: na \le b$

Khi đó tập hợp $A = \{x = na : \forall n \in N\}$ là bị chặn trên bởi b, theo tiên đề V thì có $M = \operatorname{Sup} A$, theo tính chất 2° của Sup thì $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in N$, $ma \in A$.

$M - \varepsilon < ma$ vì $a > 0$ nên $M > 0$, do đó lấy $\varepsilon = M/2$ thì $M - \dfrac{M}{2} < ma$, hay

$M < 2ma$, nhưng $2m \in N$, $2ma \in A$, điều này chứng tỏ M không phải là Sup A, vô lý.

2°. Tính chất trù mật của Q trong R

$\forall\ a,b \in R,\ a < b \Rightarrow \exists\ r \in Q: a < r < b$

* Thực vậy, theo 1° $\exists\ n \in N$; $n.1 > 1/b-a$

hay $1/n < b - a$ lại theo 1°, $\exists\ p \in N$: $p.1 > nb$

Gọi p' là số bé nhất sao cho $p' \geq nb$ thì $\dfrac{np'}{n} \geq b$

và $p' - 1 < nb$ hay $\dfrac{p'-1}{n} < b$, mặt khác, theo trên

$\dfrac{p'-1}{n} = \dfrac{p'}{n} - \dfrac{1}{n} > b - (b-a) = a$, vậy $\exists\ r = \dfrac{p'-1}{n} \in Q$; $a < r < b$

Chú ý: $\forall a,\ b \in R,\ a < b \Rightarrow \exists\ c \in R: a < c < b$ [chẳng hạn $c = (a+b)/2$] - tính trù mật của R.

§2. DÃY SỐ THỰC - GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ THỰC

2.1. Định nghĩa

Một ánh xạ f từ tập hợp N vào tập hợp R gọi là một dãy số thực, ảnh $f(n)$: $\forall\ n \in N$, gọi là số hạng thứ n hay số hang tổng quát của dãy.

Ký hiệu: $x_n = f(n)$

(x_n) hay $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ hay x_n

Thí dụ: $(x_n) = (1/n)$, $(y_n) = ((-1)^n)$ là các dãy số thực có số hạng tổng quát là $x_n = 1/n$, $(y_n) = (-1)^n$

Cho hai dãy số thực (x_n), (y_n) ta gọi tổng tích thương của chúng là các dãy số thực.

$(x_n \pm y_n)$, $(x_n y_n)$; (x_n/y_n)

Ký hiệu $(x_n) \pm (y_n)$; $(x_n).(y_n)$; $(x_n)/(y_n)$

Thí dụ: $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$; $(y_n) = (1+n)/n$

thì $(x_n) + (y_n) = (1 + 2/n)$, $(x_n).(y_n) = \left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

Dãy (x_n) gọi là bị chặn trên (dưới, bị chặn) nếu tập hợp $\{x_n : \forall n \in N\}$ là bị chặn trên (dưới, bị chặn) nghĩa là:

$\exists\ C \in R,\ \forall n \in N : x_n \leq C\ (\geq C,\ C > 0)$

Thí dụ:

1) Xét $(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

vì $\forall n \in N$, $n < n + 1$ nên $\forall n \in N$ $x_n < 1$ vậy (x_n) bị chặn trên

2) Xét $(x_n) = ((-1)^n)$

vì $\forall n \in N$: $|x_n| = 1 < 2$ nên (x_n) bị chặn

Xét dãy $(x_n) = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

ta có $x_1 = 2$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 4/3$, $x_4 = 5/4$...

Ta thấy n càng lớn thì (x_n) càng gần 1 hay hiệu $x_n - 1$ càng gần 0, như vậy, có thể tìm được n để $|x_n - 1|$ nhỏ tuỳ ý, chẳng hạn ta muốn

$|x_n - 1| < \dfrac{1}{100}$ thì từ $|x_n - 1| = \dfrac{n+1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$

Ta suy ra $n > 100$, nghĩa là tìm được n từ 101 trở đi thì

$|x_n - 1| < \dfrac{1}{100}$

Tương tự, $|x_n - 1| < \dfrac{1}{1000}$ khi $n > 1000$...

Dãy (x_n) có tính chất trên gọi là dãy có giới hạn, và 1 gọi là giới hạn của nó, tổng quát ta có:

Định nghĩa: số $a \in R$ gọi là giới hạn của dãy x_n hay x_n dần tới a nếu:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_o \in N, \forall n > n_o \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Ký hiệu $\lim x_n = a$ hay $x_n \to a$

vì $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

nên định nghĩa trên có thể phát biểu: $x_n \to a$ nếu cho trước một lân cận $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ của điểm a thì sẽ có $n_o \in N$, để $\forall n > n_o$ ta có x_n thuộc lân cận đó.

Một dãy có giới hạn cũng gọi là dãy *hội tụ*, một dãy không hội tụ gọi là dãy *phân kỳ*, nghĩa là (x_n) là dãy phân kỳ nếu:

$\forall a \in R, \exists \varepsilon > 0, \forall n_o \in N, \exists n > n_o \Rightarrow |x_n - a| \geq \varepsilon$

Thí dụ:

1) Chứng minh: $\lim c/n = 0$, $c \in R$

Theo tính chất: Archimède

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in N \;\; n_0.\varepsilon > |c|$ hay $\dfrac{|c|}{n_0} < \varepsilon$

do đó: $\forall\; n > n_0$: $\dfrac{|c|}{n} < \varepsilon$ hay $\left|\dfrac{c}{n} - 0\right| < \varepsilon$

Nghĩa là $\lim \dfrac{c}{n} = 0$

2) Chứng minh: $\lim \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0, \quad k \in N$

Theo tính chất Archimède thì $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in N$

$n_0 \varepsilon^k > 1$ hay $1/n_0 < \varepsilon^k$, do đó $\forall\, n > n_0$: $\dfrac{1}{n} < \varepsilon^k$

hay $\dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} < \varepsilon$ suy ra : $\left|\dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} - 0\right| < \varepsilon$

nghĩa là $\lim \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$.

2.2. Các tính chất và phép toán của dãy hội tụ

1^0. $x_n \to a, x_n \to a' \Rightarrow a' = a$ (tính chất duy nhất)

Thực vậy, giả sử ngược lại $a' \neq a$,

xét $|a - a'| = |a - x_n + x_n - a'| \leq |a - x_n| + |x_n - a'|$

Theo giả thiết

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in N, \forall\, n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$|x_n - a'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

do đó $|a - a'| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ lấy $\varepsilon = \dfrac{|a - a'|}{2}$ thì

$|a - a'| < \dfrac{|a - a'|}{2}$ điều này mâu thuẫn, chứng tỏ: $a' = a$

2^0. $x_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x_n - a) \to 0$

Thực vậy, vì $|x_n - a| = |(x_n - a) - 0|$

Thí dụ: Chứng minh $\lim \frac{n+1}{n} = 1$

vì $\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \to 0$ nên $\lim \frac{n+1}{n} = 1$

3°. $\forall n$: $x_n = c \Rightarrow x_n \to c$ (c = const)

Thực vậy, vì $\forall \varepsilon > 0$, $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

Thí dụ $x_n = (-1)^n$ phân kì vì $x_{2m} = 1 \to 1$, $x_{2m+1} = -1 \to -1$

4°. $x_n \to a$, $z_n \to a$, $x_n \le y_n \Rightarrow (y_n \to a)$

Thực vậy: theo giả thiết: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0\ \forall n > n_0$

$|x_n - a| < \varepsilon$, $|z_n - a| < \varepsilon$ hay $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$,

$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$

Cũng theo giả thiết: $x_n \le y_n \le z_n$ do đó:

$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$ hay $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$

Vậy $y_n \to a$

Thí dụ: 1) Chứng minh $\lim \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$

Ta có: $1 < \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$

Vì $1 \to 1$, $\frac{n+1}{n} \to 1$ nên $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$

2) Chứng minh $\lim \sin \frac{1}{n} \to 0$

Xét $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ vì $0 \to 0$,

$\frac{1}{n} \to 0$ nên $\sin \frac{1}{n} \to 0$

3) Chứng minh: $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$, $a > 0$

Ta có:

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 = \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a-1}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \cdots + 1} < \frac{a-1}{n}$$

(thay các số hạng ở mẫu số bằng 1).

nhưng $0 \to 0$, $\frac{a-1}{n} \to 0$ nên $a^{\frac{1}{n}} - 1 \to 0$ hay $a^{\frac{1}{n}} \to 1$

5^0. $x_n \to a \Rightarrow \exists c > 0, \forall n : |x_n| \le c$

Thực vậy vì $x_n \to a$, lấy $\varepsilon = 1$ thì $\exists n_0, \forall n > n_0$:

$|x_n - a| < 1$ mặt khác $x_n = a + (x_n - a)$ nên :

$\forall n > n_0 : |x_n| \le |a| + |x_n - a| < |a| + 1$

do đó lấy $c = \max \{ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, |a| + 1 \}$

thì $\forall n: |x_n| \le c$

Chú ý: Tính chất này chỉ là điều kiện cần của sự hội tụ vì có những dãy bị chặn, nhưng không hội tụ, chẳng hạn dãy: $x_n = (-1)^n$

6^0. $x_n \to a, a > p\ (<q) \Rightarrow \exists n_0, \forall n > n_0: x_n > p\ (<q)$

Thực vậy, vì $x_n \to a$, $a > p$ hay $a - p > 0$ nên lấy $\varepsilon = a - p$ thì

$\exists n_0, \forall n > n_0: |x_n - a| < a - p$ hay $-a + p < x_n - a$

suy ra $x_n > p$; (trường hợp $a < q$ lý luận tương tự)

Hệ quả:

$x_n \to a$, $\exists n_0, \forall n > n_0: x_n \le p\ (\ge q) \Rightarrow a \le p\ (\ge q)$

vì nếu không thì sẽ mâu thuẫn với tính chất trên

7^0. $x_n \to a$, $y_n \to b \Rightarrow x_n \pm y_n \to a \pm b$

Thực vậy theo giả thiết:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_0, \forall n > n'_0$, $|x_n - a| < \varepsilon/2$

$\exists n''_0$, $|y_n - b| < \varepsilon/2$, đặt $n_0 = \max(n'_0, n''_0)$ thì $\forall n > n_0$,

$|x_n - a| < \varepsilon/2$; $|y_n - b| < \varepsilon/2$

do đó $\forall n > n_0$: $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)|$

$= |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Vậy $(x_n \pm y_n) \to (a \pm b)$

8^0. $x_n \to a, y_n \to b \Rightarrow x_n.y_n \to a.b$

Thực vậy, trước hết xét: $x_n \to a$, $y_n \to 0$

Theo 5^0, $\forall c > 0, \forall$ n: $|x_n| \le c$, vì $y_n \to 0$

nên $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o, \forall n > n_o, |y_n| < \varepsilon/c$

Do đó: $\forall n > n_o$: $|x_n.y_n| < c.\dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ nghĩa là $x_ny_n \to 0$

Bây giờ xét $x_n \to a$, $y_n \to b$

Ta viết: $x_ny_n - ab = x_n (y_n - b) + b(x_n - a)$

Theo trên và 7^0 ta có $x_ny_n - ab \to a.0 + b.0 = 0$ hay $x_ny_n \to ab$

9^0. $x_n \to a$, $y_n \to b$, $b \neq 0$, $x_n/y_n \to a/b$

Trước hết ta chứng minh: $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{b}$ vì $y_n \to b$, $b \neq 0$

nên lấy $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ thì $\exists n_o, \forall n > n_o, |y_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$

Mặt khác:

$y_n = b - (b - y_n)$,

nên $|y_n| \geq |b| - |b - y_n| > |b| - \dfrac{|b|}{2} = \dfrac{|b|}{2}$, $\forall n > n_o$.

Do đó $\forall n > n_o$

$$0 < \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - y_n|}{|b||y_n|} < \frac{2|b - y_n|}{b^2}$$ theo 4^0 thì

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \to 0 \quad \text{hay} \quad \frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$$

Bây giờ xét $x_n \to a$, $y_n \to b$ theo 8^0 thì:

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n.\frac{1}{y_n} \to a.\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Thí dụ: Tìm lim $a^{\frac{1}{n}}$ $0 < a < 1$

Đặt $a' = \dfrac{1}{a}$ thì $a' > 1$ vì $a = \dfrac{1}{a'}$

nên $a^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{(a')^{\frac{1}{n}}} \to \dfrac{1}{1} = 1$

2.3. Giới hạn vô hạn và các dạng vô định

a) Giới hạn vô hạn

Ta đã xét các dãy hội tụ, nghĩa là các dãy có giới hạn $a \in R$, bây giờ ta xét một loại dãy phân kỳ đặc biệt: từ n nào đó, x_n luôn luôn có một dấu nhất định và $|x_n|$ lớn hơn một số dương bất kỳ cho trước.

Định nghĩa: Dãy (x_n) gọi là có giới hạn bằng dương vô cùng (âm vô cùng) nếu:

$\forall M > 0, \exists n_o, \forall n > n_o \Rightarrow x_n > M \ (<-M)$

Ký hiệu: $\lim x_n = +\infty \ (-\infty)$ hay $x_n \to +\infty \ (-\infty)$

Thí dụ : 1) $(x_n) = (n)$, rõ ràng $x_n \to +\infty$.

vì $\forall M > 0$, theo tính chất Archimède : $\exists n_0 \in N$

$n_0.1 > M$, do đó $\forall n > n_0 : n > M$, nghĩa là $n \to +\infty$

Chú ý Trong định nghĩa : $\lim x_n$ thì $n \to +\infty$, do đó, ta cũng viết $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

2) $(x_n) = \left(\sqrt[k]{n}\right)$, rõ ràng $x_n \to +\infty$ vì $\forall M > 0$

Theo tính chất Archimède : $\exists n_0 \in N$, $n_0.1 > M^k$ hay

$\sqrt[k]{n_0} > M$, do đó $\forall n > n_0$, $\sqrt[k]{n} > M$, nghĩa là $\sqrt[k]{n} \to +\infty$

3) $(x_n) = [(-1)^n.n]$ $\forall n$, x_n không có 1 dấu nhất định, do đó x_n không dẫn tới $+\infty$. $(-\infty)$

b. Tính chất : Từ định nghĩa dễ dàng suy ra :

1^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $\forall n$; $y_n \geq x_n \ (\leq x_n) \Rightarrow y_n \to +\infty \ (-\infty)$

2^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $\forall n$: $|y_n| \leq c \Rightarrow x_n + y_n \to +\infty \ (-\infty)$

3^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $y_n \to +\infty \ (-\infty) \Rightarrow x_n + y_n \to +\infty \ (-\infty)$

4^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $y_n \to a > 0 \ (a < 0)$ $x_n.y_n \to +\infty \ (-\infty)$ $[-\infty \ (+\infty)]$

5^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $y_n \to +\infty \ (-\infty)$ $[-\infty \ (+\infty)] \Rightarrow x_n.y_n \to +\infty \ (-\infty)$

6^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty) \Rightarrow 1/x_n \to 0$; $x_n \to 0$

$x_n > 0 \ (<0) \Rightarrow 1/x_n \to +\infty \ (-\infty)$

Thực vậy, chẳng hạn xét 2^0 $x_n \to +\infty$, $\forall n$: $|y_n| \leq c$

vì $x_n \to +\infty$ nên $\forall M > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, x_n > M + c$

do đó $|x_n + y_n| \geq |x_n| - |y_n| > M + c - c = M$.

nghĩa là : $x_n + y_n \to +\infty$

Thí dụ :

1) Chứng minh $\lim a^n = +\infty \qquad (a > 1)$

Đặt $a = 1 + \lambda > 0$ thì $\lambda = a - 1 > 0$

Ta có : $a^n = (1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + ... + \lambda^n > 1 + n\lambda$

hay $a^n > 1 + n(a - 1)$

Theo 2° và 4° thì $1 + n(a - 1) \to +\infty$

Theo 1°: $a^n \to +\infty$

2) Tìm $\lim a^n$, $|a| < 1$

Xét $a > 0$, đặt $a = 1/a'$, $a' > 1$, khi đó $a^n = 1/a'^n \to 0$

$a < 0$ đặt $a = -a'$, $a' > 0$ thì $a^n = (-1)^n \cdot a'^n \to 0$

c) Các dạng vô định

- Xét các dạng

1°. $\frac{x_n}{y_n}$, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ hoặc $x_n \to +\infty\ (-\infty)$ $y_n \to +\infty\ (-\infty)$

2°. $x_n \cdot y_n$, $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty\ (-\infty)$

3°. $x_n - y_n$, $x_n \to +\infty\ (-\infty)$, $y_n \to +\infty\ (-\infty)$

Các dạng này có khi có giới hạn, có khi không, người ta gọi chúng là các dạng vô định, ký hiệu là:

$$\frac{0}{0}\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ 0.\infty\ ;\ \infty - \infty$$

Khi tìm giới hạn, gặp các dạng này ta phải biến đổi để khử chúng đi, sau đó áp dụng các tính chất của dãy hội tụ ta sẽ tìm được giới hạn cụ thể.

Thí dụ:

$$1)\ \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{n+1}{n^2} = \lim\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

$$2)\ \lim \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2 + 1} = \lim \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

3) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}}(n^2+1) = \lim(n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}) = +\infty$

4) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$

2.4. Tập hợp các số thực mở rộng

Tập hợp các số thực R thêm vào hai phần tử $+\infty$, $-\infty$ gọi là tập hợp các số thực mở rộng.

Ký hiệu: $\widetilde{R} = R \cup (+\infty) \cup (-\infty)$

$+\infty$ $(-\infty)$, gọi là dương (âm) vô cực hay vô cùng, gọi chung là các số vô hạn và ký hiệu chung là ∞ còn các số $\in R$ cũng gọi là các số hữu hạn. Dựa vào định nghĩa và tính chất của các dãy có giới hạn, ta xác định quan hệ thứ tự của các phép toán đại số trong $\widetilde{R}$ như sau:

$\forall x \in R$: $-\infty < x < +\infty$

$\forall a \in R$: $(\pm\infty) + (\pm\infty) = a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = (\pm\infty)$

$a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty$ nếu $a > 0$

$\mp\infty$ nếu $a < 0$

$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$; $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \qquad \frac{a}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

$\infty^r = \infty$, $r \in Q$, $r > 0$

Ta đã định nghĩa các đoạn, khoảng trong R, cũng gọi là đoạn, khoảng hữu hạn. Trong $\widetilde{R}$ ta cũng định nghĩa:

Tập hợp:

$\{x: -\infty < x < +\infty\}$ gọi là khoảng vô hạn.

Ký hiệu: $(-\infty, +\infty)$

$\{x: -\infty < x < a\}$ gọi là nửa khoảng vô hạn $(-\infty, a)$

$\{x: a \le x < +\infty\}$ gọi là nửa khoảng vô hạn $[a, +\infty)$

Ta cũng gọi lân cận của điểm $+\infty$ $(-\infty)$ là khoảng

$(a, +\infty)$; $(-\infty, a)$, $\forall a \in R$

$\forall A \subset R$ không bị chặn trên (dưới) ta quy ước

$\operatorname{Sup} A = +\infty$ $(\inf A = -\infty)$

§ 3. CÁC NGUYÊN LÝ CƠ BẢN CỦA TẬP HỢP *R*

Từ hệ tiên đề của *R* và khái niệm giới hạn của dãy trong *R*, ta sẽ suy ra các tính chất quan trọng sau đây gọi là các nguyên lý cơ bản của *R*.

1°. Nguyên lý Weierstrass

Dãy (x_n) gọi là dãy đơn điệu không giảm (không tăng) nếu

$\forall n$: $x_n \leq x_{n+1}$ $(\geq x_{n+1})$ nếu không có dấu bằng thì (x_n) gọi là dãy đơn điệu tăng (giảm). Các dãy trên gọi chung là dãy đơn điệu.

Thí dụ:

Xét $x_n = \dfrac{n}{n+1}$

Ta có: $\forall n$ $x_n / x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$ hay $x_n < x_{n+1}$, vậy x_n là dãy đơn điệu tăng. Ta thấy x_n cũng bị chặn trên ($\forall n : x_n < 1$) và $\lim x_n = 1$

Tổng quát ta có:

Nguyên lý Weierstrass: ***Mọi dãy (x_n) đơn điệu không giảm (không tăng) và bị chặn trên (dưới) đều hội tụ và $x_n \leq \lim x_n$ $(\geq \lim x_n)$***

Chứng minh - Xét trường hợp (x_n) đơn điệu không giảm và bị chặn trên.

Theo giả thiết (x_n) bị chặn trên, xét tập hợp $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ thì theo tiên đề Supremum có $c = \operatorname{Sup} A$.

Theo tính chất 2° của Sup thì $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$: $x_{n_0} > c - \varepsilon$

hay $c - x_{n_0} < \varepsilon$. Lại theo giả thiết (x_n) đơn điệu không giảm nên

$\forall n > n_0$: $x_n \geq x_{n_0}$.

Do đó $c - x_n < \varepsilon$ theo tính chất 1° của Sup: $\forall n$: $x_n \leq c$,

Do đó $|c - x_n| = c - x_n < \varepsilon$, nghĩa là $c = \lim x_n$ và $x_n \leq \lim x_n$.

Trường hợp (x_n) đơn điệu không tăng và bị chặn dưới thì đặt $x_n = -x'_n$ sẽ đưa được về trường hợp trên.

Thí dụ:

Xét $x_n = (1 + 1/n)^n$

Theo công thức nhị thức Newton

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}$$

$$.....+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.\frac{1}{n^k}+...+\frac{n(n-1)...1}{n!}.\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Từ khai triển này ta suy ra khai triển của x_{n+1} bằng cách thay các thừa số

$1 - \frac{i}{n}$ $(i = 1, 2, .., n - 1)$

bằng các thừa số: $1 - \frac{i}{n+1}$ $(i = 1, 2, ..., n)$

và thêm 1 số hạng dương nữa.

Vì $1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}$ nên $\forall n: x_n < x_{n+1}$

nghĩa là dãy x_n là dãy đơn điệu tăng.

Mặt khác: $1 - \frac{i}{n} < 1$ và $n! \geq 2^{n-1}$ với $n \geq 2$, nên $\forall n$:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{k!} + ... + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3$$

Vậy (x_n) là dãy bị chặn trên, theo nguyên lý trên, (x_n) có một giới hạn nào đó, gọi giới hạn đó là số e ; $e = \lim (1 + 1/n)^n$ có thể chứng minh e là số vô tỷ và trị số gần đúng của nó là : $e = 2{,}718281828459...$

2°. Nguyên lý Cantor:

Dãy đoạn $[a_n, b_n]$ gọi là một dãy đoạn thắt nếu:

$\forall n$: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ và $\lim (b_n - a_n) = 0$,

đối với dãy đoạn thắt ta có:

Nguyên lý Cantor:

Tồn tại 1 điểm c duy nhất sao cho: $\forall n: c \in [a_n, b_n]$.

* Chứng minh: theo giả thiết thì:

$a_1 \le a_2 \le .. \le a_n ... \le .\ \ b_n ... \le b_2 \le b_1$

Do đó (a_n) là dãy đơn điệu không giảm và bị chặn trên (bởi b_1 chẳng hạn), theo nguyên lý Weierstrass có:

$c = \lim a_n$ và $\forall n: a_n \le c$, mặt khác:

$\forall n: a_n < b_n$ nên theo tính chất của giới hạn (hệ quả của 6^0 thì $c \le b_n$,

vậy $a_n \le c \le b_n$ hay $c \in [a_n\ b_n]$ rõ ràng c là duy nhất, vì nếu có $c': c \ne c'$,

$c' \in [a_n\ b_n]$ thì $0 < |c' - c| < b_n - a_n$.

Nhưng theo giả thiết $\lim (b_n - a_n) = 0$, do đó $c' - c \to 0$, hay $c' = c$.

Rõ ràng $c = \lim b_n$ vì $|c - b_n| < b_n - a_n$.

3^0. Nguyên lý Bolzano-Weierstrass

Cho dãy (x_n) dãy (x'_k) gọi là một dãy con của nó nếu $x'_k = x_n$ với $n = g(k)$. g là 1 ánh xạ từ N vào chính nó.

Thí dụ:

- Xét $x_n = (-1)^n$ và g xác định bởi $n = 2k$ và $n = 2k+1$ thì có hai dãy con của x_n là.

$x'_k = (-1)^{2k}$ và $x''_k = (-1)^{2k+1}$ người ta thường ký hiệu một dãy con của dãy (x_n) là x_{n_k} chẳng hạn dãy $x_n = (-1)^n$ có 1 dãy con là:

$x_{n_k} = (-1)^{2k}$ rõ ràng nếu $x_n \to a$ thì mọi dãy con của nó:

$x_{n_k} \to a$ vì $x_n \to a$ nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, đặc biệt $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$

Một vấn đề đặt ra: nếu (x_n) không hội tụ thì có dãy con nào của nó hội tụ? Ta thấy $x_n = (-1)^n$ không hội tụ nhưng nó vẫn có hai dãy con $x_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$, $x_{n_k} = (-1)^{2k+1} = -1$ hội tụ. Ta cũng biết x_n là 1 dãy bị chặn, tổng quát ta có:

Nguyên lý Bolzano-Weierstrass

Mọi dãy vô hạn (x_n) bị chặn đều có một dãy con hội tụ

* Chứng minh: Theo giả thiết $\exists c > 0, \forall n: |x_n| \le c$

hay $-c \le x_n \le c$ chia $[-c, c]$ ra làm hai phần bằng nhau thì phải có một phần chứa vô số các số hạng của (x_n) vì nếu không, nghĩa là cả 2 phần đều chứa một số hữu hạn các số hạng của (x_n) thì (x_n) sẽ là một dãy chỉ có 1 số hữu hạn số hạng, trái với giả thiết, gọi phần chứa vô số các số hạng của (x_n) là đoạn $[a_1, b_1]$. lại chia $[a_1, b_1]$ ra làm hai phần bằng nhau và lý luận tương tự ta được đoạn $[a_2, b_2]$ chứa vô số các số hạng của (x_n), rõ ràng $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ và $b_2 - a_2 = c/2$.

Quá trình tiếp tục, ta được một dãy đoạn $([a_n, b_n])$ mỗi đoạn đều chứa vô số các số hạng của (x_n) rõ ràng:

$$\forall n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad b_n - a_n = \frac{c}{2^{n-1}} \to 0$$

Vậy $([a_n, b_n])$ là một dãy đoạn thắt, theo nguyên lý Cantor, có 1 điểm duy nhất $\overline{c}$; $\forall n: \overline{c} \in [a_n, b_n]$ vì mỗi đoạn $[a_n, b_n]$ chứa vô số các số hạng của (x_n) nên lấy được $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$, sau đó lấy

$x_{n_2} \in [a_2, b_2] \quad n_2 \neq n_1 \ldots$

$x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, khi đó $\left|x_{n_k} - \overline{c}\right| < b_k - a_k$

nhưng $b_k - a_k \to 0$ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall k > n_0$

$b_k - a_k < \varepsilon$ suy ra $\left|x_{n_k} - \overline{c}\right| < \varepsilon$, nghĩa là $\lim x_{n_k} = \overline{c}$

4°. Nguyên lý Cauchy

Dãy x_n gọi là 1 dãy cơ bản nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0$

$\forall m > n_0 \to \left|x_n - x_m\right| < \varepsilon$

Nguyên lý Cauchy:

Dãy $(x_n) \subset R$ hội tụ (trong R) khi và chỉ khi nó là một dãy cơ bản.

* ***Chứng minh:*** Giả sử $x_n \to x_0 \in R$, khi đó $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m > n_0$:

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_m - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Do đó $\left|x_m - x_n\right| = \left|x_m - x_0 + x_0 - x_n\right| \leq \left|x_m - x_0\right| + \left|x_n - x_0\right| < \varepsilon$

nghĩa là (x_n) là một dãy cơ bản.

Ngược lại, giả sử $\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon, \forall m, n > \overline{n}_0$. Cố định m thì tập hợp (x_n) là bị chặn, theo nguyên lý Bolzano - Weierstrass dãy (x_n) có dãy con x_{n_k} hội tụ, nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists n'_0, \forall n_k > n'_0$.

$\left|x_{n_k} - x_0\right| < \varepsilon$ với $x_0 = \lim x_{n_k}$. Mặt khác, theo giả thiết:

$|x_{n_k} - x_n| < \varepsilon$, $\forall n_k , n > n''_o$ Chọn $n_o = \max (n'_o , n''_o)$ thì

$|x_n - x_0| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < 2\varepsilon$ Vậy $\lim x_n = x_o$

Thí dụ: Chứng minh dãy:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{hội tụ}$$

Theo nguyên lý Cauchy, $\forall \varepsilon > 0$, xét :

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)} - \frac{1}{(n+p)} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \ , \ \forall p \in N$$

Vậy dãy x_n hội tụ.

§ 4. LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỢP SỐ THỰC

4.1. Các tập hợp tương đương

Định nghĩa: Hai tập hợp A, B gọi là tương đương (về số lượng) nếu tồn tại một song ánh từ tập hợp này vào tập hợp kia, kí hiệu: $A \sim B$.

Thí dụ:

1) Hai tập hợp hữu hạn cùng có số lượng phần tử là tương đương:

2) $N = \{1, 2, 3, \ldots n \ldots\}$ $A = \{2, 4 \ldots 2n \ldots\}$, vì tồn tại song ánh $f(n) = 2n$ từ N vào A nên $N \sim A$

3) $A = \{x : x \in (0,1)\}$ $B = \{x : x \in (a,b)\}$ rõ ràng $A \sim B$ vì tồn tại song ánh $f = a + x(b - a)$ từ A vào B

4) $A = \{x : x \in (0,1)\} \sim R$

vì tồn tại song ánh $f = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}$ từ R vào A

Từ định nghĩa suy ra:

1°. $A \sim A$; 2°. $A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ do đó, từ các thí dụ 3, 4 suy ra. Tập hợp các điểm trong một khoảng bất kỳ là tương đương với tập hợp các điểm trên toàn đường thẳng số thực. Các tập hợp tương đương được gọi là các tập hợp có cùng lực lượng.

4.2. Tập hợp đếm được

Định nghĩa: Lực lượng của tập hợp $N = \{1, 2, \ldots n \ldots\}$ gọi là lực lượng đếm được và mọi tập hợp tương đương với N gọi là tập hợp đếm được. Nói cách khác: Một tập hợp là đếm được nếu có thể đánh số được các phần tử của nó thành dãy vô hạn, $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$

Thí dụ:

1) $A = \{2, 4, 6 \ldots 2n \ldots\}$ là đếm được

2) $Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ là đếm được

Vì có thể đánh số được các phần tử của nó theo thứ tự:

$0, -1, 1, -2, 2 \ldots, -n, n \ldots$

3) $Q^+ = \{x : p/q,\ p, q \in N\}$ là đếm được.

Thực vậy: có thể viết các phần tử của Q^+ theo bảng:

p/q	1	2	3	4	..
1	1	2	3	4	..
2	$\frac{1}{2}$	(1)	$\frac{3}{2}$	(2)	...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	(1)	$\frac{4}{3}$	...
4	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{4}$	(1)	...
.	.	...	.	...	...

Ta có thể đánh số được các phần tử của Q^+ theo thứ tự sau: 1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5 .. (bỏ các phần tử trong ngoặc vì lặp lại)

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý: Hợp của 1 số hữu hạn hay đếm được các tập hợp đếm được là đếm được. Thực vậy, ta có thể viết các phần tử của mỗi tập hợp trên 1 dòng theo bảng dưới đây:

$$
\begin{array}{llllll}
A_1 & : & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\
A_2 & : & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\
A_3 & : & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\
A_4 & : & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{array}
$$

Ta thấy rằng trên mỗi đường chéo của bảng chỉ có 1 số hữu hạn phần tử.

Vậy ta có thể đánh số các phần tử của hợp $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ theo các đường chéo đó:

$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13} \ldots$

Thí dụ: Ta biết tập hợp các số hữu tỷ dương Q^+ là đếm được. Rõ ràng tập hợp các số hữu tỷ âm Q^- cũng đếm được. Vậy theo định lý trên, tập hợp các số hữu tỷ $Q = Q^- \cup 0 \cup Q^+$ cũng là đếm được.

3.4. Tập hợp không đếm được

Định nghĩa: Tập hợp A gọi là không đếm được nếu nó là một tập hợp vô hạn và không phải là 1 tập hợp đếm được. Lực lượng của các tập hợp không đếm được gọi là lực lượng Continum hay lực lượng C

Định lý. Tập hợp các số thực R là không đếm được

* Chứng minh: Rõ ràng tập hợp các điểm trong khoảng (0,1) là tương đương với tập hợp các điểm trong đoạn [0,1], vì $[0,1] = (0,1) \cup 0 \cup 1$ ...

Trong (0,1) ta có thể lấy một phần tử a_1 rồi lấy phần tử $a_2 \in (0,1) \setminus a_1$

Đặt $M' = (0,1) \setminus \{a_1, a_2\}$

Suy ra: $(0,1) = M' \cup \{a_1, a_2\}$ (1)

$[0,1] = M' \cup \{a_1, a_2\} \cup \{0,1\}$ (2)

Rõ ràng có một song ánh giữa các tập $\{a_1, a_2\}$ và $\{a_1, a_2, 0, 1\}$

$(a_1 \to \{a_1, a_2\}, a_2 \to \{0,1\})$ và một song ánh giữa M' và M'. Vậy tồn tại một song ánh giữa khoảng (0,1) và đoạn [0,1], nghĩa là $(0,1) \sim [0,1]$.

Theo trên $(0,1) \sim R$, vậy $[0,1] \sim R$

Do đó để chứng minh R là không đếm được ta chỉ cần chứng minh [0,1] là không đếm được. Ta sẽ chứng minh bằng phép phản chứng. Giả sử đoạn [0,1] là đếm được, nghĩa là; $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots x_n \ldots\}$ chia đoạn [0,1] ra thành ba đoạn bằng nhau, trong ba đoạn đó phải có 1 đoạn không chứa x_1, gọi đoạn đó là Δ_1, lại chia Δ_1 thành ba đoạn bằng nhau, và trong ba đoạn đó lại có một đoạn không chứa x_2...

Quá trình tiếp tục ta sẽ được một dãy đoạn thắt vì $\Delta_1 \subset \Delta_2 ... \subset \Delta_n$ .. và $|\Delta_n| = 1/3^n \to 0$ với $x_n \notin \Delta_n$, $n = 1, 2 ...$

Theo nguyên lý Cantor, tồn tại một điểm c duy nhất sao cho, $c \in \Delta_n$.

$n = 1, 2$ .. Rõ ràng, $c \in [0,1]$, vậy c phải trùng với một x_{n_0} nào đó, nhưng $c \in \Delta_n$, $n = 1, 2$ .. Vậy $x_{n_0} \in \Delta_{n_0}$, điều này mâu thuẫn với cách xây dựng các đoạn Δ_n, vậy tập hợp $[0,1]$ đếm được là vô lý

Thí dụ. 1) Ta biết $R = Q \cup I$

Rõ ràng tập hợp số vô tỷ I là không đếm được vì nếu I đếm được thì $Q \cup I$ là đếm được (theo định lý ở 2°). Vậy R là đếm được, vô lý.

2) Ta gọi số đại số là nghiệm của một đa thức.

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_{n-1}x + a_n$,

Với $a_i \in Q$, $i = 0, 1, 2 .., n$

Có thể chứng minh (phần bài tập) tập hợp các số đại số là đếm được. Ta gọi số siêu việt là số không phải là đại số (π, e, $2^{\sqrt{2}}$, ..) rõ ràng tập hợp các số siêu việt cũng không đếm được (lý luận như thí dụ 1).

3) Theo trên thì các đoạn $[a,b]$ hay khoảng (a,b) bất kỳ là các tập hợp không đếm được và có lực lượng c.

Chú ý: Theo đại số học, thì tập hợp các số thực R là một trường (vì R thỏa mãn các tiên đề I, II, III)

R thỏa mãn tiên đề IV, người ta gọi R là một trường được sắp thứ tự.

R thỏa mãn nguyên lý Cauchy (suy từ tiên đề V), người ta gọi R là một trường đầy đủ.

Tóm lại: Tập hợp các số thực R là một trường được sắp thứ tự, đầy đủ và có lực lượng Continum.

BÀI TẬP

1. Từ hệ tiên đề của R chứng minh

1) $-(ab) = (-a)\,b = a\,(-b)$

2) $a \geq 0\ (\leq 0) \Rightarrow -a \leq 0\ (\geq 0)$

3) $a > 0,\ b \leq 0 \Rightarrow a.b \leq 0$

4) $a \le 0, b \le 0 \Rightarrow a.b \ge 0$

5) $a \ge b \Rightarrow a - b \ge 0$

6) $\forall a \in R, a^2 \ge 0$

7) $a \ge b, c \ge 0 \Rightarrow a.c \ge b.c$

8) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < 1/b < 1/a$

2. Chứng minh:

1) $|a|^2 = a^2$, $\sqrt{a^2} = |a|$

2) $|a| - |b| \le |a - b|$

3) $||a| - |b|| \le |a - b| \le |a| + |b|$

3. Giải bất phương trình:

1) $|2x + 1| < 1$

2) $|x + 1| < 2$

3) $|x - 1| < |x + 1|$

4) $|x| < x + 1$

5) $|\sin x| = \sin x + 2$

4. Cho $x \in Q, x > 0$, chứng minh $\exists n \in N$

$\frac{1}{10^n} < x$, suy ra $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in N : \frac{1}{10^n} < \varepsilon$

5. Chứng minh:

1) $x \in Q, y \in I \Rightarrow x + y \in I$

2) $x \in Q, x \neq 0, y \in I \Rightarrow x.y \in I$

3) $x \in I, y \in I \Rightarrow x + y, x.y \in I$ hay $\in Q$?

6. Chứng minh, nếu $a, b, c, d \in Q, \lambda \in I$

và $a + \lambda b = c + \lambda d \Rightarrow a = c, b = d$

Ứng dụng: Viết $\sqrt{192 + 96\sqrt{3}}$ dưới dạng $x + y\sqrt{3}$ $x, y \in Q$

***7**. Cho $A = \{x : x = \frac{n-1}{n+1}, n \in N\}$

Chứng minh A bị chặn, tìm Sup$A$, inf$A$ và các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của A.

***8**. Cho $A = \{x : x \in Q, x > 0, x^2 < 2\}$

$B = \{x : x \in Q, x > 0, x^2 > 2\}$

Chứng minh A (B) không có phần tử lớn (nhỏ) nhất, suy ra A (B) không có Sup (inf) trong Q.

***9**. Chứng minh rằng phương trình $x^n - a = 0$, $a > 0$ luôn luôn có nghiệm trong R.

***10.** Chứng minh rằng mọi khoảng (a,b) đều chứa một số vô hạn các số hữu tỉ và 1 số vô hạn các số vô tỉ.

11. Chứng minh

1) $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 0$

2) $\lim \frac{2n-1}{n-2} = 2$

3) $\lim \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$

4) $\lim \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}$

5) Chứng minh nếu $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to |a|$

12. Áp dụng tính chất 4° chứng minh

1) $\lim(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}) = 0$

2) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

3) $\lim \sqrt[n]{1+2+..+n} = 1$

13. Chứng minh: $\forall n : x_n \le y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to b \Rightarrow a \le b$

14. Cho

1) (x_n) hội tụ, (y_n) phân kỳ

2) (x_n) phân kỳ, (y_n) phân kỳ

thì $(x_n + y_n)$, $(x_n.y_n)$ là hội tụ hay phân kỳ ?

15. 1) Cho $x_n.y_n \to 0$ thì có thể kết luận $x_n \to 0$ hay $y_n \to 0$ không ?

2) Cho $x_n \to 0$, y_n tùy ý thì có thể kết luận $x_n.y_n \to 0$ không ?

16. Chứng minh: 1) $x_n \to +\infty$ $(-\infty) \Rightarrow x_n$ phân kỳ

2) $\lim a^n/n^k = +\infty$ $(a > 1)$, $(k > 0)$

17. Tìm

1) $\lim \frac{2n^2+1}{n^2+3n+1}$; 2) $\lim \frac{n^2+3n}{n^3+2n+1}$

3) $\lim \frac{n^2+3}{2n-1}$; 4) $\lim \frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}$ $|b|<1$, $|a|<1$

5) $\lim \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$; 6) $\lim \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

7) $\lim \frac{1^2+2^2+\ldots(n-1)^2}{n^3}$; 8) $\lim \frac{1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2}{n^3}$

9) $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

10) $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{n^3+n}-n}$

11) $\lim(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1})$

18. Chứng minh các tính chất:

1^o, 3^o, 4^o, 5^o, 6^o, của dãy có giới hạn vô hạn

19. Dùng nguyên lý Weierstrass chứng minh các dãy sau hội tụ:

1) $x_{n+1} = (\frac{[illegible]}{n^{[illegible]}})$ ($x_{[illegible]}$ [illegible] 0 tìm lim x_n)

2) $(x_n) = \left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right)$

$0 \le a_i \le 9$ ($i = 1, 2 \ldots n$)

3) $(x_n) = ((1 - 1/2)(1 - 1/4) \ldots (1 - 1/2^n))$

4) $(x_n) = ((1 + 1/2)(1 + 1/4) \ldots (1 + 1/2^n))$

5) $(x_n) = \underbrace{(\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}})}_{n\ \text{lần}}$

***20**. Chứng minh: (x_n) tăng (y_n) giảm và $\lim (x_n - y_n) = 0$ thì (x_n), (y_n) hội tụ và $\lim x_n = \lim y_n$. áp dụng: chứng minh

$\lim x_n = \lim y_n$ nếu :

$$x_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{n!n}$$

Suy ra $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \quad 0 < \theta < 1$

Từ đó chứng minh $e \notin Q$ và suy ra cách tính gần đúng số e.

21 Chứng minh (x_n) tăng, (y_n) giảm

$\forall n$: $x_n \le y_n$ thì (x_n), (y_n) hội tụ và $\lim x_n \le \lim y_n$

22 Chứng minh (x_n) tăng (giảm) không bị chặn trên (dưới) thì

$x_n \to +\infty \ (-\infty)$

23. Chứng minh (x_n) không bị chặn trên (dưới), thì $\exists x_{n_k}$,

$x_{n_k} \to +\infty \ (-\infty)$

***24**. Chứng minh $\forall \alpha \in R \Rightarrow \exists (x_n)$; $x_n \in Q$, $x_n \to \alpha$

25 Chứng minh các dãy sau đây hội tụ và tìm giới hạn của chúng:

1) $x_n = (1 - 1/2^2)(1 - 1/3^2) \ldots (1 - 1/n^2)$

2) $x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$

***26** Chứng minh rằng: nếu $x_n \to a$ thì:

1) $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \to a$

2) $\sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n} \to a$, $x_i > 0, i = 1, 2, \ldots n$

Áp dụng tìm:

$\lim \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$, $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

***27**. Chứng minh rằng nếu:

$\forall n$, $x_n > 0$ và $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$ thì $\sqrt[n]{x_n} \to a$

Áp dụng tìm : $\lim a^{\frac{1}{n}}$, $\lim \sqrt[n]{n}$

28. Dùng nguyên lý Cauchy, chứng minh các dãy sau hội tụ:

1) $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$

2) $x_n = \frac{\cos 1!}{1.2} + \frac{\cos 2!}{2.3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$

29 Dùng nguyên lý Cauchy, chứng minh các dãy sau phân kỳ

1) $x_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$

2) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$ $(x = e^y\ ;\ y = \log_e x = \ln x)$

***30**. Chứng minh tập hợp các số đại số là đếm được

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

1. 1) Xét $a(b + (-b)) = 0$

2. 3) Xét $a = b + (a - b)$, $b = a + (b - a)$

3. 1) $-1 < x < 0$; 2) $-3 < x < 1$

3) $x > 0$; 4) $x > -1/2$; 5) $x = -\pi/2 + 2k\pi$; $x = \pi/2 + (2k + 1)\pi$

4. Đặt $x = p/q$ lấy $m \in N$ sao cho $mp > q$ suy ra

$\frac{1}{m} < \frac{p}{q}$ lấy n lớn hơn số các chữ số của m thì $10^n > m$, vậy $1/10^n < p/q$ lấy $0 < p/q < \varepsilon$ (Q trù mật trong R)

5. 1) $x + y \in I$ vì $x + y \in Q \Rightarrow x + y - x = y \in Q$ vô lý

3) Lấy $\sqrt{2}$ và $1 - \sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ và $\sqrt{8}$

6 $a - c = \lambda(d - b)$, $d - b \neq 0 \Rightarrow \lambda \in Q$ vô lý

$(x + y\sqrt{3})^2 = 192 + 96\sqrt{3} \Rightarrow 2xy = 96,\ x^2 + 3y^2 = 192$

$x = 12\ y = 4$

7. A bị chặn dưới bởi 0, bị chặn trên bởi 1, $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, vì $0 \in A$, nên 0 là phần tử nhỏ nhất của A

8. Chứng minh : $x^2 < 2 \Rightarrow \exists\, n \in N$, $(x + 1/n)^2 < 2$

9. Chứng minh tương tự như chứng minh: tồn tại 1 số duy nhất $\alpha \in R$

$\alpha = \sqrt{2}$ (trong bài giảng) bằng cách xét các tập hợp

$A = \{x: x \in Q, x > 0, x^n < a\}$

$B = \{x: x \in Q, x > 0, x^n > a\}$

10. Giả sử ngược lại (a,b) chỉ chứa số hữu hạn các số hữu tỉ $a_1 \ldots a_n$ cho $c \in (a,b)$ thì $|c-a_1|,|c-a_2|\ldots|c-a_n|$ có 1 số bé nhất, gọi số đó là $|c-a_i|$ thì khoảng

$$\left(c-\frac{|a_i-c|}{2}, c+\frac{|c-a_i|}{2}\right) \cap (a,b)$$

không có một số hữu tỉ nào, mâu thuẫn với tính trù mật của Q trong R

11. 4) $\left|\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\dfrac{1}{3}\right| = \left|\dfrac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

5) Dùng: $\left||x|-|a|\right| \le |x-a|$

12. 1) Nhân với lượng liên hiệp

2) Xét $n > 2$: $(1+\lambda)^n > \dfrac{n^2}{2}\lambda^2$ và đặt $\lambda = \sqrt[n]{n} - 1$

13. Chứng minh phản chứng, giả sử $a > b \Rightarrow \exists\, r \in Q$: $a > r > b$

14. 1) Tổng phân kỳ, tích không thể kết luận dứt khoát

15. 1) Không thể kết luận $x_n \to 0$ hoặc $y_n \to 0$

Thí dụ : $x_n = 1 + (-1)^n$, $y_n = 1 - (-1)^n$

2) Không thể kết luận $x_n y_n \to 0$

Thí dụ: $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; $y_n = n$

16. 1) Xét $|x_n - a| \ge |x_n| - |a|$, $\forall\, a \in R$

2) $a^n > n^2/4 \,.\, (a-1)^2$ $(n > 2)$

$a^n/n > n/4 \,.\, (a-1)^2$

Viết $\dfrac{a^n}{n^k} = \left[\dfrac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}\right]^k$

17. 1) 2 ; 2) 0 ; 3) $+\infty$

4) $\dfrac{1-b}{1-a}$; 5) 1/3; 6) 1/2

7) 1/3 ; 8) 4/3 ; 9) 1 ; 10) 0 ; 11) 2/3

19. 1) $x_{n+1} = x_n \dfrac{a}{n+1}$ chứng minh (x_n) giảm bị chặn dưới.

$\lim x_n = 0$

2) Chứng minh (x_n) tăng bị chặn trên

3) Chứng minh (x_n) giảm bị chặn dưới

4) Chứng minh (x_n) tăng bị chặn trên

Bằng cách áp dụng $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ $(x_i \ge 0)$

5) Chứng minh (x_n) tăng và bị chặn trên : $x_n < \sqrt{c} + 1$ (bằng quy nạp).
$\lim x_n = 2$

20. Đặt $z_n = y_n - x_n$ (z_n) giảm $z_n \to 0$, $x_n \le y_n$ và

$\lim x_n = \lim y_n = e$ (nguyên lý Cantor) áp dụng đặt $t_n = (1 + 1/n)^n$

$$t_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots$$

$$\left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \ (k<n) \Rightarrow e > 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} = x_k \quad (\forall k \in N)$$

Mặt khác, $t_n < x_n \le e \Rightarrow x_n \to e$

$$y_n = x_n + \frac{1}{n.n!} \Rightarrow e, x_n < e < y_n \Rightarrow e - x_n = \frac{\theta}{n.n!}, (0 < \theta < 1)$$

và $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{\theta}{n.n!}$

Chứng minh $e \notin Q$ bằng phản chứng

$e = 2{,}71828$ với độ chính xác 10^{-5}.

21. Dùng nguyên lý Weierstrass chứng minh lim x_n, lim y_n tồn tại rồi áp dụng kết quả bài 13

22 $\forall c, \exists n_0 : x_{n_0} > c$, $\forall n > n_0, x_n > x_{n_0} > c$

$\Rightarrow \forall c > 0, \forall n > n_0 : x_n > c$

23. $\exists n_1, n_2, \ldots n_k$ $x_{n_1} > 1$; $x_{n_2} > 1$; .. ; $x_{n_k} > k$

24. $\forall \varepsilon > 0, \exists r \in Q : \alpha - \varepsilon < r < \alpha + \varepsilon$

$\Rightarrow \exists x_n \in Q : \alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$

$\Rightarrow \exists x_n \in Q ; \forall n : |x_n - \alpha| < \varepsilon$

25 1) Viết: $1 - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n+1}{n}$; lim $x_n = \dfrac{1}{2}$

2) Viết : $1 - \dfrac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$; lim $x_n = \dfrac{1}{3}$

26. 1) Viết $a - x_n = \dfrac{aN}{n} - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{n} + \dfrac{(a - x_{N+1}) + \ldots + (a - x_n)}{n}$

2) Viết $\ln z_n = \dfrac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n}$

(Với $x = e^y \Rightarrow y = \log_e x = \ln x$)

27 Viết. $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dfrac{x_2}{x_1} \cdot \dfrac{x_3}{x_2} \ldots \dfrac{x_n}{x_{n-1}}}$

Áp dụng : 1 ; 1

28. 1) Xét:

$$|x_{n+p} - x_n| \le \left|\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}}\right| < \varepsilon \quad (\forall p \in N)$$

2)

$$|x_{n+p} - x_n| \le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \le \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

29. 1) $\left|x_{n+p}-x_n\right|>\dfrac{p}{n+p}$: khi $p=n$: $\left|x_{n+p}-x_n\right|>\dfrac{1}{2}>\varepsilon$

2) $\left|x_{n+p}-x_n\right|>\dfrac{p}{\ln(n+p)}>\dfrac{p}{n+p}=\dfrac{1}{2}$ khi $p=n$

30. Đầu tiên chứng minh: Tập hợp các dãy hữu hạn lập được từ các phần tử của một tập hợp đếm được là đếm được. Sau đó suy ra tập hợp các đa thức bậc n với hệ số hữu tỉ là đếm được và suy ra tập hợp các số đại số là đếm được.

Chương 2

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

§ 1. KHÁI NIỆM TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

Cho các tập hợp $X, Y \subset R$, $X, Y \neq \varnothing$, một ánh xạ f từ X vào Y, $f: X \to Y$ gọi là một hàm số thực của một đối số thực, ảnh $y = f(x)$ với $x \in X$ gọi là giá trị của f tại x. X gọi là miền xác định, tập hợp các giá trị của f, $\forall x \in X$, nghĩa là tập hợp $\{f(x)\}$, gọi là miền giá trị của hàm số ký hiệu $f(x)$, nói chung: $f(x) \subset Y$. Ta cũng gọi: f là một hàm xác định trong tập hợp X và lấy giá trị trong tập hợp Y. Theo định nghĩa, ta cần phân biệt hàm f và giá trị của nó tại $x \in X$: $y = f(x)$, nhưng để đơn giản ta cũng nói: hàm $y = f(x)$: nhưng phải hiểu đó là một hàm f mà giá trị của nó tại $x \in X$ là $y = f(x)$. Nếu x chỉ một số bất kỳ thuộc X, thì x gọi là biến số độc lập, y gọi là biến số phụ thuộc hay theo cách nói đơn giản trên, y cũng gọi là một hàm số của biến số độc lập x

Một hàm số $y = f(x)$ có thể cho bằng các phương pháp khác nhau, tùy theo f chỉ cách tương ứng giữa $x \in X$ và $y \in Y$.

Nếu f chỉ các quy tắc tính nhất định để ứng với mỗi x ta có một giá trị $f(x)$ thì f gọi là được cho bằng một công thức hay một biểu thức giải tích, khi đó miền xác định X của f sẽ được chỉ ra theo ý nghĩa của các quy tắc tính.

Thí dụ:

Các hàm số sau đây là các hàm được cho bằng công thức:

1) $y = f(n)$ có miền xác định là $X = N$, đó là một dãy số.

2) $y = x^2$ có miền xác định $X = R$.

3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, y có ý nghĩa khi $1 - x^2 \geq 0$ hay

$-1 \leq x \leq 1$ vậy hàm số có miền xác định là đoạn $[-1;1]$.

4) $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 + x}}$, y có nghĩa khi:

$-x \geq 0$ và $2 + x > 0$ hay $x \leq 0$ và $x > -2$. Vậy hàm số có miền xác định

$X = (-\infty, 0] \cap (-2, +\infty) = (-2; 0]$

5) $y = \sqrt{\sin x}$, có ý nghĩa khi $\sin x \geq 0$ hay $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, $k \in Z$, nghĩa là miền xác định của hàm số là tập hợp các đoạn $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $(k \in Z)$.

6) $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in Q \\ 0 & \text{nếu } x \in I \end{cases}$

Gọi là hàm Đirichlet, có miền xác định $X = R$

Nếu hàm $y = f(x)$ được cho bằng một công thức nhưng không giải ra đối với y: $F(x,y) = 0$, $\forall x \in X$.

$F[x, f(x)] \equiv 0$ thì y gọi là hàm ẩn của x. Trường hợp y cho bởi một công thức đã được giải ra đối với y cũng gọi là hàm số hiển.

Ngoài phương pháp cho bằng một công thức thường dùng trong giải tích, một hàm số có thể cho bằng những phương pháp khác nhau, chẳng hạn cho bằng một bảng tương ứng giữa $x \in X$, $y \in Y$ như các bảng số thường dùng.

1.2. Đồ thị của hàm số

Xét hàm số $f: X \to Y$, ta gọi đồ thị của hàm số là tập hợp con của tích $X.Y$, nghĩa là tập hợp các cặp số thực (có thứ tự): (x, y) với $x \in X$, $y \in Y$, $(y = f(x))$, trong mặt phẳng, xét hệ trục toạ độ vuông góc xoy và xét cặp (x, y) như là một điểm $M(x,y)$ trong mặt phẳng đó thì đồ thị của hàm số đối với hệ trục tọa độ đó, là một tập hợp điểm trong mặt phẳng, đồ thị đó thường là một đường

Thí dụ:

1) $y = ax + b$: đồ thị là một đường thẳng

2) $y = x^2$ đồ thị là một đường parabole.

3) $y = \dfrac{a}{x}$ đồ thị là một đường hyperbole.

4) $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$ đồ thị gồm 2 điểm $(-1,0)$ và $(1,0)$

5) $y = |x - 2| + |x - 1|$ có đồ thị ở Hình 1.

vì :

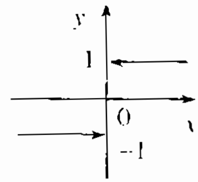
$$y = \begin{cases} -2x + 3 & \text{nếu } x < 1 \\ 1 & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

6) $y = E(x)$

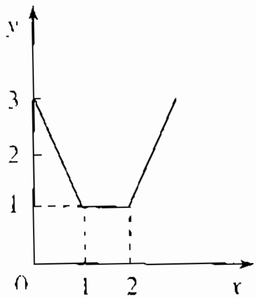
$E(x)$ chỉ phần nguyên của x: $E(x) \le x$, có đồ thị ở Hình 2 ($x \ge 0$)

7) $y = x - E(x)$ có đồ thị ở Hình 3 ($x \ge 0$)

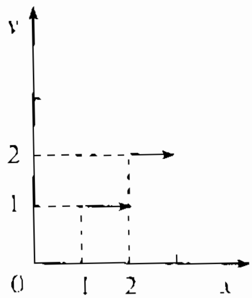
8) $y = \text{sign}x = \begin{cases} +1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$ (Hình 3a)



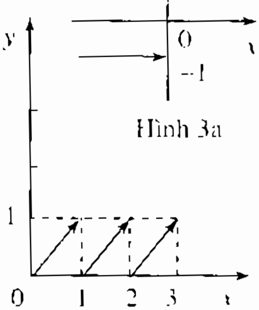
Hình 3a



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Chú ý: Một hàm số cũng có thể được cho bằng đồ thị của nó, khi đó mỗi điểm của đồ thị sẽ cho cách tương ứng giữa $x \in X$ và $y \in Y$.

1.3. Hàm số ngược

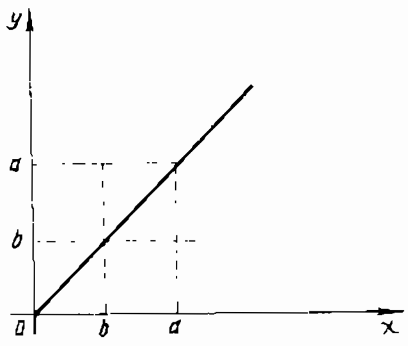
Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là X và miền giá trị là Y, theo định nghĩa thì f là một ánh xạ từ X lên Y, nếu f tồn tại ánh xạ ngược f^{-1}, $x = f^{-1}(y)$ thì f^{-1} gọi là hàm số ngược của f. Khi đó hàm số ngược f^{-1} sẽ miền xác định là Y và miền giá trị là X.

Nếu vẽ đồ thị của $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ trong cùng một hệ trục toạ độ xoy thì đồ thị của chúng như nhau vì cùng xác định bằng một cách tương ứng.

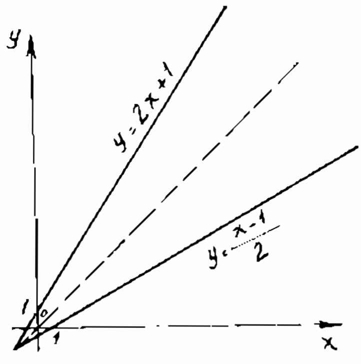
Nhưng cần phân biệt: giá trị của $y = f(x)$ được biểu diễn trên trục oy và giá trị của $x = f^{-1}(y)$ được biểu diễn trên trục ox.

Trong thực tế, người ta thường biểu diễn giá trị của f và f^{-1} trên cùng một trục oy, khi đó hàm ngược phải đổi ký hiệu lại là $y = f^{-1}(x)$ và đồ thị của $y = f^{-1}(x)$ sẽ đối xứng với đồ thị của $y = f(x)$ qua đường phân giác của góc toạ độ thứ nhất, vì xét một điểm bất kỳ $M(a,b)$ trên đồ thị của $y = f(x)$ thì $b = f(a)$, suy ra $a = f^{-1}(b)$ nghĩa là điểm $M'(b,a)$ trên đồ thị của $y = f^{-1}(x)$ rõ ràng M và M' đối xứng nhau qua đường phân giác của góc toạ độ thứ nhất (Hình 4).

(Lấy đơn vị trên các trục như nhau)



Hình 4

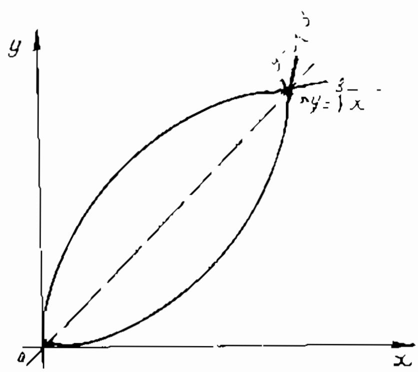


Hình5

Thí dụ:

1) $y = 2x + 1$ có hàm số ngược là $x = \dfrac{y-1}{2}$ đổi lại ký hiệu ta có $y = \dfrac{x-1}{2}$ (Hình 5)

2) $y = x^3$ có hàm ngược là $x = \sqrt[3]{y}$ đổi lại ký hiệu $y = \sqrt[3]{x}$ (Hình 6, với $x \geq 0$).



Hình 6

1.4. Hàm số hợp

Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là X, miền giá trị là Y và hàm $g(y)$ có miền xác định là Y, miền giá trị là Z, ta gọi ánh xạ hợp của f và g: (gof), $(gof)(x) = g[f(x)]$ là một hàm hợp của các hàm f, g hay là hàm kép của biến độc lập x qua biến trung gian y.

Rõ ràng hàm hợp $z = (gof)(x)$ có miền xác định là X và miền giá trị là Z.

Thí dụ: $y = 2x + 1$ có $X = R$, $Y = R$

$z = \sin y$ có $Y = R$, $Z = [-1,1]$

Vậy hàm hợp $z = \sin(2x+1)$ có $X = R$, $Z = [-1,1]$

Chú ý:

1) Nếu cho miền giá trị của f là Y và miền xác định của g là Y_1 thì $Y \subset Y_1$ mới lập được hàm số hợp (gof).

Thí dụ: $y = x^2$, $z = \sqrt{-\frac{1}{y}}$; ta có $Y = [0, +\infty[$

$Y_1 = (-\infty, 0)$, do đó không lập được hàm hợp, điều này cũng rõ khi thay $y = x^2$ ta có:

$Z = \sqrt{-\frac{1}{x^2}}$ không có nghĩa.

2) Có thể lập hàm hợp của nhiều hàm số.

§ 2. CÁC LOẠI HÀM ĐẶC BIỆT

2.1. Hàm bị chặn - Sup (inf) - Cực trị - giá trị lớn (bé) nhất

Cho hàm $y = f(x)$ có miền xác định là X, miền giá trị là Y, $f(x)$ gọi là bị chặn trên (dưới, bị chặn) trong X nếu miền giá trị Y của nó là một tập hợp bị chặn trên (dưới, bị chặn) nghĩa là:

$\exists c \in R\ \forall x \in X, f(x) \le c$, $(f(x) \ge c$, $|f(x)| \le c$, $c > 0)$

Khi đó Sup (inf Y) gọi là Sup (inf) của $f(x)$ trong X. Ký hiệu M_x hay Sup $f(x)$ (m_x hay inf $f(x)$)

Hiệu: h = Sup $f(x)$ - inf $f(x)$ gọi là giao độ của f trong X rõ ràng $h \ge 0$

vì Sup $f(x) \ge$ inf $f(x)$.

Nếu Sup $f(x)$ (inf $f(x)$) $\in Y$, nghĩa là:

$\exists x_o \in X$, $f(x_o)$ = Sup $f(x)$ = (inf $f(x)$) thì $f(x_o)$ là phần tử lớn (bé) nhất của Y, cũng gọi là giá trị lớn (bé) nhất của f trong X. Vậy $M(m)$ là giá trị lớn (bé) nhất của f trong X nếu:

$\exists x_o \in X$: $f(x_o) = M(m)$, $\forall x \in X$; $f(x) \le M$ $(\ge m)$.

Ta cũng nói f đạt giá trị lớn (bé) nhất trong X tại x_o. Nếu tồn tại một lân cận Δ của x_o, $\Delta \subset X$ mà f đạt giá trị lớn (bé) nhất trong Δ tại x_o thì $f(x_o)$ gọi là giá trị cực đại (tiểu) của f tại $x_o \in X$, gọi chung là cực trị. Ký hiệu y_{max} (y_{min}) = $f(x_o)$.

Thí dụ:

1) $f(x) = \sin x$ trong $X = [0, 2\pi]$ $f(x)$ là bị chặn trong X, $(|\sin x| \le 1)$,

$\sup \sin x = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$, $\inf \sin x = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

1(-1) đồng thời là cực đại (tiểu) và là giá trị lớn (bé) nhất của f trong X.

2) $f(x) = x - E(x)$ trong $X = [0,1]$, f là bị chặn trong X, $\text{Sup } f(x) = 1 \notin Y$, $\inf f(x) = 0 \in Y$.

2.2. Hàm đơn điệu :

Cho hàm $y = f(x)$ trong miền X. $f(x)$ gọi là đơn điệu không giảm (không tăng) trong X nếu

$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \; f(x_1) \le f(x_2) \; (f(x_1) \ge f(x_2))$

Trường hợp không có dấu =, $f(x)$ gọi là đơn điệu tăng (giảm) trong X. Các hàm trên gọi là các hàm đơn điệu.

Thí dụ:

1) $Y = x^2$ là đơn điệu giảm trong $(-\infty, 0)$ và đơn điệu tăng trong $(0, +\infty)$

2) $y = E(x)$ là đơn điệu không giảm trong $(-\infty, +\infty)$

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý:

Nếu $f(x)$ là đơn điệu tăng (giảm) trong miền X và có miền giá trị Y, thì f tồn tại hàm ngược f^{-1} đơn điệu tăng (giảm) trong Y

Thực vậy xét $f(x)$ đơn điệu tăng (đơn điệu giảm lý luận tương tự)

Theo định nghĩa $\forall x_1, x_2, \; x_1 < x_2: \; f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_1), f(x_2) \in Y$ do đó $x_1 \ne x_2$ thì $f(x_1) \ne f(x_2)$ nghĩa là $f(x)$ là một ánh xạ 1-1 từ X lên Y, do đó tồn tại ánh xạ ngược f^{-1} của f từ Y lên X nghĩa là tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ có miền xác định Y và miền giá trị X. Rõ ràng $f^{-1}(y)$ là đơn điệu tăng. Thực vậy, giả sử $y_1 < y_2$ và $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Theo định nghĩa thì $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ nếu $x_1 \ge x_2$ thì vì $f(x)$ là đơn điệu tăng nên $f(x_1) > f(x_2)$ tức là $y_1 \ge y_2$, trái với giả thiết. Vậy $x_1 < x_2$ nghĩa là

$x = f^{-1}(y)$ là đơn điệu tăng trong Y

2.3. Hàm số chẵn, lẻ

Cho hàm f xác định trong miền X đối xứng đối với gốc O

$f(x)$ gọi là chẵn (lẻ) trong X nếu

$\forall x \in X, f(-x) = f(x) \; (f(-x) = -f(x))$

Rõ ràng đồ thị của hàm số chẵn (lẻ) đối xứng qua trục oy (gốc tọa độ)

Thí dụ:

1) $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$ là các hàm chẵn

2) $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$ là các hàm lẻ

- Rõ ràng mọi hàm $f(x)$ xác định trong miền X có thể viết thành tổng của một hàm chẵn và một hàm lẻ, thực vậy có thể viết.

$f(x) = F(x) + G(x)$

$F(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $G(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Rõ ràng $F(x)$ là hàm chẵn và $G(x)$ là hàm lẻ.

2.4. Hàm tuần hoàn

Cho hàm $f(x)$ xác định trên miền X. $f(x)$ gọi là hàm tuần hoàn nếu $\exists\ a \in R$, $a \neq 0$ (a = const)

$\forall\ x \in X : f(x) = f(x+a)$

Suy ra: $f(x+2a) = f(x+a) = f(x)$

Tổng quát:

$f(x+ka) = f(x) \qquad k \in Z$

Số dương $T > 0$ (nhỏ nhất) sao cho $f(x+T) = f(x)$

gọi là chu kỳ (nhỏ nhất) của $f(x)$

Theo định nghĩa muốn xét sự tuần hoàn của $f(x)$ ta giải phương trình $f(x+a) = f(x)$, nếu tìm được $a \neq 0$ không phụ thuộc x thì $f(x)$ là tuần hoàn, và chu kỳ T của $f(x)$ được xác định bởi hệ thức $a = kT$, $k \in Z$.

Thí dụ:

1) Xét $f(x) = \sin \alpha x$

Giải: $\sin \alpha(x+a) = \sin \alpha x$. Ta có $\alpha(x+a) = \alpha x + 2k\pi$, $a = \dfrac{2k\pi}{\alpha}$,

vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ $T = \dfrac{2\pi}{|\alpha|}$

2) Xét $f(x) = x - E(x)$

Giải: $x - E(x) = (x+a) - E(x+a)$ ta có:

$a = E(x+a) - E(x) = k, \quad k \in Z$

Vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ $T = 1$.

3) Xét $f(x) = x^2$

Giải: $(x+a)^2 = x^2$ ta có $a = 0$ và $a = -2x$.

Vậy không có $a \neq 0$, không phụ thuộc x nên hàm không tuần hoàn.

§ 3. CÁC HÀM LŨY THỪA, MŨ, LƯỢNG GIÁC, HYPERBOLE

3.1. Lũy thừa với số mũ thực

Trong tập hợp các số thực R ta biết:

$\forall a \in R, a > 0, \forall n \in N$ đều tồn tại một số duy nhất $x \in R, x > 0$: $x^n = a$

x gọi là căn bậc n của a : $x = \sqrt[n]{a}$

Dựa vào định nghĩa của $\sqrt[n]{a}$; ta định nghĩa lũy thừa của a với số mũ hữu tỷ bất kỳ :

$$r = \frac{m}{n} \quad : \quad a^r = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \ , (m, n \in \mathrm{Z}, n \neq 0)$$

Có thể chứng minh dễ dàng, luỹ thừa với số mũ hữu tỉ cũng có mọi tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên. Bây giờ dựa vào định nghĩa lũy thừa với số mũ hữu tỷ Ta sẽ định nghĩa lũy thừa với số mũ thực bất kỳ.

Định lý: Cho $a \in R, a > 0, a \neq 1, b \in R$.

$\forall r, r' \in Q$: $r < b < r'$ thì tồn tại duy nhất một số $\alpha \in R$ ở khoảng giữa các số $a^r, a^{r'}$: $a^r < \alpha < a^{r'}$, người ta gọi số đó là lũy thừa của a với số mũ b,

Ký hiệu $\alpha = a^b$.

Có thể chứng minh: lũy thừa với số mũ thực cũng có mọi tính chất như lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

* Để chứng minh sự tồn tại duy nhất của α trước hết ta chứng minh:

$\forall r, r' \in Q, b \in R$: $r < b < r' \Rightarrow$

a) $\exists (r_k) \subset Q$, đơn điệu tăng, $r < r_k < b$, $r_k \to b$

b) $\exists (r'_k) \subset Q$, đơn điệu giảm, $b < r'_k < r'$, $r'_k \to b$

Thực vậy xét a), (b): chứng minh tương tự)

Chia đoạn $[r,b]$ làm hai phần bằng nhau bởi b_1 theo tính chất trù mật của Q trong R thì $\forall r_1 \in Q$: $b_1 < r_1 < b$, rõ ràng

$|r_1 - b| < \dfrac{b-r}{2}$; lại chia đoạn $[r_1, b]$ làm hai phần bằng nhau bởi b_2

thì $\exists\ r_2 \in Q$

$b_2 < r_2 < b$: $|r_2 - b| < \dfrac{b-r}{2^2}$

Quá trình tiếp tục ta có:

$r_k \in Q$: $b_k < r_k < b$; $|r_k - b| < \frac{b-r}{2^k}$

Rõ ràng dãy (r_k) đơn điệu tăng $r < r_k < b$

vì: $\frac{b-r}{2^k} \to 0 \Rightarrow (r_k \to b)$

Bây giờ ta chứng minh sự tồn tại duy nhất của số α

Xét $a > 1$, ($a < 1$, chứng minh tương tự, hoặc đặt $a = \frac{1}{a'}$; $a' > 1$ thì đưa được về trường hợp này).

Theo chứng minh trên thì có: $r_k \to b$, $r'_k \to b$

$r < r_1 < r_2 < .. < r_k < ... < r'_k < .. < r'_2 < r'_1 < r'$

Vì $a > 1$ nên.

$a^r < a^{r_1} < a^{r_2} < .. < a^{r_k} < ... < a^{r'_k} < .. < a^{r'_2} < a^{r'_1} < a^{r'}$

Rõ ràng

$a^{r'_k} - a^{r_k} = a^{r_k}(a^{r'_k - r_k} - 1) \to 0$

Vì đặt: $x_k = r'_k - r_k$ thì $x_k \to 0$, xét $x_k < 1$ thì $\frac{1}{x_k} > 1$

Đặt $n_k = E\left(\frac{1}{x_k}\right)$ thì $n_k \le \frac{1}{x_k} < n_k + 1$ hay

$\frac{1}{n_k + 1} < x_k < \frac{1}{n_k}$; suy ra $a^{\frac{1}{n_k+1}} < a^{x_k} \le a^{\frac{1}{n_k}}$

Nhưng: $a^{1/n_k} \to 1$ nên $a^{x_k} \to 1$

Vậy dãy đoạn $\left(\left[a^{r_k}, a^{r'_k}\right]\right)$ là dãy đoạn thắt theo nguyên lý Cantor, có một số duy nhất α.

$\forall k : \alpha \in \left[a^{r_k}, a^{r'_k}\right]$ theo trên thì $a^r < \alpha < a^{r'}$

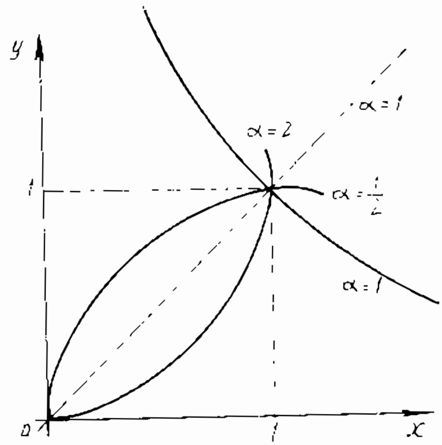
Dựa vào sự tồn tại của α ta sẽ định nghĩa các hàm lũy thừa và hàm mũ.

3.2. Hàm lũy thừa

Hàm lũy thừa là hàm có dạng $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$

Miền xác định của y phụ thuộc α, chẳng hạn $\alpha = n \in N$ hoặc $\alpha = \frac{1}{n'}$, n lẻ thì y xác định $\forall\ \alpha \in R$ nhưng $\alpha = \frac{1}{n}$, n chẵn thì chỉ xác định $\forall\ x \geq 0$, $x < 0$ thì y không xác định.

Rõ ràng $\forall \alpha \in R$, y xác định trong $(0, +\infty)$, nếu $\alpha > 0$ (<0) thì đồ thị của y gọi là 1 parabole (hyperbole) bậc α (Hình 7).



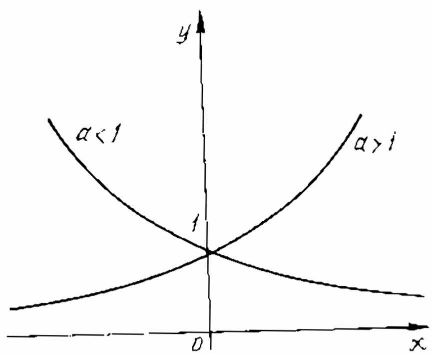
Hình 7

3.3. Hàm mũ

Hàm mũ là hàm có dạng $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Hàm mũ xác định $\forall\ x \in R$ và luôn luôn dương, nếu $a > 1$ thì a^x đơn điệu tăng, $a < 1$ thì a^x đơn điệu giảm.

Đồ thị của a^x ở phía trên trục hoành (Hình 8)



Hình 8

3.4. Hàm lượng giác

Đó là các hàm số đã định nghĩa trong lượng giác học

$y = \sin x$, $y = \cos x$,

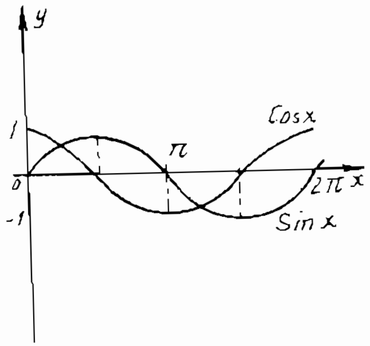
$y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{cotg}x$.

Các hàm $\sin x$, $\cos x$, xác định $\forall\ x \in R$ và là các hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

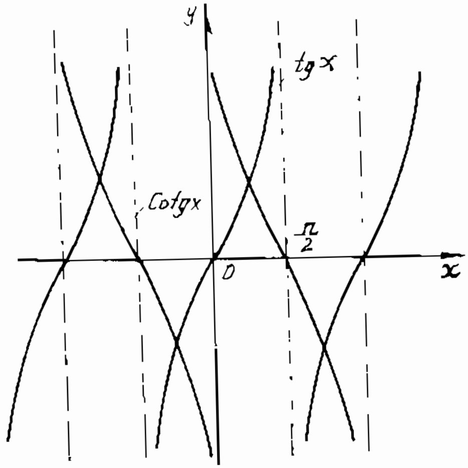
(x đo bằng radian) (Hình 9)

Hàm $y = \mathrm{tg}x$ ($\mathrm{cotg}x$) xác định $\forall\ x \in R$ trừ

$x = (2k+1)\ \pi/2$ ($k\ \pi$) và là hàm tuần hoàn chu kỳ π (Hình 10)



Hình 9



Hình 10

3.5. Hàm hyperbole

Dựa vào định nghĩa hàm số mũ ta sẽ định nghĩa một loại hàm khác gọi là các hàm hyperbole. Chúng có các tính chất tương tự như hàm lượng giác. Hàm hyperbole là các hàm được ký hiệu và xác định như sau:

$$y = \text{sh}x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \;;\; y = \text{ch}x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$y = \text{th}x = \frac{shx}{chx} \;;\; y = \text{côth} = \frac{1}{thx}$$

Trong đó: $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$

Đọc lần lượt là S-h-x, c-h-x, t-h-x, cô-t-h-x và gọi là Sin-hyperbole;

cosin-hyperbole; tg-hyperbole; cotg-hyperbole.

Các hàm này xác định $\forall\, x \in R$ trừ $y = \text{coth}x$ không xác định khi $x = 0$ (Hình 11,12)

Từ định nghĩa suy ra:

$\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$, $\dfrac{1}{ch^2x} = 1 - \text{th}^2x$; $\dfrac{1}{sh^2x} = \text{coth}^2x - 1$

$\text{ch}\,(x \pm y) = \text{ch}x\text{ch}y \pm \text{sh}x\text{sh}y$, $\text{ch}2x = \text{ch}^2x + \text{sh}^2x$

$\text{sh}\,(x \pm y) = \text{sh}x\text{ch}y \pm \text{ch}x\text{sh}y$, $\text{sh}2x = 2\text{ch}x\text{sh}x$.

Thực vậy, chẳng hạn: Xét $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$

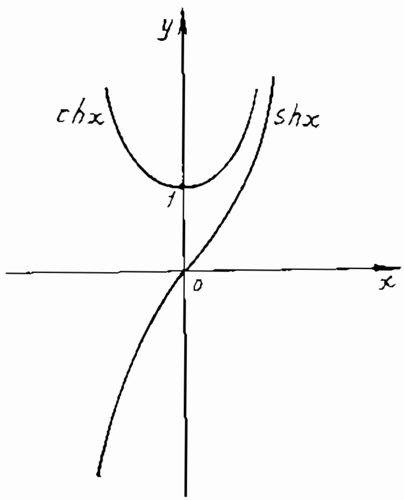
Ta có $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = (\text{ch}x + \text{sh}x)(\text{ch}x - \text{sh}x) = e^x.e^{-x} = 1$

Vì định nghĩa $\text{ch}x + \text{sh}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$ và tương tự:

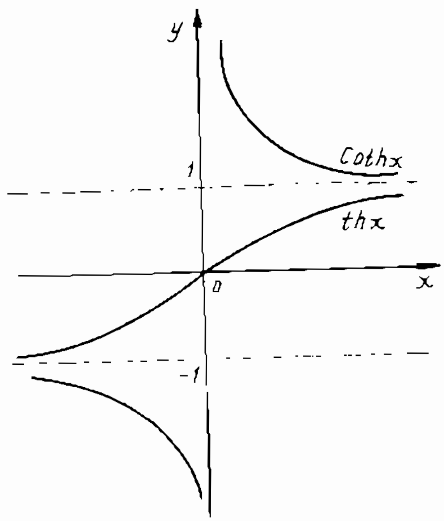
$\text{ch}x - \text{sh}x = e^{-x}$

Xét $\text{ch}(x+y) = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \dfrac{1}{2}\left[e^x.e^y + e^{-x}.e^{-y}\right]$

$= \dfrac{1}{2}\,[(\text{ch}x + \text{sh}x)(\text{ch}y + \text{sh}y) + (\text{ch}x - \text{sh}x)(\text{ch}y - \text{sh}y)] = \text{ch}x\text{ch}y + \text{sh}x\text{sh}y$



Hình 11



Hình 12

§ 4. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

4.1. Điểm tụ của một tập hợp

Xét tập hợp $X \subset \widetilde{R}$, $x_0 \in \widetilde{R}$ (hữu hạn hoặc vô hạn) gọi là điểm tụ của X nếu trong mọi lân cận của x_0 đều $\exists\, x \in X$, $x \neq x_0$. Theo định nghĩa thì x_0 có thể thuộc X hoặc không; chẳng hạn $X = [a,b)$ thì a, b đều là điểm tụ của X nhưng $a \in X$ còn $b \notin X$.

Rõ ràng nếu $x_0 \in R$ là điểm tụ của X thì $\exists\, (x_n) \subset X$

$x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$

Thực vậy: xét $x_0 \in R$ ($x_0 = +\infty$ ($-\infty$) xét tương tự) và xét các lân cận của x_0. $\Delta_n = (x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$, $\forall \varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Lấy $x_1 \in \Delta_1$, $x_1 \neq x_0$; $x_2 \in \Delta_2$, $x_2 \neq x_0$, $x_1, \ldots, x_n \in \Delta_n$, $x_n \neq x_0$ ... thì $\forall\, n$: $|x_n - x_0| < \varepsilon_n$ nghĩa là $x_n \to x_0$.

4.2. Định nghĩa giới hạn của hàm số

Định nghĩa 1: cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong miền X và $x_0 \in \widetilde{R}$ là một điểm tụ của X, số $a \in \widetilde{R}$ gọi là giới hạn của $f(x)$ tại x_0 hay $f(x)$ dần tới a khi x dần tới x_0 nếu.

$\forall (x_n) \subset X$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0 \Rightarrow (f(x_n) \to a)$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ hay $f(x) \to a$ ($x \to x_0$)

Bây giờ xét x_0, $a \in R$, từ định nghĩa trên ta sẽ suy ra một định nghĩa khác tương đương với nó:

Định nghĩa 2 : Số $a \in R$ gọi là giới hạn của $f(x)$ tại x_0 nếu:

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Định nghĩa này gọi là định nghĩa theo ngôn ngữ "ε, δ " còn định nghĩa 1 cũng được gọi là định nghĩa theo ngôn ngữ "dãy"

Thực vậy: từ định nghĩa 1 ta suy ra định nghĩa 2, vì nếu không nghĩa là:

$\forall\, \delta > 0$, $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists x$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| \geq \varepsilon$

vì $\forall (x_n)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$

nên với δ đã chọn thì $\exists\, n_0$: $\forall\, n > n_0$: $0 < |x_n - x_0| < \delta$ khi đó $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$

Chứng tỏ $f(x_n) \not\to a$.

Điều này mâu thuẫn với định nghĩa 1, ngược lại, từ định nghĩa 2:

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ lấy dãy bất kỳ (x_n). $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$. với δ đã chọn thì $\exists\ n_0$. $\forall\ n > n_0$, $0 < |x_n - x_0| < \delta$.

Khi đó $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Chứng tỏ $f(x_n) \to a$ nghĩa là có định nghĩa 1.

Vì $0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 \vee x_0 < x < x_0 + \delta$; $|f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$f(x) \in E$, $E = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$;

Do đó $x \in \Delta \backslash x_0 \Rightarrow f(x) \in E \Leftrightarrow f(\Delta \backslash x_0) \subset E$

$\Delta = (x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta)$

Nên định nghĩa 2 còn được phát biểu dưới dạng sau:

Số $a \in R$ gọi là giới hạn của $f(x)$ tại $x_0 \in R$ nếu cho trước một lân cận E của điểm a thì sẽ có 1 lân cận Δ của điểm x_0 để $f(\Delta \backslash x_0) \subset E$. Trong các định nghĩa trên, ta xét $x \to x_0$ một cách bất kỳ. Nếu $x \to x_0$, $x < x_0$ $(x > x_0)$ mà $f(x) \to a$ thì a gọi là giới hạn bên trái (phải) của $f(x)$ tại x_0.

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$ $(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a)$

Rõ ràng: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$$

Thực vậy giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ theo định nghĩa 2

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 - \delta < x < x_0 \vee x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Vậy: $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

nghĩa là $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$ hoặc:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

nghĩa là $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$

Ngược lại, giả sử: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$

Theo định nghĩa 2:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0, x_0 - \delta' < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$\exists\ \delta'' > 0, x_0 < x < x_0 + \delta'' \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

chọn $\delta = \min(\delta', \delta'')$ thì

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 - \delta < x < x_0 \vee x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Nghĩa là: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Chú ý: Ta cũng ký hiệu $x_0 - 0$ ($x_0 + 0$) $= x_0^-$ (x_0^+)

Thí dụ:

1) Chứng minh: $\lim\limits_{x \to 1} (2x+1) = 3$. Xét một dãy bất kỳ x_n, $x_n \neq 1$, $x_n \to 1$ khi đó $2x_n + 1 \to 3$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1} (2x+1) = 3$

2) Chứng minh: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Xét một dãy bất kỳ $x_n \to +\infty$ thì $\dfrac{1}{x_n} \to 0$, do đó:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Tương tự: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\qquad \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$

3) Chứng minh: $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ ($a > 1$)

Xét $x \to +0$; Lấy một dãy bất kỳ x_k, $0 < x_k < 1$, $x_k \to 0$. Khi đó $\dfrac{1}{x_k} > 1$

Đặt $n_k = E\left(\dfrac{1}{x_k}\right)$ thì $n_k \le \dfrac{1}{x_k} < n_k + 1$ hay $\dfrac{1}{n_k + 1} < x_k \le \dfrac{1}{n_k}$

Vì a > 1 nên $a^{\frac{1}{n_k+1}} < a^{x_k} \le a^{\frac{1}{n_k}}$

Như đã biết các dãy $a^{\frac{1}{n_k+1}}, a^{\frac{1}{n_k}}$ đều dần tới 1 (chương 2) theo tính chất giới hạn của dãy thì $a^{x_k} \to 1$, theo định nghĩa $\lim\limits_{x \to +0} a^x = 1$

Xét $x \to -0$, lấy một dãy bất kỳ $x_k \to -0$. Đặt $x_k = -x'_k$ thì $x'_k \to +0$.

Theo chứng minh trên $a^{x_k} = a^{-x'_k} = \dfrac{1}{a^{x'_k}} \to \dfrac{1}{1} = 1$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ ($a > 1$)

Tương tự: $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ ($0 < a < 1$)

4) Chứng minh : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty\ (a>1)$

Xét một dãy bất kỳ (x_k), $x_k \to +\infty$ đặt $n_k = E(x_k)$ thì $x_k \ge n_k$ và $a^{x_k} \ge a^{n_k}$ $(a>1)$, $(x_k > 1)$

Nhưng $a^{n_k} \to +\infty$ (chương 2); do đó $a^{x_k} \to +\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty\ (a>1)$

Từ kết quả này suy ra :

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0\ (a>1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0\ (0<a<1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty\ (0<a<1)$

5) Chứng minh : $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại

Theo định nghĩa, chỉ cần chỉ ra một dãy (x_n), $x_n \to 0$ mà $\sin\dfrac{1}{x_n}$ không tồn tại

Xét dãy $x_n = \dfrac{2}{(2n-1)\pi}$ thì $x_n \to 0$

và $\sin\dfrac{1}{x_n} = \sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$ không tồn tại, vì khi $n = 2m$ thì

$\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2} = \sin(4m-1)\dfrac{\pi}{2} = -1 \to -1$, $n = 2m+1$ thì

$\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2} = \sin(4m+1)\dfrac{\pi}{2} = 1 \to 1$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại

Chú ý Định nghĩa trên không đòi hỏi $f(x)$ phải xác định tại x_o vì x_o là một điểm tụ của X, thì x_o có thể thuộc X hoặc không, do đó có trường hợp $f(x)$ không xác định tại x_o, nhưng vẫn có giới hạn tại đó.

Chẳng hạn xét : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ không xác định tại $x_o=1$ nhưng $x_n \ne 1 \to x_n \to 1$ thì

$\dfrac{x_n^2-1}{x_n-1} = \dfrac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-1} = x_n + 1 \to 1 + 1 = 2$, nghĩa là $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

4.3. Tính chất và phép toán

Xét $x_0 \in \tilde{R}$, $a \in R$

Từ định nghĩa giới hạn hàm số và các tính chất của dãy hội tụ, suy ra:

1°. $f(x) \to a_1, f(x) \to a_2\ (x \to x_0) \Rightarrow a_1 = a_2$

(tính chất duy nhất của giới hạn)

2°. $f(x) \to a(x \to x_0) \Leftrightarrow (f(x) - a) \to 0\ (x \to x_0)$

3°. $f(x) = C,\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) \to C\ (x \to x_0)$

4°. $f(x) \to a,\ g(x) \to a\ (x \to x_0)$

$\exists\delta > 0, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash x_0, f(x) \le h(x) \le g(x) \Rightarrow h(x) \to a(x \to x_0)$.

5° $f(x) \to a(x \to x_0) \Rightarrow \exists C > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash x_0, |f(x)| \le C$

6°. $f(x) \to a(x \to x_0), a > p\ (< q) \Rightarrow \exists\delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash x_0,$

$f(x) > p\ (< q)$

Hệ quả:

$f(x) \to a(x \to x_0), \exists\delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash x_0, f(x) \le p\ (\ge q) \Rightarrow a \le p\ (\le q)$

7°. $f(x) \to a(x \to x_0),\ g(y) \to b(y \to a) \Rightarrow g[f(x)] \to b(x \to x_0)$

8°. $f(x) \to a,\ g(y) \to b,\ (x \to x_0) \Rightarrow f(x) \pm g(x) \to a \pm b\ (x \to x_0)$

$f(x)\cdot g(x) \to a\cdot b\ (x \to x_0)$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b}$ (b ≠ 0) $(x \to x_0)$

Thực vậy chẳng hạn xét phần đầu của 8:

Xét dãy bất kỳ (x_n), $x_n \ne x_0$, $x_n \to x_0$

thì $f(x_n) \to a$, $g(x_n) \to b$, theo tính chất của dãy hội tụ

thì $f(x_n) + g(x_n) \to a + b(x \to x_0)$. vậy $f(x_n) + g(x_n) \to a + b(x \to x_0)$

Thí dụ: Chứng minh

1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

Xét $x \to +0$ và $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin x < x$, nhưng $0 \to 0$, $x \to 0$ nên theo 4°

$\sin x \to 0$

Xét $x \to -0$, đặt $x = -x'$ thì $x' \to +0$ và $-\sin x = \sin(-x') = -\sin x' \to 0$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

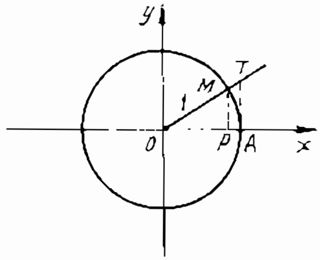
Ta biết $\cos x = 1 - 2\sin^2 x/2$.

Theo thí dụ trên và theo 8°

Thì $\cos x \to 1 - 0 = 1 (x \to 0)$

hay $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$



Hình 13

Xét $x \to +0$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Theo Hình 13:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx \text{ hay } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Nhưng $\cos x \to 1$ $(x \to 0)$, $1 \to 1$. Theo 4°, $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Xét $x \to -0$, đặt $x = -x'$ thì khi đó

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x' \to +0} \frac{\sin(-x')}{-x'} = \lim_{x' \to +0} \frac{\sin x'}{x'} = 1$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Xét $x > 1$, $x \to +\infty$, lấy 1 dãy bất kỳ (x_k), $x_k > 1$, $x_k \to +\infty$ đặt $n_k = E(x_k)$ thì $n_k \le x_k < n_k + 1$ hay $\dfrac{1}{n_k + 1} < \dfrac{1}{x_k} \le \dfrac{1}{n_k}$

Suy ra : $\left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \dfrac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}$

Nhưng $\left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n_k + 1}} \to e.1 = e$

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \to e.1 = e$$

Theo 4°, $\left(1 + \dfrac{1}{x_k}\right)^{x_k} \to e$ Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Xét $x \to -\infty$, đặt $x = -x' - 1$ thì $x' \to +\infty$. Khi đó

$$\left(1+\frac{1}{-x'-1}\right)^{-x'-1} = \left(\frac{-x'}{-x'-1}\right)^{-x'-1} = \left(\frac{x'+1}{x'}\right)^{x'+1} = \left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}.\left(1+\frac{1}{x'}\right) \to e.1 = e$$

(theo trên) Vậy

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Đặt $x = \frac{1}{\alpha}$, $x \to \pm\infty$ thì $\alpha \to 0$ khi đó $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

Chú ý : Giới hạn trên có dạng 1^{∞}, sau này sẽ thấy đây cũng là 1 dạng vô định.

4.4. Khử dạng vô định

Tương tự như đối với dãy số khi tìm giới hạn của hàm số ta cũng gặp các dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 1^{\infty}$ và còn gặp các dạng vô định khác.

Ta sẽ dùng biến đổi đại số và dùng các giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

để khử các dạng vô định đó

1°. Dạng $\frac{0}{0}$

Thí dụ :

1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{4x}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{1+8x}-3)(\sqrt{1+8x}+3)(\sqrt{4x}+2)}{(\sqrt{4x}-2)(\sqrt{4x}+2)(\sqrt{1+8x}+3)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{8(x-1)(\sqrt{4x}+2)}{4(x-1)(\sqrt{1+8x}+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{4x}+2)}{\sqrt{1+8x}+3} = \frac{4}{3}$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{ax} = a\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = a$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{2}$

2°. Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Thí dụ

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^2-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-1} = -1$

3° Dạng 0. ∞

Thí dụ :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x.\cot gx = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{y\to 0}ytg\dfrac{\pi}{2}(1-y) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{tg\dfrac{\pi}{2}y} = \dfrac{2}{\pi}$

(Đặt $1-x=y \Rightarrow x\to 1 \Rightarrow y\to 0$)

4°. Dạng $\infty - \infty$

Thí dụ :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

5° Dạng 1^{∞}

Thí dụ : Tìm

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$, $\left(\alpha=\dfrac{k}{x},k\in Z,k\neq 0\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{k}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\underbrace{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}....(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}_{k\text{ lần}}=e^k \quad \left(\alpha=\frac{k}{x}\right)$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\frac{-3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{6}{\alpha}-3}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-3}(1+\alpha)^{-\frac{6}{\alpha}}=1.e^{-6}=e^{-6}\quad\left(\alpha=\frac{-3}{x+2},x\to\infty,\alpha\to 0\right)$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}}=e^{-2},\left(\alpha=-2\sin^2 x\right)$$

§ 5. VÔ CÙNG BÉ VÀ VÔ CÙNG LỚN

5.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trong miền X và $x_0\in\widetilde{R}$ là 1 điểm tụ của X, hàm $f(x)$ gọi là một vô cùng bé (vô cùng lớn) khi $x\to x_0$ nếu :

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\quad\left(\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty\right)$$

Ký hiệu $f(x)$: VCB (VCL) $(x\to x_0)$

Thí dụ :

1) $y=\sin x$: VCB $(x\to 0)$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

2) $y=x^n$: VCL $(x\to\infty)$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}|x^n|=+\infty$

Rõ ràng: nếu $f(x)\to\infty$ $(x\to x_0)$ thì $f(x)$: VCL $(x\to x_0)$

Nhưng ngược lại, nói chúng không đúng, chẳng hạn .

$x_n = (-1)^n n$: VCL ($n \to +\infty$) vì $|x_n| \to +\infty$, nhưng x_n không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

5.2. Các phép toán:

Từ định nghĩa và các phép toán giới hạn ta suy ra ngay các phép toán về VCB (VCL) như sau :

1° $f(x)$, $g(x)$: VCB ($x \to x_0$) $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$: VCB ($x \to x_0$).

2°. $f(x)$: VCB, $g(x)$ bị chặn, đặc biệt $g(x)$: VCB ($x \to x_0$) $\Rightarrow f(x).g(x)$: VCB ($x \to x_0$).

3°. $f(x)$: VCL, $g(x)$: bị chặn ($x \to x_0$) $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$: VCL ($x \to x_0$)

4°. $f(x)$, $g(x)$ VCL ($x \to x_0$) $\Rightarrow f(x).g(x)$: VCL ($x \to x_0$).

5° $f(x)$: VCB $\neq 0$ ($x \to x_0$) $\Rightarrow 1/f(x)$: VCL ($x \to x_0$) $f(x)$: VCL ($x \to x_0$) $1/f(x)$: VCB ($x \to x_0$).

6° $f(x) \to a$ ($x \to x_0$) $\Leftrightarrow f(x) - a$: VCB ($x \to x_0$), ($a \in R$).

5.3. So sánh

a) ***Định nghĩa***: cho $f(x)$, $g(x)$: VCB (VCL) ($x \to x_0$), $f(x)$ gọi là có bậc k ($k > 0$) so với $g(x)$ nếu:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^k} = C, C \neq 0 \ (C \in R)$$

$g(x)$: gọi là VCB (VCL) cơ sở

Đặc biệt: $k = 1$ thì $f(x)$, $g(x)$ gọi là các VCB (VCL) đồng bậc khi $x \to x_0$

$k > 1$ thì $f(x)$, gọi là có bậc cao hơn bậc của $g(x)$ hay $g(x)$ gọi là bậc thấp hơn bậc của $f(x)$ khi $x \to x_0$.

Từ định nghĩa suy ra.

Định lý: - cho $f(x)$, $g(x)$: VCB (VCL) $x \to x_0$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } f(x) \text{ có bậc cao (thấp) hơn của bậc } g(x) \\ \infty: & \text{nếu } f(x) \text{ có bậc thấp (cao) hơn của bậc } g(x) \end{cases}$$

Thực vậy: xét trường hợp $f(x)$, $g(x)$, VCB ($x \to x_0$) và $f(x)$ có bậc cao hơn bậc của $g(x)$ (các trường hợp khác tương tự).

Theo định nghĩa thì: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{[g(x)]^k} = C \neq 0, k > 1$

Suy ra: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)[g(x)]^{k-1}}{[g(x)]^k} = C.0 = 0$

5.4. Vô cùng bé (vô cung lớn) tương đương

Định nghĩa cho $f(x)$, $g(x)$: VCB, (VCL) ($x \to x_0$) $f(x)$, $g(x)$ gọi là các vô cùng bé (VCL) tương đương khi $x \to x_0$ nếu:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ký hiệu $f(x) \sim g(x)$, như vậy $f(x)$ có bậc $k \geq 1$ so với $g(x)$ thì:

$f(x) \sim C\,[g(x)]^k$

$C\,[g(x)]^k$ gọi là phần chính của VCB (VCL) khi $x \to x_0$

Thí dụ Theo các ví dụ và bài tập đã có, khi $x \to 0$, $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg}x \sim x$,

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $\operatorname{tg}x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$, $(1 + x)^r - 1 \sim rx$, $r \in Q$, $r > 0$.

Khi $x \to \infty$: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \sim a_0x^n$.

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý 1: Nếu $f(x)$, $g(x)$: VCB (VCL) ($x \to x_0$) $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ thì:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Thực vậy: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \dfrac{g_1(x)}{g(x)} =$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x)}{g(x)} = 1 \right) \quad \text{do } f_1 \sim f,\ g_1 \sim g$$

Định lý 2. cho $f(x)$, $g(x)$: VCB (VCL) ($x \to x_0$) nếu $g(x)$ có bậc cao (thấp) hơn bậc của $f(x)$ thì:

$$f(x) + g(x) \sim f(x)$$

Thực vậy, xét trường hợp VCB (VCL): tương tự)

Ta có :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=1$$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$ vì $g(x)$ có bậc cao hơn của $f(x)$, do đó theo định nghĩa

$$f(x)+g(x)\sim f(x)$$

Chú ý: Nếu $f\sim f_1$, $g\sim g_1$ thì $fg\sim f_1g_1$

Nhưng chưa chắc $f\pm g\sim f_1\pm g_1$

Chẳng hạn $\sin x\sim x$, $\operatorname{tg}x\sim x$ khi $x\to 0$

Nhưng $\operatorname{tg}x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$ khi $x\to 0$

Áp dụng các định lý trên, ta có thể tìm giới hạn của các hàm là thương của các VCB (VCL).

Thí dụ:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.2x}{\frac{1}{2}x^2}=4$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{1}{3}x}=3$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x+2}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{3x^3}=\dfrac{1}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

§ 6. ĐỊNH NGHĨA SỰ LIÊN TỤC VÀ GIÁN ĐOẠN CỦA HÀM SỐ

6.1. Định nghĩa 1

Hàm $y=f(x)$ xác định tại lân cận điểm $x_o\in X$, gọi là liên tục tại x_o nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_o)$ nghĩa là $\forall(x_n)$, $x_n\to x_o\Rightarrow(f(x_n)\to f(x_o))$ hay $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$,

$$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x)|<\varepsilon$$

Hoặc cho trước một lân cận $E = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ của điểm $f(x_0)$ thì sẽ tồn tại một lân cận $\Delta = (x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta\ )$ của điểm x_0 sao cho $f(\Delta) \subset E$, x_0 gọi là điểm liên tục của $f(x)$

Đặt $\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Δx, Δy gọi là số gia của đối số và hàm số tại x_0, thì định nghĩa trên có thể phát biểu cách khác như sau.

Hàm $y = f(x)$ xác định tại lân cận x_0, gọi là liên tục tại x_0 nếu: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Một hàm số gọi là liên tục trong tập hợp $X \subset R$ nếu nó liên tục tại $\forall x \in X$, khi đó X gọi là miền liên tục của hàm số.

Thí dụ:

1) Xét hàm $y = x$

$\forall x \in R$ ta có $\Delta y = \Delta x$, suy ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Vậy $y = x$ liên tục $\forall x \in R$.

2) Xét hàm $y = a^x$ tại $x_0 \in R$. $\Delta y = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{\Delta x} - 1\right)$

Như đã biết $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$, do đó:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = a^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0}\left(a^{\Delta x} - 1\right) = 0$$

Vậy $y = a^x$ liên tục tại $x_0 \in R$, vì x_0 là bất kỳ nên hàm số liên tục $\forall x \in R$

3) Xét hàm $y = \sin x$ tại $x_0 \in R$

vì $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$

Nên $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Vậy $y = \sin x$ liên tục tại $x_0 \in R$, vì x_0 là bất kỳ nên hàm số liên tục $\forall x \in R$.

Tương tự: $y = \cos x$ cũng liên tục tại $\forall x \in R$

Ta đã định nghĩa hàm $y = f(x)$ liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Nếu chỉ có: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)\right)$ thì $f(x)$ gọi là liên tục bên trái (bên phải) điểm x_0

Thí dụ:

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} : x \neq 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, do đó $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = f(0) = 0$

Vậy $f(x)$ liên tục bên trái điểm $x = 0$

Từ định nghĩa giới hạn suy ra: ***f(x) là liên tục tại x_o khi và chỉ khi nó liên tục bên trái và bên phải điểm x_o***, nghĩa là:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Từ đó suy ra: đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục trong miền X là 1 đường liền vì nếu không thì không thể có đẳng thức này.

6.2. Định nghĩa 2: (điểm gián đoạn)

Hàm $y = f(x)$ xác định tại lân cận điểm x_0(có thể trừ ra tại x_0) gọi là gián đoạn tại x_0, nếu nó không liên tục tại đó, nghĩa là không tồn tại đẳng thức: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, x_0 gọi là điểm gián đoạn của hàm số. Như vậy $f(x)$ là gián đoạn tại x_0 nếu.

1°. $f(x)$ không xác định tại x_0 (không có $f(x_0)$) hoặc

2°. $f(x)$ không có giới hạn ($\in R$) tại x_0 hoặc

3°. $f(x)$ có giới hạn ($\in R$) tại x_0 nhưng giới hạn đó không bằng $f(x_0)$.

Nếu x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$ với điều kiện $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

tồn tại ($\in R$) thì x_0 gọi là điểm gián đoạn loại 1 của $f(x)$.

Hiệu: $h = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$

gọi là bước nhảy của $f(x)$ tại x_0, nếu $h = 0$ nghĩa là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại thì có thể lập lại sự liên tục của $f(x)$ tại x_0 bằng cách đặt $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, khi đó x_0 gọi là điểm gián đoạn bỏ được của $f(x)$, nếu x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$ nhưng không phải là điểm gián đoạn loại 1 của nó thì x_0 gọi là điểm gián đoạn loại 2 của $f(x)$.

Thí dụ:

1) Xét $f(x)=\begin{cases} 0 : x \leq 0 \\ 1 - x : x > 0 \end{cases}$

Ta có

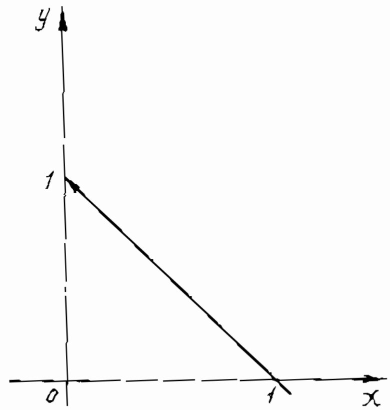
$\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to +0} f(x) = 1$

Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của $f(x)$ với bước nhảy $h = 1 - 0 = 1$.

2) Xét

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} ; x \neq 0 \\ 0 ; x = 0 \end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của $f(x)$ với bước nhảy $h = 0$. Do đó có thể lập sự liên tục của $f(x)$ tại $x = 0$ bằng cách đặt $f(0) = 1$.



Hình 14

3) Xét $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tại $x = 0$, $f(x)$ không xác định, do đó $x = 0$ là điểm gián đoạn của $f(x)$ vì

$\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty, \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ nên $x = 0$ là điểm gián đoạn 2 của $f(x)$

4) Xét $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} ; x \neq 0 \\ 0 ; x = 0 \end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ không tồn tại nên $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 2 của $f(x)$

5) Xét $f(x) = \begin{cases} 1 : x \in Q \\ 0 : x \in I \end{cases}$ (gọi là hàm Dirichlet)

Rõ ràng $\forall x \in R$ đều là điểm gián đoạn loại 2 của $f(x)$.

6.3. Các phép toán về hàm liên tục

Từ các phép toán về giới hạn suy ra:

Định lý 1: Nếu $f(x)$, $g(x)$ liên tục tại x_o thì $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$, $f(x)/g(x)$

$(g(x_0) \neq 0)$ cũng liên tục tại x_0.

Thí dụ.

1) Ta biết $y = x$ liên tục $\forall x \in R$, do đó $y = x^n$ $(n \in N)$ là liên tục $\forall x \in R$

2) Ta biết $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục $\forall x \in R$ do đó $y = \mathrm{tg}x = \sin x/\cos x$ là liên tục $\forall x \in R$, trừ $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ tại đó $\cos x = 0$

$y = \mathrm{cotg}x$ liên tục $\forall x \in R$ trừ $x = k\pi$.

Định lý 2: Cho hàm hợp $y = g[f(x)]$ với $y = g(u)$; $u = f(x)$, nếu $f(x)$ liên tục tại x_0, $g(u)$ liên tục tại $u_0 = f(x_0)$ thì $g[f(x)]$ liên tục tại x_0.

Thí dụ:

- Xét $y = e^{-x}$ đặt $u = -x$ thì u liên tục $\forall x \in R$, e^u liên tục $\forall u \in R$,

vậy $y = e^{-x}$ liên tục $\forall x \in R$.

Suy ra: $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $thx = \dfrac{shx}{chx}$ liên tục $\forall x \in R$,

$\coth x = \dfrac{1}{thx}$ liên tục $\forall x \in R$, trừ $x = 0$.

§ 7. CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÀM LIÊN TỤC TRONG MỘT ĐOẠN

$y = f(x)$ gọi là liên tục trong đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục $\forall x \in (a, b)$, liên tục bên phải điểm a và bên trái điểm b.

7.1. Định lý Weierstrass I : - Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn trong đoạn đó, nghĩa là $\exists C > 0\ \forall x \in [a, b]$: $|f(x)| \le c$

Chứng minh: - Giả sử ngược lại $f(x)$ không bị chặn trong $[a, b]$ nghĩa là

$\forall C > 0$, $\exists x \in [a, b]$ $|f(x)| > c$, do đó $\forall n \in N$, $\exists x_n \in [a, b]$ sao cho $|f(x_n)| > n$ (1)

Rõ ràng dãy x_n là bị chặn theo nguyên lý Bolzano-Weierstrass thì dãy đó có một dãy con (x_{n_k}) hội tụ, giả sử $x_{n_k} \to x_0$.

Rõ ràng $x_n \in [a, b]$ vì $\forall n$: $a \le x_n \le b$.

Theo tính chất của giới hạn thì $a \le x_0 \le b$, theo giả thiết $f(x)$ liên tục trong

$[a, b]$ nên $f\left(x_{n_k}\right) \to f\left(x_0\right)$ suy ra $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| \to \left|f\left(x_0\right)\right|$, mặt khác theo (1) thì $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| > n_k \to +\infty$ mâu thuẫn này chứng tỏ sự đúng đắn của định lý.

7.2. Định lý Weierstrass II : - Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ thì nó đạt một giá trị lớn nhất và một giá trị bé nhất trong đoạn đó

* Chứng minh: Theo định lý trước thì $f(x)$ bị chặn trong $[a, b]$ do đó theo tiêu đề Sup thì tồn tại $M = \operatorname{Sup} f(x)$, $m = \inf f(x)$ ta sẽ chứng minh $M(m)$ là giá trị lớn (bé) nhất của $f(x)$ trong $[a, b]$, nghĩa là chứng minh $\exists c \in [a, b]$: $f(c) = M(m)$.

Thực vậy xét trường hợp giá trị lớn nhất (trường hợp giá trị bé nhất chứng minh tương tự)

Theo tính chất 2 của Sup thì:

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in [a, b]: f(x) > M - \varepsilon$

Do đó $\forall n \in N, \exists x_n \in [a, b]: f(x_n) > M - \dfrac{1}{n}$ (1)

Rõ ràng x_n là 1 dãy bị chặn, theo nguyên lý Bolzano weierstrass, dãy đó có một dãy con $\left(x_{n_k}\right)$ hội tụ, giả sử $x_{n_k} \to c$, rõ ràng $c \in [a, b]$. Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trong $[a, b]$ nên $f\left(x_{n_k}\right) \to f(c)$

Mặt khác theo (1) $f\left(x_{n_k}\right) > M - \dfrac{1}{n_k}$, do đó : $f(c) \geq M$ (2).

Nhưng $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq M$, suy ra $f(c) \leq M$ (3). So sánh (2) và (3) ta có $f(c) = M$.

7.3. Định lý Bolzano-Cauchy

Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ và γ là một số cho trước ở khoảng giữa $f(a), f(b)$

$f(a) \neq f(b)$ thì có 1 số $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) = \gamma$.

* Chứng Minh: Giả sử $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$ chứng minh tương tự) khi đó $f(a) < \gamma < f(b)$ chia đoạn $[a, b]$ ra làm 2 phần bằng nhau bởi điểm $\overline{c}$,

Nếu $f(\overline{c}) = \gamma$ thì định lý được chứng minh. Giả sử $f(\overline{c}) \neq \gamma$

Nghĩa là $f(\overline{c}) < \gamma$ hoặc $f(\overline{c}) > \gamma$ nếu $f(\overline{c}) < \gamma$ thì đặt $a_1 = \overline{c}$, $b_1 = b$,

Khi đó : $f(a_1) < \gamma < f(b_1)$

Nếu $f(\overline{c}) > \gamma$ thì đặt $a_1 = a$, $b_1 = \overline{c}$ ta vẫn có bất đẳng thức trên.

Rõ ràng $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$. Lại chia đoạn $[a, b]$ làm 2 phần bằng nhau và lý luận tương tự, ta được đoạn $[a_2, b_2]$:

$f(a_2) < \gamma < f(b_2)$, $b_2 - a_2 = \dfrac{b-a}{2^2}$

Quá trình lý luận tiếp tục, ta được 1 dãy đoạn

$([a_n, b_n])$ $\forall_n : f(a_n) < \gamma < f(b_n)$ (1).

$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Rõ ràng đó là 1 dãy đoạn thắt vì,

$\forall n : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $b_n - a_n \to 0$.

Theo nguyên lý Cantor thì có 1 điểm c duy nhất,

$\forall n$ $c \in [a_n, b_n]$, $a_n \to c$, $b_n \to c$.

Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$ nên $f(a_n) \to f(c)$, $f(b_n) \to f(c)$.

Theo (1) và tính chất của giới hạn thì $f(c) \leq \gamma$ và $f(c) \geq \gamma$.

Vậy $f(c) = \gamma$. Rõ ràng $c \in (a,b)$ vì nếu chẳng hạn $c = a$ thì $f(c) = \gamma = f(a)$.

Vì γ là 1 số bất kỳ ở khoảng giữa $f(a)$; $f(b)$ nên suy ra:

Hệ quả 1:

Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì $f(x)$ lấy mọi giá trị trung gian gồm giữa $f(a)$, $f(b)$. Do đó, định lý trên cũng gọi là định lý lấy giá trị trung gian của hàm liên tục.

Theo định lý trước thì $f(x)$ đạt được một giá trị nhỏ nhất m và 1 giá trị lớn nhất M, do đó $f(x)$ lấy mọi giá trị trung gian ở giữa m, M nghĩa là miền giá trị của $f(x)$ là đoạn $[m, M]$ và hình học thì đường thẳng $y = \gamma : m < \gamma < M$ thế nào cũng cắt đồ thị của $f(x)$ tại ít nhất 1 điểm.

Từ định lý trên còn suy ra 1 hệ quả nữa rất quan trọng sau:

Hệ quả 2:

Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì $\forall c \in (a,b) : f(c) = 0$.

Thực vậy vì $f(a).f(b) < 0$ nên $\gamma = 0$ ở giữa $f(a)$, $f(b)$

Do đó theo định lý trên thì: $\forall c \in (a,b) : f(c) = \gamma = 0$.

Ý nghĩa của hệ quả này rất lớn: đó chính là điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong đoạn $[a,b]$ và từ đó có thể suy ra cách giải gần đúng phương trình này.

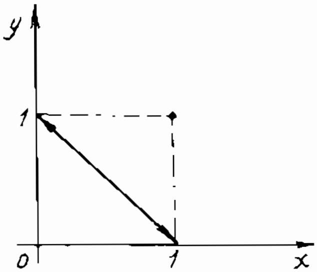
Chú ý: 1) Ba định lý trên có thể phát biểu thành 1 định lý như sau:

Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn, đạt 1 giá trị lớn nhất, 1 giá trị bé nhất và lấy mọi giá trị trung gian ở giữa các giá trị bé, lớn nhất đó.

2) Điều kiện liên tục trong định lý này chỉ là điều kiện đủ để có các kết luận. Thực vậy xét hàm :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \;:\; 0 < x < 1 \\ 0 \;:\; x = 0 \\ 1 \;:\; x = 1 \end{cases}$$

Rõ ràng $f(x)$ không liên tục trong đoạn $[0,1]$ nhưng nó bị chặn vì $\forall x \in [0,1] : f(x) \le 1$... Nó vẫn đạt một giá trị lớn, bé nhất $M = 1$ và $m = 0$ và vẫn lấy mọi giá trị trung gian giữa 0 và 1 (Hình 15).



Hình 15

§ 8. SỰ TỒN TẠI GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM ĐƠN ĐIỆU

Định lý 1:

Nếu $f(x)$ đơn điệu không giảm trong (a, b) $a, b \subset \widetilde{R}$ và bị chặn trên (dưới) trong khoảng đó thì $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right)$ tồn tại, nếu $f(x)$ không bị chặn trên (dưới) thì $f(x) \to +\infty$ $(x \to b - 0)$, $(f(x) \to -\infty$ $(x \to a + 0))$.

Định lý cũng được phát biểu tương tự đối với $f(x)$ đơn điệu không tăng.

Định lý này là sự mở rộng sự tồn tại giới hạn của dãy đơn điệu (nguyên lý Weierstrass) cho trường hợp hàm đơn điệu. Dựa vào nguyên lý đó và định nghĩa giới hạn của hàm số có thể chứng minh dễ dàng định lý này.

Thực vậy, lấy 1 dãy bất kỳ $(x_n) \subset (a,b)$, $x_n < b$, $x_n \to b$. Khi đó dãy $(f(x_n))$ là đơn điệu không giảm, vì $f(x)$ là đơn điệu không giảm trong (a,b), cũng theo giả thiết $(f(x_n))$ là bị chặn trên, do đó theo nguyên lý Weierstrass thì $\lim f(x_n)$ tồn tại. Suy ra $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ tồn tại, lý luận tương tự $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ cũng tồn tại.

Rõ ràng $\forall x \in (a,b)$:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \le f(x) \le \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ nếu $f(x)$ không bị chặn trên (dưới), thì rõ ràng

$\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$

Định lý 2: Nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu trong (a,b) thì mọi điểm gián đoạn của nó trong (a,b) đều là điểm gián đoạn loại 1.

* Chứng minh : Xét $f(x)$ đơn điệu không giảm, ($f(x)$ đơn điệu không tăng xét tương tự).

Giả sử $x_0 \in (a, b)$ là một điểm gián đoạn của $f(x)$, $\forall x < x_0$ thì $f(x) \leq f(x_0)$

Do đó $f(x)$ bị chặn trên (bởi $f(x_0)$ trong (a, x_0))

Theo định lý 1: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ tồn tại, tương tự $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ tồn tại, các giới hạn này không bằng $f(x_0)$ vì x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$ .Vậy x_0 là điểm gián đoạn loại 1 của $f(x)$.

Ta biết nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì miền giá trị của nó là đoạn $[m,M]$ trong đó $m(M)$ là giá trị bé (lớn) nhất của $f(x)$ trong $[a,b]$. Đặc biệt: nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu và liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì $m = f(a)$, $M = f(b)$ hoặc $m = f(b)$, $M = f(a)$ khi đó miền giá trị của $f(x)$ là đoạn $[f(a),f(b)]$ hoặc $[f(b),f(a)]$.

Nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng (a,b) thì miền giá trị của nó không nhất thiết là 1 khoảng, chẳng hạn hàm $f(x) = x^2$ liên tục trong khoảng $(-1,1)$ nhưng miền giá trị của nó là $[0,1)$. Đặc biệt đối với hàm đơn điệu tăng (giảm) ta có:

Định lý 3: Nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng (giảm) và liên tục trong khoảng (a,b), $a,b \in \widetilde{R}$ thì miền giá trị của nó là khoảng (α, β) với

$$\alpha = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad \beta = \lim_{x \to b-0} f(x) \qquad \alpha,\ \beta,\ \in \widetilde{R}$$

* Chứng minh: - Xét $f(x)$ đơn điệu tăng (giảm chứng minh tương tự) theo định lý 1 thì α, β tồn tại và $\forall x \in (a,b)$: $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ (1), $\alpha, \beta \in \widetilde{R}$. Nhưng không thể có dấu bằng, vì chẳng hạn có $x_0 \in (a,b)$: $f(x_0) = \alpha$.

Khi đó lấy: $x_1 \in (a, b)$, $x_1 < x_0$ thì theo giả thiết $f(x)$ đơn điệu tăng nên:

$f(x_1) < f(x_0)$ hay $f(x_1) < \alpha$ mâu thuẫn với (1).

Như vậy $\forall x \in (a, b)$: $\alpha < f(x) < \beta$, bây giờ cho số γ bất kỳ: $\alpha < \gamma < \beta$ (2)

thì $\exists\, x_1, x_2 \in (a,b)$: $\alpha < f(x_1) < \gamma < f(x_2) < \beta$

Vì nếu không, chẳng hạn $\forall x \in (a,b)$, $f(x) > \gamma$

thì vì $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \alpha$ nên theo tính chất của giới hạn: $\alpha \geq \gamma$, mâu thuẫn với (2). Theo giả thiết thì $f(x)$ liên tục trong $[x_1,x_2]$

Do đó theo định lý lấy giá trị trung gian của hàm liên tục thì $\forall c \in (x_1, x_2)$: $f(c) = \gamma$ vì γ là bất kỳ nên $f(x)$ lấy mọi giá trị ở giữa α, β, nghĩa là miền giá trị của $f(x)$ là khoảng (α, β).

Ta biết nếu hàm $y = f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) trong miền X và có miền giá trị là Y thì nó có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) trong miền Y và có miền giá trị là X.

Một vấn đề được đặt ra là: khi nào thì f^{-1} là liên tục trong Y?

Để trả lời ta có:

Định lý 4 Nếu hàm $y = f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) và liên tục trong miền X thì nó có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) và liên tục trong miền Y là miền giá trị của $f(x)$.

Chứng minh: Như đã biết (2.2) thì $f(x)$ có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) trong Y. Ta sẽ chứng minh $f^{-1}(y)$ là liên tục trong Y.

Thực vậy, xét $X = (a,b)$ và $f(x)$ là đơn điệu tăng (các trường hợp khác tương tự).

Theo định lý 3 thì $Y = (\alpha, \beta)$, $\alpha = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\beta = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$, ($Y$: miền giá trị của $f(x)$)

Xét $y_0 \in (\alpha,\beta)$. Theo định lý 1 thì có các giới hạn:

$x_1 = \lim\limits_{y \to y_0-0} f^{-1}(y) \le x_0, x_2 = \lim\limits_{y \to y_0+0} f^{-1}(y) \ge x_0$

Với $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a,b)$, vì $\forall y \in (\alpha,\beta)$ thì $a < f^{-1}(y) < b$ nên x_1, $x_2 \in (a,b)$. Rõ ràng $x_1 = x_2 = x_0 = f^{-1}(y_0)$ vì nếu không chẳng hạn $x_1 \neq x_0$.

Theo trên thì $x_1 < x_0$, khi đó $\forall y < y_0$,

ta có $f^{-1}(y) \le x_1 < x_0$. Do đó giữa x_1, x_0, $f^{-1}(y)$ không lấy giá trị nào mâu thuẫn với điều (a,b) là miền giá trị của $f^{-1}(y)$.

Vậy $f^{-1}(y)$ liên tục tại $y_0 \in (\alpha,\beta)$ vì y_0 là bất kỳ nên $f^{-1}(y)$ là liên tục trong (α,β).

§ 9. HÀM LOGARITHME VÀ HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

9.1. Hàm logarithme

Xét hàm số $x = a^y$ (1) ($a > 0$, $a \neq 1$). Ta biết hàm này là đơn điệu tăng khi $a > 1$, đơn điệu giảm khi $a < 1$ và liên tục trong $(-\infty, +\infty)$.

$$\lim_{y \to +\infty} a^y = \begin{cases} +\infty : a > 1 \\ 0 : a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{y \to -\infty} a^y = \begin{cases} 0 : a > 1 \\ +\infty : a < 1 \end{cases}$$

Nên miền giá trị của (1) là $f[(-\infty, +\infty)] = (0, +\infty)$. Vậy hàm (1) tồn tại hàm ngược $y = f^{-1}(x)$ đơn điệu tăng khi $a > 1$, giảm khi $a < 1$ liên tục trong $(0, +\infty)$ và có miền giá trị là $f^{-1}[(0, +\infty)] = (-\infty, +\infty)$.

Hàm ngược đó gọi là hàm logarithme cơ số a của x.

Ký hiệu: $y = \log_a x$ (2)

Như vậy :

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x = \begin{cases}+\infty : a>1\\ -\infty : a<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\log_a x = \begin{cases}0 : a>1\\ +\infty : a<1\end{cases}$$

Đồ thị của hàm $y = \log_a x$ đối xứng với đồ thị của hàm $y = a^x$ qua đường phân giác thứ nhất (Hình 16)

Lấy logarithme cơ số b ($b > 0, \neq 1$)

2 vế của (1) ta có

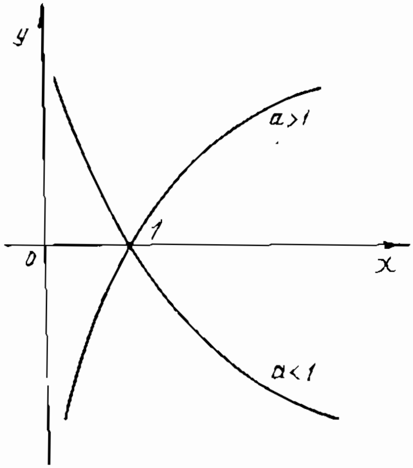
$\log_b x = y\log_b a$ theo (2):

$\log_b x = \log_b a.\log_a x$ (3)

Đây là công thức liên hệ giữa 2 hệ logarithme cơ số a và b cho x = b trong (3) ta được

$1 = \log_b a \,.\, \log_a b$ hay

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (4)$$



Hình 16

Khi $a = 10$ thì $\log_{10}x$ gọi là logarithme thập phân

Ký hiệu lg$x$

Trong giải tích và nhiều khoa học khác, người ta còn dùng 1 hệ logarithme khác rất quan trọng, đó là logarithme cơ số $a = e$ $\left(e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ gọi là logarithme tự nhiên hay logarithme Neper, ký hiệu $\ln x = \log_e x$ hay $Lx = \log_e x$.

Thay $b = e$ trong (3) và (4) ta có công thức liên hệ giữa logarithme tự nhiên và logarithme cơ số a bất kỳ.

$\ln x = \ln a.\lg_a x$, $\lg_a e = \dfrac{1}{\ln a}$

Đặc biệt $a = 10$ ta có:

$\ln x = \ln 10.\lg x$, $\lg e = \dfrac{1}{\ln 10}$

Đặt $M = \dfrac{1}{\lg e} = \dfrac{1}{0.43429} = 2.302$ thì $\ln x = M\lg x$

Chú ý: thay (2) vào (1) ta có $x = a^{\log_a x}\ \forall x \in (0,+\infty)$

Suy ra $x^\alpha = \left(a^{\log_a x}\right)^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$

Nghĩa là hàm lũy thừa viết dưới dạng hàm hợp của hàm mũ và hàm logarithme. Các hàm mũ và logarithme là các hàm liên tục do đó hàm lũy thừa $y = x^\alpha$ liên tục $\forall x \in (0,+\infty)$

9.2. Hàm lượng giác ngược

Xét hàm $x = \sin y$ với $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ ta biết hàm này liên tục và đơn điệu tăng trong $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ và $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

Do đó miền giá trị của nó là $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$

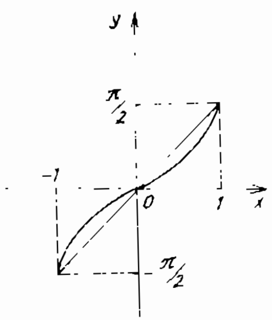
Vậy hàm $x = \sin y$, tồn tại hàm ngược $y = f^{-1}(x)$ cũng đơn điệu tăng và liên tục trong $[-1,1]$ và có miền giá trị là $f^{-1}([-1,1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$

Ký hiệu $y = \arcsin x$ (1)

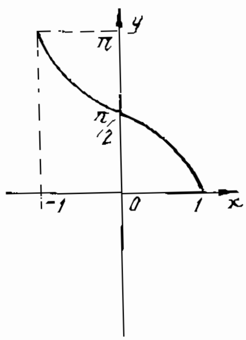
Tương tự $x = \cos y$, $0 \le y \le \pi$, $f([0,\pi]) = [-1,1]$ có hàm ngược $y = \arccos x$ đơn điệu giảm và liên tục trong $[-1,1]$.

$f^{-1}([-1,1]) = [0,\pi]$; $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $f\left[\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right] = (-\infty,+\infty)$

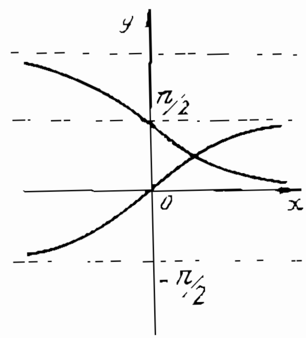
có hàm ngược



Hình 17



Hình 18



Hình 19

$y = \operatorname{arctg}x$ (3) đơn điệu tăng và liên tục trong $(-\infty, +\infty)$

Và $f^{-1}[(-\infty, +\infty)] = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hàm $x = \operatorname{cotg}y$, $0 < y < \pi$, $f[(0, \pi)] = (-\infty, +\infty)$ có hàm ngược $y = \operatorname{arccotg}x$ (4) đơn điệu giảm và liên tục trong $(-\infty, +\infty)$ và $f^{-1}[(-\infty, +\infty)] = (0, \pi)$.

Đồ thị của (1), (2), (3), (4) đối xứng với đồ thị của $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{cotg}x$ qua đường phân giác thứ nhất.

Từ định nghĩa suy ra.

$\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$, $-1 \le x \le 1$

$\arcsin(\sin x) = x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\arccos(\cos x) = x$, $0 \le x \le \pi$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x) = x$, $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}x) = x$, $-\infty < x < +\infty$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) = x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}x) = x$, $0 < x < \pi$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arccotg}x = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ $(xy < 1)$

$\operatorname{arctg}x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

Các công thức trên là hiển nhiên theo định nghĩa:

Ta chứng minh hệ thức: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

Ta có $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x + \arccos x \le \frac{3\pi}{2}$ (a)

$\sin(\arcsin x + \arccos x) = x^2 + \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-x^2} = 1$

$\Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Theo (a) thì $k = 0$. Vậy ta có hệ thức phải chứng minh.

§ 10. HÀM SƠ CẤP - SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SƠ CẤP - ÁP DỤNG TÌM GIỚI HẠN

10.1. Hàm sơ cấp

Các hàm. lũy thừa, mũ, logarithme, lượng giác, lượng giác ngược, hyperbole đã định nghĩa gọi là các hàm sơ cấp cơ bản. Ta cũng đã thấy các hàm đó liên tục trong các khoảng xác định của chúng.

Từ các hàm sơ cấp cơ bản, người ta lập các hàm số khác. Một hàm được xác định bằng 1 công thức duy nhất liên hệ giữa các hàm số sơ cấp cơ bản bằng một số hữu hạn các phép tính đại số và các phép lập hàm số hợp gọi là một hàm số sơ cấp

Thí dụ:

1) $y = \sqrt{\log_a\left(1+x^2\right)}$

$$y = \frac{x + arctg\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

là các hàm sơ cấp

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ} \end{cases}$ (hàm Dirichlet)

$f(n) = n!$

Không phải là các hàm sơ cấp vì hàm thứ nhất không xác định bằng 1 công thức, hàm thứ hai: số phép tính nhân tăng lên khi n tăng, nghĩa là số phép tính không hữu hạn Từ sự liên tục của các hàm số sơ cấp cơ bản và các phép tính về hàm liên tục suy ra:

Định lý. Mọi hàm sơ cấp đều liên tục trong miền xác định của nó

Vậy nếu $f(x)$ là hàm sơ cấp có miền xác định X thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\ x_0 \in X$$

Suy ra: muốn tìm giới hạn của $f(x)$ tại $x_0 \in X$ ta chỉ cần tính giá trị của $f(x)$ tại x_0. Chẳng hạn

$$\lim_{x\to 2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2+5}}{3}\right) = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} + \frac{\sqrt{2^2+5}}{3} = \frac{\pi}{4} + 1$$

10.2. Áp dụng tìm giới hạn:

Ta biết: nếu $f(x)$ liên tục tại x_0 thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nhưng $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$ do đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$

Dùng công thức này có thể tìm giới hạn của các hàm hợp lập từ các hàm liên tục. Sau đây ta sẽ đưa ra vài giới hạn quan trọng suy ra từ công thức đó:

1° $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Thực vậy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a\left(\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$\left(\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\right)$$

2° $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

(Đặt $a^x - 1 = y \Rightarrow x = \log_a(1+y)$, $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$)

3°. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $\quad (\alpha \in R)$

Thực vậy đặt $(1+x)^\alpha - 1 = y$ thì $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$

$(1+x)^\alpha = 1 + y \Rightarrow \alpha\ln(1+x) = \ln(1+y)$

Khi đó $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y}{\ln(1+y)} . \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha$

Từ các giới hạn đó suy ra khi $x \to 0$

$\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Dùng các giới hạn trên hoặc các công thức tương đương này, có thể khử được dạng vô định để tìm giới hạn.

Thí dụ:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1 \qquad (\alpha = x-1)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-1}{x}+\dfrac{1-e^{bx}}{x}\right)$

$=a\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}-b\lim\limits_{\beta\to 0}\dfrac{e^{\beta}-1}{\beta}=a-b$

$(\alpha = ax,\ \beta = bx)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{6}$

Áp dụng sự liên tục của hàm số ta còn suy ra một giới hạn quan trọng nữa sau đây.

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=a^b,\ a,\ b\in R$ với

$a=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0,\ b=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

Thực vậy $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

Áp dụng tính chất liên tục của hàm logarithme ta có:

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x).\ln f(x)=b\ln a$

Áp dụng tính liên tục của hàm mũ ta có

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}=e^{b\ln a}=a^b$

Bây giờ xét một số trường hợp vô định của giới hạn này.

Khi $a=1$, $b=\infty$ thì giới hạn có dạng 1^{∞} khi đó có thể viết $f(x)=1+f_1(x)$ với $f_1(x)\to 0,\ (x\to x_0)$

Và

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[1+f_1(x)\right]^{g(x)}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left\{\left[1+f_1(x)\right]^{\frac{1}{f_1(x)}}\right\}^{g(x)f_1(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)f_1(x)}$

Thí dụ

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^{2x+3} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-3)}{x-2}} = e^{6}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x}} = +\infty$

Qua các ví dụ này ta thấy là 1^{∞} là dạng vô định

Khi $a = 0$, $b = 0$, $a = +\infty$, $b = 0$,

Ta có các dạng 0^0, ∞^0, qua các thí dụ có thể thấy đây cũng là các dạng vô định, dùng các giới hạn đã biết có thể khử và tìm được giới hạn.

Thí dụ.

1) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}\left(0^0\right) = e^{\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x} = e^0 = 1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}\left(\infty^0\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(\ln x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$

§ 11. HÀM LIÊN TỤC ĐỀU

Cho hàm $f(x)$ liên tục trong miền X, theo định nghĩa:

$\forall x_0 \in X \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

hay $\forall\varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Nói chung: δ không những phụ thuộc ε mà còn phụ thuộc vào mỗi $x_0 \in X$ chẳng hạn: xét $f(x) = 1/x$ trong $(0,1]$

$$\varepsilon > 0. \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon \quad \text{hay} \quad \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \varepsilon \qquad (1)$$

Xét $|x - x_0| < \dfrac{x_0}{2}$ thì $x < \dfrac{3x_0}{2}$ và $x.x_0 < \dfrac{3x_0^2}{2}$

Khi đó (1) viết được : $|x - x_0| < \varepsilon.\dfrac{3x_0^2}{2}$

Lấy $\delta = \min\left(\dfrac{x_0}{2}, \varepsilon\dfrac{3x_0^2}{2}\right)$ thì $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$

Vậy $f(x)$ là liên tục trong $(0,1]$ ta thấy δ phụ thuộc cả vào ε và x_0

Nếu δ chỉ phụ thuộc vào ε không phụ thuộc mỗi $x_0 \in X$ thì $f(x)$ gọi là liên tục đều trong miền X, một cách chính xác ta có:

Định nghĩa: - Hàm $f(x)$ liên tục trong miền X, gọi là liên tục đều trong miền đó, nếu,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \forall x' \in X, |x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$

Thí dụ:

$f(x) = ax + b$ là liên tục trong R, xét $\forall \varepsilon > 0$

$|f(x') - f(x)| = |(ax' + b) - (ax + b)| < \varepsilon$

Suy ra $|x' - x| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$

Lấy

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ thì $|x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$

Ở đây δ không phụ thuộc vào $x \in R$. Vậy hàm $f(x) = ax + b$ là liên tục đều trong R.

Đối với các hàm liên tục trong một đoạn ta có:

Định lý Cantor *nếu hàm $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì nó liên tục đều trong đoạn đó.*

* Thực vậy giả thiết ngược lại:

$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \exists x \in [a, b] \exists x' \in [a, b], |x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| \geq \varepsilon$

Lấy $\delta = \delta_n \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$ khi đó có $x'_n, x_n \in [a, b]$, $|x'_n - x_n| < \delta_n \Rightarrow |f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$ vì $x'_n \in [a, b]$ nên dãy (x'_n) bị chặn, theo nguyên lý Bolzano-Weierstrass dãy đó chứa 1 dãy con x'_{n_k} hội tụ đến $x_0 \in [a, b]$ vì $|x'_{n_k} - x_{n_k}| < \delta_n$, $\delta_n \to 0$ nên $x_n \to x_0$

Theo giả thiết $f(x)$ liên tục tại x_0 nên:

$f(x'_{n_k}) \to f(x_0), f(x_n) \to f(x_0)$

Suy ra: $f(x'_{n_k}) - f(x_n) \to 0$

Mâu thuẫn với giả thiết phản chứng:

$\forall n\ |f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Vậy định lý là đúng

BÀI TẬP

1. Tìm miền xác định của hàm số

1) $y=\sqrt{3x-x^2}$

2) $y=\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{x}$ 3) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

4) $y=\sqrt{\cos x^2}$ 5) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ 6) $y=(2x)!$

7) $y=(-1)^x$ 8) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{x^3-x}$

2. Tính

1) $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\dfrac{1}{x}\right), \dfrac{1}{f(x)}$ nếu $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

2) Tính $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ nếu

$$f(x)=\begin{cases}1+x & : -\infty < x \le 0\\ 2^x & : 0 < x < +\infty\end{cases}$$

3. Tính $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$ nếu

1) $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$

2) $f(x)=\begin{cases}0 & : x\le 0\\ x & : x>0\end{cases}$ 3) $g(x)=\begin{cases}0 & : x\le 0\\ -x^2 & : x>0\end{cases}$

4. Tính $f(x)$ nếu

1) $f(x+1)=x^2-3x+2$

2) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}, x>0$

5. Cho $f(x)=a^x$, $a>0$, và $x_1,\ldots,x_n$ tạo thành một cấp số cộng. Chứng minh $f(x_1),\ldots,f(x_n)$ tạo thành 1 cấp số nhân.

6. Cho $f(x)=1/2\,(a^x+a^{-x})$, $g(x)=1/2\,(a^x-a^{-x})$

Chứng minh $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$

$g(x+y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$

7. Các hàm số sau đây có bằng nhau không ?

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2}$ $\quad g(x) = 1/x$

2) $f(x) = x$ $\qquad g(x) = \sqrt{x^2}$

8. Viết dưới dạng tường $y = f(x)$, các hàm số ẩn cho bởi các phương trình:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $\quad$ 2) $x + |y| = 2y$

3) $y^4 - 2y^2 + x^2 - x = 0$.

và tìm miền xác định của chúng.

9. Tìm hàm hợp $y = f(x)$ và miền xác định của nó nếu:

1) $y = u^2$, $u = \sin x$

2) $y = \begin{cases} 2u & : u \leq 0 \\ 0 & : u > 0 \end{cases}$ $\qquad u = x^2 - 1$

3) $y = z^2$, $z = \sqrt[3]{t+1}$, $t = a^x$

10. Phân tích xem các hàm số sau đây là các hàm hợp của những hàm nào.

1) $y = \sin^3(2x + 1)$. $\qquad\qquad$ 2) $y = 5^{(2x+1)^2}$

3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

11. Chứng minh các hàm sau đây là bị chặn trong các miền đã cho tương ứng, tìm Sup, inf và giao độ của $f(x)$:

1) $f(x) = x^2$, $[-2, 5]$; 2) $f(x) = 1/(1+x^2)$, $(-\infty, +\infty)$;

3) $f(x) = 2x/(1+x)$ $(0, +\infty)$, 4) $f(x) = \sin x + \cos x$, $[0, 2\pi]$.

12. Xét sự đơn điệu của các hàm số sau, trong các miền đã cho tương ứng

1) $f(x) = x^3$, $(-\infty, +\infty)$

2) $f(x) = \sin x$, $[-\pi/2, \pi/2]$

3) $f(x) = \operatorname{tg} x$ $(-\pi/2, \pi/2)$

4) $f(x) = a^x$, $(a > 0)$ $(-\infty, +\infty)$

5) $f(x) = 2x + \sin x$, $(-\infty, +\infty)$

6) $f(x) = \cos x$, $[0, \pi]$

7) $f(x) = \operatorname{cotg} x$, $(0, \pi)$

8) $f(x) = E(x)$, $[0, \infty)$

13. Chứng minh rằng: nếu $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ là các hàm đơn điệu tăng và

$f(x) \le g(x) \le h(x)$ thì

$f[f(x)] \le g[g(x)] \le h[h(x)]$

14. Tìm hàm số ngược của các hàm số sau đây trong các miền tương ứng

1) $y = 2x + 3$ $(-\infty, +\infty)$

2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ $[-1, 0]$, $[0, 1]$

3) $y = \begin{cases} x & ; \quad -\infty < x < 1 \\ x^2 & ; \quad 1 \le x < +\infty \end{cases}$

15. Xét sự chẵn lẻ của các hàm số sau:

1) $f(x) = 3x - x^3$

2) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

3) $f(x) = 1/2(a^x + a^{-x})$ $(a > 0)$

4) $f(x) = \sin x + \cos x$

5) $f(x) = C$ $(C = const)$

16. Chứng minh rằng: nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm tuần hoàn và xác định trong cùng một miền và có chu kỳ thông ước với nhau (tỷ số chu kỳ của chúng là 1 số hữu tỉ) thì $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ cũng là các hàm tuần hoàn.

17. Xét sự tuần hoàn và chu kỳ của các hàm số.

1) $f(x) = A\cos \lambda x + B\sin \lambda x$

2) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

3) $f(x) = 2\text{tg}\frac{x}{2} - 3\text{tg}\frac{x}{3}$

4) $f(x) = \sqrt{\text{tg}x}$

5) $f(x) = \text{tg}\sqrt{x}$

6) $f(x) = \sin x + \sin\left(x\sqrt{2}\right)$

7) $f(x) = \sin^n x$; $\quad f(x) = \cos^n x$

8) $f(x) = \begin{cases} 1 : & x \text{ hữu tỷ} \\ 0 : & x \text{ vô tỷ} \end{cases}$

9) $f(x) = C$ (C = const)

18. Biết đồ thị của $y = f(x)$, dựng đồ thị của

1) $y_1 = -f(x)$; $y_2 = b + f(x)$

2) $y_3 = f(-x)$; $y_5 = \frac{1}{2}\left[|f(x)| + f(x)\right]$

3) $y_4 = f(x-a)$; $y_6 = \frac{1}{2}\left[|f(x)| - f(x)\right]$

19. Dựng đồ thị của các hàm số sau:

1) $y = x^2 - 2x + 2$

2) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

3) $y = |x|$

4) $|x^2 - 1|$

5) $y = -x.|x|$

6) $y = |x+1| + |x-1|$

7) $y = 1 - 3^{x-3}$

8) $y = |\sin x| + \sin x$

9) $y = \sin nx$ ($n = 2, 3$)

10) $y = 2\cos\dfrac{x-\pi}{3}$

11) $y = \sin^2 x$

12) $y = x + \sin x$.

20. Chứng minh:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$, $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$, $\quad Q_m(x_0) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ $(a < 1)$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ $(a < 1)$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$ $(a > 1)$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^k} = +\infty$ $(a > 1), (k > 0)$.

21. Chứng minh rằng: khi $x \to x_0$ ($x_0 \in \widetilde{R}$)

1) $f(x) \to +\infty\ (-\infty)$, $g(x)$ bị chặn $\Rightarrow f(x) + g(x) \to +\infty\ (-\infty)$

2) $f(x) \to +\infty\ (-\infty)$; $g(x) \to +\infty\ (-\infty)$ $f(x) \Rightarrow f(x) + g(x) \to +\infty\ (-\infty)$

3) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty \Rightarrow g(x).f(x) \to \infty$

4) $f(x) \to \infty \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to 0$; $f(x) \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to \infty$; $f(x) \neq 0$.

22. Áp dụng tính chất giới hạn chứng minh

1) $\lim\limits_{x\to x_0} x^r = x_0^r \quad (r\in Q)\,(r>0)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$

5) $\lim\limits_{x\to x_0} tgx = tgx_0, \quad x_0 \neq \frac{2k+1}{2}\pi$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^r-1}{x} = r, \quad r>0, r\in Q$

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} tgx = \pm\infty$

8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cot gx = 0$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases}\infty; n>m\\ \frac{a_0}{b_0}; m=n;\\ 0; m<n\end{cases}$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$$

23. Tìm:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{p+q}-1}{x^{r+s}-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}$

24. Tìm

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{4/3}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$ 4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-2}\right)^{3x+2}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{2x}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}$

9) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{cotg}x}$ 10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$ 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$

*13) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2^2}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}$ $(x\neq0)$

25. Áp dụng VCB (VCL) tìm:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos2x}{1-\cos x}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^2x}-\sqrt[3]{1-\operatorname{tg}^2x}}{x+\sqrt[3]{x^2}}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x\sin5x}{\left(x-x^3\right)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+a^x}{x^2+x}$ $(a>1)$

26. Nếu $f(x)$, $g(x)$ là các VCB (VCL) khi $x\to x_0$ ($x_0\in\overline{R}$) thì tổng tích thương của chúng là gì ?

27. Cho $f(x)=x^2\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ là một VCB ($x\to0$) có thể nói nó là VCB bậc 2 không ?

Cho $f(x)=a^x$ ($a>1$) là 1 VCL khi $x\to+\infty$ có thể nói đến bậc của VCL này không ?

28. Chứng minh

1) $f(x) = \cos x$ liên tục $\forall x \in R$

2) $f(x) = |x|$ liên tục $\forall x \in R$

3) $f(x) = x^n$ liên tục $\forall x \in R$ $(n \in N)$

4) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ liên tục $\forall x > 0$

29. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại $x_0 \in R$ thì $f(x) \pm g(x)$, $g(x).f(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$; $f|g(x)|$; $|f(x)|$ cũng liên tục tại x_0

Nếu 1) $f(x)$ liên tục, $g(x)$ gián đoạn tại x_0

2) $f(x)$, $g(x)$ cùng gián đoạn tại x_0 thì tổng, tích, thương của chúng liên tục hay gián đoạn tại x_0.

30 Xét sự liên tục và gián đoạn của:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ; x \neq 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ 6) $f(x) = \sqrt{x} - E(\sqrt{x})$

7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos \pi x}{4-x^2}}$ 8) $f(x) = \cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 10) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & ; |x| \leq 1 \\ x-1 & ; |x| > 1 \end{cases}$

31 Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng (a, b) và $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$ thì giữa chúng có 1 số c để $f(c) = 1/n\,[f(x)_1 + f(x)_2 + \dots + f(x)_n]$

32. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$ và đạt cực đại tại điểm $x_1, x_2 \in [a,b]$ $x_2 > x_1$ thì $f(x)$ đạt 1 cực tiểu tại $x_3 \in (x_1, x_2)$

***33** Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong $[a, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

$\forall \gamma$ gồm giữa $f(a)$ và L sẽ có 1 số $c > a$ sao cho $f(c) = \gamma$

*34. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là liên tục trong $[a,b]$ và có hàm ngược thì $f(x)$ là đơn điệu tăng (giảm) trong $[a,b]$.

35. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x - 1 = 0$ có 1 nghiệm trong $(1, 2)$, giải gần đúng, tìm nghiệm đó với độ chính xác 0,01.

36. Chứng minh rằng đa thức $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ với n lẻ, có ít nhất 1 nghiệm thực

37. Tìm miền xác định của

1) $y = \log_2(x^2 - 6x + 5)$

2) $y = \lg(x + 2) + \log_2(x - 2)$

3) $y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x)]$

4) $y = \arcsin 2x/1 + x$

5) $y = \arccos(2\sin x)$

6) $y = \lg[\cos(\lg x)]$

7) $y = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$

8) $y = \sqrt[3]{\lg(\mathrm{tg}x)}$

9) $y = \lg(1 - 2\cos x)$

10) $y = \arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$

38. Vẽ đồ thị của hàm số

1) $y = 1 + \lg(x + 2)$, $y = \arcsin(\sin x)$

2) $y = \log_2(1 - x)$; $y = x - \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$

3) $y = \log_x 2$, $y = \arccos\dfrac{1}{x}$

4) $y = a^{\log_a x}$ $(a > 0, \neq 1)$

39. Chứng minh:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^k} = 0$ $(a > 1, k > 0)$

2) $\lim\limits_{x \to +0} (x^k . \log_a x) = 0$ $(a > 1, k > 0)$

40. Tìm

1) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)x$

3) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\lg(1 + 10x)}{x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{chx-1}{x^2}$ 6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$ $(\alpha\neq\beta)$

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^{x})}{x}$ 8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)^{x}$

9) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ 10) $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n}$

11) $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ 12) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+4}}$

13) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{2x+1}\right)^{x}$ 14) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

15) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ 16) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

17) $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$ 18) $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

19) $\lim_{x\to 0}x^{x}$ 20) $\lim_{x\to\infty}|\sin(\ln(x+1))-\sin(\ln x)|$

21) $\lim_{x\to\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

***41**. Chứng minh rằng: nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0\in R$ và $f(x_0)>0$ (<0) thì

$\exists\,\delta>0,\ \forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta):f(x)>0$ (<0)

***42** Xét sự liên tục đều của

a) $f(x)=\frac{x}{3-x^2}$ trong $[-1,1]$

b) $f(x)=\log_a x$ $(a>1)$ trong $(0,1)$

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

1. 1) $[0,3]$; 2) $[2k\pi,(2k+1)\pi]$, $k=0,\pm1,\ldots$, $x\neq0$

3) $[4k^2\pi^2,(2k+1)^2\pi^2]$, $k=0,1,\ldots$

4) $\sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}} \le |x| < \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$, $k = 1, 2, \dots$

5) $x > 0,\ x \ne k,\ k = 1, 2, \dots$

6) $x = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

7) $x = \frac{p}{2q+1}$, $p, q \in Z$;

8) $[-1, 0] \cup [1, 2)$

2. 1) $1,\ \frac{1+x}{1-x},\ -\frac{x}{x+2},\ \frac{2}{1+x},\ \frac{x-1}{x+1},\ \frac{1+x}{1-x}$

2) $-1, 0, 1, 2, 4$

3. 1) $x^4,\ 2^{x^2},\ 2^{2^x},\ 2^{x^2}$

2) $\begin{cases} 0; & x \le 0 \\ x; & x > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ -x^2; & x > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 0; & x \le 0 \\ -x^2; & x > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 0; & x < 0 \\ -x^2; & x > 0 \end{cases}$

4. 1) $x^2 - 5x + 6$; 2) $x^2 - 2$; 3) $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$.

7. Bằng nhau 1) $x \ne 0$, 2) $x > 0$

8. 1) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ $-a \le x \le a$

2) $y = \begin{cases} \frac{x}{3}, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \le x < +\infty \end{cases}$

3) $y = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{-x^2 + x + 1}}$

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \le x \le 0;\ 1 \le x \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

9. 1) $y = \sin^2 x$; $-\infty < x < +\infty$

2) $y = 2(x^2 - 1)$, $-1 \le x \le 1$; $y = 0$; $x < -1$; $x > 1$

3) $y = \sqrt{(a^x + 1)^2}$ $-\infty < x < +\infty$

10. 1) $y = u^3$; $u = \sin v$; $v = 2x + 1$

2) $y = 5^u$, $u = v^2$, $v = 2x + 1$

3) $y = \sqrt{u}$, $u = x + \sqrt{x + \sqrt{x}}$

11. 1) $\inf f(x) = 0$, $\operatorname{Sup} f(x) = 25$; $w = 25$

2) $\operatorname{Sup} f(x) = 1$; 3) $\inf f(x) = 2$

4) $\inf f(x) = -\sqrt{2}$, $\operatorname{Sup} f(x) = \sqrt{2}$, $w = 2\sqrt{2}$

12 1) Tăng ; 2) Tăng ; 3) Tăng ; 4) a < 1 giảm, a > 1 tăng ;

5) Tăng , 6) Giảm ; 7) Giảm; 8) Không giảm.

14 1) $x = \dfrac{y-3}{2}$ $(-\infty, +\infty)$

2) $x = \sqrt{1-y^2}$: $[-1,0]$; $x = \sqrt{1-y^2}$ $[0,1]$

3) $x = y$, $(-\infty, 1)$, $x = \sqrt{y}$: $[1, +\infty]$

15 1) Lẻ, 2) Chẵn, 3) Chẵn, 4) Không chẵn, không lẻ, 5) Chẵn

16 Đặt $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p}{q}$, T_1, T_2 là chu kỳ của $f(x)$, $g(x)$

17. 1) $\dfrac{2\pi}{\lambda}$, 2) 2π, 3) 6π, 4) π, 5) Không tuần hoàn,

6) Không tuần hoàn; 7) π, n : Chẵn, 2π : n lẻ

8) $T \in Q$; 9) $T \in R$; $T > 0$

20. 1) Lấy 1 dãy bất kỳ x_n các giá trị của x, $x_n \to x_0$ rồi dùng các tính chất về giới hạn của dãy, các bài khác chứng minh tương tự.

7) Chứng minh $\dfrac{a^n}{n+1} \to +\infty$, lấy $x_k \to +\infty$

Đặt $n_k = E(x_k)$

21 Lấy 1 dãy bất kỳ (x_n) các giá trị của x, $x_n \to x_0$ dùng các tính chất của giới hạn vô hạn của dãy.

22. 1) Dùng bất đẳng thức $1-|\lambda| \le \sqrt[n]{1+\lambda} \le 1+|\lambda|, |\lambda| < 1$

Chứng minh : $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[n]{x} = 1$

Sau đó chứng minh : $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$

rồi chứng minh : $\lim\limits_{x\to x_0} x^{m/n} = x_0^{m/n}$

6) Xét $r = n \in N$, khai triển nhị thức Newton,

Chứng minh $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$, xét $r = 1/m$.

Đặt $\sqrt[m]{(1+x)} - 1 = y$ cuối cùng xét $r = m/n$

23. 1) -3/2 ; 2) 2 ; 3) *min* ; 4) *sp/rp* ; 5) 1 ; 6) $\dfrac{2}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$; 7) 2/3 ; 8) 0 ;

9) 1/2 ; 10) $2\cos a$; 11) 2.

24 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 2) 1, 3) $\dfrac{2}{3}$, 4) $\dfrac{1}{2}$, 5) $\dfrac{2}{\pi}$, 6) e^6;

7) 0; $x \to +\infty$, $+\infty$ khi $x \to -\infty$; 8) $1/e^2$; 9) e; 10) -1;

12) 1; $x \to -0$; 0, $x \to +0$

13) $\sin x/x$ dùng $\sin x = 2\cos x/2 \sin x/2 = 2^2 \cos x/2 \cos x/4$

$\sin x/4 = \ldots = 2^n \cos x/2 . \cos x/2^2 \ldots \cos x/2^n \sin x/2^n$

25. 1) 1/2; 2) 3; 3) 0; 4) 15; 5) $+\infty$; 6) $+\infty$

26 VCB: Tổng tích là vô cùng bé, thương tích không thể kết luận

VCL: Tích VCL, tổng, tích, thương không kết luận.

27. Không thể nói $x^2(1 + \sin 1/x)$ có bậc 2 vì không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} \sin 1/x$

Không thể nói đến bậc của a^x vì :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \ \forall k \in N$$

29. 1) Tổng gián đoạn, tích, thương không thể kết luận

Thí dụ tích $f(x) = x$; $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tại $x = 1$

$$f(x) = x \ ; \quad g(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{tại } x = 0$$

Thương $f(x) = x$; $g(x) = 1/x$; $f(x) = x$; $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, tại $x = 1$

2) Tổng, tích, thương đều không thể kết luận

Thí dụ :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ -1 & , x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{tại } x = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \ , \ g(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \qquad \text{tại } x = 1$$

Tích : $g(x) = f(x) = \begin{cases} -1 : x & \text{vô tỷ} \\ 1 : x & \text{hữu tỷ} \end{cases}$, tại $x = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, tại $x = 0$

Thương $f(x) = \begin{cases} -1 : x < 0 \\ 0 : x = 0 \\ 1 : x > 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 1/x : x \neq 0 \\ 1 : x = 0 \end{cases}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$, tại $x = 0$

30. 1) $x = 2$ gián đoạn loại 1: $h = 0$

2) Liên tục $\forall x \in R$

3) $x = 0$ gián đoạn loại 1, $h = 2$ liên tục bên phải

4) Liên tục $\forall x \in R$

5) $x = 1$, gián đoạn loại 1, $h = 1$

6) $x = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$ gián đoạn loại 1.

7) Gián đoạn loại 2 tại $x = \pm 2$, liên tục khi $-2 < x < 2$

8) $x = 0$: gián đoạn loại 2

9) Liên tục $\forall x \in R$

10) $x = -1$ gián đoạn loại 1, $h = -2$

31. Gọi $f(x_k) = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)\}$

$f(x_l) = \max\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$

Thì $f(x_k) \le \dfrac{1}{n}\{f(x_1) + \ldots + f(x_n)\} \le f(x_l)$

32. Chứng minh giá trị bé nhất m của $f(x)$ trong $[x_1, x_2]$ không thể đạt tại x_1, x_2 nên có $c \in (x_1, x_2)$; $f(c) = m$

33. Chứng minh : $\exists b \in (a, +\infty)$ $f(b) > \gamma$

34. Xét $x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$ giả sử $x_1 < x_2$. Chứng minh tồn tại x_3:
$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$.

35. Nghiệm trong (1,22; 1,23) với độ chính xác 10^{-1}

36. Xét $|x|$ khá lớn thì $P_n(x)$ cùng dấu với a_0x^n

37. 1) $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$; 2) $(2, +\infty)$; 3) $\left(\dfrac{5-\sqrt{65}}{2}, 0\right) \cup \left(5, \dfrac{5+\sqrt{65}}{2}\right)$

4) $[-1/3, 1]$; 5) $[k\pi - \pi/6; k\pi + \pi/6]$

6) $\left(10^{2k-\frac{1}{2}\pi}, 10^{2k+\frac{1}{2}\pi}\right)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

7) $(1,2]$; 8) $[k\pi + \pi/4, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

9) $(2k\pi + \pi/3, 2k\pi + 5\pi/3)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

10) $[1, 100]$

39. 1) Đặt $y = \log_a x$ Chứng minh $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$

Và viết $\frac{\log_a x}{x^k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\log_a x^k}{x^k}$

2) Đặt $x = \frac{1}{y}$

40. 1) $\frac{1}{2}$ dùng công thức $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+ab}$

2) 1 dùng công thức $\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arctg} x$

3) $10\lg e$; 4) $-\frac{1}{2}$

5) $\frac{1}{2}$; 6) $\alpha - \beta$; 7) 0, $x \to -\infty$, ; 1, $x \to +\infty$; 8) e ; 9) 1;

10) 1 ; 11) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 12) 0 ; 13) $+\infty$; 14) $\frac{3}{2}$; 15) e^2; 16) 1 ; 17) $\frac{1}{e}$

18) 1 ; 19) 1 ; 20) 0 ; 21) $\frac{\pi}{3}$

41. Áp dụng tính chất 6^0 của giới hạn hàm số.

42 a) Hàm liên tục đều theo định lý Cantor (§11)

b) Hàm không liên tục đều vì lấy $x_n = a^{-n}$, $x'_n = a^{-n-1}$

Thì $|x_n - x'_n| = \frac{a-1}{a^{n+1}} \to 0$ $(n \to +\infty)$

Nhưng $|f(x_n) - f(x'_n)| = |-n + n + 1| = 1 > \varepsilon$, $\forall \varepsilon < 1$.

Chương 3

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1.1. Định nghĩa đạo hàm:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định tại lân cận điểm x_0, xét x thuộc lân cận đó, đặt $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, Δx, Δy là số gia của đối số và hàm số tại x_0.

Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại thì giới hạn này gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0. Ký hiệu : y', y'_x ; $f'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}$

Thí dụ:

1) Xét $y = f(x) = c = \text{const}$

$\forall x$, ta có : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$

Do đó, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

2) Xét $y = x^n$, $n \in N$

$\forall x$, ta có $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}.\Delta x + \dots + \Delta x^n$

Do đó $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$

3) Xét $y = a^x$

$\forall x$, ta có : $\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$

Do đó $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x.\ln a$

$\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a\right)$

Đặc biệt $y = e^x$ thì $y' = e^x$

4) Xét $y = \sin x$

$\forall x$, ta có $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

Do đó $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$

Tương tự, $y = \cos x$ thì $y' = -\sin x$

Chú ý: 1) Theo định nghĩa thì $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nếu $\Delta x \to +0\ (-0)$ mà $\lim\limits_{\Delta x \to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta x \to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ tồn tại thì giới hạn này gọi là đạo hàm bên phải (bên trái) của $f(x)$ tại x_0.

Kí hiệu: $f'(x_0+0)$, $[f'(x_0-0)]$

Rõ ràng điều kiện cần và đủ để $f'(x_0)$ tồn tại là $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ tồn tại và bằng nhau.

Thí dụ. 1) Xét $f(x) = |x|$ tại $x = 0$

Ta có $f(0+0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

$f(0-0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1$. Vậy tại $x = 0$ $f(x)$ không tồn tại.

2) Cũng theo định nghĩa:

$f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \in R$, nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$

($+\infty$ hoặc $-\infty$) thì ta cũng mở rộng gọi giới hạn đó là đạo hàm vô hạn của $f(x)$ tại x_0

1.2. Định nghĩa vi phân:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định tại lân cận điểm x_0, nếu trong lân cận đó số gia của hàm số viết được dưới dạng: $\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x)$ (1)

Trong đó, A là một hằng số nào đó (không phụ thuộc Δx chỉ phụ thuộc x_0), $0(\Delta x)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn bậc của Δ x, thì biểu thức $A\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số đó tại x_0 và hàm số $y = f(x)$ gọi là khả vi tại x_0.

Kí hiệu:

$dy = A.\Delta x$ hay $df(x_0) = A.\Delta x$

Từ định nghĩa ta sẽ suy ra công thức tính vi phân, chia hai vế của (1) cho $\Delta x \neq 0$ ta có: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{0(\Delta x)}{\Delta x}$

Cho $\Delta x \to 0$ thì theo định nghĩa $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$

Vì $0(\Delta x)$ bậc cao hơn Δx; do đó $A = y'$

Xét $y = f(x) = x$ thì $dy = y'.\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x$

Nhưng $y = x$ nên $dy = dx$, do đó $\Delta x = dx$

Vậy ta cũng có công thức tính vi phân $dy = y'dx$

Thí dụ: Theo các thí dụ ở 1.1 thì.

1) $dc = 0$

2) $da^x = a^x \ln a dx$

3) $d\sin x = \cos x dx$

4) $d\cos x = -\sin x dx$.

Chú ý: Từ công thức tính vi phân ta có: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Mặt khác ta ký hiệu đạo hàm là $\frac{dy}{dx}$. Vậy kí hiệu này cũng có nghĩa là thương của vi phân của hàm số và vi phân của đối số

1.3. Tính chất:

1°. $f(x)$ khả vi tại $x_0 \Leftrightarrow f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Thực vậy, theo 1.2 từ $f(x)$ khả vi tại x_0 ta đã suy ra $f'(x_0) = A$ nghĩa là $f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Ngược lại giả sử $f(x)$ có đạo hàm tại x_0, nghĩa là :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{hay} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha$$

α là 1 vô cùng bé khi $\Delta x \to 0$ do đó:

$\Delta y = f'(x_0).\Delta x + \alpha.\Delta x$.

Theo định nghĩa, $f(x)$ là khả vi tại x_0, (vì $\alpha.\Delta x$ là một vô cùng bé bậc cao hơn bậc của Δx).

2°. $f(x)$ khả vi tại $x_0 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại x_0.

Thực vậy, theo định nghĩa, $f(x)$ khả vi tại x_0 nghĩa là:

$\Delta y = A\,\Delta x + 0(\Delta x)$, suy ra $\Delta x \to 0$ thì $\Delta y \to 0$. Vậy $f(x)$ là liên tục tại x_0.

Điều ngược lại nói chung không đúng, chẳng hạn xét $f(x) = |x|$ hàm số này liên tục tại $x = 0$, nhưng theo thí dụ ở 1.1, nó không có đạo hàm tại $x = 0$, nghĩa là không khả vi tại đó.

3°. $f(x)$ khả vi tại x_0 đạt cực trị tại $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Thực vậy, giả sử ngược lại $f'(x_0) \neq 0$, chẳng hạn $f'(x_0) > 0$

Vì $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nên $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$, suy ra:

Khi $\Delta x > 0$ thì $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$

$\Delta x < 0$ thì $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$

Do đó, theo định nghĩa cực trị thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0, mâu thuẫn với giả thiết.

Tính chất này chỉ là điều kiện cần để $f(x)$ đạt cực trị tại x_0, nó không là điều kiện đủ vì có những hàm số, đạo hàm bằng không tại x_0, nhưng không đạt cực trị tại đó.

Chẳng hạn, xét: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$

Nhưng $f(x)$ không đạt cực trị tại $x = 0$

1.4. ý nghĩa hình học:

Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0 và $\mathscr{C}$ là đồ thị của nó:

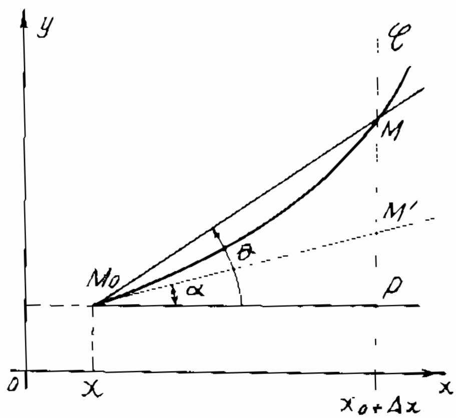
Xét $M_0, M \in \mathscr{C}$, $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$

Gọi θ là góc giữa đường thẳng M_0M và trục Ox, tg θ là hệ số góc của nó:

thì

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{PM}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Xét M dần tới M_0 theo $\mathscr{C}$, nghĩa là $\Delta x \to 0$. Khi đó đường thẳng M_0M sẽ dần tới vị trí giới hạn là đường thẳng M_0M' gọi là tiếp tuyến với $\mathscr{C}$ tại M_0, gọi α là góc giữa tiếp tuyến đó với trục 0x thì : $\operatorname{tg}\theta \to \operatorname{tg}\alpha$ vì $\operatorname{tg} x$ là 1 hàm



Hình 20

liên tục. Do đó, ta có $tg\alpha = f'(x_0)$. Vậy về hình học đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 bằng hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ x_0.

Biết hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M_0 ta có thể viết phương trình của tiếp tuyến tại đó là: $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ và phương trình của pháp tuyến tại đó là:

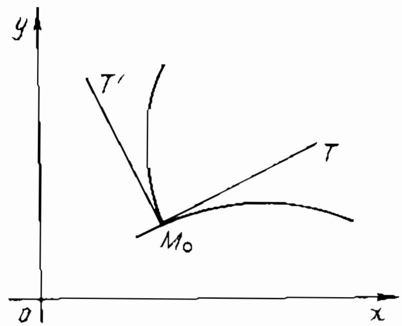
$$Y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Theo Hình 20 : $\overline{PM'} = tg\alpha \cdot \Delta x = dy$

Chú ý:

1) Nếu $f(x_0)$ không tồn tại nhưng $f'(x_0 + 0)$, $f'(x_0 - 0)$ tồn tại thì đồ thị của $f(x)$ có 2 tiếp tuyến bên phải và trái điểm x_0 (Hình 21).

2) Nếu $f'(x_0) = \infty$ thì đồ thị của $f(x)$ có một tiếp tuyến tại M_0 song song với trục Oy. (Hình 22).



Hình 21

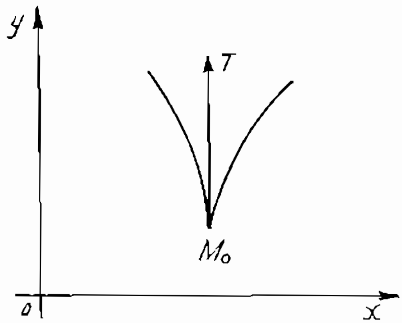
1.5. Ý nghĩa cơ học:

Xét một điểm M chuyển động thẳng không đều tính từ một điểm 0 nào đó, giả sử khoảng cách $\overline{OM}$ phụ thuộc thời gian t : $\overline{OM} = f(t)$

Người ta gọi tốc độ của M tại thời điểm t là:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Theo định nghĩa đạo hàm thì $V = f'(t)$. Vậy, Đạo hàm của khoảng cách $\overline{OM}$ tại thời điểm t bằng tốc độ của chuyển động tại thời điểm đó. Người ta cũng mở rộng khái niệm tốc độ xét một hàm số $f(x)$ bất kỳ và gọi tốc độ của $f(x)$ tại x là :



Hình 22

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

§ 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Định lý 1: Nếu các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ khả vi tại x thì các hàm số:

$u \pm v$, $u.v$, $\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$) cũng khả vi tại x

Và $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $d(u \pm v) = du + dv$

$(uv)' = u'v + uv'$, $d(uv) = vdu + udv$

$(Cu)' = Cu'$, $d(Cu) = Cdu$ (C = const)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2} \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \qquad d\left(\frac{C}{v}\right) = \frac{-Cdv}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Chứng minh : Ta chỉ chứng minh trường hợp thương, các trường hợp khác, tương tự.

Xét $y = \frac{1}{v}$ ($v(x) \neq 0$) ta có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{-1}{v(x+\Delta x)v(x)} \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Cho $\Delta x \to 0$ ta có : $y' = \frac{-v'}{v^2}$

Bây giờ xét $\frac{u}{v} = u.\frac{1}{v}$

Theo quy tắc tính dao hàm của tích ta có:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u'\frac{1}{v} + u\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{v'u}{v^2} = \frac{vu' - v'u}{v^2}$$

Theo công thức tính vi phân thì:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{vu' - v'u}{v^2} dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Thí dụ: 1) Xét $y = \text{tg}x$

Ta biết $\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$

Do đó: $y' = \text{tg}x = \dfrac{\cos x.\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$

2) Xét $y = \text{cotg}x$

Ta biết $\text{cotg}x = \dfrac{1}{\text{tg}x}$

Do đó $y' = \left(\dfrac{1}{\text{tg}x}\right)' = -\dfrac{(\text{tg}x)'}{\text{tg}^2 x} = -\dfrac{1}{\cos^2 x.\text{tg}^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2 x)$

Định lý 2: Nếu hàm số $u = f(x)$ khả vi tại x và hàm số $y = g(u)$ khả vi tại $u = f(x)$ thì hàm hợp $y = g[f(x)]$ khả vi tại x và:

$y'_x = y'_u.u'_x$

Chứng minh: Cho x số gia Δx thì u có số gia Δu và y có số gia Δy.

Giả sử $\Delta u \neq 0$

Theo giả thiết hàm số $y = g(u)$ khả vi tại u nên

$\Delta y = g'(u)\,\Delta u + \alpha\,\Delta u$, $\alpha \to 0$ khi $\Delta u \to 0$

Chia hai vế cho Δx ta có:

Giai tich I

Tm

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(u).\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Cho $\Delta x \to 0$ thì $\Delta u \to 0$ và khi đó $\alpha \to 0$

Do đó theo định nghĩa và giả thiết u khả vi tại x, ta có: $y'_x = y'_u \,.\, u'_x$

Chú ý: Định lý trên có thể mở rộng cho trường hợp hàm hợp của một số hữu hạn hàm số:

Chẳng hạn, $y = g(u)$, $u = f(v)$, $v = \varphi(x)$ thì $y'_x = y'_u \,.\, u'_v \,.\, v'_x$

Thí dụ:

1) Xét $y = e^{-x}$

Đặt $u = -x$ thì $y = e^u$, $y'_u = e^u$, $u'_x = -1$

Do đó $y'_x = y'_u \,.\, u'_x = e^u(-1) = -e^{-x}$

Suy ra $y = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ thì $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$

Tương tự: $y = shx$ thì $y' = chx$

$y = thx$ thì $y' = \dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$

$y = \coth x$ thì $y' = -\dfrac{1}{sh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

2) Xét $y = \sin^2 3x$, đặt $u = \sin 3x$, $v = 3x$ thì $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 3x$

$y'_u = 2u$, $u'_v = \cos v$, $v'_x = 3$

$y'_x = 2u\cos v \cdot 3 = 6\sin 3x\cos 3x = 3\sin 6x$

Định lý 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) và khả vi trong miền X với $f'(x) \neq 0$ trong X thì hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ của $f(x)$ sẽ khả vi trong miền giá trị Y của $f(x)$ và

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Chứng minh : Xét $y \in Y$, cho y số gia Δy thì $x = f^{-1}(y)$ có số gia

$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) = f^{-1}(y)$ ta biết : $f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) nên $\Delta y \neq 0$ thì $\Delta x \neq 0$ do đó khi $\Delta y \neq 0$ ta viết được:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Mặt khác ta biết $f^{-1}(y)$ cũng liên tục tại y nên $\Delta y \to 0$ thì $\Delta x \to 0$, do đó theo định nghĩa và giả thiết ta có:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Thí dụ: 1) Xét $y = \log_a x$

Từ $x = a^y$ suy ra $x'_y = a^y \ln a$

Do đó $y' = y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{x\ln a}$

Đặc biệt $y = \ln x$ thì $y' = \dfrac{1}{x}$

2) Xét $y = \arcsin x$, từ $x = \sin y$ ta có

$x'_y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ $\quad \left(\text{do } -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$

Do đó $y' = y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Tương tự, $y = \arccos x$ thì $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$y = \text{arctg}x$ thì $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$y = \text{arccotg}x$ thì $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Xét $y = x^{\alpha}$ $(x > 0, \alpha \in R)$

Vì $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ nên $y = e^{\alpha \ln x}$

Đặt $u = \alpha \ln x$ thì $y = e^u$, $y'_u = e^u$, $u'_x = \dfrac{\alpha}{x}$

Do đó $y' = y'_x = e^u \dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\alpha x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

Đặc biệt $\alpha = \dfrac{1}{2}$ thì $y = \sqrt{x}$ và $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Bảng đạo hàm vi phân cơ bản: Qua các thí dụ trên ta đã tính được đạo hàm hay vi phân của các hàm số sơ cấp cơ bản, bây giờ ta viết chúng vào một bảng gọi là bảng đạo hàm hay vi phân cơ bản (ở đây ta viết dưới dạng vi phân).

1° $dc = 0$, c = const

2° $d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx$

3° $d\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

4° $d(a^x) = a^x \ln a\, dx$

5° $d(e^x) = e^x dx$

6° $d(\log_a |x|) = \dfrac{dx}{x \ln a}$.

7° $d(\ln|x|) = \dfrac{dx}{x}$

8° $d(\sin x) = \cos x\, dx$

9° $d(\cos x) = -\sin x\, dx$

10° $d(\text{tg}x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \text{tg}^2 x)dx$

11° $d(\text{cotg}x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2 x)dx$

12° $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

13° $d(\arccos x) = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

14° $d(\text{arctg}x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

15° $d(\text{arccotg}x) = \dfrac{-dx}{1+x^2}$

16° $d(\text{sh}x) = \text{ch}x\,dx$

17° $d(\text{ch}x) = \text{sh}x\,dx$

18° $d(\text{th}x) = \dfrac{dx}{ch^2 x} = (1 - \text{th}^2 x)dx$

19^0 $d(\coth x) = -\dfrac{dx}{sh^2 x} = (1-\coth^2 x)dx$

Dùng bảng này và các quy tắc tính đạo hàm ta có thể tính đạo hàm hay vi phân của 1 hàm số sơ cấp bất kỳ.

Thí dụ: Tính y' nếu:

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\ln\sin x$$

$$y' = 2\frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' + \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\ln\sin x + \frac{\cos x}{\sin x}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

$$= -4\frac{x+1}{(x-1)^3} + \frac{2\ln\sin x}{x^2+4} + \cot gx.\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

Chú ý: Nếu y là hàm số ẩn của x xác định từ phương trình $f(x,y) = 0$ thì vì $f(x,y(x)) \equiv 0$ trong miền xác định của y nên muốn tính đạo hàm của y theo x, ta tính đạo hàm 2 vế của đồng nhất thức này theo x, sau đó giải y' ra đối với x.

Thí dụ:

1) Cho $y = y(x)$ xác định từ $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Lấy đạo hàm hai vế phương trình này theo x.

$2x + 2yy' = 0$ do đó $y' = -\dfrac{x}{y}$

2) Cho $y = y(x)$ xác định từ $y = 1 + xe^y$

Ta có: $y' = 1e^y + xe^y y'$

Do đó: $y' = \dfrac{e^y}{1-xe^y}$

3) Nếu hàm số $y = f(x)$ được cho bởi 1 tích số phức tạp hay 1 biểu thức luỹ thừa mũ thì ta có thể tính đạo hàm của y theo x bằng quy tắc sau đây gọi là cách tính đạo hàm bằng logarithme

Thí dụ:

1) Tính y' nếu $y = \dfrac{(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[5]{x+3}}$

lấy logarithme neper hai vế ta có

$$\ln|y| = 2\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{5}\ln|x+3|$$

Tính đạo hàm hai vế theo x ta có

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{3(x+2)}-\frac{1}{5(x+3)}$$

Do đó $y'=\dfrac{(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[5]{x+3}}\left(\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{3(x+2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}\right)$

2) Tính y' nếu $y=x^x$

Ta có: $\ln y = x\ln x$

$$\frac{y'}{y}=x.\frac{1}{x}+\ln x,\ y'=x^x(1+\ln x)$$

§ 3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

3.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ khả vi trong miền X, rõ ràng đạo hàm $y'=f'(x)$ hay vi phân $dy=f'(x)dx$ cũng là một hàm số của x trong miền X. Giả sử hàm số này cũng khả vi trong X, khi đó đạo hàm hay vi phân của nó gọi là đạo hàm hay vi phân cấp hai của $f(x)$ ký hiệu:

$$y'',\ y''_{x^2},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$d^2y,\ d^2f(x)=d(df(x))$$

còn đạo hàm $f'(x)$ hay vi phân $dy=f'(x)dx$ cũng gọi là đạo hàm hay vi phân cấp 1 của $f(x)$.

Tổng quát: Ta gọi đạo hàm hay vi phân cấp n của $f(x)$ tại x là đạo hàm hay vi phân của đạo hàm hay vi phân cấp n - 1 của $f(x)$ tại x.

Ký hiệu $y^{(n)},\ y^{(n)}_{x^n},\ \dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

$$d^ny,\ d^nf(x)=d(d^{n-1}f(x))$$

Từ định nghĩa suy ra: nếu x là biến số độc lập thì : $d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$

Thực vậy: $d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)$

$$=dxdf'(x)=dxf''(x)dx=f''(x)dx^2\ldots$$

$$\ldots d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$$

Do đó ký hiệu đạo hàm $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ cũng có ý nghĩa là thương của hai vi phân

Thí dụ:

1) Xét $y = x^\alpha$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, ..., $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) Xét $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$

$y'' = a^x(\ln a)^2$.., $y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$, $d^n y = a^x(\ln a)^n dx^n$

Đặc biệt nếu $y = e^x$ thì $y^{(n)} = e^x$, $d^n y = e^x dx^n$

3) Xét $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \ldots$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad d^n y = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)dx^n$$

Tương tự $y = \cos x$ thì $y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

4) Xét $y = \log_a x$, $y' = \dfrac{1}{x\ln a}$

$$y^{(n)} = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{\ln a}\left(x^{-1}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{\ln a}(-1)(-2)\ldots(-n+1)x^{-n}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln a}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$y = \ln x \text{ thì } y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

Chú ý : Xét $y = f(u)$, $u = u(x)$ $dy = f'_u u'_x dx = f'(u)du$

Suy ra: vi phân cấp 1 có tính chất bất biến về dạng mặc dù x là biến số độc lập hay phụ thuộc.

Dễ dàng thấy vi phân cấp hai trở lên không có tính chất này.

Thực vậy, $d^2y = d(dy) = d(f'(u)du) = dud(f'(u)) + f'(u)d(du)$

$$= duf''(u)du + f'(u)d^2u = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u$$

3.2. Quy tắc tính

Ta có 2 quy tắc tính đạo hàm và vi phân cấp n của tổng và tích như sau:

1° $(u \pm v)^{(n)} = u^n \pm v^n$, $d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v$

$2^0.\ (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} c_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$, $d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} c_n^i d^{n-i}u\, d^i v$ $(u^{(0)}=u,\ v^{(0)}=v)$

Quy tắc 1^0 chứng minh dễ dàng. ở đây ta chỉ chứng minh quy tắc 2^0

Ta sẽ chứng minh 2^0 bằng quy nạp.

$n = 1,\ (uv)' = c_1^0 u'v + c_1^1 uv' = u'v + uv'$ đúng

Giả sử 2^0 đúng với đạo hàm cấp $n - 1$

$$(uv)^{(n-1)} = c_{n-1}^0 u^{(n-1)} v + c_{n-1}^1 u^{(n-2)} v' + \dots + c_{n-1}^i u^{(n-1-i)} v^{(i)} + \dots + c_{n-1}^{n-1} u v^{(n-1)}$$

Đạo hàm hai vế ta có

$$(uv)^{(n)} = c_{n-1}^0 u^{(n)} v + \left(c_{n-1}^0 + c_{n-1}^1\right) u^{(n-1)} v' + \dots$$

$$+ \left(c_{n-1}^{i-1} + c_{n-1}^{i}\right) u^{(n-i)} v^{(i)} + \dots + c_{n-1}^{n-1} u v^{(n)}$$

Nhưng $c_{n-1}^0 = c_n^0\ \ (=1)$ $\quad c_{n-1}^{n-1} = c_n^n\ \ (=1)$ $\quad c_n^i = c_{n-1}^{i-1} + c_{n-1}^{i}$

Vậy $(uv)^{(n)} = c_n^0 u^{(n)} v + c_n^1 u^{(n-1)} v' + \dots + c_n^i u^{(n-i)} v^{(i)} + \dots + c_n^n u v^{(n)}$

Nghĩa là 2^0 đúng với đạo hàm cấp n

Thí dụ:

1) Cho $y = \sin^2 \dfrac{x}{2}$, tính $y^{(7)}$

Vì $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$ nên:

$$y^{(7)} = \frac{(1 - \cos x)^{(7)}}{2} = 0 - \frac{1}{2}(\cos x)^{(7)} = -\frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{7}{2}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sin x$$

2) Cho $y = x^3 \sin x$; tính $y^{(3)}$

Đặt $u = x^3$, $v = \sin x$ thì $u' = 3x^2$, $u'' = 6x$

$u''' = 6$, $v' = \cos x$, $v'' = -\sin x$, $v''' = -\cos x$

$$y^{(3)} = c_3^0 \left(x^3\right)^{(3)} \sin x + c_3^1 \left(x^3\right)'' (\sin x)' + c_3^2 \left(x^3\right)' (\sin x)'' + c_3^3 x^3 (\sin x)^{(3)}$$

$$= 6\sin x + 18x\cos x - 9x^2 \sin x - x^3 \cos x$$

BÀI TẬP

1. Tính trực tiếp đạo hàm của các hàm số:

1) $y = x^n$	4) $y = \mathrm{tg}\,x$	7) $y = \arcsin x$	10) $y = \log_a x$
2) $y = \sqrt[n]{x}$	5) $y = \mathrm{cotg}\,x$	8) $\mathrm{arccotg}\,x$	
3) $y = \cos x$	6) $y = \mathrm{arctg}\,x$	9) $y = \arccos x$	

2. Chứng minh rằng các hàm số sau không có đạo hàm tại các điểm tương ứng.

1) $y = \sqrt[3]{x^2}$ tại $x = 0$

2) $y = |\cos x|$ tại $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

3) $f = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$ tại $x = 0$

4) $y = |1 - x^2|$ tại $x = \pm 1$

3. Tính đạo hàm của:

1) $y = 2 + x - x^2$, tại $x = 0, \dfrac{1}{2}, 1$

2) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$, tìm x để $y' = 0; -2, 10$

3) $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$

4) $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$

5) $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

6) $y = \dfrac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1-x)^2}$

7) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

8) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

9) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

10) $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}$

11) $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{3+x^3}$

4 Tính đạo hàm của;

1) $y = \cos 2x - 2\sin x$

2) $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

3) $y = \sin^n x\cos x$

4) $y = \sin(\sin(\sin x))$

5) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$

6) $y = \mathrm{tg}\,x - \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x$

7) $y = 4\sqrt[3]{\mathrm{cotg}^2 x} + \sqrt[3]{\mathrm{cotg}^8 x}$

8) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

9) $y = \sin(\cos^2(\mathrm{tg}^3 x))$

10) $y = \sin^3 5x\cos\dfrac{2x}{3}$

11) $y = tg^2 5x$

5. Tính đạo hàm của

1) $y = e^{x}$

2) $y = 2^{kx}$

3) $y = e^{ax}\left(\dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

4) $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$, $a, b > 0$

5) $y = x^a + a^x + a^{a^x}$

6) $y = \dfrac{1}{2}\ln(1 + x) - \dfrac{1}{4}\ln(1 + x^2) - \dfrac{1}{2(1 + x)}$

7) $y = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

8) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

9) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$

10) $y = \ln(\ln(\ln x))$

11) $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$

12) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

13) $y = \ln tg\dfrac{x}{2} - \cos x \ln(tg x)$

14) $y = \log_x e$

6. Tính đạo hàm của

1) $y = arctg\dfrac{x^2}{a}$

2) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$

3) $y = \arccos\dfrac{1 - x}{\sqrt{2}}$

4) $y = \sqrt{x} - arctg\sqrt{x}$

5) $y = \arcsin(\sin x)$

6) $y = \arccos(\cos^2 x)$

7) $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$

8) $y = arctg x + \dfrac{1}{3}arctg x^3$

9) $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

10) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$

11) $y = arctg(tg^2 x)$

7. Tính đạo hàm của:

1) $y = \sqrt[x]{x}$

2) $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

3) $y = x.\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

4) $y = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$

5) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$

6) $y = \left(x+\sqrt{(1+x^2)}\right)^n$

8. Tính đạo hàm của các hàm ẩn $y = f(x)$ cho theo các phương trình:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

2) $y^2 = 2px$

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

5) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

6) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

9. Tìm y'_x nếu:

1) $x = \sin^2 t,\ y = \cos^2 t$

2) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$

3) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$

4) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$

10 Tính y'_x

1) $y = \ln(\operatorname{ch}x) + \dfrac{1}{2ch^2x}$

2) $y = \dfrac{chx}{sh^2x} - \ln\left(\coth\dfrac{x}{2}\right)$

3) $y = \arccos\left(\dfrac{1}{chx}\right)$

4) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$

11. Các đường sau đây cắt nhau dưới góc bao nhiêu?

1) $y = x^2,\ x = y^2$

2) $y = \sin x,\ y = \cos x$

3) $x^2 - y^2 = a,\ xy = b$

***12**. Tính tổng.

1) $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$

2) $Q(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$

3) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$

4) $\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$

5) $\operatorname{ch}x + 2\operatorname{ch}2x + \ldots + n\operatorname{ch}nx$

13.

1) Tính $f(a-0), f(a+0)$ nếu : $f(x) = |x-a|\ \varphi(x)$

với $\varphi(x)$ liên tục và $\varphi(a) \neq 0$

2) Tính $f'(0-0), f'(0+0)$ nếu $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$

14. Chứng minh rằng:

1) Đạo hàm của hàm số chẵn là lẻ

2) Đạo hàm của hàm số lẻ là chẵn

3) Đạo hàm của hàm tuần hoàn là tuần hoàn cùng chu kỳ

15. Cho

1) $f(x)$ có đạo hàm tại x_0, $g(x)$ không có đạo hàm tại x_0

2) $f(x)$; $g(x)$ không có đạo hàm tại x_0 thì $f(x) + g(x)$; $f(x).\ g(x)$ có đạo hàm tại x_0 không?

Xét thí dụ:

$f(x) = x,\ g(x) = |x|$ $f(x) = \sqrt[3]{x},\ g(x) = |x|$ tại $x_0 = 0$

16. $F(x) = f[g(x)]$ có đạo hàm tại x_0 không nếu:

1) $f(x)$ có đạo hàm tại $x = g(x_0)$, $g(x)$ có đạo hàm tại x_0

2) $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = g(x_0)$; $g(x)$ không có đạo hàm tại x_0

Thí dụ:

1) $f = x^2,\ g = |x|$

2) $f = |x|,\ g = x^2$

3) $f = 2x + |x|,\ g = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}|x|;\ x_0 = 0$

***17.**

1) Nếu $f(x)$ có đạo hàm và bị chặn trong (a,b) và $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$

thì $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$?

Thí dụ: $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x \to 0$

2) Nếu: $f(x)$ có đạo hàm trong $(x_0, +\infty)$ và có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = ?$

Thí dụ $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$

3) Nếu $f(x)$ bị chặn có đạo hàm trong $(x_0, +\infty)$ và có $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$

thì có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

Thí dụ: $f(x) = \cos(\ln x)$

18. Tính:

1) $d\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right)$ 2) $d\left(\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right)$

3) $d\left(\frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|}\right)$

4) $d(x.e^x)$

5) $d(x\cos x)$

6) $d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$

7) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

8) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$

9) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$

10) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$

11) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

12) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

19. Tính gần đúng

1) $\sqrt[3]{1{,}02}$

3) $\text{arctg}\,1{,}05$

2) $\sin 29^\circ$

20. Chứng minh

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}},\quad a>0,\quad |x|<a$$

(HD: Xét $f(x)=\sqrt[n]{x}$

$$f(x_0+\Delta x)=\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$$ thay $x_0=a^n$, $\Delta x=x$)

Áp dụng tính:

1) $\sqrt{5}$

4) $\sqrt[3]{9}$

2) $\sqrt{34}$

5) $\sqrt[4]{80}$

3) $\sqrt{120}$

6) $\sqrt[7]{100}$

7) $\sqrt[10]{1000}$

21. Chứng minh:

1) $y=xe^{-x}$ nghiệm đúng hệ thức $xy'=(1-x)y$

2) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ nghiệm đúng hệ thức $xy'=(1-x^2)y$

3) $y=\frac{1}{1+x+\ln x}$ nghiệm đúng hệ thức $xy'=-(x+1)y^2$

22. Hai đầu của 1 thanh AB = 5m trượt theo các trục toạ độ Ox, Oy. Tốc độ trượt của đầu A là 2m/s. Tìm tốc độ của đầu B lúc A cách O 3m.

23. Một điểm chuyển động theo hyperbole $y = \dfrac{10}{x}$ sao cho hoành độ x tăng đều với tốc độ 1m/s. Tìm tốc độ biến thiên của y tại điểm (5,2).

24 Tính đạo hàm và vi phân cấp 2 của:

1) $y = x\sqrt{1+x^2}$

2) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $y = e^{x^2}$

4) $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$

5) $y = (1 + x^2)\text{arccotg}x$

6) $y = (1 + x^2)\text{arctg}x$

7) $y = (\arcsin x)^2$

8) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

9) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$

25 Cho

1) $y = x\ln x$, tính $y^{(5)}$

2) $y = e^x\cos x$, Tính $y^{(4)}$

3) $y = \dfrac{e^x}{x}$, Tính $y^{(10)}$

4) $y = x\cos 2x$. Tính $d^{10}y$

5) $y = \cos x.\text{ch}x$, Tính d^6y

26. Chứng minh

1) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ nghiệm đúng phương trình
$y'' + y = 0$

2) $y = C_1\text{ch}x + C_2\text{sh}x$ nghiệm đúng phương trình
$y'' - y = 0$

3) $y = x^n[(C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]$ nghiệm đúng phương trình
$x^2y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$

4) $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_1\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}} + c_2\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_3\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}} + c_4\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

nghiệm đúng phương trình $y^{(4)} + y = 0$

27. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

1) $y = \dfrac{1}{a + bx}$

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a + bx}}$

3) $y = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$

4) $y = e^{ax}\sin bx$

*5) $y = \arcsin x$, tính $f^{(n)}(0)$

6) $y = \sin^2 x$

7) $y = \cos^2 x$

8) $y = \sin ax\cos bx$

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

3.

1) 1, 0, -1

2) -2, 1; -1, 0; -4, 3

3) $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$

4) $-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{10}$

5) $-\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$

6) $\dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$

7) $1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $(x>0)$

8) $-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, $(x>0)$

9) $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$, $(x>0)$

10) $\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$, $x \neq 0, -1, -8$

11) $\dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{\left(3+x^3\right)^2}}$, $x \neq \sqrt[3]{-3}$

4.

1) $-2\cos x(1+2\sin x)$

2) $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$

3) $-n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$

4) $\cos x\cos(\sin x)\cos[(\sin(\sin x))]$

5) $\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$

6) $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x}{\cos^2 x}$, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

7) $\dfrac{-8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}}$, $x \neq k\pi$

8) $\dfrac{2\sin x\left(\cos x\sin x^2 - x\sin x\cos x^2\right)}{\left(\sin x^2\right)^2}$

9) $-3\mathrm{tg}^2x\sec^2x\sin(2\mathrm{tg}^3x)\cos[\cos^2(\mathrm{tg}^3x)]$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

10) $15\sin^2 5x\cos 5x\cos^2\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sin^3 5x\sin\frac{2x}{3}$

11) $10\operatorname{tg}5x\sec^2 5x$

5

1) $-2xe^{-x^2}$

2) $-\frac{1}{x^2}2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}.\sec^2\frac{1}{x}.\ln 2.$ $\left(\sec x = \frac{1}{\cos x}\right)$

3) $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$

4) $y\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right)$ $(x > 0)$

5) $ax^{a-1} + a^x\ln a + a^{a^x}.a^x(\ln a)^2$

6) $\frac{-x^2}{(1+x)^2(1+x^2)}$ $x > -1$

7) $\frac{x}{x^4-1}$, $|x| > 1$

8) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

9) $\sqrt{x^2+a^2}$

10) $\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$, $(x > e)$

11) $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$, $(x > e)$

12) $\frac{1}{\cos x}$, $x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

13) $\sin x\ln\operatorname{tg}x$ $0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$

14) $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $x > 0, x \neq 1$

6.

1) $\frac{2ax}{x^4+a^2}$

2) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $|x| < 2$

3) $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$, $|x-1| < \sqrt{2}$

4) $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$, $x \geq 0$

5) $\operatorname{sign}(\cos x)$ $(x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z,$ $\operatorname{sign}x = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

6) $\dfrac{2\operatorname{sign}(\sin x)\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $x \neq k\pi,\ k \in Z$

7) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ $\quad 0 < x - k\pi < \dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$

8) $\dfrac{1+x^4}{1+x^6}$

9) $\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\cdot\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$, $x > 1$

10) $\sqrt{a^2 - x^2}$

11) $\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$, $x \neq (2k-1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$

7

1) $x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$ $x > 0$

2) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{cotg}^2 x - \ln x \sin x) - (\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x)$

$0 < x - 2k\pi < \dfrac{\pi}{2}$

3) $\dfrac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}y$

4) $y\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x-a_i}$

5) $\dfrac{54-36x+x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}y$, $x \neq 0;\ 1;\ \pm 3$

6) $\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}y$

8.

1) $y' = \dfrac{1-x-y}{x-y}$

2) $y' = \dfrac{p}{y}$

3) $y' = \dfrac{-b^2x}{a^2y}$

4) $y' = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

5) $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

6) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

9.

1) $-1,\ 0<x<1$

2) $\dfrac{-b}{a}\cot gt\quad 0<|t|<\pi$

3) $-\operatorname{tg} t,\ t\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z$

4) $\operatorname{cotg}\dfrac{t}{2},\ t\neq 2k\pi,\ k\in Z$

10.

1) $\operatorname{th}^3 x;$

2) $\dfrac{-2}{sh^3x},\ x>0$

3) $\dfrac{\operatorname{sign}(shx)}{chx},\quad x\neq 0$

4) $\dfrac{1}{ch2x}$

11.

1) $\dfrac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$

2) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\approx -70^{\circ}30'$

3) $\dfrac{\pi}{2}$

12.

1) $\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

2) $\dfrac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$, $Q(x)=[xP(x)]'$

3) $\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$

4) $\dfrac{n\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{2n+1}{2}x-\sin^2\dfrac{nx}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$

5) $\dfrac{nsh\dfrac{x}{2}\cdot sh\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x-sh^2\dfrac{nx}{2}}{2sh^2\dfrac{x}{2}}$

13.

1) $f(a-0)=-\varphi(a),\ f(a+0)=\varphi(a)$

2) $f'(0-0) = -1$; $f'(0+0) = 1$

15.

1) Không có, không thể khẳng định

2) Không thể khẳng định

16. Có thể có, cũng có thể không

17.

1) Không thể

2) Không thể

3) Không thể

18.

1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 2) $\dfrac{dx}{a^2+x^2}$

3) $\dfrac{dx}{x^2-a^2}$ 4) $(1+x)e^x dx$

5) $(\cos x - x\sin x)dx$ 6) $\dfrac{x dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

7) $\dfrac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $|x| < 1$ 8) $\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.dx$ $x > 0$

9) $-\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $|x| > 1$ 10) $1 - 4x^3 - 3x^6$

11) $\dfrac{1}{2x^2}\left(\cos x - \dfrac{\sin x}{x}\right)$ 12) $-\operatorname{cotg} x$ $x \neq k\pi, k \in Z$

19. HD: Dùng công thức $f(x+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$, Δx khá bé

1) 1,007 (bảng : 1, 0066)

2) 0,4849 (bảng : 0,4848)

3) 0,8104 ≈ 46°26' (bảng : 46°24')

20.

1) 2,25 (bảng : 2,24) 2) 5,833 (bảng ; 5,831)

3) 10,9546 (bảng : 10,9545) 4) 2,083 (bảng : 2,080)

5) 1,9907 (bảng : 2,9907) 6) 1,938 (bảng : 1,937)

7) 1,9554 (bảng : 1,9553)

22. Đặt $\overline{OA} = x = 2t$, $\overline{OB} = y = \sqrt{5^2 - 4t^2}$

$y'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

23. Đặt $x = t$, $v = \frac{10}{t}$; $v'_t=\frac{-10}{t^2}$

$t = 5$, $v'(5) = -0{,}4$m/s

24.

1) $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

2) $-\frac{3x}{(1-x^2)^2}$, $|x|<1$

3) $2e^{x^2}(2x^2-1)$

4) $\frac{-2}{x}\sin(\ln x)$, $x>0$

5) $\frac{-2x}{1+x^2}+2\text{arctg}x$

6) $2\text{arctg}x+\frac{2x}{1+x^2}$

7) $\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

8) $-\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}$, $t\neq 2k\pi$, $k\in Z$

9) $\frac{e^{t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$

25.

1) $y^{(5)}=-\frac{6}{x^4}$

2) $y^{(4)}=-4e^x\cos x$

3) $y^{(10)}=e^x\sum_{n=0}^{10}(-1)^n C_{10}^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

4) $d^{10}y=-1024\,(x\cos 2x+5\sin 2x)dx^{10}$

5) $d^6y=8\sin x.\,\text{sh}x.\,dx^6$

27.

1) $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!b^n}{(a+bx)^{n+1}}$

2) $y^{(n)}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}$

3) $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$

4) $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

5) $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = [(2k-1)!!]^2$; $k = 0、1、2$.

6) $-2^{n-1}\cos(2x + \frac{n\pi}{2})$ 7) $2^{n-1}\cos(2x + \frac{n\pi}{2})$

8) $\frac{(a-b)^n}{2}\sin\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right] + \frac{(a+b)^n}{2}\cdot\sin\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right]$

Chương 4

CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ÁP DỤNG

§1. CÁC ĐỊNH LÝ TRUNG BÌNH

1.1. Định lý Rolle

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ khả vi trong khoảng (a,b) và $f(a) = f(b)$ thì $\exists c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$

Về hình học: Định lý này xác nhận với những giả thiết đã nêu thì có ít nhất một điểm thuộc đồ thị của hàm số sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại đó song song với trục hoành.

Chứng minh: Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$ nên theo định lý Weierstracss $f(x)$ đạt một giá trị bé nhất m và một giá trị lớn nhất M, có thể xảy ra 2 trường hợp.

a) $m = M$ khi đó vì $m \le f(x) \le M$ nên $f(x) = M = m$ nghĩa là $f(x)$ không đổi trong $[a,b]$ do đó $\forall x \in (a,b)$ ta có $f'(x) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b)$: $f'(c) = 0$ định lý được chứng minh.

b) $m \neq M$, giả sử $f(c) = M$, $f(c') = m$ rõ ràng ít nhất một trong các điểm c, c' không thể trùng với a hoặc b, vì nếu chẳng hạn $c = a$, $c' = b$ thì vì $f(a) = f(b)$, theo giả thiết, suy ra $M = m$, ta lại trở về trường hợp trên.

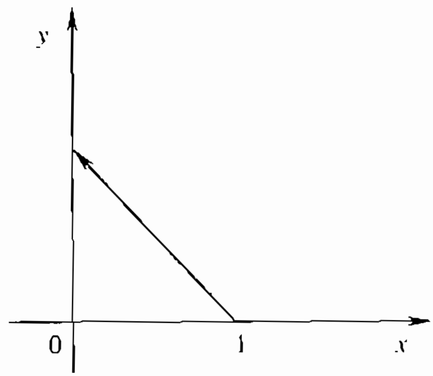
Giả sử $c \neq a,b$ nghĩa là

$c \in (a,b)$ vì M cũng là một cực đại của $f(x)$ trong (a,b) và theo giả thiết $f(x)$ khả vi trong (a,b) nên theo tính chất của hàm khả vi.

Ta có $f'(x) = 0$.

Chú ý: Các giả thiết trên rất cần thiết để định lý đúng, chẳng hạn xét:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ 1 - x : x \neq 0 \end{cases}$

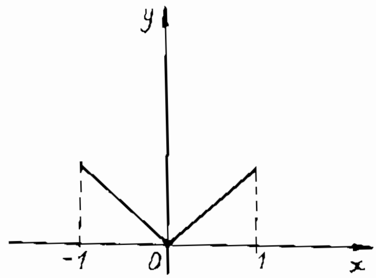


Hình 23

Hàm số này liên tục $\forall$ x trừ $x = 0$ rõ ràng không có $c \in (0,1)$ để $f'(c) = 0$ (Hình 23)

b) $f(x) = |x|$

Hàm số này khả vi $\forall$ x trừ $x = 0$ rõ ràng cũng không có $c \in (-1,1)$ để $f'(c) = 0$ (Hình 24)



Hình 24

1.2. Định nghĩa Lagrange:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$ khả vi trong (a,b) thì $\exists c \in (a,b)$ sao cho

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)(L)$

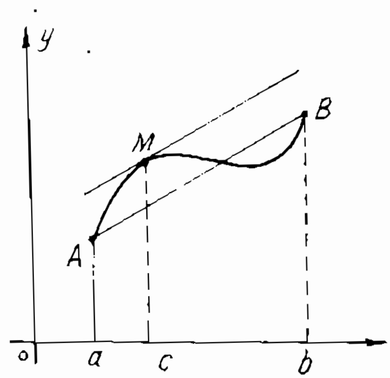
Về hình học: Định lý này xác nhận với những giả thiết đã nêu thì có ít nhất 1 điểm thuộc đồ thị của hàm số tại đó tiếp tuyến với đồ thị song song với đoạn thẳng nối điểm đầu và cuối của đồ thị (Hình 25)

Chứng minh: Rõ ràng định lý Rolle là một trường hợp đặc biệt của định lý này, ta sẽ đưa định lý này về trường hợp định lý Rolle.

Xét $g(x)$ là hàm số có đồ thị là đường thẳng nối các điểm

$A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ thì tại a hoặc b, $f(x)$ và $g(x)$ có giá trị bằng nhau, do đó hàm số:

$F(x) = f(x) - g(x)$ tại a và b sẽ có giá trị bằng không.



Hình 25

Vì

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(phương trình của đường thẳng qua A,B) nên $F(x)$ cũng liên tục trong $[a, b]$ và khả vi trong (a,b) như $f(x)$. Vậy $F(x)$ có đầy đủ các giả thiết của định lý Rolle nên. $\exists c \in (a,b)$ sao cho $F'(c) = 0$

Nhưng $F'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Suy ra: $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

Hay: $f(b) - f(a) = f'(c) \,.\, (b - a)$

Bây giờ ta viết công thức (L) dưới một dạng khác gọi là công thức số gia hữu hạn.

Đặt $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x = x$

Vì $c \subset (a, b)$ nên đặt được: $c = x_0 + \theta\,\Delta x$, $0 < \theta < 1$

Khi đó (L) viết được: $f(x) - f(x_0) = \Delta x f'(x_0 + \theta\,\Delta x)$ (L')

Cho $\theta = 1/2$ trong (L') ta có công thức tính gần đúng

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0 + \Delta x/2)$

Thí dụ: Tính gần đúng arctg1,1

Đặt $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$. Ta có

$$\text{arctg}1{,}1 \approx \text{arctg}1 + \frac{0{,}1}{1+(1{,}05)^2} = 0{,}8685$$

1.3. Định lý Cauchy:

Nếu $f(x)$, $g(x)$ liên tục trong $[a, b]$ khả vi trong (a,b) và $g'(x) \neq 0$ trong (a,b) thì $\exists c \in (a,b)$

sao cho. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ (c)

Rõ ràng định lý Lagrange là một trường hợp đặc biệt của định lý này khi $g(x) = x$

Chứng minh Ta cũng chứng minh định lý này bằng cách đưa về trường hợp định lý Rolle.

Xét hàm số $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ trong đó λ là một số nào đó.

Rõ ràng $F(x)$ liên tục trong $[a,b]$ và khả vi trong (a,b) ta sẽ xác định λ để

$F(a) = F(b)$: $F(a) = f(a) + \lambda g(a)$, $F(b) = f(b) + \lambda g(b)$,

$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \Rightarrow [g(b) - g(a)]\,\lambda = -[f(b) - f(a)]$.

Rõ ràng $g(a) \neq g(b)$ vì nếu $g(a) = g(b)$ thì theo định lý Rolle.

$\exists c \in (a,b)$ sao cho $g'(c) = 0$

trái với giả thiết: $g'(x) \neq 0$ trong (a,b)

Do đó: $\lambda = -\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Vậy $F(x)$ xác định như trên có đầy đủ các giả thiết của định lý Rolle

Do đó $\exists c \in (a,b)$ sao cho $F'(c) = 0$ hay $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

1.4. Áp dụng:

a) Điều kiện đơn điệu của hàm số:

Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi trong miền X

1^o. Nếu $f'(x) = 0\ \forall x \in X$ thì $f(x)$ là không đổi trong X

2^o. Nếu $f(x)$ là đơn điệu không giảm (tăng) trong X thì $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) trong X

3^o Nếu $f(x) > 0$ (<0), $\forall x \in X$ thì $f(x)$ là đơn điệu tăng (giảm) trong X.

Định lý được chứng minh dễ dàng, chẳng hạn 1^o $\forall x_1, x_2 \in X$, áp dụng công thức Lagrange vào đoạn $[x_1, x_2]$ đối với $f(x)$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $c \in (x_1, x_2)$

Theo giả thiết: $f'(x) = 0$, $\forall x \in X$, suy ra $f'(c) = 0$ và $f(x_2) - f(x_1) = 0$

hay $f(x_1) = f(x)$, $\forall x_1, x_2 \in X$ nghĩa là $f(x)$ không đổi trong X

Thí dụ

Xét $f(x) = 2x^2 - \ln x$, $x > 0$

$f'(x) = 4x - 1/x = \dfrac{4x^2 - 1}{x}$

Vì $x > 0$ nên $f'(x) < 0$ khi $0 < x < 1/2$ và

$f'(x) > 0$ khi $1/2 < x < +\infty$

Vậy $f(x)$ đơn điệu giảm trong $(0,1/2)$ và tăng trong $(1/2, +\infty)$

b) Quy tắc thứ nhất tìm cực trị.

Định lý: giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trong miền X và khả vi tại lân cận điểm $x_o \in X$ có thể trừ ra tại x_o và nếu trong lân cận đó

Khi $x < x_o$, $f'(x) > 0$ (<0)

$x > x_o$, $f'(x) < 0$ (> 0)

thì $f(x)$ đạt cực đại (tiểu) tại x_o.

Chứng minh : Xét trường hợp cực đại (cực tiểu xét tương tự) và x thuộc lân cận của x_o, $x \neq x_o$, áp dụng công thức (L) vào hiệu $f(x) - f(x_o)$ ta có:

$f(x) - f(x_o) = (x - x_o) f'(c)$; c gồm giữa x_o và x

Nếu $x < x_o$ thì $x - x_o < 0$ và $x < c < x_o$, theo giả thiết $f'(c) > 0$

Suy ra $f(x) - f(x_o) < 0$ hay $f(x) < f(x_o)$.

Nếu $x > x_o$ thì $x - x_o > 0$ và $x_o < c < x$, Theo giả thiết $f'(c) < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_o) < 0$ vậy trong lân cận của x_o: $f(x) < f(x_o)$

Theo định nghĩa $f(x)$ đạt cực đại tại x_o:

$y_{max} = f(x_o)$

Thí dụ: Xét $y = (x - 5)\sqrt[3]{x^2}$

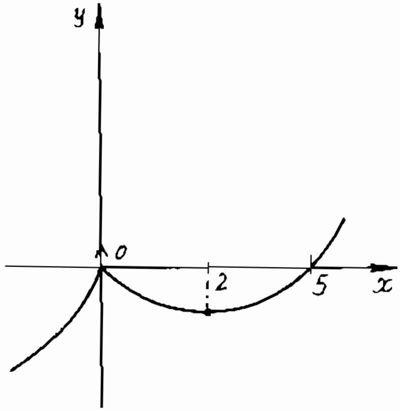
Ta có :

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$y' = 0$ khi $x = 2$, $y' = \infty$ khi $x = 0$

Xét dấu của y' theo bảng:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	



Hình 26

Ta thấy : $x = 0$ là điểm cực đại của y: $y_{max} = y(0) = 0$

$x = 2$ là điểm cực tiểu của y:

$y_{min} = y(2) = -3\sqrt[3]{4}$

Chú ý: Qua các thí dụ đã xét ta thấy, $f(x)$ có thể đạt cực trị tại những điểm $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại, những điểm như vậy gọi là những điểm bất thường của $f(x)$ đặc biệt, điểm x mà $f'(x) = 0$ gọi là điểm dừng của $f(x)$.

c) Quy tắc L'Hôspital (khử dạng vô định $\frac{0}{0}$, (∞/∞)

Định lý: Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Cauchy trong lân cận của điểm x_o ($x_o \in \widetilde{R}$) trừ tại

x_o, $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0 \quad (\infty)$

và $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a$ ($a \in \widetilde{R}$) thì $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$

Chứng minh: Ta chỉ xét trường hợp x_o, $a \in R$ (Các trường hợp khác chứng minh tương tự)

Xét hàm $F(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq x_0 \\ 0 & : x = x_0 \end{cases}$

Và $G(x) = \begin{cases} g(x) & : x \neq x_0 \\ 0 & : x = x_0 \end{cases}$

Rõ ràng $F(x)$, $G(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Cauchy trong lân cận của x_0, do đó x thuộc lân cận đó ta có:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \quad c \text{ gồm giữa } x \text{ và } x_0$$

hay $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ với $x \neq x_0$

Cho $x \to x_0$ thì $c \to x_0$ theo giả thiết:

$\lim\limits_{c \to x_0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = a$ do đó $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$

Thí dụ:

1) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5\cos 5x}{3\cos 3x} = \frac{5}{3}$$

2) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x - \sin x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 3$$

3) Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x}$ $(a > 1)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = +\infty$$

Chú ý 1. Có thể áp dụng quy tắc L'Hôspital nhiều lần nếu $f'(x)$, $g'(x)$ lại thỏa mãn các điều kiện của quy tắc.

Thí dụ: Tìm

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

2) Có thể áp dụng quy tắc L'Hôspital để khử các dạng vô định $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0; bằng cách đưa các dạng này về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$

Thí dụ: 1) tìm $\lim\limits_{x\to+0} x^{\alpha}\ln x\ (\alpha > 0)$

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{x^{\alpha}}{-\alpha} = 0$$

2) Tìm $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{x-1}}$

Đặt $y = x^{\frac{1}{x-1}}$ thì $\ln y = \frac{\ln x}{x-1}$

$$\lim_{x\to1}\ln y = \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \quad \text{suy ra} \quad \lim_{x\to1} y = e$$

3) Khi $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại thì không áp dụng được quy tắc L'Hôspital phải làm theo phương pháp khác.

Thí dụ: Xét $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$

Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ không tồn tại nên không áp dụng được quy tắc L'Hôspital. Bằng cách khác ta có:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

§ 2. CÔNG THỨC TAYLOR

2.1. Công thức Taylor và Maclaurin

Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có các đạo hàm $f'(x), f''(x) \ldots f^{(n)}(x)$ liên tục tại điểm x_0 và có đạo hàm $f^{(n+1)}(x)$ trong lân cận của x_0 thì tại lân cận đó ta có công thức:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (T)$$

(c ở giữa x_0 và x, $c = x_0 + \theta\,(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$

Công thức này gọi là công thức Taylor cấp n, số hạng cuối cùng gọi là số hạng dư của nó, hàm $f(x)$ gọi là viết được hay khai triển được theo công thức Taylor. Đặc biệt $x_0 = 0$ thì công thức Taylor trở thành công thức :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(M) $(0 < \theta < 1)$

gọi là công thức Maclaurin cấp n

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh công thức (T) bằng phương pháp quy nạp.

Cho: $n = 0$ ta có: $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$

Đây chính là công thức (L) đã chứng minh. Vậy (T) đúng với $n = 0$.

Bây giờ giả sử công thức (T) cấp n - 1 đúng:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh công thức (T) cấp n là đúng, theo giả thiết $f^{(n)}(x)$ liên tục tại x_0 nên:

$\lim\limits_{x \to x_0} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0)$ ($x \to x_0$ thì $c \to x_0$)

Suy ra: $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0) + \alpha$ (2)

α là một vô cùng bé khi $x \to x_0$

Thay (1) vào (2) và chuyển vế ta được:

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

trong đó $F(x) = \dfrac{\alpha(x - x_0)^n}{n!}$ (3)

Từ (3) suy ra

$F(x_0) = 0$, $F'(x_0) = 0$, ... $F^{(n)}(x_0) = 0$

$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ (4)

Mặt khác ta xét hàm số:

$G(x) = (x - x_0)^{n+1}$

$G(x_0) = 0,\ G'(x_0) = 0,\ G^{(n)}(x_0) = 0,\ G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ (5)

Áp dụng công thức Cauchy vào các hàm số: $F(x)$, $G(x)$ trong (x_0, x) ta được:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}, \qquad x_0 < c_1 < x$$

Lại áp dụng định lý Cauchy vào các hàm số $F'(x)$, $G'(x)$ trong (x_0, c_1) ta có :

$$\frac{F'(c_1) - F'(x_0)}{G'(c_1) - G'(x_0)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} \qquad x_0 < c_2 < c_1$$

Tiếp tục quá trình, ta đi đến:

$$\frac{F^{(n)}(c_n) - F^{(n)}(x_0)}{G^{(n)}(c_n) - G^{(n)}(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}, \qquad x_0 < c < c_n$$

Do đó theo (4) và (5) thì

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \text{ hay } F(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Thay $F(x)$ và (3) và chuyển vế ta được công thức (T)

Chú ý: Số hạng dư trong các công thức (T) và (M) ở trên cùng gọi là số hạng dư dạng Lagrange. Ta có thể viết:

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0((x - x_0)^n)$, (vô cùng bé bậc cao hơn $(x - x_0)^n$ khi $x \to x_0$ gọi là số hạng dư dạng Peano.

2.2. Các khai triển quan trọng:

Ta sẽ khai triển một số hàm số sơ cấp cơ bản quan trọng theo công thức Maclaurin, có rất nhiều ứng dụng trong thực tế.

1°. Hàm số $f(x) = e^x$

Ta có: $f^{(n)}(x) = e^x$, do đó $f^{(n)}(0) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Vậy $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$

2°. Hàm số $f(x) = \sin x$

Ta biết: $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\dfrac{\pi}{2})$

Do đó: $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 \ : \ n = 2m, m = 1,2\ldots \\ (-1)^{m-1} \ \ n = 2m-1, m = 1,2\ldots \end{cases}$

Vậy:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots$$

$$+ \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + \sin\left[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

3°. Hàm số $f(x) = \cos x$

Tương tự ta có:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots$$

$$+ \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + \cos\left[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

4°. Hàm số $f(x) = (1 + x)^\alpha$

Ta có: $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$

Do đó: $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)$

Vậy:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

2.3. Áp dụng

a) Quy tắc thứ hai tìm cực trị

Định lý: Giả sử $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại điểm x_0 và:

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Nếu n chẵn và $f^{(n)}(x_0) < 0$ (> 0) thì $f(x)$ đạt cực đại (tiểu) tại x_0.

Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0.

Chứng minh: Ta viết công thức (T) của $f(x)$ tại lân cận x_0 (cấp n - 1)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

Theo giả thiết: $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

Suy ra: $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$ (1)

Cũng theo giả thiết $f^{(n)}(x)$ liên tục tại x_0 nên:

$$\lim_{x \to x_0} f^{(n)}(c) = \lim_{c \to x_0} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0)$$

Do đó theo tính chất của giới hạn nếu:

$f^{(n)}(x_0) < 0$ (> 0) thì trong lân cận của x_0.

$f^{(n)}(c) < 0$ (> 0). Do đó, nếu n chẵn thì từ (1) suy ra: $f(x) - f(x_0) < 0$ (> 0) nghĩa là $f(x)$ đạt cực đại (tiểu) tại x_0

Nếu n lẻ thì $f(x) - f(x_0)$ không giữ nguyên một dấu nhất định, chẳng hạn nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$ thì $f(x) - f(x_0) > 0$ khi $x < x_0$ và $f(x) - f(x_0) < 0$ khi $x > x_0$ nghĩa là $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0.

Thí dụ: 1) Xét hàm số $y = \cos 2x$

Hàm số này có chu kỳ là π nên chỉ xét $0 \le x \le \pi$ $y' = -2\sin 2x$, $y' = 0$

khi $\sin 2x = 0$ hay $x = k\dfrac{\pi}{2}$, trong $[0, \pi]$ thì $y' = 0$ khi $x = 0$, $\dfrac{\pi}{2}$, π

Tính $y'' = -4\cos 2x$ và xét dấu của y''.

$y''(0) = -4 < 0$, do đó y đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{max} = 1$

$y''(\dfrac{\pi}{2}) = 4 > 0$, do đó y đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{2}$; $y_{min} = -1$

$y''(\pi) = -4 < 0$, do đó y đạt cực đại tại $x = \pi$; $y_{max} = 1$

2) Xét hàm số; $y = x^4$ tại $x = 0$

Ta có: $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$, $y''' = 24x$, $y^{(4)} = 24$

Do đó tại $x = 0$ thì : $y' = y'' = y''' = 0$; $y^{(4)} > 0$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{min} = 0$

3) Xét hàm số $y = x^3$ tại $x = 0$ thì:

$y' = y'' = 0$, $y''' = 6 \neq 0$. Vậy y không đạt cực trị tại $x = 0$

Bài toán tìm giá trị lớn nhất và bé nhất:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ theo định lý Weierstrass: $f(x)$ sẽ đạt một giá trị bé nhất m và một giá trị lớn nhất M trong đoạn đó, rõ ràng m, M của $f(x)$ chỉ có thể đạt tại các điểm cực trị của $f(x)$ hoặc tại a hoặc b, nhưng cực trị của $f(x)$ chỉ có thể đạt tại các điểm bất thường của $f(x)$($f'(x) = 0$, ∞ hoặc không tồn tại). Do đó muốn tìm m, M của $f(x)$, ta tìm các điểm bất thường của $f(x)$ rồi tính giá trị của $f(x)$ tại các điểm đó và tại a, b rồi so sánh ta sẽ có m, M.

Rõ ràng nếu trong $[a, b]$, $f(x)$ biến thiên đơn điệu thì m, M sẽ đạt tại a hoặc b.

Nếu trong $[a, b]$, $f(x)$ chỉ có một cực đại hoặc một cực tiểu thì cực đại cực tiểu đó sẽ là giá trị lớn nhất hoặc bé nhất của $f(x)$.

Thí dụ:

1) Tìm m, M của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trong đoạn $[-3, 2]$

Tính $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0$ khi $x = \pm 1$

Tính $y(-3) = -17$, $y(-1) = 3$, $y(1) = -1$

$y(2) = 3$ vậy $m = -17$, $M = 3$

2) Một viên đạn bắn lên từ điểm O với vận tốc v_0 và nghiêng với mặt phẳng nằm ngang 1 góc α. Xác định góc α để viên đạn rơi xuống mặt phẳng nằm ngang ở điểm A thì khoảng cách OA = R là lớn nhất.

Trong cơ học ta viết phương trình chuyển động của viên đạn là:

$$x = v_0\cos\alpha.t$$

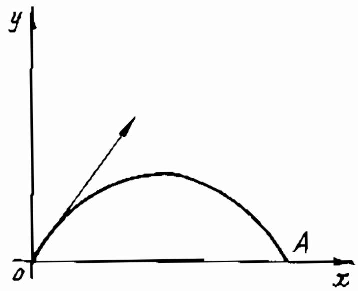
$$y = v_0\sin\alpha.t - \frac{gt^2}{2}$$

Trong đó t là thời gian, g là gia tốc trọng trường, khử t ta có phương trình quỹ đạo của viên đạn:

$$y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

Tìm tọa độ của A, cho $y = 0$ ta có:

$$R = \mathrm{OA} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$ với điều kiện $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$



Hình 27

Tính $R' = \dfrac{2v_0^2\cos 2\alpha}{g} = 0$ khi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$$R'' = \frac{-4v_0^2\sin 2\alpha}{g}, \quad R''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4v_0^2}{g} < 0$$

Vậy R đạt cực đại tại $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Đó cũng là giá trị lớn nhất của R. Do đó góc α cần xác định là $\dfrac{\pi}{4}$

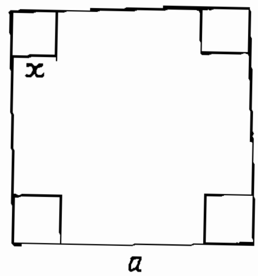
3) Cho một miếng tôn hình vuông cạnh a hỏi phải cắt đi ở 4 góc, 4 hình vuông bằng nhau là bao nhiêu để gò thành một thùng hình hộp có thể tích V lớn nhất (Hình 28)

Ta có $V = (a - 2x)^2 . x$

Với điều kiện $0 \le x \le \dfrac{a}{2}$

$V' = (a - 2x)(a - 6x)$, $V' = 0$ khi $x = \dfrac{a}{2}$ và $x = \dfrac{a}{6}$

$V(0) = V\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$, $V\left(\dfrac{a}{6}\right) = \dfrac{2a^3}{27}$



Hình 28

Vậy $V_{max} = \dfrac{2a^3}{27}$ và phải cắt đi một diện tích là

$$4\frac{a^2}{36} = \frac{a^2}{9}$$

b) Bề lồi, lõm, điểm uốn của đồ thị hàm số:

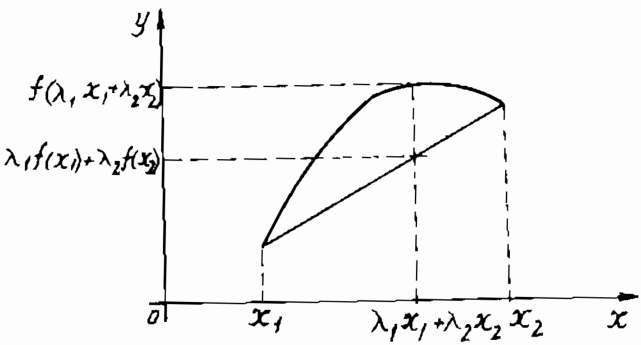
***Định nghĩa* 1**: Hàm $y = f(x)$ hay đồ thị của nó gọi là lồi về phía trên hay lồi trong khoảng (a,b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ và $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

thì

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad (1)$$

Nếu dấu bất đẳng thức là $\le$ thì $f(x)$ hay đồ thị của nó gọi là lõm về phía trên hay lõm.

Ý nghĩa của (1) là các điểm trên cung đồ thị ở phía trên các điểm trên dây cung cùng hoành độ (hình 29).



Hình 29

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để hàm $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trong khoảng (a,b) là lồi (lõm) trong khoảng đó là $f''(x) \le 0$ (≥ 0)

*Chứng minh:

Điều kiện cần: Xét trường hợp lồi, giả sử trong (a,b), $f(x)$ là lồi, nghĩa là:

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ (1)

$x_1, x_2 \in (a,b)$, $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

Chọn $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ và đặt $t = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $h = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$ thì (1) viết được

$$f(t) \ge \frac{f(t+h) + f(t-h)}{2} \text{ hay } f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) \le 0 \qquad (2)$$

Theo công thức Lagrange:

$f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) = [f(t+h) - f(t)] - [f(t) - f(t-h)] =$

$= f'(t + \theta_1 h).h - f'(t - \theta_2 h).h = h[f'(t + \theta_1 h) - f'(t - \theta_2 h)$

$= h[f'(t + \theta_1 h) - f'(t)] + h[f'(t) - f'(t - \theta_2 h)]$

$$0 < \theta_1, \theta_2 < 1$$

Chia 2 vế đẳng thức này cho h^2.

$$\frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2} = \frac{f'(t+\theta_1 h) - f'(t)}{h} + \frac{f'(t) - f'(t - \theta_2 h)}{h}$$

Khi $h \to 0$ các số hạng ở vế phải dần tới $f''(t)$ từ (2) suy ra $f''(t) \le 0$.

Điều kiện đủ: Giả sử $f''(x) \le 0$ trong (a,b) xét $x_1, x_2 \in (a,b)$,

đặt $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, rõ ràng $a \le X \le b$ ta viết khai triển của $f(x_1)$, $f(x_2)$ theo công thức Taylor cấp 1 tại lân cận của điểm X:

$$f(x_1) = f(X) + (x_1 - X)f'(X) + \frac{1}{2}(x_1 - X)^2 f''(c_1) \qquad (3)$$

$$f(x_2) = f(X) + (x_2 - X)f'(X) + \frac{1}{2}(x_2 - X)^2 f''(c_2) \qquad (4)$$

c_1 ở giữa x_1, X; c_2 ở giữa x_2, X

Nhân (3) với λ_1, (4) với λ_2 rồi cộng vế với vế và chú ý : $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ và

$[\lambda_1(x_1 - X) + \lambda_2(x_2 - X)]f'(X) = f'(X)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - X) = 0$

Ta có

$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) +$

$\dfrac{1}{2}[(x_1 - X)^2 \lambda_1 f''(c_1) + (x_2 - X)^2 \lambda_2 f''(c_2)]$

Theo giả thiết $f''(x) \le 0$ nên

$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \le f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ nghĩa là $f(x)$ là lồi trong (a,b)

Thí dụ:

1) Hàm $y = x^4$, có $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2 \ge 0\ \forall x$, vậy hàm số là lõm $\forall$ x

2) $y = \ln x$, $x > 0$, $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0\ \forall x > 0$ vậy hàm số là lồi $\forall x > 0$

Định nghĩa 2: Cho hàm $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 liên tục tại x_0, có đạo hàm hữu hạn hoặc vô hạn tại x_0

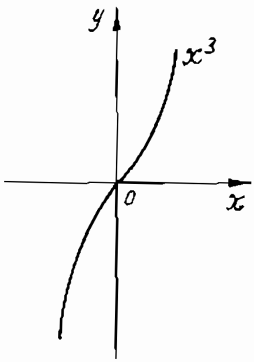
($f'(x_0) \in \widetilde{R}$) và $f(x)$ là lồi (lõm) trong $(x_0 - \delta, x_0)$, là lõm (lồi) trong

$(x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ thì x_0 gọi là điểm uốn của hàm số $f(x)$, điểm $(x_0, f(x_0))$ gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số

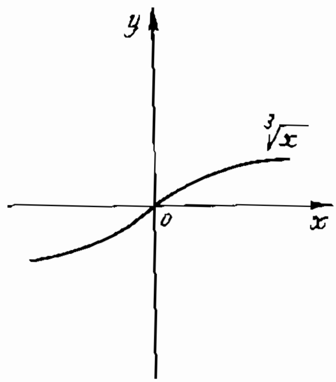
Thí dụ: 1) Điểm (0, 0) là điểm uốn của đồ thị các hàm số:

$y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ (Hình 30, 31)

2) Hàm $y = \begin{cases} \sin x & : x \ge 0 \\ x^2 & : x < 0 \end{cases}$



Hình 30



Hình 31

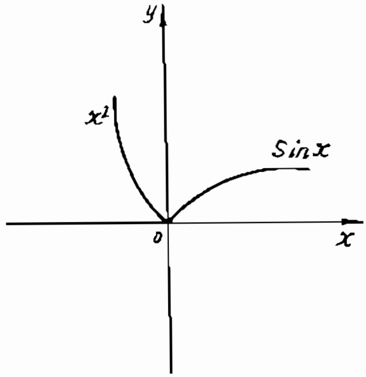
Điểm $x = 0$ không là điểm uốn của hàm số, vì hàm số không có đạo hàm hữu hạn hoặc vô hạn tại $x = 0$ (điểm $x = 0$ gọi là điểm góc của đồ thị) (Hình 32)

Từ định nghĩa, dễ dàng suy ra:

Định lý 2:

1°. Nếu hàm $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 tại x_0 và x_0 là điểm uốn của hàm số thì: $f''(x_0) = 0$ (điều kiện cần để có điểm uốn)

2^o. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_o có đạo hàm $f'(x)$ hữu hạn hoặc vô hạn tại x_o, có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ tại lân cận điểm x_o(có thể trừ tại x_o) và trong các khoảng $(x_o - \delta, x_o)$, $(x_o, x_o + \delta)$ $(\delta > 0)$, $f''(x)$ có dấu khác nhau thì x_o là điểm uốn của hàm số (điều kiện đủ để có điểm uốn).



Hình 32

Thí dụ:

1) Xét $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$

$y' = 4x^3 - 12x - 6$, $y'' = 12x^2 - 12 = 0$ khi $x = \pm 1$

Xét dấu theo bảng

x		-1		0		1	
y'		2				-14	
y''	+	0		-	-	0	+
y	lõm	2		lồi		-10	lõm

Vậy $x = \pm 1$ là điểm uốn của hàm số

Các điểm (-1,2), (1, -10) là điểm uốn của đồ thị hàm số

2) $y = e^{-x^2}$, $y' = -2x\,e^{-x^2}$, $y'' = 4(x^2 - \frac{1}{2})\,e^{-x^2}$

$y'' = 0$ khi $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Qua xét dấu của y'' ta thấy hàm số là lõm trong

$(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ và lồi trong $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$; các điểm $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là điểm uốn.

3) $y = \dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$ xác định trong $(0, +\infty)$

y có đạo hàm tại $\forall x \in (0, +\infty)$ trừ tại $x = 1$

$$y'' = \begin{cases} \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5-x}{x^3\sqrt{x}} & \text{với } 0 < x < 1 \\ \dfrac{3(x-5)}{4x^3\sqrt{x}} & \text{với } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

$y'' = 0$ tại $x = 5$ và không tồn tại khi $x = 1$

$y'' > 0$ khi $0 < x < 1$ và $5 < x < +\infty$; y là lõm

$y'' < 0$ khi $1 < x < 5$: y là lồi

Qua $x = 1$ và $x = 5$ y'' đổi dấu nhưng tại $x = 1$ hàm số không có đạo hàm hữu hạn hoặc vô hạn, còn tại $x = 5$ $f(x)$ có đạo hàm hữu hạn. Do đó chỉ có điểm $x = 5$ là điểm uốn của hàm số.

Tương tự như đối với trường hợp của cực trị, ta có:

Định lý 3: Nếu hàm $y = f(x)$, có đạo hàm đến cấp n tại x_o và

$f''(x_o) = f'''(x_o) \ldots = f^{(n-1)}(x_o) = 0, f^{(n)}(x_o) \neq 0$, n lẻ thì x_o là điểm uốn của hàm số, n chẵn thì x_o không là điểm uốn.

Thí dụ: $y = \dfrac{x^3}{2} - \text{tg}x + \sin x$

Tính toán ta có : $y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(5)}(0) \neq 0$. $n = 5$: lẻ, vậy $x = 0$ là điểm uốn của hàm số

Chú ý:

1) Dùng tính lồi lõm của hàm số, có thể chứng minh các bất đẳng thức.

Chẳng hạn: chứng minh $e^{\frac{x+y}{2}} \leq \dfrac{e^x + e^y}{2}$; $x, y \in R$

Thực vậy: xét hàm $f(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$

Vậy $f(x)$ là lõm $\forall x \in R$ nghĩa là

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \ x_1, x_2 \in R$

hay $e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \le \lambda_1 e^{x_1} + \lambda_2 e^{x_2}$

Đặt $x_1 = x, x_2 = y, \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ ta có bất đẳng thức phải chứng minh

2) Người ta cũng thường xét một định nghĩa khác về tính lồi lõm của đồ thị hàm số.

Định nghĩa 1': Đồ thị hàm số $y = f(x)$ gọi là lồi (lõm) trong (a,b) nếu nó không ở trên (dưới) tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ của đồ thị trong (a,b)

Đối với lớp hàm số có đạo hàm cấp 2 liên tục thì dễ dàng chứng minh được định nghĩa này là tương đương với định nghĩa 1

Thực vậy, xét $x_0 \in (a,b)$, viết công thức Taylor cấp 1 của $f(x)$ tại lân cận x_0.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \qquad (1)$$

và phương trình của tiếp tuyến với đồ thị tại x_0:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

trừ (1) cho (2) ta có:

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \qquad (3)\ c \text{ ở giữa } x_0, x$$

Bây giờ giả sử hàm số là lồi theo định nghĩa 1, theo định lý 1, $f''(x) \le 0$ từ (3) suy ra:

$y - Y \le 0$ nghĩa là đồ thị không ở trên tiếp tuyến. Ngược lại, giả sử $f(x)$ là lồi theo định nghĩa 1' ta sẽ chứng minh $f''(x) \le 0$, theo định lý 1, $f(x)$ sẽ là lồi theo định nghĩa 1.

Giả sử ngược lại có $c_0 \in (a,b)$, $f''(c_0) > 0$ vì $f''(x)$ là liên tục, nên tồn tại một lân cận $(c_0 - \delta, c_0 + \delta)$, $\delta > 0$ để $f''(x) > 0$

Xét 2 điểm tùy ý : x_0, x trong lân cận này từ (3) ta có:

$$y - Y = f''(c)\,\frac{(x - x_0)^2}{2},\ c \text{ ở giữa } x_0, x$$

Vì $f''(c) > 0$ nên $y - Y > 0$, mâu thuẫn với giả thiết $f(x)$ là lồi theo định nghĩa 1' : $y - Y \le 0$

§ 3. KHẢO SÁT HÀM SỐ $Y = F(X)$

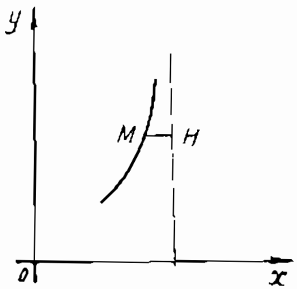
3.1. Tiệm cận của đồ thị hàm số:

Xét hàm số $y = f(x)$ có miền xác định X. Điểm $M(x,y)$ với $y = f(x)$ gọi là vẽ nhánh vô hạn của đồ thị hàm số nếu ít nhất một trong các toạ độ của M là không bị chặn.

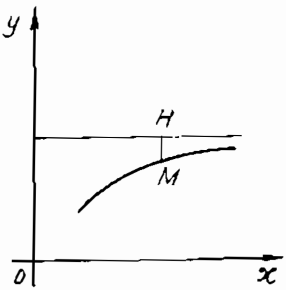
Một đường thẳng D gọi là tiệm cận của đồ thị hàm số nếu khoảng cách MH từ 1 điểm M trên đồ thị hàm số đến D dần tới 0 khi M vẽ nhánh vô hạn của đồ thị ấy.

Theo định nghĩa thì $M(x,y)$ với $y = f(x)$ vẽ nhánh vô hạn của đồ thị hàm số nếu một trong ba trường hợp sau đây xảy ra:

$x \to x_0, y \to \infty$; $x \to \infty$, $y \to y_0$; $x \to \infty$, $y \to \infty$



Hình 33



Hình 34

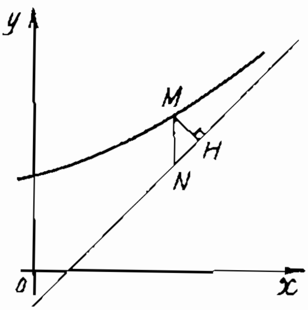
Do đó, ta suy ra ba trường hợp tìm tiệm cận theo quy tắc sau:

***Định lý* 1°**: Nếu $x \to x_0$, $y \to \infty$ nghĩa là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì đường thẳng.

$x = x_0$ là tiệm cận của đồ thị hàm số, gọi là tiệm cận đứng.

2°. Nếu $x \to \infty$, $y \to y_0$ nghĩa là $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$ thì đường thẳng $y = y_0$

là tiệm cận của đồ thị hàm số, gọi là tiệm cận ngang.



Hình 35

3°. Nếu $x \to \infty$, $y \to \infty$ nghĩa là $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ và nếu tồn tại các giới hạn:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$$

thì đường thẳng $Y = ax + b$ là tiệm cận của đồ thị hàm số, gọi là tiệm cận xiên.

Chứng minh 1° Theo giả thiết $x \to x_0$, $y \to \infty$ do đó: MH = $|x - x_0| \to 0$.

Vậy đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng.

2°. Theo giả thiết $x \to \infty$, $y \to y_0$ do đó MH = $|y - y_0| \to 0$.

Vậy đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang.

3°. Ta có MH = MN cos(MN, MH), MN = $y - Y = f(x) - ax - b \to 0$,

khi $x \to \infty$, vì $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax]$ và MH $\to 0$.

Vậy đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.

Thí dụ: Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số:

$y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ ta có khi $x \to -1$ thì $y \to \infty$, vậy đồ thị có tiệm cận đứng: $x = -1$

Khi $x \to \infty$ thì $y \to \infty$

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x\right] = \lim_{x \to \infty} -\frac{5x^2}{x^2} = -5$$

Vậy đồ thi có tiệm cận xiên $Y = x - 5$

Chú ý: nếu $y = f(x)$ là hàm số hữu tỷ : $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $(n \geq m)$. Trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là những đa thức bậc n, m thì có thể tìm tiệm cận bằng cách chia tử số cho mẫu số.

Thí dụ: Xét lại thí dụ trên, chia tử số cho mẫu số ta có:

$$y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} = x - 5 + \frac{4(3x+1)}{(x+1)^2}$$

Khi $x \to -1$ thì $y \to \infty$. Vậy đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng

Khi $x \to \infty$ thì $y \sim Y = x - 5$, vậy đường thẳng $Y = x - 5$ là tiệm cận xiên.

3.2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$

Nói chung cần tiến hành các bước sau:

1° - Tìm miền xác định, khoảng đối xứng, chu kỳ nếu có.

2° - Tìm miền đơn điệu, cực trị.

3° - Tìm bề lồi, lõm, điểm uốn.

4° - Tìm tiệm cận.

5° - Tìm thêm các điểm đặc biệt (giao điểm với các trục toạ độ) lập bảng biến thiên.

6° - Vẽ đồ thị.

Thí dụ. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

1° - Hàm số này xác định $\forall x \in R$, trừ tại $x = -1$ nó gián đoạn vô hạn.

2° - $y' = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$, $y' = 0$ khi $x = 1$ và $x = -5$, $y' = \infty$ khi $x = -1$

Bảng sau: cho miền đơn điệu và cực trị của hàm số:

x	- ∞		-5		-1		1		+ ∞
y'		+	0	-	||	+	0	+	
y		↗	-13,5	↘	- ∞ || - ∞	↗	0	↗	+ ∞

Dấu của y' là dấu của tích : $(x + 1)(x + 5)$

3° $y'' = \dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$, $y'' = 0$ khi $x = 1$

Bảng sau cho bề lồi, lõm, điểm uốn.

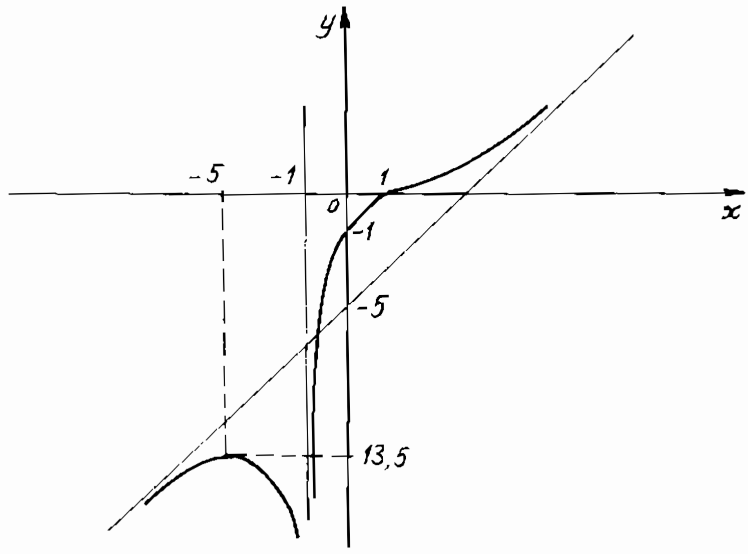
x	- ∞		1		+ ∞
y''		-	0	+	
y	lồi		điểm uốn		lõm

4° - Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = x - 5$ (Hình 36)

5° - Bảng tóm tắt

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	+	0	+	
y''		-		-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-13,5$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

6° - Vẽ đồ thị (Hình 36)



Hình 36

§ 4. HÀM SỐ CHO THEO THAM SỐ

4.1. Phương trình tham số của đường cong

Cho hai hàm số của cùng một đối số t:

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ hay $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$

Giả sử tồn tại hàm ngược: $t = \varphi^{-1}(x)$ và từ các hàm số ψ, φ^{-1} ta lập được hàm hợp.

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$$

thì ta được hàm số y của đối số x : $y = f(x)$; như vậy hàm số $y = f(x)$ có thể cho theo hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (1) \qquad \alpha \le t \le \beta$$

Khi đó ta gọi y là hàm số của x cho theo tham số t và hệ (1) cũng gọi là phương trình tham số của đường là đồ thị của hàm số đó.

Đặc biệt $y = f(x)$ cũng có thể viết dưới dạng phương trình tham số x:

$$x = x,\ y = f(x).$$

Rõ ràng, từ phương trình tham số của đường có thể đưa về phương trình dạng:

$$F(x,y) = 0 \qquad (2)$$

của đường đó và ngược lại

Thực vậy: theo trên, hệ (1) có thể đưa về phương trình $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$

Hay $F(x, y) = 0$.

Ngược lại, từ (2) đặt $x = x(t)$ và giải y theo t ta có: $y = y(t)$, nghĩa là (2) đưa được về (1).

Thí dụ:

1) Ta biết phương trình chính tắc của ellipse là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Đặt $x = a\cos t$ với $0 \le t \le 2\pi$, thay vào (1) và giải ra đối với y ta có:

$$y = b\sin t$$

Vậy $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ là phương trình tham số của ellipse

Đặc biệt nếu $a = b = R$ thì

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t$$

là phương trình tham số của đường tròn tâm O bán kính R

2) Lập phương trình quỹ đạo của 1 điểm M gắn chặt trên một đường tròn, đường tròn lại lăn không trượt trên một đường thẳng.

Ta lấy đường thẳng làm trục Ox còn gốc O lấy là điểm đồng thời M ở trên đường thẳng và đường tròn.

Đặt góc (CH.CM) = t , bán kính đường tròn là R, tâm là C.

Theo hình vẽ ta có (Hình 37)

$x = \overline{OP} = \overline{OH} - \overline{PH}$,

nhưng $\overline{OH} = \overset{\frown}{HM} = Rt$

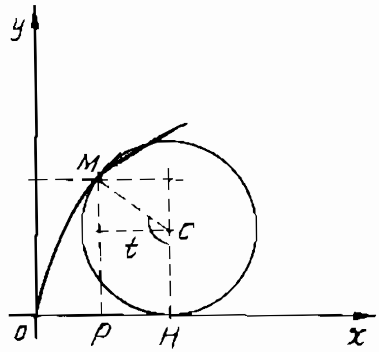
$\overline{PH} = R\sin t$

Do đó $x = R(t - \sin t)$.

Tương tự $y = R(1 - \cos t)$

Vậy phương trình tham số của quỹ đạo là:

$$x = R(t - \sin t)$$
$$y = R(1 - \cos t)$$



Hình 37

Quỹ đạo gọi là đường Cycloide.

4.2. Khảo sát và vẽ đồ thị:

Khảo sát tương tự như hàm $y = f(x)$, chỉ khác là ở đây khảo sát gián tiếp y theo x qua biến trung gian t.

Thí dụ: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

1°- Các hàm số x, y xác định $\forall t \in R$, do đó y xác định $\forall x \in R$.

Chu kỳ của y đối với t là 2π, suy ra: chu kỳ của y đối với x là $2\pi R$. Vậy chỉ xét: $0 \le t \le 2\pi$.

2°- Xét: $x' = R(1 - \cos t)$, $y' = R\sin t$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'dt}{x'dt} = \frac{R\sin t}{R(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot g\frac{t}{2} \quad \text{trong } [0, 2\pi],$$

$y'_x = 0$ khi $t = \pi$

$y'_x = \infty$ khi $t = 0$ và $t = 2\pi$

$y'_x > 0$ khi $0 < t < \pi$, $y'_x < 0$ khi $\pi < t < 2\pi$

Khi $t = \pi$ thì $x = R\pi$, vậy y đạt cực đại khi $x = R\pi$

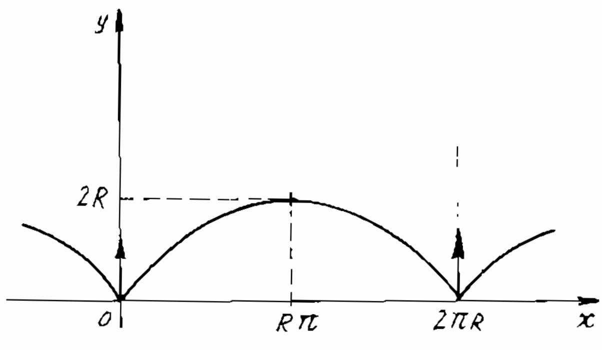
$$y_{max} = 2R$$

3° $y''_{x^2} = (y'_x)'_t t'_x = \left(\cot g \frac{t}{2}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{-1}{2\sin^2\frac{t}{2}\, R(1-\cos t)}$

Khi $0 \le t \le 2\pi$ thì $y''_{x^2} < 0$, vậy đồ thị của hàm số là lồi khi $0 \le x \le 2R\pi$

4°. Bảng biến thiên và đồ thị (Hình 38)

t	0		π		2π
x	0	$\nearrow$	$R\pi$	$\nearrow$	$2R\pi$
y'_x	∞	+	0	−	∞
y''_{x^2}		−		−	
y	0	$\nearrow$	$2R$	$\searrow$	0



Hình 38

§ 5. HÀM SỐ CHO THEO TỌA ĐỘ ĐỘC CỰC

5.1. Phương trình của đường cong trong hệ toạ độ độc cực

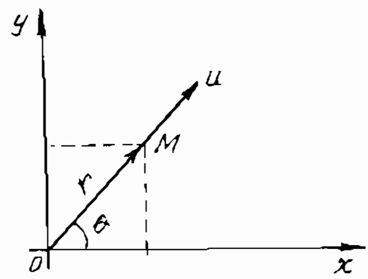
Trong mặt phẳng cho nửa đường thẳng Ox và trên đó chọn một chiều dương từ trái sang phải (Hình 39)

Xét điểm M trong mặt phẳng

Đặt $r = |\overrightarrow{OM}|$

$\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM})$

Rõ ràng vị trí của M được xác định bởi r, φ các số r, φ gọi là toạ độ độc cực của điểm M, ký hiệu $M(r, \varphi)$, r gọi là bán kính cực, φ gọi là góc cực. hệ gồm điểm O và trục Ox gọi là hệ tọa độ độc cực, Ox gọi là trục cực.



Hình 39

Theo định nghĩa thì $0 \le r < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$. Nếu chỉ xét $0 \le \varphi \le 2\pi$, thì ứng với 1 điểm M chỉ có một cặp số duy nhất (r, φ) nghĩa là toạ độ độc cực cũng có sự tương ứng 1 - 1 như toạ độ Descartes, (trừ điểm O).

Người ta cũng mở rộng xét $-\infty < r < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$ bằng cách xác định điểm $M(r, \varphi)$ như sau:

Vẽ trục Ou làm với Ox 1 góc φ, trên trục Ou lấy điểm M sao cho $r = \overline{OM}$

Khi đó r, φ gọi là toạ độ độc cực mở rộng của điểm M. Ta thấy mỗi cặp (r, φ) xác định một điểm M. Nhưng ngược lại thì một điểm M ứng với vô số cặp $(r, \varphi + 2k\pi)(-r, \varphi+\pi +2k\pi)$, nghĩa là tọa độ độc cực mở rộng không có sự tương ứng 1 - 1.

Bây giờ xét hệ toạ độ Descartes vuông góc Oxy trong đó Ox xét là trục cực.

Giả sử x, y là toạ độ Descartes của M và r, φ là toạ độ độc cực của nó, ta có các công thức liên hệ.

$$x = r\cos\varphi,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Trong hệ tọa đô độc cực, xét hàm số $r = f(\varphi)^{(1)}$ giả sử đồ thị của nó là đường C, người ta cũng gọi (1) là phương trình độc cực của C.

Theo các công thức liên hệ trên, từ phương trình độc cực của C có thể đưa về phương trình dạng $F(x,y) = 0$ của nó và ngược lại.

Thí dụ:

1) Xét đường trong: $x^2 + y^2 = R^2$

Thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ta có:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi = R^2$$

hay $r = R$, đó là phương trình độc cực của đường tròn đó.

2) Xét hàm số $r = 2R\cos\varphi$ $(R > 0)$

Thay $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Ta có : $\sqrt{x^2 + y^2} = 2R\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

hay $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$, đây là phương trình đường tròn tâm (R, O) bán kính R. Vậy $r = 2R\cos\varphi$ có là phương trình độc cực của đường tròn đó.

5.2. Khảo sát và vẽ đồ thị:

Để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $r = f(\varphi)$ ta có thể đưa về hàm số dạng $y = y(x)$ hoặc đưa về hàm số cho theo tham số với tham số φ.

$x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi$

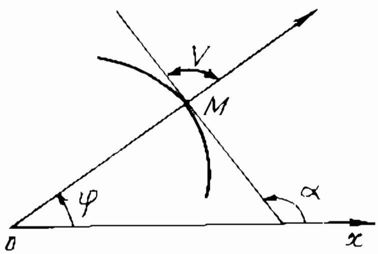
$y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$

Trong thực tế một số đường đặc biệt, có thể xét trực tiếp từng điểm đặc biệt và tiếp tuyến với đường tại điểm đó. Để dựng tiếp tuyến với đường tại điểm M ta sẽ tính góc V giữa bán kính vecteur OM và tiếp tuyến đó.

Theo hình vẽ (Hình 40) ta có $\alpha = \varphi + v$

Do đó:

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\varphi + v) = \frac{\mathrm{tg}\varphi + \mathrm{tg}v}{(1 - \mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}v)} \qquad (1)$$



Hình 40

Mặt khác: $\mathrm{tg}\alpha = y'_x = \dfrac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$

hay: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{tg\varphi + \dfrac{r}{r'}}{1 - \dfrac{r}{r'}tg\varphi}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có : $\operatorname{tg}v = \dfrac{r}{r'}$

Thí dụ: 1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

$$r = 2a(1 + \cos\varphi) \qquad (a > 0)$$

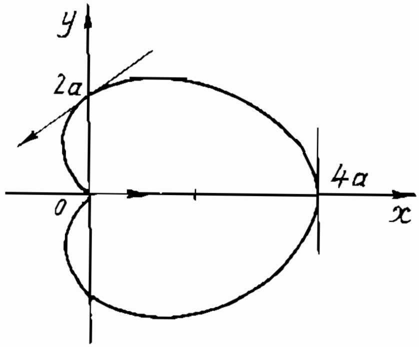
Chu kỳ của r đối với φ là 2π nên chỉ xét $-\pi \le \varphi \le \pi$. Mặt khác thay φ bởi -φ thì r không đổi do đó đồ thị đối xứng qua Ox, nên lại chỉ xét $0 \le \varphi \le \pi$

$$\operatorname{tg}v = \frac{r}{r'} = \frac{2a(1+\cos\varphi)}{-2a\sin\varphi} = \frac{-2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}} = -\cot g\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Suy ra : $v = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\varphi}{2}$

Ta lập bảng sau:

φ	0	π/2	π
r	4a ↘	2a ↘	0
v	π/2	3π/4	π



Hình 41

Căn cứ vào bảng này ta vẽ được đồ thị của hàm số như hình vẽ (Hình 41)

Đồ thị gọi là đường Cardioide

2) Xét $r = a\varphi$ $(a > 0)$

Thay φ bởi -φ thì r thành $-r$, do đó đồ thị của hàm số đối xứng qua Oy, ta chỉ xét $0 \le \varphi \le +\infty$

φ	0	π/2	π	3π/2	2π ...
r	0 ↗	$a\pi/2$ ↗	$a\pi$ ↗	$a3\pi/2$ ↗	$a2\pi$ ...

Đồ thị gọi là đường xoắn ốc Archimede (Hình 42)

3) Xét $r = ae^{b\varphi}$ $(a, b > 0)$

r xác định với mọi φ

Ta lập bảng:

φ	$-\infty$		0		$+\infty$
r	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

$$\operatorname{tg}v = \frac{r}{r'} = \frac{ae^{b\varphi}}{abe^{b\varphi}} = \frac{1}{b}$$

Đồ thị gọi là đường xoắn ốc logarithme (Hình 43)

4) Xét $r = \dfrac{a}{\varphi}$ $(a > 0)$ r xác định với mọi φ, trừ $\varphi = 0$ thay φ bởi $-\varphi$ thì r thành $-r$, do đó đồ thị của hàm số đối xứng qua Oy nên ta chỉ xét $0 < \varphi < +\infty$, khi $\varphi \to 0$ thì $r \to +\infty$. Do đó đồ thị có thể có tiệm cận.

Rõ ràng tiệm cận nếu có thì nó phải song song với Ox và nó phải cách trục Ox một đoạn.

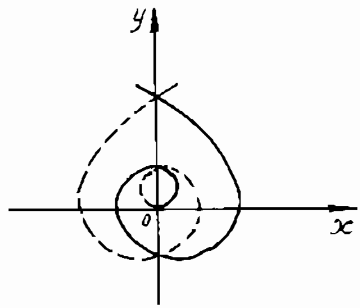
$d = \lim\limits_{\varphi \to 0} \overline{OH}$ (Hình 44)

nhưng $\overline{OH} = r\sin\varphi = \dfrac{a}{\varphi}\sin\varphi$

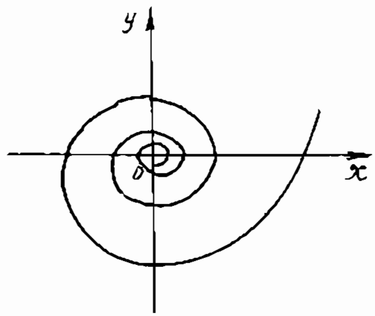
Do đó

$$d = \lim_{\varphi \to 0} \overline{OH} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{a.\sin\varphi}{\varphi} = a$$

Vậy đồ thị có tiệm cận cách trục Ox một đoạn $d = a$



Hình 42



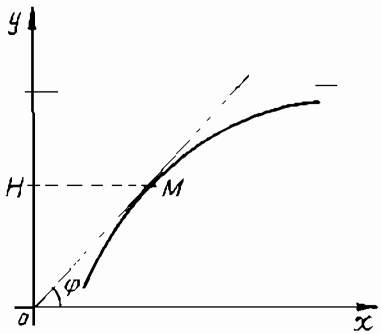
Hình 43

Lập bảng

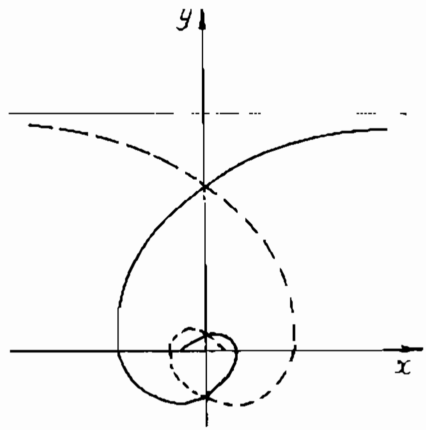
φ	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
r	∞	$\searrow$	$2a/\pi$	$\searrow$	a/π	$\searrow$	$2a/3\pi$	$\searrow$	$a/2\pi$

Đồ thị của hàm số gọi là đường xoắn ốc hyperbole (Hình 45)

Chú ý: Chiều biến thiên trong bảng ở các thí dụ trên là theo dấu của đạo hàm r'_φ



Hình 44



Hình 45

BÀI TẬP

1. Nghiệm lại định lý Rolle, đối với các hàm số:

1) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ trong $[1,3]$ tìm c

2) $f(x) = x^2$ trong $[-1,1]$ tìm c

3) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ trong $[-1,1]$

2. Giả sử $f(x)$ có $f'(x)$ hữu hạn trong (a,b) và

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x) = A$$

Chứng minh $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$

3. Giả sử:

1) $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp $n - 1$ trong $[(x_o, x_n)]$

2) $f(x)$ có đạo hàm cấp n trong (x_o, x_n)

3) $f(x_o) = f(x_1) = ... = f(x_n)$, $(x_o < x_1 < ... < x_n)$

Chứng minh $\exists c \in (x_o, x_n) : f^{(n)}(c) = 0$

*4. Chứng minh đa thức Lagrange:

$P_n(x) = \dfrac{1.d^n}{2^n n! dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right]$ có mọi nghiệm đều thực và bao gồm trong $(-1, 1)$.

5. Nghiệm lại định lý Lagrange đối với các hàm số

1) $f(x) = x(x - 1)$ trong $[0, 1]$

2) $f(x) = x(x - 1)$ trong $[1, 2]$

3) $f(x) = \sin x + 2x$ trong $[0, \pi]$

Chứng minh rằng chỉ tồn tại 1 điểm c trong mọi trường hợp.

6. Chứng minh:

1) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$

2) $|\mathrm{arctg}a - \mathrm{arctg}b| \le |a - b|$

3) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$ $\qquad 0 < b < a$

7. Nghiệm lại định lý Cauchy đối với các hàm số:

$f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ trong $[-1, 1]$

8. Hàm số $f(x)$ khả vi trong (x_1, x_2); $x_1, x_2 > 0$

Chứng minh:

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c) \qquad x_1 < c < x_2$$

9. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

1) $y = 3x^2 - x^3$	2) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$
3) $y = x^2 - \ln x^2$	4) $y = x + \sin x$
5) $y = 2\sin x + \cos 2x$,	$0 \le x \le 2\pi$
6) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	7) $y = x.e^{-x}$

10. Đạo hàm của một hàm số đơn điệu có là 1 hàm số đơn điệu không?

Xét thí dụ $f(x) = x + \sin x$

11. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ tăng (giảm) trong $[a,b]$ thì $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) khi $a < x < b$.

12. Chứng minh:

1) $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$

2) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$; $x > 0$

3) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x > 0$

4) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

5) $\dfrac{2}{\pi} < \sin x < x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

6) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$

13. Chứng minh: Nếu $f(x)$, $g(x)$ có $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$

thì $f(x) = g(x) + c$, $\forall x \in (a,b)$

14. Tìm cực trị của hàm số:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

2) $y = x(x-1)^2(x-2)^3$

3) $y = \dfrac{-x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

4) $y = \sqrt{2x - x^2}$

5) $y = x\sqrt[3]{x-1}$

6) $y = xe^{-x}$

7) $y = \sqrt{x}\ln x$

8) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

9) $y = |x|e^{-|x-1|}$

15. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{tg}^4 x - 12\operatorname{tg} x}{\sin 4x - 12\sin x}$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$

7) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$

8) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$

9) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x}$

10) $\lim\limits_{x \to +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$

11) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

12) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(chx)}{\sqrt[m]{chx} - \sqrt[n]{chx}}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

15) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x) e^{\sin x}}$

16. Viết công thức Maclaurin của các hàm số:

1) $f(x) = e^{\sin x}$ đến x^3

2) $f(x) = e^{tgx}$ đến x^3

3) $f(x) = \ln(\cos x)$ đến x^6

4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ đến x^5

5) $f(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)$ đến x^6

17. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right)$

18. Tìm cực trị của các hàm số:

1) $y = \sqrt{(x^2 - 1)^2}$

2) $y = 2\cos \frac{x}{2} + 3\cos \frac{x}{3}$

3) $y = x \ln x$

4) $y = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right)$ khi $x \neq 0$ và $y(0) = 0$

19. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của các hàm số:

1) $y = |x^2 - 3x + 2|$ trong $[-10, 10]$

2) $y = x + \frac{1}{x}$ trong $[0.01;100]$

3) $y = \sqrt{5-4x}$ trong $[-1, 1]$

20. Tìm giá trị lớn nhất của tích các lũy thừa bậc m và n của 2 số dương nếu tổng số của 2 số đó bằng a.

21. Tìm một hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong 1 hình cầu bán kính R.

22. Tìm chiều cao ngắn nhất của 1 cửa tháp ABCD: h = OH sao cho qua cửa ấy có thể đưa vào 1 thanh cứng MN = l, biết bề rộng của tháp là $d < l$.

23. Một liên lạc viên cần đi từ điểm A bên này sông sang điểm B bên kia sông, biết tốc độ đi trên bờ gấp K lần tốc độ đi dưới sông. Liên lạc viên cần băng qua sông dưới một góc bao nhiêu để đến B nhanh nhất. Biết chiều rộng của sông là h và khoảng cách giữa các điểm A, B (dọc theo bờ sông) là d.

24. Tìm các khoảng lồi, lõm, điểm uốn của đồ thị các hàm số

1) $y = 3x^2 - x^3$ 2) $y = \sqrt{1+x^2}$

3) $y = x + \sin x$ 4) $y = \ln(1 + x^2)$

5) $y = x\sin(\ln x)$ $x > 0$ 6) $y = x^x$, $x > 0$

25. Tiệm cận của đồ thị các hàm số:

1) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ 2) $y = \dfrac{x}{x^2-4x+3}$

3) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ 4) $y = \dfrac{x^3}{x^2+9}$

5) $y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$ 6) $y = \dfrac{1}{1-e^x}$

7) $x = t$, $y = t + 2\mathrm{arctg}\,t$

8) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, $(a > 0)$

26. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

1) $y = (x + 1)(x - 2)^2$

2) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$

3) $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$

4) $y = 2x - \operatorname{tg}x$

5) $y = x\operatorname{arctg}x$

6) $y = \ln\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$

27 Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số cho theo tham số:

1) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$

2) $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}$

3) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$

28. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số cho theo toạ độ độc cực.

1) $r = a\sin 3\varphi$ 2) $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

4. Đặt $f(x) = (x^2 - 1)^n = (x - 1)^n(x + 1)^n$

rồi áp dụng định lý Rolle

6. Áp dụng định lý Lagrange để chứng minh.

9. 1) $(-\infty, 0)$; $(2, +\infty)$: Giảm: $(0, 2)$: Tăng

2) $(-\infty, -1)$; $(1, +\infty)$: Giảm; $(-1, 1)$: Tăng

3) $(-\infty, -1)$; $(0, 1)$: Giảm; $(-1, 0)(1, +\infty)$: Tăng

4) $(-\infty, +\infty)$: Tăng

5) $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right);\left(\dfrac{\pi}{2}, 5\dfrac{\pi}{6}\right);\left(3\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right)$: Tăng

$\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right);\left(5\dfrac{\pi}{6}, 3\dfrac{\pi}{2}\right)$: Giảm

6) $(-\infty, +\infty)$: Tăng

7) $(-\infty, 1)$: Tăng, $(1, +\infty)$: Giảm

12. Áp dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh

14. 1) $y_{max} = y(1) = 0$; $y_{min} = y(3) = -4$

2) $y_{min} = y\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right) = y(0{,}23) = -0{,}76$

$y_{min} = y\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right) = y(1{,}43) = -0{,}05$

$y_{max} = y(1) = 0$

3) $y_{min} = y(7) = -\dfrac{17}{16}$

4) $y_{min} = y(0) = y(2) = 0$; $y_{max} = y(1) = 1$

5) $y_{min} = y(3/4) = -0{,}46$; $x = 1$ không có cực trị

6) $y_{max} = y(1) = e^{-1} = 0{,}368$

7) $y_{max} = y(0) = 0$; $y_{min} = y(e^{-2}) = y(0{,}135) = 0{,}726$

8) $y_{max} = y(k\pi) = (-1)^k + 1/2$

$y_{min} = y(\pm 2\pi/3 + 2\pi k) = -3/4$

9) $y_{max} = y(-1) = e^{-2}$

$y_{min} = y(0) = 0$

$y_{max} = y(1) = 1$

15. 1) 2, 2) 3/2; 3) 1/3; 4) 1; 5) 1; 6) 1;

7) $a^a(\ln a - 1)$; 8) $e^{\frac{2}{\pi}}$; 9) $\dfrac{1}{e}$; 10) 1 ; 11) $\dfrac{1}{2}$; 12) $e^{\frac{1}{6}}$; 13) $\dfrac{m.n}{n-m}$

16. 1) $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + R_3(x)$

2) $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + R_3(x)$

3) $-\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{45}x^6 + R_6(x)$

4) $x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + R_5(x)$

5) $-\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{180}x^4 - \dfrac{1}{2835}x^6 + 0(x^6)$

17. 1) $-\dfrac{1}{12}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{1}{3}$

18. 1) $y_{min} = y(-1) = y(1) = 0$

$y_{max} = y(0) = 1$

2) $y_{max} = y(12k\pi) = 5$

$$y_{max} = y\left[12\left(k \pm \frac{2}{5}\right)\pi\right] = 5\cos\frac{2\pi}{5}$$

$y_{min} = y|6(2k + 1)\pi| = 1$

$$y_{min} = y\left[12\left(k \pm \frac{1}{5}\right)\pi\right] = -5\cos\frac{\pi}{5}$$

3) $y_{max} = y(+0) = 0$

$$y_{min} = y(e^{-1}) = -\frac{1}{e}$$

4) $y_{min} = y(0) = 0$

19. 1) 132 ; 0

2) 2 ; 100, 01

3) 1 ; 3

20. $\dfrac{a^{n+m}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$

21. $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$

22. $h = \left(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

23. $\alpha = \max\left(\arccos\left(\frac{1}{k}\right), arctg\left(\frac{h}{a}\right)\right)$

24 1) $(-\infty, 1)$; lõm; $(1, +\infty)$; lồi, $x = 1$ điểm uốn

2) lõm

3) $(2k\pi, (2k+1)\pi)$; lồi; $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi$; lõm

$x = k\pi$: điểm uốn

4) $|x| < 1$, lõm; $|x| > 1$; lồi; $x = \pm 1$; điểm uốn

5) $\left(e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}\right)$; lõm

$\left(e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}\right)$; lồi

$x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$; điểm uốn

6) $(0, +\infty)$; lõm

25. 1) $x = 2, y = 0$

2) $x = 1, x = 3, y = 0$

3) $x = \pm 2, y = 1$

4) $y = x$

5) $x = \pm 1$, $y = \pm x$

6) $x = 0$, $y = 1$, $y = 0$

7) $y = x \pm \pi$

8) $y = -x - a$

26. 1) Đối xứng đối với A(1,2) cắt Ox tại $x = -1$ và $x = 2$,

$y_{min} = y(2) = 0$

$y_{max} = y(0) = 4$; điểm uốn (1,2)

2) $x = 2$ và $x = 3$; điểm gián đoạn cắt Ox tại $x = \pm 1$

$$y_{min} = \left(\frac{7-\sqrt{24}}{5}\right) = -(10 - \sqrt{96}) \text{ hay}$$

$y_{min} = y(0{,}42) = -0{,}20$

$$y_{max} = y\left(\frac{7+\sqrt{24}}{5}\right) = -(10 + \sqrt{96}) \text{ hay}$$

$y_{max} = y(2{,}38) = -19{,}80$

Điểm uốn (-0,58; -0,07); tiệm cận: $x = 2$; $x = 3$; $y = 1$

3) Tuần hoàn, chu kỳ 2π, đồ thị đối xứng qua gốc 0, $y(0) = y(\pi) = 0$,

Trên $[0, \pi)$: $y_{max} = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{(3+4\sqrt{2})}{6}$

$$y_{max} = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$y_{min} = y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Điểm uốn: $x = 0$, $x = \pi$, $x = \arcsin\dfrac{\sqrt{7}-1}{6}$, $x = \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{7}-1}{6}$

4) Tâm đối xứng: $(k\pi, 2k\pi)$ cắt Ox: $x = 0$, $x = 0{,}37\pi$...

$$y_{max} = y\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$$

$$y_{min} = y\left[\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right] = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right)$$

Điểm uốn $(k\pi, 2k\pi)$ tiệm cận $x = \dfrac{2k+1}{2}\pi$

5) Đối xứng qua Oy, cắt Ox: $x = 0$

$y_{min} = y(0) = 0$

Tiệm cận: $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$

6) Miền xác định $x < 1$ và $x > 2$, cắt Oy: (0, ln2), Ox: $\left(\frac{1}{3},0\right)$

$$y_{max} = \left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) = y(-0,72) = 1,12$$

Tiệm cận $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

27. 1) Cắt các trục toạ độ: (0,0) khi $t = 0$;

$(\pm 2\sqrt{3} - 3, 0)$ khi $t = \pm\sqrt{3}$

$(0, -2)$ khi $t = 2$, $x_{max} = x(1) = 1$; $y_{max} = y(1) = 2$

$y_{min} = y(-1) = -2$, lõm khi $t < 1$ và lồi khi $t > 1$

2) Đường cong khép dạng hình tim, đối xứng với trục Ox (đường Cardioide).

3) Đường cong khép đối xứng đối với các trục toạ độ (đường Astroide).

28. 1) Đường cong khép, đối xứng đối với Ox (đường hoa hồng ba cánh)

2) Đường cong khép, đối xứng đối với Ox (đường Lemniscate, hình số 8 nằm ngang).