BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BÀI TẬP
Đại số sơ cấp
VÀ
Thực hành giải toán

(Giáo trình dùng cho
sinh viên Cao đẳng)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐHSP ĐỒNG THÁP
LỚP CĐSTOAN11

BÀI TẬP
Đại số sơ cấp
và
Thực hành Giải toán

Giáo trình dùng cho sinh viên Cao đẳng

(In lần thứ 1)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BÀI TẬP CHƯƠNG 1
GIẢI BÀI TOÁN NHƯ THẾ NÀO

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{1}{x_2}) \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_3 + \frac{1}{x_3}) \\ x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{1}{x_1}) \end{cases}$$

Giải

Chứng minh x_1, x_2, x_3 cùng dấu.
+ Nếu x_1, x_2, x_3 là các số dương. Giả sử $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ xét hiệu x_3-x_1, chứng minh $x_3 \geq x_1$. Từ đó x_1=x_2=x_3 và tính nghiệm.
+ Nếu x_1, x_2, x_3 là các số âm. đặt x'_i=-x_i với i=1, 2, 3 ta đưa về trường hợp trên.

Bài 2: Điền các đơn thức thích hợp vào các dấu ? trong các đẳng thức sau:
(?+?)(?+3xy+?)=(?)^3-(?)^3

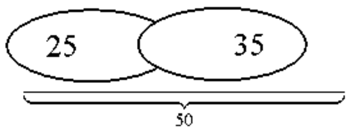
Giải

Có thể điền nhiều giá trị đơn thức thích hợp.

Bài 3: Cho x+y=2. Chứng minh xy $\leq$ 1.
$(x+y)^3-(x-y)^3=4xy$, $4-(x-y)^2=4xy$ => $xy \leq 1$.

Giải

Bài 4: Cho sơ đồ, đặt đầu bà thích hợp



Giải

Lớp học có 50 học sinh, 25 em giỏi môn văn, 35 em giỏi môn toán. Vậy có bao nhiêu học sinh giỏ cả văn và toán?

Bài 5: Tìm các cặp số nguyên dương thỏa điều kiện: tổng của chúng bằng tích của chúng.

Giải

Gọi x, y là số phải tìm. Khi đó x+y=xy ⇔ (x-1)(y-1)=1. Dựa vào ước của 1d9e63 tìm x,y.

Bài 6: Tính tổng S= 1.2+2.3+3.4+…+ n(n+1)

Giải

Ta có: 3S= 1.2.3+2.3.3+...+3.n.(n+1) = 1.2.3+2.3.(4-1)+...+n(n+1)[n+1-(n-1)].

Bài 7: Cho các số dương x,y chứng minh rằng: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Giải

Xét hiệu $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$

Bài 8: Chứng minh rằng tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 3.

Giải

Ba số nguyên liên tiếp có dạng n, n+1, n+2. Xét các trường hợp đối với n, đó là n=3k, n=3k+1, n=3k+2.

Bài 9: Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn 2x+3y=12

Giải

Ta có: 2x=-3y+12 ⇔ x=$\frac{-3y+12}{2}$=$\frac{-4y+12+y}{2}$ ⇔ x=-2y+6+$\frac{y}{2}$

x,y $\in$Z ⇔ $\frac{y}{2}\in$Z ⇔ y=2t (t$\in$Z), tính tiếp x.

Bài 10: Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho 3^k-1 chia hết cho 1000.

Giải

Xét 1000 số 3^1, 3^2,...,3^{1001} sử dụng nguyên t8a1c suy luận Dirichlet cho 1001 số trong phép chia cho 1000 (hoặc định l1i Fermat).

BÀI TẬP CHƯƠNG 2
CÁC TẬP HỢP SỐ

Bài 1: Tồn tài hay không số tự nhiên có tích các chữ số của nó bằng 165?

Giải

Giả sử số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ ($1\le a_n \le 0$, $0\le a_i \le 9$, i=$\overline{0,n-1}$)

Ta có 165=11.15=$\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$, suy ra phải tồn tại a_i chia hết cho 11 (vô lí vì $1\le a_i \le 9$).

Vậy không tồn tại số tự nhiên thỏa bài toán.

Bài 2: Tìm số chính phương có bốn chữ số biết rằng nếu cộng them 1 vào tất cả các chữ số đ1o thì ta cũng được một số chính phương.

Giải

Gọi số chính phương cần tìm là $\overline{abcd}=x^2$. Theo đề bài ta có: $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}=y^2$ ta thấy $y^2>x^2$ (x,y thuộc Z).

Xét y^2-x^2=1111⇔ (y-x)(y+x)=11.101=1111

+$\begin{cases} y-x=11 \\ y+x=101 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x=45 \\ y=56 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x=42025 \\ y=3136 \end{cases}$(nhận)

+$\begin{cases} y-x=101 \\ y+x=11 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x=-45 \\ y=56 \end{cases}$(loại)

+$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=1111 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x=555 \\ y=556 \end{cases}$(loại)

+$\begin{cases} y-x=1111 \\ y+x=1 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x=556 \\ y=-555 \end{cases}$(loại)

Vậy số cần tìm là 2025

Bài 3 : Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p>7 ta có A=3^p-2^p-1 chia hết cho 42p.

Giải

Ta có 42p=2.3.7p

+ p>7 là số nguyên tố nên 3^p lẽ, suy ra 3^p-1 chẵn. Suy ra A chẵn, do đó A chia hết cho 2 (1).

+ Ta có $3^p\equiv$0(mod 3), 2$\equiv$-1(mod 3) => -1(mod 3) =>3^p-2^p-1$\equiv$0 => A$\vdots$3 (2)

+ Ta có $\begin{cases} 3^p \equiv 3(\text{mod} 3) \\ 2^p \equiv 2(\text{mod} p) \end{cases}$ =>3^p-2^p-1$\equiv$0 (mod p) => A$\vdots$p (3)

+ Vì p>7 là số nguyên tố nên p chia cho 6 dư 1 hoặc 5 nên p=6k+1

Ta có $3^{\rho(7)}\equiv 1$(mod 7) => $3^6\equiv$1(mod 7) =>$3^{6k+1}\equiv$3(mod 7) => $2^{\rho(7)}\equiv 1$(mod 7) =>$2^6\equiv$1(mod 7) =>$2^{6k+1}\equiv$2(mod 7).

Do đó 3^{6k+1}-$2^{6k+1}\equiv$0(mod 7) => 3^p-2^p-1$\equiv$0 => A$\vdots$7 (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra A$\vdots$42p (đpcm).

Bài 4: Cho hàm số f: Q $\to$ Z thỏa mản điều kiện: với mọi x,y thuộc Q ta có f(x+y)=f(x) + f(y).

a. Chứng minh f(1)=n.f $\left(\frac{1}{n}\right)$,$(\forall n \in Z^*)$

b. Tìm f(2005).

Giải

a.Ta có: 1= $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots\frac{1}{n}}_{\text{n s? h?ng}}$ => f(1)=f$\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots\frac{1}{n}}_{\text{n s? h?ng}}\right)$ => f(1)=n.f $\left(\frac{1}{n}\right)$,$(\forall n \in Z^*)$

Vậy f(1)=n.f $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ta có f $\left(\frac{1}{n}\right)$ $\in Z$ => f(1)=0.

Mà f(2005)= f$\left(\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{\text{2005 s?}}\right)$=f(1)+f(1)+…f(1)=0. Vậy f(2005)=0.

Bài 5: Chứng mnh rằng với 7 số nguyên bất kì bao giờ cũng tồn tại 4 số có tổng chia hết cho 4.

Giải

G ọi 7 s ố nguyên bất kì là : $a_1,a_2,\ldots,a_7$.
Xét bộ 3 số a_1,a_2,a_3 (1), a_4,a_5,a_6 (2), a_1,a_6,a_7 (3)
Ta có trong 3 số bất kì bao giờ cũng có ít nhất 2 số có cùng tính chẵng lẻ.
Giả sử:
+ (1) có a_1, a_2 có cùng tính chẵn lẻ, suy ra $a_1+a_2=2k$, $k\in Z$.
+ (2)có a_4, a_5 có cùng tính chẵn lẻ, suy ra $a_4+a_5=2l$, $l\in Z$.
+ (2)có a_6, a_1 có cùng tính chẵn lẻ, suy ra $a_6+a_1=2t$, $t\in Z$.
Trong 3 số k,l,t có ít nhất 2 số có cùng tính chẵn lẻ. Giả sử k,l có cùng tính chẵn lẻ, suy ra k+l=2q, $q\in Z$, suy ra $a_1+a_2+\ldots+a_7=2(k+l)=2.2q=4q \vdots 4$ (đpcm).

Bài 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a. **3x-2xy+5y-1=0**
b. **2x-5y-3=0**
c. **x-3y+5xy-1=0**

Giải

a. **3x-2xy+5y-1=0**

⇔ x(3-2y)-$\frac{5}{2}$(3-2y)+$\frac{13}{2}$=0
⇔ 2x(3-2y)-5(3-2y)+13=0
⇔ (3-2y)(2x-5)=-13
Vì $x,y\in Z$ => (3-2y), (2x-5)$\in Z$ và là ước của -13. Mà -13=-1.13=-13.1. Do đó :

+ $\begin{cases}2x-5=-1\\3-2y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-5\end{cases}$

+ $\begin{cases}2x-5=1\\3-2y=-13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=8\end{cases}$

+ $\begin{cases}2x-5=13\\3-2y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\y=2\end{cases}$

+ $\begin{cases}2x-5=-13\\3-2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\y=1\end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là (2,-5), (3,8), (9,2), (-4,1).

b. 2x-5y-3=0

⇔ 2x-5y=3

⇔ 2(x-2y)-y=3

⇔ 2z-y=3 (z=x-2y)

⇔ $\begin{cases} z = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$, t$\in Z$

⇔ $\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$, t$\in Z$

Vậy tập nghiệm phương trình là $\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$, t$\in Z$

c. x-3y+5xy-1=0

⇔ 5x(1+5y)-3(1+5y)-2=0

⇔ (5x-3)(1+5y)=2

Vì x,y$\in Z$ nên(5x-3), (1+5y)$\in Z$. Mắt khác (5x-3), (1+5y) là ước của 2. Do đó:

$+\begin{cases} 5x - 3 = 1 \\ 1 + 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \notin Z \\ y = \frac{1}{5} \notin Z \end{cases}$ (loại)

$+\begin{cases} 5x - 3 = -1 \\ 1 + 5y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \notin Z \\ y = -\frac{3}{5} \notin Z \end{cases}$ (loại)

$+\begin{cases} 5x - 3 = 2 \\ 1 + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in Z \\ y = 0 \in Z \end{cases}$ (nhận)

$+\begin{cases} 5x - 3 = -2 \\ 1 + 5y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \notin Z \\ y = -\frac{2}{5} \notin Z \end{cases}$ (loại)

Vậy nghiệm của phương trình là (1,0).

Bài 7 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có : A= $46^{2n+1}+296.13^{2n+1} \vdots 1947$.

Giải

+ Ta có: 1947=33.59.

+ Ta có: A= $46^{2n+1}+296.13^{2n+1}$

= $46^{2n+1}+(33.9-1)13^{2n+1}$

= $46^{2n+1}-13^{2n+1}+33.9.13^{2n+1}$

= $(46-13)(46^{2n}+46^{2n-1}.13+...+46.13^{2n-1}+13^{2n})+33.9.13^{2n+1}$

=$33(46^{2n}+...+13^{2n})+33.9.13^{2n+1}$

Suy ra A$\vdots$33 (1)

+ Ta có: A= $46^{2n+1}+296.13^{2n+1}$

=$46^{2n+1}+13^{2n+1}+59.5.13^{2n+1}$

=$46^{2n+1}-(-13)^{2n+1}+59.5.13^{2n+1}$

=$(46+13)(46^{2n}+46^{2n-1}.13+...+46.13^{2n-1}+13^{2n})+59.5.13^{2n+1}$

=$59.(46^{2n}+...+13^{2n})+59.5.13^{2n+1}$

Suy ra A$\vdots$59 (2)

Từ (1), (2) suy ra A$\vdots$1947 (đpcm).

Bài 8: Cho n là số tự nhiên bất kì. Hãy chứng minh phân thức $\frac{21n+4}{11n+3}$ không thể giải ước được (đề sai).

Bài 9: Giải phương trình nghiệm nguyên: $(x+2)^4 - x^4 = y^3$.

Giải

Ta có: $(x+2)^4 - x^4 = y^3$

$\Leftrightarrow x^4+8x^3+24x^2+32x+16-x^4=y^3$

$\Leftrightarrow y^3=8(x^3+3x^2+4x+2)$

Đặt y=2k, $k\in Z$ => $k^2=x^3+3x^2+4x+2$, ta thấy x=-1, y=0 là nghiệm hệ phương trình.

Bài 10 : Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1991}$ chỉ có một số hửu hạn nghiệm nguyên dương.

Giải

Giả sử $0\le x\le y\le z$ => $\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1991}\le\frac{3}{x}$ => $1991\le x\le 3.1991$

Mặt khác với mỗi x ta có $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1991}-\frac{1}{x}\le\frac{2}{y}$ =>$0\le y\le\frac{2.1991x}{x-1991}\le 2^2.1991$

Do đó phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1991}$ với x, y là những số hửu hạn thì z cũng là số hửu hạn.

Nên phương trình chỉ có một số hửu hạn nguyên dương.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3
ĐA THỨC – PHÂN THỨC HỮU TỈ - BIẾN ĐỔI HỮU TỈ

Bài 1: Xét

$A=\sin 3x+\sqrt{x^2-1}+3x^2+2$ **trên R;**

$B=(\overline{X\cup Y})\cap Z,\ X,Y,Z$ **là các tập hợp;**

C=5 trên R;

$D=\begin{cases}\frac{x}{x-2}, & x\ne 2\\ 0, & x=2\end{cases}$ **trên R**

$E=(X => Y)\wedge(A <=> B)$

A, B, C, D, E cái nào là biểu thức toán học? Cái nào không phải?

Phân tích và trả lời

Đây là câu hỏi để củng cố khái niệm biểu thức toán học.

Một biểu thức toán học là cách viết chỉ rõ các phép toán và thứ tự thực hiện các phép toán đó trên các số (thuộc một trường số K) và các chữ gọi là đối số (lấy giá trị trong trường K).

Dựa vào khái niệm trên nhận dạng biểu thức toán học

Ta có:

A, C, D là các biểu thức toán học.

B, E không phải biểu thức toán học. Vì X, Y, Z, A, B là các tập hợp hoặc các mệnh đề logic, không phải là các đối số hoặc trường cơ sở.

<u>Bài 2:</u> Các biểu thức sau đây trên R biểu thức nào là siêu việt, đại số hữu tỉ (nguyên, phân), đại số vô tỉ?

$A = 2^{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{4} - \sin(x+1) - \dfrac{8}{3}x + 1;$

$B = x^{\frac{5}{2}} + 2x^3 - 5;$

$C = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^3 - 7x + 1} + \sin\dfrac{\pi}{75} + \log 37 - 3^{\sqrt{2}}x^2;$

$D = x^5 - x^3 + (\log 41) + tg\dfrac{\pi}{20}$

Phân tích và trả lời

Đây là bài toán nhận dạng khái niệm, dựa vào các khái niệm đã biết (khái niệm về biểu thức siêu việt, đại số hữu tỉ (nguyên, phân), đại số vô tỉ) để xét xem các biểu thức đã cho thuộc loại nào?

Chú ý: Để phân loại một biểu thức là đại số hay siêu việt, cần chú ý đến tính chất của phép toán trên các đối số chứ không phải trên các hệ số (là các phần tử của trường cơ sở K).

Ta có:

A là biểu thức siêu việt.

B là biểu thức đại số vô tỉ.

C là biểu thức đại số hữu tỉ phân.

D là biểu thức đại số hữu tỉ nguyên.

<u>Bài 3</u> Cho các biểu thức trên C:

$f(x,y) = xy^2 - \sqrt{2}x^2y + \sqrt{x+y} - \sin(xy\pi);$

$g(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + 3x;$

$h(x) = 3x^2 - x + 1;$

$k(x) = 10.$

Hãy tính

$a)\ f(0,0);\ f(1,1);$

$b)\ g(1,1,1);\ g(-1,1,2);\ g(i,1,1);\ g(i,i,i+1);$

$c)\ h(0);\ h(\sqrt{2});\ h(-\sqrt{2});\ h(1+i);$

$d)\ k(1001);\ k(2+50i);\ k(3^{\sqrt{2}})+1).$

Giải:

$a)\ f(x,y)=xy^2-\sqrt{2}x^2y+\sqrt{x+y}-\sin(xy\pi)$

$$=xy(y-\sqrt{2}x)+\sqrt{x+y}-\sin(xy\pi)$$

$f(0,0)=0(0-\sqrt{2}.0)+(\sqrt{0+0})-\sin 0=0$

$f(1,1)=1.1(1-\sqrt{2}.1)+(\sqrt{1+1})-\sin\pi=1$

$b)\ g(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+3x$

$g(1,1,1)=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}+3.1=6$

$g(-1,1,2)=\dfrac{1}{-1}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+3(-1)=\dfrac{-5}{2}$

$g(i,1,1)=\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}+3i=\dfrac{1}{i}+2+3i=\dfrac{1+2i+3(i)^2}{i}=\dfrac{-2+2i}{i}=\dfrac{(-2+2i)(i)}{(-i).i}=2+2i$

$g(i,i,i+1)=\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}+3.i=\dfrac{2}{i}+\dfrac{1}{1+i}+3.i=\dfrac{2(1+i)+i+3i^2(1+i)}{i(1+i)}=\dfrac{2+2i+i-3-3i}{-i+1}$

$$=\frac{-1}{-1+i}=\frac{-1(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{1+i}{(-1)^2-(i)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

$c)\ h(x)=3x^2-x+1$

$h(0)=3.0-0+1=1$

$h(\sqrt{2})=3.(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+1=7-\sqrt{2}$

$h(-\sqrt{2})=3.(-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}+1=7+\sqrt{2}$

$h(1+i)=3.(1+i)^2-(1+i)+1=3(1+2i-1)-1-i+1=5i$

<u>Bài 4</u>: Tìm miền xác định của các biểu thức sau trên R:

Giải:

a) f(x) = $\sqrt{x^2-16}$

Tập xác định: $x^2-16\ge 0\Rightarrow x\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

b) g(x)= $\sqrt{|x|+1}+\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$

Tập xác định: $\begin{cases}|x|+1\ge 0\\ |x|>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\ge -1\\ |x|>0\end{cases}$

$\Rightarrow$ TXĐ: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

c) h(x) = $\sqrt{-(x+1)^2+|x+2|}$

Tập xác định: $-(x+1)^2+|x+2|\ge 0$

$$\Leftrightarrow |x+2| \geq (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

d) $k(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{|x|-2} + \sqrt{|x|+2}}$

Tập xác định: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ |x|-2 > 0 \\ |x|+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ |x| > 2 \\ |x| > -2 \end{cases} \Rightarrow x>2 \qquad \Rightarrow$ TXĐ: $x \in (2; +\infty)$

e) $l(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 25} & \text{nếu } x \neq \pm 5 \\ 0 & \text{nếu } x = \pm 5 \end{cases}$

TXĐ : $(-\infty,-5) \cup (-5,5) \cup (5,+\infty)$

<u>Bài 5:</u> Thực hiện các phép nhân đa thức

a) $5x^5 - 3x^4y - 2x^2y^3$ và $3x^2 - 5xy^2 + 2y^3$;

b) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ và $1 - x$;

c) $2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$ và $x^2 - 2x + 1$;

d) $x^3 - x^2 - x - 1$ và $x^3 - 2x + 1$.

Quy tắc: Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

a) $(5x^5 - 3x^4y - 2x^2y^3)(3x^2 - 5xy^2 + 2y^3)$

$= 3x^2 5x^5 - 3x^2 3x^4 y - 3x^2 2x^2 y^3 - 5xy^2 5x^5 + 5xy^2 3x^4 y +$

$+ 5xy^2 2x^2 y^3 + 2y^3 5x^5 - 2y^3.3x^4 y - 2y^3 2x^2 y^3$

$= 15x^7 - 9x^6 y - 6x^4 y - 25x^6 y^2 + 15x^5 y^3 + 10x^3 y^5 + 10x^5 y^3 - 6x^4 y^4 - 4x^2 y^6.$

b) $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 - x)$

$= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + x^4 - x^5 + x^5 - x^6$

$= 1 - x^6.$

c) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$

$= 2x^6 - 6x^5 + 2x^4 - x^5 - 3x^4 - x^3 + x^4 - 3x^3 + x^2 + x^3 - 3x^2 + x + x^2 - 3x + 1$

$= 2x^6 - 7x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

$d)\ (x^3-x^2-x-1)(x^3-2x+1)$
$$=x^6-2x^4+x^3-x^5+2x^3-x^2-x^4+2x^2-x-x^3+2x-1$$
$$=x^6-x^5-3x^4+3x^3+x^2+x-1$$

<u>Bài 6:</u>Cho

$f(x)=x^3-7x^2-9x+8;$
$h(x)=x^3+x-1;$
$g(x)=\text{ax}+b.$

a) Tìm a, b để f(x)=g(x).h(x)

b) Có tồn tại a, b để h(x)=(x+1).g(x) không?

Lời giải

a) Ta có:

$$g(x)h(x)=(\text{ax}+b)(x^3+x-1)$$
$$=\text{ax}^4+\text{ax}^2-\text{ax}+bx^3+bx-b$$
$$=\text{ax}^4+bx^3+\text{ax}^2+(b-a)x-b$$

mà $f(x)=x^3-7x^2-9x+8$

Nên, ta suy ra $\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ a=-7 \\ b-a=-9 \\ -b=8 \end{cases}$

Vậy, không tồn tại a, b để f(x)=g(x).h(x).

b) Ta có:

Cách 1

$$h(x)=x^3+x-1$$
$$(x+1)g(x)=(x+1)(\text{ax}+b)=\text{ax}^2+(a+b)x+b$$

Ta thấy h(x) là đa thức bậc 3 mà tích

$(x+1)g(x)=(x+1)(\text{ax}+b)=\text{ax}^2+(a+b)x+b$ là đa thức bậc 2 nhỏ hơn bậc của đa thức h(x).

Suy ra $h(x)\neq(x+1)g(x)\ \ \forall a,b$

Vậy, không tồn tại a, b để h(x)=(x+1)g(x).

Cách 2

Giả sử tồn tại a, b để h(x)=(x+1)g(x) hay h(x)=(x+1)(ax+b) thì h(x) chia hết cho x+1 và được thương có dạng ax+b

Sơ đồ Hoocne

	1	0	1	-1

-1	1	-1	2	-3

Ta có đa thức thương là x^2-x+2 và dư là r=-3.

Vậy, không tồn tại a, b để h(x)=(x+1)g(x).

Cách 3

Đồng nhất thức, ta có:

$h(x)=(x+1)g(x)$

$<=> x^3+x-1=(x+1)(\text{ax}+b)=\text{ax}^2+(a+b)x+b$

Đồng nhất

$\begin{cases} a=0 \\ a+b=1 \\ b=-1 \end{cases} <=> \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ b=-1 \end{cases}$ Vậy, không tồn tại a, b để h(x)=(x+1)g(x).

Bài 7:Đơn giản biểu thức

$$P(x,y)=(2x^2+3xy-y^2)(2x^2+3xy)-4(x^2-y^2)(x^2+3xy+2y^2)-3x^2y^2$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
P(x,y)&=(2x^2+3xy-y^2)(2x^2+3xy)-4(x^2-y^2)(x^2+3xy+2y^2)-3x^2y^2 \\
&=4x^4+6x^3y+6x^3y+9x^2y^2-2x^2y^2-3xy^3- \\
&\quad -4x^4-12x^3y-8x^2y^2+4x^2y^2+12xy^3+8y^4-3x^2y^2 \\
&=(4x^4-4x^4)+(6x^3y+6x^3y-12x^3y)+(9x^2y^2-2x^2y^2-8x^2y^2+4x^2y^2-3x^2y^2)+ \\
&\quad +(-3xy^3+12xy^3)+8y^4 \\
&=9xy^3+8y^4
\end{aligned}$$

Bài **8**: Chứng minh rằng đa thức

$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

có thể biểu diễn dưới dạng bình phương của một tam thức bậc hai.

Lời giải

Giả sử tam thức bậc hai là mx^2+px+q. Ta thấy f(x) có hệ số a=1 đối với bậc 4. Vậy m=1 hoặc m=-1.

+) Với $m=1 => f(x)=(x^2+px+q)^2$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\left[(x+1)(x+4)\right]\left[(x+2)(x+3)\right]+1 \\
&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1 \\
&=(x^2+5x+4)\left[(x^2+5x+5)+1\right]+1 \\
&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+5)+x^2+5x+4+1 \\
&=(x^2+5x+5)^2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

+) Với $m=-1 => f(x)=(-x^2+px+q)^2$

Mà $f(x) = (x^2 + 5x + 5)^2$

$$\left[\begin{array}{ll} -x^2 + px + q = x^5 + 5x + 5 & (*) \\ -x^2 + px + q = -x^5 - 5x - 5 & (**) \end{array}\right.$$

Ta thấy (*) vô lý

(**)=> p=-5 và q=-5

Vậy $f(x) = (-x^2 - 5x - 5)^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm

<u>Bài 9:</u>

Viết đa thức $f(x) = x^3 - 8x + 10$ dưới dạng tổng lũy thừa giảm dần của (x-1)

Lời giải

Cách 1

Gọi tổng lũy thừa giảm dần (x-1) của f(x) là:

$$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

$$=> a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d = x^3 - 8x + 10$$

$$=> a = 1$$

Với

$$a = 1 => (x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1+d) = x^3 - 8x + 10$$

$$<=> x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + bx^2 - 2bx + b + cx - c + d = x^3 - 8x + 10$$

$$<=> x^3 + (b-3)x^2 + (3 - 2b + c)x + b - c + d - 1 = x^3 - 8x + 10$$

$$<=> \begin{cases} b - 3 = 0 \\ 3 - 2b + c = -8 \\ b - c + d - 1 = 10 \end{cases} <=> \begin{cases} b = 3 \\ c = -5 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 5(x-1) + 3$

Cách 2

Dùng sơ đồ Hoocne, ta có:

	1	0	-8	10	x^3-8x+10
1	1	1	-7	3	$q_1(x)=x^2+x-7$, $r_0=3$
1	1	2	-5		$q_2(x)=x+2$, $r_1=-5$
1	1	3			$q_3(x)=1$, $r_2=3$

Vậy $f(x) = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 5(x-1) + 3$

Bài 10:Tìm m, n, a sao cho

$f(x) = x^3 + mx + n = (x-1)(x-2)(x-a)$

Lời giải

Dùng đồng nhất thức, ta có:

$f(x) = x^3 + mx + n = (x-1)(x-2)(x-a)$

$\Leftrightarrow x^3 + mx + n = x^3 - (a+3)x^2 + (2+3a)x - 2a$

Đồng nhất hai vế ta được:

$$\begin{cases} a+3=0 \\ 2+3a=m \\ -2a=n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ m=-7 \\ n=6 \end{cases}$$

Vậy $a=-3,\ m=-7,\ n=6$ và $f(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$

Bài 11: Xác định a, b, c sao cho

$f(x) = x^3 + 3ax + 2b = (x-1)(x-2)(x-c)$

Lời giải

Dùng đồng nhất thức, ta có:

$f(x) = x^3 + 3ax + 2b = (x-1)(x-2)(x-c)$

$\Leftrightarrow x^3 + 3ax + 2b = x^3 - (c+3)x^2 + (3c+2)x - 2c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c+3=0 \\ 3c+2=3a \\ -2c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-3 \\ a=\dfrac{-7}{3} \\ b=3 \end{cases}$$

Vậy $a=\dfrac{-7}{3},\ b=3,\ c=-3$ và $f(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$.

Bài 12: Tìm một đa thức bậc ba sao cho:

$f(x) - f(x-1) = x^2$

Lời giải:

Gọi đa thức cần tìm là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$

Suy ra:

$$f(x) - f(x-1) = ax^3 + bx^2 + cx + d - [a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d]$$
$$= 3ax^2 + (2b-3a)x + a - b + c$$

Theo đề bài: $f(x) - f(x-1) = x^2$

nên ta có:

$3ax^2 + (2b-3a)x + a - b + c = x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a=1 \\ 2b-3a=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Vậy, đa thức cần tìm là: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$ (d lấy tùy ý)

Bài 13: Tìm điều kiện để đa thức

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

là lập phương của một nhị thức bậc nhất

a) Tìm một đa thức bậc bốn sao cho:

$$f(x) - f(x-1) = x^3$$

b) Từ đó suy ra công thức lập phương của n số nguyên đầu tiên.

Lời giải:

Giả sử $f(x) = (Ax+B)^3 = A^3x^3 + 3A^2x^2B + 3AxB^2 + B^3$

Suy ra:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = A^3x^3 + 3A^2x^2B + 3AxB^2 + B^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = A^3 \\ b = 3A^2B \\ c = 3AB^2 \\ d = B^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \sqrt[3]{a} \\ B = \sqrt[3]{d} \\ b = 3\sqrt[3]{a^2d} & \Rightarrow b^3 = 27a^2d \\ c = 3\sqrt[3]{ad^2} & \Rightarrow c^3 = 27ad^2 \end{cases}$$

Vậy, để $f(x)$ là lập phương của một nhị thức bậc nhất là: $\begin{cases} b^3 = 27a^2d \\ c^3 = 27ad^2 \end{cases}$

a) Gọi đa thức phải tìm là: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Ta có:

$$f(x) - f(x-1) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e - [a(x-1)^4 + b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1) + e]$$
$$= 4ax^3 + (3b-6a)x^2 + (4a-3b+2c)x - a + b - c + d$$

mà theo đầu bài: $f(x) - f(x-1) = x^3$

nên ta có:

$$4ax^3 + (3b-6a)x^2 + (4a-3b+2c)x - a + b - c + d = x^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 1 \\ 3b - 6a = 0 \\ 4a - 3b + 2c = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \\ d = 0 \end{cases}$$

Vậy, đa thức cần tìm là: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + e$ (e tùy ý).

b) Ta có:

$$f(1)-f(0)=1^3$$
$$f(2)-f(1)=2^3$$
.

.

.

$$f(n)-(n-1)=n^3$$
$$=> 1^3+2^3+...+n^3=-f(0)+f(n)$$
$$=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

<u>Bài 14:</u> Thực hiện phép chia đa thức

a) f(x) = $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ cho g(x) = $x^2 - 3x + 4$
b) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ cho $3x^2 - 2x + 1$

Giải:

a) f(x) = $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ cho g(x) = $x^2 - 3x + 4$

- HD: Thực hiện phép chia đa thức f(x) cho g(x) tức là ta tìm thương q(x) và dư r(x) nên ta chia trược tiếp f(x) cho g(x) ta sẽ tìm được thương và số dư

$$
\begin{array}{l|l}
\_\ 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 & \underline{x^2 - 3x + 4} \\
\quad \underline{2x^4 - 6x^3 + 8x^2} & 2x^2 + 2x + 5 \\
\qquad \_\ 3x^3 - 4x^2 - 5x & \\
\qquad\quad \underline{3x^3 - 9x^2 + 12x} & \\
\qquad\qquad \_\ 15x^2 - 17x + 6 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{15x^2 - 15x + 20} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad -2x - 14 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ q(x) = $2x^2 + 3x + 5$

r(x) = $-2x - 14$

b) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ cho $3x^2 - 2x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\ \cline{1-1}
\quad -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\
\quad -\frac{7}{3}x^2 - \frac{14}{9}x - \frac{7}{9} & \\ \cline{1-1}
\qquad -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} &
\end{array}
$$

Ta được $q(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$

$r(x) = -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$

* Khai thác bài toán:

1) Hãy tìm thương và số dư của phép chia f(x) cho g(x), h(x) cho k(x) với:

$F(x) = 5x^5 - 3x^4y - 2x^3y^3$

$G(x) = 3x^2 - 5xy^2 + 2y^3$

$H(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$

$K(x) = x^2 - 3x + 1$

2) Cho $f(x) = x^3 - 7x^2 - 9x + 8$

$g(x) = ax + b$

$h(x) = x^3 + x - 1$

a) Tìm a, b để f(x) = g(x).h(x) hay tìm a, b để f(x) chia hết cho g(x)

b) $\exists$ a, b hay không để h(x) = (x + 1)g(x

<u>Bài 15</u>: Dùng sơ đồ Hoocne, tính $f(x_0)$ với:

a) $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1$

- HD: + Dùng sơ đồ hoocne chia f(x) cho x – 4.

+ Ta được số dư là r, r = f(4)

- Lời giải

Dùng sơ đồ hoocne để chia f(x) cho x – 4 ta được:

	1	–2	1	–2	1	–1
4	1	2	9	34	137	547

r = 547 = f(4)

Vậy f(4) = 547

b) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$ với $x_0 = -2 - i$

Dùng sơ đồ Hoocne để chia f(x) cho x + 2 + i

Ta được;

	1	1 + 2i	0	-1 – 3i	0	7
– 2 – i	1	-1 + I	3 – i	-4i – 8	16i + 12	-44i – 1

r = -44i – 1 = f(-2 – i)

Vậy f(-2 – i) = -44i – 1

* Khai thác bài toán:

1) Tìm thương và số dư khi chia đa thức $f(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2$ cho đa thức x – 2 từ đó suy ra f(2) = ?

<u>Bài 16</u>: Dùng sơ đồ hoocne biểu diễn f(x) theo các luỹ thừa của x – c

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ với c = -1

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	1
-1	1	0	-4	4	
-1	1	-1	-3		
-1	1	-2			

$\Rightarrow f(x) = (x + 1)^4 - 2(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 1$

b) f(x) x^5 với c = 1

f(x)	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	
1	1	3	6	10		
1	1	4	10			
1	1	5				

$f(x) = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$

c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ với c = 2

f(x)	1	-8	24	-50	90
2	1	-6	12	-26	38
2	1	-4	4	-18	
2	1	-2	0		
2	1	0			

<u>Bài 17:</u> Với những giá trị nào của a, đa thức f(x) chia hết cho g(x)?

a) $f(x) = x^3 - (2a+1)x^2 + \frac{7}{2}x + a^2 - 4$ và $g(x) = x - 2$

b) $f(x) = x^4 - (a-1)(a+1)x^3 + (a+1)x^2 - 3(a+1)x - 7$ và $g(x) = x - 1$

*** Phân tích:**

Đa thức f(x) chia hết cho g(x) nghĩa là: f(x) = g(x) h(x) + r(x) với r(x) = 0

Dùng lược đồ hoocne ta tìm được a.

*** Giải**

a) $f(x) = x^3 - (2a+1)x^2 + \frac{7}{2}x + a^2 - 4$ và $g(x) = x - 2$

	1	$-2a - 1$	$\frac{7}{2}$	$a^2 - 4$
2	1	$1 - 2a$	$\frac{11}{2} - 4a$	$a^2 - 8a + 7$

b) Dùng lược đồ Hoocne

	1	$1 - a^2$	$a + 1$	$-3a - 3$	-7
1	1	$2 - a^2$	$-a^2 + a + 3$	$-a^2 - 2a - 7$	

Để f(x) chia hế cho g(x) thì -a2 – 2a – 7 = 0 $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ không có giá trị a thoả mãn.

<u>Bài 18:</u> Với những giá trị nào của a và b, đa thức f(x) chia hết cho g(x)?

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b$ và $g(x) = (x-1)(x+1)$

b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b$ và $g(x) = (x+1)(x-2)$

Giải:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b$ và $g(x) = (x-1)(x+1)$

C_1: Dùng lược đồ Hoocne:

Để f(x) ⋮ g(x) thì $\begin{cases} f(x) \vdots (x-1) \\ f(x) \vdots (x+1) \end{cases}$

Để f(x) ⋮ (x – 1), dùng lược đồ Hoocne, ta có:

	1	-3	b	a	b
1	1	-2	-2+b	-2+b+a	-2+2b+a

$\Rightarrow$ -2+2b+a = 0 (1)

Để f(x) ⋮ (x + 1), dùng lược đồ Hoocne, ta có:

	1	-3	b	a	b
-1	1	-4	4+b	-4-b+a	4+2b-a

$\Rightarrow$ 4+2b-a = 0(2)

Từ (1)+(2) ta có hệ $\begin{cases} a+2b=2 \\ -a+2b=-4 \end{cases}$, giải hệ ta có $\begin{cases} a=3 \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

C_2: Dùng phương pháp hệ số bất định:

Để f(x) chia hết cho g(x) thì phải tồn tại q(x) = x^2 + kx + l thoả mãn $f(x) = g(x(x).q(x)$ ta có:

f(x) = $x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b = (x-1)(x+1)(x^2 + kx + l)$

$\Leftrightarrow$ $x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b = (x^2 - 1)(x^2 + kx + l)$

$\Leftrightarrow$ $x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b$ = x4 + kx3 + (l – 1)x2 – kx – l

Suy ra: $\begin{cases} k=-3 \\ b=l-1 \\ -k=a \\ l=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-k=3 \\ 2b=-1 \Rightarrow b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy giá trị cần tìm là a = 3, b = $-\dfrac{1}{2}$

b) f(x) = $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b$ và g(x) = (x + 1)(x – 2)

C_1: Dùng lược đồ Hoocne:

Để f(x) ⋮ g(x) thì $\begin{cases} f(x) \vdots (x-1) \\ f(x) \vdots (x+1) \end{cases}$

Để f(x) ⋮ (x – 2), dùng lược đồ Hoocne, ta có:

	1	-3	b	a	b
-1	1	-4	6	-6+a	6–a+b

$\Rightarrow$ 6–a+b = 0 (1)

Để f(x) $\vdots$ (x + 1), dùng lược đồ Hoocne, ta có:

	1	-3	b	a	b
2	1	-1	0	a	2a+b

$\Rightarrow$ 2a+b (2)

Từ (1)+(2) ta có hệ $\begin{cases} 6-a+b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases}$, giải hệ ta có $\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \end{cases}$ là các giá trị cần tìm.

C_2: Dùng phương pháp hệ số bất định:

Để f(x) chia hết cho g(x) thì phải tồn tại q(x) = x^2 + kx + 1 thoả mãn $f(x) = g(x(x).q(x)$ ta có:

$\Leftrightarrow$ $x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b = (x + 1)(x - 2)(x^2 + px + q)$

$\Leftrightarrow$ $x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b = (x^2 - x - 2)(x^2 + px + q)$

$\Leftrightarrow$ $x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b = x^4 + px^3 + qx^2 - x^3 - px^2 - qx - 2x^2 - 2px - 2q$

$\Leftrightarrow$ $x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b = x^4 + (p - 1)x^3 + (q - p - 2)x^2 - (q+2p)x - 2q$

Suy ra: $\begin{cases} p-1=-3 \\ q-p-2=2 \\ -p-2p=a \\ b=-2q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-2 \\ q=2 \\ a=2 \\ b=4 \end{cases}$

Vậy giá trị cần tìm là a = 2, b = 4.

<u>Bài 19:</u> Tìm điều kiện để đa thức f(x) chia hết cho đa thức g(x)

a) f(x) = $x^3 + px + q$ **; g(x) =** $x^2 + mx - 1$

b) f(x) = $x^3 + px + q$ **; g(x) =** $x^2 + mx + 1$

Giải:

a) f(x) = x^3+px+q; g(x) = x^2+mx-1

C_1: Ta thực hiện phép chia f(x) cho g(x), sau đó cho số dư = 0 để tìm giá trị thỏa mãn điều kiện.

Ta có:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+px+q & x^2+mx-1 \\ \hline
\underline{x^3+mx^2-x} & x-m \\
\quad -mx^2+(p+1)x+q & \\
\quad \underline{-mx^2-m^2x+m} & \\
\qquad \left(p+1+m^2\right)x+q-m &
\end{array}$$

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow \left(p+1+m^2\right)x+q-m=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p+1+m^2=0 \\ q-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=q \\ p=-q^2-1 \end{cases}$$

Vậy với $m=q$ và $p=-q^2-1$ thì f(x) $\vdots$ g(x).

C_2: Dùng phương pháp hệ số bất định.

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow \exists$ q(x) = $x+n$ sao cho f(x) = g(x).q(x)

Ta có: g(x).q(x) = f(x)

$$\Leftrightarrow \left(x^2+mx-1\right)\left(x+n\right)=x^3+px+q$$

$$\Leftrightarrow x^3+\left(m+n\right)x^2+\left(mn-1\right)x-n=x^3+px+q$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n=0 \\ mn-1=p \\ -n=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-n \\ -m^2-1=p \\ -n=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=q \\ p=-q^2-1 \end{cases}$$

Vậy với $m=q$ và $p=-q^2-1$ thì f(x) $\vdots$ g(x).

b) f(x) = x^3+px+q; g(x) = x^2+mx+1;

C_1: Ta thực hiện phép chia f(x) cho g(x), sau đó cho số dư = 0 để tìm giá trị thỏa mãn điều kiện.

Ta có:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+px+q & x^2+mx+1 \\ \hline
 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+mx^2+x & x-m \\ \hline -mx^2+(p-1)x+q & \\ \underline{-mx^2-m^2x-m} & \\ \quad (p-1+m^2)x+q+m & \end{array}$$

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow (p-1+m^2)x+q+m=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p-1+m^2=0 \\ q+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-q \\ p=-q^2+1 \end{cases}$$

Vậy với $m=-q$ và $p=-q^2+1$ thì f(x) $\vdots$ g(x).

C_2: Dùng phương pháp hệ số bất định.

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow$ $\exists$ q(x) = $x+n$ sao cho f(x) = g(x).q(x)

Ta có: g(x).q(x) = f(x)

$$\Leftrightarrow (x^2+mx+1)(x+n) = x^3+px+q$$

$$\Leftrightarrow x^3+(m+n)x^2+(mn+1)x+n = x^3+px+q$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n=0 \\ mn+1=p \\ n=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-n \\ -m^2+1=p \\ n=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-q \\ p=-q^2+1 \end{cases}$$

Vậy với $m=-q$ và $p=-q^2+1$ thì f(x) $\vdots$ g(x).

<u>Bài 20.</u> CMR:

a) $(x+1)^{2n}-x^{2n}-(2x+1)$ **chia hết cho** $x(x+1)(2x+1)$

b) $x^{4n+2}+2x^{2n+1}+1$ **chia hết cho** $(x+1)^2$

Giải:

a) $(x+1)^{2n}-x^{2n}-(2x+1)$ chia hết cho $x(x+1)(2x+1)$

Đặt f(x) = $(x+1)^{2n}-x^{2n}-(2x+1)$; g(x) = $x(x+1)(2x+1)$

Ta có: f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow$ $\forall$ nghiệm của g(x) đều là nghiệm của f(x)

Ta thấy g(x) = 0 có 3 nghiệm là 0; -1; $-\frac{1}{2}$

Thay 3 nghiệm trên vào f(x) ta được: $\begin{cases} f(0) = 1 - 0 - 1 = 0 \\ f(-1) = 0 - 1 + 1 = 0 \\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2n} - 0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 0; -1; -\dfrac{1}{2}$ cũng là nghiệm của f(x).

Vậy f(x) $\vdots$ g(x). (đpcm).

b) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia hết cho $(x+1)^2$

Đặt f(x) = $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$; g(x) = $(x+1)^2$

Ta có: f(x) = $\left(x^{2n+1} + 1\right)^2$

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow \forall$ nghiệm của g(x) đều là nghiệm của f(x) (kể cả nghiệm bội).

Ta thấy g(x) = 0 có nghiệm kép x = -1

Thay vào f(x) ta được: $f(-1) = \left[(-1)^{2n+1} + 1\right]^2 = 0$

$\Rightarrow$ -1 cũng là nghiệm của f(x).

Vậy f(x) $\vdots$ g(x). (đpcm).

Bài 21

a) Tìm đa thức f(x) = $x^3 + px + q$ sao cho khi chia cho $(x-1)$ và $(x+1)$ thì lần lượt có dư là 2 và 1.

C$_1$: Dùng sơ đồ Hoocne

Ta có:

f(x)	1	0	p	q
1	1	1	1 + p	1 + p + q

Vì f(x) $\vdots$ $(x-1)$ có dư là 2 $\Rightarrow$ 1 + p + q = 2 (1)

Ta có:

f(x)	1	0	p	q
-1	1	-1	1 + p	-1 – p + q

Vì f(x) $\vdots$ $(x+1)$ có dư là 1 $\Rightarrow$ -1 – p + q = 1 (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} 1 + p + q = 2 \\ -1 - p + q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\dfrac{1}{2} \\ q = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy f(x) = $x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

C$_2$: Dùng phương pháp hệ số bất định

Vì f(x) $\vdots$ $(x-1)$ có dư là 2 $\Rightarrow \exists$ q(x) = $x^2 + ax + b$ sao cho

f(x) = $(x-1)$.q(x) + 2.

Ta có: f(x) = $(x-1)$.q(x) + 2

$$\Leftrightarrow x^3 + px + q = (x-1)(x^2 + ax + b) + 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + px + q = x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ b-a=p \\ -b+2=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ p=b-1 \\ q=-b+2 \end{cases} \Rightarrow p+q=1 \ (1)$$

Tương tự, vì f(x) $\vdots$ $(x+1)$ có dư là 1 $\Rightarrow \exists$ g(x) = $x^2 + cx + d$ sao cho

f(x) = $(x+1)$.q(x) + 1.

Ta có: f(x) = $(x+1)$.q(x) + 1

$$\Leftrightarrow x^3 + px + q = (x+1)(x^2 + cx + d) + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + px + q = x^3 + (c+1)x^2 + (c+d)x + d + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c+1=0 \\ c+d=p \\ d+1=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ p=d-1 \\ q=d+1 \end{cases} \Rightarrow p-q=-2 \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} p+q=1 \\ p-q=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-\frac{1}{2} \\ q=\frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy f(x) = $x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

b) Tìm đa thức bậc ba sao cho khi chia cho $(x-1)$, $(x+1)$ và $(x-2)$ ta đều được dư là 7, biết rằng f(x) chia hết cho $(2x-1)$.

Giả sử f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$

Do f(x) $\vdots$ $(2x-1)$ $\Rightarrow$ f(x) có một nghiệm là $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c+d=0 \qquad (1)$$

Dùng sơ đồ hoocne để tìm số dư khi chia f(x) cho $(x-1)$, $(x+1)$ và $(x-2)$.

Ta có:

f(x)	a	b	c	d
1	a	a + b	a + b + c	a + b + c + d
-1	a	-a + b	a – b + c	-a + b – c + d
2	a	2a + b	4a + 2b + c	8a + 4b + 2c + d

Do f(x) chia cho $(x-1)$, $(x+1)$ và $(x-2)$ ta đều được dư là 7 nên ta có:

$$\begin{cases} a+b+c+d=7 \\ -a+b-c+d=7 \\ 8a+4b+2c+d=7 \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ PT:

$$\begin{cases} \frac{1}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c+d=0 \\ a+b+c+d=7 \\ -a+b-c+d=7 \\ 8a+4b+2c+d=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+4c+8d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=7 \\ 8a+4b+2c+d=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+3c+8d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=7 \\ 8a+3b+2c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ 3c+6d=-14 \\ b=7-d \\ -6c-3d=-21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{56}{9} \\ b=\frac{112}{9} \\ c=\frac{56}{9} \\ d=-\frac{49}{9} \end{cases} \quad \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy f(x) = $-\frac{56}{9}x^3+\frac{112}{9}x^2+\frac{56}{9}x-\frac{49}{9}$.

<u>Bài 22</u> Tìm các giá trị của tham số sao cho f(x) chia hết cho g(x).

a) f(x) = $x^5+x^4-9x^3+ax^2+bx+c$**; g(x) =** $(x^2-4)(x+3)$

b) f(x) = $6x^4-7x^3+px^2+3x+2$**; g(x) =** x^2-x+q

c) f(x) = x^3+8x^2+5x+a**; g(x) =** x^2-3x+b

Giải:

a) f(x) = $x^5+x^4-9x^3+ax^2+bx+c$; g(x) = $(x^2-4)(x+3)$

C_1: Ta thấy g(x) = 0 có ba nghiệm là 2; -2; -3.

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow \forall$ nghiệm của g(x) cũng là nghiệm của f(x)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=0 \\ f(-2)=0 \\ f(-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32+16-72+4a+2b+c=0 \\ -32+16+72+4a-2b+c=0 \\ -243+81+243+9a-3b+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=24 \\ 4a-2b+c=-56 \\ 9a-3b+c=-81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=20 \\ c=-12 \end{cases}$$

Vậy f(x) = $x^5+x^4-9x^3-x^2+20x-12$.

C_2: Ta có: g(x) = $(x^2-4)(x+3)$ = $x^3+3x^2-4x-12$

Ta thực hiện phép chia f(x) cho g(x).

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4-9x^3+ax^2+bx+c & x^3+3x^2-4x-12 \\ \hline \underline{x^5+3x^4-4x^3-12x^2} & x^2-2x+1 \\ \quad -2x^4-5x^3+(a+12)x^2+bx+c & \\ \quad \underline{-2x^4-6x^3+8x^2+24x} & \\ \qquad\qquad x^3+(a+4)x^2+(b-24)x+c & \\ \qquad\qquad \underline{x^3+3x^2-4x-12} & \\ \qquad\qquad (a+1)x^2+(b-20)x+c+12 & \end{array}$$

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow (a+1)x^2+(b-20)x+c+12=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b-20=0 \\ c+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=20 \\ c=-12 \end{cases}$$

Vậy f(x) = $x^5+x^4-9x^3-x^2+20x-12$.

C_3: Dùng phương pháp hệ số bất định

Giả sử $\exists$ q(x) = x^2+px+q sao cho f(x) = g(x).q(x)

Ta có: f(x) = g(x).q(x)

$\Leftrightarrow \quad x^5+x^4-9x^3+ax^2+bx+c \quad = \quad (x^3+3x^2-4x-12) \quad (x^2+px+q)$

$\Leftrightarrow \quad x^5+x^4-9x^3+ax^2+bx+c$

$=x^5+(p+3)x^4+(q+3p-4)x^3+(3q-4p-12)x^2+(-4q-12p)x-12q$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} p+3=1 \\ q+3p-4=-9 \\ 3q-4p-12=a \\ -4q-12p=b \\ -12q=c \end{cases} \quad \Leftrightarrow\begin{cases} p=-2 \\ q=1 \\ a=-1 \\ b=20 \\ c=-12 \end{cases}$$

Vậy f(x) = $x^5+x^4-9x^3-x^2+20x-12$.

b) f(x) = $6x^4-7x^3+px^2+3x+2$; g(x) = x^2-x+q;

C_1:Ta thực hiện phép chia f(x) cho g(x).

$$\begin{array}{l|l} 6x^4-7x^3+px^2+3x+2 & x^2-x+q \\ \hline \underline{6x^4-6x^3+6qx^2} & 6x^2-x+(p-6q-1) \\ \quad -x^3+(p-6q)x^2+3x+2 & \\ \quad \underline{-x^3+x^2-qx} & \\ \qquad (p-6q-1)x^2+(3+q)x+2 & \\ \qquad \underline{(p-6q-1)x^2-(p-6q-1)x+pq-6q^2-q} & \\ \qquad (2-5q+p)x+2-pq+6q^2+q & \end{array}$$

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow (2-5q+p)x+2-pq+6q^2+q=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2-5q+p=0 \\ 2-pq+6q^2+q=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow\begin{cases} p=2-5q \\ q^2+3q+2=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=-1 \\ p=-7 \end{cases} \\ \begin{cases} q=-2 \\ p=-12 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai cặp thỏa mãn đó là:

f(x) = $6x^4-7x^3-7x^2+3x+2$; g(x) = x^2-x-1;

f(x) = $6x^4-7x^3-12x^2+3x+2$; g(x) = x^2-x-2;

C_2: Dùng phương pháp hệ số bất định

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow \exists$ q(x) = $6x^2+ax+b$ sao cho f(x) = g(x).q(x)

Ta có: g(x).q(x) = f(x)

$\Leftrightarrow \left(x^2-x+q\right)\left(6x^2+ax+b\right)= \qquad 6x^4-7x^3+px^2+3x+2$

$\Leftrightarrow 6x^4+\left(a-6\right)x^3+\left(b-a+6q\right)x^2+\left(-b+aq\right)x+bq= \qquad 6x^4-7x^3+px^2+3x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-6=-7 \\ b-a+6q=p \\ -b+aq=3 \\ bq=2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b+6q+1=p \\ -b-q=3 \\ b=\dfrac{2}{q} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b+6q+1=p \\ q^2+3q+2=0 \\ b=\dfrac{2}{q} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=-1; p=-7; b=-2; a=-1 \\ q=-2; p=-12; b=-1; a=-1 \end{array} \right.$$

Vậy có hai cặp thỏa mãn đó là:

f(x) = $6x^4-7x^3-7x^2+3x+2$; g(x) = x^2-x-1;

f(x) = $6x^4-7x^3-12x^2+3x+2$; g(x) = x^2-x-2;

c) f(x) = x^3+8x^2+5x+a ; g(x) = x^2-3x+b;

C_1:Ta thực hiện phép chia f(x) cho g(x).

$$\begin{array}{l|l} x^3+8x^2+5x+a & x^2-3x+b \\ \cline{2-2} x^3-3x^2+bx & x+11 \\ \hline \quad 11x^2+\left(5-b\right)x+a & \\ \quad 11x^2-33x+11b & \\ \hline \qquad \left(38-b\right)x++a-11b & \end{array}$$

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow \left(38-b\right)x+a-11b=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 38-b=0 \\ a-11b=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b=38 \\ a=418 \end{cases}$$

Vậy f(x) = $x^3+8x^2+5x+418$; g(x) = $x^2-3x+38$;

C_2: Dùng phương pháp hệ số bất định

Để f(x) $\vdots$ g(x) $\Leftrightarrow \exists$ q(x) = $x+p$ sao cho f(x) = g(x).q(x)

Ta có: g(x).q(x) = f(x)

$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+b\right)\left(x+p\right)=x^3+8x^2+5x+a$

$\Leftrightarrow x^3+\left(p-3\right)x^2+\left(b-3p\right)x+bp=x^3+8x^2+5x+a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p-3=8 \\ b-3p=5 \\ bp=a \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} p=11 \\ b=38 \\ a=418 \end{cases}$$

Vậy f(x) = $x^3+8x^2+5x+418$; g(x) = $x^2-3x+38$;

<u>Bài 23.</u> Dùng sơ đồ Hoocne biểu thị:

f (x) = $x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$ theo lũy thừa của $x+i$.

Ta có:

f(x)	1	2i	-1 - i	-3	7 + i
-i	1	i	-i	-4	7 + 5i
-i	1	0	-i	-5	
-i	1	-i	-1 - i		
-i	1	-2i			
-i	1				

Theo sơ đồ trên ta có f(x) = $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$

<u>Bài 24.</u> Tìm ƯCLN của các đa thức

a) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$ và $g(x)=x^3+x^2-x-1$

Lời giải

Ta dùng thuật toán Ơclit, được trình bày như sau:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+x^3-3x^2-4x-1 & x^3+x^2-x-1 \\ \hline
\underline{x^4+x^3-x^2-x} & x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-x-1 & -2x^2-3x-1 \\ \hline
\underline{x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2}} & -\frac{1}{2}x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-2x^2-3x-1 & \frac{-1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 \\ \hline
\underline{-2x^2-6x-4} & 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{-1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 & 3x+3 \\ \hline
-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x & -\frac{1}{6}x-\frac{1}{3} \\
-x-1 & \\
\underline{-x-1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Dư cuối cùng khác không chia cho hệ số cao nhất của nó là $(x+1)$ do đó UCLN:

$$(f(x), g(x)) = x+1$$

Bài 25:Tìm các đa thức u(x) và v(x) sao cho $f(x).u(x) + g(x).v(x) = d(x)$ trong đó d(x) là UCLN của hai đa thức của $f(x)...và...g(x)$

a, $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ và $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$

b, $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ và $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$

Lời giải

a) Theo thuật toán Ơ clit ta có:

$$d(x) = x^2 - 2$$

$$f(x) = g(x).1 + x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x = f(x) - g(x)$$

$$g(x) = (x^3 - 2x)(x+1) + d(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = [f(x) - g(x)](x+1) + d(x)$$
$$\Leftrightarrow g(x) = (x+1)f(x) - (x+1)g(x) + d(x)$$
$$\Rightarrow d(x) = -(x+1)f(x) + (x+2)g(x)$$

Vậy $\begin{cases} u(x) = -(x+1) \\ v(x) = x+2 \end{cases}$

b) Theo thuật toán Ơ clit ta có:

$$d(x) = (x^3 + 1)$$
$$f(x) = g(x)(x+1) - (x^3 + 1)$$
$$\Rightarrow x^3 + 1 = -f(x) + g(x)(x+1)$$

Vậy $\begin{cases} u(x) = -1 \\ v(x) = (x+1) \end{cases}$

<u>Bài 26:</u> Tìm ƯCLN của các đa thức sau

a) $f(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4) và. g(x) = (x-1)^2(x+2)(x+5)$

b) $f(x) = (x-1)^3(x^2 - 2x + 1). và .. g(x) = (x^2 - 1)^3$

Lời giải

a) $f(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4) và. g(x) = (x-1)^2(x+2)(x+5)$

ƯCLN $(f(x), g(x)) = (x-1)^2(x-2)$

b) $f(x) = (x-1)^3(x^2 - 2x + 1). và .. g(x) = (x^2 - 1)^3$

Ta có: $f(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x-1)^2$

$g(x) = (x-1)^3(x+1)^3$

$\Rightarrow UCLN\ (f(x), g(x)) = (x-1)^3$

<u>Bài 27</u>.Tìm ƯCLN của 2 đa thức

$f(x) = x^m - 1$ và $g(x) = x^n - 1$

Lời giải

$Goi..UCLN(m,n) = d$

$\Rightarrow UCLN(f(x), g(x)) = x^d - 1$

<u>Bài 28</u>. Chỉ rõ bội số của

a, Nghiệm 2 đối với đa thức: $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

b, Nghiệm -2 đối với đa thức: $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$

Lời giải

a) Theo sơ đồ Hoocne ta có:

	1	-5	7	-2	4	5
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

$$\Rightarrow f(x) = (x-2)^3(x+3x+7)$$

Vậy nghiệm 2 đối với đa thức có bội số bằng 3.

b) Theo sơ đồ Hoocne ta có:

	1	7	16	8	-16	-16
-2	1	5	6	-4	-8	0
-2	1	3	0	-4	0	
-2	1	1	-2	0		
-2	1	-1	0			
-2	1	-3				

$$\Rightarrow f(x) = (x+2)^4(x-3)$$

Vậy nghiệm -2 đối với đa thức có bội số bằng 4.

<u>Bài 29:</u> Tìm a để $f(x) = x^3 - ax^2 - ax + 1$ nhận (-1) là nghiệm bội

Lời giải

C_1: Sơ đồ Hoocne

	1	-a	-a	1
-1	1	-a-1	1	0
-1	1	-a-2	a+3	

$\Rightarrow f(x) = x^3 - ax^2 - ax + 1$ nhận -1 là nghiệm bội $\Leftrightarrow a+3=0 \Leftrightarrow a=-3$

Vậy a = -3 là giá trị cần tìm

C_2:

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax - a$$

$f(x)$ nhận -1 là nghiệm bội

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + a - 1 + 1 = 0 \\ 3 + 2a - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -3$$

Vậy a = -3 là giá trị cần tìm

<u>Bài 30:</u> Tìm đa thức

a) Nghiệm kép 1, nghiệm đơn 2, 3, 1+i

b) Nghiệm bội ba là 2-3i

c) Nghiệm kép 1và nghiệm đơn -1-i

Lời giải

a) $f(x)$ có nghiệm $(1+i)$ nên có ngiệm liên hợp là $(1-i)$

theo giả thiết

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)(x-1+i)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^6 - 2x^5 + 50x^4 - 8x^3 + 80x^2 - 46x + 12$$

b) Nghiệm bội ba là $(2-3i)$ nên $f(x)$ có nghiệm liên hợp là $(2+3i)$

$$\Rightarrow f(x) = (x-2-3i)^3(x-2+3i)^3$$

$$= x^6 - 12x^5 + 87x^4 - 356x^3 - 1181x^2 - 2028x + 2197$$

c) $f(x)$ có nghiệm $i \Rightarrow$ có nghiệm $-i$

$f(x)$ có nghiệm $(-1-i) \Rightarrow$ có nghiệm $(-1+i)$

$$\Rightarrow f(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x+1+i)(x+1-i)$$

$$= x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 2$$

Bài 31:Xác định a, b, c để chúng là nghiệm của phương trình

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - c = 0$

Lời giải

Vì a, b, c là nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ nên ta có:

$f(a) = a^3 - a.a^2 + b.a - c = 0 \iff ab = c \iff c = ab \quad (1)$

$f(b) = b^3 - a.b^2 + b.b - c = 0 \quad (2)$

$f(c) = c^3 - a.c^2 + b.c - c = 0 \quad (3)$

Thay (1) vào (2) và (3), ta được:

$$\begin{cases} b^3 - ab^2 + b^2 - ba = 0 \\ b^3a^3 - a^3b^2 + b^2a - ba = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3(b^2 - ba + b - a) = 0 \\ ab(a^2b^2 - a^2b + b - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, \ c = 0, \ \forall a & (*) \\ ab(b-1)(a^2b+1) = 0 & (**) \end{cases}$$

Từ (**) ta có:

$$\left[\begin{array}{l} ab = c = 0 \\ b = 1, \ c = a \\ a^2b = -1 \Rightarrow a = -1, \ b = -1, \ c = 1 \end{array}\right.$$

Từ (*) và (**) ta có: (a, b, c) = (a, 0, 0) = (a, 1, a) = (-1, -1, 1)

Bài 32: Chứng tỏ rằng các đa thức sau là bất khả quy trên Q

$a) \ x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$

$b) \ x^5 - 12x^3 + 36x - 12$

$c) \ x^4 - x^3 + 2x + 1$

Lời giải bài toán

a) Đặt $f(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

Ta thấy 1 có ước là: ± 1

-8 có ước là: $\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4, \ \pm 8$

12 có ước là: $\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \pm 12$

-6 có ước là: $\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6$

2 có ước là: $\pm 1, \ \pm 2$

Theo tiêu chuẩn Aidenstainơ ta thấy tồn tại số nguyên tố p=2 không là ước của 1 nhưng là ước của -8, 12, -6, 2 và p^2=4 không là ước của 2.

Vậy, đa thức f(x) đã cho là bất khả quy trên Q.

a) Đặt $g(x) = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$

Ta thấy 1 có ước là: ± 1

-12 có ước là: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12$

36 có ước là: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 12,\ \pm 18,\ \pm 36$

Theo tiêu chuẩn Aidenstainơ ta thấy tồn tại số nguyên tố p=3 không là ước của 1 nhưng là ước của -12, 36 và p^2=9 không là ước của -12.

Vậy, đa thức g(x) đã cho là bất khả quy trên Q.

b) Đặt
$$h(x) = x^4 - x^3 + 2x + 1$$
$$<=> h(x) = (x-1)^4 + 3(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 3$$

(Phân tích h(x) theo các lũy thừa của (x-1), dùng thuật toán Hoocne liên tiếp).

Ta thấy 1 có ước là: ± 1

3 có ước là: $\pm 1,\ \pm 3$

Theo tiêu chuẩn Aidenstainơ ta thấy tồn tại số nguyên tố p=3 không là ước của 1 nhưng là ước của 3 và p^2=9 không là ước của 3.

Vậy, đa thức h(x) đã cho là bất khả quy trên Q.

<u>Bài 33</u>:Tìm nghiệm hữu tỷ của các đa thức

$a)\ x^3 - 6x^2 + 15x - 14 \qquad b)\ x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$

$c)\ x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36 \qquad d)\ 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$

Lời giải

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &<=> x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0 \\ &<=> x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x + 7x - 14 = 0 \\ &<=> x^2(x-2) - 4x(x-2) + 7(x-2) = 0 \\ &<=> (x-2)(x^2 - 4x + 7) = 0 \\ &<=> \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 7 = 0 \end{array}\right. \\ &<=> \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x + 7 = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do $x^2 - 4x + 7 = 0$ có nghiệm trên trường C.

Vậy x=2 là nghiệm hữu tỉ của f(x).

b) $g(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$

$$g(x) = 0 \iff x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24 = 0$$
$$\iff x^4 + 3x^3 - 5x^3 - 15x^2 + 7x^2 + 21x - 8x - 24 = 0$$
$$\iff x^3(x+3) - 5x^2(x+3) + 7x(x+3) - 8(x+3) = 0$$
$$\iff (x+3)(x^3 - 5x^2 + 7x - 8) = 0$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = 0 \end{array}\right.$$

Do $x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = 0$ có nghiệm trên trường số thực R và trường số phức C.

Vậy x=-3 là nghiệm hữu tỉ của đa thức g(x).

c) $h(x) = x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$

$$h(x) = 0 \iff x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$$
$$\iff x^5 + 2x^4 - 2x^4 - 4x^3 - 3x^3 - 6x^2 - 6x^2 - 12x + 18x + 36 = 0$$
$$\iff x^4(x+2) - 2x^3(x+2) - 3x^2(x+2) - 6x(x+2) + 18(x+2) = 0$$
$$\iff (x+2)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x + 18) = 0$$
$$\iff (x+2)(x^4 - 3x^3 - x^3 - 3x^2 - 6x + 18) = 0$$
$$\iff (x+2)\left[x^3(x-3) - x^2(x-3) - 6(x-3)\right] = 0$$
$$\iff (x+2)(x-3)(x^3 - x^2 - 6) = 0$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x-3=0 \\ x^3 - x^2 - 6 = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \\ x^3 - x^2 - 6 = 0 \end{array}\right.$$

Do $x^3-x^2-6=0$ có nghiệm trên trường số thực R và trường số phức C.

Vậy x=-2 và x=3 là nghiệm hữu tỉ của h(x).

d) $k(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$

$$k(x) = 0 \iff 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1 = 0$$
$$\iff 4^3.4x^4 - 4^3.7x^2 - 4^3.5x - 4^3 = 0$$
$$\iff (4x)^4 - 7.4^3x^2 - 5.4^3x - 4^3 = 0$$

Đặt y=4x, đa thức trở thành

$$y^4 - 28y^2 - 80y - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(y^3 - 2y^2 - 24y - 32) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)^2(y^2 - 4y - 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+2=0 \\ y^2 - 4y - 16 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y^2 - 4y - 16 = 0 \end{array}\right.$$

y^4-4y-16=0 không có nghiệm trên trường R.

Vậy đa thức đã cho có nghiệm hữu tỉ $y = -2$ => $x = \frac{y}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$.

Bài 34: Phân tích các đa thức $f(x)$ sau đây thành nhân tử:

$a)$ $x^4+x^2+1+(x^2-x+1)^2$ trên R;

$b)$ $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$ trên Q;

$c)$ $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$ trên R;

$d)$ x^5+1 trên R;

$e)$ $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$ trên R;

Lời giải:

$a)$ $x^4+x^2+1+(x^2-x+1)^2$ trên R;

Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned}
x^4+x^2+1+(x^2-x+1)^2 &= (x^2)^2+2x^2.1+1-x^2+(x^2-x+1)^2\\
&= (x^2+1)^2-x^2+(x^2-x+1)^2\\
&= (x^2+1-x)(x^2+1+x)+(x^2-x+1)^2\\
&= (x^2-x+1)(x^2+1+x+x^2-x+1)\\
&= (x^2-x+1)(2x^2+2)\\
&= 2(x^2+1)(x^2-x+1)
\end{aligned}$$

Cách 2: Ta có

$$\begin{aligned}
x^4+x^2+1+(x^2-x+1)^2 &= x^4+x^2+1+x^4-2x^3+x^2-2x+1+2x^2\\
&= 2x^4+4x^2-2x^3-2x+2\\
&= 2x^4+2x^2+2x^2-2x^3-2x+2\\
&= 2x^2(x^2+1)+2x^2(1-x)-2(x-1)\\
&= 2x^2(x^2+1)+(x-1)(-2x^2-2)\\
&= 2x^2(x^2+1)-2(x^2+1)(x-1)\\
&= (x^2+1)\left[2x^2-2(x-1)\right]\\
&= 2(x^2+1)(x^2-x+1)
\end{aligned}$$

$b)$ $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$ trên Q;

Cách 1:

$$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=(x^2+8x+7)(x^2+8x+7+8)+15$$
$$=(x^2+8x+7)[(x^2+8x+7)+8]+15$$
$$=(x^2+8x+7)^2+8(x^2+8x+7)+15$$
$$=(x^2+8x+7)^2+2(x^2+8x+7)4+16-16+15$$
$$=(x^2+8x+7)^2+2(x^2+8x+7)4+16-16+15$$
$$=(x^2+8x+7+4)^2-1$$
$$=(x^2+8x+11)^2-1$$
$$=(x^2+8x+11-1)(x^2+8x+11+1)$$
$$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$$
$$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$$

Vậy $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.

Cách 2:

$A=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

Đặt $t=x^2+8x+7$. Suy ra $A=t(t+8)+15$

Ta có:
$$A=t(t+8)+15$$
$$=t^2+8t+15$$
$$=(t+3)(t+5)$$

Vậy

$$A=(x^2+8x+7+3)(x^2+8x+7+5)$$
$$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$$
$$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$$

$c)$ $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$ trên R;

Ta có:

$$2x^4+7x^3-2x^2-13x+6=2x^4-2x^3+9x^3-9x^2+7x^2-7x-6x+6$$
$$=2x^3(x-1)+9x^2(x-1)+7x(x-1)-6(x-1)$$
$$=(x-1)(2x^3+9x^2+7x-6)$$
$$=(x-1)(2x^3+4x^2+5x^2+10x-3x-6)$$
$$=(x-1)[2x^2(x+2)+5x(x+2)-3(x+2)]$$
$$=(x-1)(x+2)(2x^2+5x-3)$$
$$=(x-1)(x+2)(x+3)(2x-1)$$

$d)$ x^5+1 trên R;

Cách 1:

$$x^5+1=x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x-x+1$$
$$=x^4(x+1)-x^3(x+1)+x^2(x+1)-x(x+1)+(x+1)$$
$$=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

Cách 2: Áp dung hằng đẳng thức

$$x^n-y^n=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

Ta có:

$$x^5+1=x^5-(-1)^5$$
$$=[x-(-1)][x^4+x^3.(-1)+x^2.(-1)^2+x.(-1)^3+(-1)^4]$$
$$=(x-1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

$e)$ $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$ trên R;

Ta có:

$$(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=(x^2+x+4)^2+2(x^2+x+4)4x+16x^2-16x^2+15x^2$$
$$=(x^2+x+4+4x)^2-x^2$$
$$=(x^2+5x+4-x)(x^2+5x+4+x)$$
$$=(x^2+4x+4)(x^2+6x+4)$$
$$=(x+2)^2(x^2+6x+4) \qquad \text{trên Q}$$
$$=(x+2)^2(x+3-\sqrt{5})(x+3+\sqrt{5}) \qquad \text{trên R}$$

Bài 35:Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$a)$ x^4+y^4 trên R và C;

$b)$ $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$ trên R;

$c)$ x^2+xy+y^2 trên R và C.

Lời giải:

$a)$ x^4+y^4 trên R và C;

Trên R

$$x^4+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2-\sqrt{2}xy)(x^2+y^2+\sqrt{2}xy)$$

Trên C

$$x^4+y^4=x^4-iy^4$$
$$=(x^2)^2-(iy^2)^2$$
$$=(x^2-iy^2)(x^2+iy^2)$$
$$=(x^2-\frac{y^2}{2}-iy^2+\frac{y^2}{2})(x^2-\frac{y^2}{2}+iy^2+\frac{y^2}{2})$$
$$=[x^2-\frac{y^2}{2}(1-i)^2][(x^2-\frac{y^2}{2}(1+i)^2]$$
$$=(x-\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{iy}{\sqrt{2}})(x+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{iy}{\sqrt{2}})(x+\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{iy}{\sqrt{2}})(x-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{iy}{\sqrt{2}})$$

b) $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$ trên R;

Giải

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$$
$$=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-(b^4+c^4)$$
$$=2a^2(b^2+c^2)+2b^2c^2-a^4-[(b^2)^2+2b^2c^2+(c^2)^2-2b^2c^2]$$
$$=2a^2(b^2+c^2)+2b^2c^2-a^4-(b^2+c^2)^2+2b^2c^2$$
$$=2a^2(b^2+c^2)-(a^2)^2-(b^2+c^2)^2+4b^2c^2$$
$$=-[(a^2)^2-2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2]+4b^2c^2$$
$$=4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2$$
$$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$$
$$=(2bc-a^2+b^2+c^2)(2bc+a^2-b^2-c^2)$$
$$=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b^2+c^2-2ab)]$$
$$=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]$$
$$=(b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)$$

c) x^2+xy+y^2 trên R và C.

Phân tích đa thức trên C

$$x^2+xy+y^2=x^2+2x\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{y^2}{4}+y^2$$
$$=(x^2+\frac{y}{2})^2+\frac{3y^2}{4}$$
$$=(x^2+\frac{y}{2})^2-\frac{3i^2y^2}{4}$$
$$=(x^2+\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{3}iy}{2})(x^2+\frac{y}{2}+\frac{\sqrt{3}iy}{2})$$

Bài 36: Phân tích thành nhân tử trên R:

$a)\quad (2a^2-3ax)(5c+2d)-(6a^2-4ax)(5c+2d);$

$b)\quad (ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3);$

$c)\quad a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+3abc.$

Lời giải:

$a)\ (2a^2-3ax)(5c+2d)-(6a^2-4ax)(5c+2d);$

$$=(5c+2d)(2a^2-3ax-6a^2+4ax)$$
$$=(5c+2d)(ax-4a^2)$$
$$=a(5c+2d)(x-4a)$$

$b)\quad (ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3);$

Cách 1: Ta có

$$(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$$
$$=a^3y^3+3a^2y^2bx+3ayb^2x^2+b^3x^3+a^3x^3+3a^2x^2by+3axb^2y^2+b^3y^3-$$
$$-a^3x^3-a^3y^3-b^3x^3-b^3y^3$$
$$=3a^2y^2bx+3ayb^2x^2+3a^2x^2by+3axb^2y^2$$
$$=3abxy(ay+bx+ax+by)$$
$$=3abxy[a(x+y)+b(x+y)]$$
$$=3abxy(x+y)(a+b)$$

Cách 2: Ta có

$$(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$$
$$=a^3y^3+3a^2y^2bx+3ayb^2x^2+b^3x^3+a^3x^3+3a^2x^2by+3axb^2y^2+b^3y^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$$
$$=a^3(y^3+x^3)+b^3(x^3+y^3)-3abxy(ay+bx+ax+by)-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$$
$$=(a^3+b^3)(x^3+y^3)+3abxy[a(x+y)+b(x+y)]-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$$
$$=3abxy(x+y)(a+b)$$

Cách 3: Ta có

$$(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$$
$$=(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3x^3+a^3y^3+b^3x^3+b^3y^3)$$
$$=(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3x^3+b^3y^3+3a^2x^2by+3axb^2y^2-$$
$$-3a^2x^2by-3axb^2y^2+a^3y^3+b^3x^3+3a^2y^2bx+3ayb^2x^2-3a^2y^2bx-3ayb^2x^2)$$

$$=(ay+bx)^3+(ax+by)^3-[(ax+by)^3+(ay+bx)^3-3a^2x^2by-3axb^2y^2-3a^2y^2bx-$$
$$-3ayb^2x^2]$$
$$=(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(ax+by)^3-(ay+bx)^3+3a^2x^2by+3axb^2y^2+3a^2y^2bx+3ayb^2x^2$$
$$=3abxy[a(x+y)+b(x+y)]$$
$$=3abxy(a+b)(x+y)$$

c) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+3abc.$

Giải:

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+3abc$$
$$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+abc+abc+abc$$
$$=(a^2b+ab^2+abc)+(b^2c+bc^2+abc)+(a^2c+ac^2+abc)$$
$$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(ab+bc+ac)$$

<u>Bài 37:</u> Phân tích thành nhân tử trên R:

a) $A=bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b);$

b) $B=(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4$

Giải:

a) $A=bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

Cách 1:

$$A=bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$$
$$=bc(b+c)+ac(c-a)-ab[(b+c)-(c-a)]$$
$$=(b+c)(bc-ab)+(c-a)(ac+ab)$$
$$=b(b+c)(c-a)+(c-a)a(b+c)$$
$$=(b+c)(c-a)(b+a)$$

Cách 2:

$$
\begin{aligned}
A &= bc(b+c)-ca(a-c)-ab(a+b)\\
&= b^2c+bc^2-a^2c+ac^2-a^2b-ab^2\\
&= (b^2c-ab^2)+(bc^2-a^2b)+(-a^2c+ac^2)\\
&= b^2(c-a)+b(c^2-a^2)+ac(c-a)\\
&= (c-a)[b^2+b(c+a)+ac]\\
&= (c-a)(b^2+bc+ba+ac)\\
&= (c-a)[(b+c)+a(b+c)]\\
&= (c-a)(b+c)(a+b)
\end{aligned}
$$

<u>Bài 38:</u> Phân tích thành nhân tử trên R:

$a)\quad a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2-4abc;$

$b)\quad f(z)=z^3-(a-b+c)z^2+[ac-b(a+c)]\text{z}+abc.$

Lời giải:

$a)\quad a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2-4abc$

Cách 1: Ta có

$$
\begin{aligned}
&a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2-4abc\\
&= a(b^2+2bc+c^2)+b(a^2+2ac+c^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc\\
&= ab^2+2abc+ac^2+ba^2+2abc+bc^2+ca^2+2abc+ca^2-4abc\\
&= ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+c(a+b)^2\\
&= ab(b+a)+c^2(a+b)+c(a+b)^2\\
&= (a+b)(ab+c^2+ca+cb)\\
&= (a+b)[a(b+c)+c(b+c)]\\
&= (a+b)(b+c)(a+c)
\end{aligned}
$$

Cách 2: Ta có

$$
\begin{aligned}
&a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2-4abc\\
&= a(b+c)^2+b(a^2+2ac+c^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc\\
&= a(b+c)^2+(a^2b+bc^2+a^2c+b^2c)\\
&= a(b+c)^2+[a^2(b+c)+bc(b+c)]\\
&= a(b+c)^2+(a^2+bc)(b+c)\\
&= (b+c)(ab+ac+a^2+bc)\\
&= (b+c)(a+b)(a+c)
\end{aligned}
$$

Cách 3: Ta có

$$a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2-4abc$$
$$=a(b+c)^2-2abc+b(a+c)^2-2abc+c(a+b)^2$$
$$=a[(b+c)^2-2bc]+b[(a+c)^2-2ac]+c(a+b)^2$$
$$=a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a+b)^2$$
$$=ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+c(a+b)^2$$
$$=ab(b+a)+c^2(a+b)+c(a+b)^2$$
$$=(a+b)(c^2+ab+ca+cb)$$
$$=(a+b)(b+c)(a+c)$$

$b)$ $f(z)=z^3-(a-b+c)z^2+[ac-b(a+c)]z+abc.$

Ta có:

$$f(z)=z^3-(a-b+c)z^2+[ac-b(a+c)]z+abc$$
$$=z^3-z^2a+z^2b-z^2c+acz-abz-bcz+abc$$
$$=z^2(z-a)-bc(z-a)+zb(z-a)-zc(z-a)$$
$$=(z-a)(z^2-bc+zb-zc)$$
$$=(z-a)[z(z+b)-c(b+z)]$$
$$=(z-a)(z+b)(z-c)$$

Bài 39: Phân tích thành nhân tử trên trường số phức

$a)$ $f(x)=x^{2n}-2x^n+2$;

$b)$ $f(x)=x^{2n}+x^n+1.$

Lời giải:

$a)$ $f(x)=x^{2n}-2x^n+2$
$$=(x^n)^2-2.x^n+1+1$$
$$=(x^n-1)^2+1$$
$$=(x^n-1)^2-i^1$$
$$=(x^n-1-i)(x^n-1+i)$$

$b)\quad f(x) = x^{2n} + x^n + 1 = (x^n)^2 + x^n + 1$

$$= (x^n)^2 + 2.x^n.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

$$= (x^n + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$= (x^n + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}i^2$$

$$= (x^n + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x^n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$= (x^n - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2})(x^n + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2})$$

Bài 40: Phân tích các phân thức sau thành các phân thức đơn giản nhất

$a)\ \dfrac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5}$ $\qquad\qquad$ $b)\ \dfrac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x+1)^5}$

Lời giải:

Cách 1: Dùng lượt đồ Hoocne chia liên tiếp, ta có:

$a)\ \dfrac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5}$

$x^3 - x + 1$	1	0	-1	1
2	1	2	3	7
2	1	4	11	
2	1	6		
2	1			

$$\Rightarrow \frac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5} = \frac{7}{(x-2)^5} + \frac{11}{(x-2)^4} + \frac{6}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

Cách 2: Phương pháp hệ số bất định, ta có:

$$\frac{x^3-x+1}{(x-2)^5}=\frac{A}{(x-2)^5}+\frac{B}{(x-2)^4}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{(x-2)^2}+\frac{E}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3-x+1=A+B(x-2)+C(x-2)^2+D(x-2)^3+E(x-2)^4$$

$$\Leftrightarrow x^3-x+1=A+Bx-2B+Cx^2-4Cx+4C+Dx^3-6Dx^2+12Dx+$$
$$+8D+\mathrm{Ex}^4-8Ex^3+24Ex^2-32Ex+16E$$

$$\Leftrightarrow x^3-x+1=\mathrm{Ex}^4+(D-8E)x^3+(-6D+24E+C)x^2+(B-4C+12D-$$
$$-32E)x+(A-2B+8D+16E+4C)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}E=0\\D-8E=1\\-6D+24E+C=0\\B-4C+12D-32E=-1\\A-2B+8D+16E+4C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}E=0\\D=1\\C=6\\B=11\\A=7\end{cases}$$

Vậy $\dfrac{x^3-x+1}{(x-2)^5}=\dfrac{7}{(x-2)^5}+\dfrac{11}{(x-2)^4}+\dfrac{6}{(x-2)^3}+\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

$b)\ \dfrac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}$

Cách 1: Dùng lược đồ Hoocne chia liên tiếp, ta có:

x^4-2x^2+3	1	0	-2	0	3
-1	1	-1	-1	1	2
-1	1	-2	1	0	
-1	1	-3	4		
-1	1	-4			
-1	1				

Vậy $\dfrac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}=\dfrac{2}{(x+1)^5}+\dfrac{4}{(x+1)^3}-\dfrac{4}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)}$

Cách 2: Phương pháp hệ số bất định, ta có:

$$\frac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}=\frac{A}{(x+1)^5}+\frac{B}{(x+1)^4}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^4-2x^2+3=A+B(x+1)+C(x+1)^2+D(x+1)^3+E(x+1)^4$$

$$\Leftrightarrow x^4-2x^2+3=A+Bx+B+Cx^2+2Cx+C+Dx^3+3Dx^2+3Dx+D+$$
$$+\mathrm{E}x^4+4Ex^3+6Ex^2+4Ex+E$$

$$\Leftrightarrow x^4-2x^2+3=\mathrm{E}x^4+(D+4E)x^3+(C+3D+6E)x^2+(B+2C+3D+4E)x+$$
$$+(A+B+C+D+E)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}E=1\\D+4E=0\\C+3D+6E=-2\\B+2C+3D+4E=0\\A+B+C+D+E=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}E=1\\D=-4\\C=4\\B=0\\A=2\end{cases}$$

Vậy $\dfrac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}=\dfrac{2}{(x+1)^5}+\dfrac{4}{(x+1)^3}-\dfrac{4}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)}$.

<u>Bài 41:</u> Phân tích các phân thức sau thành các phân thức đơn giản nhất

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$$

Lời giải:

Cách 1:

Ta có:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{2x}{2(x^2+1)(x-1)}=\frac{x^2-x^2+2x-1+1}{2(x^2+1)(x-1)}=\frac{(x^1+1)-(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x^2+1}{2(x^2+1)(x-1)}-\frac{x^2-2x+1}{2(x^2+1)(x-1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}$$

Vậy $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{x-1}{2(x^2+1)}$.

Cách 2: Dùng phương pháp hệ số bất định, ta có:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{\mathrm{Ax}+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x=(\mathrm{Ax}+B)(x-1)+C(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow x=\mathrm{Ax}^2+(B-A)x-B+Cx^2+C$$

$$\Leftrightarrow x=(A+C)x^2+(B-\mathrm{A})x+(C-B)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B-A=1 \\ C-B=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=\dfrac{-1}{2} \\ B=\dfrac{1}{2} \\ C=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}$.

<u>Bài 42:</u> Phân tích thành các phân thức đơn giản nhất

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$$

Cách 1: Ta có

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{\mathrm{Ax}+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}+\frac{E}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+11x^2+12x+8=(\mathrm{Ax}+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+E(x^2+2x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+11x^2+12x+8=\mathrm{Ax}^2+(A+B)x+B+Cx^4+(3C+D)x^3+(5C+3D)x^2+$$
$$+(3C+5D)x+3D+\mathrm{Ex}^4+4Ex^3+10Ex^2+12Ex+9$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+11x^2+12x+8=(C+E)x^4+(3C+D+4E)x^3+(5C+3D+A+10E)x^2+$$
$$+(A+B+3C+5D+12E)x+(B=3D=9)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C+E=1 \\ 3C+D+4E=4 \\ 5C+3D+A+10E=11 \\ A+B+3C+5D+12E=12 \\ B+3D=9=8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} D=0 \\ B=-1 \\ A=1 \\ C=0 \\ E=1 \end{cases}$$

Vậy phân thức trở thành: $\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{1}{x+1}$.

Cách 2: Ta có

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{x^4+4x^3+4x^2+6x^2+x^2+12x+9-1}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$$

$$=\frac{(x^4+4x^3+4x^2+12x+9+6x^2)+(x^2-1)}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{(x^2+2x+3)^2+(x^2-1)}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$$

$$=\frac{(x^2+2x+3)^2}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}+\frac{x^2-1}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}$$

Vậy phân thức trở thành: $\dfrac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\dfrac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}+\dfrac{1}{x+1}$.

Bài 43: Biểu diễn các phân thức sau thành các phân thức đơn giản nhất

$a)\ \dfrac{x^2+9x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$ $\qquad b)\ \dfrac{x^3-2x^2-3x-4}{x^2(x-2)^2}$

Lời giải:

$a)\ \dfrac{x^2+9x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

Cách 1: Ta có

$$\frac{x^2+9x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+9x+2=A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+1)+C(x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+9x+2=\text{A}x^2+3Ax+2A+Bx^2+Bx-2B+Cx^2-C$$

$$\Leftrightarrow x^2+9x+2=(A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B+C=1\\3A+B=9\\2A-2B-C=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=3\\C=-4\end{cases}$$

Vậy $\dfrac{x^2+9x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4}{x+2}$

Cách 2: Ta có

$$\frac{x^2+9x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{5x^2-4x^2+6x+3x+8-6}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{2x^2+3x^2-4x^2+6x+3x+4+4-6}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{(2x^2+2x)+(4x+4)+(3x^2-3)+(3x-3)+(-4x^2+4)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{2x(x+1)+4(x+1)+3(x-1)(x+1)+3(x-1)-4(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x+1)(2x+4)+(x-1)(3x+3+3)-4(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x+1)(2x+4)}{(x-1)(x+1)(x+2)}+\frac{(x-1)(3x+3+3)}{(x-1)(x+1)(x+2)}-\frac{4(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x+2}$$

Vậy $\dfrac{x^2+9x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4}{x+2}$.

b) $\dfrac{x^3-2x^2-3x-4}{x^2(x-2)^2}$

Ta có:

$$\frac{x^3-2x^2-3x-4}{x^2(x-2)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-3x-4=A(x-2)^2+Bx^2+Cx(x-2)^2+Dx^2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-3x-4=\mathrm{A}x^2-4Ax+4A+Bx^2-4Cx^2+4Cx+Cx^3+Dx^3-2Dx^2$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-3x-4=(C+D)x^3+(A+B-4C-2D)x^2+(4C-4A)x+4A$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C+D=1\\A+B-4C-2D=-2\\4C-4A=-3\\4A=-4\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}D=\dfrac{11}{4}\\B=\dfrac{-5}{2}\\C=\dfrac{-7}{4}\\A=-1\end{cases}$$

Vậy $\dfrac{x^3-2x^2-3x-4}{x^2(x-2)^2}=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{2(x-2)^2}-\dfrac{7}{4x}+\dfrac{11}{4(x-2)}$

BÀI TẬP THỰC HÀNH GIẢI TOÁN CHƯƠNG 3

Bài 1. Tìm đa thức f(x) biết rằng f(x) chia x – 2 dư 1, f(x) chia x – 3 dư 2, f(x) chia $x^2 - 5x + 6$ được thương là x và còn dư.

***Phân tích:**

+ f(x) chia $x^2 - 5x + 6$ được thương là x và còn dư nên bậc của f(x) là bậc 3 và $f(x) = (x^2 - 5x + 6)x + ax + b$

+ f(x) chia x – 2 dư 1 và f(x) chia x – 3 dư 2, ta áp dụng định lý Bơdu để có:

$$\begin{cases} f(2) = 2a + b = 1 \\ f(3) = 3a + b = 2 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được a = 1, b = -1

Vậy $f(x) = (x^2 - 5x + 6)x + x - 1$.

***Lời giải:**

f(x) chia x – 2 dư 1 nên f(x) = (x – 2).g(x) + 1 (1)

f(x) chia x – 3 dư 2 nên f(x) = (x – 3).h(x) + 2 (2)

f(x) chia $x^2 - 5x + 6$ được thương là x và còn dư nên

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)x + ax + b \qquad (3)$$

Áp dụng định lý Bơdu ta có: $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Vậy $f(x) = (x^2 - 5x + 6)x + x - 1$.

***Khai thác bài toán:**

Ta sử dụng định lý Bơdu và định lý về phép chia có dư trong vành đa thức R(x), ta có thể giải các bài toán tương tự:

1)Tìm đa thức f(x) biết rằng f(x) chia cho x – 1, x – 2 dư 2 và f(x) chia cho $x^2 + 4x + 3$ thì được thương là x – 1 và còn dư.

2) Tìm đa thức f(x) biết rằng f(x) chia x – 2 dư 1, f(x) chia x + 3 dư 2, f(x) chia x^2 – x – 2 được thương là x và còn dư.

Bài 2. Tính nhẩm:

$$99^2,\quad 101^2,\quad \overline{a5}^2\quad (1 \le a \le 9).$$

***Phân tích:**

Ta thấy 99 = 100 – 1 , nhưng đề bài yêu cầu tính 99^2 nên ta nghĩ đến thêm , bớt để xuất hiên 100, 1 và 2 số này có thể tính ngay bình phương.

*** Lời giải:**

$99^2 = 99^2 - 1^2 + 1^2$

$= (99 - 1)(99 + 1) + 1$

$= 98.100 + 1$

$= 9801$

$101^2 = 101^2 - 1^2 + 1^2$

$= (101 - 1)(101 + 1) + 1$

$= 100.102 + 1$

$= 10201$

Riêng các số có hai chữ số có tận cùng bằng 5, dạng $\overline{a5}^2\ (1 \le a \le 9)$

Ta có: $\overline{a5}^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$

$= 100a(a + 1) + 25$

$= a(a + 1).100 + 25$

Ví dụ: $25^2 = 2.3.100 + 5 = 625$.

*khai thác bài toán:

Bằng phương phá giải như trên ta có thể giải được nhiều bài toán tương tự khác nhau như:

1.Tính nhẩm: 19^2, 29^2, 2011^2…

Bài 3: phân tích đa thức thành nhân tử

x^3+ 4x^2-41x-20

*** phân tích**

+ Đa thức trên ta nhân thấy không thể rút nhân tử chung một cách trực tiếp. Vì vầy ta có thể nghĩ đến nhóm các hạng tử hoặc nhẩm nghiêm.

+ Bằng cách nhẩm nghiệm ta thấy đa thức trên có nghiêm là x = 5

+ Dùng sơ đò Hoocne để chia đa thức trên cho x – 5

***Lời giải**

Nhận thấy x=5 là một nghiệm của phương trình

	1	4	-41	-20
5	1	9	4	0

Suy ra :y=(x-5).(x^2+9x+4)

*** Khai thác bài toán:**

1)Bằng phương pháp tương tự Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) 2x4 + 7x3 – 2x2 – 13x + 6

b) x5 – 12x3 + 36x – 25

2) Rút gọn phân thức sau: $\dfrac{x^5-12x^3+36x-25}{2x^4+7x^3-2x^2-13x+6}$

Bài 4. Rút gọn

biểu thức:

$$\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\frac{x^2-x+2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\frac{1+x^4}{x^3+x^4+x^5}-\frac{1-x-x^2}{x}\right)$$

*** Phân tích:**

Đây là bài tập rút gọn biểu thức mà biểu thức chứa hai dấu ngoặc nên ta đi biến đổi lần lượt các biểu thức trong ngoặc.

***Lời giải:**

Ta đặt biểu thức trên bằng A. ta có:

$$A=\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\frac{x^2-x+2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\frac{1+x^4}{x^3+x^4+x^5}-\frac{1-x-x^2}{x}\right)$$

$$=\left(\frac{1-x}{x^2\left(1-x-x^2\right)}-\frac{x^2+x+2}{x\left(x^4-(x+1)^2\right)}\right):\left(\frac{1+x^4-x^2\left(1-x-x^2\right)\left(x^2+x+1\right)}{x^3\left(x^2+x+1\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{x-1}{x^2\left(x^2-x-1\right)}-\frac{x^2+x+2}{x\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}\right):\frac{1+x^4-\left(x^6+x^4+x^2\right)}{x^3\left(x^2+x+1\right)}$$

$$=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)-x\left(x^2+x+1\right)-x}{x^2\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}:\frac{1-x^6-x^2}{x^3\left(x^2+x+1\right)}$$

$$=\frac{-x^2-2x-1}{x^2\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}\cdot\frac{x^3\left(x^2+x+1\right)}{1-x^6-x^2}$$

$$=\frac{-(x+1)^2}{x^2\left(x^2-x-1\right)}\cdot\frac{x^3}{1-x^6-x^2}$$

Vậy $A=\dfrac{-(x+1)^2}{x^2\left(x^2-x-1\right)}\cdot\dfrac{x^3}{1-x^6-x^2}$

* Khai thác bài toán:

Có thể đề xuất bài tán tương tự như sau:

Cho $Q=\left[\left(x^4-x+\dfrac{x-3}{x^3-1}\right)\cdot\dfrac{\left(x^3-2x^2+2x-1\right)(x+1)}{x^9+x^7-3x^2-3}+1-\dfrac{2(x+6)}{x^2+1}\right]\cdot\dfrac{4x^2+4x+1}{(x+3)(4-x)}$

Hãy rút gọn biểu thức Q.

Bài 5. Tính: $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+y}}}$

*** Phân tích:**

Ta nhận thấy phân thức này có tử là 1 và mẫu rất cồng kềnh nên ta tính ngược từ dưới lên bằng cách lần lượt tính các phân số $1+\dfrac{1}{x+y}$ được kết quả rồi quy đồng lên. Làm lần lượt ta có lời giải:

*** Lời giải:**

Ta có: $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+y}}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-y+1}{x-y}}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{x-y}{x-y-+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{x-y+1-x+y}{x-y+1}}$

$= \dfrac{x-y+1}{1} = \text{x} - \text{y} - 1.$

*** Khai thác bài toán:**

Bằng phương pháp tương tự ta có thể giải được nhiều bài toán tương tự như:

1) Tính: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+y}}}$

2) Tính $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

Bài 6. Phân tích biểu thức sau ra thừa số:

P = bc(b + c) + ac(a + c) + ab(a+b) +2abc

*** Phân tích:**

Đây là biểu thức dài mà không thể rút nhân tử một cách trực tiếp . Vì vậy ta sẽ tách một số hặng tử rồi nhóm các hạng tử theo nhân tủe chung.

Ta tách 2abc = abc + abc

$P = bc(b + c) + ac(a + c) + ab(a+b) +2abc$

$= bc(a + b + c) + ac(a + b + c) + ab(a + b)$

$= c(a + b + c)(a + b) + ab(a + b)$

$= (a + b)[ab + c(a + b + c)]$

*** Lời giải:**

$P = bc(b + c) + ac(a + c) + ab(a+b) +2abc$

$= bc(b + c) + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 + 2abc$

$= bc(b + c) + a^2(b + c) + a(b^2 + 2bc + c^2)$

$= bc(b + c) + a^2(b + c) + a(b + c)^2$

$= (b + c) [bc + a^2 + a(b + c)]$

$= (b + c)(bc + ab + ac + a^2)$

$P = (b + c)[b(c + a) + a(a + c)]$

$= (b + c)(a + c)(a + b).$

*** Khai thác bài toán:**

Ta có bài toán tương tự:

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $A = bc(b – c) + ca(c – a) – ab(a + b)$

b) $B = a(b + c)^2 +b(a + c)^2 + c(a + b)^2 – 4abc$

Bài 7. Rút gọn biểu thức:

*** Phân tích:**

Ta thấy biểu thức A có các hạng tử ở trên tử và dưới mẫu đều giống nhau chỉ khác nhau về dấu. Nên ta nghĩ đến đưa tử số , mâu số hình thành nhân tử và trong các nhân tử đó có nhân tư chung.

TS $= a^4 + 2b^2 - 2a^2 - a^2b^2$

$= a^2(a^2 - b^2) - 2(a^2 - b^2)$

$= (a^2 - b^2)(a^2 - 2)$

MS $= a^4 - 2b^2 + 2a^2 - a^2b^2$

$= a^2(a^2 - b^2) - 2(a^2 - b^2)$

$= (a^2 - b^2)(a^2 - 2)$

*** Lời giải:**

C_1: A $= \dfrac{a^4+2b^2-2a^2-a^2b^2}{a^4-2b^2+2a^2-a^2b^2} = \dfrac{a^2(a^2-b^2)-2(a^2-b^2)}{a^2(a^2-b^2)+2(a^2-b^2)}$

$= \dfrac{(a^2-b^2)(a^2-2)}{(a^2-b^2)(a^2+2)} = \dfrac{a^2-2}{a^2+2}$

Vậy A $= \dfrac{a^2-2}{a^2+2}$.

C_2: A $= \dfrac{a^4+2b^2-2a^2-a^2b^2}{a^4-2b^2+2a^2-a^2b^2} = \dfrac{a^2(a^2-2)-b^2(a^2-2)}{a^2(a^2+2)-b^2(a^2+2)}$

$= \dfrac{(a^2-b^2)(a^2-2)}{(a^2-b^2)(a^2+2)} = \dfrac{a^2-2}{a^2+2}$

Vậy A $= \dfrac{a^2-2}{a^2+2}$

*** Khai thác bài toán:**

Với cách làm như trên ta có các bài toán tượng tự:

1) Rút gọn biểu thức: A$= \dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy}$

2) Tính B $= \dfrac{x^5 + 3x^3 - 10x + 12}{x^4 + 7x^2 + 15}$ biết x là nghiệm của $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = \dfrac{1}{4}$

Bài 8. Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9 = 0$ (1)

*** Phân tích:**

Để giải phương trình (1) ta đi phân tích đa thức vế trái thành nhân tử, đưa phương trình bậc cao về dạng phương trình tích.

Theo đó ta có lời giải sau:

*** Lời giải:**

$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2(2x - 3) + (2x - 3)2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x +3)2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x +3 = 0$ (2)

Ta thấy Δ= 1- 3 = - 2 < 0 nên phương trình vô ngiệm trên R

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

*** Khai thác bài toán:**

Ta nhận xét thấy phương trình (2) vô nghiệm trên R, ta xét phương trình trên trường số phức C, thì:

$$x^2 - 2x +3 = 0$$

có Δ = -2 = $2i^2$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2}i \\ x_2 = 1 - \sqrt{2}i \end{cases}$

Vậy trên trường số phức phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2}i \\ x_2 = 1 - \sqrt{2}i \end{cases}$

<u>Bài toán tương tự:</u>

1) Giải phương trình:

a) $x^3 - 1 = 0$

b) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $5x^2 - 4(x^2 - 2x + 1) - 5 = 0$

2) Giải phương trình: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) + 16 = 0$

* **<u>Hướng dẫn:</u>**

$(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) + 16 = 0$

ta có: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x - 5) + 16 = 0$

Đặt t = x2 + 4x + 4, $t \geq 0$ (*) thì (1) trở thành:

$(t - 1)(t - 9) + 16 = 0$ (2)

Giải phương trình (2) tìm được t = 5 thay vào (*) ta tìm được $x = -2 \pm 2\sqrt{5}$.

Bài 9. Giải phương trình: $x^4 - 5x^3 + 4x = 0$

*** Phân tích:**

+ Ta nhận thấy vế trái của phương trình có hạng tử chung là x, nên ta có thể viết vế trái dưới dạng phương trình tích $x(x^3 - 5x^2 + 4)$.

+ Mặt khác, $x^3 - 5x^2 + 4$ là đa thức bậc 3 nên ta có thể sử dụng phương pháp nhẩm nghiệm, ta được $x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)g(x)$. Tiếp tục thực hiện phép chia liên tiếp để tìm nghiệm. Ta có lời giải:

*** Lời giải:**

$x^4 - 5x^3 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^3 - 5x^2 + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 - 4x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x(x-1)(x-2(1-\sqrt{2}))(x-2(1+\sqrt{2}))=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2(1-\sqrt{2}) \\ x=2(1+\sqrt{2}) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt là: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2(1-\sqrt{2})$, $x = 2(1+\sqrt{2})$.

*** Khai thác bài toán:**

Bài toán tương tự:

Giải phương trình:

a) $x^7 - 5x^6 + 4x^4 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0$

c) $x^4 = (2x - 5)^2$.

Bài 10. Giải hệ:

$$\begin{cases} 4a(ab^2+2ab+a-b-1)+1\le 0 \\ a-b=3 \end{cases}$$

*** Phân tích:**

- Hệ gồm một phương trình 2 ẩn và một bất phương trình. Để giải hệ trên ta có thể đưa bất phương trình về dạng phương trình hoặc đơn giản hơn bằng cách nhóm hạng tử.

- Ta thấy: $4a(ab^2 + 2a + a - b - 1) + 1 = 4a[a(b^2 + 2b + 1) - (b + 1)] + 1$

$= 4a[a(b + 1)^2 - (b + 1)] + 1$

$= 4a[(b + 1)(a(b + 1) - 1)] + 1$

$= 4a^2(b + 1)^2 - 4a(b + 1) + 1$

$= (2a(b + 1) - 1)^2$

- Nhận thấy VT của bất phương trình là bình phương của một hiệu nên VT luôn lớn hơn hoặc bằng 1.Vì vậy ta có lời giải:

*** Lời giải:**

$$\begin{cases} 4a(ab^2+2ab+a-b-1)+1\le 0 & (1) \\ a-b=3 & (2) \end{cases}$$

Xét (1): Ta có: (1) = $4a[a(b^2 + 2b + 1) - (b + 1)] + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow 4a[a(b + 1)^2 - (b + 1)] + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow 4a^2(b + 1)^2 - 4a(b + 1) + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow (2a(b + 1) - 1)^2 \le 0$

Vì $(2a(b + 1) - 1)^2 \le 0$ nên bất đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 2a(b + 1) - 1 = 0$ (3)

Từ (2) & (3) ta có hệ: $\begin{cases} 2a(b+1)-1=0 \\ a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-b)(b+1)-1=0 \\ a=3-b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-4\pm\sqrt{6}}{2} \\ a=3-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-4\pm\sqrt{6}}{2} \\ a=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

*** Khai thác bài toán:**

- Từ tính chất $(A \pm B)^2 \ge 0$ nên ta có thể đưa ra bài toán tương tự: giải hệ $\begin{cases} a(ab^2+2ab+a-2b-2)+1\le 0 \\ a+b=2 \end{cases}$

- Từ kết quả chứng minh, ta có thể đưa ra bài toán khác:

CMR: $4a(ab^2 + 2ab + a - b - 1) +1 \ge 0$, $\forall$ a, b.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4
CĂN SỐ VÀ BIẾN ĐỔI HỮU TỈ

Bài 1/186 **Xét biểu thức:**

$$B=\left[\frac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right].\left[\frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right]$$

a) Rút gọn B.

b) Xét dấu của biểu thức $B.\sqrt{1-a}$

Giải:

a) ĐK: $a\ge 0,\ a\ne 1$

Cách 1:

$$B=\left[\frac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right].\left[\frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right]$$

$$=\left[\frac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1}-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}\right].\left[\frac{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+a-\sqrt{a}\right)}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right]$$

$$=\left[\frac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1}-\frac{\left(a-\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a^3}-1}\right].\left(1-2\sqrt{a}+a\right)$$

$$=\frac{a+\sqrt{a}+1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}.\left(1-\sqrt{a}\right)^2$$

$$=\sqrt{a}-1$$

Cách 2:

$$B=\left[\frac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right].\left[\frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right]$$

$$=\left[\frac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1}-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(a+\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}\right].\left[\frac{1+\sqrt{a^3}-\sqrt{a}-a}{1+\sqrt{a}}\right]$$

$$=\left[\frac{2a+1-a+\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}-1}\right].\left[\frac{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(a-2\sqrt{a}+1\right)}{1+\sqrt{a}}\right]$$

$$=\frac{a+\sqrt{a}+1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}.\left(a-2\sqrt{a}+1\right)$$

$$=\sqrt{a}-1$$

b) Ta có:

$B.\sqrt{1-a}=\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{1-a}\right)$

Theo câu a: ĐK: $a\ge 0,\ a\ne 1$

Mà $1-a\ge 0\ \Rightarrow\ a\le 1$

Kết hợp với ĐK của câu a ta được: $0\le a<1$

Vì $\sqrt{1-a}\ge 0\quad \forall a\in[0,1)$

Suy ra $B=\sqrt{a}-1<0\quad \forall a\in[0,1)$.

Bài 2/186 **Xét biểu thức:**

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{x+2\sqrt{x}+4}+\frac{4}{\sqrt{x}-2}-\frac{8\sqrt{x}+32}{x\sqrt{x}-8}\right):\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}+2}\right)$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P, biết $x=4-2\sqrt{3}$ **.**

c) Tính giá trị của x để $P=9$**.**

Giải:

a) ĐK: $\begin{cases}\sqrt{x}+2\neq 0\\ \sqrt{x}-2\neq 0\\ x\sqrt{x}-8\neq 0\\ x\geq 0\end{cases}$ => $\begin{cases}x\neq 4\\ x\geq 0\end{cases}$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{x+2\sqrt{x}+4}+\frac{4}{\sqrt{x}-2}-\frac{8\sqrt{x}+32}{x\sqrt{x}-8}\right):\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(x+2\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}+\frac{4\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}-\frac{8\sqrt{x}+32}{x\sqrt{x}-8}\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2+2x\sqrt{x}+16}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}-\frac{8\sqrt{x}+32}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}\right).\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2+2x\sqrt{x}+16-8\sqrt{x}-32}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}\right).\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2+2x\sqrt{x}-8\sqrt{x}-16}{x\sqrt{x}-8}\right).\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{\left(x\sqrt{x}-8\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x\sqrt{x}-8}\right).\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\left(\sqrt{2}+x\right)^2}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có:

$x=4-2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+1$

$\Rightarrow\ x=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

$\Rightarrow\ \sqrt{x}=\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1$

Thay $\sqrt{x}=\sqrt{3}-1$ vào P ta được:

$$P=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=3\sqrt{3}+5$$

c) Để $P=9$ thì $\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}}=9$

Ta có: $\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}}=9$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+2\right)^2=9\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x-5\sqrt{x}+4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=16\end{array}\right.$$

Bài 3/186 Xét biểu thức:

$$Q=\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x^3}-x}{\sqrt{x}-1}$$

a) Rút gọn Q.

b) Tìm x để $Q>0$.

c) Tính giá trị của Q nếu $x=\dfrac{53}{9-2\sqrt{7}}$.

Giải:

a) $\begin{cases}x-1\ge 0\\ x\ge 0\\ \sqrt{x-1}-\sqrt{x}\ne 0\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{x}\ne 0\\ \sqrt{x}-1\ne 0\end{cases} \Rightarrow \quad x>1$

$$Q=\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x^3}-x}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}+x$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}+x\left(x-1-x\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{x-1}-x}{-1}$$

$$=x-2\sqrt{x-1}$$

$$=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$$

b) $Q>0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}-1\ne 0\\ x>1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

Vậy với $x \neq 2$ và $x > 1$ thì $Q > 0$

c) $x = \dfrac{53}{9-2\sqrt{7}} = \dfrac{53\left(9+2\sqrt{7}\right)}{81-28} = 9+2\sqrt{7}$

$$Q = \left(\sqrt{9+2\sqrt{7}-1}-1\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{8+2\sqrt{7}}-1\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{\left(\sqrt{7}+1\right)^2}-1\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{7}+1-1\right)^2$$
$$= 7$$

Bài 4/186 Xét biểu thức:

$$M = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}+\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}-1\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}+1\right)$$

a) Rút gọn M.

b) Tính giá trị của M nếu $a = 2-\sqrt{3}$ và $b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của M nếu $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 1$.

Giải:

a) ĐK: $\begin{cases} ab > 0 \\ ab \neq 1 \end{cases}$

$$M = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}+\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}-1\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}+1\right)$$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{ab}-1\right)+\left(\sqrt{ab}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{ab}+1\right)-\left(ab-1\right)}{ab-1}\right):\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{ab}-1\right)-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{ab}+1\right)+\left(ab-1\right)}{ab-1}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{ab}+2a\sqrt{b}}{ab-1}\cdot\frac{ab-1}{\left(-2\sqrt{a}-2\right)} = \frac{2\sqrt{ab}+2a\sqrt{b}}{-\sqrt{a}-1} = \frac{\sqrt{ab}\left(1+\sqrt{a}\right)}{-\left(\sqrt{a}+1\right)}$$

$$= -\sqrt{ab}$$

b) Với $a = 2-\sqrt{3}$ và $b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$, ta có:

$$M = -\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)}$$

$$= -\sqrt{\frac{\left(3\sqrt{3}-5\right)}{\sqrt{3}+1}} = -\sqrt{\frac{14-8\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{7-4\sqrt{3}} = -\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}-2$$

c) Ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=1 \Leftrightarrow a+b=1-2\sqrt{ab}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho $a,\ b>0$ ta có:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{ab}\ge 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{ab}\le 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{ab}\ge -\frac{1}{4}$$

Vậy $MinM=-\frac{1}{4}$ khi $\begin{cases}\sqrt{ab}=\frac{1}{4}\\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=\frac{1}{4}\end{cases}$

Bài 5/187 Tính giá trị của biểu thức:

$A=\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ **khi** $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ **trong các trường hợp:**

a) $a>0,\ b>0$

b) $a<0,\ b<0$.

Giải:

ĐK: $|x|\ge 1$

Ta có:

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{\left(a+b\right)^2}{4ab} \Leftrightarrow x^1-1=\frac{\left(a+b\right)^2-4ab}{4ab}$$

$$\Leftrightarrow x^1-1=\frac{\left(a-b\right)^2}{4ab}$$

Do đó:

$$A=\frac{2b\sqrt{\frac{\left(a-b\right)^2}{4ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\sqrt{\frac{\left(a-b\right)^2}{4ab}}}=\frac{2a\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}=\frac{2b|a-b|}{\left(a+b\right)-|a-b|}$$

a) Khi $a>0,\ b>0$ thì

Nếu $a\ge b \Rightarrow A=\frac{2b\left(a-b\right)}{\left(a+b\right)-\left(a-b\right)}=a-b$

Nếu $a<b \Rightarrow A=\frac{2b\left(b-a\right)}{\left(a+b\right)-\left(b-a\right)}=\frac{b(b-a)}{a}$

b) Khi $a<0,\ b<0$ thì

Nếu $a \geq b \Rightarrow A=\dfrac{-2b(b-a)}{(a+b)-(b-a)}=\dfrac{-b(b-a)}{a}$

Nếu $a<b \Rightarrow A=a-b$

Bài 6/187 Rút gọn biểu thức:

$$C=\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}$$

Giải:

ĐK: $n \geq 2$

$$C=\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}=\frac{(n^3-3n-2)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}{(n^3-3n+2)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n-2)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}{(n+2)(n-1)^2+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}=\frac{(n+1)\left[(n-2)(n+1)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}\right]}{(n-1)\left[(n+2)(n-1)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}\right]}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}.\left[\sqrt{n-2}\left(n+1\right)+\left(n-1\right)\sqrt{n+2}\right]}{(n-1)\sqrt{n+2}.\left[\sqrt{n+2}\left(n-1\right)+\left(n+1\right)\sqrt{n-2}\right]}$$

$$=\frac{\left(n+1\right)\sqrt{n-2}}{\left(n-1\right)\sqrt{n+2}}$$

Bài 7/187 Tìm phần nguyên của số:

$$S_n=\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\ \dots\ +\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$$

Giải:

Ta thấy số hạng tổng quát của S_n có dạng:

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}=\sqrt[k+1]{1+\frac{1}{k}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho k + 1 số:

$$1+1+\ \dots\ +1+1+\frac{1}{k}\geq (k+1)\sqrt[k+1]{1+\frac{1}{k}}$$

Với $k=1 \Rightarrow 1+1+\dfrac{1}{2}\geq 2\sqrt{2} \Rightarrow 1+\dfrac{1}{2}\geq \sqrt{2}$

$k=2 \Rightarrow 1+1+1+\dfrac{1}{2}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \Rightarrow 1+\dfrac{1}{6}\geq \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

.

.

.

$$k = n \Rightarrow 1+1+\ldots+1+1+\frac{1}{n} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$$

$$\Rightarrow n+1+\frac{1}{n} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$$

Cộng hai vế ta có: $S_n \leq n+1-\dfrac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad n \leq S_n \leq n+1$

Vậy: $[S_n] = n$

Bài 8/187

a) $\forall p \in □, q \in □, 0 \leq q < p$ **Chứng minh rằng**

$$\sqrt[p+q]{p+q} \leq \sqrt[p]{p-q+\frac{2q}{\sqrt{p+q}}}$$

b) Từ đó chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt[2010]{2010}+\sqrt[2009]{2009}+\sqrt[2008]{2008} < \sqrt[2007]{2004+\frac{6}{\sqrt{2010}}}+\sqrt[2007]{2005+\frac{4}{\sqrt{2009}}}+\sqrt[2007]{2006+\frac{2}{\sqrt{2008}}}$$

Giải

a) Ta có: $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p-q}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{p+q}}+\frac{1}{\sqrt{p+q}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{p+q}}}_{2q}$

$$\geq (p-q+2q)\sqrt[p+q]{(p+q)^{p-q}.\sqrt{(p+q)^{2q}}} = (p+q)\sqrt[p+q]{(p+q)^{p-q}.\sqrt{(p+q)^{2q}}}$$

Chia cả 2 vế cho $p+q$ ta được

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p-q}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{p+q}}+\frac{1}{\sqrt{p+q}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{p+q}}}_{2q} \geq \sqrt[p+q]{(p+q)^{p-q}.\sqrt{(p+q)^{2q}}}$$

$$\Leftrightarrow p-q+\frac{2q}{\sqrt{p+q}} \geq \sqrt[p+q]{(p+q)^{p-q}.(p+q)^{q}} = \sqrt[p+q]{(p+q)^{p}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[p+q]{(p+q)^{p}} \leq p-q+\frac{2q}{\sqrt{p+q}}$$

Vì hai vế đều không âm lấy căn bậc p hai vế ta được:

$$\sqrt[p+q]{p+q} \le \sqrt[p]{p-q+\frac{2q}{\sqrt{p+q}}}$$

b) Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt[2010]{2010} + \sqrt[2009]{2009} + \sqrt[2008]{2008}$

$$< \sqrt[2007]{2004+\frac{6}{\sqrt{2010}}} + \sqrt[2007]{2005+\frac{4}{\sqrt{2009}}} + \sqrt[2007]{2006+\frac{2}{\sqrt{2008}}}$$

Áp dụng bất đẳng thức (a) cho p = 2007, q = 3 ta được:

$$\sqrt[2010]{2010} < \sqrt[2007]{(2007-3)+\frac{2.3}{\sqrt{2010}}} = \sqrt[2007]{2004+\frac{6}{\sqrt{2010}}} \qquad (1)$$

Tương tự:

$$\sqrt[2009]{2009} < \sqrt[2007]{(2007-2)+\frac{2.2}{\sqrt{2009}}} = \sqrt[2007]{2005+\frac{4}{\sqrt{2009}}} \qquad (2)$$

$$\sqrt[2008]{2008} < \sqrt[2007]{(2007-1)+\frac{2.1}{\sqrt{2008}}} = \sqrt[2007]{2006+\frac{2}{\sqrt{2008}}} \qquad (3)$$

Công từng vế của 3 bất phương trình (1),(2),(3) với nhau ta được

$$\sqrt[2010]{2010} + \sqrt[2009]{2009} + \sqrt[2008]{2008}$$

$$< \sqrt[2007]{2004+\frac{6}{\sqrt{2010}}} + \sqrt[2007]{2005+\frac{4}{\sqrt{2009}}} + \sqrt[2007]{2006+\frac{2}{\sqrt{2008}}}$$

Bài 9/187 Với $a,\ b,\ c \notin R$**, chứng minh rằng:**

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \ge 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Giải:

Đặt

$\vec{u} = (a+c\ ,\ b) \ \Rightarrow\ |\vec{u}| = \sqrt{(a+c)^2+b^2}$

$\vec{v} = (a-c\ ,\ b) \ \Rightarrow\ |\vec{v}| = \sqrt{(a-c)^2+b^2}$

$\vec{z} = (2a\ ,\ 2b) \ \Rightarrow\ |\vec{z}| = 2\sqrt{a^2+b^2}$

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:

$|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{z}|$ (đpcm)

Vậy: $\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\geq 2\sqrt{a^2+b^2}$

Bài 10/187

Trục căn thức ở mẫu của biểu thức: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$

Giải:

Ta có: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y+z}=\frac{\sqrt[3]{(a)^2}+\sqrt[3]{(b)^2}+\sqrt[3]{(c)^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac}}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{(a)^2}+...-\sqrt[3]{ac}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}\right]}{(abc)^3-27abc}$$

Bài 11/188 Tìm một nhân tử liên hợp của biểu thức:

$S=1+\sqrt{2}+\sqrt{4}$

Giải:

Ta có:

$$S=\frac{1+2+4-3\sqrt[3]{1.2.4}}{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{4}}$$

$$S=\frac{7-6}{1+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}-2}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$$

Bài 12/188 Tìm a để hàm số $y=-2x+2+a\sqrt{x^2-4x+5}$ đạt cực đại

Giải:

Hàm số cho xác định trên R có:

$y=-2x+2+a\sqrt{x^2-4x+5}$

$\Rightarrow y'=-2+\dfrac{a(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

$\Rightarrow y''=\dfrac{a}{\sqrt{(x^2-4x+5)}^2}$

Hàm số đạt cực đại tại

$$x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a(x_0 - 2)}{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} = 2 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{(x_0 - 2)} = \dfrac{a}{2} (1) \\ a < 0 \end{cases}$$

Với a<0 thì $(1) \Leftrightarrow x_0 < 2$

Xét hàm số: $f(x_0) = \dfrac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2}, x_0 < 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = -1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = -\infty$$

Ta có: $f'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0 - 2)^2 \sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} < 0, \forall x_0 \in (-\infty, 2)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2
f'(x)	-1	‖
f'(x)		$-\infty$

Phương trình (1) $x_0 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{2} < -1 \Leftrightarrow a < -2$

Bài 13/188 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = f(x) = x + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}}$

Giải:

Gọi y_0 là giá trị tùy ý của hám số với $x > 0$. Tức là hệ phương trình ẩn x sau đây có nghiệm: $y_0 = x + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}}$

Hay hệ phương trình sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} y_0 = x + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - x = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_0 - x)^2 = x^2 + \dfrac{1}{x} \\ 0 < x \le y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_0 x^2 - y_0^2 x + 1 = 0 \ (1) \\ 0 < x \le y \end{cases}$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm:

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow y_0{}^4 - 8y_0 \geq 0$

$\Leftrightarrow y_0\left(y_0{}^3 - 8\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow y_0 \geq 2\left(y_0 > 0\right)$

Đặt $\begin{cases} S = \dfrac{y_0{}^2}{2y_0} = \dfrac{1}{2}y_0 \Rightarrow S > 0 \\ P = \dfrac{1}{2}y_0 \Rightarrow P > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_{1,}x_2$ là nghiệm của phương trình hệ phương trình với $0 < x_1 \leq x_2 < y_0$

Vậy GTNN của hàm số là: $f\left(x\right) = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Bài 14/188 Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số

y = f(x) = $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4}$

Giải:

Đặt $\begin{matrix} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{4-x} \end{matrix}$ ta được $\begin{cases} u - v = \alpha \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases}$ (u,v>0)

$\Rightarrow -\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} \leq \sqrt{5}$

$\underset{[-1,4]}{\text{Min}}\, y = -\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{5} = \sqrt{4-x}$

$\Leftrightarrow x + 6 + 2\sqrt{5x+5} = 4 - x$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = -2\sqrt{5x+5}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x = -1$

Vậy $\underset{[-1,4]}{\text{Min}}\, y = -\sqrt{5} \Leftrightarrow x = -1$

$\underset{[-1,4]}{\text{Max}}\, y = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 4$

BÀI TẬP THỰC HÀNH GIẢI TOÁN CHƯƠNG 4

Bài 1/188 Giải phương trình

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{4}$$

Giải:

****) Phân tích:***

Ta nhận thấy biểu thức dưới dấu căn là bình phương của một tổng. Do đó, ta biến đổi để xử lý căn tầng sau đó giải phương trình.

Chú ý: Biểu thức dưới dấu căn $x+\frac{1}{4}\geq 0$ để kết hợp nghiệm.

****) Lời giải:***

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\quad x+\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\quad x+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\quad x+\frac{1}{4}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{ll}\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} & (I)\\ \sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} & (II)\end{array}\right.$$

Với (I) ta có: $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{1}{4}}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$

Với *(II)* thì loại

Vậy phương trình có một nghiệm $x=-\frac{1}{4}$

****) Khai thác bài toán:***

Có thể xử lý căn tầng bằng cách tách biểu thức dưới dấu căn thành bình phương của một tổng hoặc bình phương của một hiệu để làm gọn các biểu thức vô tỉ.

Với chú ý như vậy, ta có thể giải các bài toán sau:

1. Rút gọn biểu thức

$$A=\sqrt{2x+2+2\sqrt{2x+1}}-\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}$$

Giải: ĐK $x\geq-\frac{1}{2}$

$$A=\sqrt{2x+2+2\sqrt{2x+1}}-\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2}$$
$$=\left|\sqrt{2x+1}+1\right|-\left|\sqrt{2x+1}-1\right|$$
$$=\begin{cases}2 & (x\geq 0)\\ 2\sqrt{2x+1} & (-\frac{1}{2}\leq x<0)\end{cases}$$

Bài 2/188 Rút gọn biểu thức

$\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{16-16x+4x^2}$

Giải:

****) Phân tích:***

Biến đổi biểu thức dưới dấu căn thành bình phương của một tổng hoặc bình phương của một hiệu để đưa ra ngoài căn.

****) Lời giải:***

$$\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{16-16x+4x^2}$$
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(2x-3)^2}-\sqrt{(4-2x)^2}$$
$$\Leftrightarrow\ |2x-3|-|4-2x|$$

Nếu $x<\frac{3}{2}$ => $A=3-2x-(4-2x)$ hay $A=-1$

Nếu $x\in\left[\frac{3}{2}\,;\,2\right]$ => $A=2x-3-(4-2x)$ hay $A=4x-7$

Nếu $x>2$ => $A=2x-3-(2x-4)$ hay $A=1$

****) Khai thác:***

Giải bài toán tương tự: Rút gọn biểu thức

$$M=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}$$
$$=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$$
$$=|x-1|-|x-2|$$

Nếu $x<1$ => $M=1-x-(2-x)$ hay $M=-1$

Nếu $x\in[1\,;\,2]$ => $M=x-1-(2-x)$ hay $M=-3$

Nếu $x>2$ $M=x-1-(x-2)$ hay $M=1$

$$N=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}-\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}\qquad \text{với } x\neq 0$$

Ta có:

$$N=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}-\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}$$

$$=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=\left|x-\frac{1}{x}\right|-\left|x+\frac{1}{x}\right|$$

$$=\frac{\left|x^2-1\right|-\left|x^2+1\right|}{|x|}$$

$$N=\frac{-2}{|x|} \text{ nếu } \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge 1\end{array}\right.$$

$$N=\frac{-2x^2}{|x|} \text{ nếu } \begin{cases} -1<x<1 \\ x\ne 0\end{cases}$$

Bài 3/188 **Cho** $C=\left(1-\frac{\sqrt{x}-4x}{1-4x}\right):\left(1-\frac{1+2x}{1-4x}-\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}\right)$

a) Rút gọn C

b) Tìm các giá trị của x để $C<C^2$

c) Tìm các giá trị của x để $C=\frac{1}{4}$.

Giải:

a) ĐK: $x\ge 0,\ x\ne \frac{1}{4}$

$$C=\left(1-\frac{\sqrt{x}-4x}{1-4x}\right):\left(1-\frac{1+2x}{1-4x}-\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}\right)$$

$$=\left(\frac{1-4x-\sqrt{x}+4x}{1-4x}\right):\left(\frac{1-4x-1-2x+2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{1-4x}\right)$$

$$=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-2x}$$

$$=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) Để $C<C^2$ thì $\frac{1}{2\sqrt{x}}<\frac{1}{4x}$, ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{4x}$$

$\Leftrightarrow 4x < 2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 4x - 2\sqrt{x} < 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x} - 1\right) < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ hay $x \in \left(0\ ,\ \frac{1}{4}\right)$

c) Ta có:

$C = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2$

$\Leftrightarrow x = 4$

Bài 3/188 Cho $P = \left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{x+2\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-2} - \frac{8\sqrt{x}+32}{x\sqrt{x}-8}\right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}+2}\right)$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P, biết $x = 4 - 2\sqrt{3}$ **.**

c) Tính giá trị của x để $P = 9$**.**

Giải:

a) ĐK: $\begin{cases} \sqrt{x}+2 \neq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \\ x\sqrt{x}-8 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{x+2\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-2} - \frac{8\sqrt{x}+32}{x\sqrt{x}-8}\right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(x+2\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} + \frac{4\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)} - \frac{8\sqrt{x}+32}{x\sqrt{x}-8}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+2x\sqrt{x}+16}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)} - \frac{8\sqrt{x}+32}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}\right) . \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+2x\sqrt{x}+16-8\sqrt{x}-32}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}\right) . \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+2x\sqrt{x}-8\sqrt{x}-16}{x\sqrt{x}-8}\right) . \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{\left(x\sqrt{x}-8\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x\sqrt{x}-8}\right).\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\left(\sqrt{2}+x\right)^2}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có:

$x=4-2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+1$

$\Rightarrow\ x=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

$\Rightarrow\ \sqrt{x}=\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1$

Thay $\sqrt{x}=\sqrt{3}-1$ vào P ta được:

$$P=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=3\sqrt{3}+5$$

c) Để $P=9$ thì $\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}}=9$

Ta có: $\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}}=9$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+2\right)^2=9\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x-5\sqrt{x}+4=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=16\end{array}\right.$

Bài 4/189 Tìm giá trị lớn nhất (bé nhất) nếu có của:

$D=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

$E=x-\sqrt{2x-2003}+2004$

Giải:

$D=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Miền xác định: $x\in\left(-2\ ,\ 2\right)$ nên ta có:

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{(2-x)(2+x)}$

$\qquad=\sqrt{2-x}.\sqrt{2+x}$

Với $2-x>0,\ 2+x>0$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$=\sqrt{2-x}.\sqrt{2+x}\le\dfrac{2-x+2+x}{2}=2$

Suy ra: $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ge\dfrac{1}{2}$ hay $\text{Min}\,D=\dfrac{1}{2}$

Dấu " = " xảy ra khi $2-x=2+x\Leftrightarrow x=0$

Vậy Min $D = \frac{1}{2}$ khi $x = 0$

$E = x - \sqrt{2x - 2003} + 2004$

Điều kiện: $x \geq \frac{2003}{2}$

Ta đặt $\sqrt{2x-2003} = t \Rightarrow (2x - 2003) = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 + 2003}{2}$

Khi đó:

$$E = \frac{t^2 + 2003}{2} - t + 2004$$

$$= \frac{t^2 - 2t + 6011}{2}$$

$$= \frac{t^2 - 2t + 1 + 6012}{2}$$

$$= \frac{(t-1)^2 + 6010}{2} \geq \frac{6010}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi $t - 1 = 0$ => $t = 1$ hay $\sqrt{2x-2003} = 1$ => $x = 1002$

Vậy $E_{min} = 3005$ khi x = 1002

Bài 5/189

a) Tính $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$

b) Tính $B = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{1 - \sqrt{21 - 6\sqrt{12}}}}$

Phân tích:

Ta thấy đây là các biểu thức chứa nhiều dấu căn. Ta có thể thoát ra khỏi các dấu căn từ trong ra ngoài bằng cách tách các biểu thức dưới dấu căn thành dạng bình phương của một tổng (hoặc hiệu).

Lời giải:

a) $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{\left(\sqrt{20} - 3\right)^2}}}$$

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{20} + 3}}$$

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - \sqrt{20}}}$$

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}}$$

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1}$$

$$A = 1.$$

b) $B=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{1-\sqrt{21-6\sqrt{12}}}}$

$B=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{1-\sqrt{\left(\sqrt{12}-3\right)^2}}}$

$B=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{1-\sqrt{12}+3}}$

$B=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

$B=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}$

$B=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}$

$B=1$.

Khai thác bài toán:

Bằng phương pháp tương tự ta có thể giải các bài toán sau:

1) Tính: $P=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{9-\sqrt{32}}}}$

Ta có: $P=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{9-2\sqrt{8}}}}$

$P=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{\left(\sqrt{8}-1\right)^2}}}$

$P=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{8}+1}}$

$P=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}}$

$P=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}$

$P=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}$

$P=1$.

2) Tính: $S=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}}}}$

Ta thấy: $3+\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}=3+\dfrac{2\sqrt{13}+2}{4}=\dfrac{14+2\sqrt{13}}{4}=\left(\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)^2$ nên ta có:

$S=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)^2}}}$

$S=\sqrt{3+\sqrt{3+\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}}}$

$S=\sqrt{3+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)^2}}$

$$S=\sqrt{3+\frac{\sqrt{13}+1}{2}}$$

$$S=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)^2}$$

$$S=\frac{\sqrt{13}+1}{2}.$$

3) Tính: $P=\sqrt{n+2\sqrt{n-1}}+\sqrt{n-2\sqrt{n-1}} \qquad (n\geq 1)$.

$$P=\sqrt{n-1+2\sqrt{n-1}+1}+\sqrt{n-1-2\sqrt{n-1}+1}$$

$$P=\sqrt{\left(\sqrt{n-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{n-1}-1\right)^2}$$

$$P=\left|\sqrt{n-1}+1\right|+\left|\sqrt{n-1}-1\right|$$

$$P=\begin{cases}2\sqrt{n-1} & \text{nếu } n>2\\ 2 & \text{nếu } 1\leq n<2.\end{cases}$$

Bài 6/189

Tính A $=\dfrac{2n\sqrt{x^2-4}}{x-\sqrt{x^2-4}}$ nếu $x=\sqrt{\dfrac{n}{m}}+\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ với $m>n>0$

** Phân tích:*

Ta thấy

$$x^2-4=\left(\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2-4=\frac{n}{m}+2\sqrt{\frac{n}{m}}.\sqrt{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}-4=\frac{n}{m}-2+\frac{m}{n}=\left(\sqrt{\frac{n}{m}}-\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2$$

Thay vào biểu thức A, ta tính được giá trị A

** Lời giải:*

Ta có: $x^2-4=\left(\sqrt{\dfrac{n}{m}}+\sqrt{\dfrac{m}{n}}\right)^2-4=\dfrac{m}{n}+2\sqrt{\dfrac{n}{m}}.\sqrt{\dfrac{m}{n}}+\dfrac{m}{n}-4$

$$=\frac{n}{m}-2+\frac{m}{n}=\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2-2\sqrt{\frac{n}{m}}.\sqrt{\frac{m}{n}}+\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{\frac{n}{m}}-\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2$$

Thay vào A, ta có:

$$A = \frac{2n.\left|\sqrt{\frac{n}{m}} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right|}{\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}} - \left|\sqrt{\frac{n}{m}} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right|}$$

* TH 1: Nếu $\sqrt{\frac{n}{m}} > \sqrt{\frac{m}{n}}$, ta có:

$$A = \frac{2n.\left|\sqrt{\frac{n}{m}} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right|}{\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}} - \left|\sqrt{\frac{n}{m}} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right|} = \frac{2n.\left(\sqrt{\frac{n}{m}} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)}{2\sqrt{\frac{m}{n}}} = \frac{n.\sqrt{\frac{n}{m}}}{\sqrt{\frac{m}{n}}} - \frac{n.\sqrt{\frac{m}{n}}}{\sqrt{\frac{m}{n}}} = \frac{n^2}{m} - n = n(\frac{n}{m} - 1)$$

* TH 2: Nếu $\sqrt{\frac{n}{m}} < \sqrt{\frac{m}{n}}$, ta có:

$$A = \frac{2n.\left|\sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}}\right|}{\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}} - \left|\sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}}\right|} = \frac{2n.\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)}{2\sqrt{\frac{n}{m}}} = \frac{n.\sqrt{\frac{m}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{m}}} - \frac{n.\sqrt{\frac{n}{m}}}{\sqrt{\frac{n}{m}}} = m - n$$

Bài 7/189

Tính:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}}$

b) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$

**** Phân tích:***

a) Ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu, ta được một tổng mà các số hạng liền nhau có thể triệt tiêu cho nhau được.

b) Nhân cả tử và mẫu của cả hai số hạng với 2, biến đổi thành hằng đẳng thức, rồi tính.

**** Lời giải***

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + ... + \frac{\sqrt{2004}-\sqrt{2005}}{2004-2005}$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + ... + \frac{\sqrt{2004}-\sqrt{2005}}{-1}$$

$$= \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - ... + \sqrt{2005} - \sqrt{2004}$$

$$= -1 + \sqrt{2005}$$

b) $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}} - \sqrt{\dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\left(3-\sqrt{5}\right)}}$

$$= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}} - \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4} = \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)^2 - \left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}$$

$$= \frac{1-2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$$

**** Khai thác bài toán:***

Thực hiện phép tính:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + 1\right) : \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{2}+5-2}{5-2}\right) : \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{3} = \frac{4-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3}{3}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

Bài 8/189

Tính $T = \dfrac{2x^2 - ax - 3a^2}{2x^2 - 5ax + 3a^2}$ **với** $x = \sqrt{a^2+1}$

**** Phân tích:***

Phân tích tư và mẫu của T thành nhân tử, rồi rút gọn T thành biểu thức gọn hơn, rồi thay x vào để tính giá trị của T.

**** Lời giải:***

$$T=\frac{2x^2-ax-3a^2}{2x^2-5ax+3a^2}=\frac{(x+a)\left(x-\frac{3a}{2}\right)}{(x-a)\left(x-\frac{3a}{2}\right)}=\frac{(x+a)}{(x-a)}\text{ với } x\neq\frac{3a}{2}$$

Với $x=\sqrt{a^2+1}\Rightarrow T=\dfrac{\sqrt{a^2+1}+a}{\sqrt{a^2+1}-a}=\dfrac{\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)^2}{1}=\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)^2$

Bài 9/189

Tính $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$

**** Phân tích:***

Rút gọn mỗi hạng tử trước khi thực hiên phép cộng.

$$\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x-2\sqrt{xy}+y+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x+y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

**** Lời giải:***

Ta có: $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{x-2\sqrt{xy}+y+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{x+y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$$

$$=\frac{x+y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{x+y-\sqrt{xy}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$=\frac{x+y-\sqrt{xy}-x-2\sqrt{xy}-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{-3\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

**** Khai thác bài toán:***

CMR với x và y dương thì biểu thức sau không phu thuộc vào giá trị của x.

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$$

Giải:

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$$

$$A=\frac{x-2\sqrt{xy}+y+4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}$$

$$A=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$$

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{y}$$

Vậy, với x>0,y>0, biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của x.

Bài 10/189

Rút gọn $P=\left(\frac{30}{\sqrt{6}+1}+\frac{2}{\sqrt{6}-2}\right).\sqrt{424+80\sqrt{6}}$

**** Phân tích:***

Ta nhân cả tử và mẫu của $\frac{30}{\sqrt{6}+1}$ với biểu thức liên hợp của mẫu.

Ta nhân cả tử và mẫu của $\frac{2}{\sqrt{6}-2}$ với biểu thức liên hợp của mẫu.

Phân tích $\sqrt{424+80\sqrt{6}}$ thành $\sqrt{4\left(10+\sqrt{6}\right)^2}=2\left(10+\sqrt{6}\right)$.

**** Lời giải:***

$$P=\left(\frac{30}{\sqrt{6}+1}+\frac{2}{\sqrt{6}-2}\right).\sqrt{424+80\sqrt{6}}$$

$$P=\left(\frac{30\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}+\frac{2\left(\sqrt{6}-2\right)}{6-4}\right).\sqrt{4\left(10+\sqrt{6}\right)^2}$$

$$P=\left[6\left(\sqrt{6}-1\right)+\left(\sqrt{6}+2\right)\right].\left[2\left(10+\sqrt{6}\right)\right]$$

$P = 2\left(7\sqrt{6} - 4\right)\left(10 + \sqrt{6}\right)$

$P = 2\left(70\sqrt{6} + 42 - 40 - 4\sqrt{6}\right) = 2\left(66\sqrt{6} + 2\right) = 4\left(33\sqrt{6} + 1\right)$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5
HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Bài 1/235 Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số siêu việt, đại số (vô tỉ, hữu tỉ nguyên, hữu tỉ phân):

$a)\ y = ax^4 + bx^2 + c;$ $\quad d)\ y = \sin 3x + \cos 2x;$

$b)\ y = \sqrt{x-1} + 3;$ $\quad e)\ y = \log_a(x+2);$

$c)\ y = \dfrac{2x+1}{2x-1};$ $\quad f)\ y = 3x^{\sqrt{2}}.$

Giải:

a - Là hàm số đại số hữu tỷ nguyên

b - Là hàm số đại số vô tỷ.

c - Là hàm số đại số hữu tỷ phân.

d, e, f - Là hàm số siêu việt.

Bài 3/235 Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

$a)\ y = 5x^4 + 3x^2 - 2;$ $\quad d)\ y = \cos 2x - \cos x;$

$b)\ y = \sqrt[3]{x^5} - \sqrt[5]{x^3};$ $\quad e)\ y = \tan 2x + \cot 2x;$

$c)\ y = \sin x + \tan x;$

Giải:

a) $\forall x \in R \ \Rightarrow\ -x \in R$ và $y = 5x^4 + 3x^2 - 2$, ta có:

$y(-x) = 5(-x)^4 + 3(-x)^2 - 2 = 5x^4 + 3x^2 - 2$

Suy ra $y = y(-x) \qquad \forall x \in R$

Vậy $y = 5x^4 + 3x^2 - 2$ là hàm số chẵn.

b) $y = \sqrt[3]{x^5} - \sqrt[5]{x^3}$

$\forall x \in R\setminus\{0\} \quad \Rightarrow \quad -x \in R\setminus\{0\}$

và

$$y(-x) = \sqrt[3]{(-x)^5} - \sqrt[5]{(-x)^3}$$
$$= -\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[5]{x^3} = -(\sqrt[3]{x^5} - \sqrt[5]{x^3}) = -y(x)$$

$\Rightarrow\ y(x) = y(-x)$

Vậy $y = \sqrt[3]{x^5} - \sqrt[5]{x^3}$ là hàm số lẻ.

c) $y = \sin x + \tan x$

$\forall x \in R\setminus\{0\} \quad \Rightarrow \quad -x \in R\setminus\{0\}$

$$y(-x) = \sin(-x) + \tan(-x) = \sin(-x) + \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$$
$$= -\sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = -(\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}) = -(\sin x + \tan x) = -y$$

$\Rightarrow\ y(x)=y(-x)$
Vậy hàm số $y=\sin x+\tan x$ là hàm số lẻ.
d) $y=\cos 2x-\cos x$
$\forall x\in R\setminus\{0\}\quad\Rightarrow\quad -x\in R\setminus\{0\}$
$y(-x)=\cos 2(-x)-\cos(-x)=\cos(-2x)-\cos(-x)=\cos 2x-\cos x=y$
$\Rightarrow\ y(x)=y(-x)$
Vậy hàm số $y=\cos 2x-\cos x$ là hàm số chẵn.
e) $y=\tan 2x+\cot 2x$
$\forall x\in R\setminus\{0\}\quad\Rightarrow\quad -x\in R\setminus\{0\}$

$$y(-x)=\tan(-2x)+\cot(-2x)=\frac{\sin(-2x)}{\cos(-2x)}+\frac{\cos(-2x)}{\sin(-2x)}$$

$$=-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=-(\tan 2x+\cot 2x)=-y$$

$\Rightarrow\ y(x)=y(-x)$
Vậy hàm số $y=\tan 2x+\cot 2x$ là hàm số lẻ.

Bài 5/235 Các hàm số trên R sau đây có hàm ngược không? Hoặc có hàm số ngược trong những khoảng nào? Xác định hàm số ngược và đồ thị của chúng:

$a)\ y=kx;\qquad b)\ y=x^3;$

$c)\ y=x^2;\qquad d)\ y=10^x;$

$e)\ y=\mathrm{sinx};\qquad f)\ y=\tan x.$

Bài 7/236 Tìm miền xác định của các hàm số:

$a)\ y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x+1};\qquad b)\ y=\log_a(x^2-4),(a>0,a\neq 1);$

$c)\ y=(x-1)^{\sqrt{3}};\qquad d)\ y=\cot(x-\dfrac{\pi}{4});$

$e)\ y=(x-3)^{2x}.$

Giải:

a,
b, $x^2-4\geq 0\ \Rightarrow\ x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$
c, $x-1>0\ \Rightarrow\ x>1$ hay $x\in(1;+\infty)$
d, $\sin(x-\dfrac{\pi}{4})\neq 0$ nên tập xác định là $\forall x\in\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\quad(k\in Z)$
e, $x-3>0\ \Rightarrow\ x>3$ hay $x\in(3;+\infty)$

Bài 8/236 Xét hàm số $y=2x+3$.
a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số theo các bước của phương pháp sơ cấp.
b) Dùng các phép biến đổi đồ thị để suy ra đồ thị phải tìm từ đường phân giác $y=x$.

Giải:

a. Khảo sát
+) Miền xác định: $\forall x\in R$
+) Sự biến thiên: Ta có

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(2x_2 + 3) - (2x_1 + 3)}{x_2 - x_1} = 2 > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2$$

Nên hàm số đồng biến.

+) Vẽ đồ thị

- Đồ thị cắt trục Ox tại $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$
- Đồ thị cắt trục tung tại $(0, 3)$

b. Đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ được suy ra từ đường phân giác $y = x$ bằng những phép biến đổi sau:

Cách 1:

- Phép dãn tỉ số k = 2 dọc theo trục tung.
- Phép tịnh tiến dọc theo trục hoành một đoạn bằng 3

Cách 2: Hàm số $y = 2x + 3$ cũng có thể viết là $y = 2(x+1) + 1$ nên có thể suy ra đồ thị của $y = 2(x+1) + 1$ bằng các phép biến đổi sau:

- Tịnh tiến đường phân giác $y = x$ theo trục hoành một đoạn bằng -1.
- Dãn theo trục tung với tỉ số k = 2
- Tịnh tiến theo trục tung một đoạn bằng 1.

Bài 10/236 Xét hàm số phân tuyến tính: $y = \frac{3x+2}{2x+4}$**.**

a) Khảo sát và vẽ đồ thị theo các bước của phương pháp sơ cấp.

b) Từ hypebol $y = \frac{1}{x}$ **có thể suy ra đồ thị của hàm số đã cho bằng những phép biến đổi đồ thị nào?**

Giải:

a) *) TXĐ: $D = (-\infty\ ;\ -2) \cup (-2\ ;\ +\infty)$

Ta có $y = \frac{3x+2}{2x+4} = \frac{3}{2} - \frac{2}{x+2}$

*) Sự biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$
$\frac{1}{x+2}$	$\searrow$	‖	$\searrow$
$\frac{-2}{x+2}$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$
$\frac{3}{2} - \frac{2}{x+2}$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

*) Vẽ đồ thị

Với $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. $A\ (0\ ;\ \frac{1}{2})$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 1$. $B\ (2\ ;\ 1)$

Ta có $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x+2}{2x+4} = \frac{3(-2)+2}{2(-2)+4} = -\infty$

Suy ra đồ thị của hàm số nhận $x=-2$ làm tiệm cận ngang.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{x+2}\right)=\frac{3}{2}$$

Suy ra đồ thị của hàm số nhận $y=\frac{3}{2}$ làm tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y=\frac{3x+2}{2x+4}$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x}$ bằng những phép biến đổi sau:

+) Tịnh tiến song song với trục hoành một đoạn bằng -2 ta được đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x+2}$.

+) Thực hiện một phép dãn theo trục tung tỉ số k = 2 ta được đồ thị hàm số $y=\frac{2}{x+2}$.

+) Thực hiện phép đối xứng trục qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y=\frac{-2}{x+2}$.

+) Tịnh tiến song song với trục tung một đoạn bằng $\frac{-3}{2}$ ta được đồ thị hàm số $y=\frac{3x+2}{2x+4}$.

Bài 12/236 Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng một hệ tọa độ, bằng phương pháp sơ cấp:

$a)$ $y=x^{\frac{2}{3}}$; $b)$ $y=x^{\frac{4}{3}}$.

từ đó tổng quát hóa cho hàm số $y=x^{\frac{2m}{2n+1}}$.

Giải:

$a)$ $y=x^{\frac{2}{3}}$

*) TXĐ: R

*) Chiều biến thiên

Hàm số $y=x^{\frac{2}{3}}$ đồng biến trong khoảng $(0\,;+\infty)$

*) Đồ thị

Đồ thị luôn đi qua $A(1\,;1)$ và $O(0\,;0)$

$b)$ $y=x^{\frac{4}{3}}$

Cách khảo sát tương tự:

Đồ thị trên cùng một hệ trục tọa độ

Tổng quát hóa hàm số $y=x^{\frac{2m}{2n+1}}$

Với hàm số $y=x^{\frac{2m}{2n+1}}$ thì khi $m=n$ hoặc $m\neq n$ hàm số luôn đồng biến trong khoảng $(0\,;+\infty)$ và đồ thị hàm số luôn đi qua $A(1\,;1)$ và $O(0\,;0)$.

Bài 14/237 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=x^{-\frac{2}{3}}$, hàm số $y=x^{-\frac{2m}{2n+1}}$.

Bài 15/237 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=x^{-\frac{5}{3}}$, hàm số $y=x^{-\frac{2m+1}{2n+1}}$.

BÀI TẬP THỰC HÀNH GIẢI TOÁN CHƯƠNG 5

Bài 4/238 **Biết hàm số $y = 2^x$ đồng biến, xét quan hệ giữa u và v biết:** $2^u + u = 2^v + v$.

Bài 5/238 **Xác định m để hệ sau vô nghiệm:**

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 & (1) \\ (2m-1)x + m - 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

) *Phân tích:

Ta thấy bất phương trình (1) có tập nghiệm thuộc [1 ; 3]

Nếu ta đặt $y = (2m-1)x + m - 3$

Với $m \neq \frac{1}{2}$ thì ta được hàm số bậc nhất, y có đồ thị là đường thẳng.

Để hệ phương trình trên vô nghiệm chỉ cần $y < 0\ \forall x \in [1\,;\,3]$.

Nghĩa là đoạn tương ứng với $x \in [1\,;\,3]$ của đường thẳng $y = f(x)$ nằm dưới trục Ox. điều đó tương đương hai đầu của đoạn thẳng nằm dưới trục Ox, nghĩa là $y(1) < 0$ và $y(3) < 0$.

) *Lời giải:

Đặt $y = (2m-1)x + m - 3$

Với $m = \frac{1}{2}$ ta có $y = \frac{-5}{2} < 0\ \forall x \in R$ (loại).

Với $m \neq \frac{1}{2}$ thì ta được hàm số bậc nhất, $y = (2m-1)x + m - 3$ có đồ thị là đường thẳng. Vì vậy, để hệ phương trình vô nghiệm tương đương

$$y < 0\ \forall x \in [1\,;\,3] \Leftrightarrow \begin{cases} y(1) < 0 \\ y(3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1).1 + m - 3 < 0 \\ (2m-1).3 + m - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{4}{3} \\ m < \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{6}{7}$$

***) Khai thác bài toán:**

Với đặc điểm đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng và quan tâm đến vị trí hai đầu mút của một đoạn thẳng ta có thể nêu một số bài tập tương tự như sau:

1. Tìm điều kiện của a để hệ sau vô nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 9 \leq 0 \\ (a^2 - 5a + 6)x - a^2 + 4 \geq 0 \end{cases}$$

2. Cho hai tập hợp

$A = \{x \in R \,|\, x^2 - 7x + 12 \geq 0\}$

$B = \{x \in R \,|\, (a^2 - 3a + 2)x - a^2 + 9 \geq 0\}$

Xác đinh a sao cho $A \cap B = \varnothing$.

Bài 6/238 Giải các phương trình:

$a)$ $3^x + 4^x = 5^x$;

$b)$ $5^x + 12^x = 13^x$.

Giải:

$a)$ $3^x + 4^x = 5^x$

Chia cả hai vế cho 5^x ta được $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Xét $VT = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ ta có: $y_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ và $y_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ là các hàm số nghịch biến.

Nên $VT = f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ là hàm số nghịch biến.

$VP = g(x) = 1$ là đường thẳng song song với trục hoành.

Vậy đường thẳng $g(x) = 1$ luôn cắt đồ thị hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ tại một điểm duy nhất.

Ta thấy $x = 2$ là nghiệm và là nghiệm duy nhất.

$b)$ $5^x + 12^x = 13^x$

Chia cả hai vế cho 13^x ta được $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$

Xét $VT = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$ tan có: $y_1 = \left(\frac{5}{13}\right)^x$ và $y_2 = \left(\frac{12}{13}\right)^x$ là các hàm số nghịch biến.

Nên $VT = f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$ là hàm số nghịch biến.

$VP = g(x) = 1$ là đường thẳng song song với trục hoành.

Vậy đường thẳng $g(x) = 1$ luôn cắt đồ thị hàm số $f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$ tại một điểm duy nhất.

Ta thấy $x = 2$ là nghiệm và là nghiệm duy nhất.

**) Khai thác bài toán*

Giải phương trình $4^x + 2^x = 3^x + 1$.

Bài 7/238 Xác định hàm số bậc hai $y = f(x)$ biết đồ thị của nó đi qua các điểm $(1,0)$, $(4,3)$ và $(2,-1)$.

****) Phân tích:***

Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ là một Parabol nên hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Căn cứ vào các điểm thuộc Parabol ta có thể tìm ra được a, b, c.

***) Lời giải:**

Đồ thị hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$ và đi qua các điểm $(1;\ 0),\ \ (4;\ 3),\ \ (2;\ -1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 16a+4b+c=3 \\ 4a+2b+c=-1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = x^2 - 4x + 3$

***) Khai thác bài toán:**

1. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$. Tìm a, b, c biết đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 và đi qua điểm $(2;\ 3)$.

Giải:

+) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $c = 1$.

+) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 nên $a+b+c=0$.

+) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;\ 3)$ nên ta có: $4a+2b+c=3$

Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ c=1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $a=2,\ b=-3,\ c=1$. Hàm số cần tìm là: $y = 2x^2 - 3x + 1$

2. Xác định hàm số $y = f(x)$ biết rằng đồ thị của hàm số là một Parabol có đỉnh $S(3;\ -4)$, đi qua $(1;\ 0)$ và $(2;\ -3)$.

Giải:

+) Đồ thị là một Parabol nên có dạng $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$.

+) Parabol có đỉnh $S(\frac{-b}{2a};\ \frac{-\Delta}{4a})$, theo đầu bài $S(3;\ -4)$ nên $\frac{-b}{2a} = 3$

+) Các điểm $(1;\ 0)$ và $(2;\ -3)$ thuộc Parabol nên ta có:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-3 \end{cases}$$

Từ các ý trên ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-3 \\ 6a+b=0 \end{cases}$$

giải hệ ta được: $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=5 \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = x^2 - 6x + 5$

BÀI TẬP CHƯƠNG 6
PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1/299 Tìm miền xác định của các phương trình sau:

a, $x+\frac{1}{2}=2$ **trên R.**

b, $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=2x$ **trên R.**

c, $\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{1-x}$ **trên R.**

d, $\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=\frac{\sqrt{5-x}}{3-x}$ **trên R.**

e, $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=2-x$ **trên Q, trên R.**

Giải:

a, $S=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

b, MXĐ: $\begin{cases} x-2\neq 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 0 \end{cases}$

Nên $S=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$

c, MXĐ: $\begin{cases} x+1>0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\leq 1 \end{cases}$

Nên $S=(-1,\ 1]$

d, MXĐ:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-x\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \\ 3-x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x\geq 1 \end{array}\right. \\ x\leq 5 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq 5 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

Nên $S=[1,\ 3)\cup(3,\ 5]$

e, $S=\varnothing$

Bài 2. Tìm miền xác định của các phương trình

a) $\frac{x-2}{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2}}$ **trên Q;**

b) $\sqrt{x-2}=\frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ **trên Q;**

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+3}$ **trên R;**

d) $\sqrt{(x^2+1)(-x^2+2x-1)}=1$ **trên R**

Giải

a) $\dfrac{x-2}{x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2}}$ trên Q

TXĐ: D = R \ {1}

b) $\sqrt{x-2}=\dfrac{3}{\sqrt{2x+1}}$ trên Q

Điều kiện: $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\geq \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

TXĐ: D = (2; $+\infty$)

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+3}$ trên R

Điều kiện: $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+2\geq 0 \\ x+3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq -2 \\ x\geq -3 \end{cases} \Rightarrow x\geq -1$

TXĐ: D = $\left[-1;+\infty\right)$

d) $\sqrt{(x^2+1)(-x^2+2x-1)}=1$ trên R

Điều kiện: $(x^2+1)(-x^2+2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow -x^2+2x-1\geq 0$ $(x^2+1\geq 1)$

$\Leftrightarrow -(x-1)^2\geq 0$ $\Leftrightarrow$ x = 1 (vì $(x-1)^2 \geq 0$)

TXĐ: D = {1}

Bài 3. Các phương trình sau có tương đương không?

1. $x^2=9$ **và** $x^2+\dfrac{x}{x+3}=9+\dfrac{x}{x+3}$**;**

2. $x^2=9$ **và** $x^2+\dfrac{x}{x+2}=9+\dfrac{x}{x+2}$**;**

3. $x^2=0$ **và x = 0;**

4. $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}$ **và x = 0;**

5. x + 3 = 2 và (x+3)(x-2) = 2(x-2);

6. (x+1)(x^2+4) = 2(x^2 + 4) và x + 1 = 2.

Giải

1.+) $x^2 = 9(1)$

TXĐ: D = R

Giải (1): $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

+) $x^2 + \frac{x}{x+3} = 9 + \frac{x}{x+3}$ (2)

TXĐ: D = R \ {3}

Giải (2): $x^2 + \frac{x}{x+3} = 9 + \frac{x}{x+3} \Rightarrow x^2(x+3) + x = 9(x+3) + x$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x = 10x + 27 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x+3) - 9(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Vậy phương trình (1) tương đương với phương trình (2)

2. $x^2 = 9$ và $x^2 + \frac{x}{x+2} = 9 + \frac{x}{x+2}$

+) $x^2 = 9(1)$

TXĐ: D = R

Giải (1):

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

+) $x^2 + \frac{x}{x-2} = 9 + \frac{x}{x-2}$ (2)

TXĐ: D = R \ {2}

Giải (2): $x^2 + \frac{x}{x-2} = 9 + \frac{x}{x-2}$

$\Rightarrow x^2(x-2) + x = 9(x-2) + x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = 10x - 18$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - 9(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) không tương đương với phương trình (2)

3. $x^2 = 0$ và x = 0

+) $x^2 = 0$ (1)

TXĐ: D = R

+) x = 0 (2)

TXĐ: D = R

Vì cả 2 phương trình (1) và (2) đều có chung tập nghiệm nên 2 phương trình trên tương đương.

4. $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ và x = 0

+) $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ (1)

TXĐ: D = R\ {0}

Giải (1): $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow x^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

+) x = 0 (2)

TXĐ: D = R

5. x + 3 = 2 và (x + 3)(x - 2) = 2(x - 2)

+) x + 3 = 2 (1)

TXĐ: D = R

Giải (1):

x + 3 = 2 $\Rightarrow x=-1$

+) (x+3)(x+2) = 2(x - 2) (2)

TXĐ: D = R

Giải (2):

(x+3)(x-2) = 2(x-2) $\Leftrightarrow$ (x-2)(x+1) = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) không tương đương với phương trình (2)

7. $(x+1)(x^2+4) = 2(x^2 + 4)$ và x + 1 = 2

+) $(x+1)(x^2+4) = 2(x^2 + 4)$ (1)

TXD: D = R

+) x + 1 = 2 (2)

TXĐ: D = R

Giải (1):

$(x+1)(x^2+4) = 2(x^2 + 4)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4)=0$

$\Rightarrow x=1$

Giải (2): x + 1 = 2 $\Rightarrow x=1$

Vậy phương trình (1) tương đương với phương trình (2)

Bài 4/ 300 Các phương trình sau có tương đương không? Nếu không, thì tìm điều kiện để chúng tương đương.

1, $f(x)=1$ **và** $\log_a f(x)=0\ (a>0,\ a\neq 1)$

2, $f(x)=g(x)$ **và** $\log_a f(x)=\log_a g(x)\ (a>0, a\neq 1)$

3, $\log_2 x^2=0$ **và** $2\log_2 x=0$

4, $\log_3\sqrt{x}=0$ **và** $\frac{1}{2}\log_3 x=0$

Giải:

1 Ta có:
*) $f(x)=1$
*) $\log_a f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=1$
Vậy 2 phương trình đã cho tương đương.
2, Ta có:
*) $f(x)=g(x)$
*) $\log_a f(x)=\log_a g(x)\ (a>0, a\neq 1)$
Hai phương trình chỉ tương đương nếu trong các nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ không có nghiệm nào làm cho $f(x)\leq 0$.
3, Hai phương trình đã cho không tương đương, điều kiện là $x>0$

4, $\log_3\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \log_3 x^{\frac{1}{2}}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3 x=0$
Vậy hai phương trình đã cho tương đương.

Bài 5. Xét hai phương trình:

f(x) = 0 (1) và f(x) . g(x) = 0 (2)

Cho ví dụ trên một trường số K nào đó sao cho:

1) $(1)\Leftrightarrow(2)$;

2) $(1)\Rightarrow(2)$**, nhưng đảo lại không đúng;**

3) $(2)\Rightarrow(1)$**, nhưng đảo lại không đúng.**

Giải

1) $(1)\Leftrightarrow(2)$

- $f(x) = (x - 1)$ và $f(x) . g(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$
- $f(x) = (x^3 - 1)$ và $f(x) . g(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 1)$
- $f(x) = (x^2 - 4)$ và $f(x) . g(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$
- $f(x) = x$ và $f(x) . g(x) = x(x^2 + 5)$

2) $(1)\Rightarrow(2)$, nhưng đảo lại không đúng

- $f(x) = (x - 1)$ và $f(x) . g(x) = (x - 1)(x + 1)$

- f(x) = $(x^3 - 1)$ và f(x) . g(x) = $(x^3 - 1)(x + 2)$
- f(x) = $(x^2 - 4)$ và f(x) . g(x) = $(x^2 - 1)(x^2 - 4)$
- f(x) = x và f(x) . g(x) = x(x + 5)

3) (2) $\Rightarrow$ (1), nhưng đảo lại không đúng

- f(x) = (x – 1) và f(x) . g(x) = $(x - 1).\dfrac{x+1}{x-1}$
- f(x) = $(x^3 - 1)$ và f(x) . g(x) = $(x^3 - 1)(x + 2).\dfrac{1}{x^3-1}$
- f(x) = $(x^2 - 4)$ và f(x) . g(x) = $(x^2 - 1).\dfrac{3}{x^2-4}$
- f(x) = x và f(x) . g(x) = $x.\dfrac{x^2-1}{x}$

Bài 6/300 **Giải và biện luận các phương trình:**

a) $m^2(x+1) = x+m$; *b)* $mx + 2(x-m) = (m+1)^2 + 3$;

c) $a(ax+b^2) - a^3 = b^2(x+a)$; *d)* $a(ax+b)^2 - a^2 = b^2(x+a)$.

Giải:

a) $m^2(x+1) = x+m \Leftrightarrow m^2x + m^2 = x+m$

$\Leftrightarrow m^2x - x = m - m^2$

$\Leftrightarrow (m^2-1)x = m(1-m)$

+) Nếu $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$, phương trình có nghiệm duy nhất là:

$x = \dfrac{m(1-m)}{m^2-1} = \dfrac{-m(1-m)}{(1-m)(1+m)} = \dfrac{-m}{m+1}$

+) Nếu $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$, ta có

Với $m = 1$ thì $0.x = 1(1-1) = 0$ phương trình có vô số nghiệm

Với $m = -1$ thì $0.x = -1(1+1) = -2$ phương trình vô nghiệm.

b) $mx + 2(x-m) = (m+1)^2 + 3 \Leftrightarrow mx + 2x - 2m = (m+1)^2 + 3$

$\Leftrightarrow (m+2)x = m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2$

+) Nếu $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$, phương trình có nghiệm duy nhất là:

$x = \dfrac{(m+2)^2}{m+2} = m+2$

+) Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, ta có:

$0.x = (-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0$, phương trình có vô số nghiệm.

c) $a(ax+b^2) - a^3 = b^2(x+a) \Leftrightarrow a^2x + 2ab^2 - a^3 = b^2x + ab^2$

$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a(a^2 - b^2)$

+) Nếu $a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm b$, phương trình có nghiệm duy nhất là:

$x = \dfrac{a(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} = a$.

+) Nếu $a^2 - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm b$, ta có:

Với $a = b \quad \Rightarrow \quad 0.x = a^3 - a^3 = 0$, phương trình có vô số nghiệm.

Với $a = -b \quad \Rightarrow \quad 0.x = 0$, phương trình có vô số nghiệm.

$d)\ a(ax+b)^2 - a^2 = b^2(x+a) \quad \Leftrightarrow \quad a(a^2x^2 + 4abx + 4b^2) - a^2 = b^2x + ab^2$

$\Leftrightarrow \quad a^3x^2 + (4a^2b - b^2)x = -3ab^2 + a^2$

$\Leftrightarrow \quad a^3x^2 + (4a^2b - b^2)x + 3ab^2 - a^2 = 0$

+) Với $a = 0 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 0$, phương trình trở thành:

$0^3x^2 + (4.0^2.b - b^2)x = -3.0.b^2 + 0^2$

$\Leftrightarrow \quad -bx^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$

Bài 7/300 Giải và biện luận các phương trình sau

$a,\ \dfrac{x-m}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-m} = 2$

b, $\dfrac{a-x}{x-1} + \dfrac{x-b}{1+x} = \dfrac{b(x-1)-2}{1-x^2}$

c, $\dfrac{ax-1}{x-1} + \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{a(x^2+1)}{x^2-1}$

Giải

$a,\ \dfrac{x-m}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-m} = 2 \qquad (1)$

ĐK: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq m \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow (x-m)^2 + (x-1)^2 = 2(x-1)(x-m)$

$\Leftrightarrow 0x = (m-1)^2$

Với m = 1: phương trình có vô số nghiệm

Với $m \neq 1$: phương trin vô nghiệm

b, $\dfrac{a-x}{x-1} + \dfrac{x-b}{1+x} = \dfrac{b(x-1)-2}{1-x^2} \qquad (2)$

ĐK: $x \neq \pm 1$

$(2) \Leftrightarrow (a-x)(1+x) + (x-b)(x-1) + b(x-1) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (a-2)x + a - 2 = 0$

Nếu a = 2: phương trình vô số nghiệm

Nếu $a \neq 2$: phương trình vô nghiệm

c, $\dfrac{ax-1}{x-1} + \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{a(x^2+1)}{x^2-1} \qquad (3)$

ĐK: $x \neq \pm 1$

$(3) \Leftrightarrow (ax-1)(x+1) + b(x-1) = a(x^2+1)$

$\Leftrightarrow (a+b-1)x = a+b+1$

Nếu $\begin{cases} a+b \neq 0 \\ a+b \neq 1 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm $x = \dfrac{a+b+1}{a+b-1}$

Nếu $\left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a+b=1 \end{array}\right.$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 8. Giải phương trình:

a) 14x + 8 = 10x + 5$|3x+5|$ **;** **b)** $|x+3|+|x-1| = 3x-5$.

Giải

a) 14x + 8 = 10x + 5$|3x+5|$ (1)

Ta có: $|3x+5| = \left[\begin{array}{l} 3x+5 \text{ khi } x \geq \dfrac{-3}{5} \\ -(3x+5) \text{ khi } x < \dfrac{-3}{5} \end{array}\right.$

TH1: Nếu $x \geq \dfrac{-3}{5}$ (1) thành:

$$14x + 8 = 10x + 5(3x+5) \Leftrightarrow 11x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{11} \text{(TM)}$$

TH2: nếu $x < \dfrac{-3}{5}$ (1) thành:

$$14x + 8 = 10x - 5(3x + 5) \Leftrightarrow 19x = -18 \Leftrightarrow x = -\frac{18}{19}(TM)$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x = -\dfrac{2}{11}$ và $x = -\dfrac{18}{19}$

b) $|x+3|+|x-1| = 3x-5$. **Đặt** f(x) = $|x+3|+|x-1|$

x	$-\infty$ -3	1	$+\infty$
$\lvert x+3\rvert$	- x – 3 0	x + 3	x +3
$\lvert x-1\rvert$	- x - 1	- x – 1 0	x + 1
f(x)	- 2x - 4	2	2x + 4
$\lvert x+3\rvert+\lvert x-1\rvert = 3x-5$	$x = \dfrac{1}{5}$	$x = \dfrac{7}{2}$	x = 9
Nghiệm	$x = \dfrac{1}{5}$	Vô nghiệm	x = 9

Kết luận:

- x < -3 phương trình có một nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{5}$;
- $-3 \leq x < 1$ phương trình vô nghiệm;
- $x \geq 1$ Phương trình có một nghiệm duy nhất: x = 9.

Bài 9. Với điều kiện nào của m thì các phương trình sau vô nghiệm?

a) $(m + 1)^2x + 1 - m = (7m - 5)x$

b) $\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$

Giải

a) $(m + 1)^2x + 1 – m = (7m – 5)x$

$\Leftrightarrow (m^2 – 5m + 6)x = m – 1$

$\Leftrightarrow (m-2)(m-3)x = m-1$

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}(m-2)(m-3)=0\\ m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=3\end{array}\right.\\ m\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=3\end{array}\right.$

b) $\dfrac{x+m}{x+1}+\dfrac{x-2}{x}=2$ (2)

Điều kiện: $\begin{cases}x+1\neq 0\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -1\\ x\neq 0\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+(m-1)x-2}{x(x+1)}=2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+(m-1)x-2-2x(x+1)}{x(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(m-3)x-2}{x(x+1)}=0 \Rightarrow (m – 3)x – 2 = 0$

Với m = 3, ta có: 0x = 2 (vô lý) $\Rightarrow$ m = 3 thì phương trình vô nghiệm.

Với m $\neq$ 3 $\Rightarrow$ x = $\dfrac{2}{m-3}$, phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{m-3}=-1\\ \dfrac{2}{m-3}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow m=1$$

Vậy với m = 1 hoặc m = 3 thì phương trình vô nghiệm.

Bài 10/301 Với điều kiện nào của tham số thì phương trình sau có vô số nghiệm?

$a)\ m^2x=9x+m^2-4m+3$; $b)\ m^3x=mx+m^2-m$;

$c)\ (x-1)a+(2x+1)b=x+2$.

Giải:

$a)\ m^2x=9x+m^2-4m+3 \Leftrightarrow (m^2-9)x=m^2-4m+3=(m-1)(m-3)$

Do đó phương trình có vô số nghiệm khi

$$\begin{cases}m^2-9=0\\ (m-1)(m-3)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=1\\ m=-3\\ m=3\end{cases}$$

$b)\ m^3x=mx+m^2-m \Leftrightarrow (m^3-m)x=m^2-m=m(m-1)$

$\Leftrightarrow m(m-1)(m+1)x=m(m-1)$

Phương trình có vô số nghiệm khi

$$\begin{cases} m(m-1)(m+1)=0 \\ m(m-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-1 \\ m=1 \end{cases}$$

$c)$ $(x-1)a+(2x+1)b=x+2 \Leftrightarrow ax-a+2xb+b=x-2$

$\Leftrightarrow (a+2b-1)x=a-b+2$

Phương trình có vô số nghiệm khi

$$\begin{cases} a+2b-1=0 \\ a-b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

Bài 11/301 Với điều kiện nào của m thì các phương trình sau có nghiệm?

$a)$ $m^2(x-1)=4x-3m+2$, **với** $x>0$.

$b)$ $\dfrac{(2m+1)x+3}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{(2m+3)x+m-2}{\sqrt{4-x^2}}$.

Giải:

$a)$ $m^2(x-1)=4x-3m+2 \Leftrightarrow m^2x-m^2-4x=-3m+2$

$\Leftrightarrow (m^2-4)x=m^2-3m+2$

$\Leftrightarrow (m-2)(m+2)x=(m-1)(m+2)$

+) Nếu $(m-2)(m+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-2 \end{cases}$

Với $m=2$ ta có $0.x=0$, phương trình có nghiệm với mọi $x>0$

Với $m=-2$ ta có $0.x=12$, phương trình vô nghiệm.

+) Nếu $(m-2)(m+2)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m\neq -2 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất

$x=\dfrac{m-1}{m-2}$, với $x>0 \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{m+2}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m<-2 \end{cases}$

$b)$ $\dfrac{(2m+1)x+3}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{(2m+3)x+m-2}{\sqrt{4-x^2}}$

ĐK: $4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$

Ta có:

$$\frac{(2m+1)x+3}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{(2m+3)x+m-2}{\sqrt{4-x^2}} \Leftrightarrow \frac{(2m+1)x+3}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{(2m+3)x+m-2}{\sqrt{4-x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-m+5}{\sqrt{4-x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow -2x-m+5=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-m+5}{2}$$

Với điều kiện

$-2 < x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < 2x < 4$

$\Leftrightarrow \quad -4 < -m + 5 < 4$

$\Leftrightarrow \quad 1 < m < 9$

Vậy với $1 < m < 9$ phương trình có nghiệm.

Bài 12. Với giá trị nào của k thì phương trình sau có nghiệm kép?

$(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k + 4 = 0$

Giải

Phương trình nếu có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ \Delta' = (k+1)^2 - (k-1)(k+4) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ -k + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 5$$

Vậy $k = 5$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép

Bài 13. Với giá trị nào của k thì phương trình sau có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia?

$x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0$

Giải

Nếu phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2, giả sử $x_1 > x_2$ thì: $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ (2k+1)^2 - 4(k^2+2) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4k - 7 \geq 0 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{7}{4} \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

Theo định lí vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k + 1 \\ x_1 x_2 = k^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3k^2 + 6}{2k + 1} \\ x_2 = \dfrac{2k + 1}{3} \end{cases}$

Mà $x_1 = 2x_2 \Rightarrow \dfrac{3k^2 + 6}{2k + 1} = 2.\dfrac{2k + 1}{3} \Leftrightarrow (k-4)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy $k = 4$ thì phương trình có một nghiệm gấpđôi nghiệm kia.

Bài 14/301 **Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm bằng $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$. Trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho.**

Giải:

$x^2 + px + q = 0 \qquad (*)$

Do x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên theo Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1x_2 = q \end{cases}$$

Ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = X_1$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-p)^3 - 3q(-p) = -p + 3qp = X_2$$

Theo định lý Vi-ét đảo X_1, X_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - SX + P = 0$

Ta có:

$$X_1 + X_2 = -2q + 3pq$$

$$X_1X_2 = (p - 2q)(-p + 3pq)$$

Vậy phương trình cần tìm có dạng:

$$X^2 - (3pq - 2q)X + (p - 2q)(-p + 3pq)$$

Bài 15. Giải và biện luận các phương trình sau :

a) $x^2 + (m-1)x - m = 0$;

b) $(m-3)x^2 - mx + m - 6 = 0$;

c) $\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^2 = 1 + bx$;

Giải

a) $x^2+(m-1)x-m=0$

Đây là phương trình bậc hai, ta xét:

$\Delta=(m-1)^2+4m=(m+1)^2$

- $\Delta>0 \Leftrightarrow (m+1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq -1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=1; x_2=-m$
- $\Delta=0 \Leftrightarrow (m+1)^2=0 \Leftrightarrow m=-1$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=\dfrac{1-m}{2}$
- $\Delta<0 \Leftrightarrow (m+1)^2<0$ vô lí

Vậy $m\neq 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=1; x_2=-m$

$m=-1$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=\dfrac{1-m}{2}$

b) $(m-3)x^2-mx+m-6=0$ (*)

Xét $m-3=0 \Leftrightarrow m=3$ phương trình (*) trở thành $-3x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$

$m-3\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 3$ phương trình (*) là phương trình bậc hai

Có $\Delta=m^2-4(m-3)(m-6)=-3(m^2-12m+24)$

$=-3(m-6-2\sqrt{3})(m-6+2\sqrt{3})$

- $\Delta>0 \Leftrightarrow 6-2\sqrt{3}<m<6+2\sqrt{3}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt
- $\Delta=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6-2\sqrt{3} \\ m=6+2\sqrt{3} \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm kép
- $\Delta<0 \Leftrightarrow \begin{cases} m>6+2\sqrt{3} \\ m<6-2\sqrt{3} \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm

Vậy $m=3$ thì phương trình có nghiệm $x=-1$

$6-2\sqrt{3}<m<6+2\sqrt{3}, m\neq 3$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\left[\begin{array}{l} m=6-2\sqrt{3} \\ m=6+2\sqrt{3} \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm kép

$\begin{cases} m>6+2\sqrt{3} \\ m<6-2\sqrt{3} \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm

c) $\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^2 = 1+bx$ (**)

ĐK $x \neq a$

Với ĐK trên (**) tương đương với

$$(a+x)^2 = (1+bx)(a-x)^2$$

$$\Leftrightarrow x(-bx^2 + 2abx + 4a - a^2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -bx^2 + 2abx + 4a - a^2b = 0 \end{cases} (**)$$

Xét (**)

- b = 0 thì phương trình (**) trở thành $4a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ $\Rightarrow$ phương trình (**) có vô số nghiệm
- $b \neq 0$, phương trình (**) là phương trình bậc hai có $\Delta' = a^2b^2 + b(4a - a^2b) = 4ab$

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow ab > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ phương trình (**) có nghiệm kép

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ phương trình (**) vô nghiệm

Vậy $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ thì phương trình có vô số nghiệm

$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm kép

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ thì phương trình có hai nghiệm phân biêt

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}\\\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}\end{array}\right.$$ thì phương trình vô nghiệm

Bài 16. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $2x^2 - 2\sqrt{5}x - 3 = 0$. Không giải phương trình:

a) Tính

$$A = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}; B = |x_1 - x_2|; C = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1)$$

b) Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $2x_1 + x_2$ và $2x_2 + x_1$

Giải

a) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì phương trình có dạng $X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2 = 0$

Theo định lí vi-ét ta có : $\begin{cases}x_1 + x_2 = \sqrt{5}\\x_1x_2 = -\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$$A = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(\sqrt{5})^2 - 2(-\frac{3}{2})}{-\frac{3}{2}} = -\frac{16}{3}$$

$B = |x_1 - x_2| \Leftrightarrow B^2 = (x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow B^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$\Leftrightarrow B^2 = (\sqrt{5})^2 - 4(-\dfrac{3}{2}) = 11 \Rightarrow B = \pm\sqrt{11}$

$\Leftrightarrow C = 5x_1x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2) \Leftrightarrow C = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)^2 \Leftrightarrow C = -\dfrac{3}{2} + 2.(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow C = -\dfrac{17}{3}$

b) Phương trình bậc hai cần tìm có các nghiệm là $2x_1 + x_2$ và $2x_2 + x_1$ nên gọi $S = 2x_1 + x_2 + 2x_2 + x_1 = 3(x_1 + x_2) = 3\sqrt{5}$ và $P = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1) = 5x_1x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2) = -\dfrac{17}{3}$

$\Rightarrow$ Phương trình cần tìm là $X^2 - SX + P = 0 hay X^2 - 3\sqrt{5}X - \dfrac{17}{3} = 0$

Vậy phương trình bậc hai là $X^2 - 3\sqrt{5}X - \dfrac{17}{3} = 0$

Bài 17/302 Xác định m để phương trình:

$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$

a) có hai nghiệm trái dấu;

b) có hai nghiệm dương phân biệt;

c) có đúng một nghiệm âm.

Giải:

a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi: $x_1.x_2 = \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{m-3}{m} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$

b) Với $m = 0$, phương trình trở thành $-2(-2)x + (-3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ (loại).

Với $m \neq 0$, ta có: $\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = -m + 4$

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-3}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+4 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ 3 < m < 4 \end{array}\right.$$

Bài 18. Tìm mọi giá trị của a sao cho cả hai nghiệm của phương trình $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2$ đều lớn hơn 3

Giải

Ta có $\Delta' = 9a^2 - (9a^2 - 2a + 2) = 2a - 2$

- Phương trình có hai nghiệm đều lớn hơn 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2 = 0 \\ \frac{6a}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1$$

- Phương trình có hai nghiệm đều lớn hơn

$$3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{c}{a} > 9 \\ -\frac{b}{a} > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2 > 0 \\ 9a^2 - 2a + 2 > 9 \\ 6a > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < -\frac{7}{9} \cup a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1$$

Vậy phương trình có hai nghiệm đều lớn hơn 3 khi a > 1

Bài 19 (Tr.302) Gọi x_1, x_2 là nghiệm phương trình $2x^2 - 3ax - 2 = 0$ (*) không giải phương trình hãy tính $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

Giải

Ta có: A $=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^3}=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{(x_1x_2)^3}$

$$=\frac{(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]}{(x_1x_2)^3}$$

Từ phương trình (*), theo Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{3a}{2} \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\frac{3a}{2}\left[\left(\frac{3a}{2}\right)^2-3(-1)\right]}{(-1)^3}=\frac{\frac{3a}{2}\left(\frac{9a^2}{4}+3\right)}{-1}$$

$$=\frac{-3a}{2}\left(\frac{9a^2}{4}+\frac{12}{4}\right)=\frac{-3a(9a^2+12)}{8}=\frac{-27a^3-36a}{8}$$

Vậy $A=\frac{-27a^3-36a}{8}$.

Bài 20 (Tr.302) Xét phương trình

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ **, với a<b<c.**

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Hãy so sánh các nghiệm với a,b,c.

Giải

a) Ta có:

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc+x^2-(c+a)x+ac=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$$

Ta có: $\Delta'=\left[-(a+b+c)\right]^2-3(ab+bc+ca)$

$$=\left[-(a+b+c)\right]^2-3(ab+bc+ca)$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3(ab+bc+ca)$$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

Với mọi a<b<c, suy ra $\Delta'>0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi f(x)= $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$

Với a<b<c, ta có: f(a)=(a-b)(a-c)>0

f(b)=(b-c)(b-c)<0

f(c)=(c-a)(c-b)>0

Có f(b)<0 $\Rightarrow$ f(x) có 2 nghiệm $x_1<b<x_2$

f(a)>0 $\Rightarrow a \notin [x_1, x_2]$ mà a<b nên $a < x_1 < b < x_2$

f(c)>0 $\Rightarrow c \notin [x_1, x_2]$ mà c>b nên $a < x_1 < b < x_2 < c$

Vậy các nghiệm của phương trình với a,b,c là:

$$a < x_1 < b < x_2 < c$$

Bài 21 (Tr.302)

Xét phương trình: $x^2 + px + q = 0$

a) Xác định p và q để phương trình có 2 nghiệm p và q.

b) Tìm điều kiện của p và q để phương trình có 2 nghiệm âm.

Giải

a) Phương trình có 2 nghiệm khi:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow p^2 - 4q \geq 0 \Leftrightarrow p^2 \geq 4q$$

Mà p và q là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ nên ta có:

$$\begin{cases} p^2 + p^2 + q = 0 \\ q^2 + pq + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2p^2 \\ 4p^4 - 2p^3 - 2p^2 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $4p^4 - 2p^3 - 2p^2 = 0$ (1)

$(1) \Leftrightarrow 2p^2(2p^2 - p - 1) = 0 \Leftrightarrow 2p^2(2p + 1)(p - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0 \\ p = 1 \\ p = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

*) p = 0 $\Leftrightarrow$ q = 0 (t/m)

*) p = 1 $\Leftrightarrow$ q = -2 (t/m)

*) p = $-\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ q = $-\frac{1}{2}$ (t/m)

Vậy phương trình có 2 nghiệm khi:

p = q = 0 hoặc p = 1, q = -2 hoặc p = q = $-\frac{1}{2}$

b) Phương trình có 2 nghiệm khi:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow p^2 - 4q \geq 0 \Leftrightarrow p^2 \geq 4q$$

Gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1, x_2

Phương trình có 2 nghiệm âm tức là:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 . x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -p < 0 \\ q > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > 0 \\ q > 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm âm khi: $\begin{cases} p^2 \geq 4q \\ p > 0 \\ q > 0 \end{cases}$

Bài 22 (Tr.302)

Xác định m để phương trình $x^2 - mx - m - 5 = 0$ có 2 nghiệm thỏa mãn hệ thức $x_1 + 2x_2 = -1$.

Giải

Gọi 2 nghiệm của phương trình là: x_1, x_2

Theo bài ra ta có:

$$x_1 + 2x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1 - 2x_2 \quad (1)$$

Theo định lí vi-ét thuận ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -m - 5 \end{cases} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\begin{cases} -1 - 2x_2 + x_2 = m \\ (-1 - 2x_2)x_2 = -m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -(1+m) \\ -x_2 - 2x_2^{\ 2} = -m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -(1+m) \\ 1 + m - 2(1+m)^2 = -m - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -(1+m) \\ -2m^2 - 3m - 1 = -m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -(1+m) \\ m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -(1+m) \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right. \end{cases}$$

*) m = 1 thì:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases} \quad \text{(t/m)}$$

*) m= -2 thì:

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{(t/m)}$$

Vậy có 2 giá trị cần tìm của m là 1 và -2.

Bài 23/302 Xác định a sao cho hai phương trình:
$x^2 + ax + 1 = 0$ **và** $x^2 + x + a = 0$
có ít nhất một nghiệm thực chung.

Giải:

Giả sử x_0 là nghiệm chung duy nhất của hai phương trình đã cho

Ta có: $x_0^{\ 2} + ax_0 + 1 = 0$ và $x_0^{\ 2} + x_0 + a = 0$

Hai phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực chung:

$x_0^{\ 2} + ax_0 + 1 = x_0^{\ 2} + x_0 + a \Leftrightarrow (a-1)x_0 = a - 1$

Nếu $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ thì $0.x_0 = 0$ phương trình có vô số nghiệm.

Nếu $a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ phương trình có một nghiệm duy nhất $x_0 = \dfrac{a-1}{a-1} = 1$

Kết luận: Với $a = 1$ phương trình có vô số nghiệm.
Với $a \neq 1$ và $x_0 = 1$ phương trình có một nghiệm.

Bài 24 (Tr.303) Giải phương trình:

a) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$;
b) $x^8 + x^4 - 2 = 0$;
c) $x^{10} + x^5 - 6 = 0$;

Giải

a) Đặt $x^3 = t$

Ta có:

$$x^6 - 7x^3 + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 6 \end{array}\right.$$

*) Với t = 1 thì $x^3 = 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$$

*) Với t = 6 thì $x^3 = 6$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt[3]{6} \\ x_2 = \sqrt[3]{6}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \\ x_3 = \sqrt[3]{6}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

b) Đặt $x^4 = t$

Ta có:

$$x^8 + x^4 - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

*) Với t = 1 thì $x^4 = 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = i \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -i \end{array}\right.$$

*) Với t = -2 thì $x^4 = -2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \\ x_2 = \sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \\ x_3 = \sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) \\ x_4 = \sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm.

c) Đặt $x^5 = t$

Ta có: $x^{10} + x^5 - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right.$

*) Với t = 2 thì $x^5 = 2$

$$\Rightarrow x = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{2k\Pi}{5} + i\sin\frac{2k\Pi}{5}) \text{ (với k = } \overline{0,4}\text{)}$$

*) Với t = - 3 thì $x^5 = -3$

$$\Rightarrow x = \sqrt[5]{3}(\cos\frac{(2k+1)\Pi}{5} + i\sin\frac{(2k+1)\Pi}{5}) \text{ (với k = } \overline{0,4}\text{)}$$

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm

Bài 25 (Tr.303) Giải phương trình:

a) $x^3 + 7 = 0$;

b) $x^6 + x^4 + x^2 = 0$

Giải

a) Ta có:

$x^3 + 7 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -7$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_2 = -1 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$$

b) Ta có:

$x^6 + x^4 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 + x^2 + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^3 + x^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_5 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Bài 26 (Tr.303) Giải phương trình:

a) $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$

b) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

c) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$

Giải

a) $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$

x = 0 không là nghiệm của phương trình.

Ta chia hai vế của phương trình cho x^2

Phương trình đã cho trở thành:

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$$\Rightarrow t^2 - 2 + 5t - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 5t - 14 = 0$$

$$\Delta = 25 + 4.14 = 81$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -7 \end{array}\right.$$

$$t_1 = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_x = x_2 = 1$$

$$t_1 = -7 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -7$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = 45$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[x_3 = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}\right. \\ \left[x_4 = \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2}\right. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{1; \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}; \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

x = 0 không là nghiệm của phương trình.

Ta chia hai vế của phương trình cho x^2

Phương trình đã cho trở thành:

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$$\Rightarrow 6t^2 - 12 + 5t - 38 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 + 5t - 50 = 0$$

$$\Delta = 1225 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{5}{2} \\ t_2 = \frac{10}{3} \end{array}\right.$$

$$t_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$t_1 = \frac{10}{3} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{2};2;3\right\}$

c) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$

x = 0 không là nghiệm của phương trình.

Ta chia hai vế của phương trình cho x^2

Phương trình đã cho trở thành:

$$6x^2 + 7x - 36 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

$$\Rightarrow 6t^2 + 12 + 7t - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 + 7t - 24 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{3}{2} \\ t_2 = \dfrac{-8}{3} \end{array}\right.$$

$$t_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

$$t_1 = \frac{-8}{3} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{-8}{3} \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{-3;\frac{-1}{2};\frac{1}{3}2\right\}$

Bài 27 (Tr.303): Tìm điều kiện của a, b, c, d, e để phương trình

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0(a\neq 0,b\neq 0)$$

Có thể đưa về giải phương trình bậc hai bằng cách chia cả hai vế cho x².

Giải

Với $x^2\neq 0$:

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{e}{ax}\right)+b\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0\ (1)$$

Đặt $x+\frac{d}{bx}=t\Rightarrow\left(x+\frac{d}{bx}\right)^2=t^2\Rightarrow x^2+\frac{2d}{bx}+\frac{d^2}{b^2x^2}=t^2$

$$\Rightarrow x^2-\frac{d^2}{b^2x^2}=t^2-\frac{2d}{b}$$

Nếu thì $\frac{a}{e}=\frac{d^2}{b^2}$ phương trình (1) trở thành:

$$a\left(t^2-\frac{2d}{b}\right)+bt+c=0\Leftrightarrow at^2+bt+c-\frac{2ad}{b}=0$$

Vậy với $\frac{a}{e}=\frac{d^2}{b^2}$ thì thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài 28/303 **Giải phương trình:**

$a)$ $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$;

$b)$ $x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$;

$c)$ $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$.

Giải:

$a)$ $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0\Leftrightarrow(x-1)(2x^3-19x^2+55x-50)=0$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(2x^2-15x+25)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x-5)(x-\frac{5}{2})=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=5\\x=\frac{5}{2}\end{array}\right.$$

$b)\ x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0 \Leftrightarrow x^4-3x^3-4x^2-4x^2+12x+16=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2-3x-4)-4(x^2-3x-4)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-3x-4)(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-4)(x-2)(x+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

$c)\ x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+3x^2-10x-24)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+4x^2-x^2-4x-6x-24)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)[x^2(x+4)-x(x+4)-6(x+4)]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+4)(x^2-x-6)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+4)(x-3)(x+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \\ x=3 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Bài 29/303 Giải các phương trình sau:

a, $\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{2(x-3)}+\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+3}$ (1)

b, $\dfrac{6x+1}{x^2-7x+10}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{2}{x-5}$

c, $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-1}=\dfrac{3}{14-x}$

d, $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x(x-2)}+\dfrac{x-4}{x(x-2)}=0$

Giải

a, $\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{2(x-3)}+\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+3}$ (1)

ĐK: $\begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq -1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}=\frac{x}{2(x-3)}+\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1)-2(x-3)=x(x-1)+2(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Do điều kiện là $x \neq -1$. Vậy phương trình có nghiệm là $x=\frac{2}{3}$

b, $\dfrac{6x+1}{x^2-7x+10}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{2}{x-5}$ (2)

ĐK: $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{6x+1}{(x-2)(x-5)}+\frac{3(x-5)}{(x-2)(x-5)}=\frac{2(x-2)}{x-5}$$

$$\Leftrightarrow 6x+1+3x-15-2x+4=0$$

$$\Leftrightarrow 7x-10=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{10}{7}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=\frac{10}{7}$

c, $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-1}=\dfrac{3}{14-x}$ (3)

ĐK: $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 14 \end{cases}$

Ta có:

$$(3) \Leftrightarrow \frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}.\frac{1-x}{2x}=\frac{3}{14-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x-1+x)(1+x+1-x)}{2x(1+x)}=\frac{3}{14-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x.2}{2x(1+x)}=\frac{3}{14-x}$$

$$\Leftrightarrow 28-2x=3+3x$$

$$\Leftrightarrow x=5$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=5$

d, $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x(x-2)}+\dfrac{x-4}{x(x-2)}=0$ (4)

ĐK: $\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$(4) \Leftrightarrow \frac{2x}{x(x-2)(x+2)} - \frac{x+2}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x-4)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - (x+2) + x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$

Bài 30. Giải và biện luận các phương trình.

a) $\frac{4a}{x^2 - a^2} + \frac{x-a}{x(x+a)} = \frac{1}{x(x-a)}$

b) $\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{x^2 - a^2}$ (1)

c) $\frac{x+a}{x+b} + \frac{x+b}{x-a} = 2$

d) $\frac{2x+a}{2x-a} + \frac{2x+b}{2x-b} = 2$

Giải

a) $\frac{4a}{x^2 - a^2} + \frac{x-a}{x(x+a)} = \frac{1}{x(x-a)}$

TXĐ: $D = R \setminus \{0, -a, a\}$

$$\Leftrightarrow \frac{4ax}{x(x-a)(x+a)} + \frac{(x-a)^2}{x(x-a)(x+a)} = \frac{x+a}{x(x-a)(x+a)}$$

$$\Leftrightarrow 4ax + (x-a)^2 = x + a$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2a-1)x + a^2 - a = 0$$

□$= (2a-1)^2 - 4(a^2 - a) = 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a\,(L) \\ x = 1 - a \end{array}\right.$$

Để x_2 là nghiệm của phương trình thì $\begin{cases}1-a\neq 0\\1-a\neq a\\1-a\neq -a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 1\\a\neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$

Vậy với $\begin{cases}a\neq 1\\a\neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$ thì phương trình có một nghiệm $x=1-a$

Với $\left[\begin{array}{l}a=1\\a=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ thì phương trình vô nghiệm .

b) $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{2a}{x+a}=\dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$ (1)

TXĐ: $D=R\setminus\{-a,a\}$.

$(1)\Leftrightarrow x(x+a)-2a(x-a)=8a^2$

$\Leftrightarrow x^2-\text{ax}-6a^2=0$

$\Delta=a^2+24a^2=25a^2$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-2a\\x_2=3a\end{array}\right.$

Với $a\neq 0$ thì $x_1,x_2\in D\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$a=0$ thì phương trình vô nghiệm .

c) $\dfrac{x+a}{x+b}+\dfrac{x+b}{x-a}=2$ (1)

TXĐ: $D=R\setminus\{-b,a\}$

$(1)\Leftrightarrow(x+a)(x-a)+(x+b)^2=2(x-a)(x+b)$

$\Leftrightarrow 2ax=a^2-2ab-b^2$

Với $a=0$ thì phương trình trở thành $0x=-b^2$

Nếu $b=0$ thì phương trình vô số nghiệm.

Nếu $b\neq 0$ hay $b\neq a$ thì phương trìnhvô nghiệm.

Với $a\neq 0$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{2a}$

Để x là nghiệm của phương trình

thì $\begin{cases} \dfrac{a^2-2ab+b^2}{2a} \neq -b \\ \dfrac{a^2-2ab-b^2}{2a} \neq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \neq b^2 \\ (a+b)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -b \\ a \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \neq b^2 \\ (a+b)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -b \\ a \neq b \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} a \neq -b \\ a \neq b \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm.

d) $\dfrac{2x+a}{2x-a}+\dfrac{2x+b}{2x-b}=2 \quad (1)$

TXĐ: $D = R \setminus \left\{\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right\}$

$$(1) \Leftrightarrow (2x+a)(2x-b)+(2x-a)(2x+b)=2(2x-a)(2x-b)$$
$$\Leftrightarrow (a+b)x = ab$$

Nếu $a+b=0 \Leftrightarrow a=-b$

Nếu $a=b=c=0$ thì phương trình có vô số nghiệm

Nếu $\left[\begin{array}{l} a \neq 0, b=0 \\ a=0, b \neq 0 \end{array}\right.$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $\begin{cases} a+b \neq 0 \\ ab \neq 0 \end{cases}$ thì phương trình có một nghiệm là $x = \dfrac{ab}{a+b}$

Bài 31. Giải các phương trình sau.

a) $\left|x^2-5x+4\right| = x+4$

b) $x^2-5|x-1|-1=0$

c) $x^2+2x+8=\left|x^2-1\right| \quad (1)$

d) $|1-x| = 1+x+x^2$

Giải

a) $\left|x^2-5x+4\right| = x+4$

Phương trình đã cho:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2-5x+4 = x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2-5x+4 = -x-4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2-6x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2-4x+8=0 (VN) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 (tm) \\ x-6 (tm) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=0, x=6$.

b) $x^2-5|x-1|-1=0$

Phương trình đã cho :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5(x-1)-1=0\, neu\, x\ge 1 \\ x^2+5(x-1)-1=0\, neu\, x<1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=0 neu x\ge 1 \\ x^2+5x-6=0 neu x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \\ x=6 \end{array}\right.$

c) $x^2+2x+8=|x^2-1| \quad (1)$

Ta thấy $x^2+2x+8=(x+1)^2+7>0 \forall x\in R$.

Nên $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=x^2+2x+8 \\ x^2-1=-x^2-2x-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{9}{2} \\ x^2+2x+7=0 (\text{vô nghiêm}) \end{array}\right.$

Vậy $x=-\dfrac{9}{2}$ là nghiệm của phương trình.

d) $|1-x|=1+x+x^2$

Ta có $1+x+x^2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0 \forall x\in R$

Phương trình đã cho :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x=1+x+x^2 \\ 1-x=-1-x-x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x=0 \\ x^2=-2 (vô\, lý) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bài 32/304 Giải các phương trình sau:

$a)$ $|3x-1|-|2x-3|=0$;

$b)$ $|2-3x^2|-|6-x^2|=0$;

$c)$ $2|x|-|x-3|=3$;

$d)$ $|x^2-1|=-|x|+1$;

$e)$ $|7-2x|=|5-3x|+|x+2|$;

$f)$ $\dfrac{x^2-1}{|x-2|}=x$;

$g)$ $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}=2$.

Giải:

$a)$ $|3x-1|-|2x-3|=0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\lvert 3x-1\rvert$	$1-3x$	$3x-1$	$3x-1$
$\lvert 2x-3\rvert$	$3-2x$	$3-2x$	$2x-3$
Phương trình	$-x-2$	$5x-4$	$x+2$
Nghiệm	$x=-2$	$x=\frac{4}{5}$	$x=-2$

Từ bảng trên ta suy ra nghiệm của phương trình là: $x=-2$ và $x=\frac{4}{5}$.

$b)$ $|2-3x^2|-|6-x^2|=0$

x	$-\infty$ $\quad$ $-\sqrt{6}$	$\frac{-\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$\lvert 2-3x^2\rvert$	$3x^2-2$	$3x^2-2$	$2-3x^2$	$3x^2-2$	$-2+3x^2$
$\lvert 6-x^2\rvert$	x^2-6	$6-x^2$	$6-x^2$	$6-x^2$	$-6+x^2$
Phương trình	$2x^2+4$	$4x^2-8$	$-2x^2-4$	$4x^2-8$	$2x^2+4$
Nghiệm	Vô nghiệm	$x=\pm\sqrt{2}$	Vô nghiệm	$x=\pm\sqrt{2}$	Vô nghiệm

Từ bảng ta suy ra nghiệm của phương trình là: $x=\pm\sqrt{2}$

$c)$ $2|x|-|x-3|=3$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0	3	$+\infty$
$2\lvert x\rvert$	$-2x$	$2x$	$2x$
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$	$3-x$	$x-3$
Phương trình	$-x-3=3$	$3x-3=3$	$x+3=3$
Nghiệm	$x=-6$	$x=2$	$x=0$

Từ bẳng ta suy ra nghiệm của phương trình là: $x=-6$, $x=2$ và $x=0$.

$d)$ $|x^2-1|=-|x|+1$

x	$-\infty$ $\qquad$ -1	0	1	$+\infty$
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	$1-x^2$	$1-x^2$	x^2-1
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x	x
Phương trình	$x^2-1-x=1$	$1-x^2-x=1$	$1-x^2+x=1$	$x^2-1+x=1$

Nghiệm	$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Suy ra nghiệm của phương trình là: $x=\pm 1$, $x=\pm 2$ và $x=0$.

e) $|7-2x|=|5-3x|+|x+2|=0$

$\Leftrightarrow$ $|7-2x|-|5-3x|-|x+2|=0$

x	$-\infty \qquad -2 \qquad\qquad \frac{5}{3} \qquad\qquad \frac{7}{2} \qquad\qquad +\infty$			
$\|7-2x\|$	$7-2x$	$7-2x$	$7-2x$	$2x-7$
$\|5-3x\|$	$5-3x$	$5-3x$	$3x-5$	$5-3x$
$\|x+2\|$	$2-x$	$x+2$	$x+2$	$x+2$
Phương trình	$2x=0$	$0x=0$	$-6x+10=0$	$-2x-4=0$
Nghiệm	$x=0$	Vô nghiệm	$x=\frac{5}{3}$	$x=-2$

Suy ra nghiệm của phương trình là: $x=0$, $x=\frac{5}{3}$ và $x=-2$.

f) $\frac{x^2-1}{|x-2|}=x$

ĐK: $x\neq 2$

x	$-\infty \qquad\qquad\qquad 2 \qquad\qquad\qquad +\infty$	
$\|x-2\|$	$2-x$	$x-2$
Phương trình	$\frac{x^2-1}{2-x}-x=0$	$\frac{x^2-1}{x-2}-x=0$
Nghiệm	$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$	$x=\frac{1}{2}$

Nghiệm của phương trình là: $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ và $x=\frac{1}{2}$.

g) $\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}=2$

ĐK: $x\neq 0$ và $x\neq 2$

x	$-\infty \qquad\qquad -1 \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad +\infty$		
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x
Phương trình	$\frac{x^2-1-x-1}{-x(x-2)}=2$	$\frac{x^2-1+x+1}{-x(x-2)}=2$	$\frac{x^2-1+x+1}{x(x-2)}=2$
Nghiệm	$x=\frac{-1}{3}$	$x=1$	$x=5$

Nghiệm của phương trình là: $x=\frac{-1}{3}$, $x=1$ và $x=5$.

Bài 33. Giải và biện luận các phương trình sau.

a) $\left|x^2+x+m\right|=-x^2+x+2$.

b) $a|x+2|+|x-1|=b$

Giải:

a) $\left|x^2+x+m\right|=-x^2+x+2$.

ĐK $-x^2+x+2\ge 0 \Leftrightarrow -4\le x\le 5 \Leftrightarrow x\in[-4,5]$

TH1: Với $x^2+x+m=-x^2+x+2$

Khi đó pt có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\dfrac{2-m}{2}} \\ x=-\sqrt{\dfrac{2-m}{2}} \end{array}\right.$ với điều kiện $-30\le m\le 2$

TH2: Với $x^2+x+m=x^2-x-2$

Khi đó pt có nghiệm $x=\dfrac{-m-2}{2}$ với điều kiện $-8\le m\le 6$

Kết luận: Với $-30\le m\le 2$ phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\dfrac{2-m}{2}} \\ x=-\sqrt{\dfrac{2-m}{2}} \end{array}\right.$

Với $-8\le m\le 6$ phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{-m-2}{2}$.

Với các TH còn lại phương trình vô nghiệm.

b) $a|x+2|+|x-1|=b$

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$ $\qquad -2$	$\qquad -1$	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$ $\quad 0 \quad$ $x+2$		$x+2$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	$1-x$ $\quad 0 \quad$ $x-1$	
PT	$-2ax=a+b$	$3a=b$	$2ax=b-a$

KL: Với $a=0, b\ne 0$ PT vô nghiệm

Với $a=0, b=0$ PT có vô số nghiệm

Với $a\ne 0, \dfrac{b}{a}\le 0$ PT vô nghiệm

Với $a \neq 0, 0 < \frac{b}{a} < 3$ PT vô nghiệm

Với $a \neq 0, \frac{b}{a} = 3$ PT có nghiệm $x \in [-2,1]$

Bài 34. **Tìm k để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:**

$(x-1)^2 = 2|x-k|, (1)$

Giải:

Với k=1 thì pt(1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2 = 2(x-1) \\ (x-1)^2 = 2(1-x)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0 \\ x^2-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \\ x=3\end{array}\right.$

⇨ không thỏa mãn.

Với $k \neq 1$ pt(1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-k|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2 = 2(x-k) \\ (x-1)^2 = 2(k-x)\end{array}\right. (*)$

Để pt(1) có 4 nghiệm thi tuyển (*) phải có 4 nghiệm.

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x+1-2k=0, (1') \\ x^2-2k+1=0, (2')\end{array}\right.$

+) (1') <=> $x^2-4x+2k+1=0$

$\Delta = 4-2k-1 = 3-2k$

Để pt (1') có 2 nghiệm thì 3 -2k > 0 => $k < \frac{3}{2}$

+) (2') <=> x^2 -2k +1 =0. Để pt có 2 nghiệm thì 2k -1 >0 => $k > \frac{1}{2}$

Vậy với $k \neq 1$ và $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$ thì pt(1) có 4 nghiệm

Bài 35. **Tìm a để phương trình sau có nghiệm duy nhất:**

$ax^2 - 2(a-1)x + 2 = |ax-2|$

Giải:

Tìm a để phương trình có nghiệm duy nhất:

$ax^2 - 2(a-1)x + 2 = |ax-2|$ (1)

+ a = 0, ta có: 2x + 2 = 2

hay x = 0

+ a ≠ 0, khi đó ta có : $\left[\begin{array}{l}ax^2 - 2(a-1)x + 2 = ax - 2 \text{ voi } x \geq \frac{2}{a} \\ ax^2 - 2(a-1)x + 2 = 2 - ax \text{ voi } x < \frac{2}{a}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax^2 - (a-2)x + 4 = 0 \text{ voi } x \geq \dfrac{2}{5} \\ ax^2 - (3a-2)x = 0 \text{ voi } x < \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$

Để phương trình có nghiệm duy nhất thì $\left[\begin{array}{l} (a-2)^2 - 16 = 0 \\ (3a-2)^2 = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 20 \pm \sqrt{96} \\ a = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Vậy với $a = 0$ và $a = \dfrac{2}{3}$ thì pt có nghiệm $x = 0$

$a = 20 \pm \sqrt{96}$ thì pt có nghiệm duy nhất

Bài 36/305 Giải các phương trình sau đây trên R bằng cách đưa về giải phương trình bậc hai:

$a)\ (x^2+x+1)(x^2+x+2) = 12;$ $\qquad d)\ (x^2+5x)^2 - 2(x^2+5x) - 24 = 0;$

$b)\ (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 9;$ $\qquad e)\ (x+5)^4 + (x+3)^4 = 2.$

$c)\ (x^2-5x)^2 + 10(x^2-5x) + 24 = 0;$

Giải:

$a)\ (x^2+x+1)(x^2+x+2) = 12$

Đặt: $y = x^2 + x + 1$, khi đó phương trình trở thành:

$y(y+1) = 12$

$\Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = -4 \end{array}\right.$

+) Với $y = 3$, suy ra: $x^2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

+) Với $y = 4$, suy ra: $x^2 + x + 1 = -4 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 = 0$

Ta thấy

$$x^2 + x + 5 = x^2 + 2x\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 5$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{19}{4} \geq \frac{19}{4}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 1$ và $x = 2$.

$b)\ (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 9$

$\Leftrightarrow [(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)] = 9$

$\Leftrightarrow (x^2+8x+7)(x^2+8x+15) = 9$

Đặt $y = x^2 + 8x + 7$, khi đó ta có:

$y(y+8)=9 \Leftrightarrow y^2+8y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-9 \end{array}\right.$

+) Với $y=1$, ta có: $x^2+8x+7=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4+\sqrt{10} \\ -4-\sqrt{10} \end{array}\right.$

+) Với $y=-9$, ta có: $x^2+8x+7=-9 \Leftrightarrow x^2+8x+16=0 \Leftrightarrow x=-4$ (bội 2)

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=-4\pm\sqrt{10}$ và $x=-4$ (bội 2)

$c)$ $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$

Đặt $t=x^2-5x$, ta được:

$t^2+10t+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=-6 \end{array}\right.$

Với $t=-4$, ta có: $x^2-5x=-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Với $t=-6$, ta có: $x^2-5x=-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=1,\ x=4,\ x=2,\ x=3$.

$d)$ $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$

Đặt $t=x^2+5x$, ta được:

$t^2-2t-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=6 \end{array}\right.$

Với $t=-4$, ta có: $x^2+5x=-4 \Leftrightarrow x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Với $t=6$, ta có: $x^2+5x=6 \Leftrightarrow x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-6 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\pm1,\ x=-4,\ x=-6$

$e)$ $(x+5)^4+(x+3)^4=2$

$\Leftrightarrow (x+5)^4-1+(x+3)^4-1=0$

$\Leftrightarrow \left[(x+5)^2\right]^2-1+\left[(x+3)^2\right]^2-1=0$

$\Leftrightarrow \left[(x+5)^2-1\right]\left[(x+5)^2+1\right]+\left[(x+3)^2-1\right]\left[(x+3)^2+1\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+5-1)(x+5+1)\left[(x+5)^2-1\right]+(x+3-1)(x+3+1)\left[(x+3)^2-1\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+4)\left[(x+6)(x^2+10x+26)+(x+2)(x^2+6x+10)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+4=0 \\ 2x^3+24x^2+108x+176=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ (x+4)(x^2+8x+22)=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=-4$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=-4$.

Bài 36. Giải các phương trình sau đây trên R bằng cách đưa về giải phương trình bậc hai:

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$

b) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x+ 7) = 9$

c) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$

d) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$

e) $(x + 5)^4 + (x + 3)^4 = 2$

Giải:

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$ (1)

Ta có: $x^2 + x + 1 = x^2 + 2.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x \in R$

Đặt $x^2 + x + 1 = t$, (với $t \geq \frac{3}{4}$) (1) trở thành:

$$t(t + 1) = 12 \Leftrightarrow t^2 + 2.\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow (t + \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+\frac{1}{2}=\frac{7}{2} \\ t+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-4 \text{ (loai)} \end{array}\right.$$

Với t = 3 thì $x^2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ x+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là: x = 1; x = - 2

b) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x+ 7) = 9$

$\Leftrightarrow$ $[(x + 1)(x + 7)][(x + 3)(x + 5) = 9$

$\Leftrightarrow$ $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = 9$ (2)

Ta có: $x^2 + 8x + 7 = x^2 + 2.4x + 16 - 9 = (x - 4)^2 - 9 \geq - 9$ với $\forall x \in R$

Đặt $x^2 + 8x + 7 = t$, (với $t \geq - 9$), khi đó (2) trở thành:

$t(t + 8) = 9$

$\Leftrightarrow$ $t^2 + 2.4t + 16 = 25$

$\Leftrightarrow$ $(t + 4)^2 = 5^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+4=5 \\ t+4=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-9 \end{array}\right.$

Với t = 1, thì $x^2 + 8x + 7 = - 1$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+4 = 2\sqrt{2} \\ x+4 = -2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2}-4 \\ x = -2\sqrt{2}-4 \end{array}\right.$$

Với t = - 9 thì $x^2 + 8x + 7 = -9$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là: $x = 2\sqrt{2}-4$; $x = -2\sqrt{2}-4$; $x = -4$

c) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$ (3)

Đặt $x^2 - 5x = t$, khi đó (3) trở thành:

$$t^2 + 10t + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2.5t + 25 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+5)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+5 = 1 \\ t+5 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = -6 \end{array}\right.$$

Với t = - 4 thì $x^2 - 5x = -4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2.\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \\ x - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Với t = - 6 thì $x^2 - 5x = -6$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2.\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \\ x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là: x = 1; x = 2; x = 3; x = 4

d) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$ (4)

Đặt $x^2 + 5x = t$, khi đó (4) trở thành:

$$t^2 - 2t - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 = 5^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1 = 5 \\ t-1 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = -4 \end{array}\right.$$

Với t = - 4 thì $x^2 + 5x = -4$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2.\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{5}{2})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \\ x + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Với t = 6 thì $x^2 + 5x = 6$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2.\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{5}{2})^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \\ x + \frac{5}{2} = -\frac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -6 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là: x = - 6; x = - 4; x = - 1; x = 1

Bài 37. Giải các phương trình sau trên R

a) $3\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2+168\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2-46\frac{x^2-9}{x^2-4}=0$

b) $\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{13}{36}$

Giải:

a) $3\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2+168\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2-46\frac{x^2-9}{x^2-4}=0$

Điều kiện: $x\neq\pm2$

Chia cả hai vế của (1) cho $\frac{x^2-9}{x^2-4}$

(1) $\Leftrightarrow 3.(\frac{x+2}{x-3})\frac{x+3}{x-2}+168\left(\frac{x-2}{x+3}\right)\left(\frac{x-3}{x+2}\right)-46=0$

Đặt $t=(\frac{x+2}{x-3})\frac{x+3}{x-2}$ thay vào phương trình trên ta có:

Phương trình mới nghiệm t : $3t+\frac{168}{t}-46=0\Leftrightarrow 3t^2+168-46t=0$

$\Leftrightarrow$ t = 6; t = $\frac{28}{3}$

- với t = 6 thay trả lại ta có: $t=(\frac{x+2}{x-3})\frac{x+3}{x-2}=6$

$\Leftrightarrow -5x^2+35x-30=0\Leftrightarrow x_1=1; x_2=6$

- với t = $\frac{28}{3}$ thay trả lại ta có: $t=(\frac{x+2}{x-3})\frac{x+3}{x-2}=\frac{28}{3}$

$\Leftrightarrow -25x^2+155x-150=0\Leftrightarrow x_3=\frac{6}{5}; x_4=5$

Kết luận: phương trình đã cho có 4 nghiệm $x_1=1; x_2=6$; $x_3=\frac{6}{5}; x_4=5$

b) $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{13}{36}$ (2)

Cộng vào 2 vế của phương trình (2) biểu thức $-2\frac{1}{1+x}.\frac{1}{x+2}$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}-2.\frac{1}{1+x}.\frac{1}{x+2}=\frac{13}{36}-2.\frac{1}{x+1}.\frac{1}{x+2}$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x+2})^2 = \frac{13}{36} - 2.\frac{1}{x+1}.\frac{1}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)(x+2)} = \frac{13}{36} - 2.\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

Đặt t = $\frac{1}{(1+x)(x+2)}$ với đk: x ≠ -1; x ≠ -2;

Ta có: $t^2 = \frac{13}{36}$ - 2t $\Leftrightarrow 36t^2 - 13 + 72t = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{6} \\ t = \frac{-13}{6} \end{array}\right.$$

Trả lại nghiệm x ta có:

Với t = $\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)(x+2)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Với t = $\frac{-13}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)(x+2)} = \frac{-13}{6} \Leftrightarrow 13x^2 + 39x + 32 = 0$

Phương trình $13x^2 + 39x + 32 = 0$ vô nghiệm

Kết luận: Nghiệm của phương trình đã cho là x = -4; x = 1

Bài 38/305 Giải các phương trình sau:

$a)\ x^2 - 6x + 9 = 0;$ $\quad$ $c)\ x^3 - 6x + 4 = 0;$

$b)\ x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0;$ $\quad$ $d)\ x^3 - 4x - 1 = 0.$

Giải:

$a)\ x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x + 3x + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x+3) - 3x(x+3) + 3(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 3x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ x^2 - 3x + 3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$$

$b)\ x^3+9x^2+18x+28=0 \iff x^3+7x^2+2x^2+14x+4x+28=0$

$\iff x^2(x+7)+2x(x+7)+4(x+7)=0$

$\iff (x+7)(x^2+2x+4)=0$

$\iff \left[\begin{array}{l} x+7=0 \\ x^2+2x+4=0 \end{array}\right.$

$\iff \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=-1\pm\sqrt{3}i \end{array}\right.$

$c)\ x^3-6x+4=0 \iff x^3-2x^2+2x^2-4x-2x+4=0$

$\iff x^2(x-2)+2x(x-2)-2(x-2)=0$

$\iff (x-2)(x^2+2x-2)=0$

$\iff \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2+2x-2=0 \end{array}\right.$

$\iff \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

$d)\ x^3-4x-1=0$

Theo công thức Cácđanô, ta có:

$$x_1=u_1+v_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-4)^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-4)^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{-687}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{-687}}{18}}$$

$x_2=u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2$

Với $\varepsilon=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\varepsilon^2=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x_3=u_1\varepsilon^2+v_1\varepsilon$

Với $\varepsilon=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\varepsilon^2=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Bài 39. Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$

c) $x^3 - 7x + 6 = 0$

Giải:

a) $x^3 – 4x^2 – 4x – 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x – 5)(x^2 + x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x^2 + x + 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$

Giải (1): $\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$ nên (1) có hai nghiệm là: $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là: x = 5; $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

b) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 6)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Giải (2): $\Delta' = 1 - 3 = -2 = 2i^2$ nên (2) có hai nghiệm là: $x = -1 \pm i\sqrt{2}$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là: x = - 6; x = $-1 - i\sqrt{2}$; x = $-1 + i\sqrt{2}$

c) $x^3 – 7x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x – 2)(x^2 + 2x – 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x – 1)(x – 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là: x = - 3; x = 1; x = 2

Bài 40. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 – 2x^3 + 2x^2 + 4x – 8 = 0$

b) $x^4 + 2x^3 – 2x^2 + 6x – 15 = 0$

c) $x^4 – 4x^3 + 3x^2 + 2x – 1 = 0$

d) $x^4 – 3x^3 + x^2 + 4x – 6 = 0$

Giải:

a) $x^4 – 2x^3 + 2x^2 + 4x – 8 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x^4 – 2x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 4x – 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 – 2x + 4) - 2(x^2 – 2x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 – 2)(x^2 – 2x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$

Giải (1): $\Delta' = 1 - 4 = -3 = 3i^2$ nên (1) có hai nghiệm là: $x = 1 \pm i\sqrt{3}$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là: $x = \pm\sqrt{2}$; $x = 1 \pm i\sqrt{3}$

b) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + 3x^2 + 2x^3 + 6x - 5x^2 - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 3) + 2x(x^2 + 3) - 5(x^2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 + 2x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3=0 \\ x^2+2x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm i\sqrt{3} \\ x=-1\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là: $x = -1 \pm \sqrt{6}$; $x = \pm\ i\sqrt{3}$

c) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 2x + 2) - 2x(x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 2x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x+2=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

d) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 3x^3 - 9x - 2x^2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 3) - 3x(x^2 + 3) - 2(x^2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 3x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3=0 \\ x^2-3x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm i\sqrt{3} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là: $x = 1 \pm i$ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Bài 41/306 Giải phương trình

a, $\dfrac{3}{x^2 + x - 2} = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 + x} + \dfrac{3}{x^2 - 3x}$

b, $\dfrac{2x}{4x^2 + 3x + 8} + \dfrac{3x}{4x^2 - 6x + 8} = \dfrac{1}{6}$

c, $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{-20}{x^2 + 2x - 3}$

Giải:

a, $\dfrac{3}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{x^3-2x^2+x}+\dfrac{3}{x^2-3x}$ (1)

Ta có: phương trình (1) tương đương phương trình sau

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x(x-1)^2}+\frac{3}{x(x-3)} \qquad (*)$$

ĐK: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 1 \\ x\neq -2 \\ x\neq -3 \end{cases}$

Khi đó:

(*) $\Leftrightarrow 3x(x-1)(x-3)=(x+2)(x-3)+3(x+2)(x-1)^2$

$\Leftrightarrow 13x^2-19x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{19}{13} \end{array}\right.$

Do điều kiện là $x\neq 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm là: $x=\dfrac{19}{13}$

b, $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8}+\dfrac{3x}{4x^2-6x+8}=\dfrac{1}{6}$ (2)

Ta có $x=0$ không là nghiệm của (2) nên

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{4x+\dfrac{8}{x}+3}+\dfrac{3}{4x+\dfrac{8}{x}-6}=\dfrac{1}{6}$

Đặt: $t=4x+\dfrac{8}{x}$ ta được

$\dfrac{2}{t+3}+\dfrac{3}{t-6}=\dfrac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(t-6)+3(t+3)}{(t+3)(t-6)}=\dfrac{1}{6}$

$\Leftrightarrow 12(t-6)+18(t+3)-(t+3)(t-6)=0$

$\Leftrightarrow t(33-t)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=33 \end{array}\right.$

Với $t=0$ ta có:

$4x^2+8=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+2=8 \;\Leftrightarrow\; x=\pm\sqrt{2}i$

Với t=33 ta có

$$4x^2 - 33x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 8$, $x = \dfrac{1}{4}$ và $x = \pm\sqrt{2}i$

c, $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{-20}{x^2+2x-3}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{-20}{(x+3)(x-1)} \qquad (*)$$

ĐK: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow (x+1)(x+3) - (x-2)(x-1) = -20$

$\Leftrightarrow 7x + 21 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$

Bài 41/306 Giải các phương trình sau bằng cách phân tích vế trái thành nhân tử

a) $x^3 - 4x^2 + x + 4 = 0$

b) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x = 0$

c) $16x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

Giải:

a,

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - (4x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1) - 4(x^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

b,

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow (x^4 - x) - (3x^3 - 3x^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x^3 - 1) - 3x^2(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x + 1) - 3x^2(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)[x(x^2 + x + 1) - 3x^2] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)x(x^2 - 2x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm x = 0 và x = 1 (bội 3)

c,

$$16x^4 + 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 16x^4 + 8x^2 - 4x^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow [(4x^2)^2 + 2.4x^2 + 1] - 4x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (4x^2 - 1)^2 - 4x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (4x^2 + 1 - 2x)(4x^2 + 1 + 2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (4x^2 + 1 - 2x) = 0 \\ (4x^2 + 1 + 2x) = 0 \end{array}\right.$$

Ta có

$(4x^2 + 1 - 2x) = 0$ có nghiệm là $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{4}$

$(4x^2 + 1 + 2x) = 0$ có nghiệm là $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{4}$ và $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4}$.

Bài 42. Giải các hệ phương trình

Giải:

$$a) \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 9xy + 3y^2 = -3 & (1) \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) ta có: $8xy = 16 \Leftrightarrow x = y$

Thay $x = \dfrac{2}{y}$ vào $x^2 - 3xy + y^2 = -1$ ta được

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + 3.\left(\frac{2}{y}\right).y - y^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{y^2} - 6 + y^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 4 - 5y^2 + y^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{array}\right.$$

+ Với y = -2 thì x = -1

+ Với y = -1 thì x = -2

+ Với y = 1 thì x = 2

+ Với y = 2 thì x = 1

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: (-1, -2), (-2, -1), (1, 2), (2, 1).

b) $\begin{cases} y^2 - 3xy = 4 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 \end{cases}$ (II)

Nhận thấy x = 0, y = 0 không là nghiệm của hpt đã cho.

Với $x \neq 0$, $y \neq 0$ Đặt x = yt thì hệ (II) trở thành

$$\begin{cases} y^2 - 3ty^2 = 4 \\ y^2t^2 - 4ty^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 3t)y^2 = 4 & (1) \\ (t^2 - 4t + 1)y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) ta có:

$$\frac{1 - 3t}{t^2 - 4t + 1} = 4 \Leftrightarrow 1 - 3t = 4(t^2 - 4t + 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

+ Với t = 3 thì x = 3y Thay x = 3y vào y^2 -3xy = 4 ta được:

$$y^2 - 9y^2 = 4 \Leftrightarrow -8y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = -2 \text{ (vô lý)}$$

+ Với $t = \frac{1}{4}$ thì $x = \frac{-y}{4}$.Thay $x = \frac{-y}{4}$ vào $y^2 - 3xy = 4$ ta được

$$y^2 - 3\left(\frac{-y}{4}\right).y = 4 \Leftrightarrow 4y^2 + 3y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = \frac{16}{7} \Leftrightarrow y = \frac{\pm 4\sqrt{7}}{7}$$

Vì $y = \frac{\pm 4\sqrt{7}}{7}$ nên $x = \mp \frac{1}{\sqrt{7}}$

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $\left(\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{4}{\sqrt{7}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{4}{\sqrt{7}}\right)$.

c) $\begin{cases}(x+y)^2-4(x+y)=45\\(x-y)^2-2(x-y)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[(x+y)-10]\,[(x+y)+6]=0\\ [(x-y)+1]\,[(x-y)-3]=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=10\\x+y=-6\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x-y=-1\\x-y=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=10\\x-y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=10\\x-y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-6\\x-y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-6\\x-y=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{9}{2}\\y=\frac{11}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{13}{2}\\y=\frac{7}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{-7}{2}\\y=\frac{-5}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{-3}{2}\\y=\frac{-9}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

d) $\begin{cases}x+y+xy+1=0\\x^2+y^2-x-y=22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)+xy+1=0\\(x+y)^2-2xy-(x+y)-22=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=-1-(x+y) & (1)\\(x+y)^2-2xy-(x+y)-22=0 & (2)\end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$(x+y)^2+2+2(x+y)-(x+y)-22=0$$

$$\Leftrightarrow(x+y)^2+(x+y)-20=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4\\x+y=-5\end{cases}$$

+Với x+y=4 thế vào (1) ta được xy = -5

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=4\\xy=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}\end{array}\right.$$

+Với x + y = -5 thế vào (1) ta được xy=4

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \end{array} \right.$$

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: (-4, -1), (-1, -4)

Bài 43 Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + xz - yz = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ xy + xz + yz = 17 \\ xyz = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x + y} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y + z} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{xz}{x + z} = \dfrac{36}{13} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$

Giải

a) $$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + xz - yz = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ xy + xz = yz + 7 & (2) \\ \left(x + y + z\right)^2 - 2\left(xy + yz + xz\right) = 14 & (3) \end{cases}$$

Thế (1) và (2) vào (3) ta được:

$6^2 - 2.(yz + 7 + yz) = 14 \Leftrightarrow 36 - 4yz - 14 = 14 \Leftrightarrow yz = 2$ (*)

Ta có (2) $\Leftrightarrow x(y + z) = yz + 7 \Leftrightarrow x(y + z) = 9$

(1) $\Leftrightarrow y + z = 6 - x$

Thay $y + z = 6 - x$ vào $x(y + z) = 9$ ta được

$x(6 - x) = 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Thay x = 3 vào $y + z = 6 - x$ ta được y + z = 3 (**)

Từ (*) và (**) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} yz = 2 \\ y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x = 3$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm (x, y, z) = (3,2,1): (3,1,2)

b) $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ xy + xz + yz = 17 \\ xyz = 10 \end{cases}$ (1)

Theo định lí viet đảo x, y, z là nghiệm của phương trình bậc ba có dạng

$Ax^2 + Bx + C = 0$

ta có:

$$-\frac{B}{A} = 8,\ \frac{C}{A} = 17,\ -\frac{D}{A} = 10$$

Chọn A = 1 nên có B = -8, C = 17, D = -10 (1) trở thành

$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 1, 2, 5$

$\Rightarrow y =$

$\Rightarrow z =$

c) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{36}{13} \end{cases}$ (3)

Dễ thấy x = y = z = 0 không là nghiệm của (3)

Với $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ ta có

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{36}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{18} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 9 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có cặp nghiệm (x, y, z) = (4, 6, 9)

d) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 481 \\ (x+y)^2 - xy = 37 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [(x+y)^2 - 2xy]^2 - (xy)^2 = 481 \\ (x+y)^2 - xy = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(x+y)^2 - 2xy]^2 - (xy)^2 = 481 & (1) \\ (x+y)^2 = xy + 37 & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta có:

$$[37 + xy - 2xy]^2 - (xy)^2 = 481 \Leftrightarrow [37 - xy]^2 - (xy)^2 = 481$$

$$\Leftrightarrow (xy)^2 - 74xy + 37^2 - (xy)^2 = 481 \Leftrightarrow -74xy = -888 \Leftrightarrow xy = 12$$

Thay $xy = 12$ vào $(x+y)^2 - xy = 37$ ta có

$$(x+y)^2 - 12 = 37 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 25 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 5^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + y = -5 \end{array}\right.$$

Với $x + y = 5$ ta có hệ $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 12 \end{cases}$ hệ vô nghiệm

Với $x + y = -5$ ta có hệ $\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 12 \end{cases}$ hệ vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm

Bài 44/306 Giải các phương trình sau:

Giải:

a, $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$

Ta có

$$\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2x+4=2-x\\2-x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+2x+4=2-x\\x^2+2x+4\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $\begin{cases}x^2+2x+4=2-x\\2-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right.$

Với $\begin{cases}x^2+2x+4=2-x\\x^2+2x+4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm x = -1 hoặc x = -2

Bài 45/307 Giải các phương trình sau:

$a)\ \sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2;$ $\qquad c)\ \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}.$

$b)\ \sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5;$

Giải:

$a)\ \sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$

ĐK: $\begin{cases}3x+7\ge 0\\x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{-7}{3}\\x\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -1$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho trở thành:

$$3x+7+x+1-2\sqrt{(3x+7)(x+1)}=4$$

$\Leftrightarrow\ 4x+4=2\sqrt{(3x+7)(x+1)}$

$\Leftrightarrow\ 2x+2=\sqrt{(3x+7)(x+1)}$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases}(3x+7)(x+1)=(2x+2)^2\\2x+2\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-2x-3=0\\x\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.\\x\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=-1;\ x=3$.

$b)\ \sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5$

ĐK: $\begin{cases}x^2+x-5\ge 0\\x^2+8x-4\ge 0\end{cases}$

Ta có:

$$\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{x^2+x-5}+5=\sqrt{x^2+8x-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(5-\sqrt{x^2+x-5}\right)^2=x^2+8x-4$$

$$\Leftrightarrow \quad -10\sqrt{x^2+x-5}=7x-24$$

$$\Leftrightarrow \quad 10\sqrt{x^2+x-5}=24-7x$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}100(x^2+x-5)=(24-7x)^2\\ 24-7x\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}51x^2+436x-1076=0\\ x\ge \dfrac{24}{7}\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{-538}{51}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=2;\ x=\dfrac{-538}{51}$.

Bài 46/307 **Giải các phương trình sau:**

a) $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$;

b) $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$;

c) $\sqrt{3x^2+6x+16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+2x+4}$.

Giải:

b) $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$

ĐK: $\begin{cases}x+4\ge 0\\ x-4\ge 0\\ x^2-16\ge 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x\ge 4$

$$\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x+2\sqrt{x^2-16}-12$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}-2\sqrt{x^2-16}=2x-12$$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x+4}\\ v=\sqrt{x-4}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}u^2=x+4\\ v^2=x-4\end{cases} \quad \Rightarrow \quad u^2+v^2=2x$

$\Rightarrow \quad u+v=2x-12+2uv$

$\Leftrightarrow \quad (u+v)^2=(2x-12+2uv)^2$

$\Leftrightarrow \quad u^2+v^2+2uv=(2x-12+2uv)^2$

$\Leftrightarrow \quad 2x+2uv=(2x-12+2uv)^2$

Đặt $t=2x+2uv$

$\Rightarrow \quad t=(t-12)^2 \quad \Leftrightarrow \quad t=t^2-24t+144$

$\Leftrightarrow \quad t^2-25t+144=0$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=16 \\ t=9 \end{array}\right.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} 2x+2uv=16 \\ 2x+2uv=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=16-12=4 \\ u+v=9-12=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4 & (*) \\ \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=-3 & (**) \end{array}\right.$

(*) $\Leftrightarrow \quad x+4+x-4+2\sqrt{x^2-16}=16$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x^2-16}=16-2x$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-16}=8-x$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-16=8-x \\ 8-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x=80 \\ x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=5$

(**) (loại).

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=5$.

c) $\sqrt{3x^2+6x+16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+2x+4}$

ĐK: $\begin{cases} 3x^2+6x+16\ge 0 \\ x^2+2x\ge 0 \\ x^2+2x+4\ge 0 \end{cases}$

Khi đó:

$$\sqrt{3x^2+6x+16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+2x+4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3(x^2+2x)+16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+2x+4}$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x} \quad (t\ge 0) \quad \Rightarrow \quad t^2=x^2+2x$

Ta được:

$\sqrt{3t^2+16}+t=2\sqrt{t^2+4} \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2+16+t^2+2t\sqrt{3t^2+16}=4(t^2+4)$

$\Leftrightarrow \quad 2t\sqrt{3t^2+16}=0$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=0 \\ 3t^2+16=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad t=0$

Với $t=0$ ta có: $x^2+2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=0$; $x=-2$.

Bài 47/307 Giải các phương trình sau

$a, \sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{5x-12}=1$

b, $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}-\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$

c, $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$

Giải:

$a, \sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{5x-12}=1$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{5x+7} \\ v=\sqrt[3]{5x-12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3=5x+7 \\ v^3=5x-12 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ (u+v)\left[(u+v)^2-3uv\right]=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=3 \\ v=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} u=2 \\ v=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} u=3 \\ v=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+7=27 \\ 12-5x=-8 \end{cases} \Rightarrow x=4$

Với $\begin{cases} u=-2 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+7=-8 \\ 12-5x=27 \end{cases} \Rightarrow x=-3$

Vậy phương trình có nghiệm S = {-3, 4}

Cách khác câu:

a) $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{5x-12}=1$

Đặt u = $\sqrt[3]{5x+7}$, v= $\sqrt[3]{5x-12}$

Có u + v = 1 (1)

$u^3+v^3=5x+7+5x-12=-5$

$u^3+v^3=(u+v)^3+3uv(u+v)=-5$

$\Leftrightarrow 1+3uv=-5 \Leftrightarrow 3uv=-6 \Leftrightarrow uv=-2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases}u+v=1\\uv=-2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=-1\\v=2\end{cases}\\ \begin{cases}u=2\\v=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{5x+7}=-1\\ \sqrt[3]{5x-12}=2\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{5x+7}=2\\ \sqrt[3]{5x-12}=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x+7=-1\\5x-12=2\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{5x+7}=2\\5x-12=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-8/5\\x=4\end{cases}\\ \begin{cases}x=1/5\\x=11/5\end{cases}\end{array}\right.$$

(vô lí)

KL: Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

b, $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}-\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$

Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}\\v=\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u^3=9-\sqrt{x+1}\\v^3=7+\sqrt{x+1}\end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases}u+v=4\\u^3+v^3=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4\\uv=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=2\\v=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}9-\sqrt{x+1}=8\\7+\sqrt{x+1}=8\end{cases} \Rightarrow x=0$$

Vậy phương trình có nghiệm x = 0

c, $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$

Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}\\v=\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u^3=24+\sqrt{x}\\v^3=5+\sqrt{x}\end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases}u-v=1\\u^3-v^3=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u-v=1\\(u-v)\left[(u-v)^2+3uv\right]=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u-v=6\\uv=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=3\\v=2\end{cases}\\ \begin{cases}u=-2\\v=-3\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $\begin{cases}u=3\\v=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}24+\sqrt{x}=27\\5+\sqrt{x}=8\end{cases} \Rightarrow x=9$

Với $\begin{cases}u=-2\\v=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}24+\sqrt{x}=-8\\5+\sqrt{x}=-27\end{cases} \Rightarrow x=1225$

Vậy phương trình có nghiệm S = {9, 1225}

Bài 49. Giải và biện luận các phương trình

a, $\sqrt{x^2-2mx+1}+2=m$

b, $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a$

Giải:

a, $\sqrt{x^2-2mx+1}+2=m$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2mx+1}=m-2\ (1)$$

Dk: m ≥ 2

(1) $\Leftrightarrow x^2-2mx+1=(m-2)^2$

` $\Leftrightarrow x^2-2mx-m^2+4m-3=0$

Ta có:

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=m-\sqrt{2m^2-4m+3}$$

$$x_2=m+\sqrt{2m^2-4m+3}$$

Kết luân: Với m < 2 thì phương trình vô nghiệm.

Với m ≥ 2 phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=m-\sqrt{2m^2-4m+3}$$

$$x_2=m+\sqrt{2m^2-4m+3}$$

b, $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a\ (1)$

ĐK: $x \geq \frac{1}{4}$

Ta có: $\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)$

(1)$\Leftrightarrow$ x + $\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)$ = a

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2 = a$$

$$\Rightarrow x = a - \sqrt{a}$$

Vậy $x < \dfrac{1}{4}$ thì phương trình vô nghiệm.

$x \geq \dfrac{1}{4}$ phương trình có 1 nghiệm duy nhất: $x = a - \sqrt{a}$

BÀI TẬP THỰC HÀNH GIẢI TOÁN CHƯƠNG 6

Bài 1/307 Giải hệ phương trình:

$$\frac{xy}{ay+bx}=\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Giải:

ĐK $\begin{cases} ay+bx\neq 0 \\ bz+cy\neq 0 \\ cx+az\neq 0 \\ a^2+b^2+c^2\neq 0 \end{cases}$

Trong hai phương trình đầu $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}$ biểu thị mối quan hệ của x, y, z với vai trò như nhau.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{ay+bx}{xy}=\frac{bz+cy}{yz}=\frac{cx+az}{zx}=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Nếu x, y, z là nghiệm thì $xyz\neq 0$

Xét hệ phương trình: $\frac{ay+bx}{xy}=\frac{bz+cy}{yz}=\frac{cx+az}{zx}$

Rút gọn các phân thức ta được:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}$$

ta có:

$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=t$ hay $t=\frac{a}{x};\ t=\frac{b}{y};\ t=\frac{c}{z}$

để tìm x, y, z ta phải tìm giá trị của t.

giải phương trình: $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ tìm t.

ta có: $\dfrac{\left(\frac{a}{t}.\frac{b}{t}\right)}{\frac{ab}{t}+\frac{ba}{t}}=\dfrac{\frac{a^2+b^2+c^2}{t^2}}{a^2+b^2+c^2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2t}=\frac{1}{t^2}\quad\Leftrightarrow\quad t=2$

Suy ra nghiệm của hệ là: $(x,\ y,\ z)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$

Bài 2/307 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x-y=5 & (1) \\ 2\left(\sqrt{2x+2y}+\sqrt{2x-3y}\right)=3\sqrt{(2x+2y)(2x-3y)} & (2) \end{cases}$$

****) Phân tích:***

Trước tiên ta đi tìm điều kiện để phương trình (2) xác định

$$\begin{cases} 2x+2y \ge 0 \\ 2x-3y \ge 0 \\ (2x+2y)(2x-3y) \ge 0 \end{cases}$$

Ta nhận thấy ở phương trình (1) nếu ta biểu diễn x theo y rồi thế vào phương trình thứ (2) để tìm x, y thì sẽ rất phức tạp. Vì ở phương trình (2) biểu thức chứa dấu căn.

Nhận xét: Nếu đặt $u=\sqrt{2x+2y}$; $v=\sqrt{2x-3y}$ $(u \ge 0,\ v \ge 0)$

Khi đó phương trình (2) sẽ trở thành: $2(u+v)=3uv$

mà $\begin{cases} u^2 = 2x+2y \\ v^2 = 2x-3y \end{cases}$ => $u^2+v^2=4x-y=5$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} u^2+v^2=5 \\ 2(u+v)=3uv \\ u \ge 0,\ v \ge 0 \end{cases}$

) Lời giải:

ĐK $\begin{cases} 2x+2y \ge 0 \\ 2x-3y \ge 0 \\ (2x+2y)(2x-3y) \ge 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2x+2y} & (u \ge 0) \\ v=\sqrt{2x-3y} & (v \ge 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 2x+2y \\ v^2 = 2x-3y \end{cases} \Rightarrow u^2+v^2=4x-y=5$

từ đó ta có hệ: $\begin{cases} 2(u+v)=3uv \\ u^2+v^2=5 \\ u \ge 0,\ v \ge 0 \end{cases}$ mà $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv \Rightarrow (u+v)^2=5-2uv$

ta có:

$$\begin{aligned} 2(u+v)=3uv &\Leftrightarrow 4(u+v)^2=9(uv)^2 \\ &\Leftrightarrow 4(5+2uv)=9(uv)^2 \\ &\Leftrightarrow 9(uv)^2-8uv-20=0 \\ &\Leftrightarrow uv=2 \end{aligned}$$

=> $(u+v)^2=5+2.2=9$

=> $\begin{cases} 2(u+v)=6 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3-v \\ -v^2+3v-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=1 \\ u=2 \end{cases} \\ \begin{cases} v=2 \\ u=1 \end{cases} \end{array}\right.$ thỏa mãn

Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ => $\begin{cases} \sqrt{2x+2y}=2 \\ \sqrt{2x-3y}=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 4x-y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y=\dfrac{3}{5} \\ x=\dfrac{7}{5} \end{cases}$

Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ => $\begin{cases} \sqrt{2x+2y}=1 \\ \sqrt{2x-3y}=2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2x+2y=1 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 4x-y=5 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{5} \\ x=\dfrac{11}{10} \end{cases}$

Vậy phương trình có hai cặp nghiệm: $(x,\ y)=\left\{\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{3}{5}\right);\left(\dfrac{11}{10},-\dfrac{3}{5}\right)\right\}$

***) Khai thác bài toán:**

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x-5y=6 \\ 3\left(\sqrt{2x-y}+\sqrt{x-4y}\right)=\sqrt{(2x-y)(x-4y)} \end{cases}$$

2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=m \\ x+y=m^2-4m+6 \end{cases}$$

Bài 3/308 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=8 & (1) \\ xy+yz+zx=17 & (2) \\ xyz=10 & (3) \end{cases}$$

***) Phân tích bài toán:**

Ta nhận thấy từ phương trình (1) ta có thể biểu diễn 2 ẩn theo ẩn còn lại.

Giải sử: $x+y=8-z$

Ở phương trình thứ (3) với $x,y,z\neq 0$ ta cũng có thể biểu diễn 2 ẩn theo ẩn còn lại. Ta có:

$$xy=\frac{10}{z}$$

Từ đó thay vào phương trình (2) để giải.

***) Lời giải:**

Ta có:

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=17 \\ xyz=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8-z \\ xy+yz+zx=17 \\ xy=\dfrac{10}{z} \quad (z\neq 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10}{z} + z(x+y) = 17$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{10}{z} + z(8-z) = 17$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 + 8z^2 - z^3 - 17z = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 5 \\ z = 1 \\ z = 2 \end{array}\right. \text{ thỏa mãn}$$

Với $z = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5 \\ x = 2 \end{cases} \end{array}\right.$

Với $z = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5 \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Với $z = 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy ta tìm được các cặp nghiệm:

$(x,\ y,\ z) = \{(5,\ 2,\ 1);\ (2,\ 5,\ 1);\ (5,\ 1,\ 2);\ (1,\ 5,\ 2);\ (2,\ 1,\ 5);\ (1,\ 2,\ 5)\}$

**) Khai thác bài toán:*

1. Giải hệ sau:

$$\begin{cases} 2x + 1 = y^3 + y^2 + y \\ 2y + 1 = z^3 + z^2 + z \\ 2z + 1 = x^3 + x^2 + x \end{cases}$$

2. Cho các số x, y, z thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \end{cases}$

Tìm GTLN và GTNN mà x, y, z có thể đạt được.

Hướng dẫn: Từ hệ trên ta có: $\begin{cases} x + y = 6 - z \\ xy = 11 - z(6 - z) \end{cases}$ vậy x, y là các nghiệm của phương trình:

$x^2 - (6 - z)x + 11 - z(6 - z) = 0$

tính Δ_x và tìm điều kiện $\Delta > 0$, từ đó suy ra GTLN, GTNN của z.

Do x, y, z bình đẳng, suy ra GTLN, GTNN của x, y.

Bài 4/308 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{zx}{z+x} = \dfrac{26}{13} \end{cases} \quad (*)$$

Giải:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{zx}{z+x} = \dfrac{26}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{5}{18} \\ \dfrac{z+x}{zx} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{18} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{18} - \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{5}{18} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{18} - \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{2}{y} = \dfrac{7}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{18} - \dfrac{1}{y} \\ y = \dfrac{72}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{72}{23} \\ y = \dfrac{72}{7} \\ z = \dfrac{72}{13} \end{cases}$$

Bài 5/308 Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{n}{x_2}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_3 + \dfrac{n}{x_3}\right) \\ \text{..........} \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{n}{x_1}\right) \end{cases} \textbf{ với n} \in \mathbf{Z}^+$$

Giải:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{n}{x_2}\right) \Leftrightarrow 2x_1x_2 = x_2{}^2 + n > 0 \text{ với n} \in \mathrm{Z}^+$$

Suy ra $x_1.x_2 > 0 \Rightarrow x_1 , x_2$ cùng dấu

Tương tự như vậy ta có x_2 , x_3 cùng dấu; x_{n-1} , x_n cùng dấu;

Nếu $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ giả sử $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$

Suy ra x_n - x_1 $\frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right) - \frac{1}{2}(x_2)$

Bài 6 /308 Giải các phương trình

a) $x^3(x^3 - 7) = 8$ (1)

b) $x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 4x + 1 = 0$ (2)

Giải:

a) $x^3(x^3 - 7) = 8$ (1)

Đặt $t = x^3$, phương trình (1) trở thành:

$$t(t-7) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 7t - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 8 \end{array}\right.$$

Với $t = -1 \Rightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$

Với $t = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

b) $x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 4x + 1 = 0$ (2)

*** Phân tích bài toán**

Đây là một phương trình bậc 4, có dạng gần đối xứng. Do vậy ta sẽ chia cả hai vế của phương trình cho x^2 để hạ bậc phương trình và giải

*** Lời giải**

Chia cả hai vế của (2) cho x^2 ta được:

$$x^2 + 4x - 14 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, ta được:

$$t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 6 \end{array}\right.$$

Với $t = 2$: $x - \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 - 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

Với $t=-6$: $x-\dfrac{1}{x}=-6 \Leftrightarrow x^2+6x-1-0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3-\sqrt{10} \\ x=-3+\sqrt{10} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $1-\sqrt{2};1+\sqrt{2};-3-\sqrt{10};-3-\sqrt{10}$

Bài 7/309 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$$

- **Phân tích:** Đây là phương trình không mẫu mực, ta nghĩ đến việc biến đổi phương trình để có thể đặt được ẩn phụ. Nhận thấy rằng nếu chia cả 2 vế cho x^2 ta sẽ làm cho phương trình xuất hiện nhiều nhân tử chung, từ đó giải bài toán thông qua phương trình tích.
- **Lời giải:**

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$$

Chia cả hai vế cho x^2 ta được hệ:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{8}{x^2} \\ 1+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{7}{x^2} \end{cases}$$

Trừ 2 vế của phương trình ta được

$$\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}-\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-y}{x} = \frac{1-y}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-y}{x}(1-\frac{1}{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1-y}{x} = 0 \\ 1-\frac{1}{x} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Với y = 1, thế vào một trong hai phương trình của hệ ta được

$$x^2 + x = 6$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Với x = 1, thế vào một trong hai phương trình của hệ ta cũng được y = -2, y= 3

Kết luận: Vậy phương trình có các cặp nghiêm (x,y) là (1,-2), (1,3), (-2,1), (3,1)

➢ **Khai thác bài toán:**

Cũng bằng phương pháp đặt nhân tử chung, quy phương trình về phương trình tích, có thể tham khảo thêm một số ví dụ sau:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 418 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$$

Bài 8/309 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} |x+2| + |y-3| = 8 \\ |x+2| - 5y = 1 \end{cases} \quad (*)$$

*** Phân tích bài toán**

Đây là hệ gồm hai phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối. Để giải hệ phương trình này, ta nghĩ đến việc phá dấu giá trị tuyệt đối.

Ta có: $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \ge -2 \\ -x-2, & x < 2 \end{cases}$

$|y-3| = \begin{cases} y-3, & y \ge 3 \\ -y+3, & y < 3 \end{cases}$

Từ đó xét từng khoảng giá trị của x và giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

*** Lời giải**

Với $\begin{cases} x \ge -2 \\ y \ge 3 \end{cases}$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2+y3=8 \\ x+2-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-9 \\ x-5y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{22}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x \ge -2 \\ y < 3 \end{cases}$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2-y+3=8 \\ x+2-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x-5y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x < -2 \\ y \ge 3 \end{cases}$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2+y-3=8 \\ -x-2-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=13 \\ -x-5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{34}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x < -2 \\ y < 3 \end{cases}$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2-y+3=8 \\ -x-2-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-7 \\ x+5y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là:

$$\begin{cases} x=\dfrac{22}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases};\ \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases};\ \begin{cases} x=-\dfrac{34}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases};\ \begin{cases} x=-8 \\ y=1 \end{cases}$$

Bài 9/309 Giải phương trình:

$x^2+y^2-2x+8y+7=0$

***) Phân tích:**

Ta có VT của phương trình có thể biến đổi về dạng A^2+B^2 mà $A^2+B^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ nên ta có cách giải như sau.

***) Lời giải:**

$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 + 8y + 16\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + \left(y+4\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-1\right)^2 = 0 \\ \left(y+4\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = -4$.

***) Khai thác bài toán:**

Bằng cách giải tương tự, ta có bài toán sau:

1. Giải phương trình: $2x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2x + y + 1 = 0$

2. Giải phương trình: $2x^2 + 8y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

Bài 10/309 Giải phương trình:

$(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$

***) Phân tích:**

Ta thấy phương trình có bậc là 4 nếu khai triển biểu thức ở VT thì gặp nhiều khó khăn. Ta tìm cách đưa phương trình đã cho về dạng cơ bản đã biết cách giải bằng cách đặt ẩn phụ.

***) Lời giải:**

Đặt $y = x + \frac{3+5}{2} = x + 4$ => $x = y - 4$

Thay vào phương trình đã cho, ta được: $\left(y-1\right)^4 + \left(y+1\right)^4 = 2$

Khai triển và rút gọn ta được:

$2y^4 + 4y^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow y^4 + 2y^2 = 0$

Đặt $t = y^2$, $t > 0$ được phương trình $t^2 + t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right.$

Với $t = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow x = -4$

Do $t > 0$ nên $t = -2$ loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -4$

***) Khai thác bài toán:**

Với cách giải tương tự ta có:

1. Giải phương trình: $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 16$

2. Giải phương trình tổng quát: $(x+a)^4 + (x+b)^4 = k \quad (k \neq 0)$

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1/369 Chứng minh các bất đẳng thức:

$a)\ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\ (a, b, c > 0)$

b) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

Giải:

a) Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số không âm $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$, ta có:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{bca}} \quad \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$ (đpcm)

b) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ (đpcm)

Bài 2/369 Chứng minh các BĐT

a, $|a+b| \leq |1+ab|$ **trong đó** $|a| \leq 1, |b| \leq 1$

b, Với $a \geq b \geq 1$ **thì** $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$

Giải:

a, $|a+b| \leq |1+ab|$ (1) trong đó $|a| \leq 1, |b| \leq 1$

$(1) \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \leq 1+2ab+a^2b^2$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2-(1+2ab+a^2b^2) \leq 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-1-a^2b^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (a^2-1)(1-b^2) \leq 0$

Vì $|a| \leq 1, |b| \leq 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} a^2-1 \leq 0 \\ b^2-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-1 \leq 0 \\ 1-b^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (a^2-1)(1-b^2) \leq 0$ (đpcm)

b, Với $a \geq b \geq 1$ thì $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ (2)

$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{2}{1+ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(1+b^2)(1+ab)+(1+a^2)(1+ab)-(1+a^2)(1+b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$

$\Leftrightarrow ab^3+b^2+ab+1+a^3b+a^2+ab+1-2a^2b^2-2a^2-2b^2-2 \geq 0$

$\Leftrightarrow ab^3+a^3b-2a^2b^2-a^2-b^2+2ab \geq 0$

$\Leftrightarrow ab(a-b)^2-(a-b)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (ab-1)(a-b)^2 \geq 0$

Vì $a \geq b \geq 1$ nên ab $\geq 1 \Rightarrow (ab-1)(a-b)^2 \geq 0$

Bài 3/369 Chứng minh bất đẳng thức

$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \quad (a,b,c,d>0)$

Giải:

Ta có:

Do $a,b,c,d>0$ nên bình phương hai vế ta được

$$ab + ad + cb + cd \ge ab + cd + 2\sqrt{abcd}$$

$\Leftrightarrow \quad ad + bc \ge 2\sqrt{abcd}$

$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \ge 0 \quad \forall a, b, c, d > 0.$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 4/369 Chứng minh các BĐT

a, $\dfrac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ **với a > b > 0 ; n > m; m, n $\in$ N**

b, $(1+x)^n + (1-x)^n < 2^n$ **với |x| < 1 và n $\in$ N, n > 1**

Giải:

a, $\dfrac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ với a > b > 0 ; n > m; m, n $\in$ N

$\Leftrightarrow \dfrac{(a^m - b^m)(a^n + b^n)}{(a^n + b^n)(a^m + b^m)} - \dfrac{(a^n - b^n)(a^m + b^m)}{(a^n + b^n)(a^m + b^m)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(a^m b^n - a^n b^m)}{(a^n + b^n)(a^m + b^m)} > 0$

$\Rightarrow a^{m-n} > b^{m-n} \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m-n} > 0$

b, $(1+x)^n + (1-x)^n < 2^n$ (1) với |x| < 1 và n $\in$ N, n > 1

Đặt $\begin{cases} a = 1 + x \\ b = 1 - x \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 \Leftrightarrow (a+b)^n = 2^n$

(1) $\Rightarrow a^n + b^n < 2^n$

Ta có:

$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + .. + nab^{n-1} + b^n$

$\Rightarrow (a+b)^n = a^n + b^n + (na^{n-1}b + .. + nab^{n-1})$

Mà $na^{n-1}b + .. + nab^{n-1} > 0$ nên $\Rightarrow a^n + b^n < 2^n$(đpcm)

Bài 5/369 Chứng minh BĐT sau với mọi a, b, c.

a, $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$

b, $a^2 + b^2 + 4 \ge ab + 2(a + b)$

c, $\dfrac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 \ge ab - ac + 2bc$

Giải:

a, $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$

Nhân hai vế với 2 ta được:

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \ge 2ab + 2a + 2b$$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng $\forall$ a, b, c)

b, $a^2+b^2+4 \geq ab+2(a+b)$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+8 \geq 2ab+4(a+b) \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab+a^2-4a+4+b^2-4b+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-2)^2+(b-2)^2 \geq 0$ (luôn đúng $\forall$ a, b, c)

c, $\frac{1}{4}a^2+b^2+c^2 \geq ab-ac+2bc$

$\frac{1}{4}a^2+b^2+c^2-ab+ac-2bc \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}a-b+c\right)^2 \geq 0$ (luôn đúng $\forall$ a, b, c)

Bài 6/369 **Chứng minh rằng với mọi x, y ta có**

$x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0$

Giải:

Ta có:

$VT = x^2-2x(2y-1)+(2y-1)^2+y^2-2y+2$

$\quad = (x-2y+1)^2+(2y-1)^2+(y-1)+1 \geq 1$

$\Rightarrow \quad VT>0 \quad \Rightarrow$ đpcm.

Bài 7

a) Nếu hai số x, y thỏa mãn $x^2+y^2=1$, chứng minh rằng $-\sqrt{2} \leq x+y \leq \sqrt{2}$

b) Nếu a + b = 1, chứng minh rằng $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$.

Giải

a) Nếu hai số x, y thỏa mãn $x^2+y^2=1$, chứng minh rằng $-\sqrt{2} \leq x+y \leq \sqrt{2}$

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho hai cặp số: (1, 1) và (x, y) Ta có:

$$(1.x+1.y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow |x+y| \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x+y \leq \sqrt{2}$$

Cách 2: Đặt $\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases}$

Ta có : $\cos\varphi+\sin\varphi=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$ mà $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) \leq 1$

Nên $-\sqrt{2} \leq \cos\varphi+\sin\varphi \leq \sqrt{2}$ hay $-\sqrt{2} \leq x+y \leq \sqrt{2} \Rightarrow$ đpcm.

b) Nếu a + b = 1, chứng minh rằng $a^4 + b^4 \ge \frac{1}{8}$.

Cách 1:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1 - 2ab$$

$$a^4 + b^4 = (a+4)^4 - 2a^2b^2 = (1-2ab)^2 - 2a^2b^2 \qquad (1)$$

Vì a + b = 1, $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ hay $\frac{(a+b)}{4} \ge ab$ nên $0 \le ab \le \frac{1}{4}$

Thay ab = $\frac{1}{4}$ vào (1) ta được:

$$a^4 + b^4 = (1-2ab)^2 - 2a^2b^2 \ge \left(1 - 2.\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

Cách 2:

a + b = 1 $\Rightarrow (a+b)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 1 \qquad (1)$

mặt khác $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \qquad (2)$

cộng vế (1) và (2) ta được

$$2(a^2 + b^2) \ge 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a^4 + b^4) \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^4 + b^4 \ge \frac{1}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = $\frac{1}{2}$

Bài 8. Chứng minh rằng

a) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2, \ \forall x \in R;$

b) $\frac{x+8}{\sqrt{x-1}} \ge 6, \ \forall x > 1;$

c) $(a+b)(ab+1) \ge 4ab, \ \forall a, b \ge 0;$

Giải

a) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2,$

Áp dụng Cosi cho hai số x^2+1 và 1, ta có

$$x^2+2\ge 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\ge 2\ \ \forall x\in R;$$

b) $\frac{x+8}{\sqrt{x-1}}\ge 6,\ \forall x>1;$

Áp dụng Cosi cho hai số x - 1 và 9, ta có

$$x+8\ge 2\sqrt{9(x-1)} \Leftrightarrow x+8\ge 6\sqrt{(x-1)} \Leftrightarrow \frac{x+8}{\sqrt{x-1}}\ge 6,\ \forall x>1;$$

c) $(a+b)(ab+1)\ge 4ab,\ \forall a,b\ge 0;$

Áp dụng Cosi cho hai số a và b, ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (1)

Áp dụng Cosi cho hai số ab và 1, ta có $ab+1\ge 2\sqrt{ab}$ (2)

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được $(a+b)(ab+1)\ge 4ab$

Bài 9. Chứng minh rằng

a) $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge 8abc,\ \forall a,b,c\ge 0;$

b) $a^2\left(1+b^2\right)+b^2\left(1+c^2\right)+c^2\left(1+a^2\right)\ge 6abc.$

Giải

a) $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge 8abc,\ \forall a,b,c\ge 0;$

Áp dụng Cosi cho hai số a và b, ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (1)

Áp dụng Cosi cho hai số b và c, ta có $b+c\ge 2\sqrt{bc}$ (2)

Áp dụng Cosi cho hai số a và c, ta có $a+c\ge 2\sqrt{ac}$ (3)

Nhân vế với vế của (1), (2) và (3) ta được $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

b) $a^2\left(1+b^2\right)+b^2\left(1+c^2\right)+c^2\left(1+a^2\right)\ge 6abc.$

Áp dụng Cosi cho 6 số a^2, a^2b^2, b^2, b^2c^2, c^2, c^2a^2, ta có

$$a^2+a^2b^2+b^2+b^2c^2+c^2+c^2a^2\ge 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}$$

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6$$

Bài 10.

a) Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng $|x + 2y| \le \sqrt{5}$

b) Cho $2x^2 + 3y^2 = 5$. Chứng minh rằng $|2x + 3y| \le \sqrt{5}$

Giải

a) Áp dụng bunhiacopki cho 2 cặp số (1, 2), (x, y) ta có:

$$(x+2y)^2 \le (1^2+2^2)(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)^2 \le 5 \Leftrightarrow |x+2y| \le \sqrt{5}$$

b) Áp dụng bunhiacopki cho 2 cặp số $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{2x}, \sqrt{3y}\right)$ ta có:

$$\left(\sqrt{2}.\sqrt{2x} + \sqrt{3}.\sqrt{3y}\right)^2 \le \left(\sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2\right)\left[\left(\sqrt{2x}\right)^2 + \left(\sqrt{3y}\right)^2\right]$$

$$(2x+3y)^2 \le 5 \Leftrightarrow |2x+3y| \le \sqrt{5}$$

Bài 11/370 Chứng minh rằng

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \ge \frac{25}{2} \qquad \forall x \in R$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho 1,1 và $\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$, $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$ ta có:

$$(1^2+1^2)\left[\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2\right] \ge \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{4}{\sin^2 x}\right) \ge (1+4)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \ge \frac{25}{2}$$

Bài 12/370 Cho $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(x^2 + ax + b\right)^2 + \left(x^2 + cx + d\right)^2 \le \left(2x^2 + 1\right)^2, \ \forall x \in R$$

Giải:

Áp dung bất đẳng thức Bunhiacopski cho x, a, b và $x, x, 1$ ta có:

$$\left(x^2 + ax + b\right)^2 \le \left(x^2 + a^2 + b^2\right)\left(x^2 + x^2 + 1\right) \qquad (1)$$

Áp dung bất đẳng thức Bunhiacopski cho x, c, d và $x, x, 1$ ta có:

$$\left(x^2+cx+d\right)^2 \le \left(x^2+c^2+d^2\right)\left(x^2+x^2+1\right) \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) ta được:

$$\left(x^2+ax+b\right)^2+\left(x^2+cx+d\right)^2 \le \left(x^2+1\right)\left(x^2+a^2+b^2+c^2+d^2\right)=\left(2x^2+1\right)^2$$

$\Rightarrow$ đpcm

Bài 13:Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{n-1}{n}$

Giải:

a) Ta có:

$$\frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{n+2}>\frac{1}{2n}$$

$$...$$

$$\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}$$

Cộng từng vế các phương trình ta được:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>n\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

b) $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{n-1}{n}$

Ta có:

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$...$$

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}\quad \text{(đpcm)}$$

Bài 14/370

a. Cho n số dương $a_1, a_2,...,a_n$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$

(Vế trái gọi là trung bình điều hòa của $a_1, a_2,...,a_n$)

b. Chứng minh rằng với số n dương $a_1, a_2,...,a_n$ thì:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\le\sqrt[n]{\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2}{n}}$$

(Vế trái gọi là trung bình toàn phương của $a_1, a_2,...,a_n$).

Giải:

a. Vì $a_1, a_2,...,a_n$ là các số dương $\Rightarrow \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2},...,\frac{1}{a_n}$ là các số dương

Áp dụng BĐT Côsi cho các số dương $\Rightarrow \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2},...,\frac{1}{a_n}$ ta được:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\ge n.\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}}=n.\sqrt[n]{\frac{1}{a_1.a_2...a_n}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}\le\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1.a_2...a_n}}}=\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Vậy $\dfrac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}\le n.\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$

Bài 15/371 Chứng minh rằng:

a. Nếu $a_1, a_2,...,a_n$ dương và $a_1.a_2...a_n=1$ thì $a_1+a_2+...+a_n\ge n$

b. Nếu $x_1, x_2,...,x_n$ dương thì $\left(\dfrac{x_1+x_2+...+x_b}{n}\right)^k\le\dfrac{x_1{}^k+x_2{}^k+...+x_n{}^k}{n}$ với $k\in N$

Giải:

a. Áp dụng BĐT Côsi cho n số dương $a_1, a_2,...,a_n$ ta được

$a_1+a_2+...+a_n\ge n.\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}=n$

Bài 16/371 Một số dương a được chia thành n số hạng dương sao cho tích của chúng lớn nhất. Tính các số hạng ấy

Giải:

Giả sử số dương A được chia thành n số dương là $a_1,a_2,...,a_n$

Theo Cô – si $a_1, a_2, ..., a_n \le \left(\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n$

Tích $a_1 a_2 ... a_n$ đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Khi đó $A = a_1 + a_2 + ... + a_n = na_i,\ i = \overline{1,n} \quad \Rightarrow \quad a_i = \dfrac{A}{n}$

Bài 17/371 Một số dương p được phân tích thành n thừa số dương sao cho tổng của chúng là lớn nhất. Tính các thừa số ấy

Giải:

Giả sử số dương p được phân tích thành n thừa số dương

$a_1, a_2, ..., a_n \Rightarrow p = a_1 a_2 ... a_n$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có:

$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$

$Min\sum_{i=1}^{n} a_i = n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Khi đó $p = a_1 ... a_n = a_i^n \quad \Rightarrow \quad a_i = \sqrt[n]{p}$

Bài 18/371 Nếu $x, a, b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$\dfrac{(a+x)(b+x)}{x}$

Khi nào đạt giá trị đó?

Giải:

Đặt $A = \dfrac{(a+x)(b+x)}{x}$ ta có

$$\frac{(a+x)(b+x)}{x} = \frac{ab + (a+b)x + x^2}{x} = \frac{ab}{x} + x + a + b$$

Do $x, a, b > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương $\dfrac{ab}{x}, x$

Ta có:

$$\frac{ab}{x} + x \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{(a+x)(b+x)}{x} \ge 2\sqrt{ab} + a + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

$$MinA = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{ab}{x} = x$$

Bài 19/371 Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) f(x) = (2x -1)(3 – 5x)

b) f(x) = $(1 + x)^3(1 - x)$

c) f(x) = $\dfrac{x}{x^2 + 2}$

d) f(x) = $\dfrac{x^2}{(x^2 + 3)^2}$

Giải:

a) f(x) = (2x -1)(3 – 5x)

$= - 10x^2 + 11x - 3$

$= - 10(x^2 - 2.\frac{11}{20}x + \frac{121}{400}) + \frac{1}{40}$

$= - 10(x - \frac{11}{20})^2 + \frac{1}{40} \leq \frac{1}{40}$

Vậy max f(x) = $\frac{1}{40}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - \frac{11}{20})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{20}$

b) $f(x) = (1 + x)^3(1 - x)$

$= \frac{1}{3}(1+x)(1+x)(1+x)(3 - 3x)$

Ta thấy với $\left[\begin{array}{l} x+1<0 \\ 3-3x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right.$ thì f(x) $\leq$ 0

Với $\begin{cases} x+1>0 \\ 3-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<1$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho bốn số dương x + 1, x + 1, x + 1, x – 1 ta có

$$\frac{x+1+x+1+x+1+3-3x}{4} \geq \sqrt[4]{(x+1)^3(3-3x)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^4 \geq \sqrt[4]{(x+1)^3(x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(x+1)^2(3 - 3x) \leq \frac{1}{3}.\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{27}{16}$$

Vậy max f(x) = $\frac{27}{16}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi 3 – 3x = x + 1 $\Leftrightarrow$ x = $\frac{1}{2}$

c) f(x) = $\frac{x}{x^2+2}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm x^2 và 2 ta có:

$X^2 + 2 \geq 2\sqrt{2x^2} = 2\sqrt{2}x$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+2} \leq \frac{x}{2\sqrt{2}x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Vậy max f(x) = $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

d) f(x) = $\frac{x^2}{(x^2+3)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm x^2, 1, 1 ta có:

$$x^2 + 1 + 1 \ge 3\sqrt[3]{x^2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2)^3 \ge 27x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+2)^2} \le \frac{x^2}{27x^2} = \frac{1}{27}$$

Vậy max f(x) = $\frac{1}{27}$

Bài 20/370 Tìm giá trị dương nhỏ nhất của

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x}$$

Giải:

Ta có: $f(x) = \frac{2x^2+3}{x} > 0$ mà $2x^2+3>0$ nên $x>0$

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số $2x$, $\frac{3}{x}$ ta có:

$$2x + \frac{3}{x} \ge 2\sqrt{2.3.x.\frac{1}{x}} = 2\sqrt{6}$$

Vậy $MinA = 2\sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{3}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Bài 21. Cho các số x, y, z thỏa mãn:

$xy + yz + zx = 4$. **Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức** $f(x) = x^4 + y^4 + z^4$

Giải:

AD bất đẳng thức bunhiacopski cho 2 cặp số (1, 1, 1) và (x^2, y^2, z^2) ta được

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \le (1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)^2 \le 3(x^4+y^4+z^4)$$

$$\Leftrightarrow 3(x^4+y^4+z^4) \ge (x^2+y^2+z^2)^2 \qquad (1)$$

AD bất đẳng thức bunhiacopski cho 2 cặp số (x, y, z) và (z, x, y) ta được

$$(xy+yz+zx)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)^2 \ge (xy+yz+zx)^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow 3(x^4+y^4+z^4) \geq (xy+yz+xz)^2$$
$$\Leftrightarrow 3(x^4+y^4+z^4) \geq 16$$
$$\Leftrightarrow (x^4+y^4+z^4) \geq \frac{16}{3}$$

Vậy f(x) đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{16}{3}$ khi x = y =z = $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài 23/370 Giải các bất phương trình:

a, $\frac{7x}{6}-\frac{1}{2}>\frac{3x}{2}-5$ **(1)**

b, $\frac{5x}{7}-\frac{13}{21}+\frac{x}{15}<\frac{9}{25}-\frac{2x}{35}$ **(2)**

Giải:

a, $\frac{7x}{6}-\frac{1}{2}>\frac{3x}{2}-5$ (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $\frac{7x}{6}-\frac{3x}{2}>-\frac{9}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{-x}{3}>\frac{-9}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{-x}{3}+\frac{9}{2}>0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{-2x+27}{6}>0$

$\Leftrightarrow$ -2x + 27 > 0 $\Leftrightarrow$ 2x < 27 $\Leftrightarrow$ x < $\frac{27}{2}$.

b, $\frac{5x}{7}-\frac{13}{21}+\frac{x}{15}<\frac{9}{25}-\frac{2x}{35}$ (2)

(2) $\Leftrightarrow$ $\frac{5x}{7}+\frac{x}{15}+\frac{2x}{35}-\frac{13}{21}-\frac{9}{25}<0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{88x}{105}<\frac{514}{525}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{88x}{105}-\frac{514}{525}<0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{440x-514}{525}<0$ $\Leftrightarrow$ 440x – 514 < 0 $\Leftrightarrow$ x < $\frac{257}{220}$

Bài 24/372 Tìm các nghiệm nguyên của các bất phương trình:

a, 3x - $\frac{1}{4}$ $\geq 20-\frac{2x}{3}$ **(i)**

b, -23 $\leq$ 2x – 10 (ii)

Giải:

a, 3x - $\frac{1}{4}$ $\geq 20-\frac{2x}{3}$ (i)

(i) $\Leftrightarrow$ 3x + $\frac{2x}{3}-\frac{1}{4}-20\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{11x}{3}-\frac{81}{4}\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{44x-243}{12}\geq 0$

$\Leftrightarrow$ 44x – 243 ≥ 0 $\Leftrightarrow$ x $\geq$ $\frac{243}{44}$ $\approx$ 5,5

Vậy btp (i) có các nghiệm nguyên là x $\in \{6;7;8;9;...\}$
b, -23 $\leq$ 2x – 10 (ii)
Ta có:

(ii) $\Leftrightarrow$ 2x $\geq$ -13 $\Leftrightarrow$ x $\geq \frac{-13}{2} \approx$ -6,5

Vậy bpt (ii) có các nghiệm nguyên là $x \in \{-6;-5;-4;-3;...\}$

Bài 25. Giải và biện luận theo m các BPT

a, x + 4 > 2x + m^2

b, mx – 1 >x +4m^2

Giải:

a, x + 4 > 2x + m^2

$\Leftrightarrow$ x < 4 - m^2

Vậy bất phương trình luôn có nghiệm với $\forall$ m

b, mx – 1 >x +4m^2

$\Leftrightarrow$ (m-1)x > 4m^2 +1(1)

Với m = 1; (1)$\Rightarrow$0x = 1(vô lý) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

m > 1 $\Rightarrow x > \frac{4m^2+1}{m-1}$

m < 1 $\Rightarrow x < \frac{4m^2+1}{m-1}$

Bài 26/372 Giải và biện luận theo m các bất phương trình:

$a)\ \ x\left(m^2+1\right) \geq m^2-1;$

$b)\ \ \frac{2x}{\left(m+1\right)^2} \leq \frac{x-1}{m+1}.$

Giải:

$a)\ \ x\left(m^2+1\right) \geq m^2-1$

Vì $m^2+1>0$ nên bất phương trình có nghiệm duy nhất là: $x \geq \frac{m^2-1}{m^2+1}$.

$b)\ \ \frac{2x}{\left(m+1\right)^2} \leq \frac{x-1}{m+1}$

Ta có:

$$\frac{2x}{(m+1)^2} \le \frac{x-1}{m+1} \Leftrightarrow \frac{2x}{(m+1)^2} \le \frac{(x-1)(m+1)}{(m+1)^2} \qquad (2)$$

+) $\forall m \ne -1 \quad (m+1)^2 > 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow 2x \le (x-1)(m+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x \le xm + x - m - 1$$

$$\Leftrightarrow (1-m)x \le -m-1$$

+) Với $m = 0$ ta có $0 \le -2$ (vô lý) $\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

+) Với $m > 1$ bất phương trình có nghiệm $x \le -1$.

+) Với $m < 1$ bất phương trình có nghiệm $x \ge -1$.

Vậy: $m = 0$ bất phương trình vô nghiệm

$m > 1$ bất phương trình có nghiệm $x \le -1$

$m < 1$ bất phương trình có nghiệm $x \ge -1$.

Bài 27 Giải các hệ bất phương trình tuyến tính:

a, $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} > \dfrac{1-2x}{3} \\ \dfrac{-x}{4} + 3 \le 7 + \dfrac{x-3}{4} \\ 7x - 9 < 10 - \dfrac{x}{3} \end{cases}$ **(I)**

b, $\begin{cases} 2x-3 < 3x-4 \\ x+8 \ge 3x+2 \\ 3x-3 > x+2 \\ 5x-1 \le 4x+6 \end{cases}$

Giải:

a, $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} > \dfrac{1-2x}{3} \\ \dfrac{-x}{4} + 3 \le 7 + \dfrac{x-3}{4} \\ 7x - 9 < 10 - \dfrac{x}{3} \end{cases}$ (I)

Ta có:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} + \dfrac{2x-1}{3} > 0 \\ \dfrac{-x+12}{4} - \dfrac{x+25}{4} \le 0 \\ \dfrac{22x}{3} - 19 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{13x-5}{6} > 0 \\ \dfrac{2x+13}{4} \ge 0 \\ \dfrac{22x-57}{3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x-5 > 0 \\ 2x+13 \ge 0 \\ 22x-57 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{5}{13} \\ x \geq \dfrac{-13}{2} \\ x < \dfrac{57}{22} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{5}{13} < x < \frac{57}{22}$$

b, $\begin{cases} 2x - 3 < 3x - 4 \\ x + 8 \geq 3x + 2 \\ 3x - 3 > x + 2 \\ 5x - 1 \leq 4x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x \leq 6 \\ 2x > 5 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 3 \\ x > \dfrac{5}{2} \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} < x \leq 3$

Bài 28/372 Xác định m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} 3x + 5 \geq x - 1 & (1) \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2 + 9 & (2) \\ m^2 x + 1 > m + (3m - 2)x & (3) \end{cases}$$

Giải:

Từ (1) và (2) ta có: $-3 \leq x \leq 1$

Giải (3):

(m – 1)(m – 2)x > m – 1 (*)

+) Với m = 1 hoặc m = 2 thì (*) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm

+) Với m < 1 hoặc m < 2 thì (*) có nghiệm $x > \dfrac{1}{m-2}$

Để hệ vô nghiệm thì $\dfrac{1}{m-2} > 1 \Leftrightarrow 2 < m < 3$

+) Với 1 < m < 2, từ (*) ta có $x < \dfrac{1}{m-2}$

Để hệ vô nghiệm thì $\dfrac{1}{m-2} < -3 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} < m < 2$

Vậy hệ vô nghiệm khi m = 1; $\dfrac{5}{3} < m < 2$

Bài 29. Giải các bất phương trình

a. $\dfrac{x+9}{x-1} > 5$

b. $\dfrac{x^2+2x+5}{x+1} \ge x-3$

c. $\dfrac{x^2+3x-1}{2-x} \ge -x$

Giải:

a. $\dfrac{x+9}{x-1} > 5$ (1)

Miền xác định là $\forall x \neq 1,\ x \in R$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x+9}{x-1} - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+14}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2x+7>0 \\ x-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x+7<0 \\ x-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<7/2 \\ x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>7/2 \\ x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1<x<7/2$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x \in \left(1,\ \dfrac{7}{2}\right)$

b. $\dfrac{x^2+2x+5}{x+1} \ge x-3$ (2)

Miền xác định là $\forall x \neq -1,\ x \in R$. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+5-(x-3)(x+1)}{x+1} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 \le 0 \\ x+1 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -2 \\ x \ge -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -2 \\ x \le -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -1 \\ x \le -2 \end{array}\right. \text{ Kết hợp điều kiện } \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > -1 \\ x \le -2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$

c. $\dfrac{x^2+3x-1}{2-x} \geq -x$ (3)

Miền xác định là $\forall x \neq 2,\ x \in R$. Khi đó

$$(3) \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-1+x(2-x)}{2-x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{5x-1}{2-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x-1 \leq 0 \\ 2-x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1/5 \\ x \leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 1/5 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1/5 \leq x \leq 2$$

Kết hợp điều kiện ta có: $1/5 \leq x < 2$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $x \in \left[\dfrac{1}{5}, 2\right)$

Bài 30/373 Giải các bất phương trình:

a, $\dfrac{x+2}{3x+1} > \dfrac{x-2}{2x-1}$**;**

b, $x + \dfrac{9}{x+2} \geq 4$**;**

c, $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x+6)}{(x-7)^3(x-2)^2} \leq 0$.

Giải:

a, $\dfrac{x+2}{3x+1} > \dfrac{x-2}{2x-1}$

ĐK: $x \neq -\dfrac{1}{3}$ và $x \neq \dfrac{1}{2}$

$$\frac{x+2}{3x+1} > \frac{x-2}{2x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{3x+1} - \frac{x-2}{2x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(2x-1)-(x-2)(3x+1)}{(3x+1)(2x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x(x-8)}{(3x+1)(2x-1)} > 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		8		$+\infty$
$x-8$		-	$-\frac{25}{3}$	-	-8	-	$-\frac{15}{2}$	-	0	+	

$-x(x-8)$	-	$-\frac{25}{9}$	-	0	+	$-\frac{15}{4}$	+	0	-
$3x+1$	-	0	+	1	+	$\frac{5}{2}$	+	25	+
$2x-1$	-	$-\frac{5}{3}$	-	1	-	0	+	15	+
VT	-	||	+	0	-	||	+	0	-

Vậy $S=\left\{\left(\frac{-1}{3},0\right)\cup\left(\frac{1}{2},8\right)\right\}$.

b, $x+\frac{9}{x+2}\geq 4$;

TXĐ: $R\setminus\{2\}$

$$x+\frac{9}{x+2}\geq 4 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-4x-8+9}{x+2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x+2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2\geq 0 \quad \forall x\\ x+2\end{cases} \Rightarrow x>-2$$

Vậy $S=(2,+\infty)$.

c, $\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x+6)}{(x-7)^3(x-2)^2}\leq 0$

TXĐ: $R\setminus\{2,\,7\}$

$$\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x+6)}{(x-7)^3(x-2)^2}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^3(x+6)}{(x-7)^3}\leq 0$$

x	$-\infty$		-6		1		7	$+\infty$
$(x-1)^3$		-	|	-	0	+	|	+
$x+6$		-	0	+	|	+	|	+
$(x-7)^3$		-	|	-	|	-	0	+
VT		-		+		-		+

Bài 31 : **Giải và biện luận theo m các bất phương trình:**

a. $x^2-mx+m+3>0$ **(1)**

b. $(m+1)x^2-2mx+2m\leq 0$ **(2)**

Giải:

a. $x^2 - mx + m + 3 > 0$ (1)

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m+3) = m^2 - 4m - 12 = (m-6)(m+2)$

+) $\Delta < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 6$. Khi đó (1) nghiệm $\forall x \in R$ (vì hệ số a = 1 > 0)

+) $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 6 \end{array}\right.$ Khi đó (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+1)^2 > 0 \\ (x-3)^2 > 0 \end{array}\right.$

Bất phương trình nghiệm $\forall x$ khác nghiệm kép, hay $\forall x \neq -1, x \neq 3$ tương ứng.

+) $\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 6 \end{array}\right.$ Khi đó (1) có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{m + \sqrt{(m-6)(m+2)}}{2} \\ x < \dfrac{m - \sqrt{(m-6)(m+2)}}{2} \end{array}\right.$

Vậy $m \in (-2, 6)$ thì (1) nghiệm $\forall x \in R$

m = -2 hoặc m = 6 thì (1) nghiệm $\forall x \neq -1, x \neq 3$

$m \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$ thì (1) có nghiệm là:

$$x \in \left(-\infty, \frac{m + \sqrt{(m-6)(m+2)}}{2}\right) \cup \left(\frac{m - \sqrt{(m-6)(m+2)}}{2}, +\infty\right)$$

b. $(m+1)x^2 - 2mx + 2m \leq 0$ (2)

* m = -1, ta có 2x – 2 ≤ 0 $\Leftrightarrow x \leq 1$

* $m \neq -1$, ta có: $\Delta' = -m^2 - 2m = -m(m+2)$

+ Với m = 0, (2) trở thành $x^2 - 0x \leq 0$. bất phương trình có nghiệm duy nhất là x = 0.

+ Với m = -2, (2) trở thành $-x^2 + 4x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 \leq 0$ (luôn đúng $\forall x$).

+ Với -2 < m < -1, bất phương trình có tập nghiệm là S = $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

+ Với -1 < m < 0, bất phương trình có tập nghiệm là S = $[x_1, x_2]$

+ Với m > 0, bất phương trình vô nghiệm.

Bài 32/374 Giải các bất phương trình

a. $|x^2 - 1| - 2x < 0$ **(1)**

b. $\left|x^2-3x+2\right|+x^2 \geq 2x$ **(2)**

c. $\left|1-4x\right| \geq 2x+1$ **(3)**

Giải:

a. $\left|x^2-1\right|-2x<0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x^2-2x-1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-1<0 \\ x^2+2x-1>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1, x>1 \\ 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x<1 \\ x<-1-\sqrt{2}, x>-1+\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2}<x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của (1) là $x \in \left(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right)$

b. $\left|x^2-3x+2\right|+x^2 \geq 2x$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-3x+2\geq 0 \\ x^2-3x+2+x^2-2x\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x+2<0 \\ -x^2+3x-2+x^2-2x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-3x+2\geq 0 \\ 2x^2-5x+2\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x+2<0 \\ x-2\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq -1,\ x\geq 2 \\ x\leq 1/2,\ x\geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<2 \\ x\geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\leq 1/2,\ x\geq 2$$

Vậy nghiệm của (2) là $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[2, +\infty\right)$

c. $\left|1-4x\right| \geq 2x+1$ (3)

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-4x \ge 0\\ 1-4x \ge 2x+1\end{cases}\\ \begin{cases}1-4x < 0\\ -1+4x \ge 2x+1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-4x \ge 0\\ x \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}1-4x < 0\\ x-1 \ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le 1/4\\ x \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x > 1/4\\ x \ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \le 0\\ x \ge 1\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của (2) là $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

Bài 33/374 Giải các bất phương trình

a. $|2x+5| > |7-4x|$ **(1)**

b. $\left|\dfrac{x^2-4x}{x^2+x+2}\right| \le 1$ **(2)**

c. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \le 1$ **(3)**

Giải:

a. $|2x+5| > |7-4x|$ (1)

$$\Leftrightarrow 4x^2+20x+25 > 49-56x+16x^2$$

$$\Leftrightarrow -12x^2+76x-24 > 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-19x+6 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 6$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $x \in \left(\dfrac{1}{3}, 6\right)$

b. $\left|\dfrac{x^2-4x}{x^2+x+2}\right| \le 1$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x^2-4x}{x^2+x+2} \ge 0 \\ \dfrac{x^2-4x}{x^2+x+2} \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^2-4x}{x^2+x+2} < 0 \\ \dfrac{-x^2+4x}{x^2+x+2} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4x \ge 0 \\ -5x+2 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4x < 0 \\ -2x^2+3x-2 \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0, x \ge 4 \\ x \ge -2/5 \end{cases} \\ 0 < x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{5}$$ Vậy nghiệm của (2) là $x \in \left[\frac{-2}{5}, +\infty\right)$

c, $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \le 1 \quad (3)$

Điều kiện để (3) có nghĩa là $x \ne \pm 2$

Ta có: (3) $\Leftrightarrow \quad -1 \le \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4} \ge -1 \\ \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4} \le 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4} + 1 \ge 0 \\ x^2-5x+4 \le x^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4+x^2-4}{x^2-4} \ge 0 \\ 5x \ge 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x}{x^2-4} \ge 0 \\ x \ge \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 0 \le x < 2 \\ x \ge \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{8}{5} \le x < 2 \end{array}\right. .$$

Vậy bất phương trình (3) có tập nghiệm là S = $\left[\frac{8}{5}, 2\right) \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Bài 34/374 Giải và biện luận a theo bất phương trình

$2|x-a| < 2ax - x^2 - 2$ **(1)**

Giải:

+ Với $x \geq a \quad \Rightarrow \quad |x-a| = x-a$

(1) $\Leftrightarrow \quad 2(x-a) < 2ax - x^2 - 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + (2-2a)x + 2 - 2a < 0 \qquad (*)$

Có $\Delta' = (1-a)^2 - 2 + 2a = a^2 - 1$

Nếu $-1 < a < 1$ bất phương trình (*) vô nghiệm nên bất phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ bất phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt nên bất phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$-1 - \sqrt{a^2-1} < x^2 - a < -1 + \sqrt{a^2-1}$

Vì $x \geq a$ nên $-1 + \sqrt{a^2-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \sqrt{2} \\ a < -\sqrt{2} \end{array}\right.$ và $0 \leq x - a \leq a - 1 + \sqrt{a^2-1}$

+ Với $x < a \quad \Rightarrow \quad |x-a| < 0$

(1) $\Leftrightarrow \quad 2(a-x) < 2ax - x^2 - 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2(1+a)x + 2 + 2a < 0 \qquad (**)$

Có $\Delta' = a^2 - 1$

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (**) có nghiệm

$1 - \sqrt{a^2-1} < x - a < 1 + \sqrt{a^2-1}$

$-a + x < 0$ thì $1 - \sqrt{a^2-1} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \sqrt{2} \\ a < -\sqrt{2} \end{array}\right.$

$-1 - \sqrt{a^2-1} < x - a < 0$ vậy $a + 1 - \sqrt{a^2-1} < x < a - 1 + \sqrt{a^2-1}$

Vậy $a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ thì bất phương trình có nghiệm

$a + 1 - \sqrt{a^2-1} < x < a - 1 + \sqrt{a^2-1}$

Bài 35/374 Tìm a lớn nhất sao cho

$\dfrac{x}{1+|x|} \geq ax^2 + x \quad \forall x \in R \qquad$ **(1)**

Giải:

+ Xét $x \geq 0$

$x \geq 0$ (1) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{1+x} \geq ax^2 + x$

$\Leftrightarrow \quad x - (ax^2 + x)(1+x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad ax^2 + (a+1)x \leq 0 \qquad (*)$

(*) có nghiệm $\forall x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (a+1)^2 \geq 0 \\ a < 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{a+1}{-2a} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a \leq -1 \quad (3)$

+ Xét $x < 0$ ta có

(1) $\dfrac{x}{1-x} \geq ax^2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x(\dfrac{1}{1-x} - ax - 1) \geq 0 \quad (**)$

$$(**) \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} - ax - 1 \leq 0$$

Vì $x < 0$ nên $\quad \Leftrightarrow \dfrac{x - ax + ax^2}{1-x} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - ax + ax^2 \leq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - ax + ax^2 \geq 0 \\ 1 - x < 0 \\ x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow a \leq 0 \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\max a = -1$ vậy a = -1

Bài 36. Giải các bất phương trình

a. $1 + \dfrac{x-4}{x-3} > \dfrac{x-2}{x-1}$

b. $\dfrac{x^2 + 2x - 63}{x^2 - 8x + 7} > 7$

Giải:

a. $1 + \dfrac{x-4}{x-3} > \dfrac{x-2}{x-1}$ (1)

Miền xác định là $\forall x \neq 1, x \neq 3, x \in R$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{(x-3) + x - 4}{x-3} - \dfrac{x-2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-7}{x-3} - \dfrac{x-2}{x-1} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-7)(x-1)-(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x-3)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4x+1>0 \\ (x-1)(x-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4x+1<0 \\ (x-1)(x-3)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2-\sqrt{3},\ x>2+\sqrt{3} \\ x<1,\ x>3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3} \\ 1<x<3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2-\sqrt{3},\ x>2+\sqrt{3} \\ 1<x<3 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $\left[\begin{array}{l} x<2-\sqrt{3},\ x>2+\sqrt{3} \\ 1<x<3 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là:

$$x \in \left(-\infty, 2-\sqrt{3}\right) \cup (1,3) \cup \left(2+\sqrt{3}, +\infty\right)$$

b. $\dfrac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7} > 7$ (2)

Miền xác định là $\forall x \neq 1, x \neq 7, x \in R$. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-63-7\left(x^2-8x+7\right)}{x^2-8x+7} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-29x+56}{x^2-8x+7} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-7)(x-8/3)}{(x-1)(x-7)} < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x-8/3}{x-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-8/3<0 \\ x-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-8/3>0 \\ x-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1<x<8/3$$

Kết hợp điều kiện ta có: $1 < x < 8/3$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là: $x \in \left(1, \dfrac{8}{3}\right)$

Bài 37. Giải bất phương trình

a. $\dfrac{x^2+10x+16}{x-1} > 10$

b. $\dfrac{x^4 - 17x^2 + 60}{x\left(x^2 - 8x + 5\right)} > 0$

Giải:

a. $\dfrac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} > 10 \qquad (1)$

Miền xác định là $\forall x \neq 1,\ x \in R$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 10x + 16 - 10(x - 1)}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 26}{x - 1} > 0$$

Do $x^2 + 26 > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x \in (1, +\infty)$

b. $\dfrac{x^4 - 17x^2 + 60}{x\left(x^2 - 8x + 5\right)} > 0 \qquad (2)$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\left(x^2 - 5\right)\left(x^2 - 12\right)}{x\left(x^2 - 8x + 5\right)} > 0$$

Lập bảng xét dấu biểu thức ở vế trái của (2) ta có:

x	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		$-\sqrt{5}$		0		$4-\sqrt{11}$
x^2-5		+	|	+	0	-	|	-	|
x^2-12		+	0	-	|	-	|	-	|
x		-	|	-	|	-	0	+	|
x^2-8x+5		+	0	+	|	+	|	+	0
VT (2)		-	0	+	0	-	‖	+	‖

x	$4-\sqrt{11}$		$\sqrt{5}$		$\sqrt{12}$		$4+\sqrt{11}$		$+\infty$
x^2-5	|	-	0	+	|	-	|	+	
x^2-12	|	-	|	-	0	+	|	+	
x	|	+	|	+	|	+	|	+	
x^2-8x+5	0	-	|	-	|	-	0	+	
VT (2)	||	-	0	+	0	-	||	+	

Kết hợp hai bảng trên ta có nghiệm của bất phương trình (2) là:

$$x \in \left(-\sqrt{12},\ -\sqrt{5}\right) \cup \left(0,\ 4-\sqrt{11}\right) \cup \left(\sqrt{5},\ \sqrt{12}\right) \cup \left(4+\sqrt{11},\ +\infty\right)$$

Bài 38. Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^2-x+1} \le \dfrac{2x+3}{x^3+1}$

b) $\dfrac{x^4-3x^2+2}{x(x^2-8x+5)} > 0$.

Giải:

a) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^2-x+1} \le \dfrac{2x+3}{x^3+1}$ (1)

ĐK: $x \neq -1$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1+2x+2-2x-3}{x^3+1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x^3+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x-1)\le 0 \\ (x+1)(x^2-x+1)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x(x+1)\ge 0 \\ (x+1)(x^2-x+1)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x+1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le 0 \end{array}\right. \\ x+1<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vì $x^2 - x + 1 > 0$

Vì $x^2 - x + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le 0 \end{array}\right. \\ x < -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x < -1 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \in (-\infty ; -1) \cup [0 ; 1]$.

b) $\dfrac{x^4-3x^2+2x}{x^2-x+30} > 0$ (2)

ĐK: D = R.

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{(x^2-2)(x^2-1)}{x^2-x+30} > 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 - 1) > 0$ (vì $x^2 - x + 30 > 0$)

Ta có bảng xét dấu:

	$-\infty$ $\quad -\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2$	+	-	-	-	+
$x^2 - 1$	+	+	-	+	+
Biểu thức	+	-	+	-	+

Từ bảng xét dấu ta có nghiệm của bất phương trình là:

$x \in (-\infty ; \sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2} ;+\infty)$.

Bài 39/374 Giải các bất phương trình:

$a)\ \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{x(2-x)} > 0$

$b)\ \dfrac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^2 - 8x + 15} \ge 0$

Giải

$$a)\frac{x^3-2x^2-x+3}{x(2-x)}>0$$

Điều kiện: $x\neq 0, x\neq 2$

$$b)\frac{x^4-4x^2+3}{x^2-8x+15}>0$$

Điều kiện: $x\neq 5, x\neq 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^4-4x^2+3\geq 0\\ x^2-8x+15\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^4-4x^2+3\leq 0\\ x^2-8x+15\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[-1,1]\cup(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)\\ x\in(-\infty,3]\cup[5,+\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\cup[-\sqrt{3},\sqrt{3}]\\ x\in[3,5]\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[-1,1]\cup[\sqrt{3},3)\cup(5,+\infty)$$

Bài 40/375 Giải các hệ bất phương trình:

$$a)\begin{cases}x^2-5x+4\geq 0\\ x^4<81\\ x^3-2x^2+34x-2\leq 0\end{cases}$$

$$b)\begin{cases}x^2+y^2\leq 4\\ y^2-3x+6\geq 0\end{cases}$$

Giải:

$$a)\begin{cases} x^2-5x+4\ge 0 \\ x^4<81 \\ x^3-2x^2+3x-2\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty) \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-3,3) \\ x\in(-\infty,-3i)\cup(3i,+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \\ x\in(-3i,3i) \end{cases} \end{array}\right. \\ x\in(-\infty,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty) \\ x\in(-3,3) \\ x\in(-\infty,1] \end{cases} \qquad \Leftrightarrow x\in(-3,1]$$

$$b)\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y^2-3x+6\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6\le y\le 4-x^2 \\ 3x-6\ge 0 \\ 3x-6\le 4-x^2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Bài 41/375 Giải các bất phương trình.

Giải:

$$a)\sqrt{x^2-3x-10}\ge x-2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-3x-10\ge 0 \\ x-2\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x-10\ge x^2-4x+4 \\ x-2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-2]\cup[5,+\infty) \\ x\le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge -14 \\ x\ge 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (-\infty,-2]\cup[14,+\infty)$$

$$b)\sqrt{21-4x-x^2} < x+3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21-4x-x^2 \ge 0 \\ x+3>0 \\ 21-4x-x^2 > x^2+9x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,-7) \cup [3,+\infty) \\ x>-3 \\ 13x<13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (1,3]$$

Bài 42/375 Giải các bất phương trình

Giải:

$$a) 1-x+\sqrt{2x^2-3x-5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2-3x-5 \ge 0 \\ x-1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 2x^2-3x-5 < x^2-2x+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ x<1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2-x-6<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{5}{2} \\ 1<x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{5}{2} \le x < 3$$

$$b)\sqrt{2x+1} < \frac{2(x+1)}{2-x}$$

Điều kiện $x \ne 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{2-x} \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1 < \dfrac{4(x^2+2x+1)}{4-4x+x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{11-3\sqrt{13}}{4}\right) \cup (0,2)$$

Bài 43/375 **Giải các bất phương trình**

Giải:

$$a)\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ 2x-8 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} > \sqrt{7-x} + \sqrt{2x-8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \\ x \geq 4 \\ 2 > \sqrt{(7-x)(2x-8)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [4,7] \\ 4 > -2x^2 + 22x - 56 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [4,7] \\ 2x^2 - 22x + 60 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [4,7] \\ \left[\begin{array}{l} x < 5 \\ x > 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 < x < 7 \\ 4 < x < 5 \end{cases}$$

$$b)\sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{-3-2x} > \sqrt{7-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ -3-2x \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ -1-3x+2\sqrt{(2-x)(-3-2x)} > 7-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{-3}{2} \\ \sqrt{(2-x)(-3-2x)} > 4+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{-3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2-x)(-3-2x) \geq 0 \\ 4+x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4+x \geq 0 \\ -6-x+2x^2 > 16+8x+x^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{-3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left(-\infty, \dfrac{-3}{2}\right] \cup [2,+\infty) \\ x < -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2-9x-22 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{-3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < -4 \\ \begin{cases} x \geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 11 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$$

Bài 43. **Giải các bất phương trình:**

a) $\sqrt{x+7} - \sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$ **;**

b) $\sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}$ **.**

Giải:

a) $\sqrt{x+7} - \sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+7} > \sqrt{7-x} + \sqrt{2x-8}$ (1)

Vì hai vế đều không âm nên ta có thể bình phương hai vế ta được bpt tương đương:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+7\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \\ 2x-8\geq 0 \\ x+7>7-x+2x-8+2\sqrt{(7-x)(2x-8)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ x\leq 7 \\ x\geq 4 \\ 4\geq \sqrt{(7-x)(2x-8)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\leq x\leq 7 \\ 14x-56-2x^2+8x\leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\leq x\leq 7 \\ x^2-11x+36\geq 0 \end{cases} \quad \text{(luôn đúng)}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x\in [4, 7]$.

b) $\sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{-3-2x} > \sqrt{7-x}$ (2)

Vì hai vế đều không âm nên ta có thể bình phương hai vế ta được bpt tương đương:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\geq 0 \\ -3-2x\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \\ 2-x-3-2x+2\sqrt{(2-x)(-3-2x)}>7-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ x\leq \frac{-3}{2} \\ x\leq 7 \\ \sqrt{(2-x)(-3-2x)}>4+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \frac{-3}{2} \\ \sqrt{(2-x)(-3-2x)}>4+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \frac{-3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4+x<0 \\ (2-x)(-3-2x)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4+x\geq 0 \\ (2-x)(-3-2x)>16+8x+x^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \frac{-3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-4 \\ \left[\begin{array}{l} x\geq 2 \\ x\leq \frac{-3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq -4 \\ -6-4x+3x+2x^2>16+8x+x^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x^2-9x-22>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>11 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\leq x<-2 \\ (*) \end{array}\right.$$

$$\text{Khi đó (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \frac{-3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ -4\leq x<-2 \\ x>11 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$$

Vậy nghiệm của bpt là: $x < -2$.

Bài 44/375 **Giải các bất phương trình.**

$$a)\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

$$b)\sqrt{|1-4x|}\geq 2x+1$$

Giải:

$$a)\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

Điều kiện $x>3$

$$b)\sqrt{|1-4x|}\geq 2x+1$$

Do $|1-4x|\geq 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}2x+1<0\\ \begin{cases}2x+1\geq 0\\ |1-4x|\geq (2x+1)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{-1}{2}\\ \begin{cases}x\geq\dfrac{-1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-4x\geq 0\\ 1-4x\geq (2x+1)^2\end{cases}\\ \begin{cases}-1+4x\geq (2x+1)^2\\ 1-4x\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \forall x\leq 0$$

Bài 45/375 **Giải các phương trình**

$$a)\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{3x^3-1}\geq 0$$

$$b)x+2\leq\sqrt[3]{x^3+8}$$

Giải:

$$a)\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{3x^3-1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^2+1}\geq\sqrt[3]{3x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+1\geq 3x^2-1$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq 2$$

$$b)x+2\leq\sqrt[3]{x^3+8}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \le x^3+8$$

$$\Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8 \le x^3+8$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \le x \le 0$$

Bài 46/375 **Giải các bất phương trình**

$a)\sqrt[3]{x+1} > \sqrt{x-3}$

$b)(x+3)\sqrt{x^2-4} \le x^2-9$

Giải:

$a)\sqrt[3]{x+1} > \sqrt{x-3}$

Điều kiện $x \ge 3$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 > (x-3)^3$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 > x^3-9x^2+27x-27$$

$$\Leftrightarrow x^3-10x^2+25x-28 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)(x^2-3x+4) < 0$$

$$\Leftrightarrow x-7 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 7$$

Kết hợp điều kiện suy ra $3 \le x < 7$

$b)(x+3)\sqrt{x^2-4} \le x^2-9$

Bài 47/376 **Giải bất phương trình.**

a. $18\sqrt{2x-3} - 9\sqrt[4]{(2x-3)(x-2)} \ge 2\sqrt{x-2}$

b. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$

Giải:

a) $18\sqrt{2x-3} - 9\sqrt[4]{(2x-3)(x-2)} \ge 2\sqrt{x-2}$

Điều kiện $x \ge 2$. Chia cả 2 vế cho $\sqrt{2x-3} \ge 0$ ta được

$$18 - 9\sqrt[4]{\frac{x-2}{2x-3}} \ge 2\sqrt{\frac{x-2}{2x-3}}$$

Đặt $\sqrt[4]{\frac{x-2}{2x-3}}$ =t, $t \ge 0$

Ta được $2t^2+9t-18\le 0 \Leftrightarrow 0\le t\le \frac{3}{2}$. Do $t\ge 0$ nên hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x\ge 2 \\ \sqrt[4]{\frac{x-2}{2x-3}}\le \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\ge \frac{211}{146} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\ge 2$$

b. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$

Cách 1: So sánh với tổng trung gian.

Ta có $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2.1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

...

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1).n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$$

Vậy $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$

Cách 2: Dùng phương pháp quy nạp.

Với n=2 ta có $\frac{1}{2^2}<\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$ luôn đúng

Giả sử BĐT đúng với n=k, tức là $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}<\frac{k-1}{k}$ (1)

Ta phải chứng minh BĐT đúng với n=k+1, tức là chứng minh:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{k}{k+1}$$

Cộng vào 2 vế của BĐT (1) một lượng bằng $\frac{1}{(k+1)^2}$ ta được

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}<\frac{k-1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^3+k^2-1}{k(k+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{k^2(k+1)}{k(k+1)^2}-\frac{1}{k(k+1)^2}=\frac{k}{k+1}-\frac{1}{k(k+1)^2}<\frac{k}{k+1}$$

Vậy BĐT luôn đúng với n=k+1

Vậy $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$

Bài 48 : Giải và biện luận theo m bất phương trình:

$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{m-x}\ge 2$ **(1)**

Giải:

Đặt y = $\sqrt[3]{x}$ => y^3 = x, ta có : y + $\sqrt[3]{m-y^3} \ge 2$

$$m - y^3 \ge 8 - 12y + 6y^2 - y^3 \Leftrightarrow 6y^2 - 12y + 8 - m \le 0 (2)$$

$$\Delta'_y = (-6)^2 - 6(8-m) = -12 + 6m$$

Nếu $\Delta_y < 0$ => 6m – 12 < 0 ⇔ m < 2 thì (2) vô nghiệm => (1) vô nghiệm

Nếu $\Delta_y = 0$ => 6m – 12 = 0 ⇔ m = 2 thì (2) có nghiệm kép: $y_1 = y_2 = 1$

=> x = 1

Nếu $\Delta_y \ge 0$ => 6m – 12 ≥ 0 ⇔ m ≥ 2 thì (2) có 2 nghiệm phân biệt :

$y_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{6m-12}}{6}$

=> $x_{1,2} = \left(\dfrac{6 \pm \sqrt{6m-12}}{6}\right)^3$

<u>Kết luận :</u>

Nếu m < 2 thì (1) vô nghiệm

Nếu m = 2 thì (1) có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = 1$

Nếu m ≥ 2 thì (1) có 2 nghiệm phân biệt : $y_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{6m-12}}{6}$

BÀI TẬP THỰC HÀNH GIẢI TOÁN CHƯƠNG 7

Bài 1/376

a, Chứng minh rằng nếu $a \ge b > 1$ **thì** $a + \dfrac{1}{a} \ge b + \dfrac{1}{b}$

b, Chứng minh rằng nếu $a \ge b \ge \sqrt{n} \quad (n \in Z^+)$ **thì:**

$a + \dfrac{n}{a} \ge b + \dfrac{n}{b}$

Giải:

a) Ta dùng phương pháp xét hiệu:

$$a+\frac{1}{a}-b-\frac{1}{b}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\ge 0$$

$$VT=(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)$$

Vì $a\ge b>1$ nên $\begin{cases} a-b\ge 0 \\ ab>1 \end{cases} \Rightarrow 1-\frac{1}{ab}>0$

Vậy $VT\ge 0$

b) Tương tự ý a ta dùng phương pháp xét hiệu:

$$a+\frac{n}{a}-b-\frac{n}{b}=a-b+\frac{n(b-a)}{ab}=(a-b)\left(1-\frac{n}{ab}\right)$$

Vì $a\ge b\ge \sqrt{n} \Rightarrow \begin{cases} a-b\ge 0 \\ ab>n \end{cases}$

Vậy $VT\ge 0$

Bài 2/376 **Cho Vậy** $x,y>0$ **thỏa mãn** $x+y=1$**. Tìm** $MinP$

$$P=\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

Giải:

$$P=x^2y^2+1+1+\frac{1}{x^2y^2}=\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2=\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{\frac{1}{xy}}\right)^2$$

Do $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+y>1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{xy}\ge 4$

Suy ra $P=\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{\frac{1}{xy}}\right)^2\ge\left(4+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{17^2}{4^2}$

$MinP=\frac{17^2}{4^2}$ khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$

Bài 3/376 **Chứng minh rằng với mọi bộ số dương x, y, z, t có tổng bằng 2 ta đều có:**

$$\frac{(x+y+z)(x+y)}{xyzt} \ge 16$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương $x+y+z,\ t$

$$(x+y+z)+t \ge 2\sqrt{(x+y+z)t} \quad \Rightarrow \quad 4 \ge 4(x+y+z)t$$

$$\Rightarrow \quad (x+y+z)t \ge (x+y+z)^2 t \ge 4(x+y)zt$$

$$\Rightarrow \quad (x+y+z)(x+y) \ge 4(x+y)^2 zt \ge 4.4xyz$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x+y+z)(x+y)}{xyzt} \ge 16$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} x+y+z=t \\ x+y=z \\ x=y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,x,t)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right)$

Bài 4/376 **Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c. Gọi** $2p=a+b+c$ **chứng minh rằng:**

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Giải:

Sử dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \ge \frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c} \\ \frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{4}{2p-b-c}=\frac{4}{a} \\ \frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a} \ge \frac{4}{2p-c-a}=\frac{4}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{p-a}+\frac{2}{p-b}+\frac{2}{p-c} \ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Suy ra: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Bài 5/376 **Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng**

$$a^3+b^3+c^3-3abc \ge 0$$

Giải:

Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

$$VT = a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

Theo đầu bài a, b, c > 0 nên $VT > 0 \quad \forall a,b,c > 0$
Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài 8. cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\right|<1$$

Giải:

a, Phân tích

để chứng minh bất đẳng thức $\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\right|<1$ ta khai triển biểu thức vế trái thành $\left|\frac{1}{abc}(a-b)(b-c)(c-a)\right|$ và sử dụng bất đẳng thức trong tam giác hiệu hai cạnh bao giờ cũng nhỏ hơn cạnh còn lại. Ta đi đến lời giải sau:

b, Lời giải:

ta có vế trái: $\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\right|=\left|\frac{1}{abc}\left(a^2c+ab^2+bc^2-a^2b-b^2c-ac^2\right)\right|$

$$=\left|\frac{1}{abc}\left(abc+a^2c+ab^2+bc^2-a^2b-b^2c-ac^2-abc\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{abc}\left(abc-b^2c\right)+\left(bc^2-ac^2\right)+\left(a^2c-abc\right)+\left(ab^2-a^2b\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{abc}bc(a-b)-c^2(a-b)+ac(a-b)-ab(a-b)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{abc}(a-b)\left(bc-c^2+ac-ab\right)\right|=\left|\frac{1}{abc}(a-b)\left[c(b-c)-a(b-c)\right]\right|$$

$$=\left|\frac{1}{abc}(a-b)(b-c)(c-a)\right|$$

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có: $\left.\begin{matrix} a-b<c \\ b-c<a \\ c-a<b \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a-b)(b,c)(c-a)<abc$

Do đó $\frac{1}{abc}(a-b)(b-c)(c-a)<\frac{abc}{abc}$

Hay ta có đpcm.

***c*, Khai thác bài toán**

Tương tự ta có thể chứng minh các bài toán sau:

Giải:

<u>Bài toán 1</u>: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác và a<b<c

chứng minh rằng $a^3\left(b^2-c^2\right)+b^3\left(c^2-a^2\right)+c^3\left(a^2-b^2\right)<0$

<u>Bài toán 2</u>: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 9/377 Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{abc}{8}\qquad\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

Giải:

Vì 2p là nửa chu vi của tam giác ABC nên $p-a,p-b,p-c>0$

Áp dụng cô-si

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(p-a)(p-b)}\leq\dfrac{p-a+p-b}{2}=\dfrac{c}{2}\\ \sqrt{(p-b)(p-c)}\leq\dfrac{p-b+p-c}{2}=\dfrac{a}{2}\\ \sqrt{(p-c)(p-a)}\leq\dfrac{p-c+p-a}{2}=\dfrac{b}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{abc}{8}$$

Bài 10. Cho a, b ≥ 1. chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{a_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}\ \textbf{(1)}$$

a. phân tích

Bài toán yêu cầu chứng minh cho n số của a_n. Ta nghĩ tới việc chứng minh bài toán bằng phương pháp qui nạp. Trước hết ta chứng minh cho trường hợp n = 2. sau đó đi chứng minh cho trường hợp n = k+1. ta có lời giải của bài toán như sau:

b. Lời giải

* ta chứng minh cho trường hợp n = 2:

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}\geq\frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}}$$

Xét hiệu : $\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}-\dfrac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}}=\dfrac{1}{1+a_1}-\dfrac{1}{1+\sqrt{a_1a_2}}+\dfrac{1}{1+a_2}-\dfrac{1}{1+\sqrt{a_1a_2}}$

$$=\frac{(1+a_2)\left(1+\sqrt{a_1a_2}\right)-(1+a_1)(1+a_2)+(1+a_1)\left(1+\sqrt{a_1a_2}\right)-(1+a_1)(1+a_2)}{(1+a_1)(1+a_2)\left(1+\sqrt{a_1a_2}\right)}$$

$=\dfrac{\left(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}\right)^2\left(\sqrt{a_1a_2}-1\right)}{\left(a_2-a_1-2\sqrt{a_1a_2}\right)\left(\sqrt{a_1a_2}-1\right)}$ vì a, b ≥ 1 nên đẳng thức luôn đúng trong trường hợp n= 2

Giả sử (1) đúng với n = k tức là $\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+...+\dfrac{1}{a_k}\geq\dfrac{k}{1+\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}}$

Ta phải đi chứng minh (1) đúng với n = k + 1

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{a_{k+1}}\geq\frac{k+1}{1+\sqrt[k+1]{a_1a_2...a_{k+1}}}$$

Bài 11

1.Chứng minh rằng với mọi số thực u, v ta có $\dfrac{u^2+v^2}{2}\geq\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2$

Giải:

a) Phân tích : Đây là 1 đẳng thức khá quen thuộc, ta có thể giải bằng cách xét hiệu vế trái và vế phải. Ta đi đến lời giải sau:

b)Lời giải

Xét hiệu $\dfrac{u^2+v^2}{2}-\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2=\dfrac{2u^2+2v^2-u^2-2uv-v^2}{4}$

$$=\frac{u^2-2uv+v^2}{4}=\left(\frac{u-v}{2}\right)^2\geq 0$$

Vậy $\dfrac{u^2+v^2}{2}\geq\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi u = v

c. Khai thác bài toán

bằng phương pháp xét dấu của hiệu A – B ta xét được sự đúng đắn của bất đẳng thức $A \ge B$ và có thể giải các bài toán tương tự sau:

bài toán 1: chứng minh $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ với $\forall$ số thực a, b, c.

Ta có bài toán tổng quát sau

Bài toán 2: $\frac{a^n+b^n}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$

Giải:

Với n = 2 ta có $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (bằng cách xét hiệu)

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k+1, tức là $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$

Thật vậy $\frac{a^k+b^k}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \Leftrightarrow \frac{a+b}{2}\frac{a^k+b^k}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$

Ta chứng minh: $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \ge \frac{a+b}{2}\frac{a^k+b^k}{2}$

$\Leftrightarrow a^{k+1}+b^{k+1} \ge ab^k + a^k b$

$\Leftrightarrow a^{k+1} - a^k b + b^{k+1} - ab^k \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a^k - b^k\right)\left(a-b\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2\left(a^k + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^k\right) \ge 0$

Suy ra đpcm

1. Cho a+b = 1, chứng minh rằng: $a^4 + b^4 \ge \frac{1}{8}$

a. Phân tích

Từ điều kiện cho a + b =1, ta biến đổi $a^4 + b^4$ về biểu thức có chứa a + b và áp dụng các bất đẳng thức đã biết. Ta có lời giải sau:

b. Lời giải

$\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 = (\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 - 2\mathrm{ab} = 1 - 2\mathrm{ab}$

$$a^4 + b^4 = (a+4)^4 - 2a^2b^2 = (1-2ab)^2 - 2a^2b^2 \qquad (1)$$

Vì a + b = 1, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ hay $\frac{(a+b)}{4} \geq ab$ nên $0 \leq ab \leq \frac{1}{4}$

Thay ab = $\frac{1}{4}$ vào (1) ta được:

$$a^4 + b^4 = (1-2ab)^2 - 2a^2b^2 \geq \left(1 - 2.\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

c. Khai thác bài toán

Ta có thể đề xuất các bài toán tương tự

Bài toán 1: Chứng minh rằng nếu $a + b \geq 2$ thì $a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4$

Bài toán 2: Cho a, b, c là các số không âm và a + b + c = 1. Chứng minh

$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$

Bài 12: cho xy + yz + xz = 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của Q = $x^4 + y^4 + z^4$

a. Phân tích:

Để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q ta đi biến đổi Q để đánh giá Q ≥ m (với m là 1 hằng số), khi đó giá trị nhỏ nhất của Q = m.

Dựa vào giả thiết ta dùng các bất đẳng thức đã biết để làm Q xuất hiện 1 lượng xy + yz + xz = 4.

b. Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho 2 bộ số (1,1,1) và (x^2, y^2, z^2) ta có:

$(1^2 + 1^2 + 1^2)(x^4 + y^4 + z^4) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$

$\Leftrightarrow 3(x^4 + y^4 + z^4) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho 2 bộ số (x, y, z) và (y , z, x) ta có:

$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (xy + yz + zx)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 16$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$3(x^4 + y^4 + z^4) \geq 16 \Leftrightarrow (x^4 + y^4 + z^4) \geq \frac{16}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q = $(x^4 + y^4 + z^4) = \frac{16}{3}$ khi $x = y = z = \frac{\pm 2}{\sqrt{3}}$

c. Khai thác bài toán

Tìm giá trị nhỏ nhất của xy biết x,y là nghiệm của phương trình: $x^2 + y^2 = 2(1 - xy)$

Bài 13/378 **Cho** $x^2 + y^2 = 1$. **Tìm GTLN của** $M = x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x}$

Phân tích

Để tìm GTLN của M ta sẽ biến đổi M sao cho $M = -[f(x, y)]^2 + k$ thì GTLN của M = k hoặc dựa vào BĐT đã biết để tìm. Nhìn vào biểu thức M ta thấy

Lời giải

Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho cặp số (x, y) và ($\sqrt{1-x}$, $\sqrt{1-y}$) ta có:

$$(x\sqrt{1-y} + y\sqrt{1-x})^2 \le \left(x^2+y^2\right)\left(1-y+1-x\right) = 2-x-y \text{ (vì } x^2+y^2=1)$$

Bài 14/378 **Giải và biện luận bất phương trình** $x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} \ge a$ **(1).**

Phân tích

Trước tiên vì biểu thức có chứa căn thức nên ta tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa. Ta có ĐK: $x \ge \frac{-1}{4}$, mặt khác thấy đây là bất phương trình vô tỉ có chứa căn tầng mà biểu thức trong căn biến đổi thành dạng bình phương của một tổng hay một hiệu, từ đó ta dễ dàng biện luận được

Lời giải

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} > a \Leftrightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}} > a$$

$$x + \sqrt{(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2})^2} > a \Leftrightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} > a \Leftrightarrow (\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2})^2 > a \quad (2)$$

Nếu a < 0 bpt (2) vô nghiệm => bpt (1) vô nghiệm

Nếu $a \ge 0$

Bài 15. Giải bất phương trình $\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + .. + \sqrt{x + \frac{1 + \sqrt{4x+1}}{2}}}}}}_{2004\,dau\,can} > x + \frac{1}{2}$

a. Phân tích

Ta nhận thấy bất phương trình trên chứa căn tầng, để giải được bất phương trình này ta phải làm mất dần căn tầng. Để ý rằng:

$$x+\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}=x+\frac{2+2\sqrt{4x+1}}{4}=\left(\frac{1+\sqrt{4x+1}}{4}\right)^2$$

Ta có lời giải sau.

b. Lời giải

ta có

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+..+\sqrt{x+\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}}}}}}_{2004 dau can}$$

$$=\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+..+\sqrt{x+\frac{\sqrt{4x+1}+1}{2}}}}}}_{2003 dau can}$$

$= ......$

$=x+\frac{1+\sqrt{4x+}}{2}$ (Sau 2004 bước)

$$\Rightarrow x+\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}>x+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2}-x-\frac{1}{2}>0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+1}>0$$

$$\Leftrightarrow 4x+1>0$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{-1}{4}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x>\frac{-1}{4}$

c, Khai thác bài toán

Coi x là các giá trị cụ thể ta có thể giải các bài toán sau:

Bài toán 1: Chứng minh $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < 2$ (vế trái có 100 dấu căn)

Giải:

Ta có $a_1 = \sqrt{2} < 2$

$$a_2 = \sqrt{2+a_1} < \sqrt{2+2} = 2$$
$$a_3 = \sqrt{2+a_2} < \sqrt{2+2} = 2$$

…………

$$a_{100} = \sqrt{2+a_{99}} < \sqrt{2+2} = 2$$

Vậy ta có đpcm

Bài toán 2: Chứng minh rằng: $\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}}_{ndaucan} < \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$

Bài 16. giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-5x+4} \geq 2x-4$ **(1)**

a. Phân tích

Để giải bất phương trình vô tỉ, ta cần phải dựa vào các định lý về biến đổi tương đương $\sqrt[2k]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^{2k}(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ và làm mất dần căn. Do đó ta có lời giải sau:

b. Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x^2-5x+4 \geq (2x-4)^2 \end{cases} (2) \\ \begin{cases} 2x-4 < 0 \\ x^2-5x+4 \geq 0 \end{cases} (3) \end{array}\right.$$

Ta giải riêng từng hệ của tuyển:

Giải (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x^2-5x+4 \geq (2x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x+4 \geq 4x^2-16x+16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -3x^2 + 11x - 12 \geq 0 \end{cases}$$ vô nghiệm

Giải (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1$

Vậy $x \leq 1$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

c. Khai thác bài toán

Tương tự ta có thể giải các bất phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq x - 2$

2. $\sqrt[4]{4x + 1} \geq x$

3. $\sqrt[3]{2x^2 + 1} \geq \sqrt[3]{3x^2 - 1}$

Giải: 3. $\sqrt[3]{2x^2 + 1} \geq \sqrt[3]{3x^2 - 1}$

$$\sqrt[3]{2x^2 + 1} \geq \sqrt[3]{3x^2 - 1}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 1 \geq 3x^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm S = $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Bài 17. giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 3 - x$

a. Phân tích

Để giải bất phương trình vô tỉ, ta cần phải dựa vào các định lý về biến đổi tương đương và làm mất căn bậc hai. Ta đi đến lời giải của bài toán

b. Lời giải

Ta có

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 3 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a)\{ \\ (b)\{ \end{array}\right.$$

c. Khai thác bài toán

Tương tự ta có thể giải các bất phương trình sau:

1. $\sqrt{21-4x-x^2} < x+3$

2. $\sqrt{5x^2-1} > x-2$

Bài 18. giải bất phương trình

1. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \geq x^2-6x+11$

a. Phân tích

không thể dùng các phép biến đổi tương đương thông thường để giải phương trình vì sẽ làm tăng bậc một cách đáng kể. Xét thấy $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\geq 2$. Vì vậy chúng ta có thể tìm GTLN của vế trái rồi so sánh với GTNN của vế phải. Ta có lời giải của bài toán

b. Lời giải

$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \geq x^2-6x+11$

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$

Khi đó $\left(1\sqrt{x-2}+1\sqrt{4-x}\right)^2 \leq \left(1^2+1^2\right)\left(x-2+4-x\right)=4$

$\Rightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \leq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x-2}}{1}=\dfrac{\sqrt{4-x}}{1}$

$\Leftrightarrow x-2=4-x \Leftrightarrow x=3$

Vế phải: $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\geq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x=3

Vậy hai vế bằng nhau $\Leftrightarrow$ x=3

Kết luận; Bất phương trình có nghiệm duy nhất x=3

c.Khai thác bài toán

Dùng phương pháp tương tự có thể giải các bất phương trình sau:

Bài toán 1. $\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x} \geq x^2-8x+18$

Bài toán 2. $\sqrt{x-4}+\sqrt{12-x} \geq x^2-16x+68$

Bài toán 3. $\sqrt{x-2}+\sqrt{20-x}\geq x^2-22x+127$

2. $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+21}\leq 5-2x-x^2$

a. Phân tích

không nên sử dụng phép bình phương để làm mất căn vì nếu vậy sẽ làm tăng bậc của phương trình một cách đáng kể. Nếu đặt ẩn phụ cũng phải biến đối làm tăng bậc của phương trình. Để ý rằng các biểu thức dưới dấu căn đều có dạng $a(x-1)^2+b$, ta có lời giải sau:

b. Lời giải

$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+21}\leq 5-2x-x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{3(x^2+2x+1)+4}+\sqrt{5(x^2+2x+1)+16}\leq 6-(x^2+2x+1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+16}\leq 6-(x+1)^2\ (1)$

Vì $(x+1)^2\geq 0$ nên $3(x+1)^2+4\geq 4$ do đó $\sqrt{3(x+1)^2+4}\geq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x= - 1

Tương tự $\sqrt{5(x+1)^2+16}\geq 4$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x= - 1

Vậy vế trái $\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+16}\geq 6$

Vế phải $6-(x+1)^2\leq 6$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x= - 1

Suy ra (1) $\Leftrightarrow$ vế trái = vế phải = 6 $\Leftrightarrow$ x = - 1

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất x = - 1

c. Khai thác bài toán

Ta đã giải phương trình trên bằng cách tính giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của 2 vế. Đây cũng là một phương pháp khá phổ biến (phương pháp đánh giá). Học sinh có thể tự nêu ra và giải một số bài toán tương tự. Chẳng hạn:

Giải các bất phương trình

1. $\sqrt{8x^2+48x+76}+\sqrt{3x^2+18x+36}\leq -13-12x-2x^2$

2. $\sqrt{8x^2+8x+3}+\sqrt{12x^2+12x+7}\leq -1-16x-16x^2$

Bài 19/378 Giải các bất phương trình

1) $|x-1|+|x-2|=x^2-3x+1$

2) $|x^2-3x+2|<2x+1$

3) $\left|\frac{3x-2}{x+1}\right|<|1-x|$

Phân tích

Với bài toán có chứa dấu giá trị tuyệt đối ta thường xét các khoảng đối với biến để bỏ dấu giá trị tuyệt đối, từ đó giải các bất phương trình

Lời giải

1) $|x-1|+|x-2|=x^2-3x+1$

Với x < 1 thì BPT đã cho có dạng:

$$-x+1-x+2=x^2-3x+1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$$

2) $|x^2-3x+2|<2x+1$

Ta có: $x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1>0\\x-2>0\end{cases}\\\begin{cases}x-1<0\\x-2<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.$

Với x > 2 hoặc x < 1 thì BPT đã cho có dạng:

$$x^2-3x+2<2x+1 \Leftrightarrow x^2-5x+1<0 \Leftrightarrow$$

Với 1 < x < 2 thì BPT đã cho có dạng:

$$-(x^2-3x+2)<2x+1 \Leftrightarrow x^2-x+3>0 \text{ (luôn đúng)}$$

3) $\left|\dfrac{3x-2}{x+1}\right|<|1-x| \Leftrightarrow \left(\dfrac{3x-2}{x+1}\right)^2<(1-x)^2 \Leftrightarrow \left[\dfrac{3x-2}{x+1}+(1-x)\right]\left[\dfrac{3x-2}{x+1}-(1-x)\right]<0$

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THUỴ

Biên tập :
ĐÌNH KHANG

Trình bày bìa:
NGUYỄN QUỐC ĐẠI

BÀI TẬP ĐẠI SỐ SƠ CẤP VÀ THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

In 400.000 cuốn khổ 24 x 35 cm tại Công ti In Tiến An.
Giấy phép xuất bản số 4415/307-00/ XB-QLXB, kí ngày 25/08/2013.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2013.