https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
5 2013
Số 431

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Chúc một mùa thi thắng lợi!

CUỘC THI ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2013

Đợt 1

LTS. Mùa hè này Toán học và Tuổi trẻ xin mời các bạn tham gia ***Cuộc thi*** ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2013. Cuộc thi được chia làm hai đợt, đề thi được đăng lần lượt trên Tạp chí TH&TT các số 431 (tháng 5/2013) và 432 (tháng 6/2013). Đối tượng dự thi là tất cả các bạn yêu thích toán trên cả nước. Bạn hãy gửi lời giải ba bài đố vui Đợt 1 về Tòa soạn trước ngày 31/7/2013 (theo dấu Bưu điện) và lời giải ba bài Đợt 1 sẽ đăng trong TH&TT số 435 (tháng 9/2013).

Bài 1. NĂM DƯƠNG LỊCH ỨNG VỚI QUÝ TỴ

Bạn hãy nêu cách tìm những năm Dương lịch (có ít nhất hai chữ số) tương ứng với năm Quý Tỵ theo ba dấu hiệu sau đây:

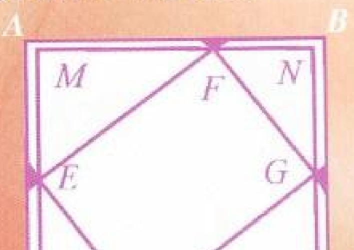
- Chữ số hàng đơn vị.
- Chữ số hàng chục.
- Tổng các chữ số.

Bạn có thể giải thích cách tìm đó không ?

HOÀNG NGUYỄN

Bài 2. GẤP GIẤY LÀM PHONG BÌ

Bạn *Văn* định làm một phong bì bằng một tờ giấy hình chữ nhật *ABCD* với *AB* = 20,8 cm, *AD* = 20 cm. Bạn đó vẽ một hình chữ nhật *MNPQ* bên trong với *MN* = *a* = 20 cm, *MQ* = *b* = 19,2cm, còn phần viền giữa hai hình chữ nhật đó dùng để bôi hồ dán sau khi cắt đi bốn hình tam giác sẫm màu có đỉnh ở *E, F, G, H*, mà các điểm này theo thứ tự nằm trên các cạnh



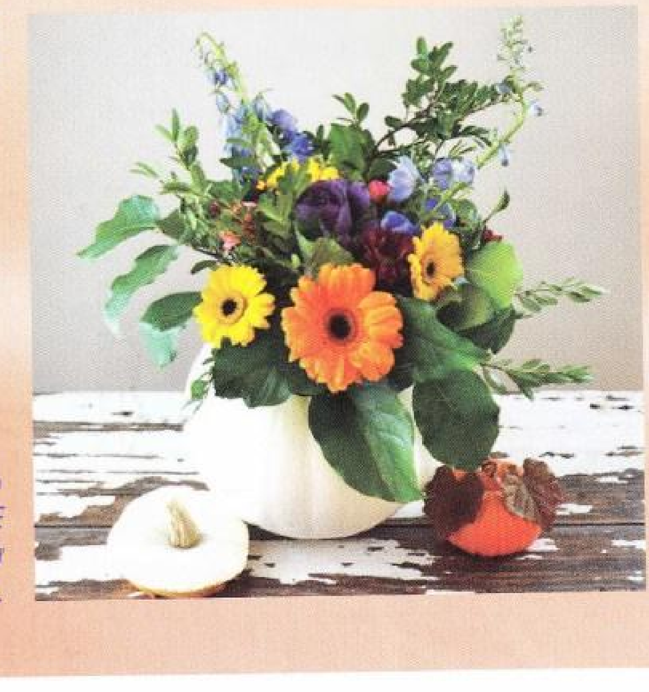
QM, MN, NP, PQ (xem hình vẽ), từ đó có thể gấp các tam giác *MEF, NFG, PGH, QHE* vào phía trong để được phong bì hình chữ nhật *EFGH* sao cho phong bì không bị hở. Bạn hãy giúp bạn *Văn* tìm các điểm *E, F, G, H* bằng cách tính các đoạn thẳng *ME, MF, EF, FG* sao cho diện tích phong bì hình chữ nhật *EFGH* là lớn nhất.

PHI PHI

Bài 3. CẮM HOA MỪNG SINH NHẬT BÁC HỒ

Hai bạn *Thắng* và *Lợi* mang hoa đến lớp nhân ngày mừng sinh nhật Bác Hồ (19/5), trong đó có 1 bông màu đỏ, 9 bông màu vàng, 5 bông màu tím và 9 bông màu hồng. Lần lượt hai bạn *Thắng* và *Lợi* thay nhau cắm một thứ hoa (cùng màu) vào lọ với số lượng tùy ý (từ 1 bông đến hết số bông cùng màu đó). Người nào cắm được bông hoa cuối cùng vào lọ thì người đó sẽ được nhận quà của lớp. Hỏi bạn nào sẽ luôn nhận được quà và chỉ rõ cách cắm của bạn đó như thế nào?

THANH LOAN



https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BẤT BIẾN ĐỂ GIẢI TOÁN SUY LUẬN LOGIC

ĐINH GIA LINH *(Hải Dương)*

Bài toán suy luận logic thường phát biểu dưới dạng toán đố (có lời văn). Để làm dạng toán này không cần nhiều kiến thức phức tạp mà thường đòi hỏi sự tư duy sáng tạo, nhận xét tinh tế.

Ta thường gặp bài toán chỉ rõ trạng thái ban đầu cùng quy luật thay đổi liên tục trạng thái đó và yêu cầu cần phải chỉ ra một điều gì đó về trạng thái cuối cùng của nó. Việc khảo sát toàn bộ sau tất cả các lần thay đổi như vậy là rất phức tạp. Khi đó ta có thể trả lời câu hỏi mà bài toán yêu cầu nhờ tính toán một đại lượng nào đó đặc trưng cho trạng thái của hệ và được đảm bảo qua tất cả các lần thay đổi. Đại lượng đó được gọi là *bất biến* của hệ đã cho. Như vậy trong trạng thái cuối cùng của hệ, giá trị của bất biến vẫn giữ nguyên như trạng thái ban đầu, tức là hệ thống không thể ở trong trạng thái với một giá trị khác với bất biến.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Ta xác định đại lượng ở hai trạng thái: trạng thái ban đầu và trạng thái cuối cùng.
- Khảo sát sự thay đổi của nó qua một số lần thay đổi liên tiếp để phát hiện sự bất biến.

Các bất biến thường gặp là : xét tính chẵn, lẻ, xét tính chia hết của một số nguyên, xét màu sắc của vật cần xét.

2. CÁC THÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** *Cho 100 số tự nhiên đầu tiên, xóa hai số bất kì và thay bằng hiệu bình phương của chúng. Quá trình tiếp tục như vậy. Hỏi có lúc nào trên bảng gồm toàn số 0 hay không ?*

Lời giải. Nhận xét rằng

- Nếu $a \vdots 3$ và $b \vdots 3$ thì $a^2 - b^2 \vdots 3$.
- Nếu $a \not\vdots 3$ và $b \not\vdots 3$ thì $a^2 - b^2 \vdots 3$.

(Vì a^2, b^2 chia 3 đều dư 1).

- Nếu $a \not\vdots 3, b \vdots 3$ hoặc $a \vdots 3, b \not\vdots 3$ thì $a^2 - b^2 \not\vdots 3$.

Như vậy, mỗi lần xóa hai số và thay bằng hiệu bình phương của chúng thì số các số không chia hết cho 3 hoặc giữ nguyên hoặc giảm đi 2 với lần ngay trước đó. Do đó tính chẵn lẻ của số các số không chia hết cho 3 sau mỗi lần xóa không thay đổi. Lúc đầu có $100 - 33 = 67$ số không chia hết cho 3. Do đó sau mỗi lần xóa thì trên bảng luôn còn lại một số lẻ số không chia hết cho 3. Vì vậy không có lúc nào trên bảng gồm toàn số 0 (vì nếu xảy ra thì trên bảng còn lại một số chẵn số chia hết cho 3). ❐

Ở Thí dụ 1, tính bất biến là *số các số không chia hết cho 3 luôn là số lẻ sau mỗi lần xóa.*

★**Thí dụ 2.** *Trên một cái bảng, người ta viết 2012 dấu (+) và 2013 dấu (–). Giả sử mỗi lần ta thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trong bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nếu chúng giống nhau, thay bằng dấu (–) nếu chúng khác nhau. Sau khi thực hiện nhiều lần đến khi trên bảng còn lại một dấu. Hỏi trên bảng còn lại dấu (+) hay dấu (–) ?*

Lời giải. Mỗi lần thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trong bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nếu chúng giống nhau, thay bằng dấu (–) nếu chúng khác nhau thì số dấu (–) được giữ nguyên hoặc giảm đi 2. Vì vậy tính chẵn lẻ của số dấu (–) không thay đổi qua các thao tác. Ban đầu có 2013 dấu (–), tức là số dấu trừ là một số lẻ. Vì vậy cuối cùng còn lại một dấu (số lẻ dấu) thì phải là dấu (–).❐

Ở Thí dụ 2, tính bất biến là *số các dấu (–) còn lại sau mỗi lần xóa luôn là một số lẻ.*

★Thí dụ 3. *Cho dãy số 2, 4, 6, 8, ..., 200 (gồm 100 số nguyên dương chẵn đầu tiên). Sau khi thêm các dấu (+) hoặc (–) vào giữa các số trên một cách tùy ý rồi thực hiện phép tính, bạn Tính được kết quả là 34, bạn Toán được kết quả là – 10. Hỏi bạn nào tính sai ?*

Lời giải. Tổng $S = 2 + 4 + 6 + 200 = \frac{(2+200).100}{2} = 10100$.

Khi thay số a bởi số $-a$ thì tổng S sẽ giảm đi $2a$, mà a là số chẵn nên S giảm đi một bội số của 4. Tổng S ban đầu là số chia hết cho 4, nên kết quả cuối cùng sau khi thay một số dấu (+) thành dấu (–) thì phải là một bội số của 4.

Hai số 34 và –10 đều không là bội số của 4, nên cả hai bạn đều tính sai. ❐

Ở Thí dụ 3, tính bất biến là kết quả của *tổng các số luôn là bội số của* 4.

★Thí dụ 4. *Trong dãy số 13576193923..., bắt đầu từ chữ số thứ năm, mỗi chữ số bằng chữ số hàng đơn vị của tổng bốn chữ số đứng ngay trước nó. Hỏi trong dãy này có chứa cụm chữ số 1234 và 6789 không?*

Lời giải. Nhận thấy tổng của 4 chữ số lẻ là một số chẵn, tổng của 3 chữ số lẻ và 1 chữ số chẵn là một số lẻ.

Ta cần tìm quy luật chẵn lẻ (bất biến) của các chữ số trong dãy đã cho bằng cách:

Ta thay mỗi chữ số của dãy đã cho bằng số 0 nếu nó là chữ số chẵn và bằng số 1 nếu nó là chữ số lẻ. Khi đó ta nhận được dãy số 111101111011110..., trong dãy này cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau một chữ số 0 là bốn chữ số 1 (tính bất biến). Nhận thấy các dãy 1234 và 6789 ứng với các dãy bốn chữ số 1010 và 0101 nên không thể có mặt trong dãy số trên. ❐

★Thí dụ 5. *Trên bàn cờ kích thước 7× 7 ô vuông, mỗi ô có một quân cờ. Cùng một lúc, người ta thực hiện chuyển tất cả các quân cờ sang ô bên cạnh (ngang hoặc dọc). Khẳng định rằng tồn tại một cách chuyển để mỗi quân cờ vẫn ở một ô có đúng không?*

Lời giải. Trên bàn cờ, ta tô màu đen và trắng xen kẽ nhau sao cho mỗi ô có một màu và hai ô liền nhau (tức là hai ô có chung một cạnh) có màu khác nhau. Tổng số các ô trên bàn cờ: 7×7 = 49 là số lẻ, nên số ô đen và số ô trắng không bằng nhau. Giả sử số ô đen nhiều hơn. Khi đó số quân cờ ở ô đen nhiều hơn số quân cờ ở ô trắng. Sau khi chuyển chỗ mỗi quân cờ sang ô bên cạnh thì các quân cờ ở ô đen sẽ được chuyển sang ô trắng, các quân cờ ở ô trắng sẽ được chuyển sang ô đen. Do đó sẽ có ít nhất 1 ô đen bị bỏ trống. Vì vậy khẳng định của bài toán là sai. ❐

★Thí dụ 6. *Xét bảng 10 × 10 ô vuông. Thực hiện cách tô màu như sau: Mỗi lần tô màu 2 ô cùng hàng hoặc cùng cột liền nhau. Hỏi có thể tô 49 lần như vậy để chỉ còn 2 ô ở hai góc đối diện của bảng được không ?*

Lời giải. Ta ghi các số 1 và 2 vào bảng sao cho hai ô liền nhau được ghi hai số khác nhau (chẳng hạn như hình vẽ), sẽ có 50 số 1 và 50 số 2, hai số ghi ở hai góc đối diện sẽ cùng là số 1 hoặc cùng là số 2.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

Mỗi lần tô màu hai ô cùng hàng hoặc cùng cột liền nhau, tức là tô màu 1 ô ghi số 1, 1 ô ghi số 2. Như vậy, sau mỗi lần tô màu thì số ô chưa tô màu ghi số 1 bằng số ô chưa tô màu ghi số 2. Sau 49 lần tô màu sẽ còn lại hai ô : 1 ô ghi số 1, 1 ô ghi số 2. Hai ô này không thể ở hai góc đối của bảng được. ❐

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

★Thí dụ 7. *Một bảng ô vuông gồm 2013 hàng và 2012 cột. Kí hiệu ô ở hàng thứ m và cột thứ n là (m, n). Người ta tô màu các ô của bảng theo cách sau:*

Lần thứ nhất tô màu 3 ô (r, s), $(r + 1, s + 1)$, $(r + 2, s + 1)$ với $1 \leq r \leq 2011$, $1 \leq s \leq 2011$.

Từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng 3 ô chưa được tô màu liền nhau cùng hàng hoặc cùng cột. Hỏi bằng cách này có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho không?

Lời giải. Ta ghi vào bảng các số tự nhiên theo cách sau: Từ trái sang phải, mỗi hàng ghi lần lượt các tự nhiên từ 1 đến 2012. Như vậy, 3 ô liền nhau trong cùng một hàng sẽ được ghi 3 số tự nhiên liên tiếp, 3 ô liền nhau trong cùng một cột sẽ ghi 3 số tự nhiên giống nhau.

Ở lần tô màu thứ nhất, tổng 3 số ghi ở 3 ô được tô màu là $s + s + 1 + s + 1 = 3s + 2$ $(1 \leq s \leq 2011)$ là một số chia cho 3 dư 2.

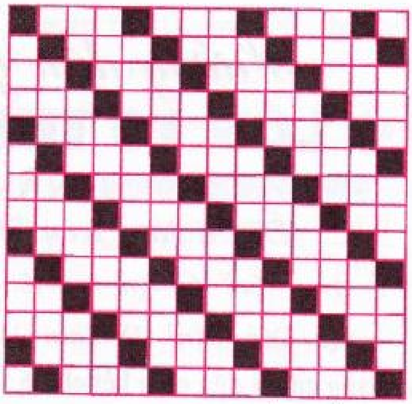
Từ lần tô màu thứ hai trở đi, mỗi lần tô tổng 3 số ghi ở 3 ô được tô màu là một số chia hết cho 3 (vì 3 số ghi trên đó là 3 số tự nhiên liên tiếp hoặc 3 số tự nhiên bằng nhau).

Do đó, sau mỗi lần tô màu theo quy luật trên thì các ô đã được tô có tổng các số ghi trên đó là số chia cho 3 dư 2.

Tổng số các số ghi trên bảng ban đầu là $2013(1 + 2 + \ldots + 2012) = 2103.$ 2103.1006 chia hết cho 3. Vì vậy sau mỗi lần tô màu thì các ô còn lại (chưa tô) có tổng các số ghi trên đó là một số chia cho 3 dư 1 (tính bất biến). Vì vậy bằng mọi cách đều không thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng. ❒

★Thí dụ 8. *Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25cm × 100cm được hay không?*

Lời giải. Chia sân hình vuông cạnh 3,5m thành $14 \times 14 = 196$ hình vuông nhỏ cạnh 25cm. Tô màu đen vào các hình vuông nhỏ của hình vuông như hình vẽ, có 51 ô đen và 145 ô trắng. Mỗi viên gạch 25cm × 100cm được lát lên 1 ô đen và 3 ô trắng.



Giả sử lát kín được sân thì số ô trắng phải gấp 3 lần số ô đen. Nhưng $145 \neq 51 \times 3$ nên không thể lát kín được. ❒

Bằng cách sử dụng tính bất biến, mời các bạn hãy giải các bài toán sau đây.

BÀI TẬP

1. Trên bảng ghi một dãy số gồm 2013 số 1 và 2012 số 2. Ta thực hiện xóa hai số bất kì và thay bằng hiệu của chúng. Quá trình cứ tiếp tục như vậy. Hỏi có lúc nào trên bảng gồm toàn số 0 hay không?

2. Trong dãy số 13597... mỗi chữ số đứng sau bắt đầu từ chữ số thứ tư bằng chữ số hàng đơn vị của tổng ba chữ số đứng ngay trước nó. Hỏi trong dãy này có chứa các dãy 1234 và 5678 không?

3. Có 2013 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách trà đều được lật ngửa lên. Giả sử mỗi lần người ta làm cho 210 tách trong chúng lật ngược lại. Hỏi sau một số lần như vậy có thể làm cho tất cả các tách đều úp xuống được không ? Trả lời câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 2012 tách.

4. Cho bảng ô vuông 2013×2013. Người ta ghi các số tự nhiên từ 1 đến 2013 vào mỗi ô của bảng sao cho các số trên mỗi cột là khác nhau và bảng đối xứng qua đường chéo chính. Chứng minh rằng tất cả các số trên đường chéo đều khác nhau.

5. Có thể lát kín hay không một hình vuông kích thước 10×10 bằng những miếng bìa hình thang cân có đáy nhỏ bằng 1, đáy lớn bằng 3 và góc ở đáy bằng 45^o hay không?

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TP. HÀ NỘI

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đăng trên TH&TT số 430, tháng 4 năm 2013)

Câu I. 1) $A=n^5+5n^3-6n=(n^5-n)+(5n^3-5n)$

$$=n(n-1)(n+1)(n^2+1)-5n(n+1)(n-1).$$

Mỗi số hạng của A đều chia hết cho 6 và 5 mà $(5;6)=1$ nên A chia hết cho 30.

2) Do $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3 nên $n(n+1)$ không chia hết cho 3, suy ra n chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow (n+2)\vdots 3$. Do đó

$2n^2+n+8=2(n^2-4)+(n+2)+14$ chia cho 3 dư 2, nên không là số chính phương. (Vì số chính phương chia cho 3 không dư 2).

Câu II. 1) Biến đổi HPT thành

$$\begin{cases}(x-2y)-\dfrac{2}{x}+1=0\\ (x-2y)^2-\left(\dfrac{2}{x}\right)^2+1=0.\end{cases}$$

Đặt $x-2y=u; \dfrac{2}{x}=v$. Ta có $\begin{cases}u-v+1=0\\ u^2-v^2+1=0.\end{cases}$

Tìm được $(u;v)=(0;1)$. Do đó $(x;y)=(2;1)$.

2) Có $(x-y-z)^2+(x+y)^2+z^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)+2(2xy-yz-zx)\ge 0$

$\Rightarrow M=2xy-yz-zx\ge -(x^2+y^2+z^2)=-2012.$

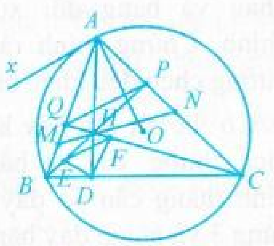
Vậy GTNN của M bằng -2012 khi $(x;y;z)=(\sqrt{1006};-\sqrt{1006};0)$ hoặc $(-\sqrt{1006};\sqrt{1006};0)$.

Câu III. (h.1)

1) Ta có $\widehat{MHB}=\widehat{NHC}(=\widehat{MHQ}), \widehat{HBA}=\widehat{HCA}$.

Do đó $\widehat{AMN}=\widehat{MHB}+\widehat{MBH}=\widehat{NHC}+\widehat{NCH}=\widehat{ANM}$.

Vậy tam giác AMN cân tại A.



Hình 1

2) Kẻ tia tiếp tuyến Ax nên $\widehat{xAB}=\widehat{ACB}$.

Tứ giác $BCPQ$ nội tiếp nên $\widehat{AQP}=\widehat{ACB}$.

Vậy $\widehat{xAB}=\widehat{AQP}$ nên $Ax//QP$, mà $Ax\perp OA$ suy ra $OA\perp PQ$ (1)

Lại có $\widehat{BPQ}=\widehat{BCQ}$ (2)

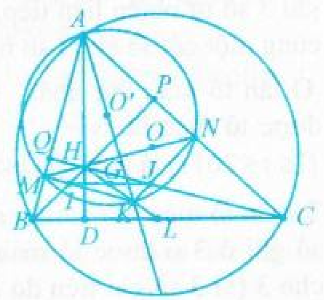
mà $\widehat{BCQ}=\widehat{HDF}$ (cùng phụ với $\widehat{FDC}$) (3)

Tứ giác $DEHF$ nội tiếp nên $\widehat{HDF}=\widehat{HEF}$ (4)

Từ (2), (3) và (4) có $\widehat{BQP}=\widehat{HEF}\Rightarrow QP//EF$ (5)

Từ (1) và (5) suy ra $OA\perp EF$.

3) (h.2). Tam giác AMN cân tại A, phân giác AK là trung trực MN nên AK là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Suy ra



Hình 2

$\widehat{AMK}=\widehat{ANK}=90^o$

$\Rightarrow KM//CQ, KN//BP$,

tứ giác $KIHJ$ là hình bình hành. Do đó HK đi qua trung điểm G của IJ (6)

Ta có $\widehat{KMN}=\widehat{KAN}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=\widehat{MHB}$ nên $IH=IM$, tương tự $JH=JN$. $\Delta BMI \backsim \Delta CNJ$ (g.g) nên

$$\frac{IM}{IB}=\frac{JN}{JC}\Rightarrow\frac{IH}{IB}=\frac{JH}{JC}\Rightarrow IJ//BC \quad (7)$$

Từ (6) và (7) suy ra HK đi qua trung điểm L (cố định) của cạnh BC.

Câu IV. Có $(x+1)(y+z)=xyz+2$ (1)

$\Leftrightarrow x(yz-(y+z))=y+z-2$

a) Nếu $yz-(y+z)=0\Rightarrow(y-1)(z-1)=1\Rightarrow y=z=2$ thay vào (1) không thỏa mãn.

b) Nếu $yz-(y+z)\ne 0$ thì $x=\dfrac{y+z-2}{yz-(y+z)}$ (2)

Do $x, y, z\in\mathbb{N}^*$ nên

$$y+z-2\ge yz-(y+z)\Rightarrow(y-2)(z-2)\le 2.$$

• Nếu $(y-2)(z-2)=0$ thì $y=2$ hoặc $z=2$. Với $y=2$ thì thay vào (2) tìm được $(x;z)=(3;3)$ hoặc $(2;4)$.

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG
NĂM HỌC 2012-2013

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu I. (*2 điểm*)

1) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x-1=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $|x_1-x_2|=2$.

2) Lập phương trình bậc hai nhận $x_1=y_1\sqrt{y_2}+3\sqrt{y_1}$ và $x_2=y_2\sqrt{y_1}+3\sqrt{y_2}$ làm các nghiệm, biết rằng $\{y_1; y_2\}$ là tập nghiệm của phương trình $y^2-7y+1=0$.

Câu II. (*2,5 điểm*)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2=|x|+y \\ y^2=|y|+x. \end{cases}$

2) Giải phương trình

$$x=\sqrt{40-x}.\sqrt{45-x}+\sqrt{45-x}.\sqrt{72-x}+\sqrt{72-x}.\sqrt{40-x}.$$

Câu III. (*2 điểm*)

1) Cho x, y, z, t là bốn số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2+t^2\le 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(x+z)^2+(y-t)^2}+\sqrt{(x-z)^2+(y+t)^2}\le 2.$$

2) Tìm tất cả các số tự nhiên x, y thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2012}$.

Câu IV. (*2,5 điểm*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB. Biết rằng các cặp đường thẳng AB, CD cắt nhau tại E và AD, BC cắt nhau tại F. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại M. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng AB. Hai đường thẳng CH và BD cắt nhau tại N.

1) Chứng minh rằng $\dfrac{DB}{DM}.\dfrac{NM}{NB}=1.$

2) Hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE và CDF cắt nhau tại điểm thứ hai là L. Chứng minh rằng ba điểm E, F, L thẳng hàng.

Câu V. (*1 điểm*)

Cho tam giác ABC không đều, có các cạnh $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Gọi các điểm I và G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu IG và IC vuông góc với nhau thì

$$6ab=(a+b)(a+b+c).$$

NGUYỄN DUY THÁI SƠN (*ĐHSP Đà Nẵng*)
THÁI TRUNG (*Sở GD - ĐT Đà Nẵng*) giới thiệu

Với $z=2$ tìm được $(x; y)=(3; 3)$ hoặc $(2; 4)$.

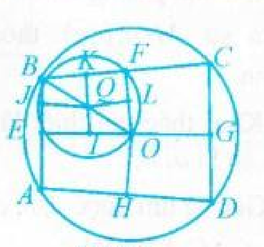
• Nếu $(y-2)(z-2)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=z=1 \text{ th× } x=0 \text{ (lo¹i)} \\ y=z=3 \text{ th× } x=\dfrac{4}{3} \text{ (lo¹i)} \end{array}\right.$

• Nếu $(y-2)(z-2)=2$ thì hoặc $y=4$, $z=3$ $\Rightarrow x=1$ hoặc $y=3$, $z=4 \Rightarrow x=1$.

Vậy PT có sáu nghiệm nguyên dương $(x; y; z)$ là $(3; 2; 3)$; $(3; 3; 2)$; $(2; 2; 4)$; $(2; 4; 2)$; $(1; 3; 4)$ và $(1; 4; 3)$.

Câu V. (h. 3) • Gọi E, F, G, H là hình chiếu của O trên AB, BC, CD, DA. Tứ giác $ABCD$ được chia thành 4 tứ giác nội tiếp đường tròn có đường kính $OA=OB=OC=OD=2$cm.

Theo nguyên tắc Dirichlet, có 17 điểm nằm trong 4 tứ giác nên tồn tại một tứ giác (ví dụ $OEBF$) chứa 5 điểm.



Hình 3

• Lại chia tứ giác $OEBF$ thành 4 tứ giác theo cách trên, ta được 4 tứ giác nội tiếp có đường kính $QB=QF=QO=QE=1$cm. Có 5 điểm nằm trong 4 tứ giác nên tồn tại một tứ giác (ví dụ $QJBK$) chứa 2 điểm. Khoảng cách 2 điểm này không vượt quá đường kính $BQ=1$ cm (đpcm).

VŨ QUỐC LƯƠNG (*Hà Nội*)
(sưu tầm và giới thiệu)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

PHƯƠNG PHÁP TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM TRONG KHÔNG GIAN

NGUYỄN HỮU TRUNG
(GV THPT Thuận Thành Số 2, Bắc Ninh)

Trong các kì thi tốt nghiệp THPT và thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng thường xuất hiện bài toán xác định tọa độ điểm trong không gian thỏa mãn điều kiện cho trước. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu hai cách thường dùng để giải quyết loại toán này.

I. PHƯƠNG PHÁP

Cách 1. *Dùng cho trường hợp điểm cần tìm nằm trên đường thẳng cho trước.*

Giả sử PT đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$

và điểm M thuộc d.

Để tìm tọa độ điểm M ta làm như sau:

• Lập luận: Vì $M\in d$ nên $M(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$.

• Khai thác giả thiết của bài toán để lập phương trình với ẩn t, từ đó tìm t.

• Từ đó suy ra tọa độ điểm M.

Cách 2. *Dùng cho trường hợp điểm cần tìm không nằm trên đường thẳng cho trước, mà thuộc mặt phẳng cho trước.*

Giả sử $M(a;b;c)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

• Khai thác giả thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c.

• Giải hệ tìm được a, b, c, suy ra tọa độ điểm M.

II. CÁC THÍ DỤ

★Thí dụ 1. *Trong không gian với tọa độ Oxyz cho đường thẳng* $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ *và mặt phẳng* $(P):\ 2x+y-2z+9=0$.

a) *Tìm tọa độ giao điểm A của d và (P).*

b) *Tìm tọa độ điểm I thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.*

Lời giải. a) Đường thẳng d có PT tham số $d:\begin{cases}x=1-t\\ y=-3+2t\ (t\in\mathbb{R}).\\ z=3+t\end{cases}$

Do $A\in d$, nên $A(1-t;-3+2t;3+t)$. Lại có $A\in(P)$ nên $2(1-t)+(-3+2t)-2(3+t)+9=0$ $\Leftrightarrow t=1$. Suy ra $M(0;-1;4)$.

b) Vì $I\in d$ nên $I(1-t;-3+2t;3+t)$. Mặt khác

$$d(I,(P))=2\Leftrightarrow\frac{|2+2t|}{3}=2\Leftrightarrow t=-2 \text{ hoặc } t=4.$$

Với $t=-2$ thì $I(3;-7;1)$, với $t=4$ thì $I(-3;5;7)$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn đề bài $I(3;-7;1)$; $I(-3;5;7)$. ❒

★Thí dụ 2. *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho* $A(2;0;1), B(0;-2;3)$ *và mặt phẳng* $(P):\ 2x-y-z+4=0$. *Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho* $MA=MB=3$.

Lời giải. Mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn thẳng AB qua trung điểm $I(1;-1;2)$ của AB, với VTPT $\overrightarrow{IA}=(1;1;-1)$ có PT $x+y-z+2=0$. Giao tuyến d của (P) và (Q) đi qua $K(0;1;3)$, nhận $\vec{n}_{(P)}\wedge\vec{n}_{(Q)}=\vec{u}(2;1;3)$ làm VTCP nên có

PT $d:\begin{cases}x=2t\\ y=1+t\quad(t\in\mathbb{R}).\\ z=3+3t.\end{cases}$

Ta có $M\in(P)$ và $MA=MB$, nên $M\in d$ suy ra $M(2t;1+t;3+3t)$.

Mặt khác $MA=3\Leftrightarrow(2-2t)^2+(1+t)^2+(2+3t)^2=9$ $\Rightarrow t=0$ hoặc $t=-\dfrac{3}{7}$. Vậy có hai điểm thỏa mãn đề bài là $M_1(0;1;3)$; $M_2\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$. ❒

★**Thí dụ 3.** *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng* $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ *và mặt phẳng* $(P): x-2y+z=0$. *Gọi C là giao điểm của* Δ *với (P), M là điểm thuộc* Δ *sao cho* $MC=\sqrt{6}$. *Tính khoảng cách từ M đến (P).*

Lời giải. PT tham số của đường thẳng Δ có dạng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-2-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Từ đó tìm được tọa độ giao điểm $C(-1;-1;-1)$ (Theo cách làm ở Thí dụ 1).

Do $M\in\Delta$ nên $M(1+2t; t; -2-t)$. Mà $MC=\sqrt{6}$ nên

$$(2+2t)^2+(1+t)^2+(1+t)^2=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \Leftrightarrow M_1(1;0;-2) \\ t=-2 \Leftrightarrow M_2(-3;-2;0). \end{array}\right.$$

Vậy $d(M_1,(P))=d(M_2,(P))=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. □

★**Thí dụ 4.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng*

$$d_1: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1},\ d_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

và điểm $A(1;-1;2)$. *Tìm tọa độ các điểm B, C lần lượt thuộc* d_1, d_2 *sao cho đường thẳng BC nằm trong mặt phẳng đi qua A và đường thẳng* d_1, *đồng thời AC = 2AB và điểm B có hoành độ dương.*

Lời giải. Đường thẳng d_1 đi qua $M(0; 1; 1)$ có VTCP $\vec{u}(2;1;1)$. Suy ra $\overrightarrow{AM}=(-1;2;-1)$ và $[\vec{u_1}, \overrightarrow{AM}]=(-3;1;5)$. Vậy PT mặt phẳng (P) qua A và (d_1) có dạng $-3x+y+5z-6=0$.

Vì $C\in(P)$ và $C\in(d_2)$ suy ra $C=d_2\cap(P) \Rightarrow C(-1;3;0)$. Do $B\in d_1$ nên $B(2t;1+t;1+t)$. Ta có $AC=\sqrt{24}, AB=\sqrt{6t^2-2t+6}$. Mặt khác $AC=2AB$ $\Leftrightarrow 6t^2-2t+6=6 \Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=\dfrac{1}{3}$.

- Với $t=0$ thì $B(0;1;1)$ (loại).
- Với $t=\dfrac{1}{3}$ thì $B\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ thỏa mãn.

Vậy $C(-1;3;0)$ và $B\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)$. □

★**Thí dụ 5.** *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng* $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-1}$, *mặt phẳng* $(P): x+y+z-3=0$. *I là giao của d và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với d và* $MI=4\sqrt{14}$.

Lời giải. Do $I=d\cap(P)$ nên tìm được tọa độ $I(1;1;1)$. Gọi $M(a;b;c)$, do $M\in(P)$, $MI\perp d$, $MI=4\sqrt{14}$, khi đó ta có hệ PT

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a-2b-c+2=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224. \end{cases}$$

Giải hệ được $(a;b;c)=(5;9;-11)$ hoặc $(a;b;c)=(-3;-7;13)$. Suy ra $M(5;9;-11)$ hoặc $M(-3;-7;13)$. □

★**Thí dụ 6.** *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm* $A(1;-1;0), B(2;0;-1)$ *và mặt phẳng* (P): $2x+y+z+1=0$. *Tìm tọa độ điểm C trên (P) sao cho mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và tam giác ABC có diện tích bằng* $\sqrt{14}$.

Lời giải. Do $C\in(P)$ nên $C(x;y;-2x-y-1)$. $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1), \overrightarrow{AC}=(x-1;y+1;-2x-y-1), \overrightarrow{n_{(P)}}=(2;1;1)$.

$\overrightarrow{n_{(ABC)}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-2x;x+y+2;-x+y+2)$.

Ta có

$$(ABC)\perp(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(ABC)}}.\overrightarrow{n_{(P)}}=0 \Leftrightarrow y=2x-2 \quad (1)$$

Mặt khác $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+(x+y+z)^2+(-x+y+2)^2}=\sqrt{14}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+(x+y+2)^2+(-x+y+2)^2=56 \quad (2)$$

Giải hệ gồm (1) và (2) tìm được $(x;y)=(2;2)$ hoặc $(x;y)=(-2;-6)$. Vậy có hai điểm thỏa mãn đề bài là $C_1(2;2;-7)$; $C_2(-2;-6;9)$. □

(Xem tiếp trang 10)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 8

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 *điểm*) Cho hàm số

$$y = x^3 - \frac{3}{2}(m-2)x^2 - 3(m-1)x + 1 \quad (1)$$

m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -2$.

b) Tìm $m > 0$ để đồ thị hàm số (1) có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là $y_{CĐ}, y_{CT}$ thỏa mãn $2y_{CĐ} + y_{CT} = 4$.

Câu 2 (1 *điểm*) Giải phương trình

$(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x + 2 = 3(\cos x + \sin x)\sin x.$

Câu 3 (1 *điểm*) Giải bất phương trình

$\frac{1}{2}\log_2(2+x) + \log_{\frac{1}{2}}(4 - \sqrt[4]{18-x}) \le 0.$

Câu 4 (1 *điểm*) Tính tích phân

$$I = \int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{3\sqrt{3+e^x} + 2e^x + 7}\,dx.$$

Câu 5 (1 *điểm*) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 120^o$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 45^o. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BD.

Câu 6 (1 *điểm*) Xét các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \le 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a. (1 *điểm*) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có phương trình đường thẳng AC là $x + 7y - 31 = 0$, hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x+y-8=0$, $d_2: x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết rằng diện tích hình thoi bằng 75(đvdt) và đỉnh A có hoành độ âm.

Câu 8a. (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+4}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+7}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(-1;2;0)$, vuông góc với d_1 và tạo với d_2 góc 60^o.

Câu 9a. (1 *điểm*) Tìm hệ số của x^7 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $4C_{n+1}^3 + 2C_n^2 = A_n^3$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b. (1 *điểm*) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x - y - 2 = 0$ và $d_2: x + 2y - 2 = 0$. Giả sử d_1 cắt d_2 tại I. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(-1;1)$, cắt d_1 và d_2 tương ứng tại A, B sao cho $AB = 3IA$.

Câu 8b. (1 *điểm*) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $K(1;0;0)$, song song với đường thẳng d đồng thời cách điểm M một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

Câu 9b. (1 *điểm*) Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm ba chữ số đôi một khác nhau thuộc tập E. Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5.

LÊ XUÂN SƠN, TỪ ĐỨC THẢO

(*GV THPT chuyên ĐH Vinh*) giới thiệu

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

Câu 1. 1) (Bạn đọc tự giải).

2) $y'=3mx^2-6mx+2m+1$. Điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu là $m>3$ hoặc $m<0$. Đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị có phương trình $y=\frac{2}{3}(1-m)x+\frac{10-m}{3}$ và luôn đi qua điểm cố định $A\left(-\frac{1}{2};3\right)$. Gọi H là hình chiếu của M trên d ta có $MH\le MA=\frac{5}{4}$ và $\max MH=\frac{5}{4}$, khi $H\equiv A$.

Câu 2. PT đã cho tương đương với

$$(2\cos x-1)(\cos x+1-\sqrt{3}\sin x)=0.$$

Đáp số. $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 3. PT đã cho tương đương với

$2^{x^2-2x+3}\log_3(x^2-2x+3)=2^{2|x-1|+2}\log_3(2|x-1|+2)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t.\log_3 t$ trên $[2;+\infty)$ có

$$f'(t)=2^t\ln2.\log_3 t+2^t.\frac{1}{t\ln3}>0,\ \forall t\ge2$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến. Do đó $x^2-2x+3=2|x-1|+2$.

Tập nghiệm của PT là $\{-1;1;3\}$.

Câu 4. $I=\int_1^e\frac{\ln x-1}{x^2\left(1-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)}dx$.

Đặt $u=\frac{\ln x}{x}$ ta có $du=\frac{1-\ln x}{x^2}dx$.

Do đó $I=-\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{du}{1-u^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{2}\ln\frac{e-1}{e+1}$.

Câu 5. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Hạ $DH\perp(ABC)$, $HK\perp AB$ và $HM\perp AC$ $\Rightarrow DK\perp AB$, $DM\perp AC$ và $\widehat{KAH}=\frac{\alpha}{2}$.

Ta có $AK=AD\cos\widehat{DAB}=c.\cos\alpha$;

$$AH=\frac{AK}{\cos\widehat{KAH}}=\frac{c.\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\frac{c}{\sin\alpha}(1-\cos\alpha)\sqrt{1+2\cos\alpha}.$$

Vậy $V=\frac{1}{3}DH.S_{ABC}=\frac{1}{6}abc(1-\cos\alpha)\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

Câu 6. Áp dụng BĐT $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ và BĐT Bunyakovsky ta có

$$\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x}\ge\frac{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1})^2}{x+y+z}$$

$$=\frac{6+2(\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+\sqrt{(y^2+1)(z^2+1)}+\sqrt{(z^2+1)(x^2+1)})}{x+y+z}$$

$$\ge\frac{6+4(x+y+z)}{x+y+z}=4+\frac{6}{x+y+z}.$$

Suy ra $P\ge4+\frac{5}{x+y+z}\ge4+\frac{5}{\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}}$

$$=4+\frac{5}{3}=\frac{17}{3}.$$

Vậy GTNN của $P=\frac{17}{3}$ khi $x=y=z=1$.

Câu 7a. 1) Gọi $A(a;2a-2)\in d_1, B(b;-b-3)\in d_2$

Xét trường hợp P nằm ngoài đoạn AB $(\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB})$ và P nằm trong đoạn AB $(\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PB})$ ta được 2 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu là $\Delta_1: 5x-4y-15=0$; $\Delta_2: 7x-2y-21=0$.

Câu 8a. Đoạn AB ngắn nhất khi và chỉ khi AB là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Đáp số. $A(5;-5;2), B\left(\frac{17}{3};-\frac{13}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Câu 9a. Gọi $x=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ $(a_1\neq 0)$.

• Số phần tử của không gian mẫu là $9.A_9^5=136080$.

• Gọi A là biến cố "Số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và chứa 0, 1, 2".

Số khả năng của A: $5.5.4.A_7^3=21000$ (chữ số 0 có 5 cách xếp, chữ số 1 có 5 cách; chữ số 2 có 4 cách và 3 chữ số còn lại có A_7^3 cách).

Vậy $P(A)=\dfrac{21000}{136080}=\dfrac{25}{162}$.

Câu 7b. Vì $M(x_0;y_0)\in(E)$ nên $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$, elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0)$. Khi đó ta có

$$d(F_1,\Delta).d(F_2,\Delta)=\frac{\left|\dfrac{cx_0^2}{a^4}-1\right|}{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}=b^2.$$

Câu 8b. Qua A dựng $d'//d$, chọn $M\in d', M\neq A$ và gọi H, K là hình chiếu của M trên Δ và (α).

Ta có $\widehat{(d,\Delta)}=\widehat{MAH}\Rightarrow\sin\widehat{(d,\Delta)}=\sin\widehat{MAH}=\dfrac{MH}{AM}$.

Vậy $\widehat{(d,\Delta)}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $H\equiv K$ hay Δ chính là đường thẳng AK. Tìm được $K\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. PT Δ: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Câu 9b. Xét hàm số $f(x)=3x-x^3, x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, lập bảng biến thiên ta được

$$0<f(x)\le 2\Leftrightarrow 0<3x-x^3\le 2.$$

Suy ra $\dfrac{2}{3x-x^3}\ge 1$ và $\sin 2x<1$, $\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Từ đó $\sin 2x<1\le\dfrac{2}{3x-x^3}, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

PHƯƠNG PHÁP TÌM TỌA ĐỘ ... *(Tiếp trang 7)*

★**Thí dụ 7.** *Cho mặt cầu (S):*

$$x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$$

và điểm $A(4;4;0)$. Tìm tọa độ điểm B thuộc (S) sao cho tam giác OAB đều.

Lời giải. Giả sử $B(a;\ b;\ c)$, theo giả thiết B thuộc (S) và tam giác OAB đều nên ta được

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2-4a-4b-4c=0\\ OA^2=OB^2\\ OA^2=AB^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2-4a-4b-4c=0\\ a^2+b^2+c^2=32\\ (4-a)^2+(4-b)^2+c^2=32.\end{cases}$$

Giải hệ PT tìm được $(a;b;c)=(0;4;4)$ hoặc $(4;0;4)$. Vậy $B(0;4;4)$ hoặc $B(4;0;4)$. ❒

BÀI TẬP

1. Cho $A(6;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 3;\ 0)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z-6=0.$ Tìm tọa độ điểm C thuộc (P) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

2. Cho mặt phẳng $(P): -x+2y-2z+10=0$, $B(1;2;-1)$ và $C(3;\ 0;\ 5)$. Tìm tọa độ điểm A thuộc (P) sao cho tam giác ABC cân tại A và diện tích tam giác ABC bằng $11\sqrt{2}$.

3. Cho $A(2;-1;1), B(1;0;1), C(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) bằng 1.

4. Cho $A(2;2;0), B(1;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x+2y-z-6=0$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $OC=BC$ và đường thẳng AC vuông góc với (P).

5. Cho $A(5;6;11), B(-1;3;14)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm điểm M trên d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

MỘT SỐ TÍNH CHẤT của TAM GIÁC PARALOGIC

NGUYỄN VĂN LINH
(SV K50 TCNH ĐH Ngoại Thương Hà Nội)

1. MỞ ĐẦU

Cho tam giác ABC. Một đường thẳng d bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng lần lượt qua A_1, B_1, C_1 và vuông góc với BC, CA, AB cắt nhau tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$. Khi đó $A_2B_2C_2$ được gọi là *tam giác paralogic* của tam giác ABC. Dễ thấy rằng ABC cũng là tam giác paralogic của tam giác $A_2B_2C_2$.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ tìm hiểu một số tính chất liên quan đến tam giác paralogic. Để đơn giản, trong bài viết sẽ hạn chế sử dụng góc định hướng, các trường hợp hình vẽ khác bạn đọc chứng minh tương tự.

Kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z.

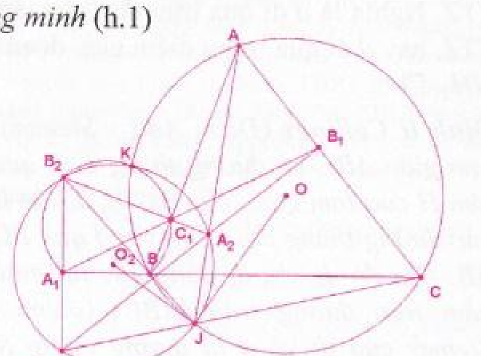
2. MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Tính chất 1. *Hai tam giác ABC và $A_2B_2C_2$ đồng dạng với nhau.*

Bạn đọc tự chứng minh tính chất này.

Tính chất 2. *Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $A_2B_2C_2$ cắt nhau tại hai điểm: một điểm là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCA_1B_1C_1$, một điểm là giao điểm của các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2.*

Chứng minh (h.1)



Hình 1

Gọi K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCA_1B_1C_1$. Ta có $K \in (A_1BC_1)$, mà BB_2 là đường kính của (A_1BC_1) nên $K \in (A_1B_2C_1)$.

Tương tự $K \in (A_2B_1C_1)$, hay K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$. Suy ra $K \in (A_2B_2C_2)$. Gọi $J = AA_2 \cap CC_2$.

Ta có $\widehat{BAJ} = \widehat{C_1AA_2} = \widehat{C_1B_1A_2} = \widehat{A_1B_1C_2} = \widehat{A_1CC_2}$

$= \widehat{BCJ} \Rightarrow J \in (ABC)$. Tương tự có AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại J. Theo tính chất 1 thì $\widehat{BJA} = \widehat{BCA} = \widehat{B_2C_2A_2}$, nên $J \in (A_2B_2C_2)$. ❐

Tính chất 3. *Hai đường tròn (ABC) và $(A_2B_2C_2)$ trực giao với nhau.*

Chứng minh. Gọi O và O_2 lần lượt là tâm các đường tròn (ABC) và $(A_2B_2C_2)$. Ta có $\widehat{OJO_2} = \widehat{OJA} + \widehat{A_2JO_2} = 90^\circ - \widehat{ACJ} + 90^\circ - \widehat{A_2C_2J}$

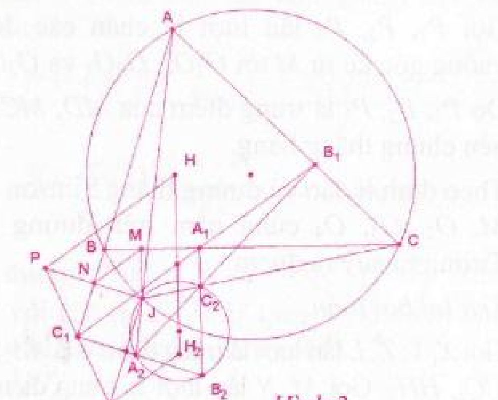
$= 180^\circ - (\widehat{ACJ} + \widehat{A_2C_2J}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Vậy hai đường tròn (ABC) và $(A_2B_2C_2)$ trực giao với nhau (đpcm). ❐

Tính chất 4. (*Định lí Sondat*)

Đường thẳng d chia đôi đoạn thẳng nối trực tâm H và H_2 của tam giác ABC và $A_2B_2C_2$.

Chứng minh. Cách 1(*Jean Louis Ayme*)



Hình 2

Gọi $J = AA_2 \cap CC_2$, M, N lần lượt là hình chiếu của J trên BC, AB (h.2).

Ta có $\widehat{BMN} = \widehat{BJN} = \widehat{BB_2C_1} = \widehat{BA_1C_1}$ nên $MN \parallel d$ hay đường thẳng Simson và đường thẳng Steiner của J ứng với tam giác ABC song song với d.

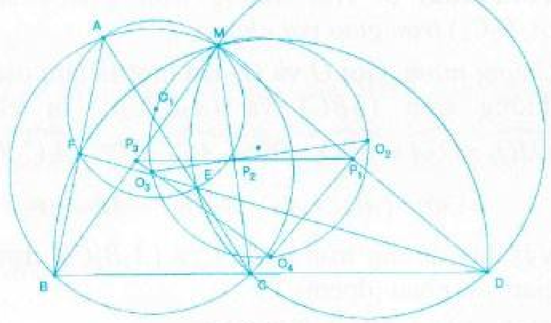
Tương tự, đường thẳng Steiner của J ứng với tam giác $A_2B_2C_2$ song song với d.

Gọi P, Q lần lượt là điểm đối xứng với J qua AB, A_2B_2. Dễ thấy C_1 là trung điểm của PQ. Chú ý rằng d là đường trung bình của hình thang PHH_2Q, nên nó chia đôi đoạn thẳng HH_2.

Cách 2. Ta cần kết quả sau

Bổ đề 1. *Cho tứ giác toàn phần ABCDEF. Khi đó điểm Miquel và tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, CDE, ABC, BDE cùng nằm trên một đường tròn (đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần).*

Chứng minh (h.3)



Hình 3

Gọi O_1, O_2, O_3 và O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, CDE, ABC và BDE.

Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M tới O_2O_4, O_2O_3 và O_3O_4.

Do P_1, P_2, P_3 là trung điểm của MD, MC, MB nên chúng thẳng hàng.

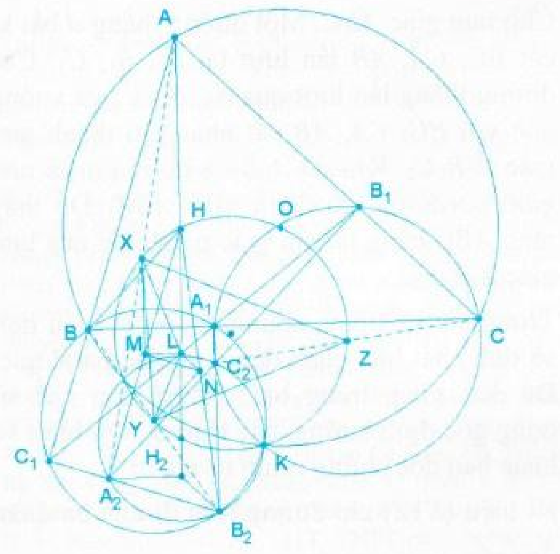
Theo định lí đảo về đường thẳng Simson ta có M, O_2, O_3, O_4 cùng nằm trên đường tròn. Tương tự suy ra đpcm.

Trở lại bài toán.

Gọi X, Y, Z, L lần lượt là trung điểm của AA_2, BB_2, CC_2, HH_2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HA_2, HB_2. Ta có $\Delta A_2H_2B_2 \backsim \Delta AHB$. Do ΔMLN là ảnh của $\Delta A_2H_2B_2$ qua phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$ nên $\Delta MLN \backsim \Delta A_2H_2B_2$.

Ta có $\widehat{XML} = (AH, A_2H_2) = 90^o = (BH, B_2H_2) = \widehat{LNY}$

và $\frac{XM}{LM} = \frac{AH}{A_2H_2} = \frac{BH}{B_2H_2} = \frac{YN}{LN}$ nên $\Delta XML \backsim \Delta YNL$, từ đó $\Delta A_2H_2B_2 \backsim \Delta MLN \backsim \Delta XLY$.



Hình 4

Chứng minh tương tự, $\Delta YLZ \backsim \Delta B_2H_2C_2$, $\Delta ZLX \backsim \Delta C_2H_2A_2$. Suy ra L là trực tâm của tam giác XYZ.

Gọi K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCA_1B_1C_1$. Từ Bổ đề 1 ta có X, Y, Z, K cùng nằm trên một đường tròn. Vì A_1, B_1, C_1 là điểm đối xứng với K qua YZ, ZX, XY nên d là đường thẳng Steiner của K ứng với tam giác XYZ. Nghĩa là d đi qua trực tâm của tam giác XYZ, hay d đi qua trung điểm của đọan thẳng HH_2. □

Định lí Collings *(Điểm Anti - Steiner). Cho tam giác ABC và đường thẳng d đi qua trực tâm H của tam giác. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với d qua BC, CA, AB. Khi đó d_a, d_b, d_c đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn (ABC) (điểm Anti - Steiner của d) và d là đường thẳng Steiner của điểm đó.*

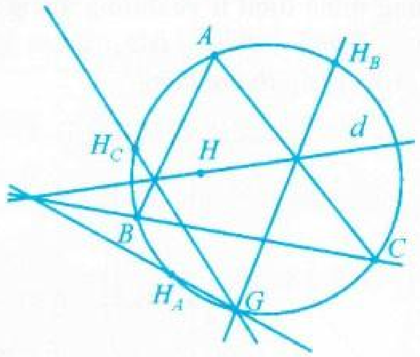
Chứng minh. (h.5)

Gọi H_A, H_B, H_C lần lượt là điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB thì H_A, H_B, H_C cùng nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC và $H_A \in d_a, H_B \in d_b, H_C \in d_c$. Ta có

$(d_a, d_b) \equiv (d_a, BC) + (BC, CA) + (CA, d_b)$

$\equiv (BC, d) + (BC, CA) + (d, CA) \equiv 2(BC, CA)$

$\equiv (CH_A, CH_B) (\bmod \pi)$. Gọi G là giao điểm của d_a, d_b thì $G \in (O)$.



Hình 5

Tương tự, suy ra d_a, d_b, d_c đồng quy tại G. Mặt khác dễ thấy d là đường thẳng Steiner của G (đpcm). ❐

Tính chất 5. *Nếu đường thẳng d đi qua trực tâm H của tam giác ABC thì (ABC) và $(A_2B_2C_2)$ cắt nhau tại điểm Anti-Steiner của đường thẳng d ứng với tam giác ABC.*

Chứng minh

Gọi J là giao điểm của AA_2, BB_2, CC_2.

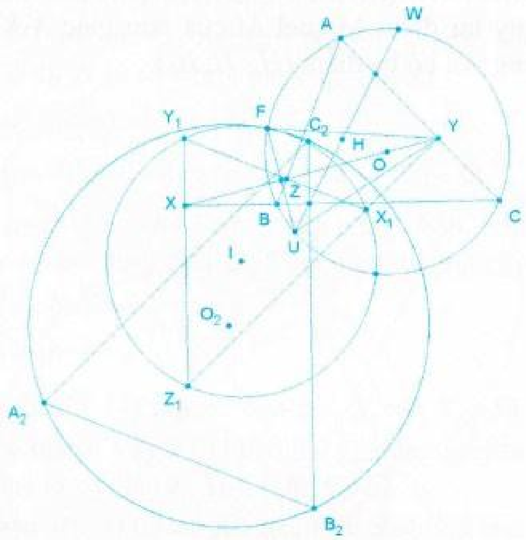
Theo lời giải 1 của tính chất 4 thì đường thẳng Steiner của J ứng với tam giác ABC song song với d. Do đó nếu d đi qua H thì hiển nhiên J là điểm Anti-Steiner của đường thẳng d ứng với tam giác ABC. ❐

Tính chất 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Một đường thẳng d qua H cắt (O) tại hai điểm U, W. Gọi F là điểm Anti-Steiner của tam giác ABC ứng với đường thẳng d. d_1, d_2 lần lượt là trung trực của FU, FW. Khi đó các đường tròn ngoại tiếp tam giác paralogic của tam giác ABC ứng với đường thẳng d, d_1, d_2 tiếp xúc nhau tại F.*

Chứng minh.(h.6)

Gọi $A_2B_2C_2$, $X_1Y_1Z_1$ lần lượt là tam giác paralogic của tam giác ABC ứng với đường thẳng d, d_1. Theo tính chất 5 ta có $(A_2B_2C_2)$ đi qua F. Giả sử d_1 cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z.

Ta có các điểm đối xứng với F qua YZ, AB, AC đều nằm trên d nên theo định lí đảo về đường thẳng Simson thì $F \in (AYZ)$. Nghĩa là F là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCXYZ$. Theo tính chất 2 có $F \in (X_1Y_1Z_1)$.



Hình 6

Từ tính chất 3 ta thu được OF tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(A_2B_2C_2)$ và $(X_1Y_1Z_1)$. Tương tự suy ra đpcm. ❐

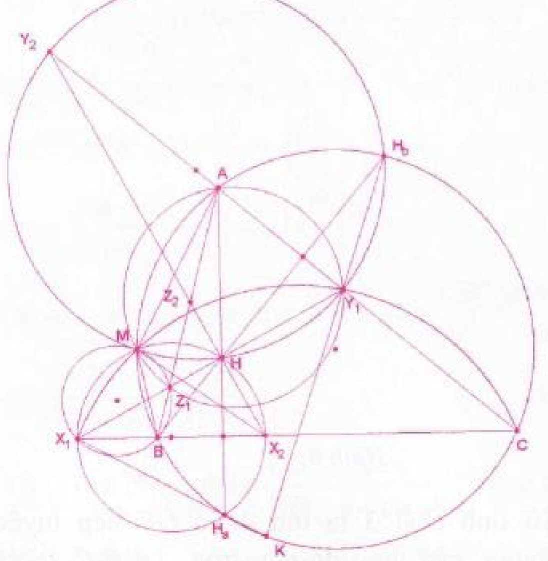
Tính chất 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Hai đường thẳng d_1 và d_2 bất kì vuông góc với nhau và đi qua H. d_1 cắt BC, CA, AB lần lượt tại X_1, Y_1, Z_1. Gọi $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ lần lượt là tam giác paralogic của tam giác ABC ứng với d_1 và d_2. Khi đó các đường tròn $(A_1B_1C_1)$ và $(A_2B_2C_2)$ tiếp xúc nhau tại một điểm nằm trên (O).*

Chứng minh. Ta cần kết quả sau

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với* *trực tâm H. Hai đường thẳng d_1 và d_2 bất kì vuông góc với nhau và đi qua H. d_1 cắt BC, CA, AB lần lượt tại X_1, Y_1, Z_1. Tương tự ta xác định X_2, Y_2, Z_2. Khi đó hai tứ giác toàn phần $ABCX_1Y_1Z_1$ và $ABCX_2Y_2Z_2$ có chung điểm Miquel.*

Chứng minh. (h.7)

Gọi H_a, H_b lần lượt là điểm đối xứng với H qua BC, CA. Suy ra X_1H_a, Y_1H_b cắt nhau tại K điểm Anti-Steiner của tam giác ABC ứng với d_1. Theo tính chất đối xứng có $H_a \in (X_1HX_2)$, $H_b \in (Y_1HY_2)$. Do H_a, H, H_b lần lượt nằm trên các cạnh của tam giác X_1KY_1 nên (HX_1H_a), (H_aKH_b), (H_bY_1H) đồng quy tại điểm Miquel M của tam giác X_1KY_1 ứng với bộ ba điểm (H_a, H, H_b).



Hình 7

Do (X_1HX_2) và (Y_1HY_2) cắt nhau tại M nên M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $X_1Y_1CX_2HY_2$. Từ đó $M \in (X_1CY_1)$. Suy ra hai đường tròn (X_1CY_1) và (ABC) cắt nhau tại M hay M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCX_1Y_1Z_1$. Tương tự ta có đpcm.

Trở lại Tính chất 7. (h. 8)

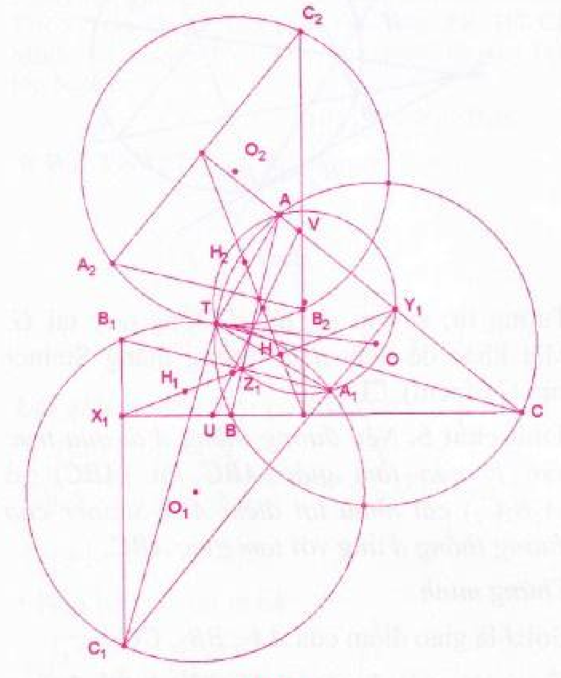
Gọi T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCX_1Y_1Z_1$.

Theo tính chất 2 ta suy ra $T \in (A_1B_1C_1)$.

Áp dụng bổ đề 2 suy ra T cũng là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABC\ X_2Y_2Z_2$. Tương tự ta có T là giao điểm của $(A_1B_1C_1)$ và $(A_2B_2C_2)$.

Theo tính chất 3 ta thu được TO là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(A_1B_1C_1)$ và $(A_2B_2C_2)$. Tức là $(A_1B_1C_1)$ và $(A_2B_2C_2)$ tiếp xúc với nhau tại T. □

Nhận xét. Bổ đề 2 chính là bước quan trọng để chứng minh định lí về đường thẳng *Droz-Farny*: *Trung điểm các đoạn thẳng X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 thẳng hàng.*



Hình 8

Trong bài toán trên, nếu gọi H_1, H_2 lần lượt là trực tâm của các tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thì dựa vào tính chất 4 ta thấy $H_1 \in d_1, H_2 \in d_2$. Đồng thời có thể chứng minh được trung điểm của HH_1 và HH_2 cùng nằm trên đường thẳng *Droz-Farny* của tam giác ABC ứng với hai đường thẳng d_1 và d_2. Những tính chất thú vị này xin nhường lại cho bạn đọc.

Giải đáp DI SẢN VĂN HÓA PHI VẬT THỂ CỦA NHÂN LOẠI TẠI VIỆT NAM

(Đề đăng trên THTT số 427 tháng 1.2013)

ĐÁP ÁN: A1 – B2 – C4   A2 – B1 – C3
A3 – B4 – C6   A4 – B3 – C5
A5 – B6 – C2
A6 – B7 – C1   A7 – B5 – C7

Có thể đổi B4 với B5.

Các bạn sau có lời giải đúng và gửi bài đến sớm:

1. *Cao Đức Anh*, 6D, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**;
2. *Nguyễn Thị Phương Anh*, 11A6, THPT Thanh Liêm A, **Hà Nam**;
3. *Phan Xuân Đức*, 11C4, THPT Nam Đàn 2, **Nghệ An**;
4. *Nguyễn Thanh Thùy Khuyên*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**;
5. *Nguyễn Quang Trọng*, 12A1, THPT Tây Tiền Hải, **Thái Bình**;
6. *Trần Thị Hương Ly*, 11 Hóa, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**;
7. *Lê Ngô Nhật Huy*, 11/3, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre, **Bến Tre**.

AN MINH

CÁC DÂN TỘC Ở VIỆT NAM

Dân số Việt nam tính đến cuối năm 2012 là 88,78 triệu người (theo Tổng cục dân số-kế hoạch hóa gia đình Việt Nam), đứng thứ 14 trên thế giới (xấp xỉ với dân số nước Êtiôpia). Trên đất nước Việt Nam có 54 dân tộc và người nước ngoài sinh sống, trong đó (theo thống kê năm 2009) dân tộc *Kinh* chiếm 85,7% ; 5 dân tộc có từ 1 700 000 người đến 1 000 000 người là: *Tày, Thái, Mường, Khơ me, Hmông* ; 14 dân tộc có từ 990 000 người đến 100 000 người là: *Nùng, Hoa, Dao, Gia rai, Ê đê, Ba na, Xơ đăng, Sán chay, Cơ ho, Chăm, Sán dìu, Hrê, Ra glai, Mnông*; 18 dân tộc có từ 90 000 người đến 10 000 người là: *Xtiêng, Bru Vân kiều, Thổ, Khơ mú, Cơ tu, Giáy, Gié Triêng, Ta ôi, Mạ, Co, Chơ ro, Xinh mun, Hà nhì, Chu ru, Lào, Kháng, La chi, Phù lá*; 16 dân tộc có từ 9 900 người đến 380 người là: *La hủ, La ha, Pà thẻn, Chứt, Lự, Lô lô, Mảng, Cơ lao, Bố y, Cống, Ngái, Si la, Pu péo, Brâu, Rơ măm, Ơ đu.*

Trong ô chữ bên ghi tên các dân tộc và người nước ngoài (viết tắt là NNGOÀI),tên mỗi dân tộc được viết theo hàng (từ trái sang phải) hoặc theo cột (từ trên xuống dưới). Bạn hãy ghi tên mỗi dân tộc mà bạn tìm được theo thứ tự kể trên cùng với tọa độ trong ô chữ, chẳng hạn: *Kinh* **(8 a, b, c, d)**, *Chăm* **(4, 5, 6, 7 c)**.

	a	b	c	d	e	g	h	i	k	m
1	B	R	U	V	Â	N	K	I	Ể	U
2	G	I	É	T	R	I	Ê	N	G	T
3	H	À	N	H	Ì	G	I	Á	Y	H
4	C	O	C	S	Á	N	D	Ì	U	Ổ
5	H	T	H	Á	I	K	H	Ơ	M	Ú
6	Ứ	A	Ă	N	X	T	I	Ê	N	G
7	T	Ô	M	C	Ơ	H	O	Đ	Ô	I
8	K	I	N	H	Đ	H	R	Ê	N	A
9	H	O	A	A	Ă	M	P	B	G	R
10	Ơ	T	À	Y	N	Ô	H	A	M	A
11	M	Ư	Ờ	N	G	N	Ú	N	Ạ	I
12	E	L	Ự	R	A	G	L	A	I	P
13	L	A	H	Ủ	K	H	Á	N	G	À
14	C	H	U	R	U	L	Ô	L	Ô	T
15	L	A	C	H	I	À	B	Ố	Y	H
16	N	C	H	Ơ	R	O	Ơ	Đ	U	Ẻ
17	N	Ố	B	X	I	N	H	M	U	N
18	G	N	R	Ơ	M	Ă	M	Ả	N	G
19	O	G	Â	N	Ù	N	G	Á	I	D
20	À	P	U	P	É	O	S	I	L	A
21	I	C	Ơ	T	U	C	Ơ	L	A	O

VÂN KHANH

CÁC LỚP THCS

Bài T1/431. (Lớp 6) So sánh A và B, biết

$$A=\left(1+\frac{1}{2013}\right)\left(1+\frac{1}{2013^2}\right)...\left(1+\frac{1}{2013^n}\right)$$

với n là số nguyên dương và $B=\frac{2013^2-1}{2012^2-1}$.

CAO VĂN DŨNG

(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài T2/431. (Lớp 7) Trong mặt phẳng cho bốn điểm, trong đó không có hai điểm nào có khoảng cách nhỏ hơn $\sqrt{2}$ cm. Chứng minh rằng trong bốn điểm đó tồn tại hai điểm có khoảng cách lớn hơn hoặc bằng 2 cm.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN

(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T3/431. Tìm hai chữ số tận cùng của số

$$2003^{2004^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}$$

LƯU VĂN NGÂN

(GV THPT chuyên Bắc Ninh)

Bài T4/431. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=27\sqrt{x}+8\sqrt{y}$, trong đó x, y là các số thực không âm thỏa mãn $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=x^2+y^2$.

NGUYỄN TẤT THU

(GV THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa, Đồng Nai)

Bài T5/4310. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng BD là phân giác của góc AIC khi và chỉ khi AC là phân giác góc BJD.

NGUYỄN BÁ ĐANG

(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/431. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3(1-x)+y^3(1-y)=12xy+18\\ |3x-2y+10|+|2x-3y|=10.\end{cases}$$

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T7/431. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $E=a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}$, trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T8/431. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm của tam giác ABC, O là trung điểm của SG. Một mặt phẳng (α) thay đổi qua điểm O và cắt các cạnh SA, SB, SC của hình chóp lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng

$$\frac{SA'^2}{AA'^2}+\frac{SB'^2}{BB'^2}+\frac{SC'^2}{CC'^2}\geq\frac{AA'^2}{SA'^2}+\frac{BB'^2}{SB'^2}+\frac{CC'^2}{SC'^2}.$$

ĐOÀN VĂN SOẠN

(GV THPT Việt Yên, Bắc Giang)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/431. Tìm số tự nhiên n sao cho

$$A=\left[\frac{n+3}{4}\right]+\left[\frac{n+5}{4}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+n^2+3n-1$$

là số nguyên tố, trong đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

BÙI HẢI QUANG

(GV THCS Văn Lang, TP Việt Trì, Phú Thọ)

Bài T10/431. Cho hàm số

$$y=a\sin(x+2013)+\cos 2014x$$

trong đó a là số thực cho trước.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $M^2+m^2\geq 2$.

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Bài T11/431. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=\frac{1}{2}$ và $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}$, $n=1, 2,...$

a) Chứng minh dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Đặt $b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ với mỗi số nguyên dương n. Tìm phần nguyên $[b_n]$ và giới hạn $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T12/431. Cho bốn điểm A, B, C và D cùng nằm trên một đường tròn (ABC). M là một điểm không nằm trên đường tròn này. Gọi T_i là các tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 4 điểm đã cho, trừ điểm i ($i = A, B , C, D$). Gọi H_i theo thứ tự là tam giác có 3 đỉnh là hình chiếu vuông góc của M xuống các cạnh (hoặc cạnh kéo dài) của tam giác T_i ($i = A, B, C, D$). Chứng minh rằng

1) Tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác H_i ($i = A, B, C, D$) cùng nằm trên một đường tròn tâm O'.

2) Khi chỉ D thay đổi trên đường tròn (ABC) thì tâm O' nằm trên một đường tròn cố định.

TRẦN VIỆT HÙNG
(Sở Giáo dục - Đào tạo Sóc Trăng)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/431. Dưới pit tông trong một xi lanh có một mol khí hêli. Người ta đốt nóng chậm khí, khi đó thể tích của khí tăng nhưng tần số va chạm của các nguyên tử vào đáy bình không đổi. Tìm nhiệt dung của khí trong quá trình đó.

NGUYỄN NHẬT HUY
(Hà Nội)

Bài L2/431. Một vật chịu tác động đồng thời của hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ không đổi có độ lớn bằng nhau $F_1 = F_2 = 0,4$N và đang chuyển động tròn đều với vận tốc độ dài $v_0=2$m/s, bán kính quỹ đạo $R = 1$m. Nếu tại một thời điểm nào đó ta ngừng tác dụng lực $\overrightarrow{F_1}$ thì sau thời điểm đó 4s vật có tốc độ bằng bao nhiêu? Biết vật có khối lượng $m = 0,1$ kg.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/431. (For 6th grade) Which number is greater,

$$A=\left(1+\frac{1}{2013}\right)\left(1+\frac{1}{2013^2}\right)...\left(1+\frac{1}{2013^n}\right)$$

where n is a positive integer, or $B=\frac{2013^2-1}{2012^2-1}$?

T2/431. (For 7th grade) Given four points in the plane such that no pair of points has distance less than $\sqrt{2}$ cm. Prove that there exists two of them having a distance greater than or equal to 2 cm.

T3/431. Find the last two digits of the number

$$2003^{2004^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}$$

T4/431. Find the maximum and minimum value of the expression $P=27\sqrt{x}+8\sqrt{y}$, where x, y are non-negative real numbers satisfying $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=x^2+y^2$.

T5/431. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral, inscribed in circle (O). I and J are the midpoints of BD and AC respectively. Prove that BD is the angle bisector of angle AIC if and only if AC is the angle bisector of angle BJD.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/431. Solve the following system of equations $\begin{cases} x^3(1-x)+y^3(1-y)=12xy+18 \\ |3x-2y+10|+|2x-3y|=10. \end{cases}$

T7/431. Determine the greatest value of the expression $E=a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}$, where a, b, c are real numbers satisfying $a+b+c=0$ and $a^2+b^2+c^2=1$.

(Xem tiếp trang 30)

★Bài T1/427. *Cho $a = 123456789$. Hãy so sánh $2012^{9^{9a}}$ và $2012^{a^{a^9}}$.*

Lời giải. Ta có $9^9 = 9.9^8 > 9.80^4 > 9.\ 60^2.10^4 > 9.3600.10^4 > 27.10^7 > a$ nên $a^9 < (9^9)^9 = 9^{81}$ và $a^{a^9} < a^{9^{81}} < (9^9)^{9^{81}} = 9^{9.9^{81}} = 9^{9^{82}}$. Từ đó

$$2013^{a^{a^9}} < 2013^{9^{9^{82}}} < 2012^{9.9^{9^{82}}}$$
$$= 2012^{9^{9^{82}+1}} < 2012^{9^{9^{83}}} < 2012^{9^{9a}}$$

Vậy $2012^{9^{9a}} > 2013^{a^{a^9}}$. ❐

➢Nhận xét. 1) Nhiều bạn nhầm khi viết $k^{m^n} = k^{m.n}$ (?).

Công thức đúng là $(k^m)^n = k^{m.n}$; $k^{m^n} = k^{(m^n)}$ và

$$k^{m.m^n} = k^{m^{(n+1)}}.$$

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Minh Chi*, 6A1, *Nguyễn Việt Anh B*, *Nguyễn Trung Kiên*, 6A5, THCS Yên Lạc; *Đỗ Minh Trung*, *Đoàn Minh Thư*, *Nguyễn Thành Vinh*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên.

VIỆT HẢI

★Bài T2/427. *Cho tam giác ABC ($AB < AC$), với hai đường cao BD, CE. Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BD = h_b$, $CE = h_c$. Chứng minh rằng $c^n + h_c^n < b^n + h_b^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

Lời giải. • *Trường hợp* $\widehat{BAC} \neq 90^o$.

Ta có $ch_c = bh_b$ ($= 2S_{ABC}$) nên $\dfrac{c}{b} = \dfrac{h_b}{h_c}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{c}{b}\right)^n = \left(\dfrac{h_b}{h_c}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó ta có

$\dfrac{c^n}{b^n} = \dfrac{h_b^n}{h_c^n} = \dfrac{c^n - h_b^n}{b^n - h_c^n}$ (do $b > h_c$ nên $b^n > h_c^n$).

Mà $c^n < b^n$ (vì $c < b$) nên $\dfrac{c^n}{b^n} < 1$, suy ra

$$\frac{c^n - h_b^n}{b^n - h_c^n} < 1 \Rightarrow c^n - h_b^n < b^n - h_c^n.$$

Vậy $c^n + h_c^n < b^n + h_b^n$.

• *Trường hợp* $\widehat{BAC} = 90^o$.

Ta có $c = h_b$, $b = h_c$, do đó $c^n + h_c^n = b^n + h_b^n$.

Tóm lại với $AB < AC$ ta có

$$c^n + h_c^n \le b^n + h_b^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^o$.

➢Nhận xét. 1) Bài toán cần bổ sung thêm điều kiện $\widehat{BAC} \neq 90^0$. Đa số các bạn chỉ giải bài toán trong trường hợp $\widehat{BAC} \neq 90^0$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Quảng Ngãi: *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Kim Vang; *Phạm Thị Mỹ Hằng*, *Võ Quang Phú Thời*, *Nguyễn Thúy Phượng*, *Phan Thiên Trang*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Võ Công Phát*, 7C, *Nguyễn Thị Kim Nguyên*, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ; *Nguyễn Vũ Như Ngọc*, 9B, THCS T.T Sông Vệ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/427. *Tìm các số nguyên dương n sao cho $A = \left[\dfrac{n^2 + n - 5}{2}\right]$ là một số nguyên tố, trong đó kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.*

Lời giải. Kí hiệu $\mathcal{P}$ là tập hợp các số nguyên tố. Xét hai trường hợp

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCĐ PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

• *Trường hợp* 1. Nếu $n=2k, k\in\mathbb{N}^*$ thì

$$A=\left[\frac{4k^2+2k-5}{2}\right]$$

$$=[2k^2+k-2{,}5]=2k^2+k-3=(k-1)(2k+3).$$

Vì $2k+3>1$ nên để $A\in\mathcal{P}$, ta phải có

$$\begin{cases}k-1=1\\2k+3=A\in\mathrm{p}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=2\\A=7\in\mathrm{p}\end{cases}\text{ (thỏa mãn).}$$

Suy ra $n=4$.

• *Trường hợp* 2. Nếu $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$ thì

$$A=\left[\frac{(2k+1)^2+2k+1-5}{2}\right]$$

$$=[2k^2+3k-1{,}5]=2k^2+3k-2=(2k-1)(k+2).$$

Vì $2k+3>1$ nên để $A\in\mathcal{P}$, ta phải có

$$\begin{cases}2k-1=1\\k+2=A\in\mathrm{p}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=1\\A=3\in\mathrm{p}\end{cases}\text{ (thỏa mãn).}$$

Suy ra $n=3$.

Vậy để A nguyên tố thì $n=3$ hoặc $n=4$. □

➤**Nhận xét.** Hầu hết các bạn đều làm đúng với cách giải tương tự như trên. Điểm mấu chốt của bài toán là tìm được A, phân tích thành nhân tử rồi dựa vào giả thiết A là số nguyên tố, nên A chỉ có hai ước là 1 và chính nó. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 9A, THCS Lập Thạch; **Phú Thọ**: *Phan Đức Nhật Minh*, 9A, THCS Thị trấn Sông Thao, Cẩm Khê; **Hà Nam**: *Đỗ Đăng Dương*, *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Nghệ An**: *Phan Quang Toàn*, 8C, THCS Đặng Thai Mai, TP.Vinh; *Hồ Xuân Hùng*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa**: *Lê Quang Dũng*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Bình Định**: *Phan Thanh Hào*, 9A1, THCS Bùi Thị Xuân, TP.Quy Nhơn; **TP.Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/427. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}+2=0 \quad (1)$$

Lời giải. Ta có

PT (1) $\Leftrightarrow\sqrt{x+y}+2=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow x+y+4\sqrt{x+y}+4=x+y+2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+y}+2=\sqrt{xy} \quad (2)$$

$$4(x+y)+8\sqrt{x+y}+4=xy \quad (3)$$

Do $x, y\in\mathbb{N}^*$ nên từ (3) suy ra $\sqrt{x+y}\in\mathbb{N}^*$. Từ đó kết hợp với (2) suy ra $\sqrt{xy}\in\mathbb{N}^*$ và $\sqrt{xy}\,\vdots\,2$.

Đặt $\sqrt{xy}=2a\,(a\in\mathbb{N}^*)$ thì (2) có $\sqrt{x+y}=a-1$

Do đó $\begin{cases}xy=4a^2\\x+y=(a-1)^2\end{cases}$

Theo định lí Viète đảo, x, y là nghiệm của phương trình $X^2-(a-1)^2X+4a^2=0$ (4)

Nhận thấy $\Delta=(a-1)^4-16a^2=(a+1)^2(a^2-6a+1)$.

Để PT (4) có hai nghiệm nguyên dương thì $a\ge2$ và Δ là số chính phương. Suy ra

$$a^2-6a+1=b^2\ (b\in\mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow(a-3)^2-b^2=8\Leftrightarrow(a+b-3)(a-b-3)=8.$$

Vì $a+b-3\ge a-b-3$ và chúng cùng chẵn, hơn nữa $a+b-3\ge-1$ (do $a\ge2$) nên chỉ có thể xảy ra $\begin{cases}a+b-3=4\\a-b-3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=1.\end{cases}$

Khi đó PT (4) có hai nghiệm $X_1=9; X_2=16$ (thỏa mãn). Vậy PT (1) có hai nghiệm nguyên dương $(x\,;y)$ là $(9\,;16)$, $(16\,;9)$. □

➤**Nhận xét.** 1) Có thể giải cách khác bằng cách biến đổi PT (1) thành $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-2)=2$ (*)

Từ $\sqrt{xy}$ và $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbb{N}^*$ suy ra $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}\in\mathbb{N}^*$. Thật vậy, đặt $\sqrt{x}+\sqrt{y}=m(m\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow\sqrt{xy}=\sqrt{x}(m-\sqrt{x})$ $\Leftrightarrow\sqrt{xy}+x=m\sqrt{x}$. Do $\sqrt{xy}, x, m\in\mathbb{N}^*$ suy ra $\sqrt{x}\in\mathbb{N}^*$, kết hợp với $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbb{N}^*$ suy ra $\sqrt{y}\in\mathbb{N}^*$. Từ đó $\sqrt{x}-2$ và $\sqrt{y}-2$ là ước số của 2. Từ (*) tìm ra kết quả.

2) Sau khi biến đổi được PT (*), đa số các bạn đã công nhận luôn vì $x,y\in\mathbb{N}^*$ nên $\sqrt{x},\sqrt{y}\in\mathbb{N}^*$ hoặc từ $\sqrt{x}+\sqrt{y},\sqrt{xy}\in\mathbb{N}^*$ suy ra $\sqrt{x},\sqrt{y}\in\mathbb{N}^*$ (không chứng minh). Cách giải như vậy là thiếu chặt chẽ và chính xác.

3) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

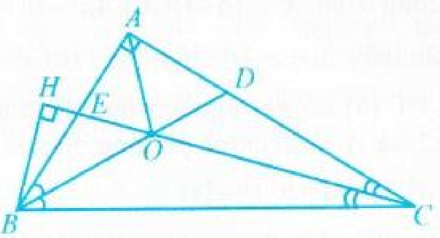
Phú Thọ: *Nguyễn Đức Thuận*, 8A, THCS Lâm Thao; **Hà Nam**: *Đỗ Đăng Dương*, *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Vĩnh Phúc**:

Nguyễn Hữu Huy, 8A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An**: *Nguyễn Tài Thiên*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP.Vinh; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, *Nguyễn Đức Dương*, 9/5, THCS Lê Văn Tám, Quận Bình Thạnh; **Phú Yên**: *Nguyễn Trần Hậu*, 9C, THCS Trần Quốc Toản, TP. Tuy Hòa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/427. *Cho tam giác ABC vuông ở A. Hai đường phân giác BD và CE cắt nhau ở O. Biết số đo diện tích tam giác BOC bằng a. Tính tích BD.CE theo a.*

Lời giải. (hình vẽ)



Đặt $BC = x$, $CA = y$, $AB = z$. Theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{z}{x}$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DA+DC}=\frac{z}{z+x}\Rightarrow DA=\frac{yz}{z+x} \qquad (1)$$

Do AO là phân giác của $\widehat{BAD}$ nên $\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{AB}{DA}$

$$\Rightarrow \frac{OB}{OB+OD}=\frac{AB}{AB+DA} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy $\dfrac{OB}{BD}=\dfrac{x+z}{x+y+z}$. Tương tự $\dfrac{OC}{CE}=\dfrac{x+y}{x+y+z}$. Từ đó $\dfrac{OB.OC}{BD.CE}=\dfrac{(x+y)(x+z)}{(x+y+z)^2}$

$$=\frac{x^2+xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz}$$

$$=\frac{x^2+xy+xz+yz}{2(x^2+xy+xz+yz)}=\frac{1}{2}\ (\text{vì } y^2+z^2=x^2).$$

Vậy $BD.\,CE = 2\,OB.\,OC$ (3)

Để ý rằng nếu kẻ $BH \perp OC$ thì do $\widehat{BOC}=135^{\circ}$, nên tam giác BHO vuông cân tại H. Do đó $S_{BOC}=\dfrac{1}{2}BH.OC=\dfrac{\sqrt{2}}{4}OB.OC$, suy ra

$$OB.OC=2a\sqrt{2} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta tìm được $BD.CE=4a\sqrt{2}$. ❐

➤**Nhận xét.** Hầu hết các lời giải gửi về Tòa soạn đều trình bày tương tự như cách giải trên. Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: *Lê Phúc Anh*, 8B, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Thị trấn Đông Anh; **Vĩnh Phúc**: *Chu Mai Anh*, *Nguyễn Khắc Việt Anh*, *Nguyễn Thị Tú Linh*, *Nguyễn Thị Tâm*, *Nguyễn Thị Thêm*, 8A1, *Trương Thị Hoài Thu*, 9A, THCS Yên Lạc, *Đào Xuân Hiệp*, 9C, THCS Vĩnh Yên; **Phú Thọ**: *Đinh Minh Hà*, *Phạm Anh Quân*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Hà Nam**: *Đỗ Đăng Dương*, *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa**: *Lê Quang Dũng*, 8D, *Nguyễn Hoài Thu*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Hồ Xuân Hùng*, *Nguyễn Anh Tú*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Trần Thị Mỹ Ninh*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Phú Yên**: *Nguyễn Trần Hậu*, 9C, THCS Trần Quốc Toản, TP. Tuy Hòa; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

HỒ QUANG VINH

★Bài T6/427. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2\sqrt[4]{\dfrac{x^4}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}|y| \\ 2\sqrt[4]{\dfrac{y^4}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}|x|. \end{cases}$$

Lời giải. • Nếu $|x| > |y|$ thì ta có

$$2\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4} > 2\sqrt[4]{\frac{y^4}{3}+4} \Leftrightarrow 1+\sqrt{\frac{3}{2}}|y| > 1+\sqrt{\frac{3}{2}}|x|.$$

$\Leftrightarrow |y| > |x|$ (vô lí).

• Nếu $|x| < |y|$ thì ta có

$$2\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4} < 2\sqrt[4]{\frac{y^4}{3}+4} \Leftrightarrow 1+\sqrt{\frac{3}{2}}|y| < 1+\sqrt{\frac{3}{2}}|x|$$

$\Leftrightarrow |y| < |x|$ (vô lí).

Vì vậy $|x| = |y|$ (1)

Thay (1) vào PT thứ nhất của hệ ta được

$$2\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3}{2}}|x|$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{x^4}{3}+4}=1+\frac{3}{2}x^2+2\sqrt{\frac{3}{2}}|x| \qquad (2)$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$4\sqrt{\frac{x^4}{3}+4}=\sqrt{\left(\frac{x^4}{3}+4\right)\left(\frac{6^2}{3}+4\right)}\ge\frac{6x^2}{3}+4=2x^2+4 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $2x^2+4\le 1+\frac{3}{2}x^2+2\sqrt{\frac{3}{2}}|x|$

$\Leftrightarrow(|x|-\sqrt{6})^2\le 0\Leftrightarrow|x|=\sqrt{6}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$.

Vậy hệ PT có các nghiệm $(x; y)$ là $(\sqrt{6};\sqrt{6})$, $(\sqrt{6};-\sqrt{6}),(-\sqrt{6};-\sqrt{6}),(-\sqrt{6};\sqrt{6})$. □

➢**Nhận xét.** Bài này có nhiều bạn tham gia giải. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt và gọn hơn cả:

Phú Thọ: *Nguyễn Hoàng Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hùng Vương; *Vũ Thùy Linh*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Văn Long*, 10A2, THPT Yên Lạc, *Hoàng Quốc Huy*, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 9A, THCS Lập Thạch; **Hưng Yên**: *Nguyễn Xuân Tùng*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; *Trần Bá Trung*, *Nguyễn Long Quy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam**: *Lê Anh Tuấn*, 10A1 K54, THPT chuyên ban Hà Nam; *Đinh Thị Diệu Linh*, 10A1, THPT Lý Nhân; **Hà Nội**: *Ngô Đức Hải*, *Kiều Hoàng Oanh*, 11A1, THPT Quốc Oai; *Mạc Phương Anh*, 10A1 Tin, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh**: *Phạm Huy Hoàn*, 11A1, THPT Nguyễn Đăng Đạo; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Phùng Thanh Dũng*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nam Định**: *Bùi Vũ Việt Hà*, 11A1, THPT Giao Thủy; *Vũ Tuấn Anh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; *Hoàng Minh Tuấn*, 12A2, THPT Lý Tự Trọng, Nam Trực; **Hải Phòng**: *Lương Thế Sơn*, 10 Toán, THPT chuyên Trần Phú; **Hòa Bình**: *Đặng Hữu Hiếu*, 12 Toán, *Lê Đức Việt*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Việt Hà*, *Nguyễn Hữu Đức*, 10 Toán 1, *Nguyễn Hồng Sơn*,11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An**: *Hồ Thị Kiều*, *Phan Trọng Tiến*, 11A1, *Hoàng Xuân Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Trần Văn Hùng*, 10A2, THPT Đô Lương III; **Thanh Hóa**: *Phạm Anh Thư*, 10A1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa; **Đà Nẵng**: *Nguyễn Quang Duy*, 10 A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; *Lê Hiền Tài*, 11/2, THPT Hoàng Hoa Thám, TP. Đà Nẵng; **Bình Định**: *Võ Thế Duy*, 10A1, THPT Số 1 Thị trấn Phù Mỹ; *Nguyễn Tiến Phát*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre**: *Văn Hiếu Thuận*, *Nguyễn Duy Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Ngãi**: *Trần Thị Mỹ Ninh*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Thành Đạt*, 11A8, THPT Cao Lãnh; **Cà Mau**: *Lê Minh Phương*, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN THỊ TRANG

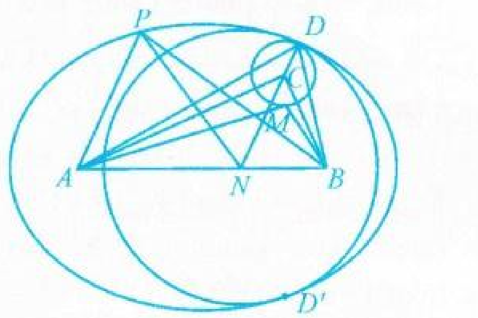
★Bài T7/427. *Cho tam giác ABC có $AB = 9$, $BC = \sqrt{39}$, $CA = \sqrt{201}$. Tìm điểm M thuộc đường tròn $(C;\sqrt{3})$ sao cho tổng $MA + MB$ lớn nhất.*

Lời giải. Gọi N là điểm thuộc đoạn AB sao cho $BN = 3$. Giả sử tia đối của tia CN cắt đường tròn $(C;\sqrt{3})$ tại D. Sử dụng định lí côsin trong các tam giác BCN và ABC ta có

$$CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2BC.BN\cos B$$

$$=BC^2+BN^2-2BC.BN\frac{BC^2+BA^2-CA^2}{2BC.BA}=75.$$

Suy ra $\cos\widehat{CNB}=\frac{CN^2+NB^2-BC^2}{2CN.BN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, do đó $\widehat{CNB}=30^\circ$.



Áp dụng định lí côsin trong các tam giác DBN và DAN ta tính được $DB=3\sqrt{7}$, $DA=6\sqrt{7}$.

Dễ thấy $\frac{DA}{DB}=\frac{NA}{NB}$, suy ra DN là phân giác góc ADB.

Gọi (E) là elip đi qua D và có hai tiêu điểm là A, B. Gọi P là một điểm nằm trên (E) thì $PA+PB=DA+DB=9\sqrt{7}$. Đặt $PA=x$ thì $PB=9\sqrt{7}-x$, ta có $\cos\widehat{PNA}+\cos\widehat{PNB}=0$. Từ định lí côsin cho hai tam giác PAN và PBN suy ra

$$PN^2=\frac{PA^2+2PB^2}{3}-18=\frac{x^2+2(9\sqrt{7}-x)^2}{3}-18$$

$$=\frac{3(x-6\sqrt{7})^2}{3}+108\ge ND^2\Rightarrow PN\ge ND.$$

Vậy đường tròn $(N; ND=6\sqrt{3})$ tiếp xúc trong với (E) tại D và D' (với D' là điểm đối xứng với D qua đường thẳng AB).

Suy ra đường tròn $(C;\sqrt{3})$ tiếp xúc trong với (E) tại D. Hơn nữa, mọi điểm M nằm trong (E) ta đều có $MA + MB \le DA + DB = 9\sqrt{7}$.

Vậy $MA + MB$ lớn nhất bằng $9\sqrt{7}$, khi và chỉ khi M trùng với D. □

➢**Nhận xét.** Có rất ít bạn tham gia giải bài toán này và chỉ có bạn *Đỗ Trọng Đạt*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình** cho kết quả đúng bằng phương pháp toạ độ, tuy nhiên bằng cách này không cho ta cách dựng điểm *M*.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T8/427. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức*

$$\sqrt{\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}$$
$$+\sqrt{\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)}$$
$$+\sqrt{\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)}$$
$$\le 2(\cot A+\cot B+\cot C).$$

Lời giải. Gọi vế trái của BĐT cần chứng minh là M. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với hai số dương cho từng số hạng trong vế trái, ta được

$$M\le 2\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right) \quad (1)$$

Để ý rằng $\sin(A+B)=\sin C>0;\ \cos(A-B)\le 1;$ $\cos(A+B)=-\cos C$, ta có

$$\cot A+\cot B=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{2\sin C}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}$$

$$\ge\frac{2\sin C}{1+\cos C}=\frac{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos^2\frac{C}{2}}=2\tan\frac{C}{2}.$$

Tương tự có $\cot B+\cot C\ge 2\tan\frac{A}{2};$

$\cot C+\cot A\ge 2\tan\frac{B}{2}$. Suy ra

$$2(\cot A+\cot B+\cot C)\ge 2\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$M\le 2(\cot A+\cot B+\cot C)$.

BĐT đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. □

➢**Nhận xét.** Có thể giải bài toán bằng cách đặt $x=\tan\frac{A}{2};\ y=\tan\frac{B}{2};\ z=\tan\frac{C}{2}$ với $x,y,z>0;\ xy+yz+zx=1.$

Khi đó $\cot A=\frac{1-x^2}{2x};\ \cot B=\frac{1-y^2}{2y};\ \cot C=\frac{1-z^2}{2z}$.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Hoàng Quốc Huy*, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Nam Định**: *Trần Phúc Tài*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bắc Ninh**: *Phạm Văn Chinh, Vũ Thị Kim Trung*, 11A9, THPT Yên Phong II; **Hưng Yên**: *Trần Bá Trung*, 11 Toán I, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An**: *Hoàng Xuân Khánh, Trịnh Văn Cương*, 10A1, *Nguyễn Đức Nguyên*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh, *Hà Thị Thúy Nga*, 11A1, THPT Thái Hòa; **Thanh Hóa**: *Trương Văn Cường*, 11A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Bùi Minh Ngọc*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, *Phạm Phương Linh*, 11B1, THPT Hoàng Lệ Kha, Hà Trung; **Bà Rịa-Vũng Tàu**: *Bùi Hoàng Sang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp**: *Trần Huỳnh Trung Hiếu, Nguyễn Thành Thi*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP Cao Lãnh; **Bình Định**: *Võ Thế Duy*, 10A1, THPT Số 1, Thị trấn Phù Mỹ.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T9/427. *Cho* $N = 1+10+10^2+...+10^{4023}$. *Tìm chữ số thứ* 2013 *sau dấu phẩy ở số thập phân của* $\sqrt{N}$ *viết trong hệ cơ số* 10.

Lời giải. (Theo bạn *Phan Đức Nhật Minh*, 9A, THCS Thị trấn Sông Thao, Cẩm Khê, **Phú Thọ**).

Ta chứng minh bài toán tổng quát sau:

Cho $N=\underbrace{1...1}_{2n}$. *Khi đó chữ số thứ* $n+1$ *sau dấu phẩy của* $\sqrt{N}$ *là* 1.

Thật vậy, ta có $9N + 1 = 10^{2n}$ và

$$\left(\underbrace{33...3}_{n},\underbrace{33...31}_{n}\right)^2=\left(\frac{\underbrace{33...31}_{2n}}{10^{n+1}}\right)^2=\frac{(30N+1)^2}{100.10^{2n}}$$

$$=\frac{900N^2+60N+1}{100(9N+1)}<N \quad (1)$$

$$\Big(\underbrace{33...3}_{n},\underbrace{33...3}_{n}2\Big)^2=\left(\frac{\overbrace{33...32}^{2n}}{10^{n+1}}\right)^2=\frac{(30N+2)^2}{100.10^{2n}}$$

$$=\frac{900N^2+120N+4}{100(9N+1)}>N \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\underbrace{33...3}_{n},\underbrace{33...3}_{n}1<\sqrt{N}<\underbrace{33...3}_{n},\underbrace{33...3}_{n}2$$

Thành thử chữ số thứ $n+1$ sau dấu phẩy của $\sqrt{N}$ là 1. Bài toán trên ứng với $n = 2012$. Vậy chữ số thứ 2013 sau dấu phẩy của $\sqrt{N}$ viết trong hệ cơ số 10 là 1. ❒

➢**Nhận xét.** Bài toán có nhiều bạn tham gia giải và tất cả các lời giải đều đúng. Ngoài bạn *Minh*, tuyên dương các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:

Thái Nguyên: *Nguyễn Văn Tuyến*, 11A11, THPT Đồng Hỷ; **Thái Bình**: *Nguyễn Hải Linh Chi*, 11Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Hưng Yên**: *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11A1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ**: *Nguyễn Anh Hào*, 7A1, THCS Lâm Thao; **Nghệ An**: *Lê Hồng Đức*, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Bình Định**: *Huỳnh Văn Nguyên*, 11 N[1] , THPT Số 2, Phù Mỹ.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T10/427. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức* $P=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}$, *trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $\min\{a,b,c\}\geq\frac{1}{4}\max\{a,b,c\}$.

Lời giải. Ta có

$$P=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}=\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-b+b-a}{b}$$

$$=(a-b)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+(b-c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{(a-b)(b-c)}{bc}$$

$$-\frac{(a-b)(b-c)}{ab}=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

Do vai trò của a, b, c trong $|P|$ là như nhau, nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a\geq b\geq c>0$. Từ giả thiết ta có $c\geq\frac{a}{4}$.

Bởi vậy $|P|=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}$

$$\leq\frac{(a-b)\left(b-\frac{a}{4}\right)\left(a-\frac{a}{4}\right)}{ab.\frac{a}{4}}=\frac{3}{4}.\frac{(a-b)(4b-a)}{ab}$$

$$=\frac{3}{4}.\frac{4ab-4b^2-a^2+ab}{ab}=\frac{3}{4}.\frac{ab-(a-2b)^2}{ab}\leq\frac{3}{4}.\frac{ab}{ab}=\frac{3}{4}.$$

- $|P|=\frac{3}{4}$ khi và chỉ khi $b=\frac{a}{2}, c=\frac{a}{4}$.
- $P=\frac{3}{4}$ nếu $b=\frac{a}{2}, c=\frac{a}{4}$.
- $P=-\frac{3}{4}$ nếu $b=\frac{a}{4}, c=\frac{a}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{4}$, giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{3}{4}$. ❒

➢**Nhận xét.** Đây là bài toán bất đẳng thức, giải bằng các phép biến đổi của Lớp 8. Trong các bạn gửi lời giải tới tòa soạn chỉ có một bạn bậc THCS:

Nam Định: *Vũ Đình Tài*, 9A3, THCS Trần Đăng Ninh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T11/427. *Cho dãy hàm số* $\{S_n(x)\}$ *được xác định bởi*

$$S_n(x)=\cos^3 x-\frac{1}{3}\cos^3 3x+\frac{1}{3^2}\cos^3 3^2x-...+\left(\frac{-1}{3}\right)^n\cos^3 3^n x.$$

Tìm tất cả các số thực x sao cho

$$\lim S_n(x)=\frac{3-3x}{4}.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Từ công thức $\cos^3x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$ ta có biến đổi

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^k\cos^3 3^k x=\left(-\frac{1}{3}\right)^k.\frac{1}{4}(\cos 3^k x+\cos 3^{k+1}x)$$

$$=-\frac{3}{4}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\cos 3^{k+1}x-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\cos 3^k x\right).$$

Suy ra $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\cos^3 3^k x$

$$=-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\cos 3^{k+1}x-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\cos 3^{k}x\right)$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\cos x+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\cos 3^{n+1}x\right).$$

Chuyển qua giới hạn và để ý rằng

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\cos 3^{n+1}x=0,$ ta thu được

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{3}{4}\cos x.$$

Xét PT $\frac{3}{4}\cos x=\frac{3-3x}{4}$, hay $x-1+\cos x=0$ (*).

Hàm số $f(x)=x-1+\cos x$ có $f(0)=0$ nên $x=0$ là một nghiệm của PT (*). Ta thấy khi $x<0$ thì $f(x)<0$; khi $x\ge 2$ thì $f(x)>0$. Trong khoảng $(0;2)$, hàm số $f(x)$ liên tục có $f'(x)=1-\sin x>0$ với $x\neq\frac{\pi}{2}$ nên $f(x)$ đồng biến trong khoảng này. Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của PT (*). ❒

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Thái Bình: *Võ Văn Dũng*, 10T2, *Trịnh Thị Thùy Dương*, *Nguyễn Hải Linh Chi*, 11T, THPT chuyên Thái Bình; **Hải Phòng**: *Lương Thế Sơn*, 10T, THPT chuyên Trần Phú; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Mậu Thành*, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hòa Bình**: *Đặng Đức Hiếu*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hưng Yên**: *Nguyễn Thị Việt Hà*, *Nguyễn Trung Hiếu*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Ngãi**: *Phạm Đình Thuyên*, 12T1, THPT Lê Khiết; **Nghệ An**: *Lê Kim Nhã*, *Nguyễn Văn Sơn*, *Phan Tiến Quân*, *Lê Hồng Đức*, *Nguyễn Đức Nguyên*, *Trương Công Phú*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phú Yên**: *Bùi Lê Ngọc Mai*, 11S3, THPT Duy Tân; **Bình Định**: *Huỳnh Mạnh Diễn*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T12/427.** *Cho tứ giác ABCD không nội tiếp. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Gọi A", B", C", D" theo thứ tự là tâm các đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng các tứ giác A'B'C'D', A"B"C"D" lồi và đồng dạng ngược hướng.*

Lời giải. Kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z; các kí hiệu $\uparrow\uparrow$ và $\uparrow\downarrow$ theo thứ tự chỉ sự cùng hướng và sự ngược hướng của hai tam giác; kí hiệu $A, B\,/\,XY$ chỉ hai điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ XY; kí hiệu $A\,/\,XY\,/\,B$ chỉ hai điểm A, B thuộc hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ XY.

Bổ đề 1. Nếu BC, CA, AB theo thứ tự vuông góc với $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ thì các tam giác ABC, $A'B'C'$ đồng dạng cùng hướng.

Bổ đề 2. Với mọi tam giác ABC, ta có

1) $\Delta ABC\uparrow\uparrow\Delta ABC$.

2) $\Delta ABC\uparrow\uparrow\Delta BCA\uparrow\uparrow\Delta CAB$.

3) $\Delta ABC\uparrow\downarrow\Delta ACB$; $\Delta BCA\uparrow\downarrow\Delta BAC$; $\Delta CAB\uparrow\downarrow\Delta CBA$.

Bổ đề 3. Với ba tam giác ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ta có

1) Nếu $\Delta ABC\uparrow\uparrow\Delta A'B'C'$; $\Delta A'B'C'\uparrow\uparrow\Delta A''B''C''$ thì $\Delta ABC\uparrow\uparrow\Delta A''B''C''$.

2) Nếu $\Delta ABC\uparrow\uparrow\Delta A'B'C'$; $\Delta A'B'C'\uparrow\downarrow\Delta A''B''C''$ thì $\Delta ABC\uparrow\downarrow\Delta A''B''C''$.

3) Nếu $\Delta ABC\uparrow\downarrow\Delta A'B'C'$; $\Delta A'B'C'\uparrow\downarrow\Delta A''B''C''$ thì $\Delta ABC\uparrow\uparrow\Delta A''B''C''$.

Bổ đề 4. Nếu hai điểm M, N không thuộc đường thẳng AB thì

1) $M, N\,/\,AB$ khi và chỉ khi $\Delta MAB\uparrow\uparrow\Delta NAB$.

2) $M\,/\,AB\,/\,N$ khi và chỉ khi $\Delta MAB\uparrow\downarrow\Delta NAB$.

Các bổ đề 1, 2, 3, 4 là các kết quả cơ bản về sự định hướng trên mặt phẳng. Tuy nhiên, với cách hiểu về sự định hướng trên mặt phẳng đơn giản như chúng ta đang hiểu (định hướng bằng cái đồng hồ), chúng ta chỉ có thể thừa nhận chứ không thể chứng minh được các bổ đề trên.

Bổ đề 5. Cho tứ giác lồi $ABCD$ không nội tiếp. X, Y, Z, T theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Khi đó tứ giác $XYZT$ lồi.

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Chứng minh

Gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là tâm các đường tròn (BCD), (CDA), (DAB), (ABC); M, N theo thứ tự là trung điểm của CB, CD; P, Q theo thứ tự là giao điểm của MN với AB, AD (h.1).

Dễ thấy XY, YZ, ZT, TX, XZ, YT theo thứ tự vuông góc với CD, DA, AB, BC, BD, AC.

Điều đó có nghĩa là XY, YZ, ZX theo thứ tự vuông góc với CD, DA, BD và XT, TZ, ZX theo thứ tự vuông góc với CB, BA, BD.

Kết hợp với $QN \parallel BD$ và $PM \parallel BD$, ta có XY, YZ, ZX theo thứ tự vuông góc với ND, DQ, QN và XT, TZ, ZX theo thứ tự vuông góc với MB, BP, PM.

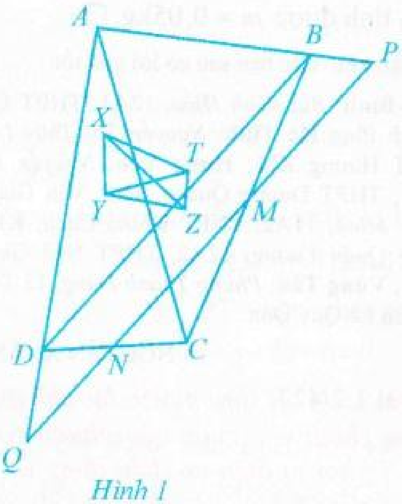
Do đó, theo Bổ đề 1, các cặp tam giác (XYZ, NDQ) và (XTZ, MBP) đồng dạng cùng hướng.

Vậy $\Delta XYZ \upuparrows \Delta NDQ$ và $\Delta XTZ \upuparrows \Delta MBP$ (1)

Mặt khác, theo các Bổ đề 1, 2, chú ý rằng $D / NQ / C$; $Q / CN / M$; $N / CM / P$; $C / MP / B$; theo Bổ đề 4, ta có $\Delta NDQ \uparrow\downarrow \Delta DNQ \uparrow\downarrow \Delta CNQ$

$\upuparrows \Delta QCN \uparrow\downarrow \Delta MCN \upuparrows \Delta NMC \uparrow\downarrow \Delta PMC$

$\upuparrows \Delta CPM \uparrow\downarrow \Delta BPM \upuparrows \Delta MBP$ (2)



Hình 1

Từ (1) và (2), theo Bổ đề 3, suy ra $\Delta XYZ \uparrow\downarrow \Delta XTZ$.

Vậy, theo Bổ đề 4, Y / XZ / T (3)

Tương tự $Y / XZ / T$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $XYZT$ là tứ giác lồi.

Chú ý. Có thể chứng minh không khó khăn rằng các tứ giác $ABCD$, $XYZT$ ngược hướng.

Bổ đề 6. Cho bốn điểm A, B, C, D không có ba điểm nào cùng thuộc một đường thẳng. Khi đó đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC cùng đi qua một điểm.

Bổ đề 6 rất quen thuộc, có thể tìm thấy phép chứng minh của nó ở bài *T9/280*, TH&TT số 280, tháng 10 năm 2000.

Bổ đề 7. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và bốn điểm X, Y, Z, T. Nếu các tam giác XYT, ZYT theo thứ tự đồng dạng cùng hướng (ngược hướng) với các tam giác ABD, CBD thì tứ giác $XYZT$ lồi và đồng dạng cùng hướng (ngược hướng) với tứ giác $ABCD$.

Chứng minh

Trường hợp 1. Các tam giác XYT, ZYT theo thứ tự đồng dạng cùng hướng với các tam giác ABD, CBD. Vì các tam giác ABD, XYT đồng dạng cùng hướng nên tồn tại (duy nhất) phép đồng dạng thuận ***f*** theo thứ tự biến A, B, D thành X, Y, T (5)

Vì các tam giác CBD, ZYT đồng dạng cùng hướng nên $(BD, BC) \equiv (YT, YZ) \pmod{\pi}$;

$(DB, DC) \equiv (TY, TZ) \pmod{\pi}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra ***f*** theo thứ tự biến các đường thẳng BC, DC thành các đường thẳng YZ, TZ.

Do đó ***f*** biến điểm C thành điểm Z (7)

Từ (5) và (7) suy ra tứ giác $XYZT$ lồi và đồng dạng cùng hướng với tứ giác $ABCD$.

Trường hợp 2. Các tam giác XYT, ZYT theo thứ tự đồng dạng ngược hướng với các tam giác ABD, CBD.

Tương tự trường hợp 1.

Trở lại giải bài toán ***T12/427*** (h.2).

Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, AC, DB, AD, BC.

Rõ ràng (SNQ), (NRP), (RMQ), (MSP) chính là đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC.

Theo Bổ đề 5, tứ giác $A'B'C'D'$ lồi (8)

Theo Bổ đề 6, các đường tròn (SNQ), (NRP), (RMQ), (MSP) cùng đi qua một điểm, kí hiệu là E. Ta có $(B"C", B"D") \equiv (ER, EP) (\mathrm{mod}\,\pi)$

(vì $B"C" \perp ER; B"D" \perp EP$)

$\equiv (NR, NP) (\mathrm{mod}\,\pi)$ (vì $N \in (ERP)$)

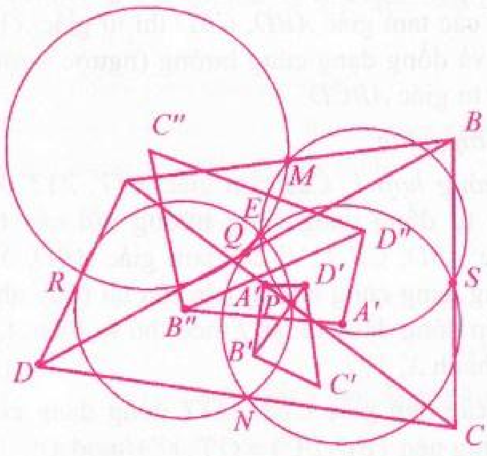
$\equiv (AC, AD) (\mathrm{mod}\,\pi)$

(vì $NR // AC; NP // AD$)

$\equiv (B'D', B'C') (\mathrm{mod}\,\pi)$

(vì $AC \perp B'D'; AD \perp B'C'$)

$\equiv -(B'C', B'D') (\mathrm{mod}\,\pi)$.



Hình 2

Tương tự $(C"D", C"B") \equiv -(C'B', C'D') (\mathrm{mod}\,\pi)$.

Vậy các tam giác $C"B"D"$, $C'B'D'$ đồng dạng ngược hướng (9)

Tương tự các tam giác $A"B"D"$, $A'B'D'$ đồng dạng ngược hướng (10)

Từ (8), (9) và (10), theo Bổ đề 7, suy ra các tứ giác $A'B'C'D'$, $A"B"C"D"$ lồi và đồng dạng ngược hướng (đpcm). ❐

➤**Nhận xét.** Đây là bài toán khó, để giải được nó cần phải có hiểu biết khá sâu sắc về sự định hướng trên mặt phẳng. Toà soạn chỉ nhận được hai lời giải (không thật hoàn chỉnh), đó là:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc**: *Hoàng Đỗ Kiên*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/427. *Một con lắc lò xo (độ cứng của lò xo k = 50N/m) dao động điều hòa trên trục Ox xung quanh vị trí cân bằng O. Cứ sau 0,05s thì vật nặng của con lắc lại cách vị trí cân bằng O một khoảng như cũ. Lấy $\pi^2 = 10$. Hãy xác định khối lượng của vật nặng đó.*

Lời giải. Có thể xảy ra hai trường hợp

• Vị trí cách đều vị trí cân bằng O là những vị trí biên. Khi ấy cứ sau nửa chu kì dao động vật lại cách O một khoảng đúng bằng biên độ dao động. Ta có $\frac{T}{2} = 0,05\text{s} \Rightarrow T = 0,1\text{s}$.

Mà $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, thay số ta tính được $m = 0,0125$ (kg).

• Vị trí cách đều vị trí cân bằng O không phải vị trí biên. Sử dụng mối liên hệ giữa chuyển động tròn đều và dao động điều hòa dễ dàng tìm được các vị trí thỏa mãn đầu bài có tọa độ $x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$. Cứ sau khoảng thời gian $\frac{T}{4}$ thì vật lại cách O một khoảng $\frac{A}{\sqrt{2}}$, ta có

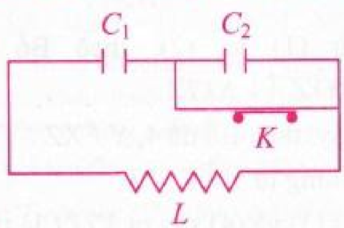
$0,05 = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 0,2\text{s}$. Mà $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, thay số ta tính được $m = 0,05\text{kg}$. ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Thái Bình: *Bùi Đình Hiếu*, 12A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1, THPT Hương Khê; **Hưng Yên**: *Nguyễn Hoài Nam*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; *Hoàng Công Minh*, 11A2, THPT Khoái Châu; **Khánh Hòa**: *Đặng Quân Vương*, 12A2, THPT Ngô Gia Tự, Cam Ranh; **Vũng Tàu**: *Phùng Thanh Dũng*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/427. *Cho mạch dao động điện từ lí tưởng (hình vẽ): cuộn cảm thuần có hệ số tự cảm L; hai tụ điện có điện dung là C_1 và C_2 (với $C_1 < C_2$). Ban đầu khóa K đang đóng, trong mạch có một dao động điện từ tự do. Tại thời điểm*



điện áp giữa hai bản của tụ điện C_1 đạt cực đại bằng U_0 thì ngắt khóa K.

a) *Tìm tỉ số giữa cường độ dòng điện cực đại qua mạch trước và sau khi ngắt khóa K.*

b) *Tại một thời điểm sau khi đã ngắt khóa K, khi mà cường độ dòng điện qua mạch có độ lớn là* $|i| = \dfrac{U_0}{2}\sqrt{\dfrac{C_1C_2}{L(C_1+C_2)}}$ *thì điện tích của tụ điện C_1 có độ lớn bằng bao nhiêu?*

c) *Sau khi ngắt khóa K, tìm độ lớn cường độ dòng điện tại thời điểm điện áp giữa hai bản của tụ điện C_1 bằng 0.*

Lời giải. a) Khi chưa ngắt khóa K, theo định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\frac{LI_{01}^2}{2} = \frac{C_1U_0^2}{2} \Rightarrow I_{01} = U_0\sqrt{\frac{C_1}{L}} \quad (1)$$

Ngay tại thời điểm ngắt khóa K ($t = 0$) thì dòng điện qua mạch bằng 0 nên ta có thể viết

$$i = I_{02}\sin\omega t \quad (2), \text{ với } \omega = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}.$$

Điện tích hai tụ tại thời điểm t sau khi ngắt khóa K lần lượt là q_1 và $q_2 = q_0 - q_1$ (với $q_0 = C_1U_0$). Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có $\dfrac{q_0^2}{2C_1} = \dfrac{Li^2}{2} + \dfrac{q_1^2}{2C_1} + \dfrac{(q_0-q_1)^2}{2C_2}$.

Suy ra

$$Li^2 = -q_1^2\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) + \frac{2q_0q_1}{C_2} + q_0^2\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_2}\right) \quad (3)$$

Từ (3) ta thấy i đạt cực đại I_{02} khi $q_1 = \dfrac{q_0C_1}{C_1+C_2}$, do đó

$$I_{02} = q_0\sqrt{\frac{C_2}{LC_1(C_1+C_2)}} = U_0\sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1+C_2)}} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra

$$\frac{I_{01}}{I_{02}} = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$$

b) Từ (2), (3) và (4) rút ra

$$Li^2 = \frac{q_0^2C_2}{C_1(C_1+C_2)}\sin^2\omega t$$

$$= -q_1^2\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) + \frac{2q_0q_1}{C_2} + q_0^2\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_2}\right)$$

hay ta có phương trình bậc hai ẩn số là q_1

$$q_1^2\frac{(C_1+C_2)}{C_1C_2} - \frac{2q_0}{C_2}q_1 + \frac{q_0^2C_2}{C_1(C_1+C_2)}\sin^2\omega t + q_0^2\frac{(C_1-C_2)}{C_1C_2} = 0.$$

PT này có hai nghiệm

$$q_1 = \left(\frac{q_0}{C_2} \pm \frac{q_0C_2\cos\omega t}{C_1}\right)\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.$$

Từ điều kiện ban đầu khi $t = 0$ thì $q_1 = q_0$, ta có

$$q_1 = \frac{q_0C_1}{C_1+C_2} + \frac{q_0C_2\cos\omega t}{C_1+C_2} \quad (5)$$

và

$$q_2 = q_0 - q_1 = \frac{q_0C_2}{C_1+C_2} - \frac{q_0C_2\cos\omega t}{C_1+C_2} \quad (6)$$

Tại thời điểm

$$|i| = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1+C_2)}} = U_0\sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1+C_2)}}|\sin\omega t|,$$

suy ra $\sin\omega t = \pm\dfrac{1}{2}$ và $\cos\omega t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (7)

Từ (5) và (7) ta tìm được

$$q_1 = \frac{C_1U_0\left(C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2\right)}{C_1+C_2}, \text{ hoặc}$$

$$|q_1| = \left|\frac{C_1U_0\left(C_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2\right)}{C_1+C_2}\right|.$$

c) Khi $u_1 = 0 \Leftrightarrow q_1 = 0$, suy ra $\cos\omega t = -\dfrac{C_1}{C_2}$,

$$\sin^2\omega t = 1 - \frac{C_1^2}{C_2^2} \quad (8)$$

Từ (2), (4) và (8) có $|i| = U_0\sqrt{\dfrac{C_1(C_2-C_1)}{LC_2}}$. □

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nam Định: *Đặng Phúc Cường*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Nhật Hãn*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN VĂN THUẬN

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HÀ NỘI MỞ RỘNG (HOMC) NĂM 2013

THẨM NGỌC KHUÊ *(Hội Toán học Hà Nội)*

Ngày 24/3/2013, Hội Toán học Hà Nội phối hợp với Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội đã tổ chức kì thi HOMC lần thứ X tại ba hội đồng thi cho thí sinh toàn quốc tham dự. Tổng số có 576 thí sinh dự thi với 319 thí sinh lứa tuổi Junior (lớp 8) và 275 thí sinh tuổi Senior (lớp 10). Hội đồng I có 18 tỉnh thành miền Bắc và miền Trung tham sự với 503 thí sinh, thi tại Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. Hội đồng II có 4 tỉnh miền Trung tham dự với 28 thí sinh dự thi, thi tại Trường THPT chuyên Nguyễn Du, Đăk Lăk. Hội đồng III có 7 tỉnh miền Nam tham sự với 45 thí sinh dự thi, thi tại Trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp. Cả ba hội đồng đều có thí sinh ở hai lứa tuổi Junior và Senior.

Kì thi năm nay, số đội Junior đã nhiều hơn. Đây là một tín hiệu đáng mừng. Một số tỉnh lần đầu tiên tham dự HOMC cử cả hai đội tuyển như Nghệ An, Tây Ninh, Đăk Lăk, Bình Thuận.

Kì thi được tiến hành nghiêm túc, an toàn. Tất cả thí sinh đã tới dự thi đúng giờ, làm bài tự tin và rất cố gắng. Sau đây xin giới thiệu đề bài của kì thi HOMC 2013.

Important:

Answer all 15 questions.

Enter your answer on the answer sheet provided. For the multiple choice questions, enter only the letters (A, B, C, D or E) corresponding to the correct answer in the answer sheet. No caculator are allowed.

SENIOR SECTION

Sunday, March 24. 2013 08h30 - 11h30

Q1. How may three-digit perfect squares are there such that if each digit is increased by one, the resulting number is also a perfect square?

(A): 1; (B): 2; (C): 4;

(D): 8; (E): None of the above.

Q2. The smallest value of the function

$$f(x)=|x|+\left|\frac{1-2013x}{2013-x}\right|$$

where $x\in[-1;1]$ is

(A): $\frac{1}{2012}$; (B): $\frac{1}{2013}$; (C): $\frac{1}{2014}$;

(D): $\frac{1}{2015}$; (E): None of the above.

Q3. What is the largest integer not exceeding $8x^2+6x-1$, where $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$?

(A): 1; (B): 2; (C): 3;

(D): 4; (E) None of the above.

Q4. Let $x_0=[\alpha], x_1=[2\alpha]-[\alpha], x_2=[3\alpha]-[2\alpha],$ $x_4=[5\alpha]-[4\alpha], x_5=[6\alpha]-[5\alpha], ...,$

where $\alpha=\frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2014}}$. The value of x_9 is?

(A): 2; (B): 3; (C): 4;

(D): 5; (E) None of the above.

Q5. The number n is called a composite number if it can be written in the form $n=a\times b$ where a, b are positive integers greater than 1.

Write number 2013 in a sum of m composite numbers. What is the largest value of m?

(A): 500; (B): 501; (C): 502;

(D): 503; (E): None of the above.

Q6. Let be given $a\in\{0, 1, 2, 3,..., 1006\}$. Find all $n\in\{0,1, 2, 3,..., 213\}$ such that $C_{2013}^n > C_{2013}^a$,

where $C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!}$.

Q7. Let ABC be an equilateral triangle and a point M inside the triangle such that

$MA^2 = MB^2 + MC^2$. Draw an equilateral triangle ACD where $D \neq B$. Let the point N side ΔACD such that AMN is an equilateral triangle. Determine $\widehat{BMC}$.

Q8. Let $ABCDE$ be a convex pentagon and area of $\Delta ABC =$ area of $\Delta BCD =$ area of $\Delta CDE =$ area of $\Delta DEA =$ area of ΔEAB. Given that area of $\Delta ABCDE = 2$. Evaluate the area of ΔABC.

Q9. A given polynomial $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ has three dictinct real roots. If the equation $(x^2+x+2013)^3 + a(x^2+x+2013)^2 + b(x^2+x+2013) + c = 0$ has no real roots, prove that $P(2013) > \frac{1}{64}$.

Q10. Consider the set of all rectangles with a given area S. Find the largest value of

$$M = \frac{16-p}{p^2+2p}$$

where p is the perimeter of the rectangle.

Q11. The positive numbers a, b, c, d, p, q are such that

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + 4px^3 + 6x^2 + 4qx + 1$

holds for all real numbers x. Find the smallest value of p or the largest value of q.

Q12. The function $f(x) = ax^2 + bx + c$ satisfies the following conditions

$f(\sqrt{2}) = 3$, and $|f(x)| \leq 1$, for all $x \in [-1;1]$. Evaluate the value of $f(\sqrt{2013})$.

Q13. Solve the system of equations

$$\begin{cases} xy = 1 \\ \dfrac{x}{x^4+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^4} = 1. \end{cases}$$

Q14. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^3 + \dfrac{1}{3}y = x^2 + x - \dfrac{4}{3} \\ y^3 + \dfrac{1}{4}z = y^2 + y - \dfrac{5}{4} \\ z^3 + \dfrac{1}{5}x = z^2 + z - \dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

Q15. Denote by $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{N}^*$ the set of all rational and positive integral numbers, respectively. Suppose that $\frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{Q}$ for every $x \in \mathbb{N}^*$. Prove that there exits integers A, B, C, D such that $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{Ax+B}{Cx+D}$ for all $x \in \mathbb{N}^*$.

JUNIOR SECTION

Sunday, March 24. 2013 $14^h00 - 17^h00$

Multiple Choice Questions

Q1. Write 2013 as a sum of m prime numbers. The smallest value of m is

(A): 2; (B): 3; (C): 4;
(D): 1; (E): None of the above.

Q2. How many natural numbers n are there so that $n^2 + 2014$ is a perfect square?

(A): 1; (B): 2; (C): 3;
(D): 4; (E) None of the above.

Q3. The largest integer not exceeding $[(n+1)\alpha] - [n\alpha]$, where n is a natural number, $\alpha = \frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2014}}$, is

(A): 1; (B): 2; (C): 3;
(D): 4; (E): None of the above.

Q4. Let A be an even number but not divisible by 10. The last two digits of A^{20} are

(A): 46; (B): 56; (C): 66;
(D): 76; (E): None of the above.

Q5. The number of integer solutions x of the equation below $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 330$.

is (A): 0; (B): 1; (C): 2;
(D): 3; (E): None of the above.

Short Questions

Q6. Let ABC be triangle with area 1 cm^2. Points D, E and F lie on the sides AB, BC and CA, respectively. Prove that

$\min\{\text{area of } \Delta ADF, \text{area of } \Delta BED, \text{area of } \Delta CEF\} \leq \frac{1}{4}$ cm^2.

Q7. Let ABC be a triangle with $\hat{A}=90^o, \hat{B}=60^o$ and BC = 1cm. Draw outside of ΔABC three equilateral triangles ABD, ACE and BCF. Determine the area of ΔDEF.

Q8. Let $ABCDE$ be a convex pentagon. Given that area of ΔABC = area of ΔBCD = area of ΔCDE = are of ΔDEA = are of ΔEAB =2cm². Find the area of the pentagon.

Q9. Solve the follwing system in positive numbers $\begin{cases} x+y\leq 1 \\ \dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{x^2+y^2}=10. \end{cases}$

Q10. Consider the set of all rectangles with a given perimeter p. Find the largest value of $M=\dfrac{S}{2S+p+2}$, where S is denoted the area of the rectangle.

Q11. The positive numbers a, b, c, d, e are such that the following identity hold for all real number x.

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+3dx^2+3x+e^3.$$

Find the smallest value of d.

Q12. If $f(x)=ax^2+bx+c$ satisfies the condition $|f(x)|<1, \forall x\in[-1;1]$, prove that the equation $f(x)=2x^2-1$ has two real roots.

Q13. Solve the system of equations $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

Q14. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^3+y=x^2+1 \\ 2y^3+z=2y^2+1 \\ 3z^3+x=3z^2+1. \end{cases}$$

Q15. Denote by $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{N}^*$ the set of all rational and positive integral numbers, respectively. Suppose that $\dfrac{ax+b}{x}\in\mathbb{Q}$ for every $x\in\mathbb{N}^*$. Prove that there exits integers A, B, C such that $\dfrac{ax+b}{x}=\dfrac{Ax+B}{Cx}$ for all $x\in\mathbb{N}^*$.

PROBLEMS...(Tiếp trang 17)

T8/431. Let $S.ABC$ be a triangular pyramid, G is the centroid of the base triangle ABC, O is the midpoint of SG. A moving plane (α) through O meets the edges SA, SB, SC at A', B', C'. respectively. Prove that

$$\frac{SA'^2}{AA'^2}+\frac{SB'^2}{BB'^2}+\frac{SC'^2}{CC'^2}\geq\frac{AA'^2}{SA'^2}+\frac{BB'^2}{SB'^2}+\frac{CC'^2}{SC'^2}.$$

TOWARD MATIHEMATICAL OLYMPIAD

T9/431. Find all natural numbers n such that

$$A=\left[\frac{n+3}{4}\right]+\left[\frac{n+5}{4}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+n^2+3n-1$$

is a prime number, where $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x.

T10/431. Consider the real-valued function

$$y=a\sin(x+2013)+\cos2014x$$

where a is a given real number.

Let M, m be the greatest and smallest values, respectively, of this function over $\mathbb{R}$. Prove that $M^2+m^2\geq 2$.

T11/431. Let (a_n) be a sequence given by $a_1=\dfrac{1}{2}$ and $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}$, $n=1, 2,...$

a) Prove that the sequence (a_n) converges to a finite limit and find this limit.

b) Let $b_n=a_1+a_2+...+a_n$ for each positive integer n. Determine the integer part $[b_n]$ and the limit $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

T12/431. Given four points A, B, C and D on a circle (ABC) and M is a point not on this circle. Let T_i be the trangle whose three vertices are 3 of 4 given points , except point i ($i = A, B, C, D$). Let H_i be the triangle whose vertices are the feet of the perpendicular drawn from M onto the edges (or extended edges) of triangles T_i ($i = A, B, C, D$). Prove that

1) The circumcenter of triangles H_i ($i = A, B, C, D$) lie on the same circle, centered at O'.

2) When D moves on the circle (ABC), O' always lie on a fixed circle.

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC

Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ

CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Có rất nhiều sách Toán để ôn thi Đại học và Cao đẳng, nhưng Bộ sách ***Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học, Cao đẳng môn Toán*** này có những điểm riêng khác những quyển sách trên bởi lẽ sách được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo, các nhà sư phạm giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy ở ba miền trong cả nước đã đăng trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trong chuyên mục *Chuẩn bị thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học, Cao đẳng* nhiều năm qua, đồng thời sách được bổ sung thêm một số bài viết mới sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học - Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương

★ **Tập I. Đại Số, Lượng Giác, Giải Tích** gồm 5 chương: *Hàm số và đồ thị; Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình; Phương trình lượng giác; Bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất; Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng.*

★ **Tập 2. Hình học, Tổ hợp - Xác suất, Số phức** gồm 5 chương: *Hình học tổng hợp trong không gian; Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng; Phương pháp toạ độ trong không gian; Tổ hợp, nhị thức Newton, Xác suất; Số phức.*

Mỗi chương gồm nhiều chuyên đề. Mỗi chuyên đề được trình bày rõ ràng, dễ hiểu và cuối mỗi chuyên đề đều có phần bài tập tự luyện để bạn đọc tự kiểm tra sự hiểu biết của mình. Phần cuối của mỗi tập sách giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.

Bộ sách là tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên Toán và học sinh THPT, giúp cho các học sinh cuối cấp THPT ôn tập chuẩn bị thi tốt nghiệp THPT, thi vào các trường Đại học, Cao đẳng, đồng thời có thể dùng để bồi dưỡng học sinh giỏi.

Bạn đọc có thể mua sách tại các Cơ sở Bưu điện, các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương, các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

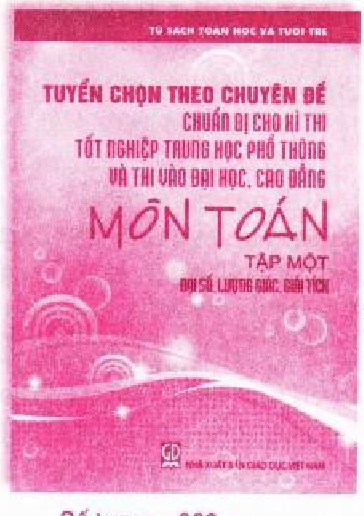
Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

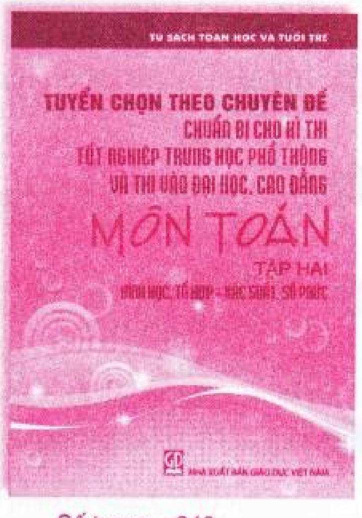
187B, Giảng Võ, Hà Nội

ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



Số trang: 260
Khổ sách: 17×24cm
Giá bìa: 38.500 đồng



Số trang: 240
Khổ sách: 17×24cm
Giá bìa: 36.500 đồng

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 431 (5.2013)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
NGƯT. NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm
Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC *Thư kí Tòa soạn : ThS.* HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

***Bìa 1.** Đoàn Cán bộ Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ giao lưu với thầy, cô giáo và các em học sinh Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị.*

Biên tập: NGUYỄN PHÚC *Mĩ thuật:* QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ *Chế bản:* NGUYỄN THỊ TRANG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI

- Địa chỉ: Tòa nhà văn phòng HEID, Ngõ 12 Láng Hạ, Quận Ba Đình, TP. Hà Nội
- Điện thoại: (04) 35122568 • Fax: (04) 35123838
- E-mail: info@heid.vn • Website: http://www.heid.vn

Công ty Cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội là đơn vị thành viên thuộc NXBGD Việt Nam với vốn điều lệ 150 tỉ đồng và vốn hóa gần 200 tỉ đồng. Cổ phiếu của Công ty được niêm yết trên Sở Giao dịch Chứng khoán Hà Nội với mã chứng khoán EID. Lĩnh vực kinh doanh chính của công ty là: In và phát hành sách bổ trợ sách giáo khoa; tổ chức xuất bản, in và phát hành sách tham khảo, thiết bị giáo dục mang thương hiệu NXBGD Việt Nam và Lịch blốc mang thương hiệu Giáo dục; khai thác và cho thuê văn phòng.

Công ty là Chủ sở hữu Tòa nhà văn phòng HEID tại Ngõ 12 Láng Hạ, Quận Ba Đình, TP. Hà Nội. Tòa nhà được đầu tư xây dựng với mục đích cho thuê làm văn phòng và làm trụ sở làm việc của Công ty.

Tòa nhà gồm 13 tầng nổi và 1 tầng hầm với gần 6000m² sàn sử dụng, nằm trong diện tích đất gần 1000m², mật độ xây dựng 44,5% được thiết kế, thi công với tiêu chuẩn Cấp 2. Tòa nhà đã được cấp Giấy chứng nhận An toàn chịu lực, sự phù hợp chất lượng công trình xây dựng và Giấy chứng nhận đủ điều kiện an toàn về phòng cháy chữa cháy.

Tòa nhà được đầu tư hệ thống trang thiết bị hiện đại và đồng bộ, đạt tiêu chuẩn đối với một tòa nhà hạng A về tiện nghi sử dụng và quy mô hoạt động, cung cấp dịch vụ như:

- *An ninh chuyên nghiệp 24/24h – Dịch vụ vệ sinh công nghiệp – Cho thuê phòng họp, hội nghị, giao ban.*
- *Toàn bộ tầng 12 của Tòa nhà với tổng diện gần 400m² được dùng làm khu vực hội họp phục vụ Quý khách hàng có văn phòng, trụ sở tại Tòa nhà với sức chứa 200 chỗ ngồi với đầy đủ trang thiết bị hiện đại, hệ thống âm thanh, máy chiếu, internet wifi.*
- *Hệ thống điều hòa trung tâm hiệu Daikin – Nhật Bản, nhập khẩu đồng bộ từ Thái Lan.*
- *2 Thang máy tốc độ cao (1,75m/s) hiệu Mishubishi.*
- *Hệ thống báo cháy, chữa cháy tự động (Spinler).*
- *Hệ thống kiểm soát Tòa nhà thông minh (BMS – Có khả năng kiểm soát, đóng ngắt tự động hoặc cơ động hệ thống điện năng của Tòa nhà, nước sinh hoạt, điều hòa không khí, PCCC).*
- *Hệ thống camera an ninh 24h/24h trong và ngoài khu vực Tòa nhà.*
- *Hệ thống trạm điện riêng biệt và máy phát điện dự phòng 100% công suất, đáp ứng mọi hoạt động liên tục của Tòa nhà trong thời gian 24h khi mất điện lưới.*
- *Hệ thống điện chiếu sáng sử dụng đồng bộ hãng Paragon.*
- *Hệ thống mạng cáp quang, sẵn sàng cung cấp cho khách hàng khi sử dụng các nhà cung cấp mạng.*

Tòa nhà được quản lí và vận hành bởi Ban Quản lí chuyên nghiệp. Ngoài ra, Tòa nhà còn được bảo hiểm "Mọi rủi do tài sản gồm cả bảo hiểm cháy nổ bắt buộc".

Với chiến lược phát triển bền vững và ổn định, toàn thể Hội đồng Quản trị, Ban Giám đốc điều hành cùng CBCNV đồng tâm, hợp lực làm hết sức mình để đưa ra những sản phẩm và dịch vụ tốt nhất, hoàn hảo nhất.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ ĐẾN VỚI QUẢNG BÌNH VÀ QUẢNG TRỊ

Phó Hiệu trưởng *Nguyễn Văn Ninh* và giáo viên Tổ Toán Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị gặp gỡ giao lưu với Đoàn.

Phó Trưởng phòng Giáo dục TP. Đồng Hới *Đinh Bá Quang* nhận các ấn phẩm của Tạp chí tặng.

Nhằm tìm hiểu thực tế về việc sử dụng Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trong các trường phổ thông và thu thập các ý kiến về nội dung, góp phần làm cho Tạp chí đến với nhiều độc giả, đặc biệt là độc giả ở miền Trung, Đoàn cán bộ Tạp chí vừa có chuyến công tác tới hai tỉnh Quảng Bình và Quảng Trị từ 27 đến 29.3.2013.

Sáng 28.3.2013 Đoàn đã gặp gỡ thầy giáo *Trần Xuân Bang* giáo viên Toán Trường THPT chuyên Quảng Bình để trao đổi về việc phối hợp giới thiệu các ấn phẩm của Tạp chí đến giáo viên và học sinh trong trường. Sau đó Đoàn đến Phòng Giáo dục TP. Đồng Hới. Thầy Phó Trưởng phòng Giáo dục TP. Đồng Hới *Đinh Bá Quang*, và thầy *Trần Quốc Thắng* chuyên viên Sở GD-ĐT Quảng Bình đã giới thiệu về đặc điểm tình hình giáo dục tại địa phương và mong muốn nội dung Tạp chí cần quan tâm hơn đến đối tượng vùng, miền.

Sáng 29.3.2013 Đoàn đã đến thăm giáo viên và học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Quảng Trị - là trường trọng điểm chất lượng cao luôn dẫn đầu trong công tác đào tạo, bồi dưỡng học sinh giỏi cho tỉnh. Thầy Phó Hiệu trưởng *Nguyễn Văn Ninh* vui mừng thông báo nhà trường tuy thành lập được 19 năm (24 năm khối THPT chuyên) nhưng đã đạt được nhiều thành tích đáng tự hào trong các kì thi: Olympic 30/4, (Huy chương Vàng, Bạc, Đồng), Giải toán trên máy tính bỏ túi cấp Quốc gia, Đường lên đỉnh Olympia (Có học sinh lọt vào Vòng thi Quý), thi học sinh giỏi Quốc gia (có nhiều giải Nhất, Nhì, Ba), đặc biệt tỉ lệ đỗ Đại học liên tục tăng qua các năm (có học sinh đỗ Thủ khoa).... Thầy Tổ trưởng tổ Toán *Nguyễn Văn Hiền*, Thầy *Dương Châu Dinh* cùng các em học sinh các lớp chuyên Toán của nhà trường đều thường xuyên đọc Tạp chí hàng tháng và mong muốn trên Tạp chí cần giới thiệu nhiều chuyên đề Toán hơn, đặc biệt là chuyên đề về ôn tập thi vào Đại học, Cao đẳng, hàng tháng mong Tạp chí đến địa phương nhanh hơn và cần tăng cường giao lưu toán học trên trang Web của tạp chí,...

Nhân dịp này Đoàn đã thăm viếng Nghĩa trang Trường Sơn và Thành Cổ Quảng Trị. Chuyến đi để lại nhiều ấn tượng tốt đẹp cho Đoàn. Hi vọng Tạp chí sẽ có thêm nhiều bạn đọc ở vùng đất miền Trung kiên cường bất khuất này.

PV

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT05M3

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2013

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng