

NGUYỄN ĐỨC TẤN
NGUYỄN ANH HOÀNG - NGUYỄN ĐOÀN VŨ

Mới

Chuyên Đề BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

TOÁN

7

PHIÊN BẢN MỚI NHẤT



NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

NGUYỄN ĐỨC TÂN - NGUYỄN ANH HOÀNG - NGUYỄN ĐOÀN VŨ

Chuyên đề

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

TOÁN

7

PHIÊN BẢN MỚI NHẤT



NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Lời nói đầu

Quyển sách "Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán 7" thuộc tủ sách **LUYỆN KÌ NĂNG HỌC GIOI TOÁN TIỂU HỌC VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ**, nhằm đáp ứng nhu cầu luyện tập trau dồi kiến thức, nâng cao kỹ năng học toán và hình thành thói quen tự học cho học sinh.

Sách được biên soạn có cấu trúc như sách giáo khoa **TOÁN 7** gồm hai phần **ĐẠI SỐ** và **HÌNH HỌC**. Mỗi phần gồm nhiều chương, trong đó mỗi bài học được chia thành hai phần :

A. Kiến thức và kỹ năng cẩn nhớ : Hệ thống hóa các kiến thức, kỹ năng cơ bản cần thiết trong từng nhóm bài để giúp học sinh ghi nhớ và vận dụng giải bài tập

B. Bài tập : gồm các loại sau :

- **Bài tập cơ bản :** Rèn luyện cho các em kỹ năng làm toán và giúp các em củng cố và khắc sâu các kiến thức mới được học.
- **Bài tập nâng cao :** Phát huy tính cung tính sáng tạo và tư duy toán học cho học sinh.
- **Bài thi chọn cho học sinh giỏi :** Thủ súc với các bài toán thi học sinh giỏi ở các địa phương

Phụ lục: Các bài toán hay và khó

Có được bộ sách "Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán 7", các em được rèn luyện và giải toán ngày càng tốt hơn

Chúng tôi tin rằng các em sẽ học giỏi toán hơn và thực sự yêu thích môn toán.

Mặc dù đã rất cố gắng trong quá trình biên soạn nhưng vẫn không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp từ bạn đọc.

Xin trân trọng cảm ơn.

Đác lác giả

Mời bạn vào trực tuyến tại: khangvietbook.com.vn để có thể cập nhật và mua online một cách nhanh chóng, thuận tiện nhất các tựu sách do Công ty Khang Việt phát hành.

SĐT: (08).39103821 - 0903906848

THẦN ĐẠI SỐ

Chương I. SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

81. TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CẨN NHỎ

1. Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là \mathbb{Q} .

2. Ta có thể biểu diễn mọi số hữu tỉ trên trục số.

Trên trục số, điểm biểu diễn số hữu tỉ x được gọi là điểm x .

3. Với hai số hữu tỉ bất kì, luôn có :

hoặc $x = y$ hoặc $x > y$ hoặc $x < y$.

Chúng ta có thể so sánh hai số hữu tỉ bằng cách viết chúng dưới dạng phân số rồi so sánh hai phân số đó.

- Nếu $x < y$ thì trên trục số, điểm x ở bên trái điểm y

- Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương, số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm, số hữu tỉ 0 không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.

B/ BÀI TẬP

■ BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Điền kí hiệu ϵ , ϵ , ϵ thích hợp vào ô trống :

$25 \square \mathbb{N}$ $-2009 \square \mathbb{N}$ $-2009 \square \mathbb{Z}$

$\frac{-7}{9} \square \mathbb{N}$ $\frac{-7}{9} \square \mathbb{Q}$ $\mathbb{N} \square \mathbb{Z} \square \mathbb{Q}$

Giai

$25 \boxed{\epsilon} \mathbb{N}$ $-2009 \boxed{\epsilon} \mathbb{N}$ $-2009 \boxed{\epsilon} \mathbb{Z}$

$\frac{-7}{9} \boxed{\epsilon} \mathbb{Z}$ $\frac{-7}{9} \boxed{\epsilon} \mathbb{Q}$ $\mathbb{N} \boxed{\epsilon} \mathbb{Z} \boxed{\epsilon} \mathbb{Q}$

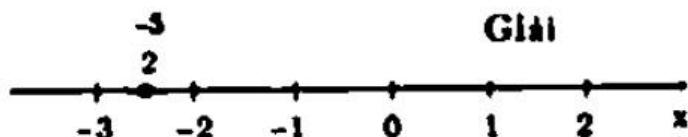
2. Trong các phân số sau, những phân số nào biểu diễn số hữu tỉ $\frac{-3}{5}$:

$\frac{-9}{15}; \frac{12}{-20}; \frac{-21}{35}; \frac{-24}{25}; \frac{-33}{55}$

Giai

$\frac{-9}{15}; \frac{12}{-20}; \frac{-21}{35}; \frac{-33}{55}$

3. Biểu diễn số hữu tỉ $\frac{-5}{2}$ trên trục số.



4. So sánh các số hữu tỉ sau :

a) $\frac{-4}{9}$ và $\frac{7}{-15}$

b) $\frac{-1}{4}$ và $\frac{1111}{-4444}$.

Giải

a) Ta có: $\frac{-4}{9} = \frac{-20}{45}$; $\frac{7}{-15} = \frac{-7}{15} = \frac{-21}{45}$. Mà $\frac{-20}{45} > \frac{-21}{45}$ nên $\frac{-4}{9} > \frac{7}{-15}$.

b) $\frac{-1}{4} = \frac{1111}{-4444}$.

5. Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần

$$\frac{-3}{2}; \frac{-2}{3}; 0; \frac{4}{7}; \frac{2}{3}; \frac{-2}{-5}.$$

Giải

$$\frac{-3}{2} < \frac{-2}{3} < 0 < \frac{-2}{-5} < \frac{4}{7} < \frac{2}{3}.$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

6. Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ ($b > 0, d > 0$). Chứng tỏ rằng :

a) Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $ad < bc$ b) Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Giải

a) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$; $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$. Vì $b > 0$; $d > 0$ nên $bd > 0$.

Do đó: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd} \Rightarrow ad < bc$.

b) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow ad + ab < bc + ab$

$$\Rightarrow a(b+d) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

Tương tự ta có $ad > bc \Rightarrow ad + cd < bc + cd$

$$\Rightarrow (a+c)d < c(b+d) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Vậy $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

7. Cho $a, b \in \mathbb{Z}, a > b, b > 0$. Chứng minh rằng : $\frac{a}{b} < \frac{a+2009}{b+2009}$.

Giai

Ta có : $a(b + 2009) = ab + 2009a$

$$b(a + 2009) = ab + 2009b.$$

Vì $b > 0$ nên $b + 2009 > 0$.

Suy ra nếu $a < b \Leftrightarrow 2009a < 2009b \Leftrightarrow a(b + 2009) < b(a + 2009)$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a + 2009}{b + 2009}.$$

8. Chứng minh rằng : Nếu $\frac{a + 2009}{a - 2009} = \frac{b + 2010}{b - 2010}$ thì $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2010}$.

Giai

Ta có : $\frac{a + 2009}{a - 2009} = \frac{b + 2010}{b - 2010}$

$$\Leftrightarrow (a + 2009)(b - 2010) = (a - 2009)(b + 2010)$$

$$\Leftrightarrow 2010a = 2009b \Leftrightarrow \frac{a}{2009} = \frac{b}{2010}.$$

9. Cho số hữu tỉ $x = \frac{a+17}{a}$ ($a \neq 0$). Với giá trị nguyên nào của a thì x là số nguyên ?

Giai

x là số nguyên $\Leftrightarrow a+17 \mid a$ mà $a \mid a$ nên $17 \mid a$.

Do đó a là ước của $17 \Rightarrow a = \{1; -1; -17; 17\}$.

Mà $a \neq 0$. Vậy $a \in \{1; -1; 17; -17\}$.

10. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau tối giản :

$$\frac{1}{n+3}; \frac{2}{n+4}; \frac{3}{n+5}; \dots; \frac{2001}{n+2003}; \frac{2002}{n+2004}.$$

Giai

Các phân số đã cho có dạng

$$\frac{a}{n+2+a} \text{ với } a = 1; 2; 3; \dots; 2001; 2002.$$

$$\frac{a}{n+2+a} \text{ tối giản} \Leftrightarrow \text{UCLN}(n+2+a; a) = 1$$

$\Leftrightarrow \text{UCLN}(n+2; a) = 1 \Leftrightarrow n+2$ nguyên tố cùng nhau
với mỗi số $1; 2; 3; \dots; 2002$ và $n+2$ nhỏ nhất.

Do đó $n+2 = 2003$ (vì 2003 là số nguyên tố).

Suy ra $n = 2003 - 2 = 2001$.

11. Cho $a, b, c, d, e, g \in \mathbb{Z}$, biết rằng $b, d, g > 0$; $ad - bc = 2009$; $cg - de = 2009$.

a) So sánh $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{g}$.

b) So sánh $\frac{c}{d}$ với $\frac{a+e}{b+g}$.

Giai

a) Từ $ad - bc = 2009 \Rightarrow ad - bc > 0 \Rightarrow ad > bc$
 $\Rightarrow \frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Và từ $cg - de = 2009 \Rightarrow cg - de > 0 \Rightarrow cg > de$
 $\Rightarrow \frac{cg}{gd} > \frac{de}{gd} \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{e}{g}$.

Vậy $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{e}{g}$.

b) Ta có $ad - bc = cg - de (= 2009) \Rightarrow ad + dc = cg + bc$
 $\Rightarrow d(a + e) = c(g + b) \Rightarrow \frac{a+e}{b+g} = \frac{c}{d}$.

12. Với giá trị nguyên nào của x thì $M = \frac{2009}{11-x}$ có giá trị lớn nhất.

Giai

$$M = \frac{2009}{11-x}$$

Xét $x > 11$ thì $11 - x < 0$ nên $M < 0$.

Xét $x < 11$ thì $11 - x > 0$, $11 - x$ là số nguyên nên $11 - x \geq 1$.

Do đó $M \leq 2009$.

Vậy giá trị lớn nhất của M bằng 2009 khi và chỉ khi $11 - x = 1 \Leftrightarrow x = 10$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

13. Xác định số nguyên x để $\frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$ là số nguyên.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 7, Quận 6, Tp.Hồ Chí Minh, năm học 1994 - 1995)

Giai

$\frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$ là số nguyên $\Leftrightarrow (x^2 - 3) \mid (x^2 - 1)$.

Mà $x^2 - 3 = (x^2 - 1) - 2$. Ta có $2 \mid x^2 - 1$.

Vì $x^2 \geq 0$ nên $x^2 - 1 \geq -1$. Nên $x^2 - 1 \in \{-1; 1; 2\}$
 $\Leftrightarrow x^2 \in \{0; 1; 2\}$ (chỉ xảy ra $x^2 = 0\} \Leftrightarrow x = 0$.

82. CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ

A/ KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẨM NHỚ

1. Cộng, trừ hai số hữu tỉ

Với $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$ ($a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$).

Ta có: $x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$; $x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$.

2. Quy tắc chuyển về

Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó.

Với mọi $x, y, z \in Q$: $x + y = z \Rightarrow x = z - y$.

B/ BÀI TẬP**C/ BÀI TẬP CƠ BẢN****14. Tính :**

a) $\frac{-3}{10} + \frac{-14}{15}$

b) $\frac{-2}{7} - \frac{5}{21}$

c) $\frac{-2}{3} + \left(\frac{-3}{5}\right) - \frac{7}{10}$

d) $\frac{4}{3} + \left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{5}{12}$.

Giải

a) $\frac{-3}{10} + \frac{-14}{15} = \frac{-9}{30} + \frac{-28}{30} = \frac{-37}{30}$. b) $\frac{-2}{7} - \frac{5}{21} = \frac{-6}{21} + \frac{-5}{21} = \frac{-11}{21}$.

c) $\frac{-2}{3} + \left(\frac{-3}{5}\right) - \frac{7}{10} = \frac{-20}{30} + \frac{-18}{30} + \frac{-21}{30} = \frac{-59}{30}$.

d) $\frac{4}{3} + \left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{5}{12} = \frac{16}{12} + \frac{-18}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$.

15. Hãy viết số hữu tỉ $\frac{-15}{32}$ dưới dạng :a) **Tổng** của hai số hữu tỉ âm.b) **Hiệu** của hai số hữu tỉ dương.**Giải**

a) $\frac{-15}{32} = \frac{-9}{32} + \frac{-6}{32}$.

b) $\frac{-15}{32} = \frac{3}{32} - \frac{18}{32}$.

16. Tìm x , biết :

a) $x - \frac{8}{3} = \frac{-5}{9}$

b) $x + \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$

Giải

a) $x - \frac{8}{3} = \frac{-5}{9}$

b) $x + \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{-5}{9} + \frac{8}{3}$

$x = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$

$x = \frac{19}{9}$.

$x = \frac{-1}{10}$.

17. Tính nhanh giá trị của biểu thức sau : $\frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \frac{7}{8} - \frac{8}{9} + \frac{9}{10} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \frac{7}{8} + \frac{8}{9}$ **Giải**

$\frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \frac{7}{8} - \frac{8}{9} + \frac{9}{10} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \frac{7}{8} + \frac{8}{9} = \frac{9}{10}$.

18. Tính bằng cách thuận tiện nhất :

$$\left(2008 - \frac{2}{135} + \frac{1}{50} \right) - \left(1 - \frac{7}{135} + \frac{4}{50} \right) - \left(5 + \frac{5}{135} + \frac{3}{50} \right).$$

Giai

$$\begin{aligned} & \left(2008 - \frac{2}{135} + \frac{1}{50} \right) - \left(1 - \frac{7}{135} + \frac{4}{50} \right) - \left(5 + \frac{5}{135} + \frac{3}{50} \right) \\ & = 2008 - \frac{2}{135} + \frac{1}{50} - 1 + \frac{7}{135} - \frac{4}{50} - 5 - \frac{5}{135} + \frac{3}{50} \\ & = 2008 - 1 - 5 + \left(-\frac{2}{135} - \frac{5}{135} + \frac{7}{135} \right) + \left(\frac{1}{50} - \frac{4}{50} + \frac{3}{50} \right) \\ & = 2002 + 0 + 0 = 2002. \end{aligned}$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

19. Tính nhanh :

$$a) A = \frac{50 - \frac{4}{13} + \frac{2}{15} - \frac{2}{17}}{100 - \frac{8}{13} + \frac{4}{15} - \frac{4}{17}}$$

$$b) B = \frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009}.$$

Giai

$$a) A = \frac{50 - \frac{4}{13} + \frac{2}{15} - \frac{2}{17}}{100 - \frac{8}{13} + \frac{4}{15} - \frac{4}{17}} = \frac{50 - \frac{4}{13} + \frac{2}{15} - \frac{2}{17}}{2 \left(50 - \frac{4}{13} + \frac{2}{15} - \frac{2}{17} \right)} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} b) B &= \frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009} \\ &= \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009} \\ &= \frac{9}{10} \left(\frac{19 - 9}{9.19} + \frac{29 - 19}{19.29} + \frac{39 - 29}{29.39} + \dots + \frac{2009 - 1999}{1999.2009} \right) \\ &= \frac{9}{10} \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{39} + \dots - \frac{1}{1999} - \frac{1}{2009} \right] \\ &= \frac{9}{10} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2009} \right) = \frac{1}{10} - \frac{9}{2009.10} \\ &= \frac{2009}{2009.10} - \frac{9}{2009.10} = \frac{2000}{2009.10} = \frac{200}{2009}. \end{aligned}$$

20. Tìm x, biết :

$$a) \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

b) $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$

Giai

a) $\frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$
 $\frac{(x+4)-(x+2)}{(x+2)(x+4)} + \frac{(x+8)-(x+4)}{(x+4)(x+8)} + \frac{(x+14)-(x+8)}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$
 $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+14} + \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+14} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$
 $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+14} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$
 $\frac{2}{(x+2)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$

$x = 2.$

b) $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$
 $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} - \frac{x+1}{13} - \frac{x+1}{14} = 0$
 $(x+1)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14}\right) = 0.$
 Vì $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \neq 0$ (vì $\frac{1}{10} > \frac{1}{11} > \frac{1}{12} > \frac{1}{13} > \frac{1}{14}$)
 nên $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$

21. Phán nguyên của một số hữu tỉ x , kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Ta có : $[x] \leq x \leq [x] + 1$.

Ví dụ : $\left[\frac{7}{3}\right] = 2 ; [-1,5] = -2$. Tìm $\left[\frac{3}{4}\right] ; \left[2\frac{1}{7}\right] ; [-2,7]$.

Giai

$\left[\frac{3}{4}\right] = 0 ; \left[2\frac{1}{7}\right] = 2 ; [-2,7] = -3.$

22. Phán lẻ của một số hữu tỉ x , kí hiệu $\{x\}$ là hiệu $x - [x]$

Ta có : $\{x\} = x - [x], 0 \leq \{x\} \leq 1$.

Tìm $\left\{\frac{5}{2}\right\} ; \left\{-\frac{7}{3}\right\}$.

Giai

$\left\{\frac{5}{2}\right\} = \frac{5}{2} - \left[\frac{5}{2}\right] = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} ; \left\{-\frac{7}{3}\right\} = -\frac{7}{3} - \left[-\frac{7}{3}\right] = -\frac{7}{3} - (-3) = \frac{2}{3}.$

23. Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$.

Chứng minh rằng : $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Giai

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

Vậy : $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$.

Ta có : $A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{75} \right) + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{77} + \dots + \frac{1}{100} \right)$

Do đó $A > \frac{1}{75} \cdot 25 + \frac{1}{100} \cdot 25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$;

$$A < \frac{1}{50} \cdot 25 - \frac{1}{75} \cdot 25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

24. Chứng minh rằng : $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{1990^2} < \frac{3}{4}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, trường Chuyên Văn Toán huyện Đức Phổ, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 1989 - 1990)

b) Cho các số nguyên dương x, y, z.

Chứng minh rằng $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận Hoàn Kiếm, TP. Hà Nội, năm học 2003 - 2004)

Giai

a) Ta có : $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{1990^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1989.1990}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1989} - \frac{1}{1990} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1990} < \frac{1}{2}.$$

Do đó $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{1990^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

b) Vì x, y, z > 0 nên

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z}$$

$$\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

$$\left(\frac{x-10}{30} - 3\right) + \left(\frac{x-14}{43} - 2\right) + \left(\frac{x-5}{95} - 1\right) + \left(\frac{x-148}{8} + 6\right) = 0$$

$$\frac{x-100}{30} + \frac{x-100}{43} + \frac{x-100}{95} + \frac{x-100}{8} = 0$$

$$(x-100)\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8}\right) = 0$$

vì $\frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} \neq 0$, nên $x-100 = 0 \Leftrightarrow x = 100$

83. NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CÁN NHỎ

1. Nhân hai số hữu tỉ

Với $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, ta có: $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

2. Chia hai số hữu tỉ

Với $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ ($y \neq 0$) ta có: $x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Chú ý: Thương của phép chia số hữu tỉ x cho số hữu tỉ y ($y \neq 0$) gọi là tỉ số của hai số x và y , kí hiệu là $\frac{x}{y}$ hay $x : y$.

B/ BÀI TẬP

C/ BÀI TẬP CƠ BẢN

26. Tính:

a) $\frac{-3}{14} \cdot \frac{42}{15}$

b) $\frac{-5}{13} : \frac{15}{26}$

c) $\frac{-5}{6} \cdot \frac{12}{-7} \cdot \left(-\frac{21}{15}\right)$

d) $\left(\frac{-3}{11} : \frac{5}{22}\right) \cdot \left(\frac{-15}{3} : \frac{26}{3}\right)$

Giải

a) $\frac{-3}{14} \cdot \frac{42}{15} = \frac{-3}{5}$

b) $\frac{-5}{13} : \frac{15}{26} = \frac{-5}{13} \cdot \frac{-26}{15} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{-5}{6} \cdot \frac{12}{-7} \cdot \left(-\frac{21}{5}\right) = -6$

d) $\frac{9}{13}$

27. Tính: a) $\left(\frac{-3}{7} + \frac{5}{11}\right) : \frac{-3}{5} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{6}{11}\right) : \frac{-3}{5}$

b) $\left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2008} - 1\right) \left(\frac{1}{2009} - 1\right)$

Giai

$$\text{a)} \left(\frac{-3}{7} + \frac{5}{11} \right) : \frac{3}{5} = \left(\frac{4}{7} - \frac{6}{11} \right) : \frac{-3}{5} = \left(\frac{-3}{7} + \frac{5}{11} - \frac{4}{7} + \frac{6}{11} \right) : \frac{-3}{5} = 0 : \frac{-3}{5} = 0.$$

$$\begin{aligned}\text{b)} & \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2008} - 1 \right) \left(\frac{1}{2009} - 1 \right) \\ & = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) \cdots \left(\frac{2007}{2008} \right) \left(\frac{-2008}{2009} \right) = \frac{1}{2009}.\end{aligned}$$

28. a) Viết số hữu tỉ $\frac{-7}{88}$ thành tích của hai số hữu tỉ theo năm cách khác nhau.

b) Viết số hữu tỉ $\frac{8}{15}$ thành thương của hai số hữu tỉ theo năm cách khác nhau

Giai

$$\text{a)} \frac{-7}{88} = -7 \cdot \frac{1}{88} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{44} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{22} = \frac{-7}{11} \cdot \frac{1}{8} = \frac{-7}{22} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{b)} \frac{8}{15} = 8 \cdot \frac{15}{15} = -2 \cdot \frac{15}{4} = -4 \cdot \frac{15}{2} = 8 \cdot (-15) = 4 \cdot \left(-\frac{15}{2} \right)$$

29. Tìm x, biết

$$\text{a)} \frac{2}{3} \cdot x = \frac{-5}{17}$$

$$\text{b)} x : \frac{9}{2} = \frac{-4}{25}$$

Giai

$$\text{a)} \frac{2}{3} \cdot x = \frac{-5}{17}$$

$$\text{b)} x : \frac{9}{2} = \frac{-4}{24}$$

$$x = \frac{-5}{17} \cdot \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{-4}{25} \cdot \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{-5}{17} \cdot \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{18}{25}$$

$$x = \frac{-15}{34}$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

30. Tìm x, y, z biết rằng :

$$\left(x - \frac{1}{3} \right) \left(y - \frac{1}{2} \right) (z - 5) = 0 \text{ và } x + 2 = y + 1 = z + 3$$

Giai

$$\left(x - \frac{1}{3} \right) \left(y - \frac{1}{2} \right) (x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{3} = 0 \text{ hoặc } y = \frac{1}{2} = 0 \text{ hoặc } z - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ hoặc } y = \frac{1}{2} \text{ hoặc } z = 5$$

$$\bullet x = \frac{1}{3} \text{ và } x + 2 = y + 1 = z + 3. \text{ Suy ra } y = \frac{4}{3}; z = -\frac{2}{3}.$$

$$\bullet y = \frac{1}{2} \text{ và } x + 2 = y + 1 = z + 3. \text{ Suy ra } x = -\frac{1}{2}; z = -\frac{3}{2}.$$

$$\bullet z = 5 \text{ và } z + 2 = y + 1 = x + 3.$$

Suy ra $x = 6; y = 7$.

31. Cho biết $\frac{ab}{c} < 0$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$ và a, b, c khác 0. Chứng tỏ rằng $\frac{bc}{a} < 0$.

Giai

$$\frac{ab}{c} < 0 \Rightarrow ab \text{ và } c \text{ trái dấu}$$

$$\Rightarrow (ab)c < 0 \Rightarrow a(bc) < 0 \Rightarrow a \text{ và } bc \text{ trái dấu} \Rightarrow \frac{bc}{a} < 0.$$

32. Cho 2009 số, trong đó 3 số bất kì có tích là một số dương. Chứng minh tất cả 2009 số ấy đều dương.

Giai

Gọi 2009 số đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$

Giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2009}$

Vì tích của ba số bất kì là một số dương nên số số âm trong các số này phải nhỏ hơn 3.

Do đó $a_{2009} > 0; a_{2008} > 0$ mà $a_1 \cdot a_{2009} \cdot a_{2008} > 0 \Rightarrow a_1 > 0$.

Vậy $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$ đều dương.

33. Cho 7 số hữu tỉ được sắp xếp trên đường tròn sao cho tích hai số cạnh nhau luôn bằng $\frac{9}{25}$. Tìm các số đó.

Giai

Gọi 7 số đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Hiển nhiên $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ đều khác 0.

Ta có $a_1a_2 = a_2a_3 = a_3a_4 = a_4a_5 = a_5a_6 = a_6a_7 = a_7a_1$;

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7.$$

$$\text{Nên } a_1 \cdot a_1 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow a_1^2 = \left(\pm \frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow a_1 = \pm \frac{3}{5}$$

34. Có tồn tại hai số dương a và b khác nhau sao cho $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$ không?

Giai

Giả sử tồn tại hai số dương a, b khác nhau sao cho

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b} \Leftrightarrow \frac{b-a}{a-b} = \frac{1}{a-b} \Leftrightarrow (a-b)(b-a) = ab.$$

Vì $vế trái$ là tích của hai số đối nhau khác 0 nên là số âm, $vế phải$ là tích của hai số dương nên là số dương. Do đó không xảy ra biểu thức trên.

Vậy không tồn tại hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

35. Tính $\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} - \dots - \frac{1}{97.98.99}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận 6, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1998 - 1999)

Giải

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} - \dots - \frac{1}{97.98.99} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{97.98.99} \right) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{4-2}{2.3.4} + \frac{5-3}{3.4.5} + \dots + \frac{99-97}{97.98.99} \right) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{97.98} - \frac{1}{98.99} \right). \end{aligned}$$

36. Cho các số nguyên dương x, y, z .

Chứng minh rằng $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận Hoàn Kiếm, TP. Hà Nội, năm học 2003 - 2004)

Giải

Vì $x, y, z > 0$ nên

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} \quad (1)$$

Vậy $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > 1$.

Tương tự cũng có $\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} > 1$.

Mà $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} \right) = 3$.

Kết hợp với bất đẳng thức (1), ta có điều phải chứng minh.

84. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TÍ CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỚ

1. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ

Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ x , kí hiệu là $|x|$, là khoảng cách từ điểm x tới điểm 0 trên trục số.

$$\text{Ta có : } |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Chú ý: Với mọi $x \in \mathbb{Q}$ ta luôn có : $|x| \geq 0$; $|x| = |-x|$; $|x| \geq x$.

2. Cộng, trừ, nhân, chia số thập phân

- Để cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

Trong thực hành, ta thường cộng, trừ, nhân hai số thập phân theo các quy tắc về giá trị tuyệt đối và về dấu tương tự như đối với số nguyên.

- Khi chia số thập phân x cho số thập phân y ($y \neq 0$), ta áp dụng quy tắc :
Thương của hai số thập phân x và y là thương của $|x|$ và $|y|$ với dấu "+" đằng trước nếu x và y cùng dấu và dấu "-" đằng trước nếu x và y khác dấu.

B/ BÀI TẬP

1. BÀI TẬP CƠ BẢN

37. Tìm $|x|$ biết :

$$\text{a)} x = \frac{13}{25} \quad \text{b)} x = \frac{-2}{11} \quad \text{c)} x = 0 \quad \text{d)} x = \frac{6}{-17}.$$

Giải

$$\text{a)} |x| = \left| \frac{13}{25} \right| = \frac{13}{25}$$

$$\text{b)} |x| = \left| \frac{-2}{11} \right| = \frac{2}{11}$$

$$\text{c)} |x| = |0| = 0$$

$$\text{d)} |x| = \left| \frac{6}{-17} \right| = \frac{6}{17}.$$

38. Tính :

$$\text{a)} \left| \frac{-5}{11} \right| + \left| \frac{-6}{11} \right| - (-2009) \quad \text{b)} |-3,9| - 1,7 - |-2,2|$$

$$\text{c)} 11,05 + 1,2, 0,5 + 9,6 : 0,3.$$

Giải

$$\text{a)} \left| \frac{-5}{11} \right| + \left| \frac{-6}{11} \right| - (-2009) = \frac{5}{11} + \frac{6}{11} + 2009 = 1 + 2009 = 2010.$$

$$\text{b)} |-3,9| - 1,7 - |-2,2| = 3,9 - 1,7 - 2,2 = 0.$$

$$\text{c)} 11,05 + 1,2, 0,5 + 9,6 : 0,3 = 11,05 + 6 + 32 = 43,56.$$

39. Tìm x , biết :

a) $|x| = \frac{5}{7}$

b) $|x| = |-3,6|$

c) $|x| = 0.$

Giải

a) $|x| = \frac{5}{7}$

b) $|x| = |-3,6|$

$x = \frac{5}{7}$ hoặc $x = -\frac{5}{7}$.

$|x| = 3,6$

$x = 3,6$ hoặc $x = -3,6$.

c) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

40. Dựa vào tính chất "nếu $x < y$ và $y < z$ thì $x < z$ ", hãy so sánh :

a) $\frac{5}{6}$ và $1,1$

b) -2009 và $0,009$

c) $\frac{-13}{-38}$ và $\frac{12}{37}$.

Giải

a) $\frac{5}{6} < 1$ và $1 < 1,1.$

b) $-2009 < 0$ và $0 < 0,009$

Do đó $\frac{5}{6} < 1,1.$

Do đó $-2009 < 0,09.$

c) $\frac{-13}{-38} = \frac{13}{38} > \frac{13}{39}$ $\frac{1}{3} : \frac{12}{37} < \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Vậy $\frac{-13}{-38} > \frac{12}{37}.$

BÀI TẬP NÂNG CAO

41. Tìm $x, y, z \in \mathbb{Q}$ biết :

a) $\left| x + \frac{13}{7} \right| + \left| y + \frac{2009}{2008} \right| + |z - 2007| = 0$

b) $\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{3}{2} \right| + \left| z - \frac{5}{2} \right| \leq 0.$

Giải

a) $\left| x + \frac{13}{7} \right| + \left| y + \frac{2009}{2008} \right| + |z - 2007| = 0.$

$\left| x + \frac{13}{7} \right| \geq 0 ; \left| y + \frac{2009}{2008} \right| \geq 0 ; |z - 2007| \geq 0.$

Do đó $\left| x + \frac{13}{7} \right| + \left| y + \frac{2009}{2008} \right| + |z - 2007| \geq 0.$

Do vậy nếu :

Ta có: $\left| x + \frac{13}{7} \right| + \left| y + \frac{2009}{2008} \right| + |z - 2007| = 0$

$$\text{thì } \left| x + \frac{13}{7} \right| = \left| y + \frac{2009}{2008} \right| = |z - 2007| = 0$$

$$x + \frac{13}{7} = y + \frac{2009}{2008} = z - 2007 = 0$$

$$x = -\frac{13}{7}; y = -\frac{2009}{2008}; z = 2007.$$

b) Tương tự, ta có: $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{3}{2}; z = \frac{5}{2}$.

42. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \left| 2x - \frac{1}{5} \right| + 98$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = -\left| 3x + \frac{1}{7} \right| + \frac{5}{3}$.

Giai

a) Ta có: $\left| 2x - \frac{1}{5} \right| \geq 0$. Do đó $A = \left| 2x - \frac{1}{5} \right| + 98 \geq 98$.

$$\text{Đầu "=" xảy ra} \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 98.

b) Ta có: $\left| 3x + \frac{1}{7} \right| \geq 0$ nên $-\left| 3x + \frac{1}{7} \right| \leq 0$. Do đó $B = -\left| 3x + \frac{1}{7} \right| + \frac{5}{3} \leq \frac{5}{3}$

$$\text{Đầu "=" xảy ra} \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{7} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{21}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{5}{3}$.

43. Tìm x biết: $\left| x + \frac{11}{17} \right| + \left| x + \frac{2}{17} \right| + \left| x + \frac{4}{17} \right| = 4x$.

Giai

Ta có: $\left| x + \frac{11}{17} \right| \geq 0; \left| x + \frac{2}{17} \right| \geq 0; \left| x + \frac{4}{17} \right| \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0$.

Do đó từ $\left| x + \frac{11}{17} \right| + \left| x + \frac{2}{17} \right| + \left| x + \frac{4}{17} \right| = 4x$, ta có $x \geq 0$.

Nên $x + \frac{11}{17} > 0, x + \frac{2}{17} > 0$ và $x + \frac{4}{17} > 0$.

Vậy ta có: $x + \frac{11}{17} + x + \frac{2}{17} + x + \frac{4}{17} = 4x$

$$\Leftrightarrow (x + x + x) + \left(\frac{11}{17} + \frac{2}{17} + \frac{4}{17} \right) = 4x$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = 4x \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thích hợp).}$$

Vậy $x = 1$.

44. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau :

a) $A = |x + 5| + |x + 17|$

b) $B = |x + 8| + |x + 13| + |x + 50|$

Giai

Chú ý: Ta có $|M| \geq 0$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow M = 0$.

Ta có $|M| \geq M$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow M \geq 0$

Ta có $|P| = |-P|$.

a) Áp dụng các chú ý trên, ta có :

$$A = |x + 5| + |x + 17| = |-x - 5| + |x + 17| \geq -x - 5 + x + 17 = 12.$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow -x - 5 \geq 0$ và $x + 17 \geq 0 \Leftrightarrow -17 \leq x \leq -5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 12.

b) Áp dụng các chú ý trên, ta có :

$$B = |x + 8| + |x + 13| + |x + 50|$$

$$= |-x - 8| + |x + 13| + |x + 50| \geq -x - 8 + 0 + x + 50$$

$$= 42$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow -x - 8 \geq 0$, $x + 13 = 0$ và $x + 50 \geq 0 \Leftrightarrow x = -13$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 42.

45. Tìm các số nguyên x, y, z, t sao cho :

$$|x - y| + |y - z| + |z - t| + |t - x| = 20092009.$$

Giai

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |a - b| + a - b &= \begin{cases} a - b + a - b & (\text{nếu } a \geq b) \\ -a + b + a - b & (\text{nếu } a < b) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2(a - b) & (\text{nếu } a \geq b) \\ 0 & (\text{nếu } a < b) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với a, b ∈ Z thì $|a - b| + a - b$ là số chẵn.

$$\text{Ta có : } |x - y| + |y - z| + |z - t| + |t - x|$$

$$= (|x - y| + x - y) + (|y - z| + y - z) + (|z - t| + z - t) + (|t - x| + t - x)$$

là số chẵn.

III BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

46. Trong ba số a, b, c có một số dương, một số bằng 0, một số âm. Hỏi ba số đó là loại số nào nếu biết rằng :

$$|a| = b^2(b - c).$$

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán Quận Hai Bà Trưng - Tp. Hà Nội, năm học 1981 - 1982)

Giai

Xét a = 0. Từ $|a| = b^2(b - c) \Rightarrow b^2(b - c) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ (không thích hợp vì } a = b = 0) \\ b = c \text{ (không thích hợp vì } a, b \text{ cùng dương hoặc cùng âm)} \end{cases}$$

Xét $a \neq 0$. Từ $|a| = b^2(b - c)$ suy ra $b^2(b - c) > 0 \Rightarrow b > 0$ và $b > c$

Vì $a \neq 0$ và $b > 0$. Do vậy $c = 0$. Từ đó suy ra $a < 0$.

Với $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$, dễ thấy $|a| = b^2(b - c)$ thích hợp.

47. Tìm x thỏa mãn :

$$a) 2003 - |x - 2003| = x \quad b) |2x - 3| + |2x + 4| = 7.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, tỉnh Thái Bình, năm học 2002 - 2003)

Giai

$$a) 2003 - |x - 2003| = x$$

$$\Leftrightarrow |x - 2003| = 2003 - x \Leftrightarrow x - 2003 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2003.$$

$$b) |2x - 3| + |2x + 4| = |3 - 2x| + |2x + 4| \geq 3 - 2x + 2x + 4 = 7.$$

Dấu " \geq " xảy ra $\Leftrightarrow 3 - 2x \geq 0$ và $2x + 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 3 \text{ và } 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \text{ và } x \geq -2.$$

48. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức :

$$a) A = 9 - 2|x - 3| \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

$$b) B = |x - 2| + |x - 8| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

(Đề thi chung kết giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, báo Khanh Quảng Đô, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2009 - 2010)

Giai

a) Giá trị lớn nhất của A là 9, khi $x = 3$.

b) Giá trị nhỏ nhất của B là 6 khi $2 \leq x \leq 8$.

85. LŨY THƯA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỚ

1. Lũy thừa bậc n của một số hữu tỉ x, kí hiệu x^n , là tích của n thừa số x ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$).

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$\text{Quy ước : } x^1 = x, x^0 = 1 \quad (x \neq 0).$$

Khi viết số hữu tỉ x dưới dạng $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$) ta có $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

2. Tích và thương của hai lũy thừa cùng cơ số $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$; $x^m : x^n = x^{m-n}$ ($x \neq 0$, $m \geq n$).

3. Lũy thừa của lũy thừa : $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.

4. Lũy thừa của một tích : $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

5. Lũy thừa của một thương $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ ($y \neq 0$).

6. Lũy thừa với số mũ nguyên âm $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$).

B/ BÀI TẬP

■ BÀI TẬP CƠ BẢN

49. Tính

a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$

b) $(-2009)^0$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)^3$

d) $\left(\frac{-2}{5} + \frac{1}{3}\right)^2$

Giai

a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{-27}{125}$

b) $(-2009)^0 = 1$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$

d) $\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{-1}{15}\right)^2 = \frac{1}{225}$.

50. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ

a) $584^{100} : 292^{100}$

b) $125^{111}.6^{333}$.

Giai

a) $584^{100} : 292^{100} = 2^{100}$

b) $125^{111}.6^{333} = 5^{333}.6^{333} = 30^{333}$.

51. Tìm x biết :

a) $\left(x + \frac{2008}{2009}\right)^4 = 0$

b) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8}{125}$

d) $2^x + 2^{x+3} = 144$.

Giai

a) $\left(x + \frac{2008}{2009}\right)^4 = 0$

b) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

$x + \frac{2008}{2009} = 0$

$x - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ hoặc $x - \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}$

$x = \frac{-2008}{2009}$.

$x = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$ hoặc $x = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

$x = \frac{4}{5}$ hoặc $x = -\frac{2}{5}$.

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8}{125}$

d) $2^x + 2^{x+3} = 144$

$x - \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

$2^x(1 + 2^3) = 144$

$x = \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$

$2^x \cdot 9 = 144$

$x = \frac{9}{10}$.

$2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$.

52. So sánh :

a) 2^{30} và 3^{20}

b) 5^{202} và 2^{503} .

Giai

a) Ta có $2^{30} = 2^{3 \cdot 10} = (2^3)^{10} = 8^{10}$; $3^{20} = 3^{2 \cdot 10} = (3^2)^{10} = 9^{10}$.

Vì $8^{10} < 9^{10}$ nên $2^{30} < 3^{20}$.

b) $5^{202} = 5^{2 \cdot 101} = (5^2)^{101} = 25^{101}$; $2^{504} = 2^{3 \cdot 101} = (2^3)^{101} = 32^{101}$.

53. Chứng minh rằng

a) $2008^{100} + 2008^{99} : 2009$

b) $12345^{478} - 12345^{677} : 12344$

Giai

a) $2008^{100} + 2008^{99} = 2008^{99} \cdot 2008 + 2008^{99} \cdot 1$

$$= 2008^{99} \cdot (2008 + 1) = 2008^{99} \cdot 2009 : 2009.$$

b) $12345^{478} - 12345^{677} = 12345^{477} \cdot 12345 - 12345^{677} \cdot 1$

$$= 12345^{677} \cdot (12345 - 1) = 12345^{677} \cdot 12344 : 12344.$$

54. Cho biết $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 = 650$.

Tính nhanh tổng $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 24^2$.

Giai

Ta có: $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 24^2 = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + \dots + (2 \cdot 12)^2$

$$= 2^2 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 3^2 + \dots + 2^2 \cdot 12^2$$

$$= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2) = 2^2 \cdot 650 = 4 \cdot 650 = 2600.$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

55. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Chứng tỏ rằng $a^3b^3 + 2b^3c^3 + 3a^3c^3 \leq 0$.

Giai

Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = 0 \Rightarrow b^3 + c^3 = -a^3$; $a^3 + b^3 = -c^3$.

Do đó $a^3b^3 + 2b^3c^3 + 3c^3a^3 = a^3b^3 + c^3a^3 + 2c^3a^2 + 2b^3c^3$

$$= a^3(b^3 + c^3) + 2c^3(a^3 + b^3)$$

$$= a^3(-a^3) + 2c^3(-c^3) = -a^6 - 2c^6 \leq 0$$

56. Cho hai số a, b khác 0 và trái dấu nhau trong đó $a^{2008} = b^{2009}$. Xác định dấu của mỗi số.

Giai

Ta có $a^{2008} = b^{2009}$ và a ≠ 0 nên $a^{2008} > 0$

$$\Rightarrow b^{2009} > 0 \Rightarrow b > 0. \text{Mà } a \text{ và } b \text{ trái dấu} \Rightarrow a < 0.$$

Vậy a mang dấu “-” và b mang dấu “+”.

57. Tìm chữ số tận cùng của số

a) A = 2^{2009} b) B = 3^{2008} c) C = 7^{2011} .

Giai

a) $A = 2^{2009} = 2^{2008} \cdot 2 = (2^4)^{502} \cdot 2 = 16^{502} \cdot 2$

= 6.2 = 2 có chữ số tận cùng là 2.

b) $B = 3^{2009} = 3^{2008} \cdot 3 = (3^4)^{502} \cdot 3 = 81^{502} \cdot 3 = 1.3 = 3$

c) $C = 7^{2011} = 7^{2008} \cdot 7^3 = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343 = 1.343 = 3$.

58. So sánh

a) 333^{444} và 444^{333}

b) $(19^{2009} + 5^{2009})^{2010}$ và $(19^{2010} + 5^{2010})^{2009}$.

Giai

a) $333^{444} = (333^4)^{111} = [(3 \cdot 111)^4]^{111} = (3^4 \cdot 111^4)^{111} = (81 \cdot 111^4)^{111}$
 và $444^{333} = (444^3)^{111} = [(4 \cdot 111)^3]^{111} = (4^3 \cdot 111^3)^{111} = (64 \cdot 111^3)^{111}$.

Vì $81 > 64$, $111^4 > 111^3$ nên $81 \cdot 111^4 > 64 \cdot 111^3$.

Do vậy $(81 \cdot 111^4)^{111} > (64 \cdot 111^3)^{111}$.

Vậy $333^{444} > 444^{333}$.

b) $(19^{2009} + 5^{2009})^{2010} = (19^{2009} + 5^{2009})^{2009} \cdot (19^{2009} + 5^{2009}) > (19^{2009} + 5^{2009})^{2009} \cdot 19^{2009}$
 $= [(19^{2009} + 5^{2009}) \cdot 19]^{2009} > (19^{2009} \cdot 19 + 5 \cdot 5)^{2009}$
 $= (19^{2010} + 5^{2010})^{2009}$.

59. Cho $x + y = a + b$ và $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

Chứng minh rằng: $x^n + y^n = a^n + b^n$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Giai

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

$$(x^2 - a^2) - (b^2 - y^2) = 0$$

$$(x + a)(x - a) - (b + y)(b - y) = 0.$$

Mà $x + y = a + b \Rightarrow x - a = b - y$.

Nên $(x - a)(x + a) - (b + y)(b - y) = 0$

$$\Leftrightarrow x - a = 0 \text{ hoặc } (x + a) - (b + y) = 0.$$

$$\bullet x - a = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow y = b \Rightarrow x^n + y^n = a^n + b^n.$$

$$\bullet (x + a) - (b + y) = 0 \text{ và } x + y = a + b$$

$$\Rightarrow x = b; y = a \Rightarrow x^n + y^n = a^n + b^n.$$

60. Cho $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2008}$ và $B = 3^{2009}$.

Chứng tỏ $2A$ và B là hai số nguyên liên tiếp.

Giai

Ta có: $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2008}$

$$2A = 3A - A = 3(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2009}) - (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2008})$$

$$2A = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2009} - 3^0 - 3^1 - 3^2 - \dots - 3^{2008} = 3^{2009} - 1.$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

61. a) Chứng tỏ rằng $A = 75(4^{2004} + 4^{2000} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ là số chia hết cho 100.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 7, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2004 - 2005)

b) Chứng minh rằng không có các số nguyên x, y, z thỏa mãn

$$4x^2 + 4x = 8y^3 - 2z^2 + 4.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2009 - 2010)

Giai**a) Cách 1.**

$$\begin{aligned}
 A &= 25(4 - 1)(4^{2004} + 4^{2003} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\
 &= 25[4(4^{2004} + 4^{2003} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2004} + 4^{2003} + \dots + 4^2 + 4 + 1)] + 25 \\
 &= 25[(4^{2005} + 4^{2004} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - (4^{2004} + 4^{2003} + \dots + 4^2 + 4 + 1)] + 25 \\
 &= 25(4^{2005} - 1) + 25 = 25 \cdot 4^{2005} - 25 + 25 \\
 &= 35 \cdot 4^{2005} = 25 \cdot 4^{2004} = 100 \cdot 4^{2004} : 100.
 \end{aligned}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned}
 A &= 75(4^{2004} + 4^{2003} + \dots + 4 + 1) + 25 \\
 &= 75[4(4^{2003} + 4^{2002} + \dots + 1) + 1] + 25 \\
 &= 300(4^{2003} + 4^{2002} + \dots + 1) + 75 + 25 \\
 &= 100[4(4^{2003} + 4^{2002} + \dots + 1) + 1] : 100
 \end{aligned}$$

b) Ta có $2x^2 \mid 4$, vì $4x^4 \mid 4$, $4x \mid 4$, $8y^3 \mid 4$, $4 \mid 4$ $\Rightarrow z \mid 2$. Khi đó, ta có $[4x(x+1) - 8y^3 + 2z^2]$ chia hết cho 8

Mà 4 không chia hết cho 8. Suy ra điều cần chứng minh.

62. Tìm n biết $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = 3^5$.

(Đề thi giải I&A Quý Đôn Toán lớp 7, báo Khan Quang Đô, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2006 – 2007)

Giai

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = 243 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = 3^5 \Leftrightarrow 3^{1-2n} = 3^5 \Leftrightarrow 1-2n = 5 \\
 &\Leftrightarrow 2n = -4 \Leftrightarrow n = -2.
 \end{aligned}$$

88. TÍ LỆ THỨC**A/ KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CÁN NHỎ****1. Định nghĩa**Tí lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.**2. Các tính chất****Tính chất 1 :** (tính chất cơ bản của tí lệ thức)Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$.**Tính chất 2 :** Nếu $ad = bc$ và $a, b, c, d \neq 0$ thì ta có các tí lệ thức

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} ; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

B/ BÀI TẬP

III BÀI TẬP CƠ BẢN

63. Thay tỉ số giữa các số hữu tỉ bằng tỉ số giữa các số nguyên.

$$a) -7,5 : 2,75 \quad b) 2\frac{1}{3} : \frac{6}{5} \quad c) \frac{-4}{9} : 1,5.$$

Giải

$$a) -7,5 : 2,75 = \frac{-30}{11}; \quad b) 2\frac{1}{3} : \frac{6}{5} = \frac{5}{3}; \quad c) \frac{-4}{9} : 1,5 = \frac{-8}{27}.$$

64. Các tỉ số sau có lập thành một tỉ lệ thức không?

$$a) \frac{3}{8} : \frac{5}{2} \text{ và } \frac{1}{10} : \frac{2}{3} \quad b) -5\frac{1}{2} : 22 \text{ và } -2,25 : 10$$

Giải

$$a) \frac{3}{8} : \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 5} = \frac{3}{20}; \quad \frac{1}{10} : \frac{2}{3} = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{20}$$

Hai tỉ số này bằng nhau nên ta có tỉ lệ thức: $\frac{3}{8} : \frac{5}{2} = \frac{1}{10} : \frac{2}{3}$.

$$b) -5\frac{1}{2} : 22 = -5,5 : 22 = -0,25$$

$$-2,25 : 10 = 0,225.$$

Hai tỉ số này không bằng nhau nên chúng không lập thành một tỉ lệ thức.

65. Cho tỉ lệ thức $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $xy = 24$. Tìm x và y.

Giải

Cách 1.

$$\text{Đặt } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k.$$

$$\text{Suy ra } x = 2k, y = 3k.$$

$$\text{Từ } xy = 24 \text{ ta có } (2k)(3k) = 24 \Leftrightarrow 6k^2 = 24 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

• Nếu $k = 2$ thì $x = 2k = 4$ và $y = 3k = 6$.

• Nếu $k = -2$ thì $x = 2k = -4$ và $y = 3k = -6$.

Cách 2.

$$\text{Ta có: } \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$$

$$\text{nên } \frac{x^2}{4} = \frac{xy}{6} = \frac{24}{6} = 4. \text{ Do đó } x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4.$$

$$\text{Nếu } x = 4 \text{ thì } y = \frac{4}{2} \cdot 3 = 6.$$

$$\text{Nếu } x = -4 \text{ thì } y = \frac{-4}{2} \cdot 3 = -6.$$

66. Chứng minh rằng từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (với $b + d \neq 0$) ta suy ra được

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Giai

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ad + ab = bc + ab$$

$$\Rightarrow ad + b = bc + a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

67. Lập các tỉ lệ thức có được từ tỉ lệ thức sau: $\frac{-1,5}{1,8} = \frac{20}{2,4}$.

Giai

$$\frac{-15}{20} = \frac{1,8}{2,4} : \frac{2,4}{1,8} = \frac{20}{-15} : \frac{2,4}{20} = \frac{1,8}{-15}.$$

68. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Hãy suy ra tỉ lệ thức $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Giai

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ad - ab = bc - bd$$

$$\Rightarrow (a-b)d = (c-d)b \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

69. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{3c} = \frac{c}{9a}$. Chứng minh rằng $b = c$.

Giai

$$\text{Ta có: } \left(\frac{b}{3c}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{3c} \cdot \frac{c}{9a} \Rightarrow \left(\frac{b}{3c}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow \left(\frac{b}{3c}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{b}{3c} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = c.$$

70. Chứng minh rằng nếu có các số a, b, c, d thoả mãn đẳng thức.

$[ab(ab - 2cd) + c^2d^2][ab(ab - 2) + 2(ab + 1)] = 0$ thì chúng lập thành một tỉ lệ thức.

Giai

$$[ab(ab - 2cd) + c^2d^2][ab(ab - 2) + 2(ab + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2)(a^2b^2 - 2ab + 2ab + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(a^2b^2 - abcd) + (-abcd + c^2d^2)](a^2b^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(ab - cd) - cd(ab - cd) = 0 \text{ (vì } a^2b^2 + 2 > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow (ab - cd)^2 = 0 \Leftrightarrow ab - cd = 0 \Leftrightarrow ab = cd \Leftrightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{c}.$$

71. Cho 2010 số dương sao cho 4 số khác nhau bất kì trong chúng đều lập thành một tỉ lệ thức. Chứng minh rằng trong các số đã cho luôn tồn tại ít nhất 503 số bằng nhau.

Giai

Ta chứng minh 2010 số dương đã cho chỉ nhận nhiều nhất 4 giá trị khác nhau.

Thật vậy, giả sử trong các số đã cho có nhiều hơn 4 số khác nhau, và giả sử a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là 5 số khác nhau bất kì. Không mất tính tổng quát giả sử $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ (1).

Theo đầu bài có $a_1a_4 = a_2a_3$ (2).

Từ (1) và (2), không xảy ra $a_1a_2 = a_3a_4$ hoặc $a_1a_3 = a_2a_4$.

Tương tự ta có $a_1a_5 = a_2a_3$ (3). Từ (2) và (3) suy ra $a_4 = a_5$. Mâu thuẫn!

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

72. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng :

$$(a + 2c)(b + d) = (a + c)(b + 2d).$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Tp. Hà Nội, năm học 1980 - 1981)

Giai

$$\text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ad + 2bc = bc + 2ad$$

$$\Rightarrow ab + ad + 2bc + 2cd = ab + 2ad + bc + 2cd$$

$$\Rightarrow a(b + d) + 2c(b + d) = a(b + 2d) + c(b + 2d)$$

$$\Rightarrow (a + 2c)(b + d) = (a + c)(b + 2d).$$

73. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng : $\frac{a^{1994} + c^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = \frac{(a + c)^{1994}}{(b + d)^{1994}}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, trường Colette, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 1994 - 1995)

Giai

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb ; c = kd$.

$$\text{Ta có : } \frac{a^{1994} + c^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = \frac{(kb)^{1994} + (kd)^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = \frac{k^{1994}b^{1994} + k^{1994}d^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}}$$

$$= \frac{k^{1994}(b^{1994} + d^{1994})}{b^{1994} + d^{1994}} = k^{1994}$$

$$\text{và } \frac{(a + c)^{1994}}{(b + d)^{1994}} = \frac{(kb + kd)^{1994}}{(b + d)^{1994}} = \frac{[k(b + d)]^{1994}}{(b + d)^{1994}} = \frac{k^{1994}(b + d)^{1994}}{(b + d)^{1994}} = k^{1994}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^{1994} + c^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = \frac{(a + c)^{1994}}{(b + d)^{1994}}.$$

87. TÍNH CHẤT CỦA DÀY TỈ SỐ BẰNG NHAU

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỚ

- Từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ta suy ra

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$$

(giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

- Cách:** Khi có dãy $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$, ta nói các số a, b, c chia tỉ lệ với các số m, n, p và cùng viết $a:b:c = m:n:p$.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

74. Tìm x và y biết $\frac{x}{10} = \frac{y}{8}$ và $x + y = 54$.

Giai

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{8} \text{ và } x + y = 54 \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{8} = \frac{x+y}{10+8} = \frac{54}{18} = 3.$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{10} = 3 \Rightarrow x = 3.10 = 30; \frac{y}{8} = 3 \Rightarrow y = 3.8 = 24.$$

75. Tìm x, y, z biết $2x = 3y = 5z$ và $x + y - z = 57$.

Giai

$$2x = 3y = 5z \text{ và } x + y - z = 57$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{30} \text{ và } x + y - z = 57$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{x+y-z}{15+10-6} = \frac{57}{19} = 3.$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{15} = 3 \Rightarrow x = 3.15 = 45; \frac{y}{10} = 3 \Rightarrow y = 3.10 = 30;$$

$$\frac{z}{6} = 3 \Rightarrow z = 3.6 = 18.$$

76. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng tỏ rằng :

a) $\frac{a}{b} = \frac{3a+2c}{3b+2d}$ ($3b+2d \neq 0$)

b) $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ac}{bd}$.

Giai

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3a}{3b} = \frac{2c}{2d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3a+2c}{3b+2d}$.

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ac}{bd}$.

77. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a + b + c \neq 0$. Chứng tỏ rằng $a = b = c$.

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a = b = c.$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

78. Tìm x, y, z biết :

a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $2x + y - z = 81$.

b) $5x = 2y, 3y = 5z$ và $x + y + z = -350$.

Giải

a) $x = 45; y = 27; z = 36$; b) $x = -70; y = -175; z = -105$.

79. Tìm x , biết $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{16} = \frac{1+9y}{4x}$.

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{16} = \frac{1+9y}{4x}$$

$$\rightarrow \frac{1+3y}{12} = \frac{1+9y}{4x} = \frac{1+3y+1+9y}{12+4x} = \frac{2+12y}{12+4x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+6y}{16} = \frac{2(1+6y)}{12+4x}.$$

Do đó $16 = \frac{12+4x}{2}$. Từ đó ta có $x = 5$.

80. Cho bốn số a_1, a_2, a_3, a_4 khác 0 thoả mãn $a_2^2 = a_1.a_3$, $a_3^2 = a_2.a_4$ và $a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 \neq 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} = \frac{a_1}{a_4}$.

Giải

$$a_2^2 = a_1.a_3 \Rightarrow \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_1}{a_2}; a_3^2 = a_2.a_4 \Rightarrow \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_2}{a_3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{a_1}{a_2} &= \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 = \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^3 \\ &\Rightarrow \frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = \frac{a_3^3}{a_4^3} \Rightarrow \frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3}. \end{aligned}$$

81. Tìm x , biết $x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, các tỉ số đều có nghĩa.

Giải

• Nếu $a + b + c = 0$ thì $b + c = -a; c + a = -b; a + b = -c$.

$$\text{Ta có : } x = \frac{a}{-a} = \frac{b}{-b} = \frac{c}{-c} = -1$$

• Nếu $a + b + c \neq 0$

$$\text{Ta có : } x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a+b+c}{b+c+c+a+a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}.$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

82. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ thì $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận Tân Bình, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2001 - 2002)

Giai

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 1.$$

83. Độ dài ba cạnh của tam giác tỉ lệ với $2 : 3 : 4$. Ba chiều cao tương ứng với ba cạnh đó tỉ lệ với ba số nào?

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận 1, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2004 - 2005)

Giai

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là a, b, c ba chiều cao tương ứng là x, y, z , diện tích của tam giác đó là S .

$$\text{Ta có : } a = \frac{2S}{x}, b = \frac{2S}{y}, c = \frac{2S}{z}.$$

$$\text{Do đó, từ } \frac{a}{2} : \frac{b}{3} : \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{2S}{x} : \frac{2S}{y} : \frac{2S}{z} \Rightarrow \frac{1}{2x} : \frac{1}{3y} : \frac{1}{4z} \Rightarrow \frac{x}{6} : \frac{y}{4} : \frac{z}{3}.$$

Vậy ba chiều cao tương ứng tỉ lệ với $6 : 4 : 3$.

84. a) Cho ba số x, y, z thoả mãn $\frac{x}{1998} = \frac{y}{1999} = \frac{z}{2000}$.

Chứng minh rằng : $(x - z)^3 = 8(x - y)^2(y - z)$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận 6, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 1998 - 1999)

b) Chứng minh rằng nếu $2(x + y) = 5(y + z) = 3(z + x)$ thì $\frac{x - y}{4} = \frac{y - z}{5}$.

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, báo Khán Quang Đô, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011)

Giải

a) $\frac{x}{1998} = \frac{y}{1999} = \frac{z}{2000}$

$$\Rightarrow \frac{x-z}{1998-2000} = \frac{x-y}{1998-1999} = \frac{y-z}{1999-2000}$$

$$\Rightarrow \frac{x-z}{-2} = \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1} \Rightarrow \left(\frac{x-z}{-2}\right)^3 = \left(\frac{x-y}{-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{y-z}{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(x-z)^3}{(-2)^3} = \frac{(x-y)^2}{(-1)^2} \cdot \frac{(y-z)}{-1} \Rightarrow (x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z).$$

b) Ta có $\frac{x+y}{3} = \frac{z+x}{2} = \frac{x+y+z-x}{3-2} = y-z$

$$\frac{y+z}{3} = \frac{z+x}{5} = \frac{-y-z+z+x}{-3+5} = \frac{x-y}{2}$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{z+x}{5} \Rightarrow x-y = \frac{2(z+x)}{5} \Rightarrow \frac{x-y}{4} = \frac{z+x}{10} \quad (1)$$

$$\frac{z+x}{2} = y-z \Rightarrow \frac{y-z}{5} = \frac{z+x}{10} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$

88. SỐ THẬP PHÂN MŨU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN. LÀM TRÒN SỐ

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NẮNG CẨN NHỚ

1. Số thập phân hữu hạn. Số thập phân vô hạn tuần hoàn

- Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.
 - Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.
 - Mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.
- Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ.

2. Quy ước làm tròn số

- Trường hợp 1 :* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

- **Trường hợp 2 :** Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

B/ BÀI TẬP**■ BÀI TẬP CƠ BẢN**

85. Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn :

$$\frac{17}{20} ; \frac{-7}{8} ; \frac{-24}{125} ; \frac{31}{40} ; \frac{2}{15} ; \frac{-13}{11} .$$

Giải

$$\frac{170}{20} = 8,5 ; \frac{-7}{8} = -0,875 ; \frac{-24}{125} = -0,192 ;$$

$$\frac{31}{40} = 0,775 ; \frac{2}{15} = 0,1(3) ; \frac{-13}{11} = 1,(18) .$$

86. Viết các số thập phân hữu hạn sau đây dưới dạng phân số tối giản
12,85 ; -0,26 ; 0,136 ; -1,4.

Giải

$$12,85 = \frac{1285}{100} = \frac{257}{20} ; -0,26 = \frac{-26}{100} = \frac{-13}{50} ;$$

$$0,136 = \frac{136}{1000} = \frac{17}{125} ; -1,4 = \frac{-14}{10} = \frac{-7}{5} .$$

87. Viết các phân số $\frac{1}{9} ; \frac{1}{999}$ dưới dạng số thập phân.

Giải

$$\frac{1}{9} = 0,(1) ; \frac{1}{99} = 0,(01) ; \frac{1}{999} = 0,(001) .$$

88. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số tối giản : 0,(4) ; -0,(18) ; 1,(3) ; 0,(21).

Giải

$$0,(4) = \frac{4}{9} ; -0,(18) = \frac{-18}{99} = \frac{-2}{11} ; 1,(3) = 1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3} ; 0,(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33} .$$

89. Làm tròn các số sau đến hàng chục :

$$188\,247 ; 265\,438 ; 5\,924\,831 ; 5495.$$

Giải

$$188250 ; 265440 ; 5924830 ; 5500.$$

90. Làm tròn các số sau đến hàng trăm :

$$92\,428 ; 5495 ; 122\,849 ; 9\,924\,628.$$

Giải

$$92400 ; 6000 ; 122800 ; 992460.$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

91. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:
 $0,1(3); 0,3(18); -5,1(6)$.

Giai

$$0,1(3) = 1,(3) \cdot \frac{1}{10} = (1 + \frac{3}{9}) \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{15}$$

$$0,3(18) = 3,(18) \cdot \frac{1}{10} = (3 + \frac{18}{99}) \cdot \frac{1}{10} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$$

$$-5,1(6) = -51,(6) \cdot \frac{1}{10} = -51\frac{6}{9} \cdot \frac{1}{10} = -5\frac{1}{6}.$$

92. So sánh $0,(31)$ và $0,3(13)$.

Giai

$$0,(31) = \frac{31}{99}; 0,3(13) = 3,(13) \cdot \frac{1}{10} = \left(3 + \frac{13}{99}\right) \cdot \frac{1}{10} = \frac{310}{99} \cdot \frac{1}{10} = \frac{31}{99}.$$

Vậy $0,(31) = 0,3(13)$.

93. So sánh $0,(25)$ và $0,2(52)$

Giai

$$0,(25) = 0,2(52).$$

94. Tính $0,(3) + 0,1(3) - 4\frac{1}{3}$.

Giai

$$0,(3) + 0,1(3) - 4\frac{1}{3} = \frac{3}{9} + 1,(3) \cdot \frac{1}{10} - \frac{13}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(1 + \frac{3}{9}\right) \frac{1}{10} - \frac{13}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} - \frac{13}{3} = \frac{-58}{15}.$$

95. Tìm x biết: $1,(18).x = 26$

Giai

$$1,(18).x = 26 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{18}{99}\right).x = 26 \Leftrightarrow x = 22.$$

96. Tìm x biết: $0,(17).0,(3) = 2,(3).x$.

Giai

$$0,(17).0,(3) = 2,(3).x \Leftrightarrow \frac{17}{99} \cdot \frac{3}{9} = \left(2 + \frac{3}{9}\right)x \Leftrightarrow x = \frac{17}{693}.$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

97. Chứng tỏ rằng $\frac{39n+124}{13n}$ không thể viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 7, trường THCS Colette, Quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1994 - 1995)

Giải

$$39n : 13 : 124 / 13 \Rightarrow 39n + 124 / 13 \text{ và } 13n : 13.$$

Do vậy $\frac{39n + 124}{13n}$ rút gọn đến khi là phân số tối giản, mẫu vẫn chưa thừa số 13.

8. SỐ VÔ TỈ. KHÁI NIỆM VỀ CÂN BẬC HAI. SỐ THỰC

A/ KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẨM NHỚ

1. Số vô tỉ

Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Tập hợp các số vô tỉ được kí hiệu là \mathbb{I} .

2. Khái niệm về căn bậc hai

Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

Số dương a có đúng hai căn bậc hai là \sqrt{a} và $-\sqrt{a}$.

Số 0 chỉ có một căn bậc hai là số 0.

3. Số thực

Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là số thực.

Tập hợp các số thực được kí hiệu là \mathbb{R} .

Với a, b > 0 ta có : nếu a > b thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

4. Trục số thực

- Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm trên trục số.

- Mỗi điểm trên trục số biểu diễn một số thực.

Chú ý: Trong tập hợp các số thực cùng có các phép toán với các tính chất tương tự như các phép toán trong tập hợp các số hữu tỉ.

B/ BÀI TẬP

1) BÀI TẬP CƠ BẢN

98. Viết các căn bậc hai của 7 ; 36 ; 121.

Giải

Các căn bậc hai của 7 là $\sqrt{7}$ và $-\sqrt{7}$.

Các căn bậc hai của 36 là $\sqrt{36} = 6$ và $-\sqrt{36} = -6$.

Các căn bậc hai của 121 là $\sqrt{121} = 11$ và $-\sqrt{121} = -11$.

99. Tính : $\sqrt{121}$; $\sqrt{(-3)^2}$; $-\sqrt{81}$.

Giải

$$\sqrt{121} = 11 ; \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 ; -\sqrt{81} = -9.$$

100. Tính :

a) $\sqrt{49} - \sqrt{25} + \sqrt{(-1)^2}$.

b) $\sqrt{36} + \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{16}$.

Giải

a) $\sqrt{49} = \sqrt{25} + \sqrt{(-1)^2} = 7 - 5 + 1 = 3.$

b) $\sqrt{36} + \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{16} = 6 + 3 - 4 = 5.$

101. Điền các dấu \in , \notin , \subset thích hợp vào ô trống :

$25 \square Q$

$2009 \square R$

$-53 \square I$

$N \square R$

$I \square R$

$Q \square R$

Giải

$25 \boxed{\in} Q$

$2009 \boxed{\in} R$

$-53 \boxed{\in} I$

$N \boxed{\subset} R$

$I \boxed{\subset} R$

$Q \boxed{\subset} R$

102. Tìm $R \cap Q ; Q \cap I.$

Giải

$R \cap Q = Q ; Q \cap I = \emptyset.$

BÀI TẬP NÂNG CAO

103. Tính :

a) $\sqrt{25} - \sqrt{16} + \sqrt{1} ;$

b) $\sqrt{\frac{14}{9}} + \sqrt{\frac{36}{16}} - \sqrt{9} ;$

c) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{(-5)^2} - \sqrt{(-4)^2}.$

Giải

a) $\sqrt{25} - \sqrt{16} + \sqrt{1} = 5 - 4 + 1 = 2.$

b) $\sqrt{\frac{14}{9}} + \sqrt{\frac{36}{16}} - \sqrt{9} = \frac{2}{3} + \frac{6}{4} - 3 = \frac{-5}{6}.$

c) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{(-5)^2} - \sqrt{(-4)^2} = 3 + 5 - 4 = 4.$

104. Tìm x, biết : $\sqrt{x-3} = 5$

Giải

$\sqrt{x-3} = 5$ mà $5 > 0.$

Do đó $x - 3 = 5^2 \Leftrightarrow x = 25 + 3 \Leftrightarrow x = 28.$

105. Chứng tỏ rằng : $\sqrt{1+2+3+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1} = n.$

Giải

$$\sqrt{1+2+3+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1}$$

$$= \sqrt{2[(1+2+3+\dots+(n-1)+n)]-n} = \sqrt{2 \cdot \frac{(n+1)n}{2} - n} = \sqrt{n(n+1)-n}$$

$$= \sqrt{n^2+n-n} = \sqrt{n^2} = n.$$

106. So sánh

a) 4 và $\sqrt{15} ;$

b) $\sqrt{25}$ và 6.

Giai

a) $16 > 15 \Rightarrow \sqrt{16} > \sqrt{15} \Rightarrow 4 > \sqrt{15}$.

b) $35 < 36 \Rightarrow \sqrt{35} < \sqrt{36} \Rightarrow \sqrt{35} < 6$.

107. So sánh $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ và $\sqrt{9+16}$.

Giai

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 ; \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

108. So sánh $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{20} + \sqrt{12}$ và 12.

Giai

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{20} + \sqrt{42} &< \sqrt{2,25} + \sqrt{6,25} + \sqrt{20,25} + \sqrt{12,25} \\ &= 1,5 + 2,5 + 4,5 + 3,5 = 12. \end{aligned}$$

109. Cho $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{I}$. Chứng tỏ rằng $a+b$ là số vô tỉ.

Giai

Giả sử $a+b = x$ là một số hữu tỉ

$$\text{Ta có : } b = x - a$$

Mà $a \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}$ nên $b \in \mathbb{Q}$ (trái với đề bài là $b \in \mathbb{I}$).

Vậy $a+b$ không phải là một số hữu tỉ hay $a+b$ là một số vô tỉ.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

110. a) Có hai số vô tỉ nào mà tích là một số hữu tỉ hay không ?

b) Có hai số vô ti dương nào mà tổng là một số hữu ti hay không ?

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, báo Khán Quang Đỏ, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2007 - 2008)

c) So sánh $\sqrt{8} + \sqrt{15}$ với $\sqrt{65} - 1$

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 9, báo Khán Quang Đỏ, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011)

Giai

a) C6. Chứng minh $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2 ; \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$.

b) C6. Chứng minh $\sqrt{2} + (4 - \sqrt{2}) = 4$.

c) $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 8 - 1 = \sqrt{64} - 1 < \sqrt{65} - 1$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Chứng minh rằng $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{49.50} = \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{50}$.

Giai

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{49.50} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{50} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{25} \right) = \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{50}
 \end{aligned}$$

2. Tìm x , biết :

a) $\left| x + \frac{2}{7} \right| = 1\frac{1}{2}$

b) $x^2 - \frac{3}{5}|x| = 0$

c) $|x + 0,8| + |x + 5,2| + |x + 9,7| = 4x$

d) $|x + 2,5| + |x + 6,5| + |x + 9,5| = 7.$

Giải

a) $x = \frac{17}{14}; x = -\frac{25}{14}.$

b) $x^2 - \frac{3}{5}|x| = 0$

$$|x|(|x| - \frac{3}{5}) = 0.$$

c) Vì $|x + 0,8| \geq 0; |x + 5,2| \geq 0; |x + 9,7| \geq 0$

nên $4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x + 0,8 > 0; x + 5,2 > 0; x + 9,7 > 0.$

Ta có : $x + 0,8 + x + 5,2 + x + 9,7 = 4x$

$$\Leftrightarrow 3x + 15,7 = 4x \Leftrightarrow x = 15,7 \text{ (thích hợp).}$$

d) Ta có : $|x + 2,5| \geq -x - 2,5;$

$$|x + 6,5| \geq 0$$

$$|x + 9,5| \geq x + 9,5$$

nên $|x + 2,5| + |x + 6,5| + |x + 9,5| \geq 7.$

Dấu " $=$ " xảy ra nên $-x - 2,5 \geq 0; x + 6,5 = 0; x + 9,5 \geq 0 \Leftrightarrow x = -6,5.$

3. Tìm $x, y, z \in \mathbb{Q}$ biết :

a) $\left| x + \frac{17}{3} \right| + \left| y - \frac{2000}{1999} \right| + |z - 2005| = 0$

b) $\left| x - \frac{5}{2} \right| + \left| y + \frac{4}{3} \right| + \left| z + \frac{7}{4} \right| \leq 0.$

Giải

a) $x = -\frac{17}{3}; y = \frac{2000}{1999}; z = 2005.$ b) $x = \frac{5}{2}; y = -\frac{4}{3}; z = -\frac{7}{4}.$

4. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau :

a) $A = \left| 2x - \frac{1}{5} \right| + 173$

b) $B = \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{3} \right| + \left| x + \frac{1}{4} \right|.$

Giải

a) $A = 173$ khi $x = \frac{1}{20}.$

b) $B = \frac{1}{4}$ khi $x = -\frac{1}{3}.$

5. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau :

$$\text{a)} -2\left|x - \frac{3}{4}\right| - \left|y + \frac{3}{4}\right| + \frac{5}{6} \quad \text{b)} -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{7}.$$

Giải

a) Giá trị lớn nhất của biểu thức bằng $\frac{5}{6}$.

b) Giá trị lớn nhất của biểu thức bằng $\frac{5}{7}$.

6. Hãy sắp xếp các số hữu tỉ a, b, c theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

$$a = 5^{64}; b = 3^{126}; c = 2^{168}.$$

Giải

$$a = 5^{64} = (5^2)^{32} = 25^{32}; b = 3^{126} = (3^3)^{42} = 27^{42}; c = 2^{168} = (2^4)^{42} = 16^{42}.$$

7. So sánh :

a) $\frac{2^{2010} + 1}{2^{2007} + 1}$ và $\frac{2^{2012} + 1}{2^{2009} + 1}$

b) $\frac{3^{123} + 1}{3^{126} + 1}$ và $\frac{3^{122}}{3^{124} + 1}$

c) $2^{20} + 3^{20} + 4^{20}$ và $3 \cdot 24^{10}$.

Giải

$$\text{a)} \frac{2^{2010} + 1}{2^{2007} + 1} = \frac{2^{2010} + 2^3 - 7}{2^{2007} + 1} = \frac{2^3(2^{2007} + 1) - 7}{2^{2007} + 1} = 2^3 - \frac{7}{2^{2007} + 1}$$

$$\frac{2^{2012} + 1}{2^{2009} + 1} = \frac{2^{2012} + 2^3 - 7}{2^{2009} + 1} = \frac{2^3(2^{2009} + 1) - 7}{2^{2009} + 1} = 2^3 - \frac{7}{2^{2009} + 1}.$$

$$\text{b)} \frac{3^{123} + 1}{3^{125} + 1} = \frac{3^{123} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{8}{9}}{3^{125} + 1} = \frac{\frac{1}{3^2}(3^{125} + 1) + \frac{8}{9}}{3^{125} + 1} = \frac{1}{3^2} + \frac{\frac{8}{9}}{3^{125} + 1}$$

$$\text{Tương tự } \frac{3^{122} + 1}{3^{124} + 1} = \frac{1}{3^2} + \frac{\frac{8}{9}}{3^{124} + 1}.$$

$$\text{c)} 4^{20} = (4^3)^{10} = 64^{10} > 48^{10} = (2 \cdot 24)^{10} = 2^{10} \cdot 24^{10} > 3 \cdot 24^{10}.$$

8. Chứng minh rằng :

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4019}{2009^2 \cdot 2010^2} < 1.$$

Giải

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4019}{2009^2 \cdot 2010^2}$$

$$= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2010^2 - 2009^2}{2009^2 \cdot 2010^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2009^2} - \frac{1}{2010^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2010^2} < 1.$$

9. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{ac}{bd} = \frac{2009a^2 + 2010c^2}{2009b^2 + 2010d^2}$.

Giải

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{2009a^2}{2009b^2} = \frac{2010c^2}{2010d^2} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{2009a^2 + 2010c^2}{2009b^2 + 2010d^2}.$$

10. Cho tỉ lệ thức $\frac{a-b+c}{-a-b+c} = \frac{a+b+c}{-a+b+c}$, $b \neq 0$. Chứng minh $a = 0$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{a-b+c}{-a-b+c} = \frac{a+b+c}{-a+b+c} &\Rightarrow \frac{a-b+c}{-a-b+c} - 1 = \frac{a+b+c}{-a+b+c} - 1 \\ &\Rightarrow \frac{2a}{-a-b+c} = \frac{2a}{-a+b+c}. \end{aligned}$$

Nếu $a = 0$, ta có $-a-b+c = -a+b+c$

Suy ra $-b = b$ nên $b = 0$.

11. Cho biết $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$.

$$\text{Tính giá trị của } M = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{z+y}.$$

Giải

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+z+t} + 1 &= \frac{y}{z+y+x} + 1 = \frac{z}{t+x+y} + 1 = \frac{t}{x+y+z} + 1 \\ \Rightarrow \frac{x+y+z+t}{y+z+t} &= \frac{x+y+z+t}{z+t+x} = \frac{x+y+z+t}{t+x+y} = \frac{x+y+z+t}{x+y+z}. \end{aligned}$$

• Nếu $x+y+z+t = 0$ thì $M = -4$.

• Nếu $x+y+z+t \neq 0$ thì $x = y = z = t$ nên $M = 4$.

12. Ba tổ công nhân có mức năng suất tỉ lệ với $5 : 4 : 3$. Tổ Một tăng năng suất 10%, tổ Hai tăng năng suất 20%, tổ Ba tăng năng suất 10%. Do đó trong cùng một thời gian tổ Một làm được nhiều sản phẩm hơn tổ Hai là 14 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ đã làm trong thời gian đó.

Giải

Gọi số sản phẩm mà các tổ Một, Hai, Ba đã làm lần lượt là x, y, z (sản phẩm).

Ta có: $x : y : z = (5.1,1) : (4.1,2) : (3.1,1)$ và $x - y = 14$.

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

81. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỚ

- Định nghĩa:** Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$, với k là hằng số khác 0, thì y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k .
- Tính chất:** Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì:
 - Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi.
 - Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

B/ BÀI TẬP

C/ BÀI TẬP CƠ BẢN

- Cho biết y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = -\frac{3}{5}$. Hỏi x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ nào?

Giải

x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $-\frac{5}{3}$.

- Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi $x = 12$ thì $y = 8$.
 - Tìm hệ số tỉ lệ k của y đối với x .
 - Hãy biểu diễn y theo x .
 - Tính giá trị của y khi $x = 10, x = 6$.

Giải

a) Hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau nên ta có $y = kx$

$$\text{Khi } x = 12 \text{ thì } y = 8 \text{ nên } 8 = k \cdot 12 \Rightarrow k = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

b) $y = \frac{2}{3}x$.

c) Khi $x = 10$ thì $y = \frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{20}{3}$.

$$\text{Khi } x = 6 \text{ thì } y = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4.$$

- Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

x	-2	-1	3	4	8
y			1,5		

Giai

Ta có: x, y tỉ lệ nên $x = ky$

Từ cột $x = 3; y = 1,5$. Ta suy ra $k = 2$.

x	-2	-1	3	4	8
y	-1	-0,5	1,5	2	4

4. Các đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau hay không nếu :

a)

x	-4	-1	2	3	5
y	-20	-5	10	15	25

b)

x	-2	-1	3	5	7
y	14	-7	21	40	40

Giai

a) Ta có : $\frac{-20}{-4} = \frac{-5}{-1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{25}{5}$

Vậy các đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau

b) Ta có : $\frac{14}{-2} \neq \frac{-7}{-1}$

Vậy các đại lượng x và y không tỉ lệ thuận với nhau.

5. Hai thanh chì có thể tích là 18cm^3 và 10cm^3 . Hỏi mỗi thanh nặng bao nhiêu gam, biết rằng thanh thứ hai nhẹ hơn thanh thứ nhất 100g .

Giai

Gọi khối lượng hai thanh chì tương ứng là m_1 gam và m_2 gam. Ta có $m_1 - m_2 = 100$.

Khối lượng và thể tích là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau nên ta có $\frac{m_1}{18} = \frac{m_2}{10}$.

Theo tính chất dây tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{m_1}{18} = \frac{m_2}{10} = \frac{m_1 - m_2}{18 - 10} = \frac{100}{8} = 12,5.$$

Từ đó suy ra $m_1 = 225$, $m_2 = 125$.

6. Cho tam giác ABC có số đo ba góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với 1, 3, 5. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Giai

Ta có : $\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{5}$; ΔABC có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{1+3+5} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

Từ đó ta có : $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 100^\circ$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

7. Cho biết y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ a, x tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ b. Hỏi y và z có tỉ lệ thuận không? Nếu có thì hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

Giải

y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ a $\Rightarrow y = ax$.

x tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ b $\Rightarrow x = bz$

Do đó $y = ax = a \cdot bz = (ab)z$.

Vậy y tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ ab.

8. Biết rằng y_1 tỉ lệ thuận với x_1 theo hệ số tỉ lệ a ($a \neq 0$), y_2 tỉ lệ thuận với x_2 theo hệ số tỉ lệ a. Hỏi $y_1 + y_2$ có tỉ lệ thuận với $x_1 + x_2$ không? Nếu có thì hệ số tỉ lệ là bao nhiêu?

Giải

y_1 tỉ lệ thuận với x_1 theo hệ số tỉ lệ a $\Rightarrow y_1 = ax_1$.

y_2 tỉ lệ thuận với x_2 theo hệ số tỉ lệ a $\Rightarrow y_2 = ax_2$.

Do đó $y_1 + y_2 = ax_1 + ax_2 = a(x_1 + x_2)$.

Vậy $y_1 + y_2$ tỉ lệ thuận với $x_1 + x_2$ theo hệ số tỉ lệ a.

9. Biết các cạnh của tam giác tỉ lệ với 3, 6, 7 và chu vi của nó bằng 48cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác đó.

Giải

Gọi a(cm), b(cm), c(cm) lần lượt là độ dài ba cạnh của tam giác.

Ta có: $a + b + c = 48$.

Vì a, b, c tỉ lệ với 3, 6, 7 $\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7}$.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{3+6+7} = \frac{48}{16} = 3.$$

Từ đó ta có a = 9; b = 18; c = 21.

10. Chia số 322 thành 3 phần sao cho phần thứ nhất với phần thứ hai tỉ lệ với 5 và 2, phần thứ nhất với phần thứ ba tỉ lệ với 3 và 5.

Giải

Gọi giá trị ba phần: phần thứ nhất, phần thứ hai, phần thứ ba lần lượt là a, b, c.

Ta có: $a + b + c = 322$; $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} : \frac{a}{3} = \frac{c}{5}$.

Từ $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} : \frac{a}{3} = \frac{c}{5}$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{3} : \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{c}{5} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{b}{6} = \frac{c}{25}.$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{6} = \frac{c}{25} = \frac{a+b+c}{15+6+25} = \frac{322}{46} = 7.$$

Từ đó ta có $a = 105$; $b = 42$; $c = 175$.

11. Độ dài ba cạnh của một tam giác tỉ lệ với 2, 3, 5. Ba chiều cao tương ứng với ba cạnh đó tỉ lệ với ba số nào ?

Giai

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là a , b , c và ba chiều cao tương ứng là x , y , z , diện tích tam giác là S

$$\text{Do đó } a = \frac{2S}{x}; b = \frac{2S}{y}; c = \frac{2S}{z}.$$

$$\begin{aligned}\text{Theo đề bài, ta có } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} &\Rightarrow \frac{2S}{2x} = \frac{2S}{3y} = \frac{2S}{5z} \Rightarrow 2x = 3y = 5z \\ &\Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{30} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}.\end{aligned}$$

Vậy ba chiều cao tương ứng tỉ lệ với 15; 10; 6.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

12. Gạo được chứa trong ba kho theo tỉ lệ $1,2 : 2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2}$. Gạo trong kho thứ hai chứa nhiều hơn trong kho thứ nhất là 43,2 tấn. Sau một tháng người ta tiêu thụ ở kho thứ nhất 40%, ở kho thứ hai 30% và ở kho thứ ba 25% số gạo có trong mỗi kho. Hỏi trong một tháng đã tiêu thụ hết bao nhiêu tấn gạo ?

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 7, TP Hà Nội, năm học 1978 - 1979)

Giai

Gọi số gạo chứa trong kho thứ nhất, kho thứ hai, kho thứ ba lần lượt là x , y , z (tấn).

$$\text{Theo điều kiện ta có } \frac{x}{1,3} = \frac{y}{2\frac{1}{2}} = \frac{z}{1\frac{1}{2}} \text{ và } y - x = 43,2.$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{1,3} = \frac{y}{2\frac{1}{2}} = \frac{z}{1\frac{1}{2}} = \frac{y-x}{2\frac{1}{2}-1,3} = \frac{43,2}{1,2} = 36.$$

$$\Rightarrow x = 46,8; y = 90; z = 43,2.$$

Số tấn gạo tiêu thụ ở kho thứ nhất là : $46,8 \cdot 40\% = 18,72$ (tấn).

Số tấn gạo tiêu thụ ở kho thứ hai là : $90 \cdot 30\% = 27$ (tấn).

Số tấn gạo tiêu thụ ở kho thứ ba là : $43,2 \cdot 25\% = 10,8$ (tấn).

13. Tìm hai số khác 0 biết rằng tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ với $4 : 1 : 45$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 7, trường THCS Colette, Quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1995 - 1996).

Giai

Gọi hai số cần tìm là x, y ($x \neq 0, y \neq 0$ và $x > y$).

$$\text{Ta có: } \frac{x+y}{4} = \frac{x-y}{1} = \frac{xy}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+x-y}{4+1} = \frac{x+y-x+y}{4-1} = \frac{xy}{45} \Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{2y}{3} = \frac{xy}{45}$$

$$\Rightarrow 18x = 30y = xy \Rightarrow x = 30; y = 18.$$

14. Tìm một số có ba chữ số, biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó tỉ lệ với ba số 1, 2 và 3.

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, báo Khán Quang Đỏ, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2008 - 2009).

Giai

Gọi ba chữ số của số cần tìm là a, b, c

$$(a, b, c \in \mathbb{N}; a \neq 0; a, b, c \leq 9).$$

$$\text{Theo điều bài ta có } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{a+b+c}{1+2+3} \Rightarrow a = \frac{a+b+c}{6}.$$

$$\text{Do vậy } (a+b+c) : 6 \text{ (1).}$$

$$\text{Mặt khác số đó chia hết cho 18 nên số đó chia hết cho 9} \Rightarrow a+b+c : 9 \text{ (2).}$$

$$\text{Mà } 0 < a+b+c \leq 27 \text{ (3).}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có } a+b+c = 18.$$

$$\text{Ta có } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9.$$

Số cần tìm chia hết cho 18 nên chữ số hàng đơn vị bằng 6.

Vậy số cần tìm là 396 hoặc 936.

B2. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỎ

1. Định nghĩa : Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức

$y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$ (a là một hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a .

2. Tính chất :

- Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau thì :

- Tích hai giá trị của chúng luôn không đổi (bằng hằng số tỉ lệ).

- Tỉ số hai giá trị bất kỳ của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

B/ BÀI TẬP**C/ BÀI TẬP CƠ BẢN**

15. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = 16$ thì $y = -5$.

- Tìm hệ số tỉ lệ.
- Hãy biểu diễn y theo x .
- Tính giá trị của y khi $x = 20$; $x = -40$.

Giải

a) Hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau nên ta có $y = \frac{a}{x}$.

$$\text{Khi } x = 16 \text{ thì } y = -5 \Rightarrow -5 = \frac{a}{16} \Rightarrow a = -80.$$

$$\text{b)} y = \frac{80}{x}.$$

$$\text{c)} \text{ Khi } x = 20 \text{ thì } y = \frac{-80}{20} = -4.$$

$$\text{Khi } x = -40 \text{ thì } y = \frac{-80}{-40} = 2$$

16. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điện số thích hợp vào ô trống :

x	-5	-3	1	2	6
y				15	

Giải

Hai đại lượng x , y tỉ lệ nghịch với nhau nên ta có $y = \frac{a}{x}$

$$\text{Từ } y = 2; x = 15$$

$$\text{Suy ra } a = 30$$

x	-5	-3	1	2	6
y	-6	-10	30	15	5

17. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = -4$ thì $y = -15$.

- Tính giá trị của x khi $y = 30$; $y = -20$; $y = -6$.
- Tính giá trị của y khi $x = 2$; $x = 10$; $x = -30$.

Giải

Hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau nên ta có $y = \frac{a}{x}$

$$\text{Khi } x = -4 \text{ thì } y = -15 \Rightarrow -15 = \frac{a}{-4} \Rightarrow a = 60.$$

$$\text{a) Khi } y = 30 \Rightarrow x = \frac{60}{30} = 2.$$

$$\text{b) Khi } x = 2 \Rightarrow y = \frac{60}{2} = 30.$$

$$\text{Khi } y = -20 \Rightarrow x = \frac{60}{-20} = -3.$$

$$\text{Khi } x = 10 \Rightarrow y = \frac{60}{10} = 6.$$

$$\text{Khi } y = -6 \Rightarrow x = \frac{60}{-6} = -10.$$

$$\text{Khi } x = -30 \Rightarrow y = \frac{60}{-30} = -2.$$

18. Ba đội máy cày có 39 máy (đều có cùng năng suất) làm việc trên ba cánh đồng có cùng diện tích. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 2 ngày, đội thứ hai trong 3 ngày và đội thứ ba trong 4 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy cày?

Giai

Với các máy cày có cùng năng suất và diện tích các cánh đồng bằng nhau thì số máy cày và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Gọi số máy ba đội lần lượt là a (máy), b (máy), c (máy).

$$\text{Ta có: } 2a = 3b = 4c \Rightarrow \frac{2a}{12} = \frac{3b}{12} = \frac{4c}{12} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3}.$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{6} : \frac{b}{4} : \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6+4+3} = \frac{39}{13} = 3$$

$$a = 18; b = 12; c = 9.$$

19. Một người đi từ A đến B hết 5 giờ. Khi về từ B về A người này đi nhanh hơn trước 2km/h nên thời gian đi ít hơn là 40 phút. Tính quãng đường AB.

Giai

Quãng đường đi và về bằng nhau nên thời gian đi và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Quãng đường AB dài là 13km

BÀI TẬP NÂNG CAO

20. Một vật chuyển động trên bốn cạnh của một hình vuông. Trên hai cạnh đầu, vật chuyển động với vận tốc 6m/giây, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4m/giây và trên cạnh thứ tư với vận tốc 2m/giây. Hỏi độ dài của cạnh hình vuông biết rằng tổng số thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 130 giây.

Giai

Gọi x, y, z, t lần lượt là thời gian (tính bằng giây) để vật chuyển động trên bốn cạnh của hình vuông.

$$\text{Ta có: } x + y + z + t = 130$$

$$6x = 6y = 4z = 2t \quad (= \text{độ dài cạnh hình vuông})$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4} = \frac{t}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4} = \frac{t}{2} = \frac{x+y+z+t}{6+6+4+2} = \frac{130}{12} = 120.$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

21. Một ôtô phải đi từ A đến B trong thời gian dự định. Sau khi đi được một nửa quãng đường thì ôtô tăng vận tốc thêm 20%, do đó đến B sớm hơn dự định 10 phút. Tính thời gian ôtô đi từ A đến B.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, TP. Hà Nội, năm học 1975 - 1976)

Giai

Gọi vận tốc, thời gian ôtô đi nửa quãng đường đầu là v_1 ; t_1 .

Gọi vận tốc, thời gian ôtô đi nửa quãng đường còn là v_2 ; t_2 .

Cùng độ dài quãng đường nên vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do đó, ta có $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}$.

Mặt khác theo đầu bài ta có $t_1 - t_2 = 10$ và $v_2 = (100\% + 20\%)v_1 = 1,2v_1$,

$$\text{hay } \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{1,2}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \frac{t_2}{t_1} &= \frac{1}{1,2}; t_1 - t_2 = 10 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_1}{1,2} = \frac{t_1 - t_2}{1,2 - 1} = \frac{10}{0,2} = 50 \\ &\Rightarrow t_2 = 50; t_1 = 60. \end{aligned}$$

Thời gian ôtô đi từ A đến B là $50 + 60 = 110$ (phút).

22. Tìm ba số tự nhiên, biết rằng BCNN của chúng là 1680, ba số này tỉ lệ nghịch với 15, 10, 6.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, trường chuyên Văn Toản huyện Đức Phổ, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 1990 - 1991)

Giai

Gọi ba số cần tìm lần lượt là a, b, c.

$$\begin{aligned} \text{Ta có BCNN}(a, b, c) &= 1680 \text{ và } \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}. \\ &\quad 15 \quad 10 \quad 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{a}{1} &= \frac{b}{1} = \frac{c}{1} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}. \\ &\quad 15 \quad 10 \quad 6 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow a = 2k, b = 3k, c = 5k.$$

BCNN(a, b, c) = 1680 mà BCNN(a, b, c) = 30k $\Rightarrow 30k = 1680 \Rightarrow k = 56$

Do vậy a = 112; b = 168; c = 280.

B3. HÀM SỐ

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CẨN NHỎ

1. Khái niệm hàm số

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

2. Chủ ý

- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.
- Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức..
- Khi y là hàm số của x ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)...$

B/ BÀI TẬP**■ BÀI TẬP CƠ BẢN**

23. Cho bảng giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y .

x	-3	-2	-1	2	4
y	-7	-5	-3	3	7

a) Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không?

b) Tính giá trị của y tại $x = -3$; $x = -1$; $x = 4$.

Giai

a) Vì mỗi giá trị của x xác định chỉ một giá trị tương ứng của y nên đại lượng y là hàm số của đại lượng x .

b) Khi $x = -3$ thì $y = -7$.

Khi $x = -1$ thì $y = -3$.

Khi $x = 4$ thì $y = 7$.

24. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$. Tính $f(-3)$; $f(0)$; $f(1)$.

Giai

$$f(-3) = (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 2 = 20.$$

$$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2.$$

$$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0.$$

25. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-5}{x}$. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số vào bảng sau :

x	-5	-2	-1	1	3
y					

Giai

x	-5	-2	-1	1	3
y	1	$\frac{5}{2}$	5	-5	$-\frac{5}{3}$

26. Cho hàm số $y = f(x) = 3x - 5$.

a) Tính $f(-2)$; $f(1)$; $f(0)$; $f(3)$.

b) Tính các giá trị của x ứng với $y = 5$; $y = 7$.

Giai

$$a) f(-2) = 3(-2) - 5 = -11.$$

$$b) y = 5 \Rightarrow 3x - 5 = 5 \Rightarrow x = \frac{10}{3}.$$

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 5 = -2.$$

$$y = 7 \Rightarrow 3x - 5 = 7 \Rightarrow x = 4.$$

$$f(0) = 3.0 - 5 = -5.$$

$$f(3) = 3.3 - 5 = 4.$$

27. Cho hàm số $y = -5x$. Tìm các giá trị của x sao cho :

a) y nhận giá trị dương

b) y nhận giá trị âm.

Giai

$$a) y > 0 \Leftrightarrow -5x > 0 \Leftrightarrow x < 0 (\text{vì } -5 < 0).$$

$$b) y < 0 \Leftrightarrow -5x < 0 \Leftrightarrow x > 0 (\text{vì } -5 < 0).$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

28. Cho hàm số $y = f(x) = 2x - 3$.

a) Tính $f(-3)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$. b) Tìm x biết $f(x) = 3$; $f(x) = 7$.

Giai

$$a) f(-3) = -9; f(-1) = -5; f(0) = -3; f\left(\frac{1}{2}\right) = -2.$$

$$b) f(x) = 3;$$

$$f(x) = 7$$

$$2x - 3 = 3$$

$$2x - 3 = 7$$

$$2x = 6$$

$$2x = 10$$

$$x = 3.$$

$$x = 5.$$

29. Cho hàm số $y = f(x) = 2x + \frac{1}{5}$. Lập bảng giá trị tương ứng của y khi $x = -2; -1; 2; 3; 6$.

Giai

x	-2	-1	2	3	6
$y = 2x + \frac{1}{5}$	$\frac{-19}{5}$	$\frac{-9}{5}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{31}{5}$	$\frac{61}{5}$

30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x - 3 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Tính $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$.

Giai

$$-2 < 0 \text{ nên } f(-2) = -(-2) - 3 = -1.$$

$$f(0) = 2.0 - 3 = -3.$$

$$1 > 0 \text{ nên } f(1) = 2.1 - 3 = -1.$$

31. Các quy tắc sau có xác định một hàm số từ \mathbb{Q} đến \mathbb{Q} không ?

a) Cho tương ứng mỗi số hữu tỉ x với số đối của nó.

b) Cho tương ứng với mỗi số hữu tỉ x là nghịch đảo của nó.

Giai

a) Quy tắc cho tương ứng mỗi số hữu tỉ x với số đối của nó là một hàm số từ \mathbb{Q} đến \mathbb{Q} vì mọi số hữu tỉ đều có duy nhất một số đối $-x$.

b) Quy tắc cho tương ứng mỗi số hữu tỉ x và nghịch đảo của nó không phải là một hàm số từ \mathbb{Q} đến \mathbb{Q} vì số 0 ∈ \mathbb{Q} không tương ứng với số nào (số 0 không có số nghịch đảo).

32. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2 + 7$. Chứng tỏ rằng $f(-x) = f(x)$.

Giải

$$\text{Ta có : } f(-x) = 3(-x)^2 + 7 = 3x^2 + 7 = f(x).$$

33. Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + x$. Chứng tỏ rằng $f(-x) = -f(x)$.

Giải

$$\text{Ta có : } f(-x) = -4(-x)^3 + (-x) = 4x^3 - x = -(-4x^3 + x) = -f(x).$$

34. Cho hàm số $f(x) = -2010x$. Chứng tỏ rằng $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Giải

$$f(a+b) = -2010(a+b) = -2010a + (-2010b);$$

$$f(a) = -2010a; f(b) = -2010b.$$

$$\text{Vậy } f(a+b) = f(a) + f(b).$$

LJ BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

35. Cho bảng

x	-3	-2		2	-1	5
y	6	4	0	-4		-10

a) Bảng này có xác định một hàm số không ? Vì sao ?

b) Nếu không ta cần thay đổi hoặc thêm bớt như thế nào để bảng ở trên là một hàm số dạng $y = ax$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1997 – 1998)

Giải

a) Không'

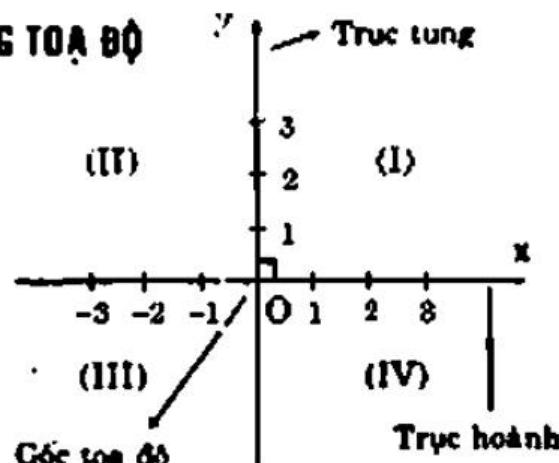
b)	x	-3	-2	0	2	-1	5
	y	6	4	0	-4	-8	-10

$$y = -2x.$$

84. MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỚ

1. Mặt phẳng tọa độ



2. Tọa độ của một điểm trong mặt phẳng tọa độ

Trên mặt phẳng tọa độ :

- Mỗi điểm M xác định một cặp số $(x_0 ; y_0)$. Ngược lại, mỗi cặp số $(x_0 ; y_0)$ xác định một điểm M.
- Cặp số $(x_0 ; y_0)$ gọi là tọa độ của điểm M, x_0 là hoành độ, y_0 là tung độ của điểm M.
- Điểm M có tọa độ $(x_0 ; y_0)$ được ký hiệu là $M(x_0 ; y_0)$.

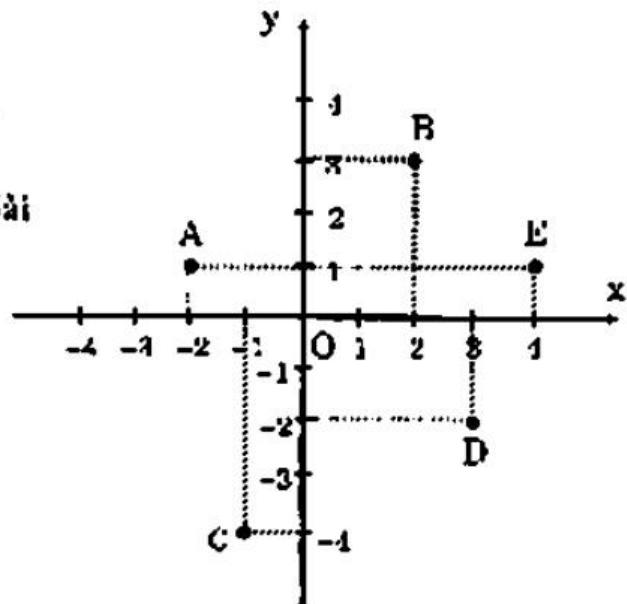
B/ BÀI TẬP

III BÀI TẬP CƠ BẢN

36. Viết tọa độ các điểm A, B, C, D, E trong hình vẽ bên dưới.

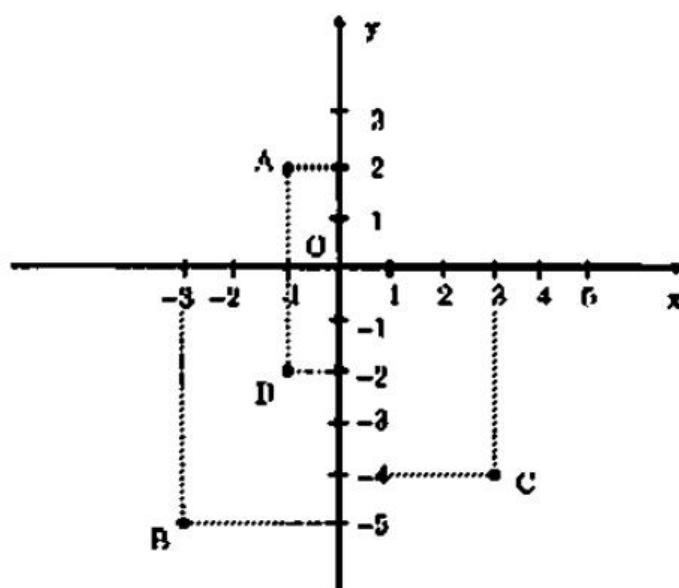
Giải

A(-2 ; 1), B(2 ; 3), C(-1 ; -4),
D(3 ; -2), E(4 ; 1).



37. Vẽ một hệ trục tọa độ và đánh dấu các điểm A(-1 ; 2) ; B(-3 ; -5) ; C(3 ; -4) ; D(-1 ; 2).

Giải

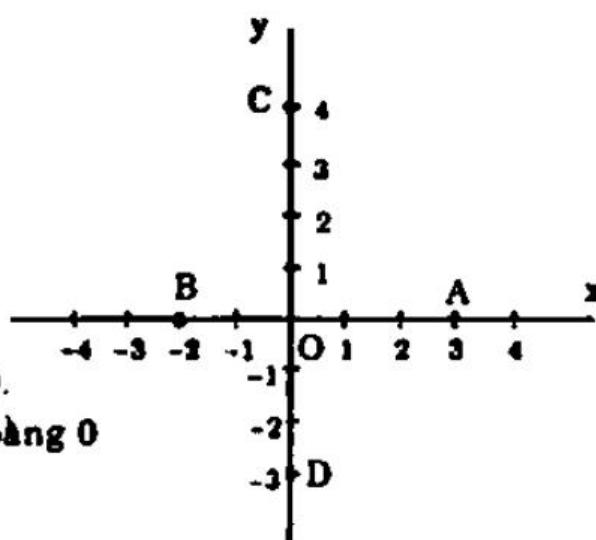


38. Cho hình vẽ bên. Hãy cho biết

- Tung độ của các điểm A, B.
- Hoành độ của các điểm C, D.
- Tung độ của một điểm bất kì trên trục hoành và hoành độ của một điểm bất kì trên trục tung.

Giai

- Tung độ của điểm A và B bằng 0.
- Hoành độ của các điểm C và D bằng 0
- Tung độ của một điểm bất kì trên trục hoành bằng 0 và hoành độ của một điểm bất kì trên trục tung bằng 0.

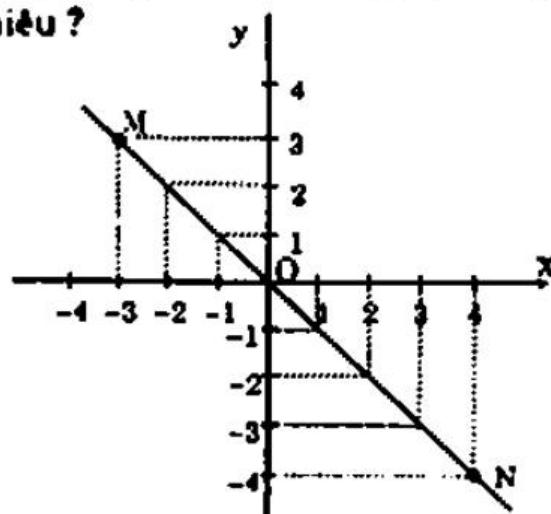


39. Vẽ một hệ trục tọa độ và đường phan giác của các góc phan tư thứ II, IV.

- Dán dấu điểm M nằm trên đường phan giác và có tung độ bằng 3.

Điểm M có hoành độ bằng bao nhiêu?

- Dán dấu điểm N nằm trên đường phan giác đó và có hoành độ bằng 4. Điểm N có tung độ bằng bao nhiêu?
- Nêu nhận xét về hoành độ và tung độ các điểm thuộc đường phan giác trên.



Giai

- M(-3 ; 3).
- N(4 ; -4).

- Các điểm thuộc đường phan giác trên có hoành độ và tung độ là hai số đối nhau.

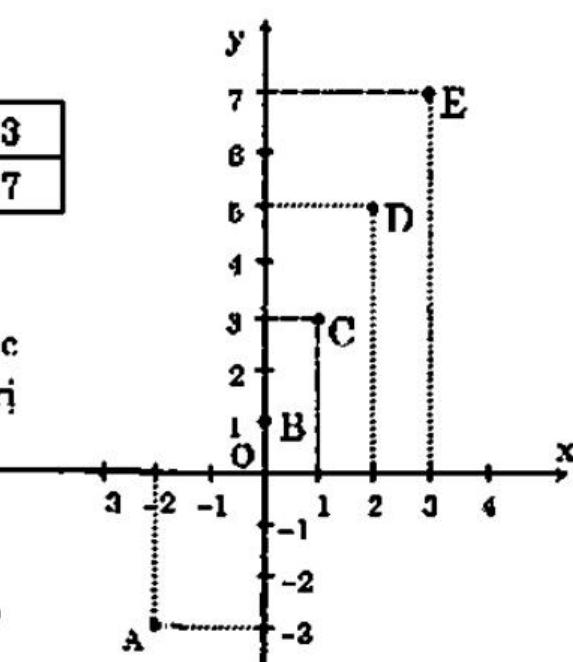
40. Hàm số y cho trong bảng sau :

x	-2	0	1	2	3
y	-3	1	3	5	7

- Viết lát cả các cặp giá trị tương ứng ($x : y$) của hàm số trên.
- Vẽ một hệ trục tọa độ Oxy và xác định các biểu diễn các cặp giá trị tương ứng của x và y ở câu a.

Giai

Các cặp giá trị tương ứng ($x : y$) của hàm số trên là (-2 ; -3), (0 ; 1), (1 ; 3), (2 ; 5) và (3 ; 7).



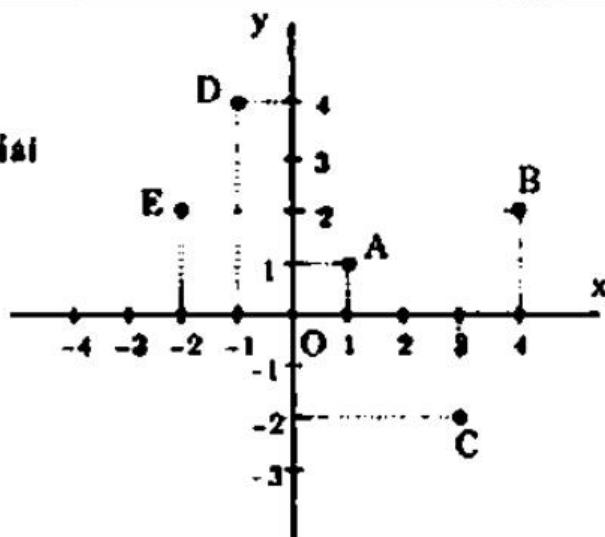
41. Viết tọa độ các điểm A, B, C,

D, E trên hình vẽ bên.

Giai

A(1 ; 1), B(4 ; 2), C(3 ; -2),

D(-1 ; 4), E(-2 ; 2).

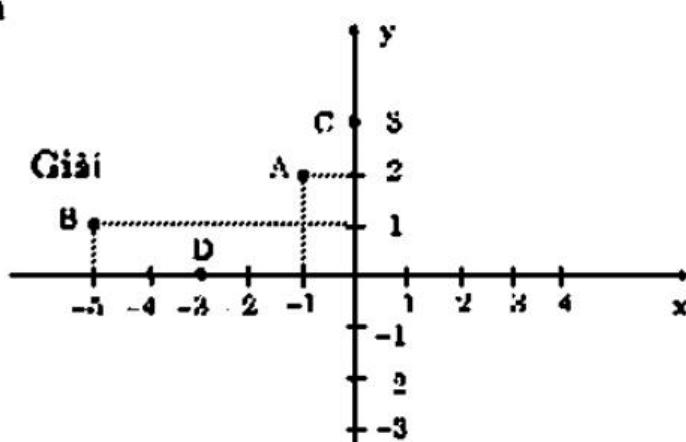


42. Vẽ một hệ trục tọa độ Oxy và

danh dấu các điểm A(-1 ; 2) ;

B(-5 ; 1) ; C(0 ; 3) ; D(-3 ; 0).

Giai

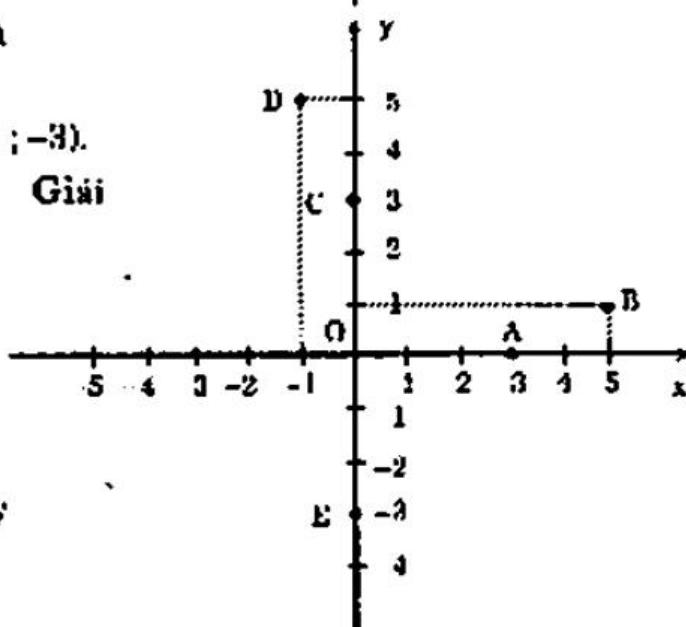


43. Vẽ một hệ trục tọa độ Oxy và

danh dấu các điểm A(3 ; 0) ;

B(5 ; 11) ; C(0 ; 3) ; D(1 ; 5) ; E(0 ; -3).

Giai



BÀI TẬP NÂNG CAO

44. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Hãy tìm tất cả các điểm :

a) Có hoành độ bằng 2010.

b) Có tung độ bằng 2009.

c) Có tung độ bằng hoành độ.

d) Có tung độ và hoành độ đối nhau.

Giai

a) Các điểm có hoành độ bằng 2010 nằm trên đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2010.

b) Các điểm có tung độ bằng -2009 là những điểm nằm trên đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2009.

c) Các điểm có tung độ bằng hoành độ là những điểm nằm trên đường thẳng chứa tia phán giác của góc xOy .

d) Các điểm có tung độ và hoành độ đối nhau là những điểm nằm trên đường thẳng chứa tia phán giác của góc kề bù với góc xOy .

45. Trên hệ trục tọa độ Oxy lấy điểm A. Điểm A(x ; y) nằm ở góc phán tư nào nếu :

- a) $x > 0; y > 0$ b) $x > 0; y < 0$ c) $x < 0; y > 0$ d) $x < 0; y < 0$.

Giai

a) Góc phán tư I.

b) Góc phán tư IV

c) Góc phán tư II.

d) Góc phán tư III

46. a) Những điểm trên trục hoành có tung độ bằng bao nhiêu ?

b) Những điểm trên trục tung có hoành độ bằng bao nhiêu ?

Giai

a) Những điểm trên trục hoành có tung độ bằng 0.

b) Những điểm trên trục tung có hoành độ bằng 0.

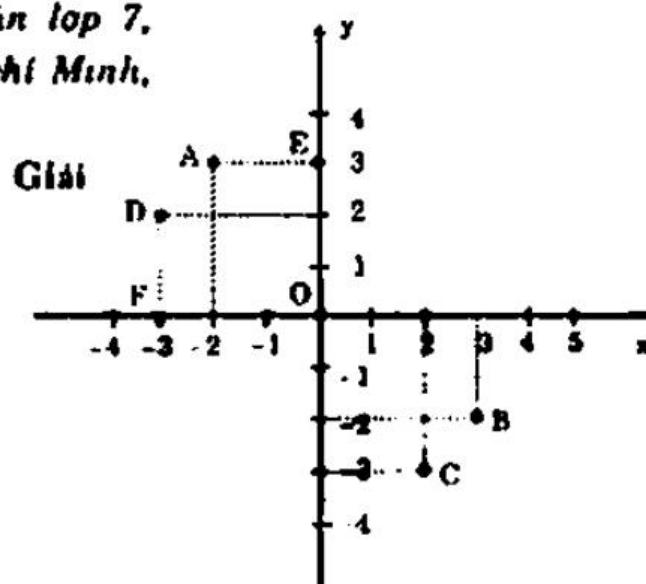
BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

47. Vẽ một hệ trục tọa độ đánh dấu các điểm A(-2 ; 3) ; B(3 ; -2) ; C(2, -3) ; D(-3 ; 2) ; E(0 ; 3) ; F(-3 ; 0).

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7,

báo Khán Quang Đỏ, Tp. Hồ Chí Minh,

năm học 2006 - 2007)



55. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ ($a \neq 0$)

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CẨN NHỎ

1. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x ; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

2. Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$)

Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

* **Cách vẽ :**

Xác định điểm A (A khác 0) nằm trên đồ thị.

Thông thường chọn $A(1 ; a)$, đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = ax$.

B/ BÀI TẬP

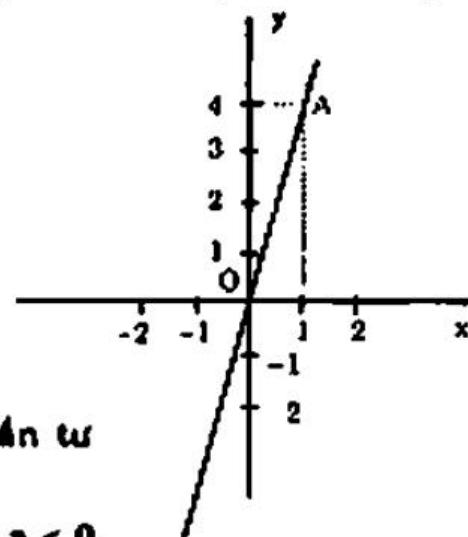
■ BÀI TẬP CƠ BẢN

48. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 4x$.

Giai

Đồ thị hàm số $y = 4x$ là đường thẳng

OA với $O(0 ; 0)$ và $A(1 ; 4)$.



49. Đồ thị hàm số $y = ax$ nằm ở góc phán tư

nào của mặt phẳng toạ độ Oxy nếu :

a) $a > 0$

b) $a < 0$.

Giai

a) Đồ thị của hàm số $y = ax$ nằm ở góc phán tư I và III nếu $a > 0$.

b) Đồ thị của hàm số $y = ax$ nằm ở góc phán tư II và IV nếu $a < 0$.

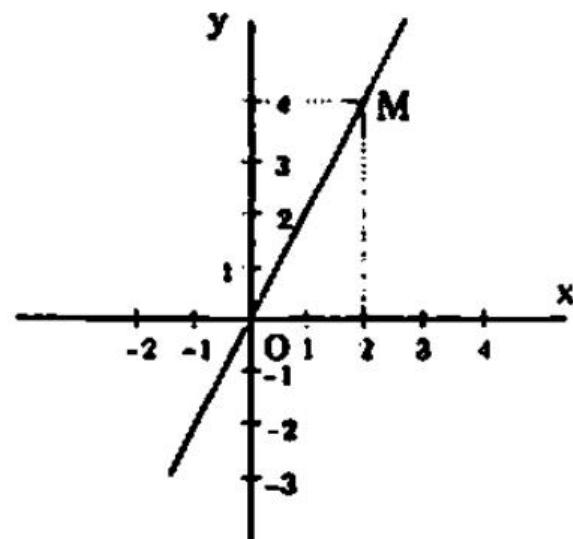
50. Đồ thị của hàm số $y = ax$ là

đường thẳng OM trong hình bên.

a) Hãy xác định hệ số a .

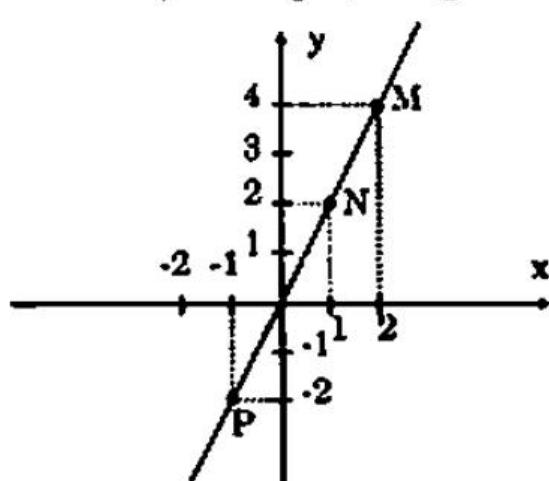
b) Đánh dấu N điểm
trên đồ thị có hoành
độ bằng 1.

c) Đánh dấu điểm P trên đồ
thị có tung độ bằng -2.



Giai

Đồ thị hàm số $y = ax$ đi qua $M(2 ; 4)$
nên ta có $4 = a.2 \Rightarrow a = 2$.



51. Những điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 3x$.

A(1 ; 3), B(-1 ; 3), C(-2 ; 6), D(3 ; 9).

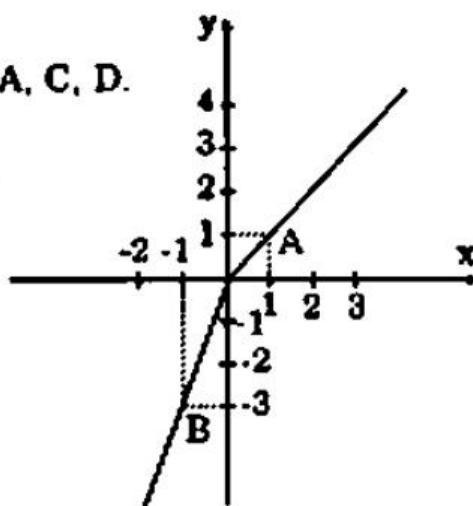
Giai

Các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 3x$ là A, C, D.

52. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \begin{cases} x & \text{với } x \geq 0 \\ 3x & \text{với } x < 0 \end{cases}$

Giai

Đồ thị hàm số là hai tia OA và OB.

**BÀI TẬP NÂNG CAO**

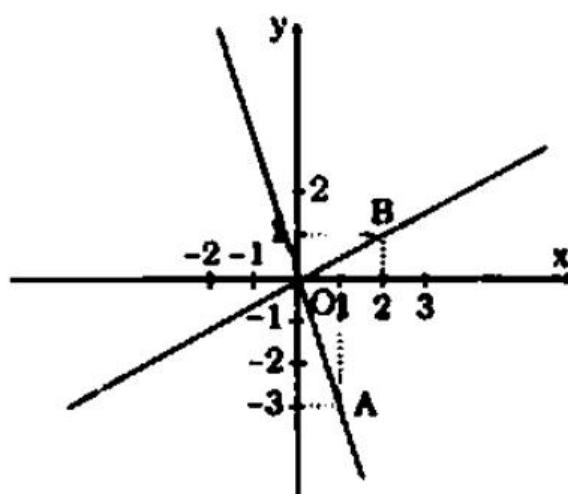
53. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ

thi của hàm số $y = -3x$, $y = \frac{1}{2}x$

Giai

a) Đồ thị của hàm số $y = -3x$
là đường thẳng OA.

b) Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$
là đường thẳng OB.

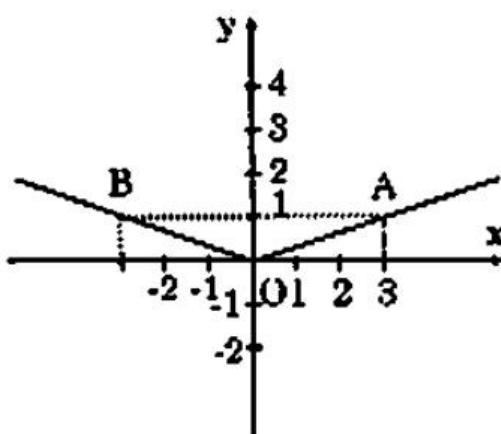


54. Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|$.

Giai

$$y = \frac{1}{3}|x| = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số là những điểm nằm trên hai tia OA và OB với O(0;0) A(3;1) B(-3;-1).

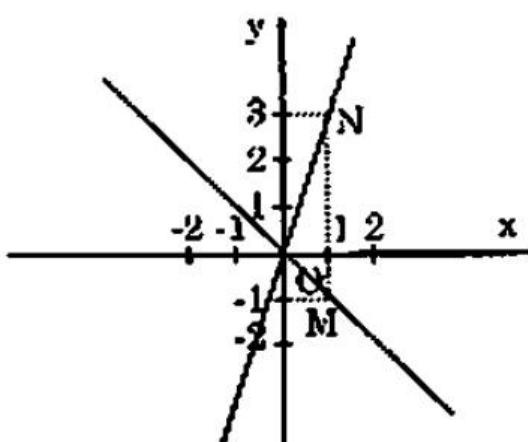


55. Vẽ đồ thị hàm số $y = -2|x| + x$.

Giai

$$y = -2|x| + x = \begin{cases} -x & \text{nếu } x \geq 0 \\ 3x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số là những điểm nằm trên hai tia OM và ON với O(0;0) M(1;-1) N(1;3).



56. Xác định m , biết đồ thị của hàm số $y = (m - 1)x$ đi qua điểm $A(-2; 8)$.

Giai

Điểm $A(-2; 8)$ thuộc đồ thị hàm số $y = (m - 1)x$

$$\text{nên: } 8 = (m - 1)(-2) \Leftrightarrow 8 = -2m + 2 \Leftrightarrow m = -3.$$

57. Chứng tỏ rằng các điểm $A(-1; 4)$, $B(-2; 8)$, $C(3; -12)$ thẳng hàng.

Giai

Các điểm $A(-1; 4)$, $B(-2; 8)$, $C(3; -12)$ cùng thuộc đồ thị hàm số $y = -4x$
nên thẳng hàng

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

58. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} 2x & \text{với } x \geq 0 \\ x & \text{với } x < 0. \end{cases}$

(Đề thi học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2004 - 2005)

Giai

Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} 2x & \text{(với } x \geq 0) \\ x & \text{(với } x < 0) \end{cases}$ là hai tia OA với OB với $O(0; 0)$,
 $A(1; 2)$, $B(-1; -1)$.

59. Cho các hàm số $y = f(x) = 2x$ và $y = g(x) = \frac{18}{x}$. Không vẽ đồ thị của chúng, em hãy tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị.

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, Báo Khanh Quang Đô, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2008 - 2009).

Giai

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đồ thị.

$$\text{Ta có: } y_0 = 2x_0 \text{ và } y_0 = \frac{18}{x_0}. \text{ Do đó } 2x_0 = \frac{18}{x_0} \Leftrightarrow x_0^2 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 3.$$

Nếu $x_0 = 3$ thì $y_0 = 2x_0 = 6$. Ta có giao điểm $M_1(3; 6)$.

60. Cho hàm số $y = f(x) = 0,5x$ với $-2 \leq x \leq 6$. Vẽ đồ thị của hàm số đó rồi dùng đồ thị tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số này

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, báo Khanh Quang Đô, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011)

Giai

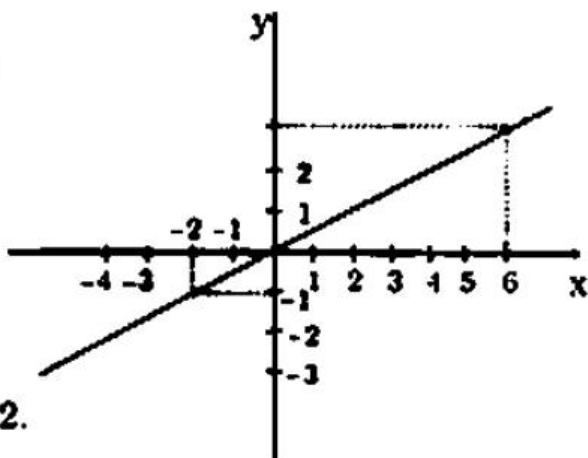
Nếu $x = -2$ thì $y = 0,5(-2) = -1$

Nếu $x = 6$ thì $y = 0,5.6 = 3$

Đường thẳng $y = 0,5x$ đi qua hai điểm $(-2; -1)$ và $(6; 3)$.

Từ đồ thị ta thấy: Giá trị lớn nhất của y là 3 tại $x = 6$

Giá trị nhỏ nhất của y là -1 tại $x = -2$.



Nếu $x_0 = -3$ thì $y_0 = 2x_0 = -6$.

Ta có giao điểm $M(-3; -6)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Khi tổng kết cuối năm học người ta thấy số học sinh giỏi của một trường A phân bố ở các khối 6, 7, 8, 9 theo tỉ lệ $1,5 : 1,1 : 1,3$ và $1,2$. Hỏi số học sinh giỏi của mỗi khối? Biết rằng khối 8 nhiều hơn khối 9 là 6 học sinh.

Giai

Gọi số học sinh giỏi các khối 6, 7, 8, 9 của trường lần lượt là x, y, z, t .

$$\text{Ta có: } \frac{x}{1,5} = \frac{y}{1,1} = \frac{z}{1,3} = \frac{t}{1,2} \text{ và } z - t = 6$$

$$\Rightarrow x = 90, y = 66, z = 78, t = 72$$

2. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 2009$. Chứng tỏ rằng $f(a) = f(-a)$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Giai

$$f(a) = 2a^2 + 2009; f(-a) = 2(-a)^2 + 2009 = 2a^2 + 2009$$

Vậy $f(a) = f(-a)$.

3. Trong mặt phẳng tọa độ vẽ tam giác ABC với các đỉnh A(-1; 2), B(2; 0), C(1; 1). Tam giác ABC là tam giác gì?

Giai

Tam giác ABC vuông cân.

4. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

$$a) y = 2|x|$$

$$b) y = 3|x| + x.$$

Giai

$$a) y = 2|x| = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -2x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

$$b) y = 3|x| + x = \begin{cases} 4x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -2x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4$ ($a \neq 0$). $f(-3) = -9$. Chứng tỏ rằng $f(x) = f(-x)$.

Giai

$$\text{Ta có: } f(3) = -9. \text{ Do đó } (-3)^4 = -9 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{9}$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{9}x^4.$$

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^4; f(-x) = -\frac{1}{9}(-x)^4 = -\frac{1}{9}x^4.$$

6. Chứng tỏ rằng biểu thức $2009x$ không có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

Giai

Giả sử $2009x$ có giá trị lớn nhất là a tại $x = x_1$, ta có $2009x_1 = a$, do đó $x_1 > 0$.

Chọn $x_2 > x_1 > 0$ thì $2009x_2 > 2009x_1$, nên có $2009x_2 > a$ (mâu thuẫn).

Chương III.

THỐNG KÊ

81. THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ, TẦM SỐ

A/ KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỚ

1. Thu thập số liệu, bảng số liệu thống kê ban đầu:

Ví dụ : Kết quả điều tra về số con của 50 gia đình thuộc một phường, người điều tra lập bảng sau :

STT	Số con	Số hộ gia đình
1	0	12
2	1	24
3	2	8
4	3	6

Việc làm này của người điều tra là thu thập số liệu về vấn đề quan tâm. Các số liệu trên được ghi lại trong một bảng, gọi là bảng số liệu thống kê ban đầu.

2. Dấu hiệu:

a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra

Vấn đề hay hiện tượng mà người điều tra quan tâm tìm hiểu gọi là dấu hiệu (thường được kí hiệu bằng các chữ in hoa X, Y,...)

Ở ví dụ trên mỗi gia đình là một đơn vị điều tra.

b) Giá trị của dấu hiệu, dãy giá trị của dấu hiệu

Üng với mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó được gọi là một giá trị của dấu hiệu. Số các giá trị (không nhất thiết khác nhau) của dấu hiệu đúng bằng số các đơn vị điều tra (thường kí hiệu là N), các giá trị ở cột thứ hai của bảng trên (kể từ trái sang) gọi là dãy giá trị của dấu hiệu X.

3. Tần số của mỗi giá trị:

Mỗi giá trị có thể xuất hiện một hoặc nhiều lần trong dãy giá trị của dấu hiệu. Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu gọi là tần số của giá trị đó

B/ BÀI TẬP

C/ BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Trong một cuộc điều tra dân số ở một khu phố, người ta ghi lại số người trong mỗi gia đình trong bảng sau:

7	8	4	5	6
5	4	4	3	4
4	7	7	6	3
6	5	8	5	3

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Dấu hiệu đó có tất cả bao nhiêu giá trị ?
 b) Hãy nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số của chúng.

Giai

- a) Dấu hiệu : số người trong mỗi gia đình. Có tất cả 20 giá trị.
 b) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu : 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8.
 Tần số tương ứng của chúng : 3 ; 5 ; 4 ; 3 ; 3 ; 2.

2. Số lượng học sinh nam của từng lớp trong một trường THCS được ghi lại trong bảng sau :

20	18	20	22	21
22	21	30	20	21
30	20	22	18	20

- Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị của dấu hiệu là bao nhiêu ? Hãy nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tìm tần số của từng giá trị đó.

Giai

- Dấu hiệu : số học sinh nam của mỗi lớp. Có tất cả 15 giá trị.
 Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là : 18 ; 20 ; 21 ; 22 ; 30.
 Tần số tương ứng của các giá trị lần lượt là : 2 ; 5 ; 3 ; 3 ; 2.

3. Hàng ngày, bạn Nam thử ghi lại thời gian cần thiết để đi từ nhà đến sân bóng đá và thực hiện điều đó trong 10 ngày. Kết quả thu được ở bảng sau :

Thứ tự (ngày)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Thời gian (phút)	20	20	16	1	19	18	18	19	19	19

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ?
 b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong dãy giá trị của dấu hiệu đó ?
 Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số của chúng

Giai

- a) Dấu hiệu : Thời gian cần thiết để Nam đi từ nhà đến sân bóng đá mỗi ngày. Có tất cả 10 giá trị.
 b) Có 5 giá trị khác nhau trong dãy giá trị của dấu hiệu là :
 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20.

Tần số tương ứng của các giá trị lần lượt là 1 ; 1 ; 2 ; 4 ; 2.

4. Khi điều tra số lượng học sinh đạt khá giỏi môn Toán của từng lớp trong một học kì của một trường THCS, người điều tra lập được bảng dưới đây:

TT	Lớp	Số học sinh khá giỏi môn Toán
1	6A	15
2	6B	16

3	6C	20
4	6D	18
5	7A	15
6	7B	18
7	7C	19
8	7D	15
9	8A	16
10	8B	18
11	8C	20
12	8D	19
13	9A	19
14	9B	16
15	9C	15
16	9D	18

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Hãy nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tìm tần số của từng giá trị đó.

Giải

a) Dấu hiệu . Số lượng học sinh đạt điểm kha giỏi môn Toán của từng lớp.

b) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu : 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20

Tần số tương ứng : 4 ; 3 ; 4 ; 3 ; 2.

5. Điểm trung bình học kỳ I của lớp 6A được ghi lại trong bảng dưới đây :

7,1	7,5	8,0	8,3	5,5	6,9	7,8	6,4	8,6
6,1	4,5	6,5	6,4	6,1	7,1	7,1	8,0	8,0
6,9	4,9	6,1	4,5	7,5	8,3	6,1	5,5	6,9
5,5	6,5	6,9	6,4	6,5	4,5	6,5	6,4	4,9
8,3	6,1	7,8	7,1	4,9	7,1	6,5	5,5	7,1

Hãy cho biết :

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu và các giá trị của dấu hiệu đó.

b) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

Giải

a) Dấu hiệu : Điểm trung bình học kỳ I của từng học sinh trong lớp 6A.

Số tất cả các giá trị của dấu hiệu : 45.

b) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 13.

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là :

4,5 ; 4,9 ; 5,5 ; 6,1 ; 6,4 ; 6,5 ; 6,9 ; 7,1 ; 7,5 ; 7,8 ; 8,0 ; 8,3 ; 8,6.

Tần số tương ứng là : 3 ; 3 ; 4 ; 5 ; 4 ; 5 ; 4 ; 6 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 1.

BÀI TẬP NÂNG CAO

- 6.** Chọn 24 gia đình ở một tờ dân phố để điều tra về sự tiêu thụ điện năng, kết quả được ghi lại ở bảng sau :

50	45	35	47	49	38
60	x	47	38	50	49
100	49	38	60	x	45
80	47	y	45	y	47

Dấu hiệu ở đây là gì ? Hãy nếu các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tìm tần số của từng giá trị đó. Biết y lớn hơn x là 10 và tổng của x và y là 80.

Giải

$$\text{Ta có } x + y = 80 \text{ và } y - x = 10$$

$$\text{Nên } x + y + y - x = 80 + 10 \Leftrightarrow 2y = 90 \Leftrightarrow y = 45$$

$$x = 80 - y = 35$$

Thay x bởi 35 ; y bởi 45 vào bảng ta sẽ tìm được các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số tương ứng của từng giá trị.

- 7.** Số lượng nữ học sinh của từng lớp trong một trường THCS được ghi lại trong bảng dưới đây :

20	b	21	20	19
22	c	19	21	20
23	20	20	22	22
1	20	23	22	23

Dấu hiệu ở đây là gì ? Hãy nếu các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tìm tần số của từng giá trị đó, cho biết a, b, c là ba số tự nhiên lẻ liên tiếp tăng dần và $a + b + c = 63$.

Giải

a, b, c là ba số tự nhiên lẻ liên tiếp tăng dần nên b là trung bình cộng của ba số a, b, c.

$$\text{Ta có } b = \frac{a + c}{2} = 21 \text{ Do đó } a = 21 - 2 = 19; c = 21 + 2 = 23.$$

Thay a bởi 19, b bởi 21, c bởi 23 vào bảng ta tìm được các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số tương ứng của từng giá trị.

- 8.** Số lượng nữ học sinh của từng lớp trong một trường THCS được ghi lại trong bảng dưới đây

20	23	y	24	21
x	25	x	25	24
27	19	23	20	23

Biết tần số của giá trị 25 là 3 và $x + y = 48$.

Hỏi :

Dấu hiệu ở đây là gì? Hãy nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tìm tần số của từng giá trị đó.

Giải

Ta có tần số của giá trị 25 là 3.

Mà trong bảng giá trị đã có hai lần xuất hiện giá trị 25.

Ta lại có hai giá trị của x, một giá trị của y.

Nên $y = 25$. Do đó $x + 25 = 48 \Rightarrow x = 48 - 25 \Rightarrow x = 23$.

82. BÀNG "TẦN SỐ" CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỎ

1. Lập bảng "tần số":

Vẽ một khung hình chữ nhật gồm hai dòng.

Ở dòng trên, ghi lại giá trị khác nhau của dấu hiệu theo thứ tự tăng dần.

Ở dòng dưới, ghi các tần số tương ứng dưới mỗi giá trị đó.

Bảng này gọi là bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu và gọi bảng đó là bảng "tần số" cho gọn.

2. Chú ý:

Có thể chuyển bảng "tần số" dạng "ngang" thành bảng "dọc"

Dạng "ngang"

Giá trị (x)	36	40	41	43	46	48
Tần số (n)	5	10	13	14	12	16

Dạng "dọc"

Giá trị (x)	Tần số (n)
36	5
40	10
41	13
43	14
46	12
48	16

B/ BÀI TẬP

■ BÀI TẬP CƠ BẢN

9. Thống kê tháng sinh của các bạn trong lớp 7A được bảng sau:

12	7	3	1	6	7	1	7	7	3
12	1	4	1	7	4	8	5	4	4
8	11	10	7	2	9	8	3	4	8
7	2	4	3	5	10	4	2	7	4
1	2	3	8	8	12	1	10	10	10

Dấu hiệu ở đây là gì? Lập bảng "tần số".

Giai

Dấu hiệu : Tháng sinh của các bạn học sinh trong lớp 7A.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)	6	4	5	8	2	1	8	6	1	5	1	3	N = 50

10. Khi điều tra về số sách đóng góp được cho phong trào "kế hoạch nhỏ" của lớp 6A ở một trường THCS, người điều tra đã lập được bảng dưới đây :

3	6	2	4	3	3	3
5	3	4	4	6	2	4
2	4	7	3	2	4	4
6	7	4	3	4	5	7
4	3	2	5	3	4	3

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì ?

b) Lập bảng tần số và rút ra nhận xét (số các giá trị của dấu hiệu, các giá trị khác nhau, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất, các giá trị thuộc vào khoảng nào là chủ yếu ?

Giai

a) **Dấu hiệu :** Số sách thu được của từng bạn ở lớp 6 A

b) **Bảng tần số**

Giá trị (x)	2	3	4	5	6	7	
Tần số (n)	5	10	11	3	3	3	N = 35

Các giá trị khác nhau : 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Giá trị có tần số lớn nhất là 4 với tần số là 11. Như vậy qua bảng tần số ta thấy các bạn lớp 6A đóng góp mỗi bạn chủ yếu là 3 hoặc 4 quyển.

11. Trong một cuộc điều tra dân số của mỗi gia đình ở một tổ dân phố, số liệu được ghi ở bảng sau :

2	4	4	3	5	4	5
5	5	5	4	6	5	6
6	3	5	5	2	7	4
4	8	4	6	4	3	5
8	5	8	4	7	7	5

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì ?

b) Lập bảng tần số và rút ra nhận xét (số các giá trị của dấu hiệu, các giá trị khác nhau, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất, giá trị thuộc khoảng nào chủ yếu ?).

Giai

a) **Dấu hiệu :** Số người trong mỗi gia đình.

b) Bảng tần số :

Giá trị (x)	2	3	4	5	6	7	8	
Tần số (n)	2	3	9	11	4	3	3	$N = 35$

Học sinh tự nhận xét

12. Trong một cuộc thi vẽ tranh, người ta ghi lại thời gian vẽ một bức tranh của từng em (đơn vị phút) như sau :

30	40	35	42	38	40	45	42
40	42	38	42	45	39	40	35
38	35	39	40	45	35	39	40
35	40	39	30	40	45	42	39
42	42	40	42	42	30	40	38

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì ?

b) Lập bảng tần số và rút ra nhận xét (số các giá trị của dấu hiệu, các giá trị khác nhau, giá trị lớn nhất, giá trị có tần số lớn nhất, giá trị thuộc khoảng nào chủ yếu ?).

Giai

a) Dấu hiệu : Thời gian vẽ bức tranh của từng em.

b) Bảng tần số :

Giá trị (x)	30	35	38	39	40	42	45	
Tần số (n)	3	5	4	5	10	9	4	$N = 40$

Học sinh tự nhận xét.

BÀI TẬP NÂNG CAO

13. Cho bảng tần số

Số người (x)	2	3	4	5	6	7	8
Tần số (n)	2	3	9	10	8	4	2

Hãy chuyển bảng tần số dạng "ngang" ở trên thành dạng "dọc".

Giai

Số người (x)	Tần số (n)
2	2
3	3
4	9
5	10
6	8
7	4
8	2

14. Cho bảng "tần số"

Giá trị (x)	48	49	51	52	54	
Tần số (n)	11	22	20	13	4	N = 70

Hãy chuyển bảng "tần số" dạng "ngang" ở trên thành dạng "dọc".

Giải

Số người (x)	Tần số (n)
48	11
49	22
51	20
52	13
54	4
	N = 70

15. Cho bảng "tần số"

Giá trị (x)	Tần số (n)
50	12
52	8
56	9
58	10
60	1
	N = 40

Hãy chuyển bảng "tần số" dạng "dọc" ở trên thành dạng "ngang"

Giải

Giá trị (x)	50	52	56	58	60	
Tần số (n)	12	8	9	10	1	N = 40

16. Trong một buổi dạy thể dục, thầy giáo ghi lại thời gian chạy (giây) của mỗi em như sau :

45	50	53	60	49	55	a	49	50
47	b	49	50	60	53	60	50	53
53	55	47	b	53	47	53	49	a
49	45	53	a	50	50	60	53	49
55	53	50	47	60	47	53	50	60

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì. Hãy nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

Biết $a + b = 100$ và a lớn hơn b là 10.

b) Lập bảng tần số ? Cho biết giá trị có tần số lớn nhất và giá trị có tần số nhỏ nhất.

Giải

a) Dấu hiệu : Thời gian chạy của từng học sinh (tính theo giây)

$$\text{Ta có } a + b = 100, a - b = 10$$

$$\text{Do đó } a + b + a - b = 100 + 10 \Rightarrow 2a = 110$$

$$\Rightarrow a = 55. \text{ Khi đó } b = 100 - a = 45$$

b)

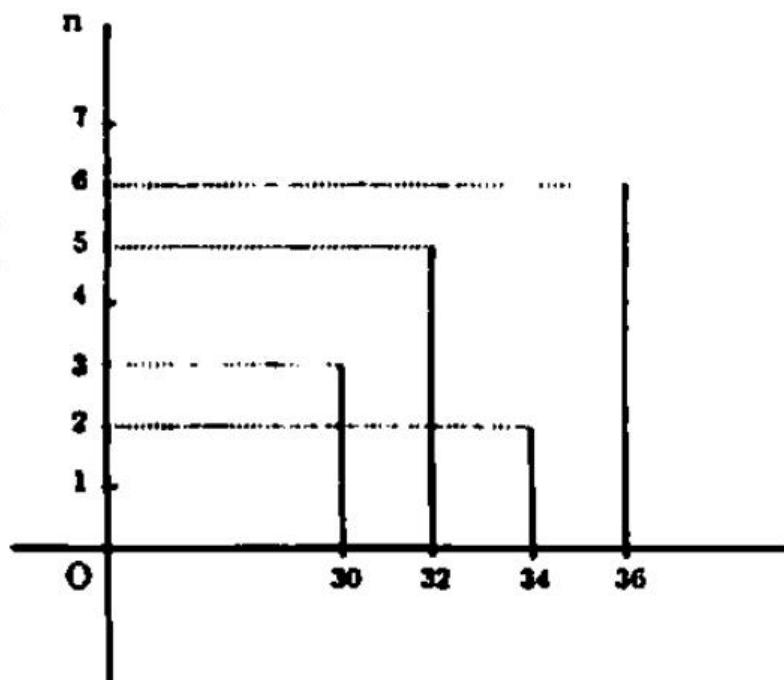
Giá trị (x)	45	47	49	50	53	55	60	
Tần số (n)	4	5	6	8	10	6	6	$N = 45$

B3. BIỂU ĐỒ**A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỎ****1. Biểu đồ đoạn thẳng**

- Dùng hệ trục tọa độ, trục hoành biểu diễn các giá trị x, trục tung biểu diễn tần số n (độ dài đơn vị trên hai trục có thể khác nhau).
- Xác định các điểm có tọa độ là cặp số gồm giá trị và tần số của nó, giá trị viết trước, tần số viết sau.
- Nối mỗi điểm đó với điểm trên trục hoành có cùng hoành độ.

2. Chú ý

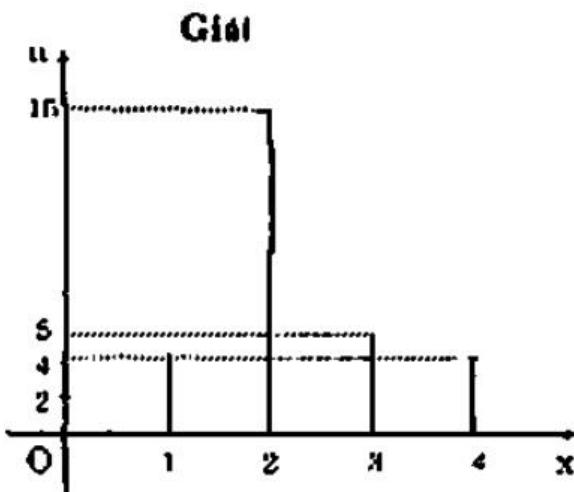
Bên cạnh các biểu đồ đoạn thẳng thì trong các tài liệu thống kê hoặc trong sách, báo còn có biểu đồ hình chữ nhật, biểu đồ hình quạt.

**B/ BÀI TẬP****■ BÀI TẬP CƠ BẢN**

17. Cho bảng "tần số" sau :

Tuổi nghề của mỗi công nhân (x)	0	1	2	3	4	
Tần số (n)	2	4	15	5	4	$N = 30$

Hãy dựng biểu đồ đoạn thẳng.



18. Nhiệt độ trung bình hàng tháng trong một năm của một địa phương được ghi lại trong bảng dưới đây (đo bằng độ C):

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ trung bình	20	20	28	30	31	32	31	18	25	18	18	17

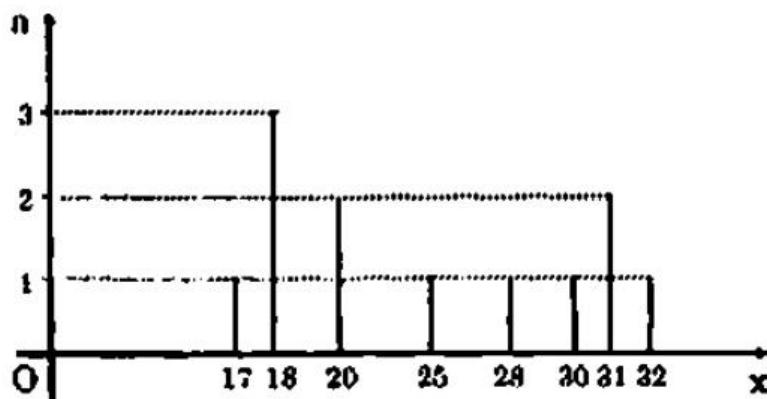
- a) Hãy lập bảng "tần số".
b) Hãy biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng

Giai

a) Bảng "tần số"

Giá trị (x)	17	18	20	25	28	30	31	32	
Tần số (n)	1	3	2	1	1	1	2	1	N = 12

b)



19. Kết quả điều tra về số con của 30 hộ thuộc một xã được cho trong bảng sau :

1	0	3	0	1	2
2	1	2	1	2	1
0	1	0	1	1	1
3	2	2	1	3	0
0	1	0	0	1	0

a) Lập bảng tần số.

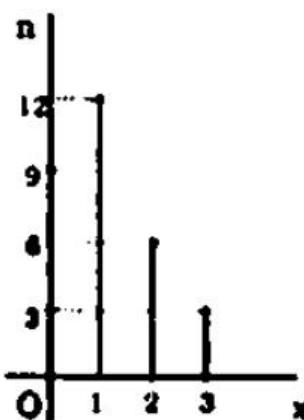
b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng.

Giai

a) Bảng tần số

Số con (x)	0	1	2	3	
Tần số (n)	9	12	6	3	$N = 30$

b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng



20. Phát động phong trào đăng ký giờ học tốt trong tháng 11 nhân ngày nhà giáo Việt Nam (20 - 11) lớp 6A đã thống kê số lần phát biểu mỗi ngày được ghi lại như sau

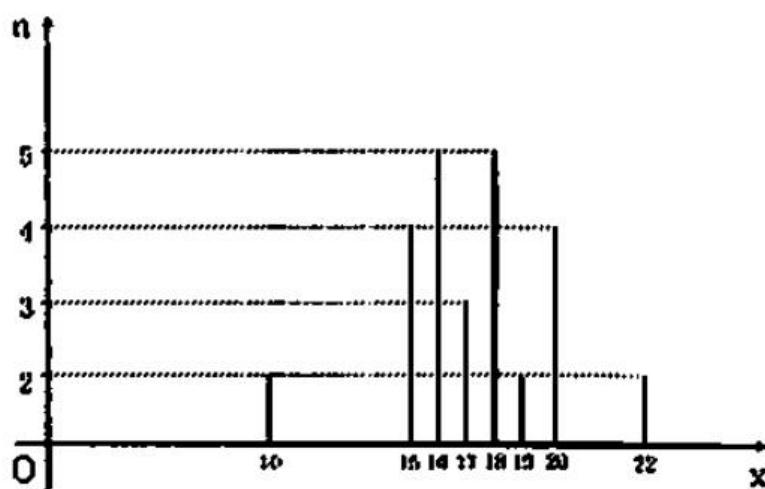
15	16	17	20	22
18	19	16	17	17
19	18	15	20	16
22	16	15	16	18
18	20	18	15	20

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ? Lập bảng tần số
b) Biểu diễn số lần phát biểu trên bảng biểu đồ đoạn thẳng.

Giai

- a) Dấu hiệu : Số lần phát biểu mỗi ngày của lớp 6A. Số các giá trị = 25.
b) Lập bảng tần số :

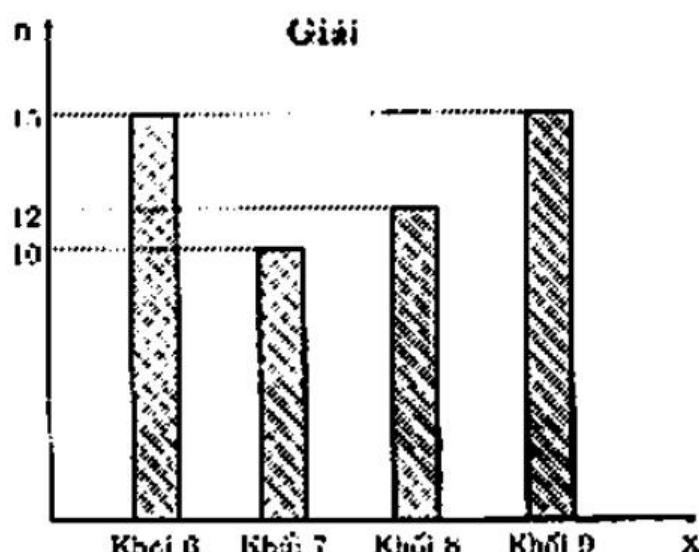
Giá trị (x)	15	16	17	18	19	20	22
Tần số (n)	4	5	3	5	2	4	2



21. Trong năm học 2008 trường THCS A đã thống kê lại số học sinh đạt loại giỏi của từng khối được ghi lại ở bảng sau :

Khối	6	7	8	9
Số học sinh giỏi	15	10	12	15

Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật



22. Kết quả phân loại học tập của học sinh khối 7 của trường THCS B trong học kì I vừa qua như sau :

Năm	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu
Tỉ lệ %	30	20	45	5

Hãy vẽ biểu đồ hình quạt về kết quả phân loại học tập trên

Giải

Số học sinh giỏi được biểu diễn bởi hình quạt với số đo góc là :

$$360^\circ \cdot 30\% = 108^\circ$$

Tương tự ta có :

Học sinh khá :

$$360^\circ \cdot 20\% = 72^\circ$$

Học sinh trung bình :

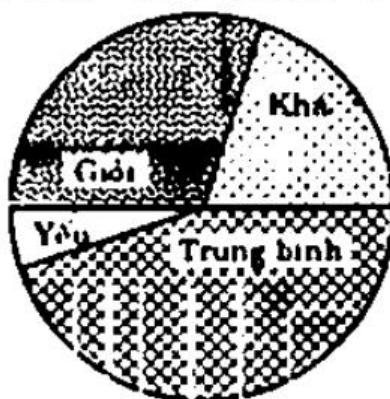
$$360^\circ \cdot 45\% = 162^\circ$$

Học sinh yếu : $5\% \cdot 360^\circ = 18^\circ$

BÀI TẬP NÂNG CAO

23. Kết quả điều tra về số người trong từng gia đình ở một tổ dân phố được ghi lại ở bảng sau :

3	5	6	7	8	5	3	7
4	7	3	4	5	9	6	5
5	6	5	6	7	7	9	6
6	3	4	5	6	8	6	8
5	6	5	4	6	4	5	6



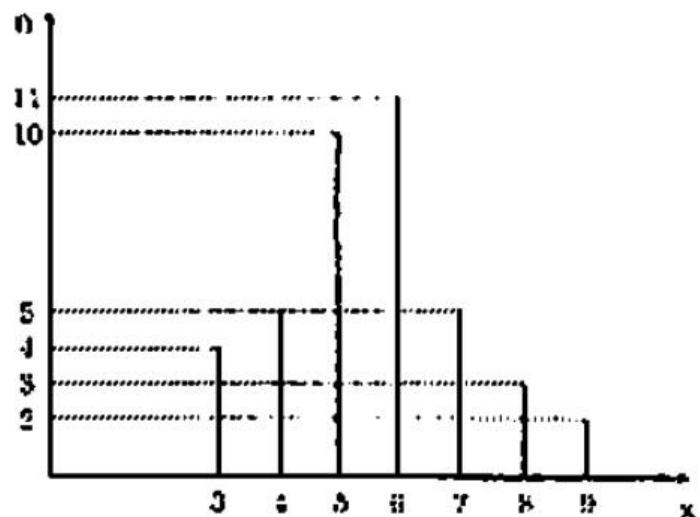
- Dấu hiệu ở đây là gì? Lập bảng tần số.
- Vẽ biểu đồ đoạn thẳng.
- Vẽ biểu đồ hình chữ nhật.

Giai

- Dấu hiệu số người trong từng gia đình

Giá trị (x)	3	4	5	6	7	8	9	
Tần số (n)	4	5	10	11	5	3	2	N = 40

- Biểu đồ đoạn thẳng :



Biểu đồ hình chữ nhật :
học sinh tự vẽ.

24. Biểu đồ bên biểu diễn kết quả xếp loại học lực của học sinh khối 7 của một trường THCS ở học kì I.

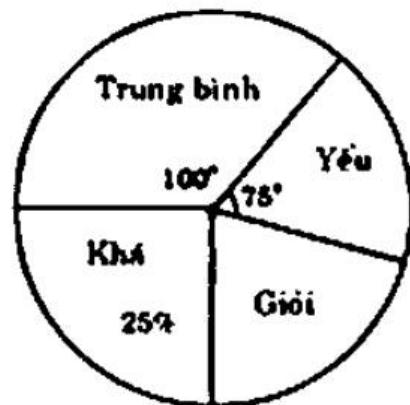
Số học sinh giỏi được biểu diễn bởi hình quạt với số đo góc là bao nhiêu độ?

Giai

$$360^\circ \cdot 25\% = 90^\circ$$

Số học sinh giỏi được biểu diễn bởi hình quạt với số đo góc là :

$$360^\circ - (90^\circ + 160^\circ + 75^\circ) = 35^\circ$$



84. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỜ

1. Số trung bình cộng của dấu hiệu

Dựa vào bảng "tần số", ta có thể tính số trung bình cộng của một dấu hiệu (gọi tắt là số trung bình cộng), kí hiệu \bar{X} như sau :

- Nhân từng giá trị với tần số tương ứng.
- Cộng tất cả các tích vừa tìm được.
- Chia tổng đó cho số các giá trị.

$$\text{Công thức } \bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{N}$$

Trong đó x_1, x_2, \dots, x_k là k giá trị khác nhau của dấu hiệu X ; n_1, n_2, \dots, n_k là k tần số tương ứng. N là số các giá trị.

2. Ý nghĩa của số trung bình cộng

Số trung bình cộng thường dùng làm "đại diện" cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại.

3. Mốt của dấu hiệu

Mốt của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng "tần số", ki hiệu là M_o .

BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

25. Điểm kiểm tra Toán (học kì I) của học sinh lớp 7D được cho ở bảng sau :

Giá trị (x)	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	3	5	5	20	10	2	5	$N = 50$

Tính \bar{X} .

Giải

Điểm số (x)	Tần số (n)	Tích (x_n)	
4	3	12	
5	5	25	
6	5	30	
7	20	140	
8	10	80	
9	2	18	
10	5	50	
	$N = 50$	Tổng : 355	$\bar{X} = \frac{355}{50} = 7,1$

26. Theo dõi thời gian làm một bài toán của 50 học sinh, thấy giáo lập được bảng sau :

Thời gian (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)	1	3	4	7	8	9	8	5	3	2	$N = 50$

a) Tính số trung bình cộng.

b) Tìm mốt của dấu hiệu.

Giải

a) $\bar{X} \approx 7,7$

b) $M_o = 8$.

27. Điều tra về số con của mỗi gia đình trong một khu phố, có bảng số liệu sau :

1	0	3	0	2
2	2	1	3	2

2	2	2	2	1
2	1	2	0	0
2	1	2	0	1

a) Tính số trung bình cộng.

b) Tìm một.

Giải

a)

Số con (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
0	5	0	
1	6	6	
2	12	24	
3	2	6	
	$N = 25$	36	$\bar{X} = \frac{36}{25} = 1,44$

b) $M_0 = 2$.

28. Một xã thu bắn 50 phát súng, kết quả được ghi lại trong bảng dưới đây (số điểm của từng phát):

9	10	10	10	9	8	7	9	10	10
10	8	9	9	10	8	9	8	9	8
9	8	10	9	9	8	10	9	8	10
10	10	10	9	10	8	9	10	7	10
10	10	10	9	8	9	9	10	9	9

a) Tính số trung bình cộng.

b) Tìm một.

Giải

a)

Điểm số (x)	Tần số (n)	Các tích (x _n .n)	
7	2	14	
8	10	80	
9	18	162	
10	20	200	
	$N = 50$	Tổng : 456	$\bar{X} = \frac{456}{50} = 9,12 \approx 9$

b) $M_0 = 10$.**BÀI TẬP NÂNG CAO**

29. Quan sát bảng tần số sau và cho biết nên dùng số trung bình cộng làm đại diện cho dấu hiệu không? Vì sao? Tìm một.

Giá trị (x)	1	3	4	99	100	
Tần số (n)	2	10	10	2	1	$N = 25$

Giai

Không nên dùng số trung bình cộng làm đại diện cho dấu hiệu vì các giá trị có khoảng chênh lệch quá lớn

$$M_0 = 3, M_1 = 4.$$

30. Chứng minh rằng : Nếu cộng hay trừ giá trị của dấu hiệu với một hàng số thì số trung bình cộng của dấu hiệu cũng được cộng hay trừ với hàng số đó.

Giai

Nếu gọi các giá trị của dấu hiệu lần lượt là $x_1; x_2; \dots; x_n$ và tần số tương ứng là $m_1; m_2; \dots; m_n$.

$$\text{Ta có } \bar{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n}{N}$$

$$\text{Trong đó: } m_1 + m_2 + \dots + m_n = N$$

Gọi a là giá trị của số cộng với giá trị của dấu hiệu.

$$\text{Cần chứng minh: } \frac{(x_1 + a)m_1 + (x_2 + a)m_2 + \dots + (x_n + a)m_n}{N} = \bar{X} + a$$

Thật vậy :

$$\begin{aligned}\bar{X} + a &= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n}{N} + a \\ &= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n + am_1 + am_2 + am_3 + \dots + am_n}{N} \\ &= \frac{(x_1 - a)m_1 + (x_2 + a)m_2 + \dots + (x_n + a)m_n}{N}\end{aligned}$$

Tương tự cho trường hợp trừ.

31. Chứng minh rằng : Nếu nhân các giá trị của dấu hiệu với một hàng số thì số trung bình của dấu hiệu cũng được nhân lên với hàng số đó.

Giai

Nếu gọi các giá trị của dấu hiệu lần lượt là x_1, x_2, \dots, x_n , tần số tương ứng là m_1, m_2, \dots, m_n .

$$\text{Ta có } \bar{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n}{N}$$

$$\text{Trong đó } m_1 + m_2 + \dots + m_n = N$$

Gọi a là giá trị của số nhân với giá trị của dấu hiệu.

$$\text{Cần chứng minh: } \frac{(x_1.a)m_1 + (x_2.a)m_2 + \dots + (x_n.a)m_n}{N} = \bar{X}.a$$

$$\text{Thật vậy: } \bar{X}.a = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n}{N}.a$$

$$= \frac{x_1m_1a + x_2m_2a + \dots + x_nm_na}{N} = \frac{(x_1.a)m_1 + (x_2.a)m_2 + \dots + (x_n.a)m_n}{N}$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Số trung bình cộng của năm số là 99. Biết bốn trong năm số đó là 95 ; 97 ; 101 ; 103. Tìm số còn lại.

Giai

Gọi số còn lại là x .

$$\text{Ta có } \frac{95 + 97 + 101 + 103 + x}{5} = 99 \Leftrightarrow 396 + x = 99 \cdot 5 \Leftrightarrow x = 99$$

2. Tìm 7 số tự nhiên liên tiếp có số trung bình cộng của chúng là 2010.

Giai

Các số tự nhiên liên tiếp cách nhau 1 đơn vị.

Số trung bình cộng của 7 số tự nhiên liên tiếp là số chính giữa của chúng.

Vậy bảy số tự nhiên liên tiếp cần tìm là :

$$2007 ; 2008 ; 2009 ; 2010 ; 2011 ; 2012 ; 2013.$$

3. Tuổi trung bình của 11 cầu thủ của một đội bóng đá là 23 tuổi. Nếu không kể thủ môn thì tuổi trung bình của 10 cầu thủ còn lại là 22 tuổi. Hỏi thủ môn bao nhiêu tuổi ?

Giai

$$\text{Tổng số tuổi của 11 cầu thủ là : } 23 \cdot 11 = 253 \text{ (tuổi)}$$

$$\text{Tổng số tuổi của 10 cầu thủ không kể thủ môn là : } 22 \cdot 10 = 220 \text{ (tuổi)}$$

$$\text{Tuổi của thủ môn là : } 253 - 220 = 33 \text{ (tuổi)}.$$

4. Cho bảng thống kê sau :

Điểm số (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
5	2	10	
6	•	•	
7	•	•	
9	3	27	
	$N = 20$	Tổng: 140	$\bar{x} = \frac{140}{20} = 7$

Hãy điền các số còn thiếu vào bảng thống kê trên

Giai

Giai: nếu điểm số 6 có tần số là x thì tích là $6x$, điểm số 7 có tần số là y thì tích là $7y$.

Theo dấu bài, ta có :

$$x + y = 20 - (2 + 3) = 15$$

$$\text{và } 6x + 7y = 140 - (10 + 27) = 103$$

$$\text{Do đó } 6(x + y) + y = 103 \Leftrightarrow 6 \cdot 15 + y = 103 \Leftrightarrow y = 13$$

$$\text{Khi đó } x = 15 - y = 2.$$

Ta được bảng thống kê sau :

Điểm số (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
5	2	10	
6	2	12	
7	13	91	
9	3	27	
	$N = 20$	Tổng : 140	$\bar{x} = \frac{140}{20} = 7$

3. Trong kì kiểm tra Toán một lớp gồm 3 tổ A, B và C, điểm trung bình của học sinh ở các tổ được thống kê ở bảng sau :

Tổ	A	B	C	A và B	B và C
Điểm trung bình	9,0	8,8	7,8	8,9	8,2

Biết tổ A gồm 10 học sinh, hãy xác định số học sinh và điểm trung bình của toàn lớp.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, trường Phổ thông năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2009 - 2010).

Giai

Gọi số học sinh của tổ B là x (học sinh), tổ C là y (học sinh)
(Điều kiện $x, y \in \mathbb{N}^+$)

Từ bảng thống kê, ta có

$$\frac{9 \cdot 10 + 8,8x}{10 + x} = 8,9 \quad (1)$$

$$\text{và } \frac{8,8x + 7,8y}{x + y} = 8,2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) có } 90 + 8,8x = 89 + 8,9x$$

$$0,1x = 1$$

$$x = 10$$

$$\text{Thay } x = 10 \text{ vào (2) ta có } \frac{8,8 \cdot 10 + 7,8y}{10 + y} = 8,2$$

$$88 + 7,8y = 82 + 8,2y$$

$$0,4y = 6$$

$$y = 15$$

Vậy số học sinh của tổ B là 10 học sinh, tổ C là 15 học sinh

Do vậy số học sinh của lớp có là : $10 + 10 + 15 = 35$ (học sinh)

Điểm trung bình của toàn lớp là :

$$(9 \cdot 10 + 8,8 \cdot 10 + 7,8 \cdot 15) : 35 = 8,4 \text{ (diểm)}.$$

Chương IV. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1. KHAI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ. GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CẨN NHỎ

1. Khái niệm về biểu thức đại số

Trong toán học, vật lý... thường gặp những biểu thức bao gồm những phép toán (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa) không chỉ thực hiện những số mà có thể còn trên những chữ. Những biểu thức như vậy gọi là biểu thức đại số.

Một biểu thức đại số có thể chứa một hay nhiều chữ, trong những chữ này, có chữ là biến số, có chữ là hằng số.

Các chữ số biểu thị cho một số xác định thì được gọi là hằng số (gọi là hằng).

Các chữ số có thể nhận những giá trị bằng số tùy ý của một tập hợp số nào do gọi là biến số (gọi tắt là biến).

2. Giá trị của một biểu thức đại số

Giá trị của một biểu thức đại số là kết quả tìm được sau khi thay các biến bởi giá trị cho trước.

B/ BÀI TẬP

(1) BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Hãy viết các biểu thức đại số để biểu thị các ý sau :

- a) Tổng các lập phương của hai số a và b.
- b) Tích của tổng hai số a và b với hiệu của chúng.
- c) Bình phương của tổng ba số a, b và c.
- d) Lập phương của tổng hai số a và b.

Giai

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) $a^3 + b^3$ | b) $(a + b)(a - b)$ |
| c) $(a + b + c)^2$ | d) $(a + b)^3$ |

2. Đọc các biểu thức sau :

- a) $7x^2$
- b) $1x + 5t^3$
- c) $(x + 4)(x - 4)$.

Giai

- a) Tích của 7 với bình phương của x.
- b) Lập phương của tổng hai số x và 5.
- c) Tích của tổng hai số x và 4 với hiệu của hai số x và 4.

3. Tính giá trị của biểu thức $2x^2y - 4y^2$ tại $x = -1$ và $y = 1$.

Giai

Giá trị của biểu thức $2x^2y - 4y^2$ tại $x = -1$ và $y = 1$ là
 $2(-1)^2 \cdot 1 - 4 \cdot 1^2 = 2 - 4 = -2$.

4. Tính giá trị của biểu thức $-4m + 5n$ tại $m = 2$; $n = 4$.

Giai

$$-4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = -8 + 20 = 12$$

5. Tính giá trị của biểu thức $5x^2y - 4xy^2$ tại $x = -2 ; y = -1$.

Giai

$$5(-2)^2 \cdot (-1) - 4(-2)(-1)^2 = -20 + 8 = -12$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

6. a) Viết biểu thức đại số biểu thị diện tích hình thang có hai đáy là a, b và đường cao h.

b) Viết biểu thức đại số biểu diễn tổng các bình phương của hai số nguyên le liên tiếp

c) Viết biểu thức đại số biểu thị tích của bốn số nguyên liên tiếp.

Giai

a) $\frac{(a+b)h}{2}$

b) $(2n-1)^2 + (2n+1)^2 (n \in \mathbb{Z})$

c) $n(n+1)(n+2)(n+3) (n \in \mathbb{Z})$

7. Tính giá trị biểu thức $5x^2 + 6x - 2$ tại x thoả mãn $|x - 1| = 2$.

Giai

$$\begin{aligned} |x - 1| = 2 &\Leftrightarrow x - 1 = 2 \text{ hoặc } x - 1 = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{hoặc } x = -1 \end{aligned}$$

Giá trị của biểu thức tại $x = 3$ là : $5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 2 = 45 + 18 - 2 = 61$

Giá trị của biểu thức tại $x = -1$ là : $5(-1)^2 + 6(-1) - 2 = 5 - 6 - 2 = -3$.

8. a) Tính giá trị của biểu thức

$$x^5 - 2009x^4 + 2009x^3 - 2009x^2 + 2009x - 2010 \text{ tại } x = 2008.$$

b) Tính giá trị của biểu thức $2x^3 - 5y^3 + 4$

$$\text{tại } x, y \text{ thoả mãn } (x - 1)^{20} + (y + 2)^{20} = 0$$

Giai

a) $x = 2008$ nên $x + 1 = 2009$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } x^5 - 2009x^4 + 2009x^3 - 2009x^2 + 2009x - 2010 &= x^5 - (x + 1)x^4 + (x + 1)x^3 - (x + 1)x^2 + (x + 1)x - 2010 \\ &= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + x^2 + x - 2010 \\ &= x - 2010 = 2008 - 2010 = -2 \end{aligned}$$

b) $(x - 1)^{20} + (y + 2)^{20} = 0$

$$(x - 1)^{20} = 0 \text{ và } (y + 2)^{20} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ và } y + 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ và } y = -2.$$

Giá trị của biểu thức $2x^3 - 5y^3 + 4$ tại $x = 1 ; y = -2$ là :

$$2 \cdot 1^3 - 5(-2)^3 + 4 = 2 + 40 + 4 = 46.$$

9. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau :

a) $(x - 2)^2 + 245$

b) $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 + 987$

c) $(x - 2,5)^2 + (y + 4,8)^2 + (z - 0,2)^2 + 1,85$

Giai

a) Ta có $(x - 2)^2 \geq 0$

Do đó $(x - 2)^2 + 245 \geq 245$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(x - 2)^2 + 245$ là 245.

b) Ta có $(x + 5)^2 \geq 0$, $(y - 7)^2 \geq 0$

Do đó $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 \geq 987$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x + 5 = 0$ và $y - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ và $y = 7$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 + 987$ là 987

c) Ta có $(x - 2,5)^2 \geq 0$; $(y + 4,8)^2 \geq 0$; $(z - 0,2)^2 \geq 0$

Do đó $(x - 2,5)^2 + (y + 4,8)^2 + (z - 0,2)^2 \geq 1,85$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x - 2,5 = 0$; $y + 4,8 = 0$ và $z - 0,2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2,5$; $y = -4,8$ và $z = 0,2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$(x - 2,5)^2 + (y + 4,8)^2 + (z - 0,2)^2 \geq 1,85$ là 1,85.

10. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau :

a) $-(x - \frac{1}{7})^2 + 68,7$

b) $-(x - 2,4)^2 - (y + 0,3)^2 + 691$

c) $-(x + 2)^2 - (y - 3)^2 - (z + 5)^2 - 1975$.

Giai

a) Ta có $-(x + \frac{1}{7})^2 \leq 0$. Do đó $-(x + \frac{1}{7})^2 + 68,7 \leq 68,7$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x + \frac{1}{7} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $-(x + \frac{1}{7})^2 + 68,7$ là 68,7.

b) Giá trị lớn nhất của biểu thức : $(-x - 2,4)^2 - (y + 0,3)^2 + 691$ là 691

c) Giá trị lớn nhất của biểu thức

$-(x + 2)^2 - (y - 3)^2 - (z + 5)^2 - 1975$ là -1975.

11. Cho biểu thức đại số $M = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Lương nói : Giá trị của biểu thức M tại $x = 23$ là 2009.

Minh nói : Giá trị của biểu thức M tại $x = 18$ là 1458.

Chứng tỏ rằng hai bạn Lương và Minh có ít nhất một bạn nói sai!

Giai

Giả sử cả hai bạn đều nói đúng.

Ta có $23a + b = 2009$ và $18a + b = 1458$

Do đó $(23a + b) - (18a + b) = 2009 - 1458 \Leftrightarrow 5a = 551 \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}$ (Vô lý!)

Vậy điều giả sử trên sai.

Do đó Lương và Minh có ít nhất một bạn nói sai.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

12. Cho $A = \frac{x^3 - 3x^2 + 0.25xy^2 - 4}{x^2 + y}$

Tính giá trị của A biết $x = -\frac{1}{2}$; y là số nguyên âm lớn nhất.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận Tân Phú, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2003 - 2004)

Giai

Giá trị của A tại $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$ (-1 là số nguyên âm lớn nhất) là

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0.25\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^2 - 4}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)} = \frac{-\frac{1}{8} - \frac{3}{4} - \frac{0.25}{2} - 4}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{3}{4}} = \frac{20}{3}.$$

13. a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) sao cho $2x - 5y + 5xy = 14$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Tỉnh Thái Bình, năm học 2002 - 2003, b)

Cho số tự nhiên n có hai chữ số, chữ số hàng chục là x, chữ số hàng đơn vị là y (nghĩa là $x \neq 0$, $n = 10x + y$). Gọi $M = \frac{n}{x + y}$.

1) Tìm n để $M = 2$

2) Tìm n để M nhỏ nhất.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, trường PTNK - DHQG, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011)

Giai

a) $2x - 5y + 5xy = 14$

$2x + 5y(x - 1) = 14$

$2x - 2 + 5y(x - 1) = 14 - 2$

$2(x - 1) + 5y(x - 1) = 12$

$(x - 1)(5y + 2) = 12$

5y + 2 là ước của 12; 5y + 2 chia cho 5 dư 2.

Do đó, ta có

$5y + 2$	2	-3	12
$x - 1$	6	-4	1
x	7	-3	2
y	0	-1	2

b) 1) $M = 2 \Leftrightarrow \frac{10x + y}{x + y} = 2 \Leftrightarrow 10x + y = 2x + 2y \Leftrightarrow y = 8x$

Vì x, y là các chữ số nên $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$

Suy ra $x = 1$, $y = 8$ và $n = 18$

$$2) M = \frac{x+y+9x}{x+y} = 1 + \frac{9x}{x+y} = 1 + \frac{9}{1+\frac{y}{x}}$$

M nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{y}{x}$ lớn nhất $\Leftrightarrow y$ lớn nhất và x nhỏ nhất $\Leftrightarrow y = 9$ và $x = 1$. Vậy $n = 19$.

82. ĐƠN THỨC

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỚ

1. Đơn thức

Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

Chú ý: Số 0 được gọi là đơn thức không.

2. Đơn thức thu gọn

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến mà mỗi biến đã được nâng lên luỹ thừa với số mũ nguyên dương (mỗi biến chỉ được viết một lần). Số nói trên gọi là hệ số, phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.

Chú ý: Một số là một đơn thức thu gọn.

- Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần. Thông thường, khi viết đơn thức thu gọn ta viết hệ số trước, viết phần biến sau, các biến được viết theo thứ tự bảng cữ cái.

Từ nay, khi nói đến đơn thức, nếu không nói gì thêm, ta hiểu đó là đơn thức thu gọn.

3. Bậc của một đơn thức

Bậc của đơn thức có hệ số khác không là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó

Số thực khác 0 là đơn thức bậc không. Số 0 là đơn thức không có bậc.

4. Nhân hai đơn thức

Để nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

Chú ý:

- Để nhân nhiều đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.
- Mỗi đơn thức đều có thể viết thành một đơn thức thu gọn.

B/ BÀI TẬP

(I) BÀI TẬP CƠ BẢN

14. Trong các biểu thức sau biểu thức nào là đơn thức?

- a) $\frac{-2008}{2009}$ b) $\frac{3}{5}x^4y^3z^2$ c) $3x^2 - 5y^3$ d) $\frac{2x^2 + 3y}{7xy}$.

Giai

a) $\frac{-2008}{2009}$ là đơn thức.

b) $\frac{3}{5}x^4y^3z^2$ là đơn thức.

c) $3x^2 - 5y^3$ không phải là đơn thức. d) $\frac{2x^2 + 3y}{7xy}$ không phải là đơn thức.

15. Thu gọn và chỉ ra phán hệ số, phán biến của các đơn thức sau :

a) $\frac{3}{2}x^3y^2 \cdot (-8x^5y^6)$

b) $2xy^5 \cdot (-7x^3y)$

Giai

a) $\frac{3}{2}x^3y^2 \cdot (-8x^5y^6) = \left[\frac{3}{2} \cdot (-8) \right] (x^3 \cdot x^5 \cdot y^2 \cdot y^6) = -12x^8y^8$

Phán hệ số là -12 , phán biến số là x^8y^8 .

b) $2xy^5 \cdot (-7x^3y) = [2 \cdot (-7)] (x \cdot x^3 \cdot y^5 \cdot y) = -14x^4y^6$

Phán hệ số là -14 , phán biến số là x^4y^6 .

16. Tìm tích của các đơn thức sau rồi tìm bậc của đơn thức vừa tìm được đó.

a) $-5x^2y^2$ và $3x^3y$

b) $-\frac{1}{2}xy^3$ và $\frac{-6}{5}x^4y^3$.

Giai

a) $(-5x^2y^2) \cdot (3x^3y) = (-5 \cdot 3)x^2 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot y = -15x^5y^3$

Bậc của đơn thức là $5 + 3 = 10$

b) $\left(-\frac{1}{2}xy^3 \right) \cdot \left(\frac{-6}{5}x^4y^3 \right) = \frac{3}{5}x^5y^6$. Bậc của đơn thức là $5 + 6 = 11$.

17. Điền đơn thức thích hợp vào ô trống

a) $(\boxed{\quad}) \cdot (-x^3y^6) = \frac{3}{7}x^{10}y^{11}$ b) $\left(\frac{2}{5}x^7y^2z^3 \right) \cdot (\boxed{\quad}) = \frac{-4}{3}x^{10}y^2z^5$.

Giai

a) $\frac{-3}{7}x^3y^5$

b) $\frac{-10}{3}x^3z^2$.

BÀI TẬP NÂNG CAO18. Cho các biểu thức sau : $3x^2y$; $-5 + xy$; $7x^2y + 2$; $9x^3y^2z^4$.

a) Biểu thức nào là đơn thức ?

b) Cho biết phán hệ số, phán biến của các đơn thức vừa tìm được.

Giaia) Các biểu thức là đơn thức là $3x^2y$; $9x^3y^2z^4$ b) Đơn thức $3x^2y$ có phán hệ số là 3 , phán biến là x^2y .Đơn thức $9x^3y^2z^4$ có phán hệ số là 9 , phán biến là $x^3y^2z^4$.19. Tìm n ($x \in \mathbb{N}$) biết : $(4x^2y^3)(x^ny^7) = 4x^5y^{10}$.**Giai**

$$(4x^2y^3)(x^ny^7) = 4x^5y^{10} \Leftrightarrow 4x^{2+n} \cdot y^{10} = 4x^5 \cdot y^{10} \Leftrightarrow 2 + n = 5 \Leftrightarrow n = 3.$$

20. Tìm m và n ($m, n \in \mathbb{N}^*$) biết: $(-7x^4y^m)(-5x^n y^4) = 35x^9y^{15}$

Giai

$$(-7x^4y^m)(-5x^n y^4) = 35x^9y^{15}$$

$$35x^{4+n}y^{m+4} = 35x^9y^{15} \Leftrightarrow 4+n=9; m+4=15 \Leftrightarrow n=5; m=11.$$

21. Ba đơn thức $\frac{-2}{11}x^2y^{10}$; $\frac{11}{5}x^3y^5$ và $-4x^7y^{11}$

có thể cùng giá trị âm được không?

Giai

$$\text{Ta có } \left(-\frac{2}{11}x^2y^{10}\right) \cdot \left(\frac{11}{5}x^3y^5\right) \cdot (-4x^7y^{11}) = \frac{8}{5}x^{12}y^{26} \geq 0$$

Do đó ba đơn thức $\frac{-2}{11}x^2y^{10}$; $\frac{11}{5}x^3y^5$ và $-4x^7y^{11}$ không thể có cùng giá trị âm.

22. Chứng tỏ rằng trong ba đơn thức $\frac{3}{5}x^4yz^2$; $-\frac{1}{2}xy^4z^2t$ và $6x^5y^4t^3$ có ít nhất một đơn thức có giá trị không dương.

Giai

$$\text{Ta có } \left(\frac{3}{5}x^4yz^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}xy^4z^2t\right) \cdot (6x^5y^4t^3) = -\frac{9}{5}x^{10}y^8z^4t^4 \leq 0$$

Do đó trong ba đơn thức $\frac{3}{5}x^4yz^2$; $-\frac{1}{2}xy^4z^2t$ và $6x^5y^4t^3$ có ít nhất một đơn thức có giá trị không dương.

23. Cho đơn thức $(a - 7)x^8y^{10}$ (với a là hằng số; x và y khác 0). Tìm a để đơn thức:

a) Dương với mọi x, y khác 0. b) Âm với mọi x, y khác 0.

Giai

Ta có $x^8y^{10} > 0$ với mọi x, y khác 0

a) Do vậy để đơn thức $(a - 7)x^8y^{10}$ dương với mọi x, y khác 0 thì $a - 7 > 0 \Leftrightarrow a > 7$.

b) Do vậy để đơn thức $(a - 7)x^8y^{10}$ âm với mọi x, y khác 0 thì $a - 7 < 0 \Leftrightarrow a < 7$.

24. Cho đơn thức $\left(19t + \frac{5}{t}\right)x^{1890}y^{2010}$

(với t là hằng số khác 0; x và y khác 0). Tìm t để đơn thức

a) Dương với mọi x, y khác 0. b) Âm với mọi x, y khác 0.

Giai

$$\left(19t + \frac{5}{t}\right)x^{1890}y^{2010} = \frac{19t^2 + 5}{t} \cdot x^{1890}y^{2010}.$$

Mà $19t^2 + 5 > 0$ với mọi t (vì $19t^2 \geq 0$ với mọi t)

Và $x^{1890}y^{2010} > 0$ với mọi x, y khác 0.

a) Do vậy để đơn thức $\left(19t + \frac{5}{t}\right)x^{1890}y^{2010}$ dương với mọi x, y khác 0 thì $t > 0$.

b) Do vậy để đơn thức $\left(19t + \frac{5}{t}\right)x^{1890}y^{2010}$ âm với mọi x, y khác 0 thì $t < 0$.

25. Cho đơn thức $M = -5x^2y$

Tìm các cặp số nguyên (x, y) để M có giá trị là -160 .

Giai

$$M = -160 \Leftrightarrow -5x^2y = -160 \Leftrightarrow x^2y = -160 : (-5) \Leftrightarrow x^2y = 32$$

$x^2 \geq 0$, x^2 là ước của 32. Do vậy $x^2 \in \{1, 4, 16\}$

Ta có

x^2	1	4	16
y	32	8	2
x	± 1	± 2	± 4
y	32	8	2

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

26. Các đơn thức $-xy^3, -y^3z^5, -z^5t^9, t^9x^{11}$ có thể cùng có giá trị âm được không?

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, trường chuyên Văn Toán, huyện Đức Phổ, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 1990 - 1991)

Giai

$$\text{Ta có } (-xy^3)(-y^3z^5)(-z^5t^9)(t^9x^{11}) = -(x^{12}y^6z^{10}t^{18}) \leq 0 \quad (1)$$

với mọi x, y, z, t .

Giả sử cả bốn đơn thức $-xy^3, -y^3z^5, -z^5t^9, t^9x^{11}$ có cùng giá trị âm

$$\text{Ta có } (-xy^3)(-y^3z^5)(-z^5t^9)(t^9x^{11}) > 0 \quad (2)$$

(1) và (2) mâu thuẫn!

Vậy các đơn thức $-xy^3, -y^3z^5, -z^5t^9, t^9x^{11}$ không thể cùng có giá trị âm.

83. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CẨN NHỎ

1. Đơn thức đồng dạng

Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức sau khi thu gọn có phần biến giống nhau.

Chú ý: Mọi số thực đều là các đơn thức đồng dạng với nhau.

2. Tổng và hiệu các đơn thức đồng dạng

Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến

II BÀI TẬP CƠ BẢN**27. Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng:**

$$\frac{2}{3}x^3y^3; 6x^2y^2; 3x^4y^5; 7x^5y^3; -\frac{1}{2}x^4y^5; 9x^5y^3; -\frac{5}{7}x^2y^2; 13x^4y^5$$

Giải

Xếp các đơn thức đã cho thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng như sau :

$$\text{Nhóm 1 : } \frac{2}{3}x^3y^3; 7x^5y^3; 9x^5y^3 \quad \text{Nhóm 2 : } 6x^2y^2; -\frac{5}{7}x^2y^2$$

$$\text{Nhóm 3 : } 3x^4y^5; -\frac{1}{2}x^4y^5; 13x^4y^5.$$

28. Tính

$$\text{a)} 7x^3y^5 - \frac{1}{2}x^3y^5 + 4x^3y^5 \quad \text{b)} -\frac{3}{2}xy^2z + \frac{1}{3}xy^2z + 4xy^2z$$

Giải

$$\text{a)} 7x^3y^5 - \frac{1}{2}x^3y^5 + 4x^3y^5 = \left[7 + \left(-\frac{1}{2} \right) + 4 \right]x^3y^5 = 10\frac{1}{2}x^3y^5$$

$$\text{b)} -\frac{3}{2}xy^2z + \frac{1}{3}xy^2z + 4xy^2z = \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{3} + 4 \right)xy^2z = \frac{17}{6}xy^2z$$

29. Diền đơn thức thích hợp vào ô trống :

$$\text{a)} \boxed{\square} + 5x^2y^3 = 15x^2y^3 \quad \text{b)} 9x^3y - \boxed{\square} = 2x^3y$$

Giải

$$\text{a)} \boxed{10x^2y^3} + 5x^2y^3 = 15x^2y^3 \quad \text{b)} 9x^3y - \boxed{7x^3y} = 2x^3y.$$

30. Tìm đơn thức M biết : $M + 5xy^4 = 11xy^4$.**Giải**

$$M + 5xy^4 = 11xy^4 \Leftrightarrow M = 11xy^4 - 5xy^4 \Leftrightarrow M = 6xy^4.$$

31. Viết đơn thức $5xy^3z^2$ dưới dạng tổng hoặc hiệu của hai đơn thức, trong đó có một đơn thức bằng $-7xy^3z^2$.**Giải**

$$5xy^3z^2 = -7xy^3z^2 + 12xy^3z^2$$

$$5xy^3z^2 = -7xy^3z^2 - (-12xy^3z^2)$$

III BÀI TẬP NÂNG CAO**32. Tính**

$$\text{a)} \frac{1}{3}x^5y^2z^3 - 7x^5y^2z^3 + 5x^5y^2z^3 \quad \text{b)} x^3y^2 + 2x^3y^2 + 3x^3y^2 + \dots + 100x^3y^2$$

Giải

$$\text{a)} \frac{1}{3}x^5y^2z^3 - 7x^5y^2z^3 + 5x^5y^2z^3 = -\frac{5}{3}x^5y^2z^3$$

$$\begin{aligned} \text{b)} & x^3y^2 + 2x^3y^2 + 3x^3y^2 + \dots + 100x^3y^2 \\ & = (1 + 2 + 3 + \dots + 100)x^3y^2 = \frac{100(100+1)}{2}x^3y^2 = 5050x^3y^2. \end{aligned}$$

33. Tính giá trị của biểu thức $8x^2y^4 + \frac{11}{2}x^2y^4 + \frac{3}{2}x^2y^4$ tại $x = -\frac{1}{2}$ và $y = 1$

Giai

$$\text{Ta có } 8x^2y^4 + \frac{11}{2}x^2y^4 + \frac{3}{2}x^2y^4 = 15x^2y^4$$

$$15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1^4 = 15 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{15}{4}.$$

34. Điền đơn thức thích hợp vào ô trống :

$$\text{a)} 7x^2y + \boxed{} = 18x^2y - 2x^2y$$

$$\text{b)} \boxed{} + \boxed{} - 4xy^2 = 5xy^2 + xy^2$$

Giai

$$\text{a)} 7x^2y + \boxed{9x^2y} = 18x^2y - 2x^2y$$

$$\text{b)} \boxed{8x^2y} + \boxed{2x^2y} - 4x^2y = 5x^2y + x^2y$$

35. Viết bốn đơn thức đồng dạng với đơn thức $-\frac{1}{2}x^3y$ rồi tính tổng của cả năm đơn thức đó.

Giai

Bốn đơn thức đồng dạng với đơn thức $-\frac{1}{2}x^3y$ là :

$$x^3y ; 5x^3y ; \frac{11}{3}x^3y ; -\frac{4}{3}x^3y.$$

$$\text{Ta có } x^3y + 5x^3y + \frac{11}{3}x^3y + \frac{4}{3}x^3y = 11x^3y.$$

36. Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết

$$x^3y^4 + 2x^3y^4 + 3x^3y^4 + \dots + nx^3y^4 = 820x^3y^4$$

Giai

$$\text{Ta có } x^3y^4 + 2x^3y^4 + 3x^3y^4 + \dots + nx^3y^4 = 820x^3y^4$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)x^3y^4 = 820x^3y^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}x^3y^4 = 820x^3y^4 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 820$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) = 1640 \Leftrightarrow n(n+1) = 40.41$$

Do vậy $n = 40$.

37. Cho biết x, y khác 0. Xác định số m để hiệu của hai đơn thức mx^2y^6 và $2009x^2y^6$ luôn có giá trị âm với mọi giá trị x, y khác 0.

Giai

Ta có $mx^3y^6 - 2009x^3y^6 = (m - 2009)x^3y^6$

Mà $x^3y^6 > 0$; với mọi x, y khác 0.

Do đó để $(m - 2009)x^3y^6 < 0$ với mọi x, y khác 0 thì $m - 2009 < 0 \Leftrightarrow m < 2009$.

38. Chứng minh rằng: $3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$ chia hết cho 13 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giai

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3} &= 3^{n+1}(1 + 3^1 + 3^2) \\ &= 3^{n+1}(1 + 3^1 + 2^2) = 3^{n+1}.13 \text{ chia hết cho } 13. \end{aligned}$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

39. Cho $A = 4mx^4y^2 + (-15x^4y^2) + mx^4y^2$, x và y khác 0

Với giá trị nào của m thì:

a) A dương với mọi x, y khác 0 b) A âm với mọi x, y khác 0

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, trường THCS Colette, Quận 3, TP Hồ Chí Minh, năm học 1994 - 1995)

Giai

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= 4mx^4y^2 + (-15x^4y^2) + mx^4y^2 \\ &= 14m + (-15) + mx^4y^2 = (5m - 15)x^4y^2 \end{aligned}$$

Mà $x^4y^2 > 0$ với mọi x, y khác 0.

a) Do đó A dương với mọi x, y khác 0 thì $5m - 15 > 0 \Leftrightarrow 5m > 15 \Leftrightarrow m > 3$.

b) A âm với mọi x, y khác 0 thì $5m - 15 < 0 \Leftrightarrow 5m < 15 \Leftrightarrow m < 3$.

84. BA THỨC. CỘNG, TRỪ BA THỨC

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CÁN NHỎ

1. Đa thức

Đa thức là một tổng của các đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

2. Thu gọn đa thức

Một đa thức viết dưới dạng thu gọn là một tổng dài số của các đơn thức không đồng dạng với nhau.

3. Bậc của đa thức

Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

Số 0 là đa thức không và không có bậc.

4. Cộng hai đa thức

Muốn cộng hai đa thức ta có thể lần lượt thực hiện các bước:

Bước 1: Viết liên tiếp các hạng tử của hai đa thức đó cùng với dấu của chúng.

Bước 2 Thu gọn đa thức.

3. Trừ hai đa thức

Muốn trừ hai đa thức ta có thể lần lượt thực hiện các bước:

Bước 1 : Viết các hạng tử của đa thức thứ nhất cùng với dấu của chúng.

Bước 2 : Viết tiếp các hạng tử của đa thức thứ hai với dấu ngược lại.

Bước 3 . Thu gọn đa thức

B/ BÀI TẬP

Lý BÀI TẬP CƠ BẢN

40. Thu gọn các đa thức sau :

$$a) A = 7x^4y + 5x^2y^3 - 5x^2y^3 + 2x^2y + 3x^2y^3$$

$$b) B = 4xy^3z - 5x^2y^3z + 7xy^3z - \frac{1}{2}x^2y^3z.$$

Giai

$$a) A = 7x^4y + 5x^2y^3 - 5x^2y^3 + 2x^2y + 3x^2y^3$$

$$= (7x^4y + 2x^2y) + (5x^2y^3 - 5x^2y^3 + 3x^2y^3) = 9x^4y + 3x^2y^3$$

$$b) B = 4xy^3z - 5x^2y^3z + 7xy^3z - \frac{1}{2}x^2y^3z$$

$$= (4xy^3z + 7xy^3z) + (-5x^2y^3z - \frac{1}{2}x^2y^3z) = 11xy^3z - \frac{11}{2}x^2y^3z.$$

41. Tìm bậc của mỗi đa thức sau :

$$a) P = 4x^5 - 7x^3 + \frac{1}{2}x - 9$$

$$b) Q = -6x^3y^4 - 4x^3y + 6x^3y^4 - y^3$$

Giai

a) Bậc của đa thức P là 5

$$b) Q = -6x^3y^4 - 4x^3y + 6x^3y^4 - y^3 = (-6x^3y^4 + 6x^3y^4) - 4x^3y - y^3 = -4x^3y - y^3$$

Bậc của đa thức Q là 6.

42. Cho hai đa thức

$$A = 2x^2 - 6xy + 4y^2;$$

$$B = -5x^2 + 4xy + 7y^2.$$

Tính $A + B$, $A - B$

Giai

$$\text{Ta có } A + B = (2x^2 - 6xy + 4y^2) + (-5x^2 + 4xy + 7y^2)$$

$$= 2x^2 - 6xy + 4y^2 - 5x^2 + 4xy + 7y^2$$

$$= (2x^2 - 5x^2) + (-6xy + 4xy) + (4y^2 + 7y^2)$$

$$= -3x^2 - 2xy + 11y^2$$

$$A - B = (2x^2 - 6xy + 4y^2) - (-5x^2 + 4xy + 7y^2)$$

$$= 2x^2 - 6xy + 4y^2 + 5x^2 - 4xy - 7y^2$$

$$= (2x^2 + 5x^2) + (-6xy - 4xy) + (4y^2 - 7y^2)$$

$$= 7x^2 - 10xy - 3y^2$$

43. Tìm đa thức P và đa thức Q biết :

$$a) P + (x^2y - 5xy^2) = 7x^4y^3 + 5x^2y - 11xy^2$$

$$b) Q - (3x^2 + xyz^2) = 6x^2 + \frac{11}{3}xyz^2$$

Giai

a) $P + (x^2y - 5xy^3) = 7x^4y^3 + 5x^2y - 11xy^3$

$$P = (7x^4y^3 + 5x^2y - 11xy^3) - (x^2y - 5xy^3)$$

$$= 7x^4y^3 + 5x^2y - 11xy^3 - x^2y + 5xy^3$$

$$= 7x^4y^3 + 5x^2y - x^2y - 11xy^3 + 5xy^3 = 7x^4y^3 + 4x^2y - 6xy^3$$

b) $Q - (3x^2 + xyz^3) = 6x^2 + \frac{11}{3}xyz^3$

$$Q = \left(6x^2 + \frac{11}{3}xyz^3 \right) + (3x^2 + xyz^3)$$

$$Q = 6x^2 + \frac{11}{3}xyz^3 + 3x^2 + xyz^3$$

$$Q = (6x^2 + 3x^2) + \left(\frac{11}{3}xyz^3 + xyz^3 \right)$$

$$Q = 9x^2 + \frac{14}{3}xyz^3$$

44. Viết ba đa thức bậc 3 với hai biến x, y và có ba hạng tử.

Giai

$$A = x^2y + 5xy + 6y^2;$$

$$B = x^3 - \frac{11}{2}xy + 4y;$$

$$C = \frac{4}{3}x + 3xy - \frac{7}{2}y^2.$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

45. Thu gọn rồi tính giá trị của đa thức tại $x = 1; y = -\frac{1}{2}$

$$A = 7x^2y - 5xy^2 + 11x^2y - 10xy^2 + 9xy^2$$

Giai

$$\text{Ta có } A = 7x^2y - 5xy^2 + 11x^2y - 10xy^2 + 9xy^2$$

$$= (7x^2y + 11x^2y) + (-5xy^2 - 10xy^2 + 9xy^2) = 18x^2y - 6xy^2$$

Giá trị của đa thức A tại $x = 1; y = -\frac{1}{2}$ là :

$$A = 18 \cdot 1^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{21}{2}.$$

46. Tính giá trị của đa thức

$$B = 9x^{10} - 12x^7 + 6x^4 + 3x + 2010 \text{ tại } x \text{ thoả mãn } 3x^3 - 4x^6 + 2x^3 + 1 = 0$$

Giai

$$\text{Ta có } B = 9x^{10} - 12x^7 + 6x^4 + 3x + 2010$$

$$= 3x(3x^3 - 4x^6 + 2x^3 + 1) + 2010$$

$$\text{Mà } 3x^3 - 4x^6 + 2x^3 + 1 = 0. \text{ Do vậy } B = 3x \cdot 0 + 2010 = 2010.$$

47. Tìm đa thức N biết :

$$M + (5x^2 - 2y^3) = 10x^2 + 4y^3 \text{ và } M + N = 8x^2 - 3y^3$$

Giai

$$M + (5x^2 - 2y^3) = 10x^2 + 4y^3$$

$$M = (10x^2 + 4y^3) - (5x^2 - 2y^3)$$

$$= 10x^2 + 4y^3 - 5x^2 + 2y^3 = (10x^2 - 5x^2) + (4y^3 + 2y^3) = 5x^2 + 6y^3$$

$$M + N = 8x^2 - 3y^3$$

$$\Rightarrow N = 8x^2 - 3y^3 - M$$

$$N = 8x^2 - 3y^3 - (5x^2 + 6y^3)$$

$$N = 8x^2 - 3y^3 - 5x^2 - 6y^3$$

$$N = 3x^2 - 9y^3$$

48. Cho các đa thức $P = 9x^2 - 7xy + 11y^2$; $Q = -4x^2 + 7xy - 6y^2$

Chứng tỏ rằng P, Q không thể cùng có giá trị âm.

Giai

$$\text{Ta có } P + Q = (9x^2 - 7xy + 11y^2) + (-4x^2 + 7xy - 6y^2)$$

$$= 9x^2 - 7xy + 11y^2 - 4x^2 + 7xy - 6y^2$$

$$= (9x^2 - 4x^2) + (-7xy + 7xy) + (11y^2 - 6y^2) = 5x^2 + 5y^2 \geq 0$$

Do đó P, Q không thể cùng có giá trị âm

49. Cho các đa thức $A = 5x^2 + 6xy - 7y^2$; $B = -9x^2 - 8xy + 11y^2$.

$$C = 6x^2 + 2xy - 3y^2$$

Chứng tỏ rằng A, B, C không thể cùng có giá trị âm

Giai

Ta có

$$A + B + C = (5x^2 + 6xy - 7y^2) + (-9x^2 - 8xy + 11y^2) + (6x^2 + 2xy - 3y^2)$$

$$= 5x^2 + 6xy - 7y^2 - 9x^2 - 8xy + 11y^2 + 6x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$= (5x^2 - 9x^2 + 6x^2) + (6xy - 8xy + 2xy) + (-7y^2 + 11y^2 - 3y^2)$$

$$= 2x^2 + y^2 \geq 0$$

Do đó A, B, C không thể cùng có giá trị âm

50. Cho các đa thức $M = -6x^2 + 5xy - 13y^2$, $N = x^2 - 5xy + 2y^2$

Chứng tỏ rằng M, N không thể cùng có giá trị dương

Giai

$$\text{Ta có : } M + 5N = -6x^2 + 5xy - 13y^2 + 5(x^2 - 5xy + 2y^2)$$

$$= -6x^2 + 5xy - 13y^2 + 5x^2 - 5xy + 10y^2$$

$$= (-6x^2 + 5x^2) + (5xy - 5xy) + (-13y^2 + 10y^2) = -x^2 - 3y^2 \leq 0$$

Do đó M, 5N không thể cùng có giá trị dương

Vậy M, N không thể cùng có giá trị dương.

■ BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

51. a) Cho a, b, c thoả mãn $a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng $ab + 2bc + 3ca \leq 0$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, trường Phổ thông năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2005 - 2006)

b) 1) Chứng minh rằng: $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) = x^5 - y^5$

2) Cho $x > y > 0$ và $x^5 + y^5 = x - y$. Chứng minh rằng $x^4 + y^4 < 1$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1, Tp. Hồ Chí Minh năm học 1998 - 1999)

Giai

a) Từ $a + b + c = 0$. Suy ra $b + c = -a$, $a + b = -c$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } ab + 2bc + 3ca &= ab + ca + 2bc + 2ca = a(b + c) + 2c(b + a) \\ &= a(-a) + 2c(-c) = -a^2 - 2c^2 \leq 0. \end{aligned}$$

b) 1) $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

$$= x(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) - y(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$= x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 - x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5$$

$$= x^5 - y^5$$

2) Vì $x > y > 0$ (gt) và theo a) ta có

$$x - y > 0, x^5 - y^5 < x^4 + y^4, x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > x^4 + y^4$$

$$\text{Do đó } (x - y)(x^4 + y^4) < (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$= x^5 - y^5 < x^5 + y^5 = x - y$$

$$\Rightarrow (x - y)(x^4 + y^4) < x - y \Rightarrow x^4 + y^4 < 1.$$

52. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Bắc Giang, năm học 2009 - 2010.)

Giai

$$\text{Ta có } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$$

$$= a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d$$

$$= a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) + d(d - 1) \text{ chia hết cho } 2$$

Mà $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ nên $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(b^2 + d^2)$ chia hết cho 2.

Do đó $a + b + c + d$ chia hết cho 2. Mà $a + b + c + d \geq 4$

Vậy $a + b + c + d$ là hợp số.

§5. ĐA THỨC MỘT BIẾN. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỎ

1. Đa thức một biến :

Đa thức một biến là tổng của những đơn thức cùng một biến

Chú ý : Mọi số được coi là một đa thức một biến.

Để chỉ rõ A là đa thức của biến y ta viết A(y).

Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.

2. Sắp xếp một đa thức :

Thường sắp xếp các hạng tử của đa thức theo luỹ thừa tăng hoặc giảm của biến.

Chú ý : Để sắp xếp các hạng tử của một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

3. Hệ số

Xét đa thức $P(x) = 5x^4 - 19x^3 + 6x - 4$

5 là hệ số của luỹ thừa bậc 4 ; -19 là hệ số của luỹ thừa bậc 3 ;

6 là hệ số của luỹ thừa bậc 1 ;

-4 là hệ số của luỹ thừa bậc 0 (còn gọi là hệ số tự do).

5 còn gọi là hệ số cao nhất.

4. Cộng, trừ đa thức một biến

Để cộng hoặc trừ các đa thức một biến, ta có thể thực hiện một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện cách cộng, trừ đa thức đã học.

Cách 2 Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức theo luỹ thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc tương tự như cộng, trừ các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng σ cung một cột).

B/ BÀI TẬP

LJ BÀI TẬP CƠ BẢN

53. Cho đa thức $A(x) = 9x^2 + 5x^4 - 6x^3 + 2x^6 - 1 + 3x^3$

- a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $A(x)$ theo luỹ thừa giảm của biến.
b) Viết các hệ số khác 0 của đa thức $A(x)$.

Giai

a) Thu gọn : $A(x) = 9x^2 + 5x^4 - 6x^3 + 2x^6 - 1 + 3x^3$
 $= 9x^2 + 5x^4 + (-6x^3 + 3x^3) + 2x^6 - 1 = 9x^2 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^6 - 1$

Sắp xếp các hạng tử của đa thức theo luỹ thừa giảm dần của biến.

$$A(x) = 2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 1$$

- b) Các hệ số khác 0 của đa thức là : 2 ; 5 ; -3 ; 9 ; -1.

54. Tìm bậc của đa thức $P(x) = 2x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 7x + 8$

Giai

Bậc của đa thức là : 5

55. Xác định hệ số của đa thức $P(x) = mx + 12$ biết $P(2) = 34$

Giai

Ta có $P(2) = 34$

$$\Rightarrow m \cdot 2 + 12 = 34 \Rightarrow m \cdot 2 = 34 - 12 \Rightarrow 2m = 22 \Rightarrow m = 11$$

56. Cho hai đa thức $P(x) = -7x^4 + x^3 + 5x^2 - 4x + 9$

$$Q(x) = 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 1$$

Tính $P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$

Giai

Ta có : $P(x) + Q(x) = (-7x^4 + x^3 + 5x^2 - 4x + 9) + (3x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 1)$
 $= -7x^4 + x^3 + 5x^2 - 4x + 9 + 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 1$
 $= (-7x^4 + 3x^4) + (x^3 + 4x^3) + (5x^2 - x^2)$
 $\quad + (-4x + 2x) + (9 - 1)$
 $= -4x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 2x + 8$

$$\begin{aligned}
 P(x) - Q(x) &= (-7x^4 + x^3 + 5x^2 - 4x + 9) - (3x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 1) \\
 &= -7x^4 + x^3 + 5x^2 - 4x + 9 - 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1 \\
 &= (7x^4 - 3x^4) + (x^3 - 4x^3) + (5x^2 + x^2) \\
 &\quad + (-4x - 2x) + 9 + 1 \\
 &= -10x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6x + 10
 \end{aligned}$$

57. Cho đa thức $G(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 6$.

Viết đa thức này dưới dạng tổng của hai đa thức biến x .

Giai

Có nhiều cách viết, chẳng hạn :

$$4x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = (3x^3 - 3x^2 + 2x - 1) + (x^3 + 3x - 5)$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

58. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng tỏ rằng nếu $5a + b + 2c = 0$ thì $P(2)P(-1) \leq 0$

Giai

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } P(2) + P(-1) &= (a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c) + (a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c) \\
 &= 4a + 2b + c + a - b + c = 5a + b + 2c = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(2) = -P(-1)$$

$$\text{Do đó } P(2)P(-1) = -P(-1)P(-1) = -(P(-1))^2 \leq 0$$

59. Tính tổng các hệ số của các đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức

$$P(x) = (8x^2 + 3x - 10)^{2008} (8x^2 + x - 10)^{2009}$$

Giai

Sau khi bỏ ngoặc, ta sẽ có được

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\text{Với } n = 2.2008 + 2.2009 = 8034$$

Thay $x = 1$, giá trị của đa thức là $P(1)$ bằng tổng các hệ số

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } P(1) &= (8 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 10)^{2008} (8 \cdot 1^2 + 1 - 10)^{2009} \\
 &= 1^{2008} (-1)^{2009} = 1 \cdot (-1) = -1
 \end{aligned}$$

60. Cho các đa thức $P(x) = 5x^2 - 6x + 3$

$$Q(x) = 4x^2 + 5x^3 - 3x + 1 ; G(x) = x^3 + 7x - 9$$

Tính $P(x) + Q(x) - G(x)$.

Giai

$$P(x) + Q(x) - G(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= (5x^2 - 6x + 3) + (4x^2 + 5x^3 - 3x + 1) - (x^3 + 7x - 9) \\
 &= 5x^2 - 6x + 3 + 4x^2 + 5x^3 - 3x + 1 - x^3 - 7x + 9 \\
 &= (5x^3 - x^3) + (5x^2 + 4x^2) + (-6x - 3x - 7x) + (3 + 1 + 9) \\
 &= 4x^3 + 9x^2 - 16x + 13
 \end{aligned}$$

61. Cho hai đa thức $A(x) = 4x^2 - 7x^3 + 5x^4 - 7$; $B(x) = 3x^2 - 3x^3 + 7x^3 + 9$

Chứng tỏ rằng trong hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ có một đa thức có giá trị dương

Giai

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } A(x) + B(x) &= (4x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7) + (3x^2 - 3x^4 + 7x^3 + 9) \\ &= 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7 + 3x^2 - 3x^4 + 7x^3 + 9 \\ &= 2x^4 + 7x^2 + 2 > 0, \text{ với mọi } x \end{aligned}$$

Do vậy hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ có một đa thức có giá trị dương.

62. Cho hai đa thức $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - 9x + 4$, $Q(x) = -5x^3 - 4x^2 + 9x + 5$

Chứng minh rằng không tồn tại giá trị nào của x để hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ cùng có giá trị không dương.

Giai

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (5x^3 + 6x^2 - 9x + 4) + (-5x^3 - 4x^2 + 9x + 5) \\ &= 2x^2 + 9 > 0 \text{ với mọi } x \end{aligned}$$

Ta có $P(x) + Q(x) > 0$, do đó hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ không thể có giá trị cùng không dương.

Vậy không có giá trị nào của x để $P(x)$ và $Q(x)$ cùng có giá trị không dương.

63. Cho đa thức $ax^2 + bx + c$ bằng 0 với mọi giá trị của x .

Chứng minh rằng $a = b = c = 0$.

Giai

Vì đa thức $ax^2 + bx + c = 0$ với mọi x .

Ta cho x nhận các giá trị $x = 0, x = 1, x = -1$.

Ta có $c = 0, a + b + c = 0, a - b + c = 0$,

Do đó $a + b = 0$ và $a - b = 0$

Nên $a + b + a - b = 0$, suy ra $2a = 0 \Rightarrow a = 0$ Ta có $b = 0$

Vậy $a = b = c = 0$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

64. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ nhận giá trị nguyên với mọi giá trị nguyên của x . Chứng minh rằng $2a, a + b$ và c là các số nguyên.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 1991 - 1992)

Giai

$$\text{Ta có : } f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c \in \mathbb{Z}$$

$$f(1) = a.1^2 + b.1 + c = a + b + c \in \mathbb{Z}$$

Nên $a + b \in \mathbb{Z}$

$$f(2) = a.2^2 + b.2 + c = 4a + 2b + c \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Mà } 4a + 2b + c = 2a + 2a + 2b + c = 2a + 2(a + b) + c$$

Nên $2a \in \mathbb{Z}$.

65. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất $f(1), f(4), f(9)$ là các số hữu tỉ.

Chứng minh rằng khi đó a, b, c là các số hữu tỉ.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán, trường Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2000 - 2001)

Giai

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c \in Q \quad (1)$$

$$f(4) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 16a + 4b + c \in Q \quad (2)$$

$$f(9) = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c = 81a + 9b + c \in Q \quad (3)$$

Từ (1) và (2) có : $(16a + 4b + c) - (a + b + c) = 15a + 3b = 3(5a + b) \in Q$

Do đó $5a + b \in Q$

Từ (2) và (3) có

$$(81a + 9b + c) - (16a + 4b + c) = 65a + 5b = 5(13a + b) \in Q$$

Do đó $13a + b \in Q$

$$(13a + b) - (5a + b) = 8a \in Q$$

$\Rightarrow a \in Q$

$$a \in Q \text{ và } 13a + b \in Q \Rightarrow b \in Q$$

Vì $a \in Q$, $b \in Q$, $a + b + c \in Q \Rightarrow c \in Q$

58. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIỂN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỎ

Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức.

Chú ý : Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm... hoặc không có nghiệm.

Số nghiệm của một đa thức (khác đa thức không) không vượt quá bậc của nó

B/ BÀI TẬP

LƯ BÀI TẬP CƠ BẢN

66. Kiểm tra xem số $1 ; 2 ; -3$ có phải là nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^2 + 2x - 3$$

Giai

$$P(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0 \text{ nên } x = 1 \text{ là nghiệm của đa thức}$$

$$P(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$P(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5 \text{ nên } x = 2 \text{ không phải là nghiệm của đa thức}$$

$$P(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$P(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 0 \text{ nên } x = -3 \text{ là nghiệm của đa thức}$$

$$P(x) = x^2 + 2x - 3$$

67. Tìm nghiệm của đa thức sau :

a) $A(x) = 5x - 7$

b) $B(y) = \frac{1}{2}y + \frac{5}{7}$

Giai

a) $A(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow 5x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$

Vậy $x = \frac{7}{5}$ là nghiệm của đa thức $A(x)$.

b) $y = -\frac{10}{7}$ là nghiệm của đa thức B(y)

68. Tìm nghiệm của đa thức sau :

a) $P(x) = (x + 5)(x - \frac{3}{2})$

b) $Q(x) = x(x + 5)$

Giai

a) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 5)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \\ x - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$

69. Chứng tỏ rằng đa thức sau không có nghiệm :

a) $P(x) = 8x^4 + 7$

b) $Q(x) = (x + 3)^2 + 7$

Giai

a) Ta có $8x^4 \geq 0$ với mọi x nên $P(x) = 8x^4 + 7 > 0$ với mọi x

Do đó $P(x) = 8x^4 + 7$ không có nghiệm.

b) $Q(x) = (x + 3)^2 + 7$

Ta có $(x + 3)^2 \geq 0$ với mọi x. Nên $Q(x) = (x + 3)^2 + 7 > 0$ với mọi x

Do đó $Q(x)$ không có nghiệm.

70. Tìm đa thức A(x) có hai nghiệm $5; -\frac{4}{7}$.

Giai

Có nhiều đa thức như vậy, chẳng hạn : $A(x) = (x - 5)\left(x + \frac{4}{7}\right)$

C) BÀI TẬP NÂNG CAO

71. Tìm nghiệm các đa thức sau :

a) $Q(x) = (x^3 + 8)(x + \frac{2}{5})(x^2 - 9)$ b) $P(x) = x^2 + 7x$

Giai

a) $Q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8 = 0 \\ x + \frac{2}{5} = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -8 \\ x = -\frac{2}{5} \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{2}{5} \\ x = \pm 3 \end{cases}$

Vậy $x = -2, x = -\frac{2}{5}, x = 3, x = -3$ là các nghiệm của đa thức Q(x).

b) $P(x) = x^2 + 7x = x(x + 7)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -7 \end{cases}$

72. Chứng minh rằng các đa thức sau không có nghiệm

a) $A(x) = (x - 5)^2 + 1$

b) $B(x) = x^2 + 10x + 36$

Giai

a) $A(x) = (x - 5)^2 + 1 > 0$ với mọi x , vì $(x - 5)^2 \geq 0$

Vậy đa thức $A(x)$ không có nghiệm.

b) $B(x) = x^2 + 10x + 36 = x^2 + 5x + 5x + 25 + 11 = x(x + 5) + 5(x + 5) + 11$
 $= (x + 5)(x + 5) + 11 = (x + 5)^2 + 11 > 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $B(x)$ không có nghiệm

73. Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có ít nhất hai nghiệm, biết :

$(x - 6)P(x) = (x + 1)P(x - 4)$

Giai

Vì $(x - 6)P(x) = (x + 1)P(x - 4)$ với mọi x nên

• Khi $x = 6$ thì $(6 - 6)P(6) = (6 + 1)P(6 - 4)$

$$0 = 7P(2)$$

$$P(2) = 0$$

Vậy 2 là nghiệm của $P(x)$

• Khi $x = -1$ thì $(-1 - 6)P(-1) = (-1 + 1)P(-1 - 4)$

$$-7(P(-1)) = 0$$

$$P(-1) = 0$$

Vậy -1 là nghiệm của $P(x)$.

Do đó $P(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 2 và -1.

74. Cho đa thức bậc hai $P(x)$ thoả mãn $P(1) = P(-1)$. Chứng minh rằng $P(x) = P(-x)$ với mọi x

Giai

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Ta có : } P(1) = P(-1) \Leftrightarrow a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$P(x) = ax^2 + c$$

$$\text{Do vậy } P(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = P(x)$$

75. Chứng tỏ rằng nếu $a + b + c = 0$ thì đa thức

$$A(x) = ax^2 + bx + c$$
 có một trong các nghiệm là 1.

Giai

$$\text{Ta có : } A(1) = a.1^2 + b.1 + c = a + b + c = 0$$

$\Rightarrow x = 1$ là một nghiệm của đa thức $A(x)$

76. Xét hai đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ và x_1 ; x_2 là hai số khác nhau. Chứng minh rằng nếu $P(x)$ và $Q(x)$ cùng nhận x_1 ; x_2 làm nghiệm thì $P(x) = Q(x)$.

Giai

$$\text{Ta có } x_1^2 + ax_1 + b = x_1^2 + cx_1 + d = 0$$

$$x_1^2 + ax_2 + b = x_1^2 + cx_2 + d = 0 \text{ và } x_1 \neq x_2$$

$$\text{Suy ra } a(x_1 - x_2) = c(x_1 - x_2) \Rightarrow a = c$$

Do đó $ax_1 + b = cx_1 + d$; $ax_2 + b = cx_2 + d \Rightarrow b = d$

Vậy $P(x) = Q(x)$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

77. a) Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $x.P(x+2) = (x^2 - 9)P(x)$

Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có ít nhất ba nghiệm.

(Đề kiểm tra lớp 7 chuyên toán, trung THCS Colette, Quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1994 - 1995)

b) Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $P(0)$ và $P(1)$ là số lẻ.

Chứng minh rằng $P(x)$ không thể có nghiệm là số nguyên

(Đề thi vô địch Toán Mat-xcô-va, năm 1980)

Giải

a) Khi $x = 0$ thì $0.P(2) = -9.P(0) \Rightarrow P(0) = 0$

Khi $x = 3$ thì $3.P(5) = 0.P(3) \Rightarrow P(5) = 0$

Khi $x = -3$ thì $-3.P(-1) = 0.P(-3) \Rightarrow P(-1) = 0$

Đa thức $P(x)$ có ít nhất ba nghiệm là $0; -3$ và 3 .

b) $P(0) = d$ lẻ, $P(1) = a + b + c + d$ lẻ. Do đó $-P(1)$ là số lẻ. Giả sử đa thức $P(x)$ có một nghiệm nguyên là m .

Ta có $P(m) = 0$.

$$\Rightarrow (am^3 + bm^2 + cm + d) - (a + b + c + d) \text{ lẻ}$$

$$\Rightarrow a(m^3 - 1) + b(m^2 - 1) + c(m - 1) \text{ lẻ} \Rightarrow m \text{ chẵn}$$

$\Rightarrow P(m) \text{ lẻ. Điều này mâu thuẫn!}$

78. Tìm một số biết rằng ba lần bình phương của nó đúng bằng hai lần lập phương của số đó.

(Đề thi giải Lê Quý Đôn, Toán lớp 8, báo Khản Quang Đỏ, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011)

Giải

Gọi số cần tìm là x . Ta có $3x^2 = 2x^3$

$$3x^2 = 2x^3 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(3 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ hoặc } 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{3}{2}$$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Cho biểu thức $5x^2 + 7x - 4$.

Tính giá trị của biểu thức tại x sao cho $x^2 + x = 0$.

Giải

$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x + 22)^2 + (y - 12)^2 + 2009$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{10}{(x - 11)^2 + 29}$

Giai

a) Ta có $(x + 22)^2 \geq 0$; $(y - 12)^2 \geq 0$. Do đó $A \geq 2009$

b) Ta có $(x - 11)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 11)^2 + 29 \geq 29$

$$\text{Do đó } B = \frac{10}{(x - 11)^2 + 29} \leq \frac{10}{29}$$

3. Cho ba đơn thức $-\frac{3}{5}x^2y^5z^3$; $-\frac{2}{5}x^3yzt^2$ và $\frac{5}{7}x^{11}y^2z^2$

Chứng minh rằng trong ba đơn thức đã cho có ít nhất một đơn thức có giá trị không dương.

Giai

$$\text{Ta có } \left(-\frac{3}{5}x^2y^5z^3\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}x^3yzt^2\right) \cdot \left(\frac{5}{7}x^{11}y^2z^2\right) = \frac{-6}{35}x^{16}y^8x^6t^2 \leq 0$$

Do đó trong ba đơn thức đã cho có ít nhất một đơn thức có giá trị không dương.

4. Cho đa thức $P(x) = ax^4 + bx + c$. Chứng tỏ rằng nếu $5x - b + 2c = 0$ thì $P(1)P(-2) \leq 0$

Giai

$$P(1) + P(-2) = a + b + c + 4a - 2b + c = 5a - b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow P(1) = -P(-2). \text{ Do đó } P(1)P(-2) = -(P(-2))^2 \leq 0$$

5. Cho đa thức $P(x) = ax^4 + bx + c$.

Cho biết $9a - b = -3c$. Chứng minh rằng trong ba số $P(-1)$; $P(-2)$; $P(2)$ có ít nhất một số không âm, ít nhất một số không dương.

Giai

$$\text{Ta có } P(-1) + P(-2) + P(2) = 9a - b + 3c = 0 \text{ (vì } 9a - b = -3c\text{)}$$

Do đó trong ba số $P(-1)$, $P(-2)$, $P(2)$ có ít nhất một số không âm, ít nhất một số không dương.

6. Chứng tỏ rằng đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có một nghiệm bằng -1 nếu $a - b + c - d = 0$

Giai

$$\text{Ta có } P(-1) = -a + b - c + d = 0 \text{ (vì } a - b + c - d = 0\text{)}$$

7. Cho đa thức $P(x)$ bậc 4 đối với biến x và $P(1) = P(-1)$, $P(2) = P(-2)$.

Chứng minh rằng $P(x) = P(-x)$ với mọi x .

Giai

$P(x)$ là đa thức bậc 4 nên $P(x)$ có dạng :

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Ta có $P(1) = P(-1)$; $P(2) = P(-2)$

$$\text{Suy ra } a_1 + a_3 = -a_1 - a_3 \Leftrightarrow 2a_1 + 8a_3 = -2a_1 - 8a_3 \Leftrightarrow a_1 = a_3 = 0$$

$$\text{Vậy } P(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$$

$$P(-x) = a_4(-x)^4 + a_2(-x)^2 + a_0 = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = P(x).$$

8. Chứng minh rằng các đa thức sau không có nghiệm

a) $x^2 + 6x + 11$

b) $x^2 - x + 2$

Giai

a) $x^2 + 6x + 11 = x^2 + 3x + 3x + 9 + 2$

$$= x(x + 3) + 3(x + 3) + 2 = (x + 3)(x + 3) + 2$$

$$\Rightarrow (x + 3)^2 + 2 > 0 \text{ với mọi } x.$$

b) $x^2 - x + 2 = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = x\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{4}$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ với mọi } x.$$

9. a) Tìm một đa thức có các nghiệm là 19 ; 5 ; -2010.

b) Tìm một đa thức có các nghiệm là 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ... ; 2011

Giai

a) $(x - 19)(x - 5)(x + 2011)$

b) $(x - 1)(x - 3)(x - 5) \dots (x - 2011)$

10. Cho đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện:

$$(x - 5)P(x + 4) = (x + 3)P(x)$$

Chứng minh rằng đa thức có ít nhất hai nghiệm.

Giai

Cho $x = 5$, ta có $0.P(9) = 8.P(5)$

$\Rightarrow P(5) = 0 \Rightarrow 5$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$

Cho $x = -3$, ta có $-8P(1) = 0.P(-3)$

$\Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow 1$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

Vậy đa thức $P(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 5 và 1.

11. Cho đa thức $Q(x) = x^2 + mx - 12$ (m là hằng số).

Tìm các nghiệm của đa thức $Q(x)$. Biết rằng đa thức $Q(x)$ có một nghiệm là -3.

Giai

Ta có -3 là nghiệm của đa thức $Q(x)$

Do đó $(-3)^2 + m.(-3) - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 9 - 3m - 12 = 0 \Leftrightarrow -3 - 3m = 0 \Leftrightarrow -3m = 3 \Leftrightarrow m = -1$$

Do vậy $Q(x) = x^2 - x - 12$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) - 4(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của đa thức $Q(x)$ là -3 ; 4.

PHẦN HÌNH HỌC**Chương I. DƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.
DƯỜNG THẲNG SONG SONG****§1. HAI GÓC ĐỐI ĐỊNH****A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỚ**

1. **Định nghĩa :** Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.
2. **Tính chất :** Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

B/ BÀI TẬP**C/ BÀI TẬP CƠ BẢN**

1. a) Vẽ góc xAy có số đo bằng 40° .
- b) Vẽ tia phân giác At của góc xAy .
- c) Vẽ góc $x'Ay'$ đối đỉnh với góc xAy .
- d) Vẽ tia At' là tia đối của tia At . Hỏi tia At' có phải là tia phân giác của $x'Ay'$ không? Vì sao?

Giải

d) Vì At là tia phân giác của góc xAy nên $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (1).

Vì At' là tia đối của tia At nên $\hat{A}_1 = \hat{A}_3$ (2) (hai góc đối đỉnh):

$$\hat{A}_2 = \hat{A}_4 \quad (3) \text{ (hai góc đối đỉnh).}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\hat{A}_2 = \hat{A}_4$ (4).

Mà tia At' nằm giữa hai tia Ax' và Ay' nên từ (4) suy ra At' là tia phân giác của góc $x'Ay'$.

2. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O tạo thành $\widehat{AOC} = 50^\circ$.

a) Viết tên các cặp góc đối đỉnh (khác góc bẹt).

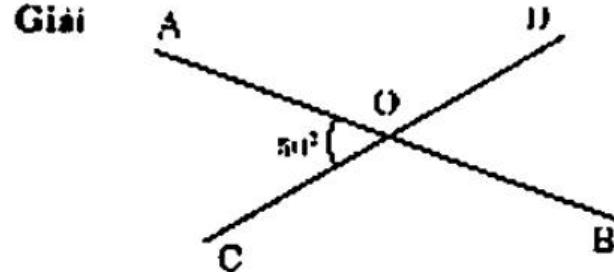
b) Tính số đo góc BOC và góc BOD .

Giải

a) \widehat{AOC} và \widehat{BOD} .

\widehat{AOD} và \widehat{BOC} .

b) $\widehat{BOD} = 50^\circ$.



3. Cho góc nhọn \widehat{AOB} , và \widehat{BOC} và \widehat{AOD} là hai góc kề bù với \widehat{AOB} .

Chứng tỏ rằng :

a) Hai góc \widehat{BOC} và \widehat{AOD} là hai góc đối đỉnh

b) Hai tia phân giác của hai góc \widehat{BOC} và \widehat{AOD} là hai tia đối nhau.

Giai

a) \widehat{AOB} và \widehat{BOC} là hai góc bẹ bù nên

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^\circ$$

$\Rightarrow OA$ và OC là hai tia đối nhau.

Tương tự \widehat{AOB} và \widehat{AOD} là hai góc kề bù

$$\text{Nên } \widehat{AOB} + \widehat{AOD} = 180^\circ$$

$\Rightarrow OB$ và OD là hai tia đối nhau.

Do đó \widehat{BOC} và \widehat{AOD} có mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia nên là hai góc đối đỉnh.

b) Gọi Om là tia phân giác của góc \widehat{BOC} và On là tia phân giác của

$$\text{góc } \widehat{AOD}. \text{ Ta có } m\widehat{OC} = \frac{1}{2}\widehat{COD}, n\widehat{OA} = \frac{1}{2}\widehat{AOD}$$

mà $\widehat{COB} = \widehat{AOD}$ (hai góc đối đỉnh)

nên $m\widehat{OC} = n\widehat{OA}$.

Do đó $n\widehat{OC} + m\widehat{OC} = 180^\circ \Rightarrow Om$ và On là hai tia đối nhau.

BÀI TẬP NÂNG CAO

4. Xét các cặp góc đối đỉnh \hat{A}_1 và \hat{A}_3 , \hat{A}_2 và \hat{A}_4 tạo thành khi hai đường thẳng a, b cắt nhau tại A. Tính số đo của các góc \hat{A}_3 , \hat{A}_4 trong mỗi trường hợp sau :

a) $\hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 100^\circ$

b) $\hat{A}_1 - \hat{A}_2 = 100^\circ$

c) $2\hat{A}_1 = \hat{A}_4$.

Giai

a) Ta có : $\hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 100^\circ$

mà $\hat{A}_1 = \hat{A}_3$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1 = 2\hat{A}_3 = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_3 = 50^\circ.$$

Ta có : $\hat{A}_1 - \hat{A}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow 50^\circ + \hat{A}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 130^\circ$.

mà $\hat{A}_4 = \hat{A}_2$ (đối đỉnh)

$$\text{nên } \hat{A}_4 = 130^\circ.$$

b) $\hat{A}_3 = 110^\circ, \hat{A}_4 = 70^\circ$

c) $\hat{A}_3 = 108^\circ, \hat{A}_4 = 72^\circ$.

5. Cho ba tia Ox, Oy, Oz sao cho $x\widehat{Oy} = y\widehat{Oz} = x\widehat{Oz}$. Chứng minh tia đối của tia Ox, Oy, Oz lần lượt là tia phân giác của $y\widehat{Oz}$, $x\widehat{Oz}$ và $x\widehat{Oy}$.

Giai

Gọi Ox' , Oy' , Oz' lần lượt là tia đối của tia Ox , Oy , Oz .

$$\text{Ta có: } \widehat{xOy} + \widehat{yOx'} = 180^\circ \text{ (ké bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{yOx'} = 180^\circ - \widehat{xOy}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \widehat{zOx'} = 180^\circ - \widehat{xOz}$$

$$\text{mà } \widehat{xOy} = \widehat{xOz}$$

$$\text{nên } \widehat{yOx'} = \widehat{zOx'}$$

$\Rightarrow Ox'$ là tia phản giác của yOz .

6. Qua điểm O vẽ 5 đường thẳng phân biệt.

a) Có bao nhiêu góc trong hình vẽ ?

b) Trong các góc ấy, có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt ?

c) Xét các góc không có điểm trong chung, chứng tỏ tồn tại hai góc lớn hơn hoặc bằng 36° , tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 36° .

Giai

a) Trong hình vẽ có $2.5 = 10$ tia chung gốc O. Mỗi tia tạo với một trong 9 tia còn lại thành 9 góc, có 10 tia nên có $9.10 = 90$ góc.

Tuy nhiên mỗi góc đã được tính 2 lần

Số góc thực sự có là $90 : 2 = 45$ (góc).

b) Có 5 góc bẹt.

Do vậy các góc nhỏ hơn góc bẹt trong hình vẽ có là $45 - 5 = 40$ (góc)

Mỗi góc trong 40 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó, tạo thành một cặp góc đối đỉnh. Vậy có $40 \cdot 2 = 20$ cặp góc đối đỉnh.

c) Có 10 góc không có điểm trong chung. Tổng các góc đó bằng 360° .

Nếu mọi góc đều nhỏ hơn 36° thì tổng của chúng nhỏ hơn 360° , vô lý!

Do vậy luôn có một góc lớn hơn hoặc bằng 36° .

Mặt khác mỗi góc trong 10 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó, hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

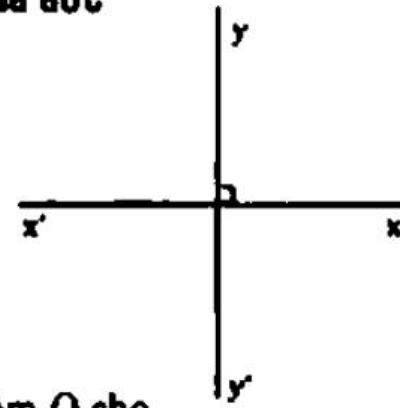
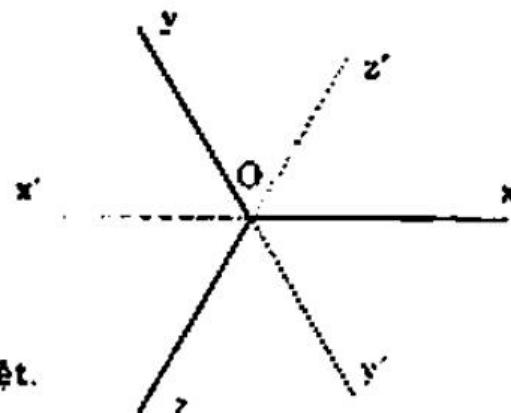
Vậy tồn tại hai góc lớn hơn hoặc bằng 36°

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC**A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CẨN NHỎ****1. Hai đường thẳng vuông góc ?**

Hai đường thẳng vuông góc $x'x$ và $y'y$ cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông gọi là hai đường thẳng vuông góc và được kí hiệu là $x'x \perp y'y$.

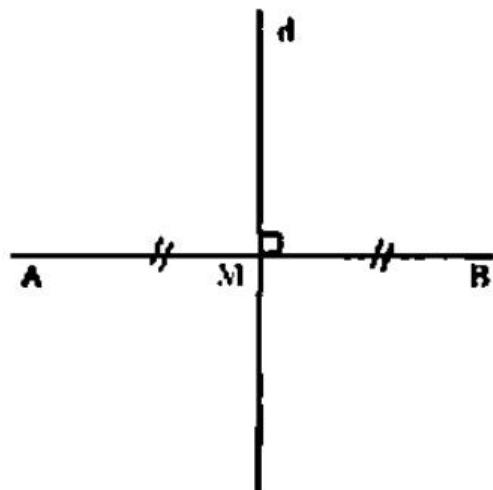
2. Tính chất

Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua điểm O cho trước và vuông góc với đường thẳng a cho trước.



3. Đường trung trực của đoạn thẳng

- Đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.
- Khi d là đường trung trực của đoạn thẳng AB, ta có hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d.



B/ BÀI TẬP

C/ BÀI TẬP CƠ BẢN

7. Điền vào chỗ trống (...) trong các phát biểu sau :

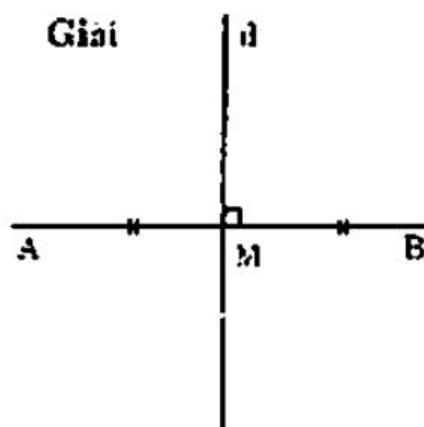
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau là hai đường thẳng.
- Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng.
- Có một và chỉ một đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d cho trước.

Giai

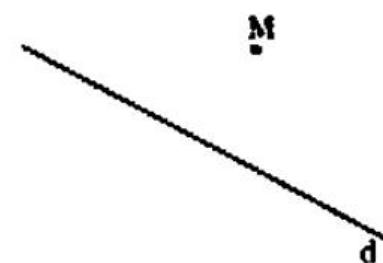
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau là hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông.
- Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng đó.
- Có một và chỉ một đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d cho trước.

8. Cho đoạn thẳng AB = 4cm. Hãy vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB

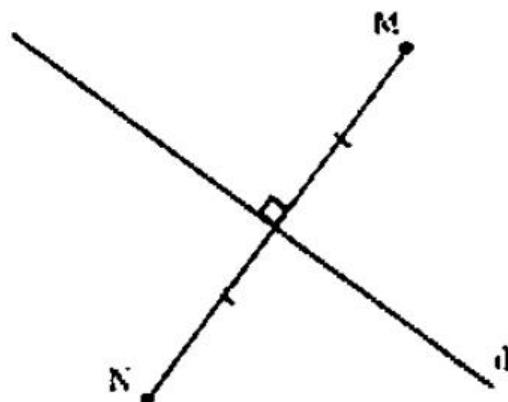
Giai



9. Hình bên cho điểm M nằm ngoài đường thẳng d. Hãy vẽ điểm N sao cho M và N đối xứng nhau qua đường thẳng d.



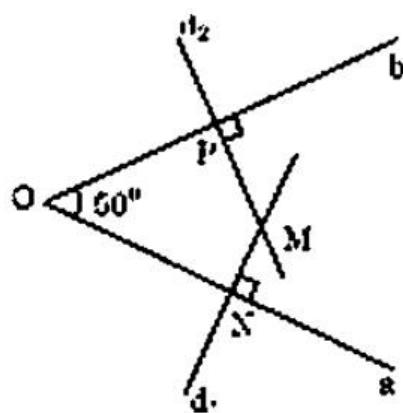
Giai



10. Vẽ hình theo cách diễn đạt bằng lời sau :

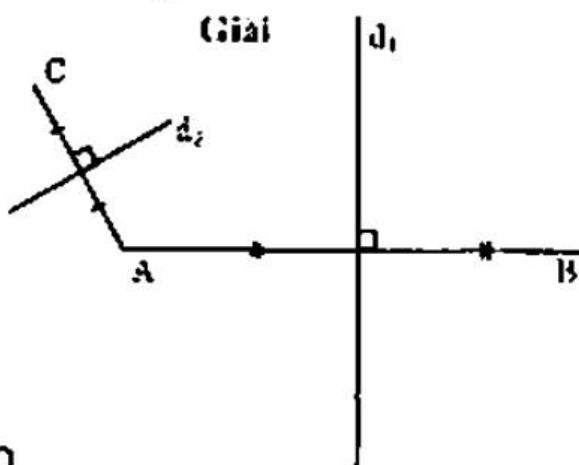
Vẽ góc aOb có số đo bằng 50° . Lấy điểm M bất kì nằm trong góc aOb . Qua M vẽ đường thẳng d_1 vuông góc với tia Oa tại N , qua M vẽ đường thẳng d_2 vuông góc với tia Ob tại P .

Giai



11. Vẽ đoạn thẳng AB dài 5cm và đoạn thẳng AC dài 2cm rồi vẽ đường trung trực của mỗi đoạn thẳng đó.

Giai



III BÀI TẬP NÂNG CAO

12. a) Cho hai góc kề bù xOy và yOz . Gọi Om là tia phân giác của xOy .

vẽ tia $On \perp Om$. Chứng tỏ rằng On là tia phân giác của góc yOz

b) Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc kề bù tao với nhau một góc 90° .

Giải

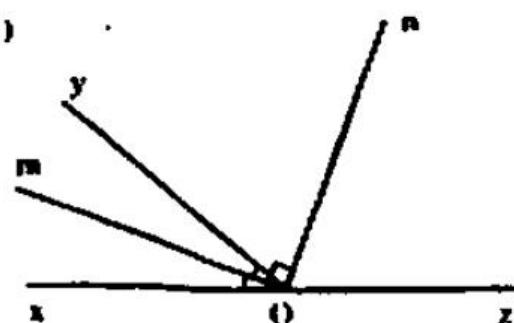
a) Ta có : $\widehat{mOy} = \widehat{yOn} = 90^\circ$ ($Om \perp On$) (1)

$$\Rightarrow \widehat{xOm} + \widehat{nOz} = 90^\circ \quad (2)$$

mà $\widehat{yOn} + \widehat{nOz}$ (On là tia phân giác của \widehat{xOy})

$$\text{nên từ (1) và (2) suy ra } \widehat{yOn} = \widehat{nOz}$$

$\Rightarrow Oz$ là tia phân giác của \widehat{yOz} .



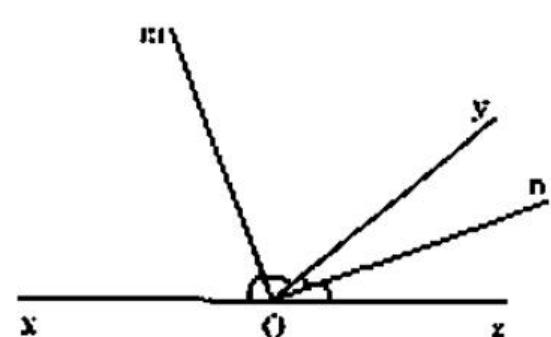
b) Gọi Om, On lần lượt là hai tia phân giác của hai góc kề bù xOy và yOz

$$\text{Ta có : } \widehat{xOm} = \widehat{mOy} = \frac{\widehat{xOy}}{2}$$

$$\widehat{xOn} = \widehat{nOz} = \frac{\widehat{yOz}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{mOn} = \widehat{nOy} + \widehat{nOz}$$

$$= \frac{\widehat{xOy}}{2} + \frac{\widehat{yOz}}{2}.$$



$$\text{Vì } \widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{mOn} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

13. Cho góc vuông AOB , hai tia OC, OD σ trong đó sao cho $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 60^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ OA có chứa tia OB về OE sao cho OB là tia phân giác của góc DOE

a) Hai tia OC, OD là tia phân giác của những góc nào?

b) Chứng tỏ rằng $OC \perp OE$.

Giải

a) Ta có : $\widehat{AOC} < \widehat{AOB}$ ($60^\circ < 90^\circ$)

\Rightarrow Tia OC nằm giữa hai tia OA và OB

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC}$$

$$= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \quad (1).$$

Tương tự ta có tia OD nằm giữa hai tia OA và OB

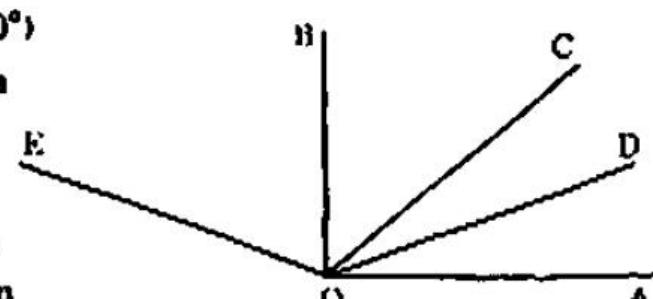
$$\Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{AOB} - \widehat{DOB} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOD} < \widehat{AOC} (30^\circ < 60^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOD} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOD} < \widehat{AOC} < \widehat{AOB} (30^\circ < 60^\circ < 90^\circ)$$

\Rightarrow Tia OC nằm giữa hai tia OD và OB



b) Vì OB là tia phân giác của góc DOE nên

$$\text{DOE} = 2 \text{DOB} = 2.60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{DOC} < \text{DOE} (30^\circ < 120^\circ)$$

⇒ tia OC nằm giữa hai tia OD và OE

$$\Rightarrow \text{COE} = \text{DOE} - \text{DOC} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow \text{OE} \perp \text{OC}.$$

14. Cho đường thẳng t và các điểm A, B, C, D. Biết rằng AB \perp t, BC \perp t, AD \perp t. Chứng tỏ rằng các điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Giai

Ta có : AB \perp t, BC \perp t

Suy ra hai đường thẳng AB, BC trùng nhau

⇒ A, B, C thẳng hàng (1).

Mặt khác ta có AB \perp t, AD \perp t

suy ra hai đường thẳng AB, AD trùng nhau

⇒ A, B, D thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

III BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

15. Cho góc từ xOy. Ở ngoài góc đó dựng các tia Oz, Ot lần lượt vuông góc với các tia Ox, Oy.

Chứng tỏ rằng $x\widehat{O}y + t\widehat{O}z = 180^\circ$

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, báo Khán Quang Đỏ, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2008 - 2009).

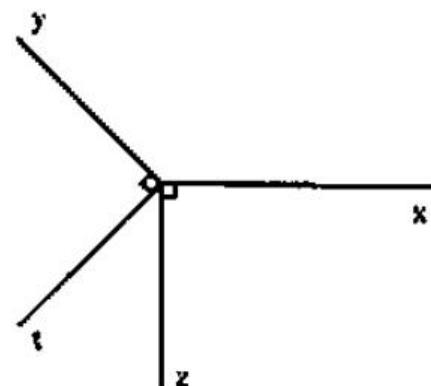
Giai

Ox, Oy, Oz, Ot là bốn tia chung
góc nên :

$$x\widehat{O}y + y\widehat{O}z + z\widehat{O}t + t\widehat{O}x = 360^\circ$$

$$\text{mà } x\widehat{O}z = 90^\circ; y\widehat{O}t = 90^\circ$$

$$\Rightarrow x\widehat{O}y + t\widehat{O}z = 180^\circ.$$

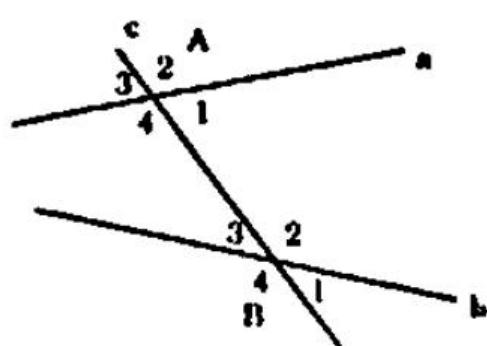


§3. CÁC GÓC TẠO BỘI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỎ

1. Góc so le trong. Góc đồng vị

- Các cặp góc \hat{A}_1 và \hat{B}_3 , \hat{A}_4 và \hat{B}_2 được gọi là các cặp góc so le trong
- Các cặp góc \hat{A}_1 và \hat{B}_1 , \hat{A}_2 và \hat{B}_2 , \hat{A}_3 và \hat{B}_3 , \hat{A}_4 và \hat{B}_4 được gọi là các cặp góc đồng vị.



2. Tính chất

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì :

a) Hai góc so le trong còn lại bằng nhau.

b) Hai góc đồng vị bằng nhau.

3. Đấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

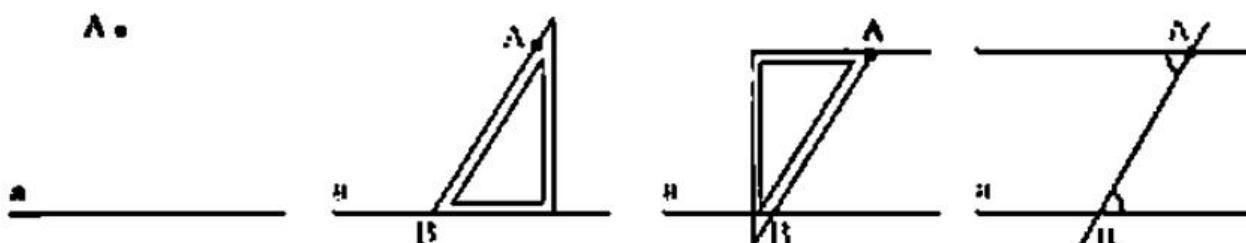
- Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau

- Hai đường thẳng a, b song song được kí hiệu $a \parallel b$.

4. Vẽ hai đường thẳng song song

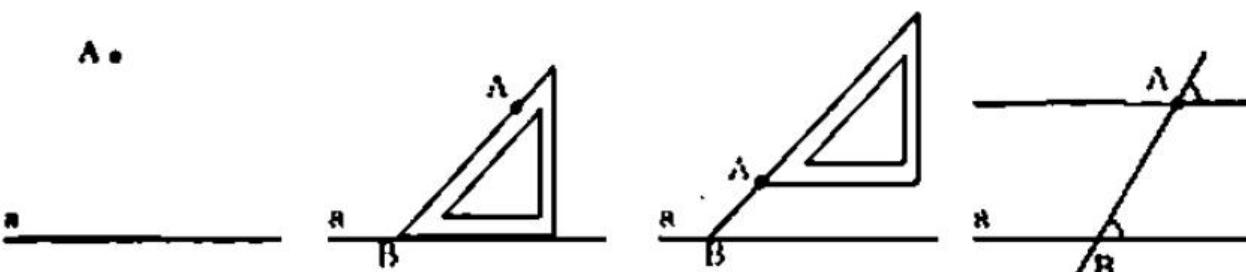
Vẽ đường thẳng b đi qua A cho trước ($A \notin a$) và song song với a. Cách vẽ được minh họa ở các hình sau :

- Vẽ hai góc so le trong bằng nhau



Dùng góc nhọn 60° của bút chì vẽ hai góc so le trong bằng nhau.

- Vẽ hai góc đồng vị bằng nhau



Dùng góc nhọn của bút chì vẽ hai góc đồng vị bằng nhau.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

16. Xem hình bên rồi viết tiếp vào chỗ trống

a) \widehat{NAB} và \widehat{ABC} là một cặp góc ...

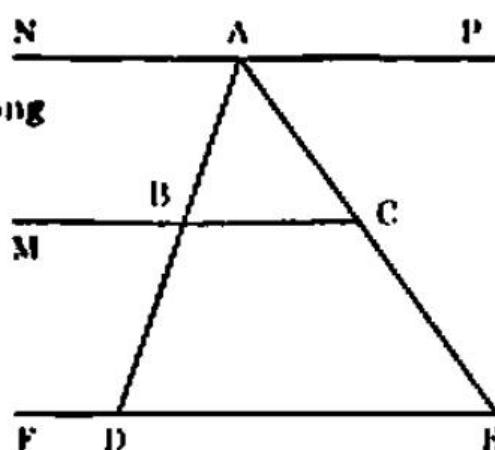
b) \widehat{NAB} và \widehat{ADF} là một cặp góc ...

c) \widehat{ACB} và \widehat{AED} là một cặp góc ...

d) \widehat{ADF} và \widehat{ADE} là một cặp góc ...

e) \widehat{ABC} và \widehat{DAP} là một cặp góc ...

f) \widehat{CAP} và \widehat{AED} là một cặp góc ...



Giai

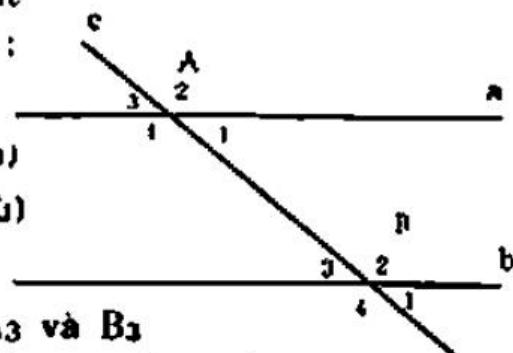
- a) \widehat{NAB} và \widehat{ABC} là một cặp góc so le trong
- b) \widehat{NAB} và \widehat{ADF} là một cặp góc trong cùng phía
- c) \widehat{ACB} và \widehat{AED} là một cặp góc đồng vị.
- d) \widehat{ADF} và \widehat{ADE} là một cặp góc kề bù
- e) \widehat{ABC} và \widehat{DAP} là một cặp góc trong cùng phía
- f) \widehat{CAP} và \widehat{AED} là một cặp góc so le trong

17. Vẽ một đường thẳng cắt hai đường thẳng. Trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau

- a) Đặt tên các góc đó.
- b) Vì sao các cặp góc so le trong còn lại bằng nhau?
- c) Vì sao mỗi cặp góc đồng vị bằng nhau?
- d) Vì sao mỗi cặp góc trong cùng phía bù nhau?

Giai

- a) (Xem hình vẽ bên) Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b tại A và B ta có:
 $A_1 = B_3$.

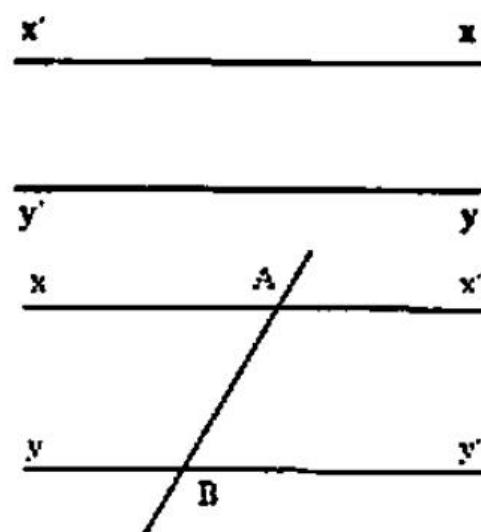


- b) Ta có: $A_4 + A_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)
 $B_2 + B_3 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)
Mà $A_1 = B_3$ nên $A_4 = B_2$.
- c) Xét một cặp góc đồng vị, chẳng hạn A_3 và B_3
ta có $A_3 = A_1$ (đối đỉnh) mà $A_1 = B_3$ nên $A_3 = B_3$.
Xét tương tự cho các cặp góc đồng vị còn lại.

- d) Xét một cặp góc trong cùng phía, chẳng hạn A_4 và B_3 .
Ta có $A_1 + A_4 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)
mà $B_2 + B_3 = 180^\circ$ nên $B_3 + A_4 = 180^\circ$
Xét tương tự cho cặp góc trong cùng phía còn lại.

18. Trên hình bên cho hai đường thẳng

$x'y'$ và xy phân biệt. Hãy nêu cách nhận biết xem hai đường thẳng $x'y'$ và xy song song hay cắt nhau bằng dung cụ thước đo góc?



Giai

Lấy điểm A trên đường thẳng xx' , lấy điểm B trên đường thẳng yy' . Dùng thước đo góc để đo các góc \widehat{xAB} , $\widehat{ABy'}$. Có hai trường hợp xảy ra:

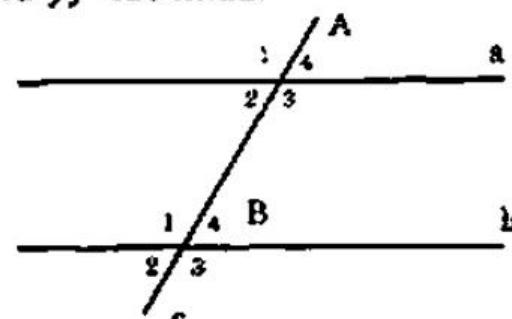
- $x\bar{A}B = A\bar{B}y'$ mà $x\bar{A}B$ và $A\bar{B}y'$ so le trong $\Rightarrow xx' \parallel yy'$.
 - $x\bar{A}B \neq A\bar{B}y'$ mà $x\bar{A}B$ và $A\bar{B}y'$ so le trong
- $\Rightarrow xx'$ không song song với $yy' \Rightarrow xx'$ và yy' cắt nhau.

19. Hình vẽ bên cho biết đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b có $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$

Chứng minh rằng :

a) $\hat{A}_3 = \hat{B}_1 ; \hat{A}_2 = \hat{B}_4$.

b) $\hat{A}_1 = \hat{B}_3 ; \hat{A}_3 = \hat{B}_3 ; \hat{A}_4 = \hat{B}_4$.



Giai

a) Ta có : $\hat{A}_3 + \hat{A}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) ;

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

b) Ta có : $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù) ;

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

20. Cho hình vẽ bên.

Biết $A_1 = 40^\circ ; B_2 = 140^\circ$.

Chứng minh $a \parallel b$.

Giai

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \hat{A}_2 = 140^\circ$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

21. Cho hình vẽ bên biết :

$\widehat{ACD} = 120^\circ ; \widehat{CAB} = 60^\circ$.

Chứng tỏ rằng $AB \parallel CD$

Giai

Vẽ tia CE là tia đối của tia CD

Ta có : $\widehat{ACE} + \widehat{ACD} = 180^\circ$ (ké bù)

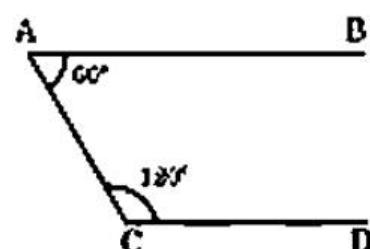
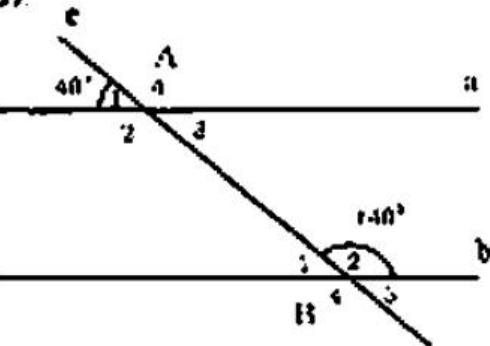
$\Rightarrow \widehat{ACE} + 120^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACE} = 60^\circ$

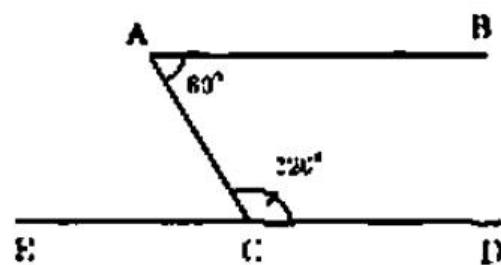
$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{CAB} (= 60^\circ)$.

mà \widehat{ACE} và \widehat{CAB} so le trong

nên $AB \parallel CE$. Vậy $AB \parallel CD$.



22. Vẽ cặp góc so le trong $x\bar{A}B$ và $y\bar{B}A$ có số đo đều bằng 110° . Gọi Az , Bt lần lượt là hai tia phân giác của hai góc $x\bar{A}B$, $y\bar{B}A$. Chứng tỏ rằng $Az \parallel Bt$.



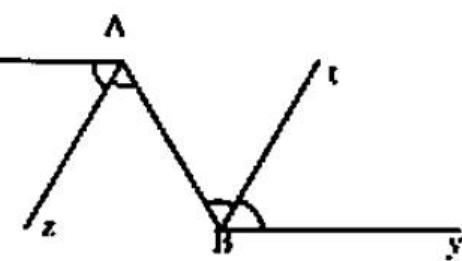
Giai

Vì Az là tia phản giác của góc xAB

$$\Rightarrow z\bar{AB} = \frac{x\bar{AB}}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ.$$

Tương tự Bt là tia phản giác của góc ABy nên

$$B\bar{t} = \frac{A\bar{By}}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ \Rightarrow z\bar{AB} = A\bar{B}t (= 55^\circ).$$



Do vậy $Az // Bt$

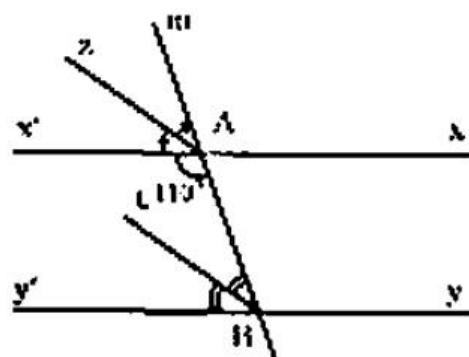
23. Trên hình vẽ bên cho đường thẳng m cắt hai đường thẳng x, y tại A, B và $x\bar{AB} = 110^\circ$. Gọi Az, Bt lần lượt là hai tia phản giác của $m\bar{Ax}$ và $A\bar{By}$. Xác định số đo của góc ABy để $Az // Bt$

Giai

Ta có $m\bar{Ax} + x\bar{AB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$m\bar{Ax} + 110^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow m\bar{Ax} = 70^\circ.$$



Vì Az là tia phản giác của $m\bar{Ax}$ nên $m\bar{Az} = \frac{m\bar{Ax}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$.

Nếu đường thẳng AB cắt hai đường thẳng Az, Bt và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau thì Az và Bt song song với nhau.

Ta có: $m\bar{Az} = 35^\circ$; $m\bar{Az}$ và $A\bar{B}t$ là một cặp góc đồng vị

Do đó nếu $A\bar{B}t = 35^\circ$ thì $Az // Bt$

$$\Rightarrow A\bar{B}y = 2A\bar{B}t = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ.$$

Do vậy khi $A\bar{B}y = 70^\circ$ thì $Az // Bt$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

24. Cho hình vẽ có $x\bar{AB} = a^\circ$;

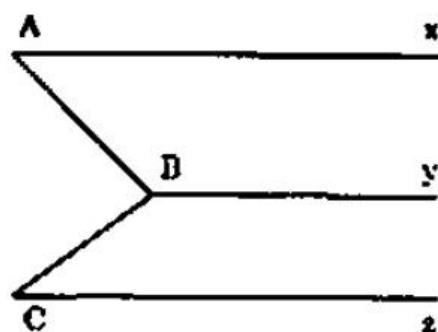
$$A\bar{B}C = a^\circ + b^\circ; C\bar{B}y = 180^\circ - b^\circ;$$

$$B\bar{C}z = b^\circ.$$

Chứng tỏ rằng :

- a) $Bt // Cz$. b) $Ax // By$

(Đề thi giải Lớp Quí Đôn Toán lớp 7, báo Khản Quàng Dô, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2008 - 2009).



Giai

a) Vẽ Bm là tia đối của tia By . Ta có :

$$m\widehat{BC} + C\widehat{By} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$m\widehat{BC} + 180^\circ - b^\circ = 180^\circ$$

$$m\widehat{BC} = b^\circ.$$

Ta có : $\widehat{BCz} = m\widehat{BC} (= b^\circ)$;

\widehat{BCz} và $m\widehat{BC}$ so le trong

Vậy $By // Cz$.

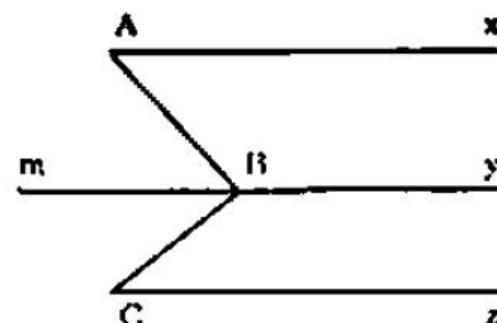
b) $m\widehat{BC} + m\widehat{BA} = A\widehat{BC}$

$$b^\circ + m\widehat{BA} = a^\circ + b^\circ$$

$$m\widehat{BA} = a^\circ$$

Ta có $m\widehat{BA} = x\widehat{AB} (= a^\circ)$; $m\widehat{BA}$ và $x\widehat{AB}$ so le trong.

Vậy $By // Cz$.



84. TIỀN ĐỀ O-CLIT VỀ DƯỜNG THẲNG SONG SONG.

TỰ VŨNG GÓC ĐẾN SONG SONG

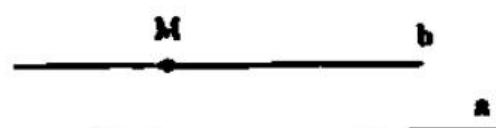
A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NÀNG CẨM NHỚ

1. Tiền đề O-clit

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng cho trước có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Qua điểm M nằm ngoài đường thẳng

a, đường thẳng b đi qua M và song
song với a là duy nhất



2. Tính chất của hai đường thẳng song song

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì :

a) Hai góc so le trong bằng nhau

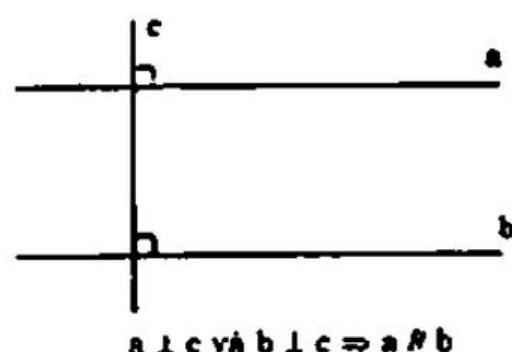
b) Hai góc đồng vị bằng nhau.

c) Hai góc trong cùng phía bù nhau

3. Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng
vuông góc với một đường thẳng
thứ ba thì chúng song song với
nhau.

- Một đường thẳng vuông góc với
một trong hai đường thẳng song
song thì nó cũng vuông góc với
đường thẳng kia.



4. Ba đường thẳng song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
- Khi ba đường thẳng d, d', d'' song song với nhau từng đôi một, ta nói ba đường thẳng ấy song song với nhau hay là đường thẳng song song và kí hiệu là : $d // d' // d''$.

B/ BÀI TẬP**LƯU Ý BÀI TẬP CƠ BẢN****25. Điền vào chỗ trống trong các phát biểu sau :**

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì :

- Hai góc đồng vị được tạo ra do một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song là hai góc ...
- Hai góc trong cùng phía được tạo ra do một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song là hai góc ...

Giai

- Hai góc đồng vị được tạo ra do một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song là hai góc bằng nhau.
- Hai góc trong cùng phía được tạo ra do một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song là hai góc bù nhau

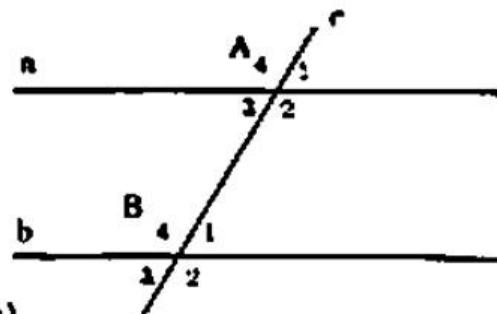
26. Hình vẽ bên cho $a // b$ và $\hat{A}_3 = 40^\circ$

- a) Tính \hat{A}_2 .

- b) So sánh \hat{A}_4 và \hat{B}_4

- c) Tính \hat{B}_4 .

Giai



a) Ta có : $\hat{A}_3 + \hat{A}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow 40^\circ + \hat{A}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 140^\circ.$$

b) Ta có : $a // b \Rightarrow \hat{A}_4 = \hat{B}_4$ (hai góc đồng vị).

c) Ta có : $a // b \Rightarrow \hat{B}_4 = \hat{A}_2$ (hai góc so le trong)

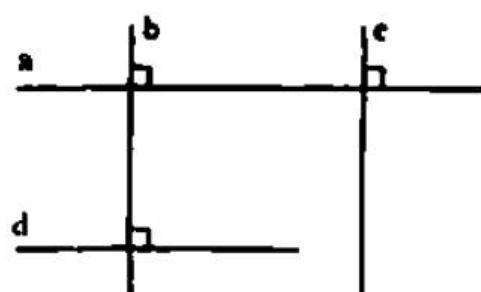
mà $\hat{A}_2 = 140^\circ$

nên $\hat{B}_4 = 140^\circ$.

27. Cân cứ vào hình bên hãy điền vào chỗ trống (...).

Nếu $b \perp a$ và $c \perp a$ thì ...

Nếu $b // c$ và $d \perp b$ thì ...



Giải

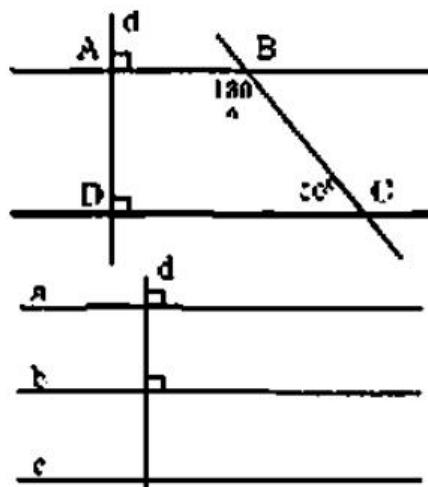
Nếu $b \perp a$ và $c \perp a$ thì $b \parallel c$.

Nếu $b \parallel c$ và $d \perp b$ thì $d \perp c$.

28.

a) Cho hình vẽ bên.

Chứng tỏ rằng $d \perp DC$.



b) Cho hình bên, biết $a \perp d$, $b \perp d$, $b \parallel c$

Chứng tỏ rằng $a \parallel b \parallel c$.

Giải

a) Ta có: $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 130^\circ + 50^\circ = 180^\circ$

mà \widehat{ABC} và \widehat{BCD} là một cặp góc trong cùng phía
suy ra $AB \parallel CD$.

Vì $d \perp AB$ nên $d \perp DC$

b) Ta có $a \perp d$ và $b \perp d$ nên $a \parallel b$.

Từ $a \parallel b$ và $b \parallel c$

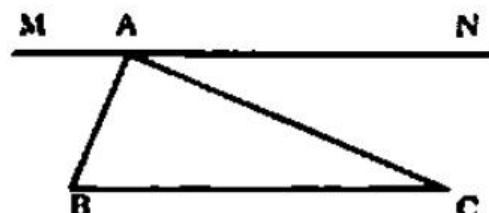
suy ra $a \parallel b \parallel c$.

C) BÀI TẬP NÂNG CAO

29. Cho hình vẽ bên có $\widehat{MAB} = \widehat{ABC}$;

$\widehat{NAC} = \widehat{ACB}$. Chứng tỏ rằng M,
A, N thẳng hàng

Giải



Ta có: $\widehat{MAB} = \widehat{ABC}$

mà \widehat{MAB} và \widehat{ABC} (so le trong) $\Rightarrow MA \parallel BC$.

Ta lại có: $\widehat{NAC} = \widehat{ACB}$

mà \widehat{NAC} và \widehat{ACB} (so le trong) $\Rightarrow AN \parallel BC$.

30. Qua M nằm ngoài đường thẳng a, vẽ 2009 đường thẳng phân biệt.

Chứng tỏ rằng trong 2009 đường thẳng này có ít nhất 2008 đường
thẳng cắt đường thẳng a

Giải

Theo tiên đề C-clit, trong 2009 đường thẳng đã vẽ có nhiều nhất một
đường thẳng không cắt đường thẳng a. Vậy phải có ít nhất 2008 đường
thẳng cắt đường thẳng a.

31. Cho hình vẽ bên.

a) Biết $\overline{Ax} \parallel \overline{Cy}$. Tính $\widehat{B\bar{A}x} + \widehat{ABC} + \widehat{BCy}$.

b) Biết $A + B + C = 360^\circ$.

Chứng minh $\overline{Ax} \parallel \overline{Cy}$

Giải

a) Vẽ tia $\overline{Bz} \parallel \overline{Ax}$, ta có $\overline{Bz} \parallel \overline{Cy}$

Ta có: $\widehat{B\bar{A}x} + \widehat{ABz} = 180^\circ$ (hai góc cùng trong phia).

Tương tự $\widehat{CBz} + \widehat{BCy} = 180^\circ$ (hai góc cùng trong phia).

Do đó $\widehat{B\bar{A}x} + \widehat{ABC} + \widehat{BCy}$

$$= \widehat{B\bar{A}x} + \widehat{ABz} + \widehat{CBz} + \widehat{BCy}$$

$$= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

Vậy $\widehat{B\bar{A}x} + \widehat{ABC} + \widehat{BCy} = 360^\circ$.

b) Vẽ tia \overline{Bz} sao cho $\widehat{x\bar{A}B} + \widehat{ABz} = 180^\circ$.

Vì $\widehat{x\bar{A}B}$ và \widehat{ABz} là hai góc trong cùng phia $\Rightarrow \overline{Ax} \parallel \overline{Bz}$ (1).

Từ đó, ta có $\widehat{z\bar{B}C} + \widehat{BCy} = 180^\circ$

Vì $\widehat{z\bar{B}C}$ và \widehat{BCy} là hai góc trong cùng phia $\Rightarrow \overline{Cy} \parallel \overline{Bz}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{Ax} \parallel \overline{Cy}$.

32. Cho hình vẽ bên biết $\widehat{B\bar{A}x} = \alpha$,

$\widehat{BCy} = \beta$; $\widehat{ABC} = \alpha + \beta$; $MN \not\parallel AB$

Chứng tỏ rằng:

a) $\overline{Ax} \parallel \overline{Cy}$.

b) $\widehat{MNC} = \alpha$.

Giải

a) Vẽ tia \overline{Bz} sao cho $\widehat{ABz} = \alpha$.

Ta có: $\widehat{B\bar{A}x} = \widehat{ABz}$ ($= \alpha$).

Vì $\widehat{B\bar{A}x}$ và \widehat{ABz} so le trong

$\Rightarrow \overline{Ax} \parallel \overline{Bz}$ (1).

Ta có: $\widehat{ABz} + \widehat{z\bar{B}C} = \alpha + \beta$

nên $\widehat{z\bar{B}C} = \beta$

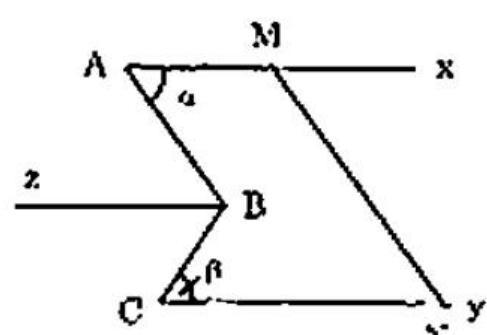
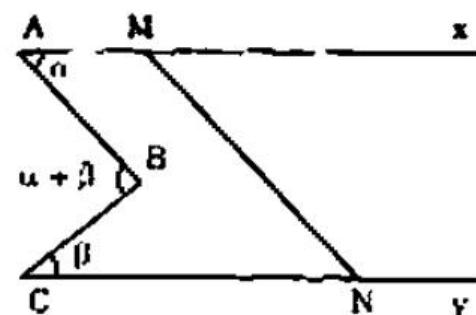
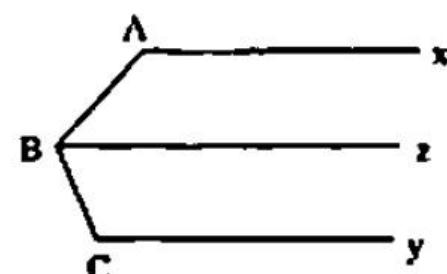
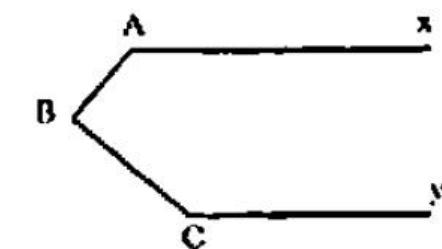
$\Rightarrow \widehat{z\bar{B}C} = \widehat{BCy}$ ($= \beta$), $\widehat{z\bar{B}C}$ và \widehat{BCy} so le trong $\Rightarrow \overline{Bz} \parallel \overline{Cy}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\overline{Ax} \parallel \overline{Cy}$.

b) $\widehat{A} + \widehat{AMN} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phia và $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$).

$\widehat{MNC} + \widehat{AMN} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phia và $\overline{AM} \parallel \overline{CN}$).

Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{A}$.



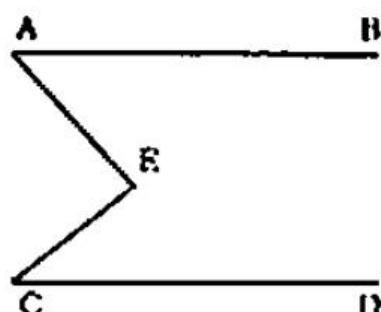
BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

33. a) Cho AB song song với CD như hình
vẽ bên

Chứng minh rằng :

$$\widehat{AEC} = \widehat{BAE} + \widehat{ECD}.$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 8, chuyên toán,
TP. Hà Nội, năm học 1981 - 1982)



b) Cho tam giác ABC có điểm M trên cạnh BC. Vẽ ME song song với AB sao
cho E thuộc AC, MF song song với AC sao cho F thuộc AB. Xác định vị
trí của điểm M để tia MA là tia phân giác của góc EMF.

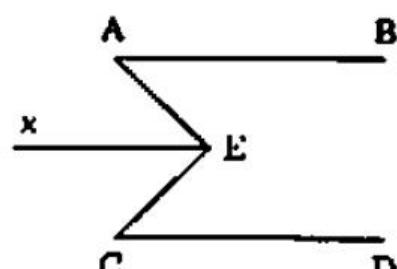
(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, bờu Khoa Quang Đô, Tp. Hồ Chí
Minh, năm học 2010 - 2011)

Giai

a) Vẽ tia Ex sao cho $Ex \parallel AB$. Ta có $Ex \parallel CD$

Chứng minh được $\widehat{AEx} = \widehat{BAE}$

$$\widehat{xEC} = \widehat{ECD}$$



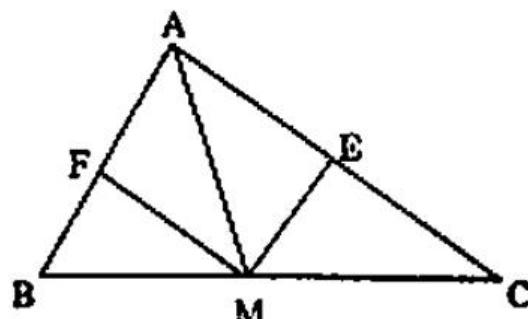
b) $\widehat{FMA} = \widehat{EMA}$ (gt)

$\widehat{FMA} = \widehat{EAM}$ (so le trong, $MF \parallel AE$)

$\widehat{EMA} = \widehat{FAM}$ (so le trong, $ME \parallel AF$)

Suy ra $\widehat{EAM} = \widehat{FAM}$

$\Leftrightarrow AM$ là tia phân giác của góc BAC



85. ĐỊNH LÝ

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CẨN NHỎ

1. Định lý

- Định lý là khẳng định suy ra từ những khẳng định được coi là đúng.
- Khi định lý được phát biểu dưới dạng "Nếu... thì" phần nằm giữa từ "Nếu" và từ "thì" là phần giả thiết, phần sau từ "thì" là phần kết luận.
- "Giả thiết" và "kết luận" được viết tắt tương ứng là GT và KL.

2. Chứng minh định lý

Chứng minh định lý là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

34. Hãy chỉ ra giả thiết và kết luận của các định lý sau bằng kí hiệu :

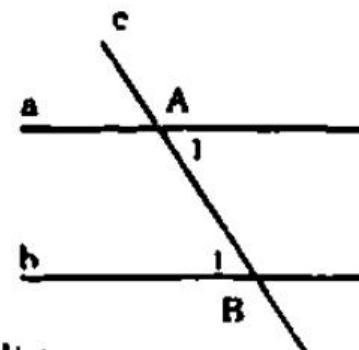
- Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng sao cho có một cặp góc so le trong bằng nhau thì hai đường thẳng đó song song.

b) Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì hai góc so le trong bằng nhau.

Giai

a)

GT	$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$
KL	$a \parallel b$



b)

GT	$a \parallel b$
KL	$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$

35. Hãy chỉ ra giả thiết và kết luận của các định lí sau

a) Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì : $AM = MB = \frac{AB}{2}$.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau

Giai

a)

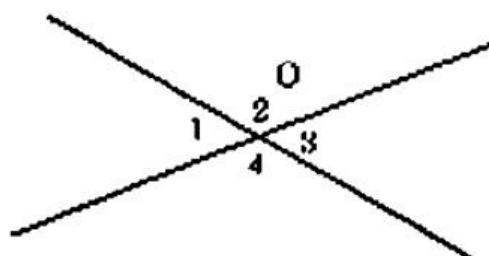
GT	M là trung điểm của đoạn thẳng AB
KL	$AM = MB = \frac{AB}{2}$

b)

GT	$a \perp b ; c \perp b$
KL	$a \parallel c$

36. Hãy viết tiếp vào chỗ trống để chứng minh định lí : "Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau".

GT
KL



Các khẳng định		Căn cứ của khẳng định
1	$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$	Vì ...
2	$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = ...$	Vì ...
3	$\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = ...$	Căn cứ vào ...
4	$\hat{O}_1 = \hat{O}_3$...
5	$\hat{O}_2 = \hat{O}_4$...

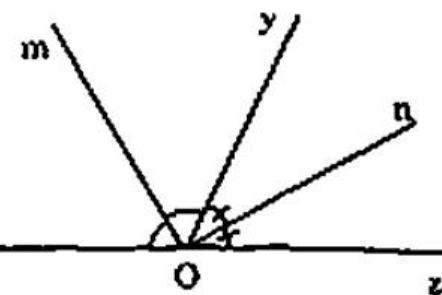
Giai

GT	\hat{O}_1 đối đỉnh với \hat{O}_3 ; \hat{O}_2 đối đỉnh với \hat{O}_4
KL	$\hat{O}_1 = \hat{O}_3$; $\hat{O}_2 = \hat{O}_4$

Các khẳng định		Căn cứ của khẳng định
1	$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$	Vì \hat{O}_1 và \hat{O}_2 kề bù.
2	$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ$	Vì \hat{O}_2 và \hat{O}_3 kề bù.
3	$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_2 + \hat{O}_3$	Căn cứ vào 1 và 2
4	$\hat{O}_1 = \hat{O}_3$	Suy từ 3.
5	$\hat{O}_2 = \hat{O}_4$	Chứng minh tương tự trên.

37. Chứng minh định lí: "Góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù là một góc vuông".

Giải



GT $x\hat{O}y$ và $y\hat{O}z$ kề bù;
Om là tia phân giác của $x\hat{O}y$;
On là tia phân giác của $y\hat{O}z$.

KL. $m\hat{O}n = 90^\circ$

Ta có: $m\hat{O}y = \frac{1}{2}x\hat{O}y$ (Om là tia phân giác của $x\hat{O}y$) (1);

$y\hat{O}n = \frac{1}{2}y\hat{O}z$ (On là tia phân giác của $y\hat{O}z$) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $m\hat{O}y + y\hat{O}n = \frac{1}{2}(x\hat{O}y + y\hat{O}z)$ (3).

Vì tia Oy nằm giữa hai tia Om, On và $x\hat{O}y$ và $y\hat{O}z$ kề bù nên từ (3)

Ta có: $m\hat{O}n = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

38. Chứng minh rằng:

a) Nếu hai góc nhọn $x\hat{O}y$ và $x'\hat{O}'y'$ có $Ox \parallel O'x'$; $Oy \not\parallel O'y'$ thì $x\hat{O}y = x'\hat{O}'y'$.

b) Nếu hai góc thù $x\hat{O}y$ và $x'\hat{O}'y'$ có $Ox \not\parallel O'x'$; $Oy \not\parallel O'y'$ thì $x\hat{O}y = x'\hat{O}'y'$.

Giải

a) GT $x\hat{O}y$ và $x'\hat{O}'y'$ nhọn.
 $Ox \parallel O'x'$; $Oy \not\parallel O'y'$

KL $x\hat{O}y = x'\hat{O}'y'$.

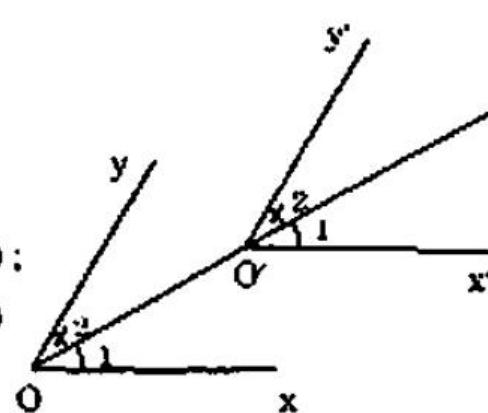
Vẽ tia Oy' , ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}'_1$ (\hat{O}_1 và \hat{O}'_1 đồng vị, $Ox \parallel O'x'$);

$\hat{O}_2 = \hat{O}'_2$ (\hat{O}_2 và \hat{O}'_2 đồng vị, $Oy \not\parallel O'y'$).

Suy ra $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}'_1 + \hat{O}'_2$.

Do đó $x\hat{O}y = x'\hat{O}'y'$.



b)	GT	\bar{xOy} và $\bar{x'O'y'}$ đều tù ; $Ox \parallel O'x'$.
	KL	$\bar{xOy} = \bar{x'O'y'}$.

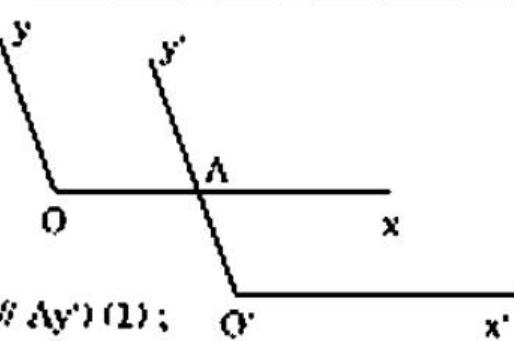
Tia Ox cắt tia $O'y'$ tại A

$\Rightarrow Ax \parallel O'x'$; $Oy \parallel Ay'$. Ta có :

$$\bar{xOy} = \bar{xAy'} (\bar{xOy} \text{ và } \bar{xAy'} \text{ đồng vị}, Oy \parallel Ay') (1);$$

$$\bar{xAy'} = \bar{x'O'y'} (\bar{xAy'} \text{ và } \bar{x'O'y'} \text{ đồng vị}, Ax \parallel O'x') (2).$$

Suy ra $\bar{xOy} = \bar{x'O'y'}$ (căn cứ vào (1) và (2)).



39. Chứng minh rằng : Trong hai góc bù nhau, nếu :

a) Có một góc là góc vuông thì góc còn lại cũng là góc vuông

b) Có một góc là góc nhọn thì góc còn lại là góc tù. Ngược lại có một góc là góc tù thì góc còn lại là góc nhọn.

Giai

GT	\bar{xOy} và $\bar{x'O'y'} = 180^\circ$; $\bar{xOy} = 90^\circ$.
KL	$\bar{x'O'y'} = 90^\circ$.

a) Nếu $\bar{xOy} = 90^\circ$ thì ta có $90^\circ + \bar{x'O'y'} = 180^\circ$

$$\text{Do đó } \bar{x'O'y'} = 180^\circ + 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

b)	GT	\bar{xOy} và $\bar{x'O'y'}$ bù nhau; \bar{xOy} là góc nhọn.
	KL	$\bar{x'O'y'}$ là góc tù.

Ta có : $\bar{xOy} + \bar{x'O'y'} = 180^\circ$ (Vì \bar{xOy} và $\bar{x'O'y'}$ bù nhau) (1)

Vì \bar{xOy} là góc nhọn nên đặt $\bar{xOy} = 90^\circ - m^\circ (0^\circ < m^\circ < 90^\circ)$

$$\text{nên } 90^\circ - m^\circ + \bar{x'O'y'} = 180^\circ - (90^\circ + m^\circ) \Rightarrow \bar{x'O'y'} = 90^\circ + m^\circ.$$

Vậy $\bar{x'O'y'}$ là góc tù.

Chú ý:

Khi \bar{xOy} là góc tù chúng minh tương tự ta cũng được $\bar{x'O'y'}$ là góc nhọn.

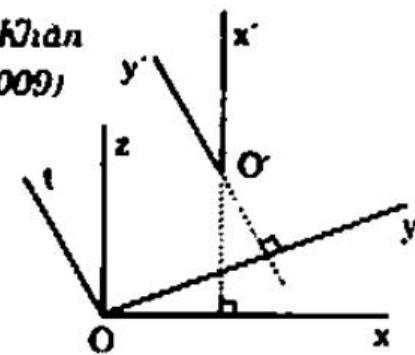
Lý BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

40. Chứng minh rằng Nếu hai góc nhọn \bar{xOy} và $\bar{x'O'y'}$ có $Ox \perp O'x'$, $Oy \perp O'y'$ thì $\bar{xOy} = \bar{x'O'y'}$

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, bao Khanh
Quang Đô, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2008 - 2009)

Giai

GT	\bar{xOy} và $\bar{x'O'y'}$ đều nhọn; $Ox \perp O'x'$; $Oy \perp O'y'$.
KL	$\bar{xOy} = \bar{x'O'y'}$.



ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Vẽ ba đường thẳng $x'x$, $y'y$, $z'z$ cắt nhau tại O ?

a) Hỏi có bao nhiêu cặp góc bằng nhau khác góc bẹt?

b) Nếu thay "3" bởi n ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) thì có tất cả bao nhiêu cặp góc bằng nhau khác góc bẹt?

Giai

a) Có 6 cặp góc bằng nhau khác góc bẹt.

b) Nếu vẽ n ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) đường thẳng cắt nhau tại O

\Rightarrow có $2n$ tia chung gốc O .

Do đó ta có $\frac{2n(2n - 1)}{2} = n(2n - 1)$ góc đỉnh O

\rightarrow số góc đỉnh O khác góc bẹt là: $n(2n - 1) - n = 2n^2 - 2n$.

Do vậy số cặp góc bằng nhau khác góc bẹt là: $(2n^2 - 2n) : 2 = n^2 - n$.

2. Cho hai góc kề $A\bar{O}B$ và $B\bar{O}C$ có tổng bằng 150° và $A\bar{O}B - B\bar{O}C = 90^\circ$.

a) Tính $A\bar{O}B$, $B\bar{O}C$.

b) Trong góc $A\bar{O}C$ vẽ tia $OD \perp OC$. Tia OC có phải là tia phân giác của góc AOB không?

c) Vẽ tia OC' là tia đối của tia OC . Chứng tỏ rằng $A\bar{O}C' = B\bar{O}C$.

Giai

a) $A\bar{O}B = 120^\circ$; $B\bar{O}C = 30^\circ$.

b) $D\bar{O}B = C\bar{O}B - B\bar{O}C = 60^\circ$

$D\bar{O}A = C\bar{O}A - D\bar{O}C = 60^\circ$.

$A\bar{O}D = D\bar{O}B$ và OD nằm giữa hai tia OA , OB nên OD là tia phân giác của góc AOB

c) $A\bar{O}C' = B\bar{O}C = 30^\circ$.

3. Cho hai góc kề bu xOy và yOz . Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy . Trong góc yOz vẽ tia Ot' vuông góc với tia Ot . Chứng minh rằng Ot' là tia phân giác của góc yOz .

Giai

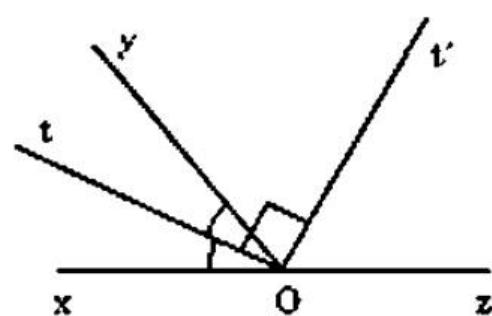
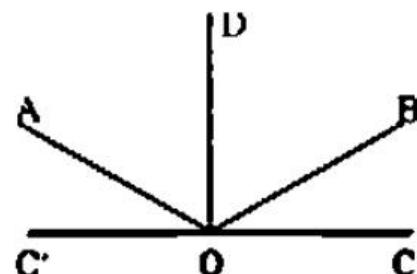
$$x\bar{O}t + t\bar{O}y = 90^\circ;$$

$$t\bar{O}y + y\bar{O}t = 90^\circ.$$

Vì $x\bar{O}t + t\bar{O}y$

nên $y\bar{O}t' = t\bar{O}z$.

Ot' là tia phân giác của góc yOz



Chương II. TAM GIÁC

B1. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỎ

1. Tổng ba góc của một tam giác

Định lí :

Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

2. Áp dụng vào tam giác vuông

Định nghĩa : Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

Định lí : Trong một tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau

3. Góc ngoài của một tam giác

Định nghĩa : Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác đó.

Định lí : Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

Nhận xét : Góc ngoài của một tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

$$\widehat{ACx} > \widehat{A}; \quad \widehat{ACx} > \widehat{B}$$

B/ BÀI TẬP

1. BÀI TẬP CƠ BẢN

a) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 50^\circ$. Tính \widehat{C} .

b) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$. Tính các góc của tam giác ABC.
Giải

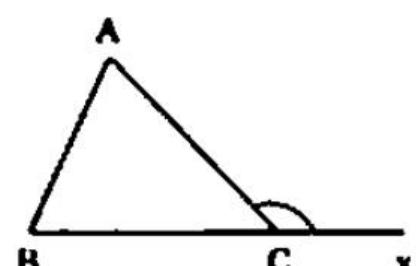
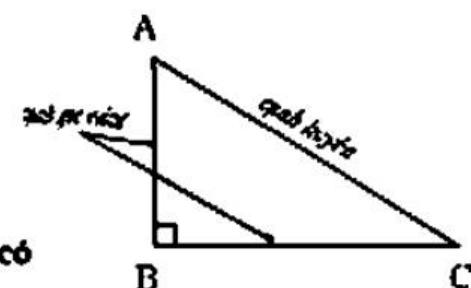
a) Ta có : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ mà $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 50^\circ$
 $\Rightarrow 60^\circ + 50^\circ + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 70^\circ$.

b) $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

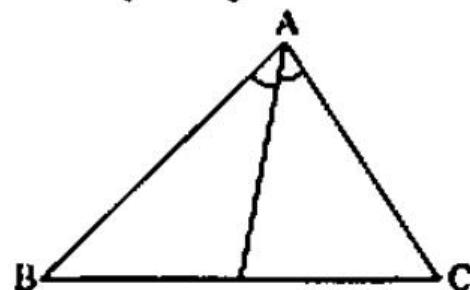
2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 50^\circ$, $\widehat{C} = 70^\circ$. Tia phân giác của A cắt BC tại M. Tính \widehat{AMB} và \widehat{AMC} .

Giải

Ta có : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$
 mà $\widehat{B} = 50^\circ$; $\widehat{C} = 70^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{A} + 50^\circ + 70^\circ = 180^\circ$



Góc ACx là góc ngoài tại đỉnh C của $\triangle ABC$



$$\Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

(vì AM là tia phân giác của góc ABC)

Vì \widehat{AMB} là góc ngoài của tam giác AMC tại đỉnh M

$$\text{nên } \widehat{AMB} = \widehat{MAC} + \hat{C} = 30^\circ + 70^\circ = 100^\circ$$

Tương tự \widehat{AMC} là góc ngoài của tam giác AMB tại đỉnh M

$$\text{nên } \widehat{AMC} = \widehat{MAB} + \hat{B} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

3. Tính các góc của tam giác ABC biết : $2\hat{A} = 3\hat{B}$ và $\hat{A} - \hat{B} = 30^\circ$.

Giai

$$\text{Ta có : } 2\hat{A} = 3\hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{2}$$

Theo tính chất dây tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{3 - 2} = \frac{30^\circ}{1} = 30^\circ. \quad \frac{\hat{A}}{3} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \cdot 3 = 90^\circ.$$

$$\frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có : } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ.$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

4. Cho tam giác ABC có $3\hat{A} = 5\hat{B} = 15\hat{C}$

a) Tính số đo các góc của tam giác ABC

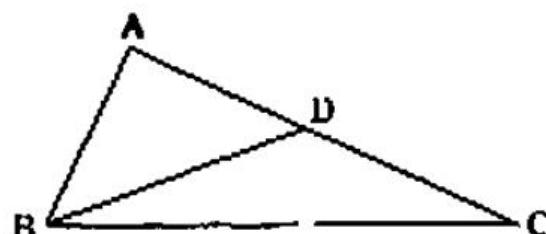
b) Tính phân giác của góc B cắt cạnh AC tại D. Tính \widehat{BDC} .

Giai

a) $\hat{A} = 100^\circ; \hat{B} = 60^\circ$

; $\hat{C} = 20^\circ$.

b) $\widehat{BDC} = \hat{A} + \widehat{ABD} = 130^\circ$.



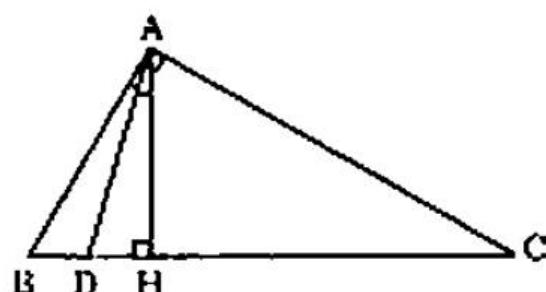
5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ AH $\perp BC$ tại H. Tia phân giác của \widehat{BAH} cắt BH tại D. Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$.

Giai

Ta có : $\widehat{CAD} + \widehat{BAD} = \widehat{BAC}$.

$\widehat{BAC} = 90^\circ$

nên $\widehat{CAD} + \widehat{BAD} = 90^\circ$ (1).



Mặt khác \widehat{ADH} vuông tại H nên $\widehat{HDA} + \widehat{DAB} = 90^\circ$ (2)

mà $\widehat{BAD} = \widehat{DAB}$ (AD là tia phân giác \widehat{BAC}) (3).

Từ (1), (2) và (3) có $\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$

6. a) Cho tam giác ABC có $A = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). I là giao điểm của các tia phân giác của hai góc B và C.

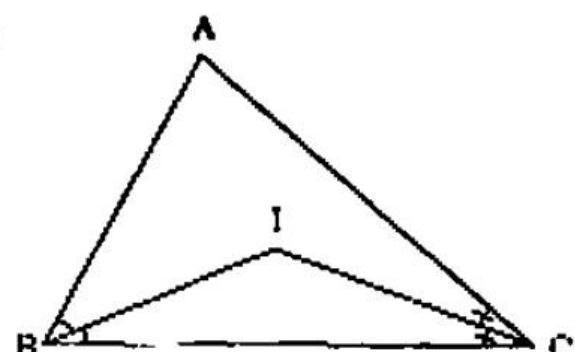
Chứng minh rằng $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

- b) Cho tam giác ABC. Các tia phân giác trong và phân giác ngoài của góc C cắt đường thẳng AB lần lượt tại D và E. Tính góc CED theo góc A và B của tam giác ABC.

Giai

a) $\widehat{IBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$ (BI là tia phân giác của góc B).

$\widehat{ICB} = \frac{1}{2} \widehat{ACB}$ (CI là tia phân giác của góc C)



$$\Rightarrow \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}).$$

Vì $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ (tổng ba góc của một tam giác)

Và $\widehat{BAC} = \alpha$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \alpha$.

$$\text{Do vậy } \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

b) Nếu $\widehat{BAC} > \widehat{ABC}$ thì $\widehat{CED} = \frac{\widehat{BAC} - \widehat{ABC}}{2}$

Nếu $\widehat{BAC} < \widehat{ABC}$ thì $\widehat{CED} = \frac{\widehat{ABC} - \widehat{BAC}}{2}$

7. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E, trên tia đối của tia AC lấy điểm D. Gọi K là giao điểm của hai tia phân giác của góc ACB và AED.

Chứng minh rằng $\widehat{EKC} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ADE}}{2}$

Giải

8. Gọi M là giao điểm AB và CK,

N là giao điểm AD và EK

Tứ giác BMC và NEMK có :

$$\widehat{ABC} + \widehat{C_2} = K + E_2 \quad (1)$$

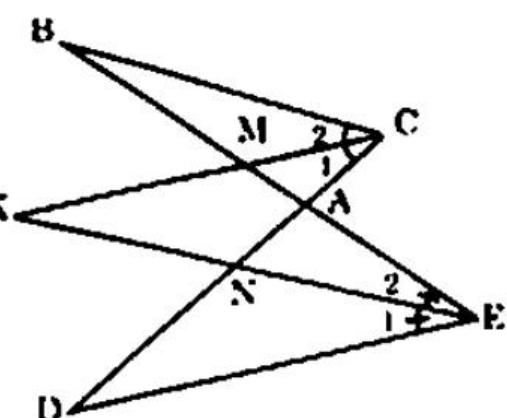
Tứ giác DNE và NCNK có :

$$\widehat{ADE} + E_1 = K + C_1 \quad (2)$$

Ta có : $B_1 = B_2 ; C_1 = C_2$.

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } 2K = \widehat{ABC} + \widehat{ADE}$$

$$\text{Do vậy } \widehat{EKC} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ADE}}{2}$$

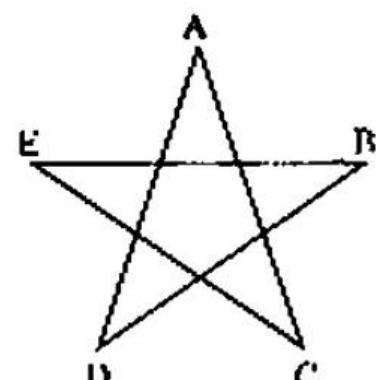
**LƯU BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN**9. a) Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chia A về các tia BX và CY vuông góc với BC. Tính $\widehat{ABX} + \widehat{ACY}$

*(Đề thi giải Lớp Quy Đơn Toán lớp 7, bao
Khảo Quang Đo, TP. Hồ Chí Minh, năm học
2010 - 2011.)*

b) Tính tổng các góc A, B, C, D, E của một hình sao 5 cánh (hình viền bén).

*(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận
6, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1999 - 2000.)*

Giải

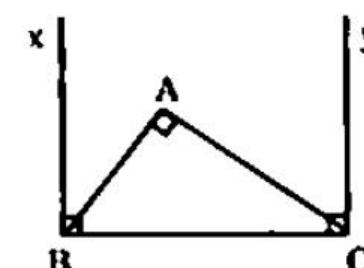
10. a) $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$$

$$\text{Ma } \widehat{ABC} + \widehat{ABX} = 90^\circ.$$

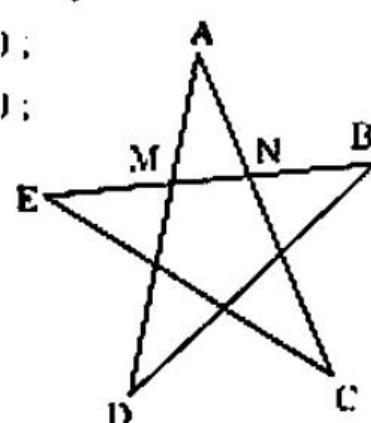
$$\widehat{ACB} + \widehat{ACY} = 90^\circ.$$

$$\text{Do vậy } \widehat{ABX} + \widehat{ACY} = 90^\circ$$

b) $\widehat{AMN} = \widehat{B} + \widehat{D}$ (\widehat{AMN} là góc ngoài của $\triangle MBD$) ; $\widehat{ANM} = \widehat{C} + \widehat{E}$ (\widehat{ANM} là góc ngoài của $\triangle NEC$) ;

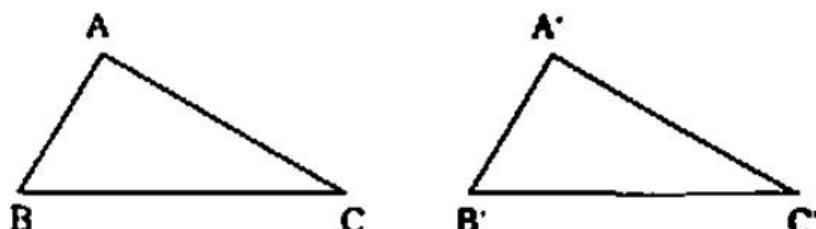
$$\widehat{AMN} + \widehat{A} + \widehat{ANM} + \widehat{ANB} = 180^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} = 180^\circ.$$



82. HAI TÂM GIÁC BẰNG NHAU**A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỚ****1. Định nghĩa :**

Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.



Hai đỉnh A và A', B và B', C và C' gọi là hai đỉnh tương ứng.

Hai góc A và A', B và B', C và C' gọi là góc tương ứng

Hai cạnh AB và A'B', AC và A'C', BC và B'C' gọi là hai cạnh tương ứng.

2. Kí hiệu

- Để kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác, các chữ cái chỉ tên các đỉnh tương ứng được viết theo cùng thứ tự.

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} BC = B'C', AC = A'C', AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

B/ BÀI TẬP **BÀI TẬP CƠ BẢN**

11. Cho $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ trong đó $DE = 6\text{cm}$, $\hat{A} = 70^\circ$, $AC = 8\text{cm}$. Tính AB , D và DF

Giai

Ta có $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (gt)

$\Rightarrow AB = DE ; AC = DF ; BC = EF$ và $\hat{A} = \hat{D} ; \hat{B} = \hat{E} ; \hat{C} = \hat{F}$.

Vì $DE = 6\text{cm} ; \hat{A} = 70^\circ ; AC = 8\text{cm}$

nên $AB = 6\text{cm} ; D = 70^\circ ; DF = 8\text{cm}$.

12. Cho $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$. Tính chu vi của mỗi tam giác biết $AB = 5\text{cm} ; AC = 8\text{cm}$ và $NP = 9\text{cm}$.

Giai

Ta có $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ (gt)

$\Rightarrow AB = MN ; AC = MP ; BC = NP$ và $\hat{A} = \hat{M} ; \hat{B} = \hat{N} ; \hat{C} = \hat{P}$.

Vì $AB = 5\text{cm} ; AC = 8\text{cm} ; NP = 9\text{cm}$

nên $MN = 5\text{cm} ; MP = 8\text{cm} ; BC = 9\text{cm}$

\Rightarrow chu vi tam giác ABC bằng $AB + AC + BC = 5 + 8 + 9 = 22 (\text{cm})$

\Rightarrow chu vi tam giác MNP bằng $MN + MP + NP = 5 + 8 + 9 = 22 (\text{cm})$.

13. Cho $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Biết $\hat{A} = 50^\circ$; $\hat{E} = 70^\circ$. Tính các góc còn lại của mỗi tam giác.

Giai

Ta có $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (gt) $\Rightarrow \hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}$; $\hat{C} = \hat{F}$.

14. Cho $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Biết $A : B : C = 3 : 4 : 5$. Tính các góc của ΔDEF .

Giai

Ta có $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 3 : 4 : 5$, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5}, \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Theo tính chất dây tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{3+4+5} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 75^\circ.$$

Ta lại có $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}; \hat{B} = \hat{E}; \hat{C} = \hat{F}$

$$\Rightarrow \hat{D} = 45^\circ; \hat{E} = 60^\circ; \hat{F} = 75^\circ$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

15. Cho $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\hat{A} = 53^\circ$, $\hat{E} = 32^\circ$. Tính \hat{C} , \hat{F} .

Giai

Ta có $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (gt) $\Rightarrow \hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}$; $\hat{C} = \hat{F}$

Vì $\hat{A} = 53^\circ$; $\hat{E} = 32^\circ$

nên $\hat{D} = 53^\circ$, $\hat{B} = 32^\circ$.

Ta lại có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. Vì $\hat{A} = 53^\circ$; $\hat{B} = 32^\circ$

$$\Rightarrow 53^\circ + 32^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 95^\circ \Rightarrow \hat{F} = \hat{C} = 95^\circ.$$

16. a) Cho $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Biết $\hat{A} + \hat{B} = 120^\circ$ và $\hat{E} = 40^\circ$. Tính các góc còn lại của mỗi tam giác.

- b) Cho $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Biết $AB = 3\text{cm}$, $DF = 6\text{cm}$ và chu vi ΔDEF bằng 17cm . Tính các cạnh còn lại của hai tam giác.

Giai

- a) Ta có $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (gt)

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{E} \text{ mà } \hat{E} = 40^\circ \text{ nên } \hat{B} = 40^\circ.$$

$$\text{Ta có: } \hat{A} + \hat{B} = 120^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ - \hat{B} = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ.$$

$$\text{Ta lại có: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ. \text{ Ma } \hat{A} + \hat{B} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow 120^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D} = \hat{A} = 80^\circ; \hat{F} = \hat{C} = 60^\circ.$$

- b) Ta có: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\Rightarrow DE = AB = 3\text{cm}; AC = DF = 6\text{cm}; BC = EF = 9\text{cm}.$$

17. Cho $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Tính số đo các góc của tam giác ABC biết $\hat{A} = 3\hat{E}$ và $\hat{B} = 2\hat{F}$.

Giải

Ta có : $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Rightarrow A = D ; B = E ; C = F$

Vì $A = 3E ; B = 2F$

$\Rightarrow A = 3E , B = 2C \Rightarrow A = 6C ; B = 2C$

$\Rightarrow A = 6C = 6.20^\circ = 120^\circ ; B = 2C = 2.20^\circ = 40^\circ$

LÚC BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

18. Cho $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Biết $AB : AC : BC = 2 : 3 : 4$ và chu vi của tam giác ABC bằng 36 cm. Tính các cạnh của tam giác DEF.

(Đề thi giải Lớp Quy Đơn Toán lớp 7, ban Khảo Quang Đo, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2006 - 2007)

Giải

Ta có : $AB = 8\text{cm} ; AC = 12\text{cm} ; BC = 16\text{cm}$.

Mà $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

nên $DE = AB = 8\text{cm} ; DF = AC = 12\text{cm} ; EF = BC = 16\text{cm}$.

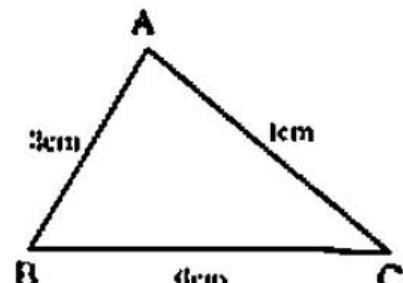
83. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC : CẠNH - CẠNH - CẠNH (C.C.C)

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NÀNG CẨM NHỎ**1. Vẽ tam giác biết ba cạnh**

Bài toán : Vẽ tam giác ABC biết : $AB = 3\text{cm}, BC = 5\text{cm}, AC = 4\text{cm}$.

Giải

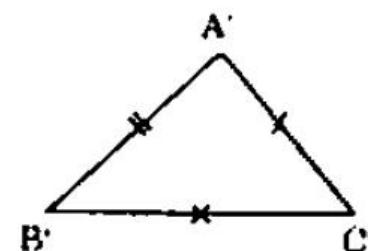
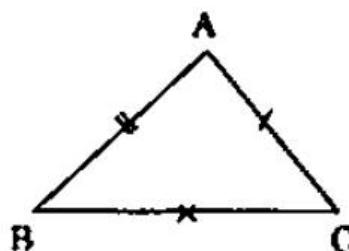
- Vẽ đoạn thẳng BC = 5cm.
- Trên cung một nửa mặt phẳng bờ BC, vẽ cung tròn tâm B bán kính 3cm và cung tròn tâm C bán kính 4cm.
- Hai cung tròn này cắt nhau tại A.



Vẽ các đoạn thẳng AB, AC ta được tam giác ABC.

2. Trường hợp bằng nhau cạnh - cạnh - cạnh

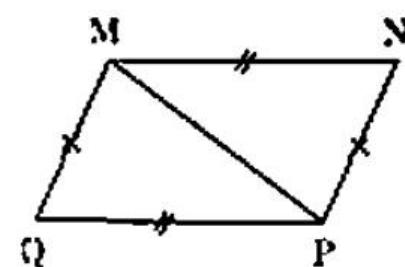
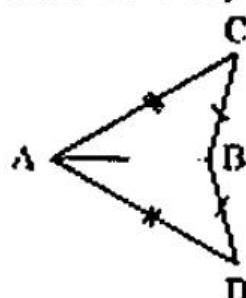
Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau



GT	ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$.
KL	$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

B/ BÀI TẬP**LJ BÀI TẬP CƠ BẢN**

19. Cho các hình dưới đây :



Chứng minh rằng : $\triangle ABC \cong \triangle ABD$; $\triangle MNP \cong \triangle PMN$.

Giai

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ có : $AC = AD$ (gt); AB là cạnh chung ;
 $BC = BD$ (gt)

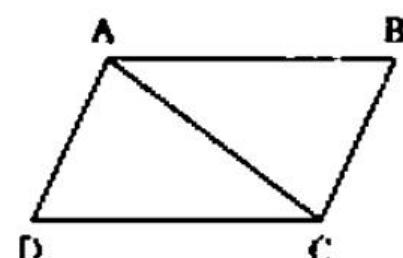
Do đó $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ (c.c.c)

Xét $\triangle MNP$ và $\triangle PMQ$ có $MN = PQ$ (gt)
 MP là cạnh chung
 $NP = QM$ (gt) $\Rightarrow \triangle MNP \cong \triangle PMQ$ (c.c.c).

20. Cho hình vẽ bên, biết $AB = DC$, $AD = BC$.

Chứng minh rằng $AB \parallel DC$ và $AD \parallel BC$.

Giai



$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ (hai góc tương ứng)

Vì \widehat{BAC} và \widehat{DCA} so le trong nên $AB \parallel DC$.

21. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi D là trung điểm cạnh BC.

a) Chứng minh $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

b) Chứng minh AD là tia phân giác của góc BAC.

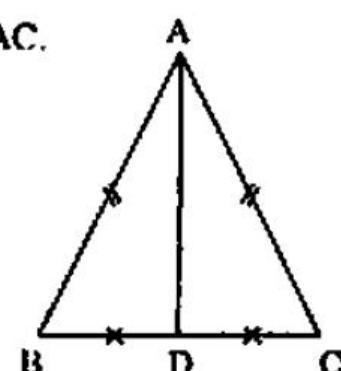
Giai

a) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (c.c.c)

b) Ta có : $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (hai góc tương ứng)

Vì tia AD nằm giữa hai tia AB và AC
nên AD là tia phân giác của \widehat{BAC} .

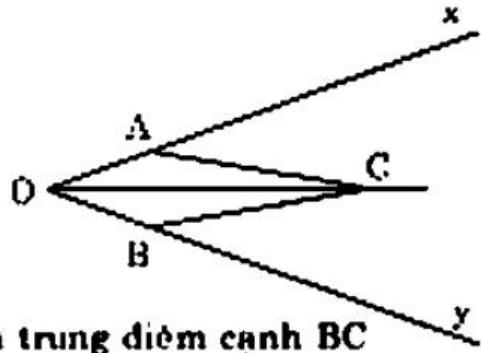


22. Cho góc nhọn xOy . Vẽ cung tròn tâm O bán kính 2cm, cung tròn này cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B. Vẽ cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính 3cm, chúng cắt nhau tại C.

Chứng minh OC là tia phân giác của góc xOy .

Giải

- $\angle OAC = \angle OBC$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOC}$ (hai góc tương ứng).
 mà tia OC nằm giữa hai tia OA và OB
 $\Rightarrow OC$ là tia phân giác của góc xOy .

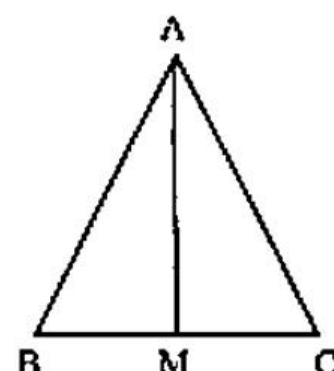
**BÀI TẬP NÂNG CAO**

23. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm cạnh BC.

- a) Chứng minh $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.
 b) Chứng minh $AM \perp BC$.

Giải

- a) $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ (c.c.c).
 b) Ta có: $\triangle ABM \cong \triangle ACM$
 $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng)
 Vì $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (ké bù)
 nên $2\widehat{AMB} = 2\widehat{AMC} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC$

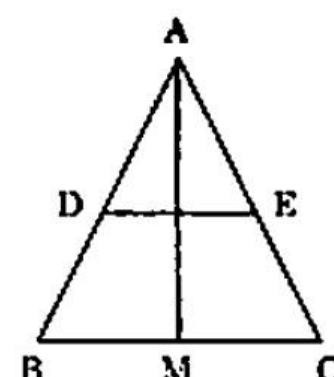


24. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $AD = AE$

Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

Giải

- $\triangle AMB = \triangle AMC$
 $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng)
 hay $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
 Ta lại có $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BAC} + 2\widehat{ABC} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$ (1).



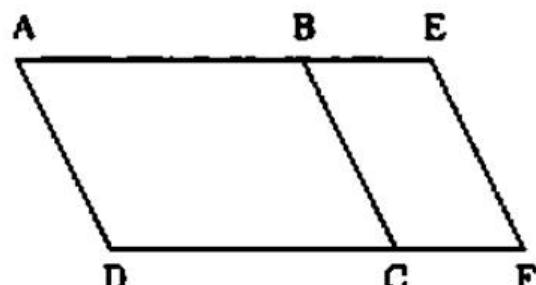
Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{ADE} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$. Vì \widehat{ABC} và \widehat{ADE} đồng vị
 nên $DE \parallel BC$.

25. Cho hình vẽ bên, biết

$AB = DC$, $BE = CF$ và $AD = BC = EF$.

Chứng minh rằng A, B, E thẳng hàng khi và chỉ khi D, C, F thẳng hàng.



Giải

Chứng minh được : $AB \parallel DC$ và $BE \parallel CF$ (1).

Do đó khi D, C, F thẳng hàng thì từ (1) ta suy ra A, E thuộc đường thẳng đi qua B và song song với DF hay A, B, E thẳng hàng.

Chứng minh ngược lại ta cũng có khi A, B, E thẳng hàng thì D, C, F thẳng hàng.

84. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC : CẠNH - GÓC - CẠNH (C.G.C)

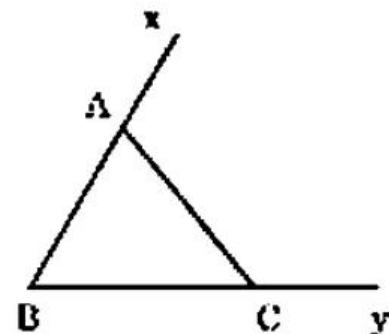
A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỚ

1. Vẽ tam giác biết hai cạnh và góc xen giữa

Bài toán : Vẽ tam giác ABC biết : $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $\hat{B} = 60^\circ$.

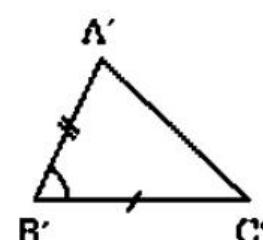
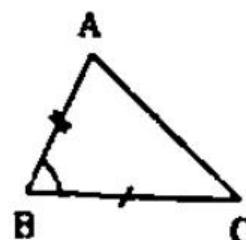
Giải

- Vẽ góc $xBy = 60^\circ$.
- Trên tia Bx lấy điểm A sao cho $BA = 3\text{cm}$.
- Trên tia By lấy điểm C sao cho $BC = 4\text{cm}$.
- Vẽ đoạn thẳng AC , ta được tam giác ABC



2. Trường hợp bằng nhau cạnh - góc - cạnh (c.g.c)

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau



GT

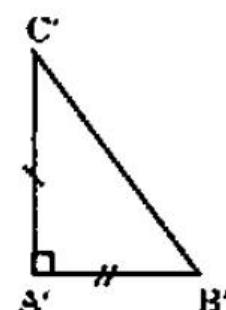
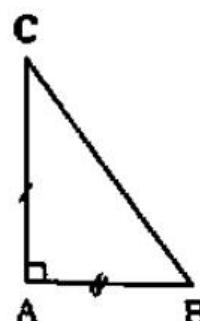
ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có
 $AB = A'B'$,
 $\hat{B} = \hat{B}'$,
 $BC = B'C'$.

KL

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3. Kết quả

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau



B/ BÀI TẬP

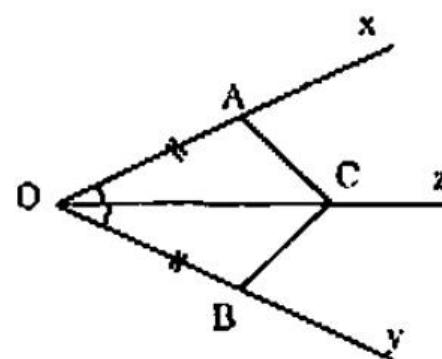
C/ BÀI TẬP CƠ BẢN

26. Cho góc xOy khác góc bẹt, Oz là tia phân giác. Trên tia Ox lấy điểm A (A khác O) trên tia Oy lấy điểm B (B khác O) sao cho $OA = OB$, C là điểm bất kỳ trên tia Oz (C khác O).

Chứng minh $\triangle OAC \cong \triangle OBC$

Giai

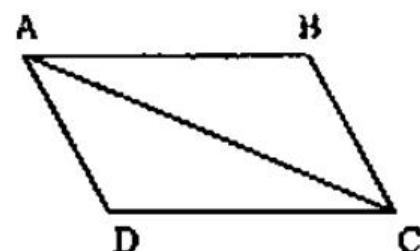
Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$ có $OA = OC$ (gt);
 $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$ (Oz là tia phân giác
 của $x\widehat{O}y$); OC (cạnh chung)
 $\Rightarrow \triangle OAC \cong \triangle OBC$ (c.g.c).



27. Cho hình vé bên, biết $AB = DC$
 và $AB \parallel DC$.

- a) Chứng minh $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.
 b) Chứng minh $AD \parallel BC$ và $AD = BC$.

Giai



a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CAD$ có $AB = DC$ (gt)

$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ (\widehat{BAC} và \widehat{DCA} so le trong, $AB \parallel DC$).

AC (cạnh chung)

$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (c.g.c)

b) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DAC}$ (hai góc tương ứng)

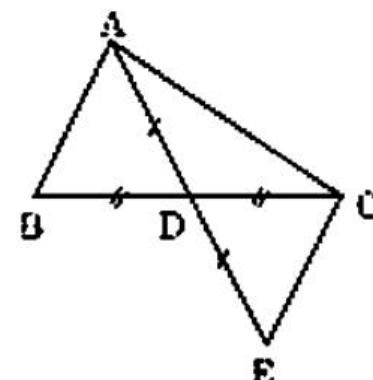
Vì \widehat{BCA} và \widehat{DAC} so le trong nên $AD \parallel BC$

Ta có: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = BC$ (hai cạnh tương ứng).

28. Cho tam giác ABC , D là trung điểm cạnh BC . Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = DA$.

Chứng minh $AB \parallel CE$.

Giai



$\triangle ADB \cong \triangle EDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CED}$ (hai góc tương ứng).

Vì \widehat{BAD} và \widehat{CED} so le trong

$\Rightarrow AB \parallel CE$.

29. Cho góc nhọn xOy , trên tia Ox lấy hai điểm A, C trên tia Oy lấy hai điểm B, D sao cho $OA = OB$, $OC = OD$.

- a) Chứng minh $\triangle OAD \cong \triangle OBC$. b) Chứng minh $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$

Giai

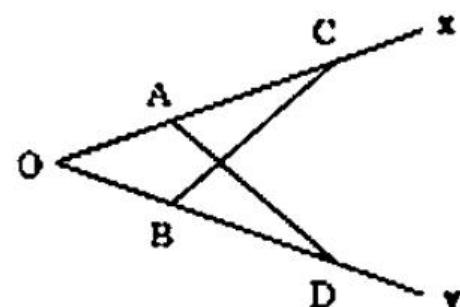
a) $\angle OAD = \angle OBC$ (c.g.c).

b) Ta có: $\angle OAD + \angle CAD = 180^\circ$ (ké bù);

$$\angle OBC + \angle CBD = 180^\circ \text{ (ké bù).}$$

Vì $\angle OAD = \angle OBC$ ($\angle OAD = \angle OBC$)

nên $\angle CAD = \angle CBD$

**BÀI TẬP NÂNG CAO**

30. Cho góc nhọn xOy , Oz là tia phân giác. Trên tia Ox lấy điểm A (A khác O) trên tia Oy lấy điểm B (B khác O) sao cho $OA = OB$, C là điểm bất kỳ trên tia Oz (C khác O).

a) Chứng minh $\triangle OAC = \triangle OBC$. b) Chứng minh $AB \perp OC$.

Giai

a) $\triangle OAC = \triangle OBC$ (c.g.c).

b) Gọi I là giao điểm giữa AB và OC

Xét $\triangle OAI$ và $\triangle OBI$ có :

$$OA = OB \text{ (gt)}; \angle OAI = \angle OBI$$

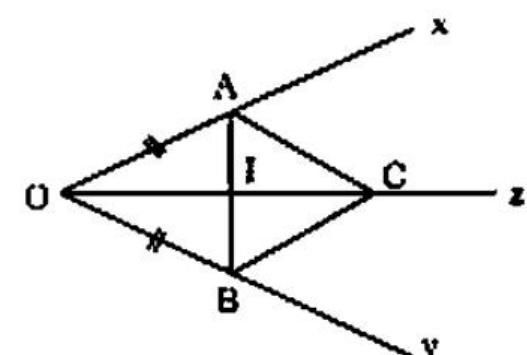
(Oz là tia phân giác của góc xOy);

OI (cạnh chung)

$$\Rightarrow \triangle OAI = \triangle OBI \text{ (c.g.c).}$$

$$\Rightarrow \angle OIA = \angle OIB \text{ (hai góc tương ứng).}$$

$$\text{Mà } \angle OIA + \angle OIB = 180^\circ \text{ (ké bù)} \Rightarrow \angle OIA = \angle OIB = 90^\circ.$$



31. a) Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh BC.

Chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}BC$.

b) Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB,

AC. Chứng minh $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

Giai

a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm D
sao cho $MA = MD$.

Ta có: $\angle MAB = \angle MDC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = DC \text{ (hai cạnh tương ứng);}$$

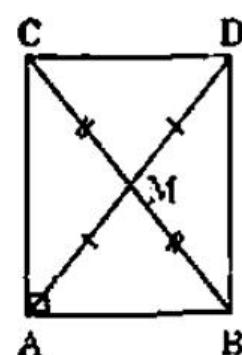
$$\angle MCD = \angle MBA \text{ (hai góc tương ứng).}$$

Vì $\angle MCD$ và $\angle MBA$ so le trong nên $CD \parallel AB$

Ta có: $AC \perp AB$ mà $AB \parallel CD \Rightarrow AC \perp CD$.

Ta có: $\angle ABC = \angle CDA$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = AD$ (hai cạnh tương ứng).

$$\text{Mà } AM = \frac{1}{2}AD \text{ nên } AM = \frac{1}{2}BC$$



b) Trên tia đối của tia NM lấy điểm D sao cho ND = NM

$$\Delta NAM \cong \Delta NCD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AM = DC, \widehat{MAN} = \widehat{DCN}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{MAN} = \widehat{DCN}, \widehat{MAN}$$

và \widehat{DCN} so le trong

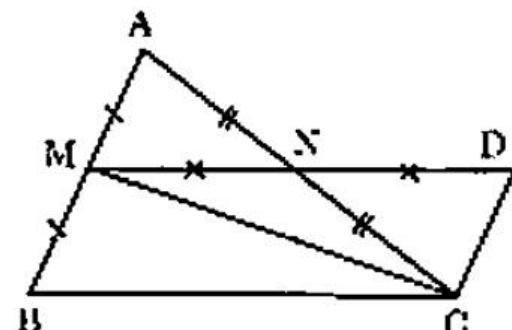
$$\Rightarrow AB \parallel DC \Rightarrow \widehat{CMB} = \widehat{MCD}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ADM} \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{DMC}, BC = MD$$

Ta có: $\widehat{BCM} = \widehat{DMC}$, \widehat{BCM} và \widehat{DMC} so le trong $\Rightarrow MN \parallel BC$.

$$\text{Ta có: } BC = DM; MN = \frac{1}{2} DM \Rightarrow MN = \frac{1}{2} BC.$$



32. Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC

Trên tia đối tia DC lấy điểm M, trên tia đối tia EB lấy điểm N sao cho $DM = DC, EN = EB$. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng

Giai

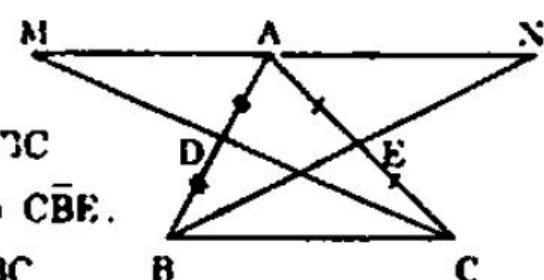
$$\text{Ta có: } \Delta ADM \cong \Delta BDC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{BCD}.$$

Vì \widehat{AMD} và \widehat{BCD} so le trong $\Rightarrow AM \parallel BC$

$$\text{Ta có: } \Delta AEN \cong \Delta CEB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ANE} = \widehat{CBE}.$$

Vì \widehat{ANE} và \widehat{CBE} so le trong $\Rightarrow AN \parallel BC$



Qua A có hai đường thẳng AM và AN cùng song song với BC nên theo trên để O-clít AM và AN trùng nhau. Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng

33. Cho tam giác ABC có $A < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C, vẽ tia Ax vuông góc với AB, trên đó lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia Ay vuông góc với AC, trên đó lấy điểm E sao cho $AE = AC$.

a) Chứng minh $\Delta ACD \cong \Delta AEB$

b) Chứng minh $EB \perp CD$

c) Các đường thẳng AC và ED có vuông góc với nhau không?

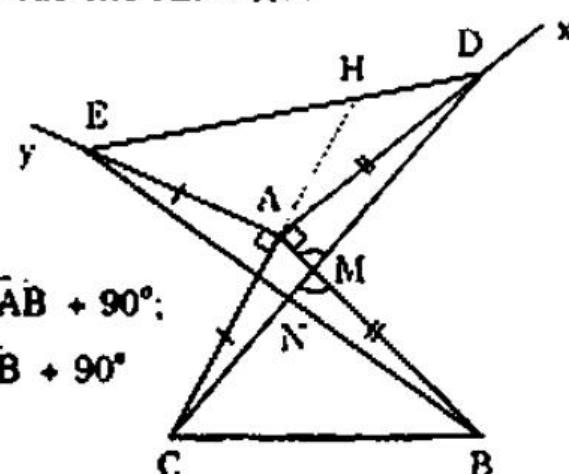
Giai

$$\text{a) Ta có: } \widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = \widehat{CAB} + 90^\circ;$$

$$\widehat{EAB} = \widehat{EAC} + \widehat{CAB} = \widehat{CAB} + 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{EAB}.$$

$$\text{Ta có: } \Delta ACD \cong \Delta AEB \text{ (c.g.c)}$$



b) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CD với AB và EB

Ta có: $\widehat{ADM} = \widehat{MBN}$ ($\triangle ACD \cong \triangle AEB$); $\widehat{NMB} = \widehat{AMD}$ (đối đỉnh).

Vì $\widehat{ADM} + \widehat{AMD} = 90^\circ$ (\widehat{ADM} vuông tại A)

nên $\widehat{MBN} + \widehat{BMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MNB} = 90^\circ \Rightarrow EB \perp CD$.

c) Gọi H là giao điểm của CA và ED. Giả sử $CA \perp ED$

$\Rightarrow \widehat{EHC} = 90^\circ$ hay EH $\perp CA$. Như vậy từ điểm E có hai đường thẳng EA và ED cùng vuông góc với đường thẳng AC. Điều này trái với tiên đề O-clit về đường thẳng vuông góc.

Vậy CA không vuông góc với ED

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

34. Cho tam giác ABC có tia phân giác góc ABC cắt cạnh AC ở D, tia phân giác góc ACB cắt cạnh AB ở E. Tính số đo của góc A biết rằng $BE + CD = BC$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, trường chuyên Văn Toản huyện Đức Phổ, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 1991 - 1992)

Giai

Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = BE$.

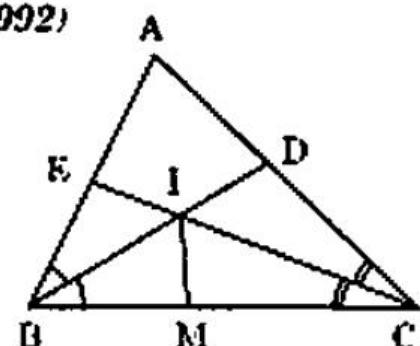
Ta có: $BM + MC = BC$, $BE + CD = BC$

$\Rightarrow MC = CD$

Ta có: $\widehat{ABE} = \widehat{ABM}$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{BIM}$.

Ta có: $\widehat{ACD} = \widehat{ACM}$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CID} = \widehat{CIM}$.

Từ đó ta có $\widehat{BIE} = \widehat{BIM} = \widehat{CIM} = \widehat{CID} = 60^\circ$



55. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC: GÓC - CẠNH - GÓC (G.C.G)

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CẨN NHỎ

1. Vẽ tam giác biết một cạnh và hai góc kề

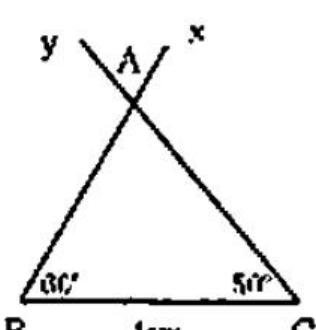
Bài toán: Vẽ tam giác ABC biết $BC = 4\text{cm}$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$.

Giai

Vẽ đoạn thẳng $BC = 4\text{cm}$.

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC, vẽ hai tia Bx và Cy sao cho $\widehat{CBx} = 60^\circ$, $\widehat{BCy} = 50^\circ$.

Hai tia trên cắt nhau tại A, ta được tam giác ABC.



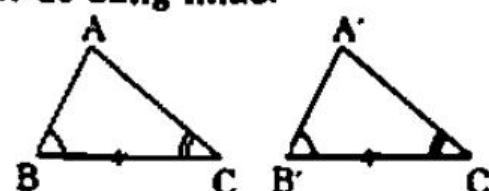
2. Trường hợp bằng nhau góc - cạnh - góc (g.c.g)

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

GT | $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có $\widehat{B} = \widehat{B'}$,

$BC = B'C'$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

KL | $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



3. Hệ quả

Hệ quả 1: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Hệ quả 2: Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau

B/ BÀI TẬP**C/ BÀI TẬP CƠ BẢN**

35. Cho hình bên có $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Chứng minh rằng $AB = DC$ và $AD = BC$.

Giai

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có :

$$\widehat{BAC} = \widehat{DCA} \text{ (so le trong, } AB \parallel DC\text{)}$$

AC (cạnh chung)

$$\widehat{ACB} = \widehat{CAD} \text{ (so le trong, } AD \parallel BC\text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AB = DC, AD = BC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

36. Cho tam giác ABC và tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D . Từ D vẽ hai đường thẳng lần lượt song song với AC và AB cắt AB ở E và AC ở F . Chứng minh rằng $AE = AF = ED = FD$.

Giai

Từ $AE \parallel FD$, $AF \parallel ED$ ta chứng minh được $AE = FD$, $AF = ED$ (1)

Ta có $\widehat{EAD} = \widehat{FDA}$ (\widehat{EAD} và \widehat{FDA} so le trong, $AB \parallel DF$) ;

$\widehat{FAD} = \widehat{EDA}$ (\widehat{FAD} và \widehat{EDA} so le trong, $AC \parallel ED$).

Vì $\widehat{EAD} = \widehat{FAD}$ (AD là tia phân giác của góc A)

$$\Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{EDA}.$$

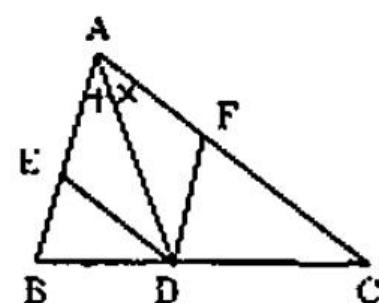
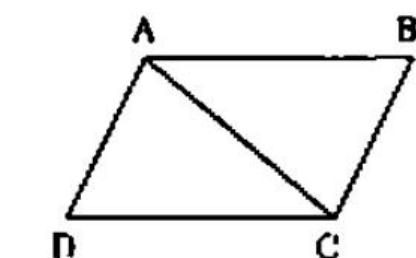
Xét $\triangle AED$ và $\triangle AFD$ có $\widehat{EAD} = \widehat{FAD}$;

AD (cạnh chung) ;

$$\widehat{EDA} = \widehat{FDA} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AED = \triangle AFD \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AE = AF \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF = ED = FD$



37. Cho tam giác ABC có $\hat{A} < 90^\circ$, $AB = AC$. Kẻ BD vuông góc với AC tại D , kẻ CE vuông góc với AB tại E . Gọi O là giao điểm của BD và CE .

a) Chứng minh $BD = CE$.

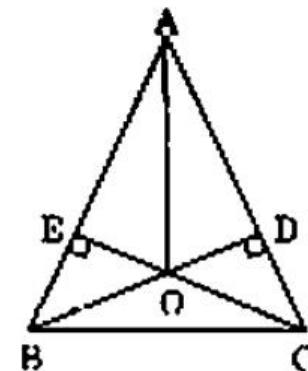
b) Chứng minh $\triangle ODC \cong \triangle OEB$.

c) Chứng minh AO là tia phân giác của góc BAC .

Giai

- a) $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (cạnh huyền, góc nhọn)
 $\Rightarrow BD = EC$.

- b) Ta có: $AB = AC$ (gt);
 $AE = AD$ ($\triangle ACE \cong \triangle ABD$)
 $\Rightarrow AB - AE = AC - AD$ hay $EB = DC$
 $\Rightarrow \triangle ODC \cong \triangle OEB$ (g.c.g)



- c) $\angle AEO = \angle ADO \Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{DAO}$ (hai góc tương ứng).

Vì tia AO nằm giữa hai tia AB và AC
nên suy ra AO là tia phân giác của góc BAC.

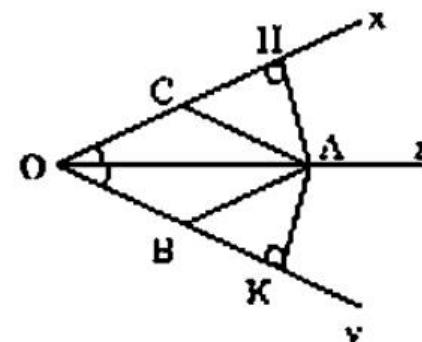
38. Cho góc nhọn xOy , Oz là tia phân giác. Qua điểm A thuộc tia Oz kẻ các đường thẳng song song với Ox và Oy, lần lượt cắt Oy, Ox tại B và C.

- a) Chứng minh $OB = OC$ và $AB = AC$.
b) Kẻ $AH \perp Ox$ tại H và $AK \perp Oy$ tại K. Chứng minh $AH = AK$.

Giai

- a) $\triangle OAB \cong \triangle OAC$ (g.c.g).
 $\Rightarrow OB = OC, AB = AC$.

- b) $\triangle AHO \cong \triangle AKO$ (cạnh huyền, góc nhọn)
 $\Rightarrow AH = AK$.



BÀI TẬP NÂNG CAO

39. Cho góc xOy , trên tia Ox lấy ba điểm A, B, C sao cho $OA = AB = BC$. Qua A, B, C kẻ các đường thẳng song song với nhau, các đường thẳng này cắt tia Oy lần lượt tại A' , B' , C' . Chứng minh rằng $OA' = A'B' = B'C'$.

Giai

Vẽ $A'D \parallel Ox$ cắt BB' tại D

Ta có: $A'D \parallel AB$, $AA' \parallel BD$ Chứng minh được $A'D = AB$

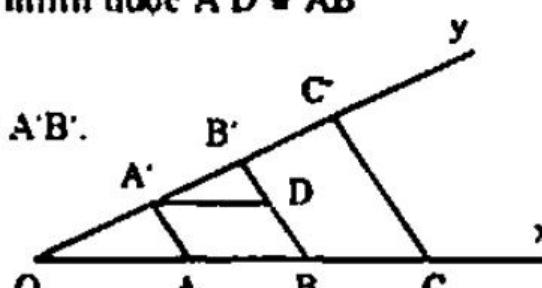
Vì $OA = AB$ nên $OA = A'D$

$\Rightarrow \triangle OA'A \cong \triangle A'DB$ (g.c.g) $\Rightarrow OA' = A'D$.

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$OA' = B'C'$$

Vậy $OA' = A'B' = B'C'$.



40. Cho tam giác cân ABC có $A = 60^\circ$. Các tia phân giác của góc B và C lần lượt cắt các cạnh AC và AB tại D và E.

- a) Chứng minh $BE + CD = BC$.
b) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Tính số đo các góc của tam giác IDE.

Giai

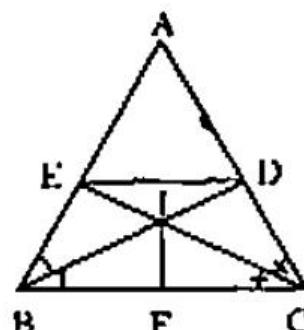
a) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BE = BF$

Ta có: $\Delta BEI \cong \Delta BFI$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = BF$

Ta có: $\Delta CDI \cong \Delta CFI$ (c.g.c) $\Rightarrow CD = CF$

Do vậy $BE + CD = BF + CF = BC$.

b) $\widehat{DIE} = 120^\circ$; $\widehat{IDE} = \widehat{IED} = 30^\circ$



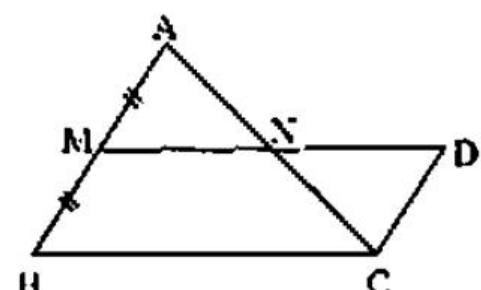
41. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Đường thẳng qua M song song với BC cắt AC ở D. Chứng minh rằng NA = NC.

Giai

Qua C vẽ đường thẳng Cy song song với AB. Gọi D là giao điểm MN và Cy.

Ta có: $\Delta AMN \cong \Delta CDN$ (g.c.g).

$\Rightarrow AN = NC$.



42. Cho tam giác ABC có $A < 90^\circ$, $AB = AC$. Qua A kẻ đường thẳng xy sao cho B và C nằm cung phia đối với đường thẳng xy. Ve BD \perp xy tại D, CE \perp xy tại E.

a) Chứng minh $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

b) Chứng minh $DE = BD + CE$

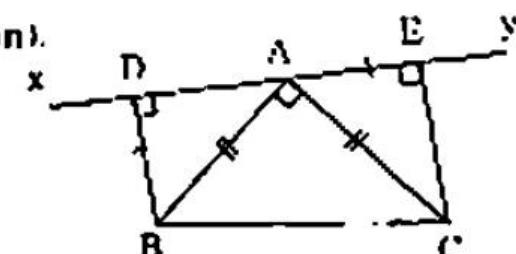
Giai

a) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ (canh huyền - góc nhọn).

b) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

$\Rightarrow BD = AE$; $AD = CE$

$\Rightarrow BD + CE = AE + AD = DE$.



III BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

43. Cho tam giác ABC có $A < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chừa điểm C vẽ $AD \perp AB$ và $AD = AB$, trên nửa mặt phẳng bờ AC có chừa điểm B vẽ $AE \perp AC$ và $AE = AC$. Kẻ AH $\perp ED$ tại H. Chứng minh đường thẳng AH đi qua trung điểm của cạnh BC

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, trường THCS Colette, Quận 3, TP.Hồ Chí Minh, năm học 1994 – 1995)

Giai

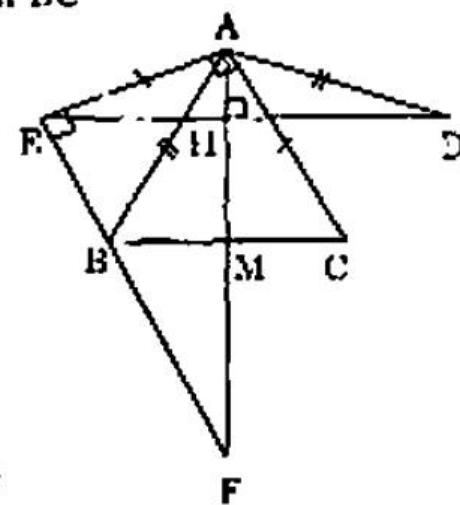
Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AH tại F. Ta có $BF \perp AE$

$\Rightarrow \Delta EAD \cong \Delta FBA$ (g.c.g).

Do đó $BF = AE$ mà $AE = AC \Rightarrow BF = AC$.

Gọi M là giao điểm AF và BC, ta có:

$\Delta AMC \cong \Delta FMB$ (g.c.g) $\Rightarrow MB = MC$



88. TÂM GIÁC CÂN

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CẨM NHỎ

1. Định nghĩa

Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

2. Tính chất

Định lý 1: Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau

Định lý 2: Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân

Định nghĩa: Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

3. Tam giác đều

- **Định nghĩa:** Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

- **Các hệ quả:**

- Trong một tam giác đều, mỗi góc bằng 60°

- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau, thì tam giác đó là tam giác đều.

- Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

B/ BÀI TẬP

Lý BÀI TẬP CƠ BẢN

44. Tính các góc ở đáy của một tam giác cân biết góc ở đỉnh bằng 70° .

Giai

Tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Gọi góc ở đáy là x , ta có: $70^\circ + x + x = 180^\circ$

$$70^\circ + 2x = 180^\circ$$

$$2x = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$x = 110^\circ : 2 = 55^\circ.$$

45. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối tia AC lấy điểm D sao cho $DA = AC$. Chứng minh tam giác BCD vuông.

Giai

Tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (hai góc kề một đáy).

Xét $\triangle ABD$ có $AB = AD (= AC)$

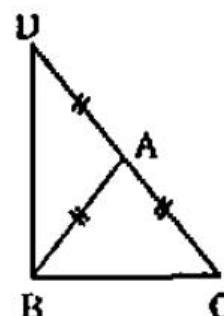
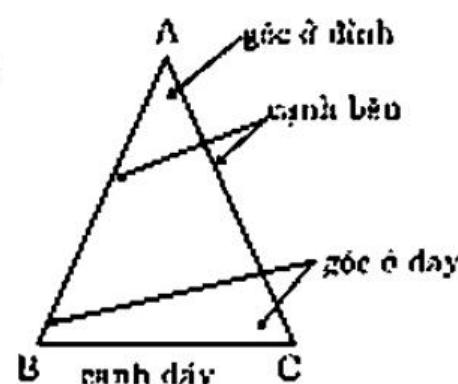
$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ADB}$ (hai góc kề một đáy).

Vì $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 180^\circ$

(tổng ba góc trong $\triangle ABC$).

Do vậy $\widehat{DBC} = 90^\circ$.



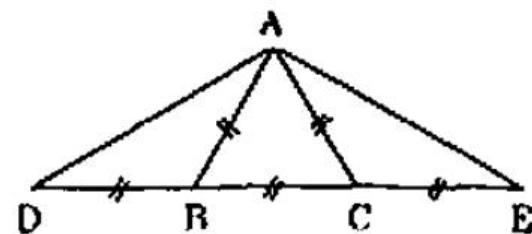
46. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CB$.
- Chứng minh $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.
 - Tính số đo góc DAE.

Giai

a) Ta có: $\angle ABD + \angle ABC = 180^\circ$.
 $\angle ACE + \angle ACB = 180^\circ$.

Vì $\angle ABC = \angle ACB$
nên suy ra: $\angle ABD = \angle ACE$
 $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (c.g.c).

b) $\angle DAE = 120^\circ$.



BÀI TẬP NÂNG CAO

47. Cho tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D, qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC tại E, qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại K.

Chứng minh rằng :

a) Tam giác AED cân.

b) $AE = BK$

Giai

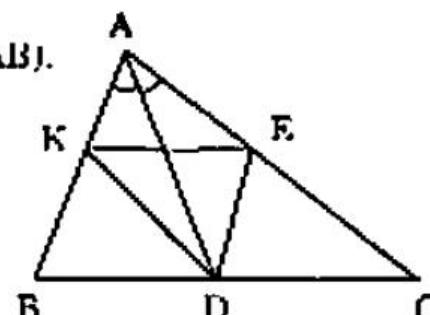
a) Ta có $\angle DAB = \angle ADE$ (so le trong và $DE \parallel AB$).

Vì $\angle DAB = \angle DAC$

(AD là tia phân giác của góc A)

nên $\angle DAE = \angle ADE$

$\Rightarrow \triangle AED$ cân tại E.



b) $\triangle BKD \cong \triangle EKD$ (g.c.g) $\Rightarrow BK = ED$

Vì $ED = EA$ ($\triangle AED$ cân tại E) nên $AE = BK$.

48. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90^\circ$). Điểm D nằm giữa A và C, điểm E nằm giữa A và B. Chứng minh rằng :

a) Nếu $EA = EB$ và $DA = DC$ thì $BD = CE$

b) Nếu $\angle ABD = \angle CBD$ và $\angle ACE = \angle BCE$ thì $BD = CE$.

c) Nếu $BD \perp AC$ và $CE \perp AB$ thì $BD = CE$

Giai

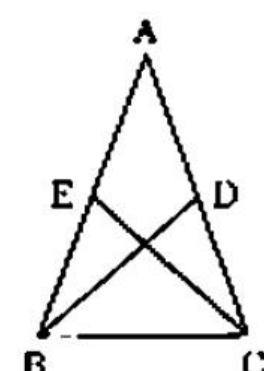
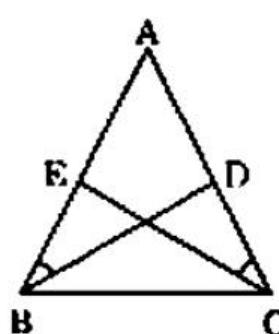
a) $\triangle ABD \cong \triangle AEC$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = CE$.

b) Từ giả thiết ta có $\angle ABD = \angle ACE$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAE$ (g.c.g)

$\Rightarrow BD = CE$



c) $\triangle ABC$ cân tại A (gt)

$$\Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{EBC}.$$

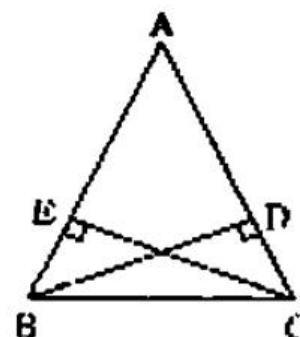
Xét $\triangle BDC$ ($BDC = 90^\circ$)

và $\triangle ECB$ ($CEB = 90^\circ$)

BC (canh chung); $\widehat{DCB} = \widehat{EBC}$

$\Rightarrow \triangle BDC \cong \triangle ECB$ (canh huyền,

góc nhọn) $\Rightarrow BD = CE$.



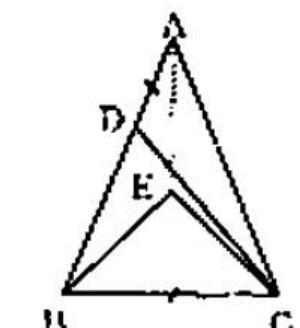
49. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính số đo góc ACD.

Giai

Trên cung một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A, vẽ điểm E sao cho $\angle BEC$ đều.

Ta có: $\angle ABE = \angle ACE$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BAE} - \widehat{CAE} = 10^\circ$.

Ta có: $\angle ECA = \angle DAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ACE} = 10^\circ$



50. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối của các tia AB, BC, CA lấy lần lượt ba điểm D, E, F sao cho $AD = BE = CF$. Chứng minh tam giác DEF đều.

Giai

$\triangle ABC$ đều (gt)

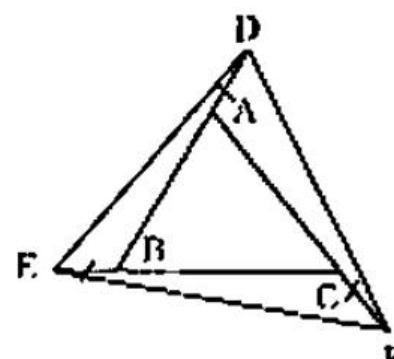
$\Rightarrow AB = BC = CA$ Từ đó ta có $BD = CE = AF$

và còn có $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DAF} = \widehat{FCB} = \widehat{EBD} = 120^\circ$

Ta có: $\angle EBD = \angle DAF$ (c.g.c) $\Rightarrow ED = DF$

Ta có: $\angle EBD = \angle FCE$ (c.g.c) $\Rightarrow ED = EF$.



BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

51. a) Cho tam giác đều ABC. Tia phân giác của góc ABC cắt AC ở D, tia phân giác của góc ACB cắt AB ở E. Gọi O là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng:

a) $BD \perp AC$ và $CE \perp AB$

b) $OA = OB = OC$

(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, báo Khán Quang Đô, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011)

- b) Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 80^\circ$. Gọi D là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{DBC} = 10^\circ$, $\widehat{DCB} = 30^\circ$. Tính số đo góc BAD
(Đề thi giải Lê Quý Đôn Toán lớp 7, báo Khán Quang Đô, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2008 - 2009).

Giai

a) $\angle BAD = \angle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CDB}$

Mà $\widehat{ADB} + \widehat{CDB} = 180^\circ$. Nên $\widehat{ADB} + \widehat{CDB} = 180^\circ - 90^\circ \rightarrow BD \perp AC$

b) $\triangle AODA \cong \triangle ODC$ (c.g.c) $\Rightarrow OA = OC$

Tương tự $OB = OC$. Vậy $OA = OB = OC$.

Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ tam giác đều EBC .

Ta có : $\triangle EBA \cong \triangle ECA$ (c.c.c).

$\Rightarrow \angle BEA = \angle CEA$, $\angle BEA = 30^\circ \Rightarrow \angle EBA = \angle EDC$ (g.c.g).

$\triangle BAD$ cân tại B có $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$.

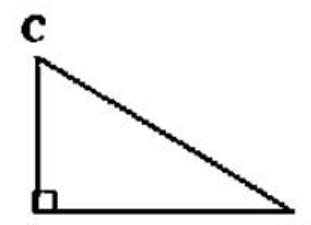
Vậy $\angle ABD = (180^\circ - \angle ABD) : 2 = 70^\circ$

B7. ĐỊNH LÝ PY-TA-GO

A/ KIẾN THỨC VÀ KÌ NĂNG CÁN NHỎ

1. Định lý Py-ta-go

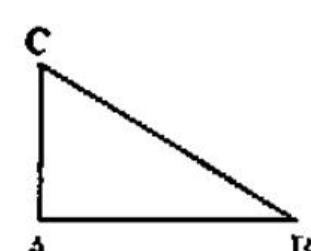
- Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông. $\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.



2. Định lý Py-ta-go đảo

- Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\triangle ABC, BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ.$$



B/ BÀI TẬP

LJ BÀI TẬP CƠ BẢN

52. Tính độ dài cạnh huyền (x) trong các tam giác vuông, biết độ dài hai cạnh góc vuông là :

a) 5cm , 12cm

b) 7cm , 5cm

c) 3cm , 4cm

Giai

Áp dụng định lý Py-ta-go để tính độ dài cạnh huyền (x) :

a) $x^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow x = 13$ (cm).

b) $x^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74 \Rightarrow x = \sqrt{74}$ (cm).

c) $x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = 5$ (cm).

53. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có $AC = 20$ cm. Kẻ $AH \perp BC$ tại H. Biết $BH = 9$ cm, $HC = 16$ cm. Tính AB và AH .

Giai

$BC = BH + HC = 25$ (cm).

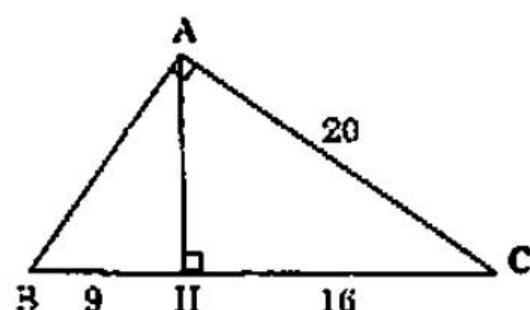
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, theo định lý Py-ta-go ta có : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 = 25^2 - 20^2 \\ = 625 - 400 = 225$$

$$\Rightarrow AB = 15 \text{ (cm)}$$

Xét $\triangle AHIC$ vuông tại H, theo định lý Py-ta-go ta có : $AC^2 = AH^2 + HC^2$

$$\Rightarrow AH^2 = AC^2 - HC^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 \Rightarrow AH = 12 \text{ (cm)}$$



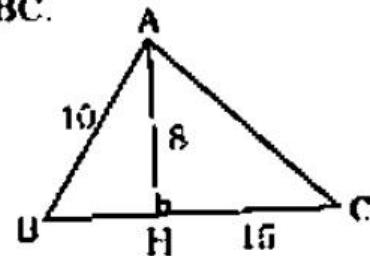
54. Cho tam giác nhọn ABC, kẻ AH \perp BC tại H! Biết AB = 10cm ; AH = 8cm ; HC = 15cm. Tính chu vi tam giác ABC.

Giai

Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông AHB và AHC ta được BH = 6 (cm) ; AC = 17 (cm).

Ta có : BC = BH + HC = 6 + 15 = 21 (cm)

Chu vi tam giác ABC bằng AB + AC + BC = 10 + 17 + 21 = 48 (cm)



55. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH \perp BC tại H. Chứng minh rằng $BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = BC^2$.

Giai

$\triangle ABH$ vuông tại H nên : $AB^2 = AH^2 + BH^2$.

$\triangle ACH$ vuông tại H nên : $AC^2 = AH^2 + HC^2$.

Do đó : $AB^2 + AC^2 = AH^2 + BH^2 + AH^2 + HC^2$

$$AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2 \quad (1)$$

Mặt khác $\triangle ABC$ vuông tại A, theo định lí Py-ta-go ta có : $BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $2AH^2 + BH^2 + CH^2 = BC^2$



56. Cho tam giác ABC có AB = 8cm, AC = 6cm, BC = 10cm. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AD = 1cm. Tính độ dài đoạn thẳng BD.

Giai

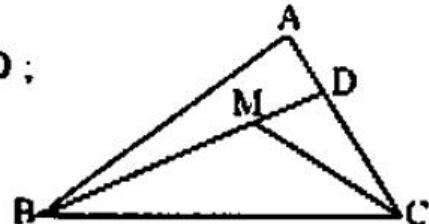
Ta có : $AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$; $BC^2 = 100$;

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ có } AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Theo định lí Py-ta-go đảo, ta có tam giác ABC vuông tại A

$\triangle ABD$ vuông tại A, theo định lí Py-ta-go ta có :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 8^2 + 1^2 = 65 \Rightarrow BD = \sqrt{65} \text{ (cm)}.$$



BÀI TẬP NÂNG CAO

57. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $3AB = 4AC$ và $BC = 20\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh AB và AC

Giai

$\triangle ABC$ vuông tại A, theo định lí Py-ta-go ta có :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = 20^2 = 400.$$

$$\text{Ta có : } 3AB = 4AC \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{AC}{3} \Rightarrow \frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{9}.$$

Theo tính chất dây tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{9} = \frac{AB^2 + AC^2}{16 + 9} = \frac{BC^2}{25} = \frac{400}{25} = 16.$$

$$\text{Do đó } \frac{AB^2}{16} = 16 \Rightarrow AB = 16 \text{ (cm)}; \frac{AC^2}{9} = 16 \Rightarrow AC = 12 \text{ (cm)}.$$

58. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Qua A kẻ đường thẳng d bất kì. Vẽ BH \perp d tại H, CK \perp d tại K. Chứng minh rằng tổng $BH^2 + CK^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Giai

- Trường hợp đường thẳng d không cắt cạnh BC:

$$\text{Ta có: } \angle AHB = \angle CKA$$

(cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow BH^2 + CK^2 = AB^2 \text{ không đổi.}$$

- Trường hợp đường thẳng d cắt cạnh BC tại một điểm nằm giữa B và C: ta có $BH^2 + CK^2 = AB^2$ không đổi

- Trường hợp đường thẳng d trùng với đường thẳng AB:

$$\text{Ta có } K \equiv A \text{ và } H \equiv B \Rightarrow BH = 0, CK = AC$$

$$\text{nên } BH^2 + CK^2 = AC^2 \text{ không đổi.}$$

- Trường hợp đường thẳng d trùng với đường thẳng AC:

$$\text{Ta có } H \equiv A \text{ và } K \equiv C \Rightarrow KH = AB, CK = 0$$

$$\text{nên } BH^2 + CK^2 = AB^2 \text{ không đổi.}$$

59. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ AH \perp BC tại H. Chứng minh rằng $AH^2 = BH.CH$.

Giai

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H, theo định lí Py-ta-go ta có $AB^2 = BH^2 + AH^2$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H, theo định lí Py-ta-go ta có $AC^2 = CH^2 + AH^2$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BH^2 + AH^2 + CH^2 + AH^2 = BH^2 + HC^2 = 2AH^2.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (Py-ta-go)

$$\Rightarrow BC^2 = BH^2 + HC^2 + 2AH^2.$$

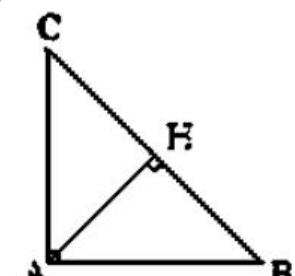
$$\text{Vì } BC^2 = (BH + CH)^2 = (BH + CH)(BH + CH)$$

$$= BH^2 + CH^2 + 2BH.CH$$

$$\text{Do đó } BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH.CH$$

$$\Rightarrow 2AH^2 = 2BH.CH \Rightarrow AH^2 = BH.CH.$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN



60. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 30^\circ$. Dung bút ngoài tam giác ABC tam giác đều BCD. Chứng minh rằng $AD^2 = AB^2 + AC^2$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 8, trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP.Hồ Chí Minh, năm học 2005 - 2006)

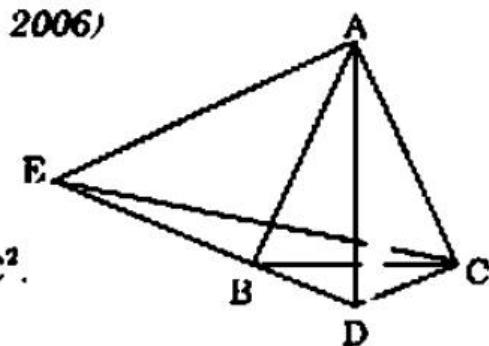
Giai

Vẽ phía ngoài tam giác ABC dựng tam giác đều ABE $\Rightarrow AB = BE = AE$

$$\Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle BAD (\text{c.g.c}) \Rightarrow EC = AD$$

Vì $\triangle AEC$ vuông tại A $\Rightarrow AE^2 + AC^2 = EC^2$.

$$\text{Vậy } AB^2 + AC^2 = AD^2.$$



88. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

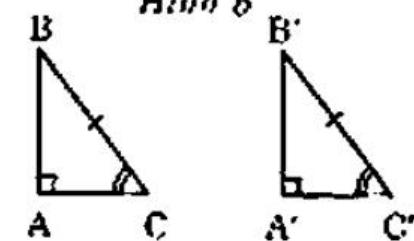
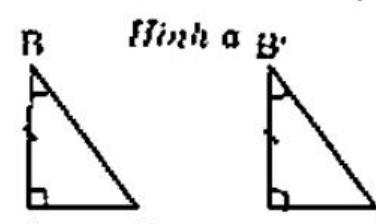
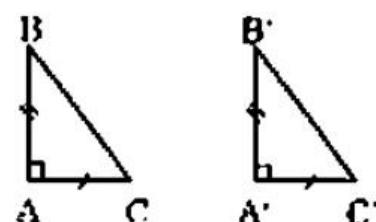
A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỎ

1. Các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông

a) Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (c.g.c), (hình a).

b) Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì tam giác vuông đó bằng nhau (g.c.g), (hình b).

c) Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (g.c.g), (hình c).



Hình c

2. Trường hợp bằng nhau về cạnh huyền và cạnh góc vuông

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

61. Cho góc nhọn xOy , Oz là tia phản giác. M là điểm bất kỳ trên tia Oz , kẻ $MH \perp Ox$ tại H , $MK \perp Oy$ tại K

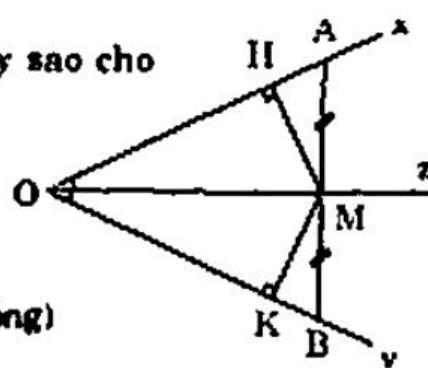
a) Chứng minh $MH = MK$

b) Gọi A, B lần lượt là hai điểm trên Ox, Oy sao cho $MA = MB$. Chứng minh rằng $OA = OB$

Gửi

a) $\triangle MHO = \triangle MKO$ (cạnh huyền - góc nhọn)
 $\Rightarrow MH = MK$.

b) $\triangle MHA = \triangle MKB$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)
 $\Rightarrow AH = BK \Rightarrow OA = OB$.



62. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi D là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB tại B và đường thẳng vuông góc với AC tại C . Chứng minh rằng tam giác DBC cân.

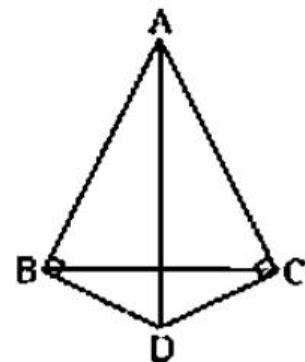
Giai

Ta có : $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD$

(cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow DB = DC \Rightarrow \triangle BDC$ cân tại D.



63. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90^\circ$). Vẽ $BH \perp AC$ tại H, $CK \perp AB$ tại K

a) Chứng minh rằng $\triangle AHB = \triangle AKC$.

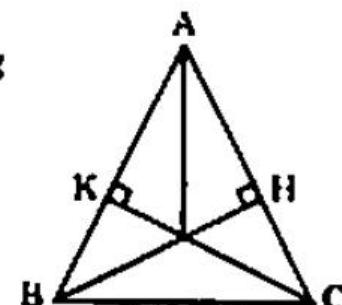
b) Gọi I là giao điểm của BH và CK. Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc BAC.

Giai

a) $\triangle AHB = \triangle AKC$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) $\triangle AHI = \triangle AKI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{HAI} = \widehat{KAI} \Rightarrow AI$ là tia phân giác của \widehat{BAC} .



BÀI TẬP NÂNG CAO

64. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Vẽ $BH \perp AD$ tại H, vẽ $CK \perp AE$ tại K

Chứng minh rằng :

a) $\triangle BHD = \triangle CKE$.

b) $\triangle AHB = \triangle AKC$.

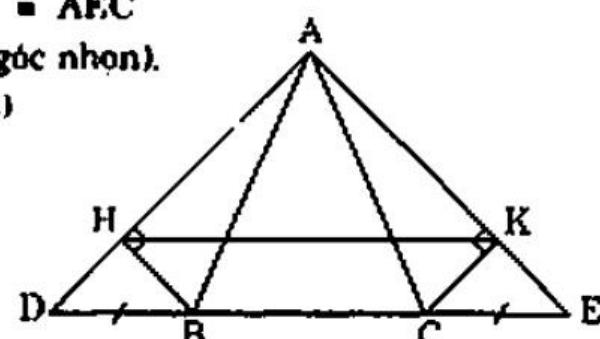
c) $BC \parallel HK$.

Giai

a) $\angle ABD = \angle ACE$ (c. g c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AEC}$
 $\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) Ta có : $BH = CK$ ($\triangle BHD = \triangle CKE$)
 $\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

c) $\widehat{AHK} = \widehat{ADE} = \frac{180^\circ - \widehat{DAE}}{2}$
 $\Rightarrow HK \parallel DE$ hay $BC \parallel HK$.



65. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. D là điểm trên cạnh AC sao cho $AD = AB$. Vẽ DE vuông góc với BC tại E. Chứng minh rằng : $HA = HE$.

Giai

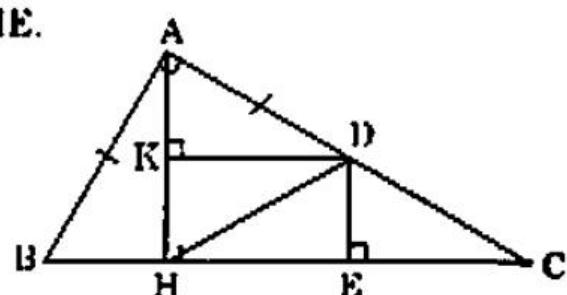
Vẽ DK $\perp AH$ tại H.

Xét $\triangle AHB$ ($\widehat{AHB} = 90^\circ$)

và $\triangle KDA$ ($\widehat{DKA} = 90^\circ$).

Ta có : $AB = AD$ (gt),

$\widehat{BAH} = \widehat{ADK}$ (cùng phụ với góc \widehat{KAD}).



Giải

a) $\Delta MAO \cong \Delta MOB$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow OA = OB.$$

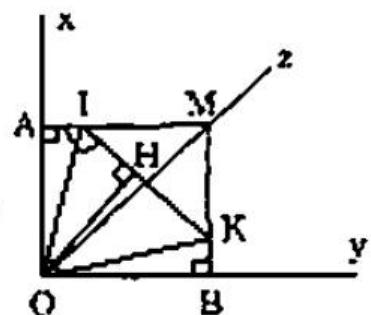
b) Vẽ $OH \perp IK$ ($H \in IK$).Ta có: $\Delta OAI \cong \Delta OHI$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow OA = OH, \angle OAI = \angle OHI \text{ (1).}$$

Ta có:

$$\Delta OHK \cong \Delta OBK \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)} \Rightarrow \widehat{HOK} = \widehat{BOK} \text{ (2).}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \widehat{IOK} - \frac{1}{2}\widehat{xOy} = \frac{1}{2}.90^\circ = 45^\circ.$$

**BÀI THI CHỌP HỌC SINH GIỎI TOÁN**

69. Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$). Qua A vẽ một đường thẳng d ở ngoài tam giác ABC . Vẽ $BD \perp d$ tại D , $CE \perp d$ tại M . H là trung điểm của BC .

Chứng minh rằng :

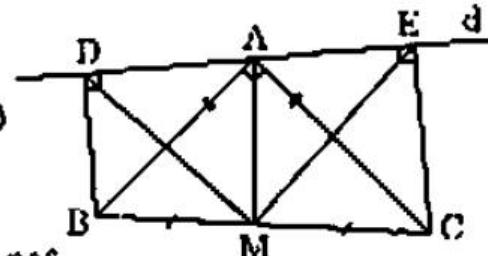
a) $BD + CE = DE$.b) MDE là tam giác vuông cân.

(Đề thi chọp học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận 6, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1994 - 1995)

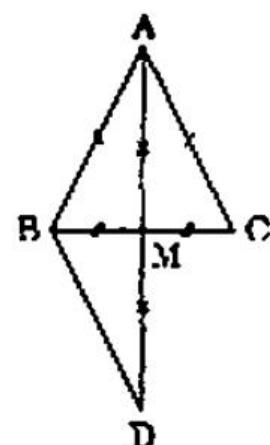
Giải

a) $\Delta ADB \cong \Delta CEA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow BD = AE, AD = CE.$$

Vậy $DE = BD + CE$.b) $\Delta AMB \cong \Delta AMC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MAC} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ Vì $\widehat{ABM} = 45^\circ$ (ΔABC vuông cân tại A) $\Rightarrow \Delta AMB$ vuông cân tại $M \Rightarrow MA = MB$.Ta có: $\Delta BDM \cong \Delta AEM$ (c.g.c) $\Rightarrow MD = ME; \widehat{BMD} = \widehat{AME}$.Ta có: $\widehat{DMA} + \widehat{BMD} = \widehat{DMA} + \widehat{AME} = 90^\circ$.**ÔN TẬP CHƯƠNG II**

1. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm cạnh BC , trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

a) Chứng minh $AM \perp BC$ và AM là tia phân giác của góc BAC .b) Chứng minh $MD \parallel AC$ 

Giải

a) $\Delta AMB \cong \Delta AMC$ (c.c.c).

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}; \widehat{BAM} = \widehat{MAC} \text{ (hai góc tương ứng)} \Rightarrow AM \perp BC.$$

b) $\Delta AMC \cong \Delta DMB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MDB}$ (hai góc tương ứng).Vì \widehat{MAC} và \widehat{MDB} so le trong $\Rightarrow AC \parallel BD$.

2. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa hai điểm A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB về hai tam giác đều ACD và BCE. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BD. Chứng minh tam giác MNC là tam giác đều

Giai

$$\Delta ACE \cong \Delta DCB \text{ (c.g.c.)}$$

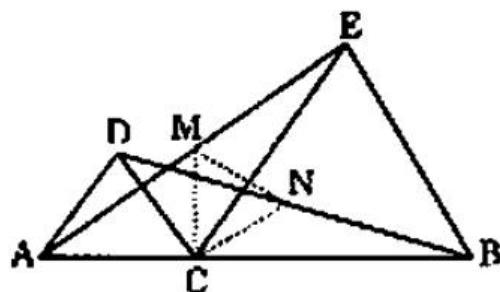
$\Rightarrow AE = RD$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow ME = NB.$$

$$\Delta EMC \cong \Delta BNC \text{ (c.g.c.)}$$

$\Rightarrow MC = CN$ nên $\triangle MCN$ là tam giác cân

Ta lại có $\widehat{MCN} = \widehat{ECB} = 60^\circ$. Vậy $\triangle MCN$ là tam giác đều.



3. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = AC.

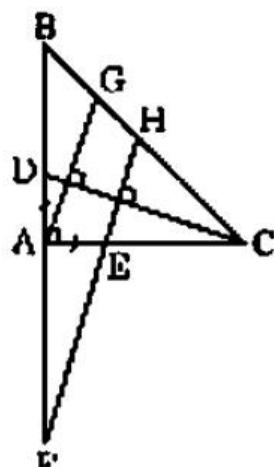
Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Các đường thẳng vuông góc với CD vẽ từ A và E lần lượt cắt cạnh BC tại G và H. Chứng minh rằng G là trung điểm của BH.

Giai

Gọi F là giao điểm giữa HE và BA.

$$\Delta AFE \cong \Delta ACD \text{ (c.g.c.)}$$

$\Rightarrow AF = AC$ mà $AC = AB$ nên $AF = AB$



4. Cho đoạn thẳng AB, M là trung điểm của AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB về các tia Ax và By vuông góc với AB. Gọi C là một điểm thuộc tia Ax. Đường vuông góc với M tại M cắt By tại D. Chứng minh $CD = AC + BD$.

Giai

Gọi N là giao điểm của CM và DB.

$$\text{Ta có: } \widehat{CAM} = \widehat{NBM} (= 90^\circ);$$

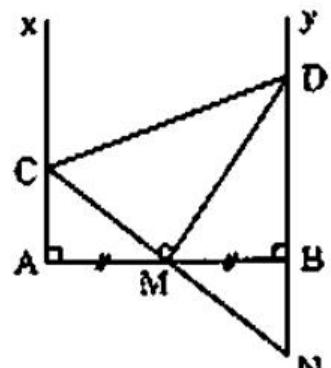
$$AM = MB; \widehat{AMC} = \widehat{BMN}$$

$$\Rightarrow \Delta AMC \cong \Delta BMN \text{ (g.c.g.)}$$

$\Rightarrow MC = MN; AC = BN$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow \Delta DMC \cong \Delta DMN \text{ (c.g.c.)}$$

$\Rightarrow CD = DN$ mà $DN = DB + BN = DB + AC \Rightarrow CD = AC + BD$.



5. Cho tam giác ABC, có $BH \perp AC$ tại H và $BH = \frac{1}{2} AC$ và $\widehat{BAC} = 75^\circ$.

Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C.

Giai

Trên tia đối HB lấy điểm D sao cho $HD = HB$.

$$\text{Vì } BH = \frac{1}{2} AC \text{ nên } BD = AC$$

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C lấy điểm E sao cho ΔABE đều $\Rightarrow \widehat{BAE} = 60^\circ$.

Vì $\widehat{BAC} = 75^\circ$ nên $\widehat{EAC} = 15^\circ$.

Ta có $\Delta ABD \cong \Delta EAC$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{AEC}$.

$\Delta AHB \cong \Delta AHD$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{DAH}$ mà $\widehat{BAH} + \widehat{BAC} = 75^\circ$

nên $\widehat{BAD} = \widehat{BAH} + \widehat{DAH} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{AEC} = 150^\circ$ ($\widehat{AEC} = \widehat{BAD}$).

Do đó suy ra $\widehat{BEC} = 150^\circ \Rightarrow \Delta AEC \cong \Delta BEC$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = BC$

Do vậy ΔABC cân tại C.

6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. M là điểm trong tam giác sao cho $MA = 2\text{cm}$ $MB = 3\text{cm}$ và $\widehat{AMC} = 135^\circ$. Tính độ dài đoạn thẳng MC.

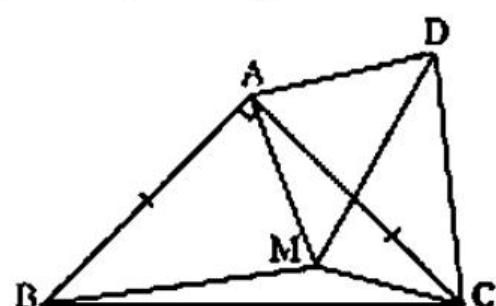
Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ AM không chứa điểm B vẽ tam giác ADM vuông cân tại A.

Ta có: $\widehat{DMC} = \widehat{AMC} - \widehat{AMD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta AMC$ (c.g.c).

$\Rightarrow DC = MB = 3\text{ (cm)}$



Xét ΔAMD vuông tại A, theo định lí Py-ta-go, ta có :

$$MD^2 = MA^2 + AD^2 = 2^2 + 2^2 = 8.$$

Xét ΔMCD vuông tại M, theo định lí Py-ta-go, ta có :

$$CD^2 = MD^2 + MC^2 \Rightarrow MC^2 = CD^2 - MD^2$$

$$MC^2 = 3^2 - 8 = 1 \Rightarrow MC = 1\text{ (cm)}.$$

7. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ AH $\perp BC$ tại H. Tia phân giác của góc \widehat{HAC} cắt cạnh AC tại D, E là điểm trên cạnh AB sao cho $BE = BH$. Chứng minh rằng $EH \parallel AD$.

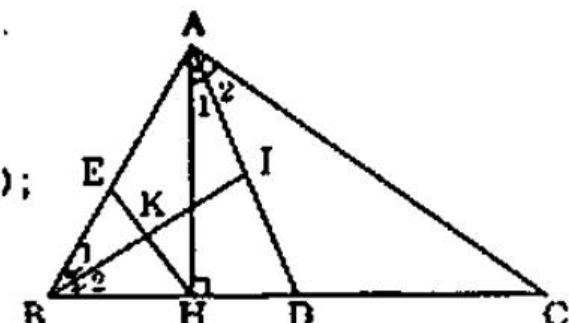
Giải

$\widehat{BAH} = \widehat{C}$ (cùng phụ với \widehat{HAC})

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (AD là tia phân giác của \widehat{HAC});

$\widehat{BAD} = \widehat{BAH} + \widehat{A}_1$;

$\widehat{BDA} = \widehat{C} + \widehat{A}_2$ (\widehat{BDA} là góc ngoài của ΔADC) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BDA}$.



Chương III. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC CÁC DƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

§1. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG TAM GIÁC

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỚ

1. Góc đối diện với cạnh lớn hơn :

Định lí 1 : Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

2. Cạnh đối diện với góc lớn hơn :

Định lí 2 : Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Ghi nhớ : $\triangle ABC$ có $\hat{B} > \hat{C} \Leftrightarrow AC > AB$.

B/ BÀI TẬP

LƯU Ý BÀI TẬP CƠ BẢN

1. a) Cho tam giác ABC có $AB = 7\text{ cm}$, $AC = 9\text{ cm}$, $BC = 12\text{ cm}$. So sánh các góc của tam giác ABC .

b) Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 50^\circ$, $\hat{B} = 70^\circ$. So sánh các cạnh của tam giác ABC .

Giai

a) Xét $\triangle ABC$ có $AB < AC < BC$ (vì $7\text{ cm} < 9\text{ cm} < 12\text{ cm}$)

$\Rightarrow \hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$ (Quan hệ giữa các góc và cạnh đối diện trong một tam giác)

b) Xét $\triangle ABC$ có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

Mà $\hat{A} = 50^\circ$ (gt), $\hat{B} = 70^\circ$ (gt). Nên $\hat{C} = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$

Xét $\triangle ABC$ có $\hat{A} < \hat{C} < \hat{B}$ (vì $50^\circ < 60^\circ < 70^\circ$)

$\Rightarrow BC < AB < AC$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác)

2. Cho tam giác ABC có $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

a) Hãy so sánh \widehat{ABC} và \widehat{ABD} .

b) Hãy so sánh \widehat{ABD} và \widehat{ACB}

Giai

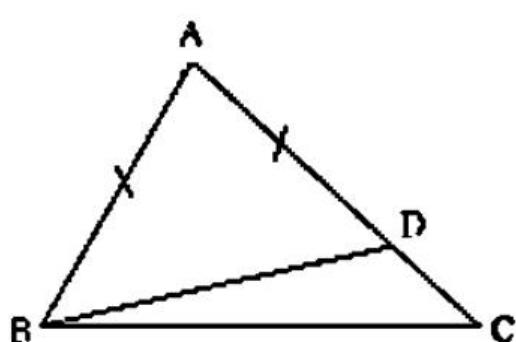
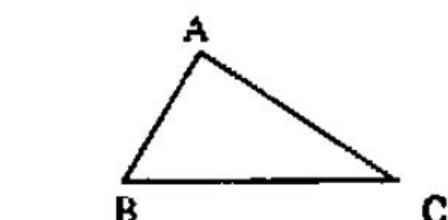
a) $\widehat{ABC} > \widehat{ABD}$ (vì tia BD nằm trong góc \widehat{ABC})

b) $AB = AD$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ADB}$

Mà $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$ (\widehat{ADB} là góc ngoài của $\triangle BDC$)

Nên $\widehat{ABD} > \widehat{ACB}$



3. Cho tam giác ABC cân tại A. D là điểm trên cạnh BC. So sánh AB và AD

Giai

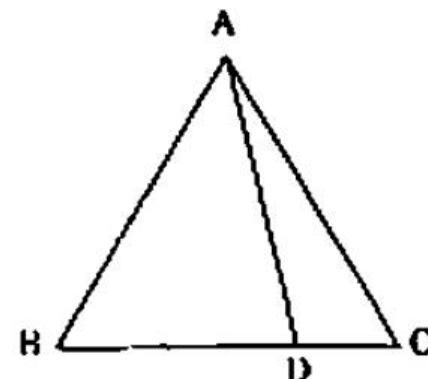
Ta có $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$ (\widehat{ADB} là góc ngoài của $\triangle ADC$)

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

Do đó $\widehat{ADB} > \widehat{ABC}$

Xét $\triangle ABD$ có $\widehat{ADB} > \widehat{ABD}$

$\Rightarrow AB > AD$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác)



4. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. M là trung điểm BC. Trên tia đối của tia MA lấy D sao cho $MD = MA$. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{BAM} = \widehat{CDM}$, $AB = CD$. b) $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$

Giai

a) $\triangle MAB \cong \triangle MDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CDM}$, $AB = CD$.

b) $AB = CD$ mà $AB < AC$

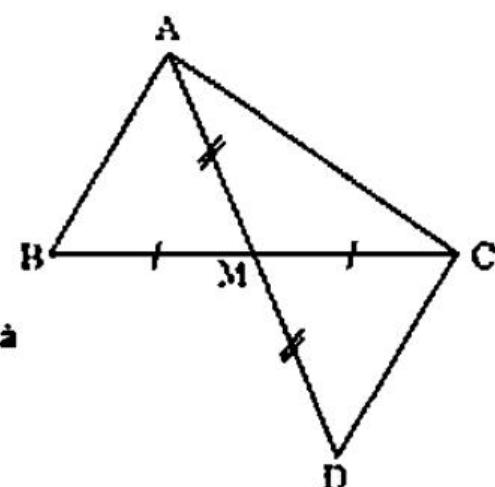
nên $CD < AC$

Xét $\triangle ACD$ có $CD < AC$

$\Rightarrow \widehat{MAC} < \widehat{CDM}$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

Mà $\widehat{BAM} = \widehat{CDM}$

Suy ra $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$.



LÊN BÀI TẬP NÂNG CAO

5. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D. Chứng minh rằng $CD > BD$

Giai

$\triangle ABC$ có $\widehat{B} > \widehat{C}$ ($80^\circ > 40^\circ$)

$\Rightarrow AC > AB$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác)

Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

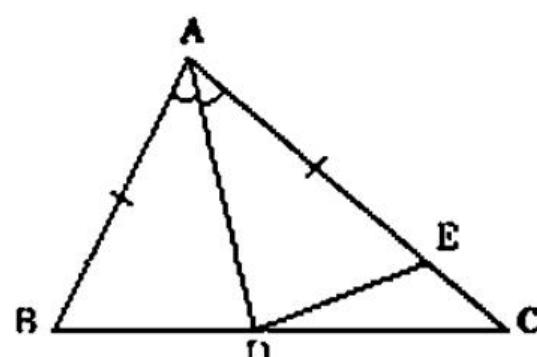
$\triangle ABD \cong \triangle AED$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = ED$, $\widehat{ADB} = \widehat{ADE}$

Ta có $\widehat{DEC} > \widehat{ADE}$ (vì \widehat{DEC} là góc ngoài của $\triangle ADC$).

Do đó $\widehat{DEC} > \widehat{ADB}$

Mà $\widehat{ADB} > \widehat{ECD}$ (\widehat{ADB} là góc ngoài của $\triangle ADC$). Suy ra $\widehat{DEC} > \widehat{ECD}$



Xét $\triangle ADEC$ có $\widehat{DEC} > \widehat{ECD}$

$\Rightarrow CD > ED$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác)

Mà $BD = ED$. Do đó $CD > BD$

6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD < AC$. Chứng minh rằng $BD < BC$.

Giai

Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AD$

Ta có $AE < AC$ (vì $AD < AC$) nên E nằm giữa A và C .

Mà $BA \perp DE$ và $DA = AE$

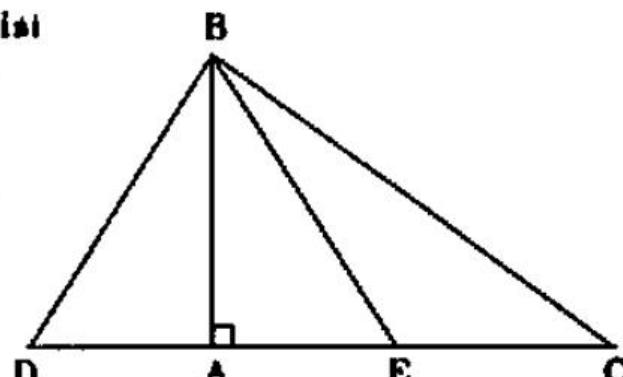
$\Rightarrow \triangle BDE$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BED}$

Ta có $\widehat{BEA} > \widehat{BCE}$ (\widehat{BEA} là góc ngoài của $\triangle BEC$).

Do đó $\widehat{BDC} > \widehat{BCD}$

Xét $\triangle BDC$ có $\widehat{BDC} > \widehat{BCD} \Rightarrow BC > BD$



7. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy hai điểm D, E sao cho $BD = DE = EC$.

Chứng minh rằng $\widehat{BAD} < \widehat{DAE}$

Giai

Trên tia đối của tia DA , lấy điểm F sao cho $DF = DA$

$\triangle DAB \cong \triangle DFE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = EF$, $\widehat{BAD} = \widehat{DFE}$

Xét $\triangle ABE$ có

$\widehat{AEB} > \widehat{ABE}$ ($\widehat{ABE} = \widehat{ACE}$)

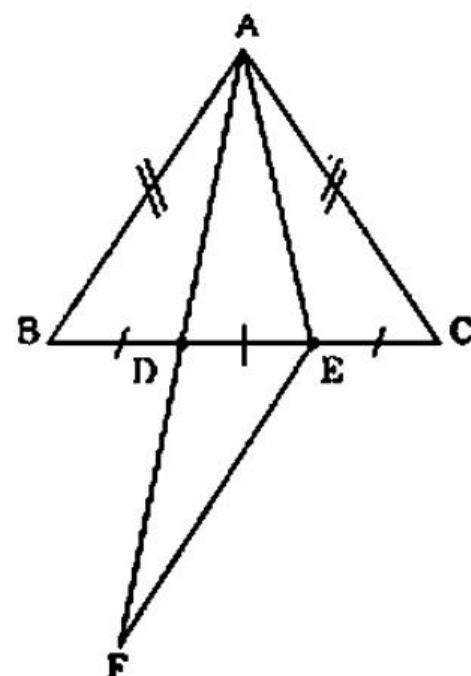
$\Rightarrow AB > AE$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác).

Do vậy $EF > AE$

Xét $\triangle AEF$ có $EF > AE \Rightarrow \widehat{DAE} > \widehat{DFE}$

(quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác)

Mà $\widehat{DFE} = \widehat{BAD}$. Do đó $\widehat{BAD} < \widehat{DAE}$



8. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên tia đối tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Đường thẳng qua C song song với ED và đường thẳng qua D song song với AC cắt nhau tại F . Chứng minh rằng $BC < FC$.

Giải

Ta có $\triangle AED = \triangle DFC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{DFC}$$

Ta lại có $\widehat{ACB} > \widehat{ACD}$

Mà $\widehat{ACD} > \widehat{CED}$

Nên $\widehat{ACB} > \widehat{CED}$

Mặt khác $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$, $\widehat{CED} = \widehat{DFC}$

Nên suy ra $\widehat{ABC} > \widehat{DFC}$ (1)

Ta có $DB = CE$ (gt); $DF = CE$ ($\triangle DFC = \triangle AED$)

$\Rightarrow DB = DF \Rightarrow \triangle BDF$ cân tại D

$\Rightarrow \widehat{DBF} = \widehat{DFB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DBC} + \widehat{DBF} > \widehat{DFC} + \widehat{DFB} \Rightarrow \widehat{FBC} > \widehat{BFC}$

Xét $\triangle BFC$ có $\widehat{FBC} > \widehat{BFC} \Rightarrow FC > BC$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

9. Cho tam giác ABC cân tại A và M là một điểm bên trong tam giác sao cho góc AMB lớn hơn góc AMC.

Chứng minh rằng $MB < MC$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2001 – 2002)

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa

B vẽ tia Ax sao cho $\widehat{xAC} = \widehat{BAM}$. Trên

tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AM$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACD$ có $AB = AC$

(gt), $AM = AD$, $\widehat{BAM} = \widehat{DAC}$

Do đó $\triangle ABM = \triangle ACD$ (c.g.c)

$\Rightarrow MB = CD$, $\widehat{AMB} = \widehat{ADC}$

$\triangle AMD$ có $AM = AD \Rightarrow \triangle AMD$ cân tại A

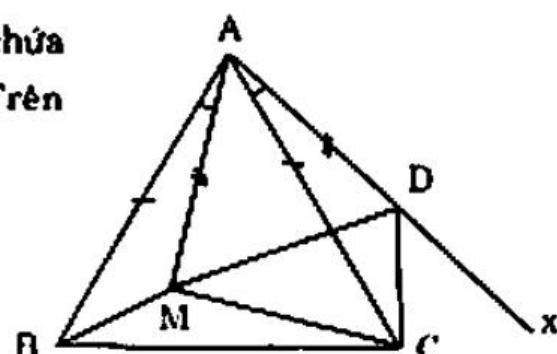
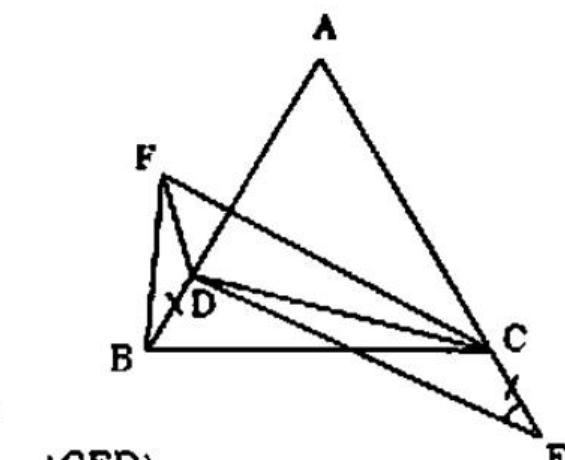
$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ADM}$

Mà $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$. Do đó $\widehat{ADC} > \widehat{AMC}$

Suy ra $\widehat{MDC} > \widehat{DMC}$

Xét $\triangle CMD$ có $\widehat{MDC} > \widehat{DMC} \Rightarrow MC > CD$.

Ta có $MC > CD$ và $MB = CD \Rightarrow MB < MC$.



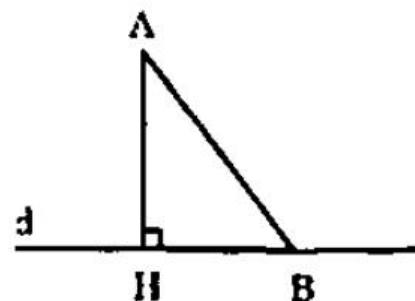
82. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CÁN NHỚ

1. Khái niệm đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên :

Cho hình bên, AH ⊥ d

- Đoạn thẳng AH gọi là đoạn vuông góc hay đường vuông góc kẻ từ điểm A đến đường thẳng d, điểm H gọi là chân đường vuông góc hay hình chiếu của điểm A trên đường thẳng d.
- Đoạn thẳng AB gọi là một đường xiên kẻ từ điểm A đến đường thẳng d
- Đoạn thẳng HB gọi là hình chiếu của đường xiên AB trên đường thẳng d.



2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên :

Dinh li: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

GT	A ∈ d AH là đường vuông góc AB là đường xiên
KL	AH < AB

- Độ dài đường vuông góc AH gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d

3. Các đường xiên và hình chiếu của chúng :

Dinh li: Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó :

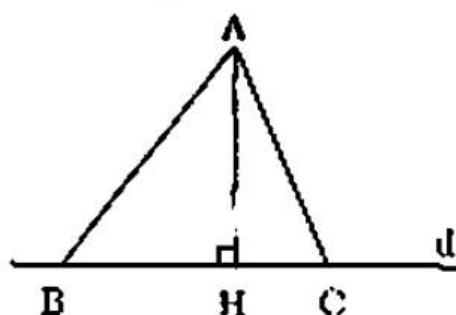
a) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

b) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

c) Nếu hai đường xiên bằng nhau

thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

Ghi nhớ: $AB \geq AC \Leftrightarrow HB \geq HC$



A/ BÀI TẬP**E/ BÀI TẬP CƠ BẢN**

10. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, vẽ $AH \perp BC$ tại H, D là điểm bất kỳ thuộc AH. Chứng minh rằng

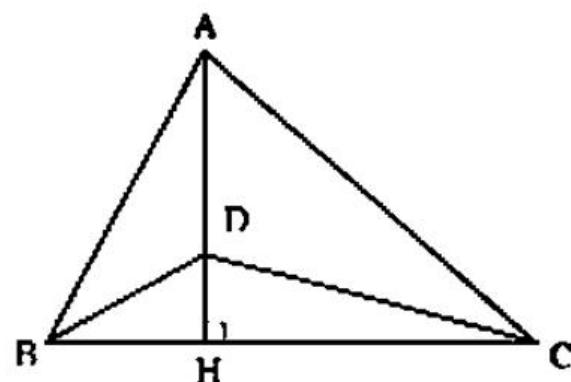
a) $HB < HC$

b) $DB < DC$.

Giai

a) HB là hình chiếu của AB trên BC, HC là hình chiếu của AC trên BC và $AB < AC$ (gt)
 $\Rightarrow HB < HC$ (dường xiên nhỏ hơn thì hình chiếu nhỏ hơn)

b) HB là hình chiếu của DB trên BC, HC là hình chiếu của DC trên BC và $HB < HC$ (chứng minh trên)
 $\Rightarrow DB < DC$ (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn)



11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D, trên tia đối tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AC$. So sánh BC, BD và BE

Giai

AC và AE là hình chiếu của các đường xiên BC và BE

Mà $AC = AE$ (gt)

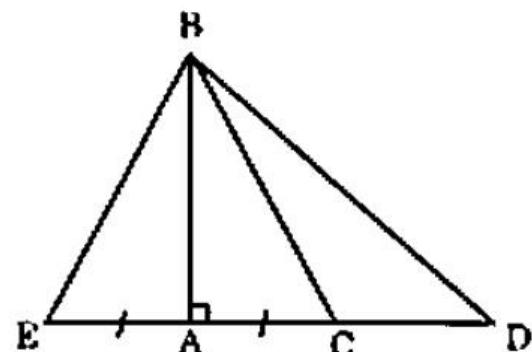
Nên $BC = BE$ (1)

AC và AD là hình chiếu của các đường xiên BC, BE

Mà $AC < AD$ (C nằm giữa A và D)

Nên $BC < BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE = BC < BD$



12. Chỗ hình về bên

Chứng minh rằng :

a) $ME < MK$

b) $DE < MK$

Giai

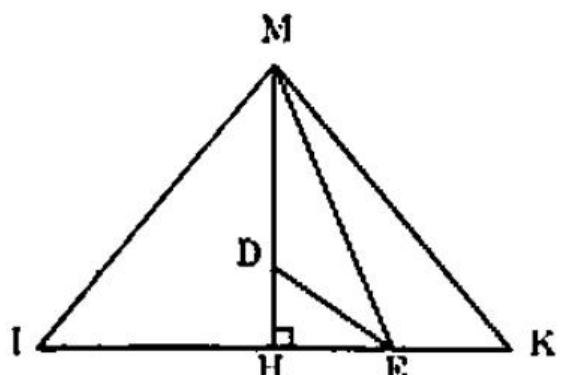
a) Ta có $HE < HK$ (vì E thuộc đoạn HK)

$\Rightarrow ME < MK$ (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn)

b) Ta có $HD < HM$ (vì D thuộc đoạn HM)

$\Rightarrow DE < EM$ (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn)

Mà $ME < MK \Rightarrow DE < MK$



13. Cho tam giác ABC có $B < C$. Vẽ AH $\perp BC$ tại H. M là điểm trên đoạn thẳng AH. Chứng minh rằng $M\bar{C}B > M\bar{B}C$

Giai

$\triangle ABC$ có: $B < C \Rightarrow AC < AB$

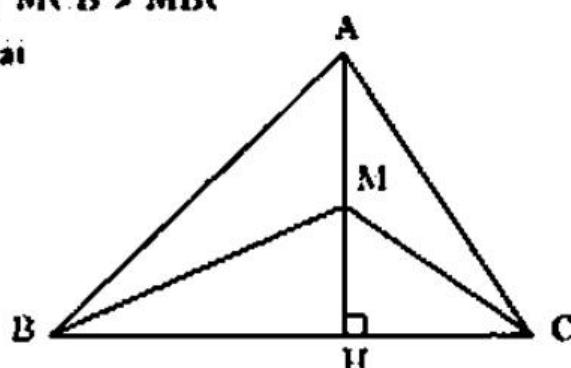
Mà $AH \perp BC$

$\Rightarrow HC < HB \Rightarrow MC < MB$

$\triangle MBC$ có $MC < MB$

$\Rightarrow M\bar{B}C > M\bar{C}B$

\blacksquare BÀI TẬP NÂNG CAO



14. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu trong tam giác có điểm D sao cho $AD = AB$ thì $AB < AC$

Giai

Vẽ AH, BD (H, D)

Gọi E là giao điểm của BD và AC

Ta có $AB = AD$ (gt) và $AH \perp BD$

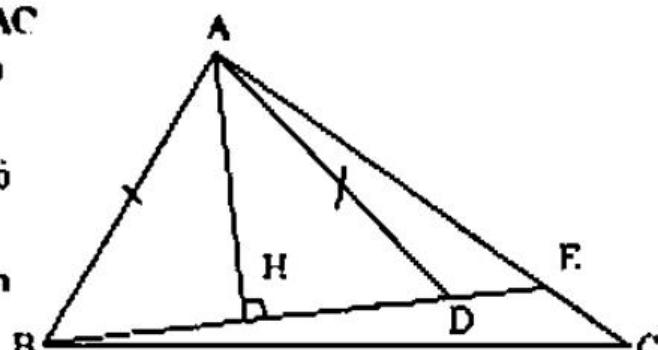
Mà $HD < HE$

Do đó $AD < AE$ (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn)

Mặt khác $AE < AC$ (vì E nằm giữa A và C)

Suy ra $AD < AC$

Mà $AB = AD$. Do đó $AB < AC$.



15. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm cạnh AC. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của A, C trên đường thẳng BM. Chứng minh rằng $BD + BE > 2AB$.

Giai

Ta có $BA \perp AC$ mà $M \in AC$

$\Rightarrow BA < BM$ (đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên)

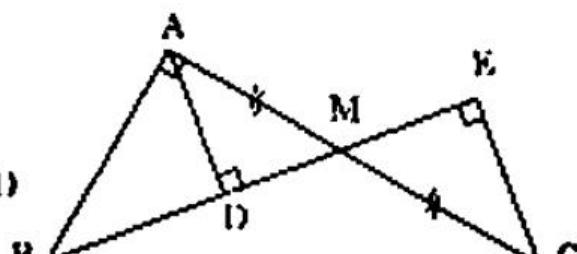
Mà $BM = BD + DM = BE - ME$

Suy ra $2BA < BD + DM + BE - ME$ (1)

$\triangle ADM \sim \triangle CEM$

(cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow DM = ME$



(2)

Từ (1) và (2) có $BD + BE > 2AB$

16. Cho tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC.

Chứng minh $AB + AC > 2AM$

Vẽ $BD \perp AM$

Tại D, $CE \perp BM$ tại E

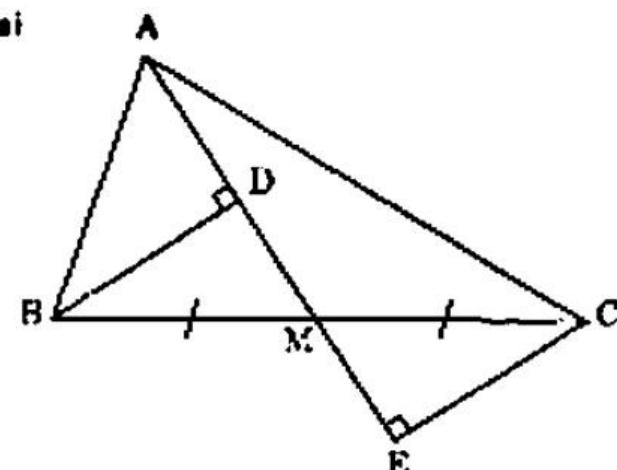
$\triangle DBM \cong \triangle ECM$

(cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow MD = ME$

Ta có $AB > AD$, $AC > AE$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } AB + AC &> AD + AE \\ &= AM - MD + AM + ME \\ &= 2AM \end{aligned}$$



17. Cho tam giác ABC có $AB > AC$, vẽ $BD \perp AC$ tại D, $CE \perp AB$ tại E
Chứng minh rằng :

$$AB - AC > BD - CE.$$

Giai

Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$

Vì $AB > AC$ nên F nằm giữa A và B

Vẽ $FG \perp AC$ tại G, mà $BD \perp AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow FG \parallel BD$

Vẽ $FH \perp BD$ tại H.

$\angle GFD = \angle HDF$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\rightarrow FG = HD$, $GD = FH$

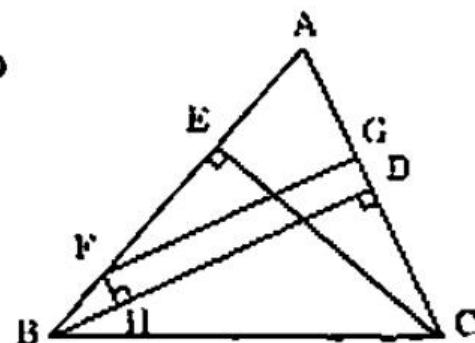
$\triangle GAF \cong \triangle EAC$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow FG = CE$, $AF = AC$

Do vậy $FG = CE = HD$

Ta có $FH \perp BD$ nên $BH < BF$ (đường vuông góc nhọn hơn đường xiên)

Do đó $AB - AC = AB - AF = BF > BH = BD - HD = BD - CE$.



III BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

18. a) Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D. Qua D vẽ đường thẳng song song với BC cắt AC ở E. Chứng minh rằng $DE + BC < 2BE$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, trường chuyên Văn Toản huyện Đức Phổ, Tỉnh Quảng Ngãi, năm học 1988 - 1989)

- b) Cho tam giác ABC không có góc tù, có hai đường cao AH và BK. Cho biết $AH \geq BC$ và $BK \geq AC$. Hãy tính các góc của tam giác ABC.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2006 - 2007.)

Giai

- a) Vẽ $DM \perp BC$ tại M, $EN \perp BC$ tại N

$\Delta MBD \cong \Delta NCE$ (canh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow BM = CN$

Chứng minh được

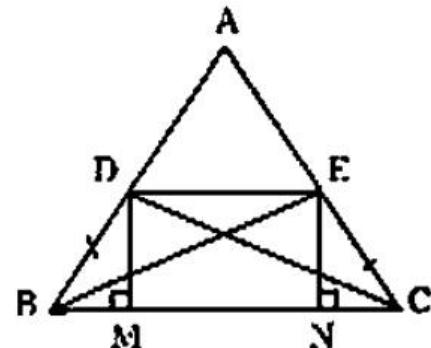
$DE = MN, BN = CM < CD = BE$

Do đó $DE + BC = MN + BC$

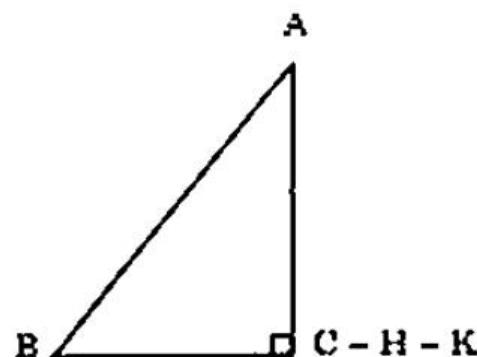
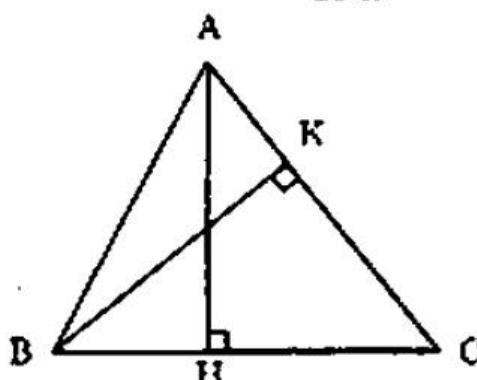
$$= MN + BM + CM$$

$$= BN + CM < BE + CD$$

$$= 2BE$$



b)



Ta có $AH \perp HC$ (gt) nên $AC \geq AH$

$BK \perp KC$ (gt) nên $BC \geq BK$.

Mà $AH \geq BC$ (gt), $BK \geq AC$ (gt)

Do đó $AC \geq AH \geq BC \geq BK \geq AC$.

Do vậy $AC = AH = BC = BK = AC$, tức là C, H, K trùng nhau và $AC = BC$.

$\triangle ABC$ vuông tại C có $AC = BC$ nên là tam giác vuông cân. Suy ra $\widehat{BAC} = 45^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

83. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỎ

1. Bất đẳng thức tam giác :

Dịnh lí : Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kề bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại

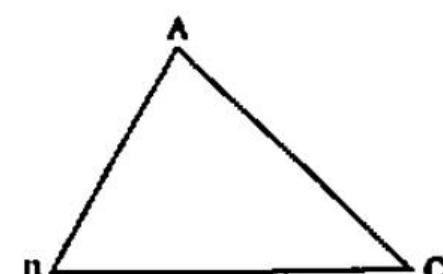
2. Hệ quả của bất đẳng thức tam giác :

Hệ quả :

Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kề bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Nhận xét :

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.



Lưu ý :

Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thỏa mãn là ba cạnh của một tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại, hoặc so sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại (lớn trừ nhỏ).

B/ BÀI TẬP

C/ BÀI TẬP CƠ BẢN

19. Có tam giác nào mà một cạnh lớn hơn nửa chu vi không? Vì sao?

Giai:

Giả sử có một tam giác có ba cạnh là a, b, c thỏa mãn $a > \frac{a+b+c}{2}$

Ta có $2a > a + b + c$

$a > b + c$. Mâu thuẫn với bất đẳng thức tam giác.

Do đó điều giả sử trên sai.

Vậy không có tam giác nào mà một cạnh lớn hơn nửa chu vi.

20. Cho tam giác ABC, M là trung điểm BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

Chứng minh rằng $AB + AC > AD$.

Giai:

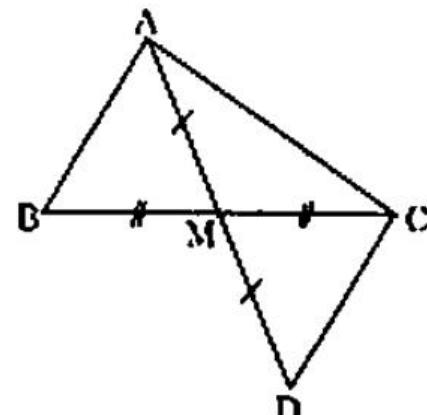
$\triangle AMB = \triangle DMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = DC$.

Xét $\triangle ACD$ có $AC + CD > AD$

(Bất đẳng thức tam giác)

Do đó $AB + AC > AD$



21. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác ABC, BM cắt AC tại D. Chứng minh rằng :

a) $MB + MC < DB + DC$.

b) $MB + MC < AB + AC$.

c) $MA + MB + MC < AB + AC + BC$.

Giai:

a) Xét $\triangle ADM$ có

$MC < MD + DC$ (bất đẳng thức tam giác)

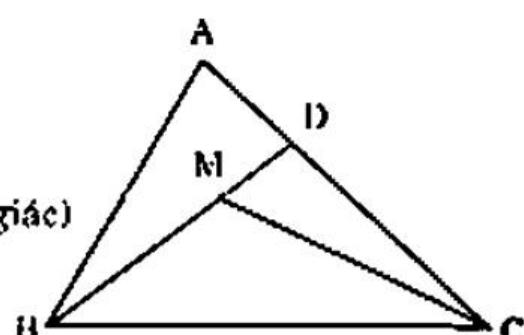
Do đó $MB + MC < MB + MD + DC$

$MB + MC < DB + DC$.

b) Xét $\triangle ABD$ có

$DB < AB + AD$ (bất đẳng thức tam giác) $\rightarrow DB + DC < AB + AC$.

Mà $MB + MC < DB + DC$ (câu a)



Suy ra $MB + MC < AB + AC$. (1)

c) Tương tự cũng có $MC + MA < BC + AB$ (2)

$MA + MB < AC + BC$ (3)

Từ (1) (2) và (3) có $MA + MB + MC < AB + AC + BC$.

LJ BÀI TẬP NÂNG CAO

22. Cho tam giác ABC, O là điểm bất kì trong tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\frac{AB + AC + BC}{2} < OA + OB + OC < AB + AC + BC$

Giải

Xét các tam giác OAB, OBC,

OAC Theo bất đẳng thức tam

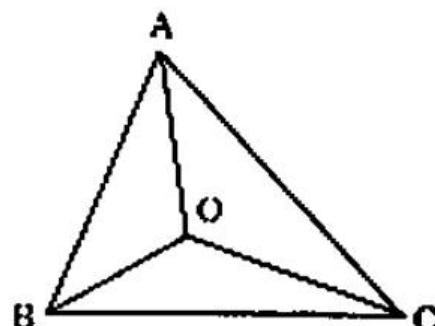
giác, ta có:

$$OA + OB > AB$$

$$OB + OC > BC$$

$$OA + OC > AC$$

$$\text{Do đó } OA + OB + OC > \frac{AB + AC + BC}{2} \quad (1)$$



Mặt khác theo kết quả bài 178 ta có

$$OA + OB + OC < AB + AC + BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < OA + OB + OC < AB + AC + BC.$$

23. Cho góc xOy (khác góc bẹt). Oz là tia phán giác của góc xOy . Từ điểm M ở trong góc xOz , vẽ MH vuông góc Ox tại H, MK vuông góc với Oy tại K

Chứng minh rằng $MH < MK$.

Giải

Gọi A là giao điểm của MK với Oz

Vẽ $AB \perp Ox$ tại B.

Ta có $\triangle AOK = \triangle AOB$ (cạnh huyền - góc nhọn)

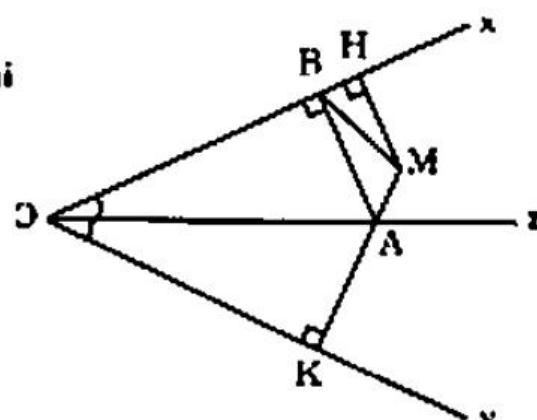
$$\Rightarrow AK = AB.$$

Xét $\triangle ABM$ có $BM < AB + AM$
(bất đẳng thức tam giác)

$$\Rightarrow BM < MK$$

Mặt khác $MH < MB$ (đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên)

Suy ra $MH < MK$



24. Cho tam giác ABC, M là điểm trên tia phán giác ngoài của góc C. Chứng minh rằng $MA + MB > AC + BC$.

Giai

Vẽ đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng MC cắt đường thẳng BC tại D, cắt MC tại H.

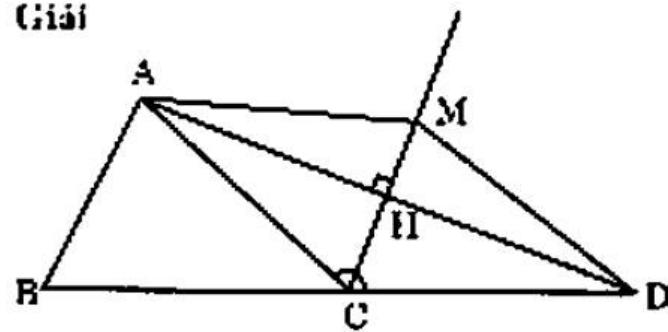
Ta có $\triangle ACH \cong \triangle DCH$ (g.c.g)
 $\Rightarrow AH = HD$

$\Rightarrow MA = MD$ (hình chiếu bằng nhau thì đường xiên bằng nhau)

Xét $\triangle MBD$ có $MD + MB > BD$ (bất đẳng thức tam giác)

Mà $BD = AC + BC$

Suy ra $MA + MB > AC + BC$



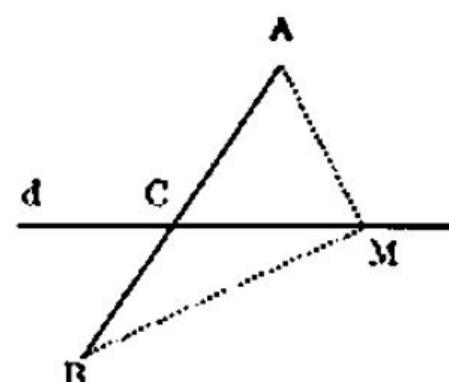
25. Cho hai điểm phân biệt A, B không thuộc đường thẳng d. Xác định vị trí của điểm M trên d sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giai

Xét hai trường hợp

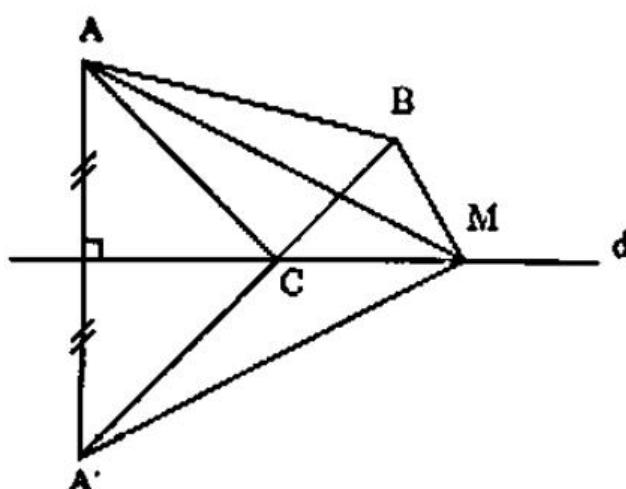
a) A và B nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng d. Gọi C là giao điểm của AB với d.

- Nếu $M = C$ thì $MA + MB = AB$
- Nếu $M \neq C$ thì $MA + MB > AB$



Vậy M ở vị trí là giao điểm của AB và d thì $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) A và B ở cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d
 Dụng điểm A' sao cho d là đường trung trực của AA' . Gọi C là giao điểm của $A'B$ và d
 Chứng minh được $MA = MA'$
 nên xét tương tự trường hợp a) ta cũng có khi M ở vị trí là giao điểm của AB' và d thì $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.



26. a) Cho $x > 0, y > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x+y}$.

b) Cho $x > y > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{x-y}$.

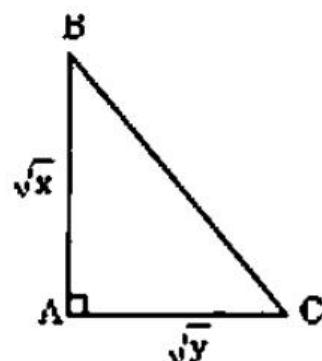
Giaia) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = \sqrt{x}$, $AC = \sqrt{y}$ Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Py-ta-go)

$$BC^2 = x + y$$

$$BC = \sqrt{x + y}$$

Xét $\triangle ABC$ có $AB + AC > BC$ (bất đẳng thức tam giác)

$$\text{Do đó } \sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x + y}$$

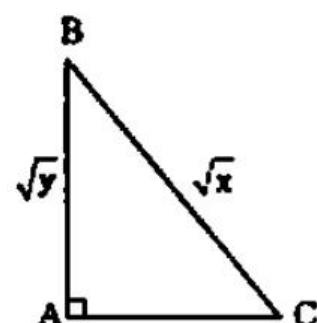
b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = \sqrt{x}$, $AB = \sqrt{y}$ Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Py-ta-go)

$$x = y + AC^2$$

$$AC = \sqrt{x - y}$$

Xét $\triangle ABC$ có $BC - AB < AC$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{x - y}$$

**LJ BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN**27. Cho tam giác ABC ($AB > AC$) và điểm M trên đường phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng $MB - MC < AB - AC$

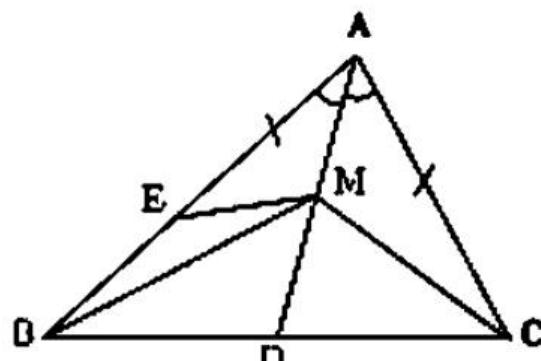
(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận 6, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1990 – 1991)

Giai

Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho

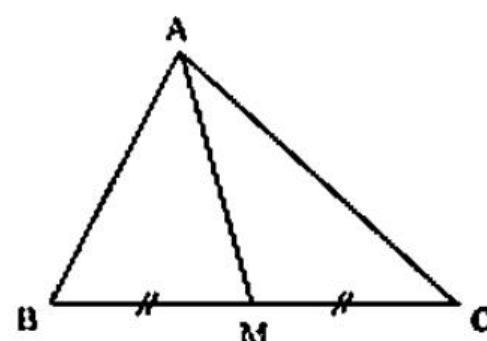
 $AE = AC$ $\triangle MAE \cong \triangle MAC$ (c.g.c) $\Rightarrow ME = MC$ Xét $\triangle AMB$ có $MB - ME < BE$ Do đó $MB - MC < AB - AE$

$$= AB - AC$$

**84. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC****A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỎ****1. Đường trung tuyến của tam giác:**

Cho hình bên, đoạn thẳng AM là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC của tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC). Đường thẳng AM cũng gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC.

- Mọi tam giác có ba đường trung tuyến.



2. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác :**Dịnh lí :**

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm, điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

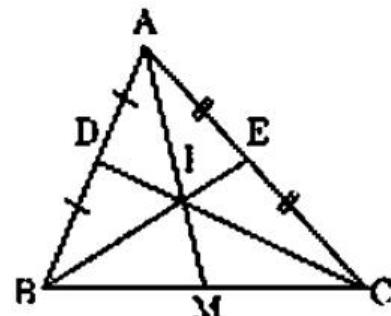
Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác.

B/ BÀI TẬP**C/ BÀI TẬP CƠ BẢN**

28. Cho tam giác ABC, D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC. Gọi I là giao điểm của BE và CD. Gọi M là giao điểm của AI và BC. Chứng minh rằng M là trung điểm của BC.

Giai

Xét $\triangle ABC$ có BE, CD là hai đường trung tuyến cắt nhau tại I
 $\Rightarrow I$ là trọng tâm của tam giác ABC
 $\Rightarrow M$ là trung điểm của cạnh BC.



29. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 8\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$. Trên tia đối của tia CA lấy D sao cho $CD = CA$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Gọi E là giao điểm của BC và DM. Tính $BC : BE$

Giai

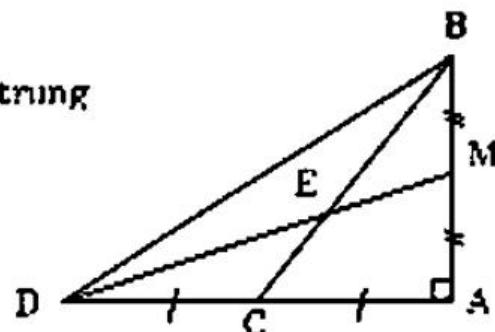
$\triangle ABC$ vuông tại A

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (định lý Py-ta-go)} \\ BC^2 = 6^2 + 8^2 \\ BC = 10 \text{ (cm)}$$

$\triangle ABD$ có BC và DM là hai đường trung tuyến cắt nhau tại E

$\Rightarrow E$ là trọng tâm của tam giác ABD

$$\Rightarrow BE = \frac{2}{3} BC \\ BE = \frac{20}{3} \text{ (cm)}$$



30. Cho tam giác ABC, AA', BB', CC' là ba đường trung tuyến. Chứng minh rằng $AA' + BB' + CC' > \frac{3}{4} (AB + AC + BC)$.

Giai

AA' , BB' , CC' cắt nhau tại G, ta có :

$$AG = \frac{2}{3} AA'; BG = \frac{2}{3} BB'; CG = \frac{2}{3} CC'$$

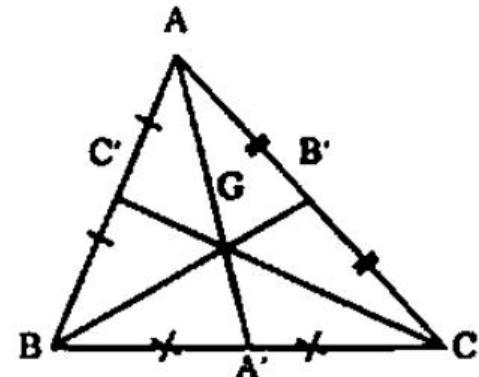
$\triangle GAB$ có :

$$GA + GB > AB$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(AA' + BB') > AB$$

$$\text{Tương tự } \frac{2}{3}(AA' + CC') > AC$$

$$\frac{2}{3}(BB' + CC') > BC$$



Suy ra $AA' + BB' + CC' > \frac{3}{4}(AB + AC + BC)$.

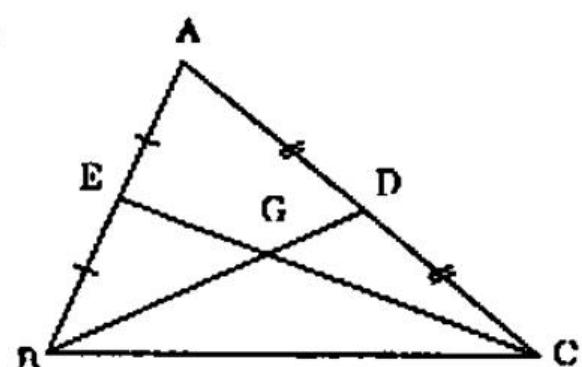
31. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE ; $BD < CE$.
Chứng minh rằng $\widehat{DBC} > \widehat{ECB}$.

Giải

Gọi G là giao điểm của BD và CE.

$$BG = \frac{2}{3}BD$$

$$CG = \frac{2}{3}CE$$

Mà $BD < CE$ Nên $BG < CG$ 

Suy ra $\widehat{GBC} > \widehat{GCB}$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong $\triangle GBC$)

Vậy $\widehat{DBC} > \widehat{ECB}$

BÀI TẬP NÂNG CAO

32. Tam giác ABC có đường trung tuyến AM bằng nửa cạnh BC. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Giải

$$\text{Ta có } AM = \frac{1}{2}BC$$

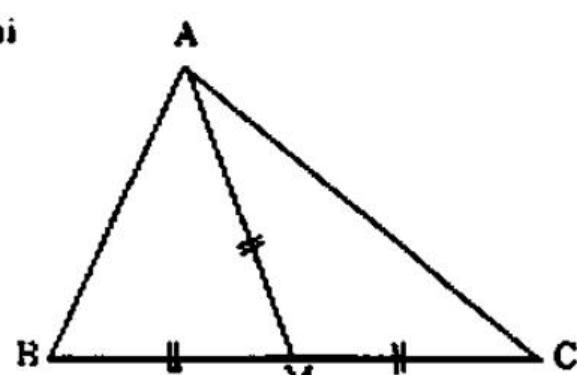
Suy ra $AM = MB = MC$

$\triangle AMB$ cân tại M ($MA = MB$)

$$\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBA} \quad (1)$$

$\triangle AMC$ cân tại M ($MA = MC$)

$$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC} = \widehat{MBA} + \widehat{MCA}$

Mà $\widehat{BAC} + \widehat{MBA} + \widehat{MCA} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{BAC} = 90^\circ$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A.

33. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AI. Trên tia đối IA lấy điểm D sao cho ID = IA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và CD. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của BM, BN với AD.
- Chứng minh rằng AE = EF = FD.

Ghi

Ta có E là trọng tâm của $\triangle ABC$

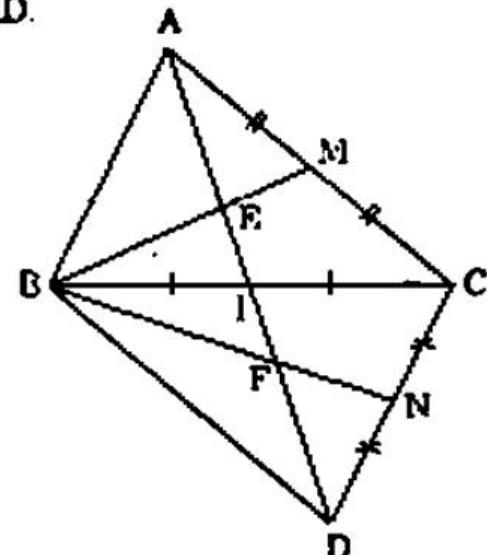
$$\text{nên } AE = \frac{2}{3} AI = \frac{1}{3} AD \quad (1)$$

F là trọng tâm của $\triangle BCD$ nên

$$DF = \frac{2}{3} DI = \frac{1}{3} DA \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } EF = \frac{1}{3} AD$$

Do đó AE = EF = FD



34. Cho hai đường thẳng x' và y' cắt nhau tại O. Trên x' lấy ba điểm A, B, C sao cho $OA = AB = BC$, trên y' lấy ba điểm D, E, F sao cho $OD = OE = EF$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BF và CE cùng đi qua một điểm.

Ghi

CO là đường trung tuyến của $\triangle DCE$

$$\text{Ta lại có } AC = \frac{2}{3} OC$$

Nên suy ra A là trọng tâm của $\triangle DCE$

Gọi M là giao điểm DA và EC thì DM là đường trung tuyến của $\triangle DEC$
 $\Rightarrow EM = MC$

$$\triangle OBE \text{ có } OA = AB \text{ và } EO = EF.$$

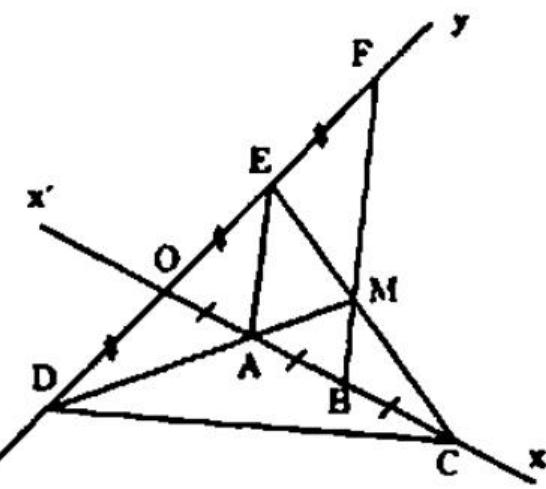
Giúp chứng minh được $AE \parallel BF$ (1)

Tương tự xét $\triangle ACE$ có $ME = MC$ và $BA = BC$

Nên có $MB \parallel AE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra B, M, F thẳng hàng (theo tiên đề O-clit)

Vậy ba đường thẳng AD, BF và CE đóng quy tại M.



35. Cho tam giác ABC. Từ B vẽ tia Bx (Tia Bx nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A), vẽ tia Cy (Tia Cy nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A) sao cho $Bx \parallel Cy$. Trên Bx lấy điểm D, trên Cy lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và ADE có cùng trọng tâm.

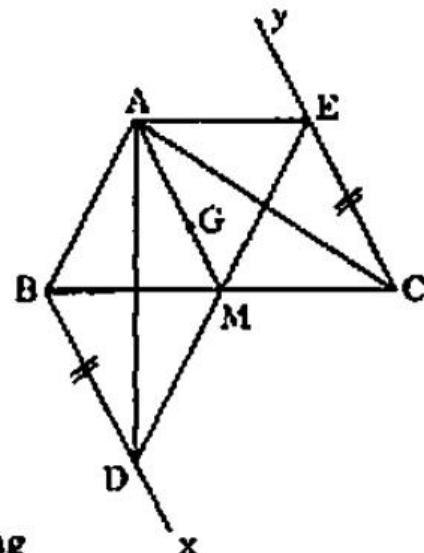
Giai

Gọi M là giao điểm của BC và DE.

Ta có $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (g.c.g)

$MB = MC, MD = ME$

Hai tam giác ABC và ADE có chung đường trung tuyến AM nên có cùng trọng tâm G.



BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

36. Chứng minh rằng tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau là tam giác cân.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận 6, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1995 - 1996)

Giai

Xét $\triangle ABC$ có BD và CE là hai đường trung tuyến và $BD = CE$

Gọi G là giao điểm của BD và CE

Suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD, CG = \frac{2}{3}CE$$

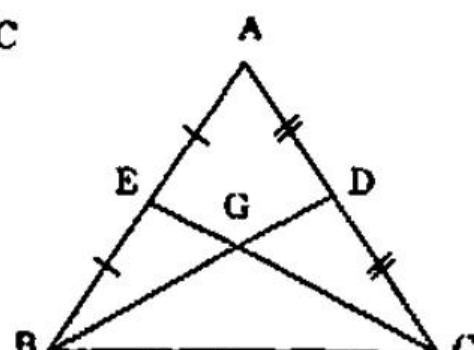
Do đó $BG = CG \Rightarrow \triangle GCB$ cân tại G

$$\Rightarrow GCB = GBC$$

$$\triangle DBC = \triangle ECB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DCB = EBC$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A.



85. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỎ

1. Định lí về tính chất các điểm thuộc tia phân giác:

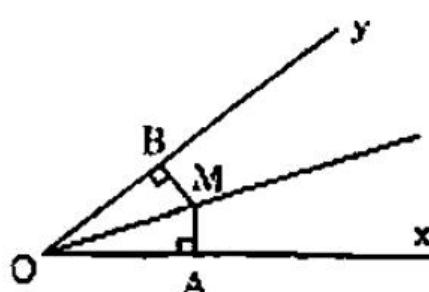
Định lí 1 : (định lí thuần)

Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

2. Định lí đảo :

Định lí 2 : (định lí đảo)

Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.



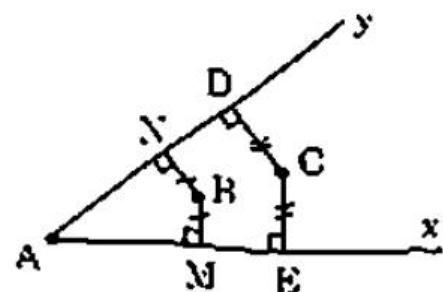
B/ BÀI TẬP

III BÀI TẬP CƠ BẢN

37. Cho hình vẽ bên.

Chứng minh rằng ba
diagram A, B, C thẳng hàng

Giải



Ta có $BM \perp Ax$, $BN \perp Ay$ và $BM = BN$

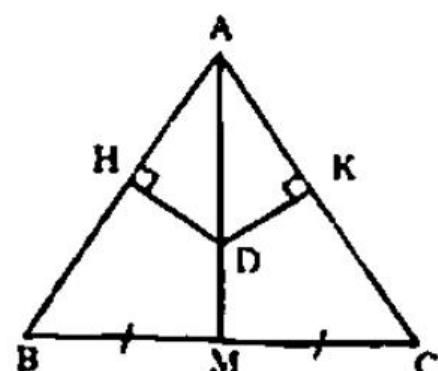
Do đó B thuộc tia phân giác của góc $x\bar{A}y$.

Chứng minh tương tự ta có C thuộc tia phân giác của góc $x\bar{A}y$.

$\Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

38. Cho tam giác ABC cân tại A, AM là
đường trung tuyến. D là điểm trên tia
AM. Vẽ DH $\perp AB$ tại H, DK $\perp AC$ tại
K. Chứng minh rằng $DH = DK$.

Giải



$\triangle AMB \cong \triangle AMC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$

$\Rightarrow AM$ là tia phân giác của góc \widehat{BAC}

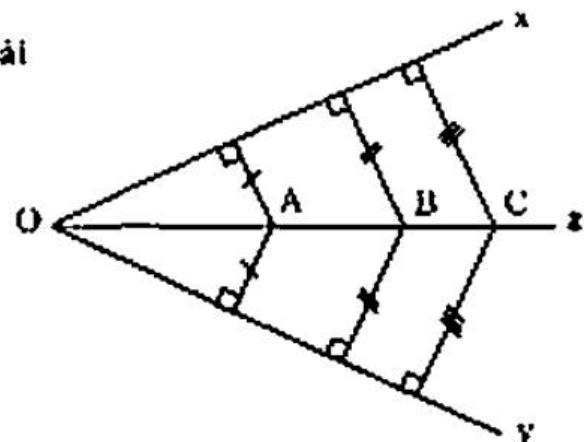
Do đó $DH = DK$

39. Cho góc xOy khác góc bẹt. A, B, C là các điểm nằm bên trong góc xOy và A, B, C cách đều hai cạnh của góc xOy . Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng.

Giải

A, B, C nằm trong góc $x\bar{O}y$
và cách đều hai cạnh Ox ,
 Oy nên A, B, C thuộc tia
phân giác của góc $x\bar{O}y$

Do đó A, B, C thẳng hàng.



40. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không
chứa điểm C về tia Ax, trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B về
tia Ay sao cho $\widehat{xAB} = \widehat{yAC}$. Vẽ BD $\perp Ax$ tại D, CE $\perp Ay$ tại E. BD cắt CF
tại M. Chứng minh rằng AM là tia phân giác của góc DME.

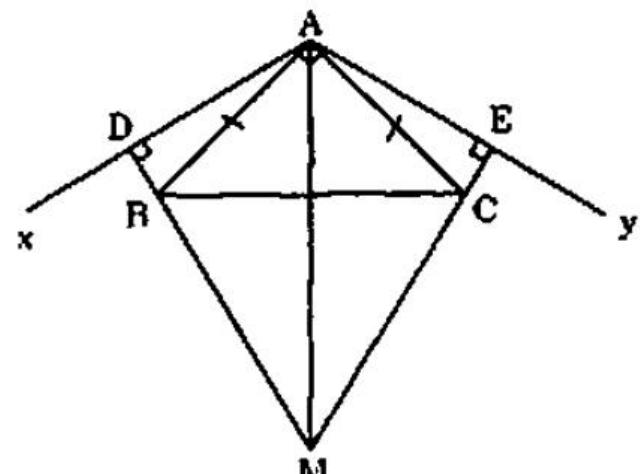
Giải

$\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow AD = AE$$

$\Rightarrow A$ nằm trên tia phân giác của góc DME

Vậy MA là tia phân giác của góc DME



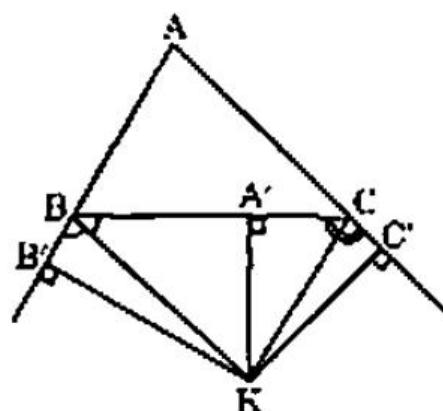
LJ BÀI TẬP NÂNG CAO

41. Chứng minh rằng giao điểm K của hai tia phân giác của hai góc ngoài đỉnh B, C của tam giác ABC nằm trên tia phân giác của góc A.

Giải

Ké $KA' \perp BC$ tại A' ;
 $KB' \perp AB$ tại B' ;
 $KC' \perp AC$ tại C' .

Chứng minh $KB' = KC'$.

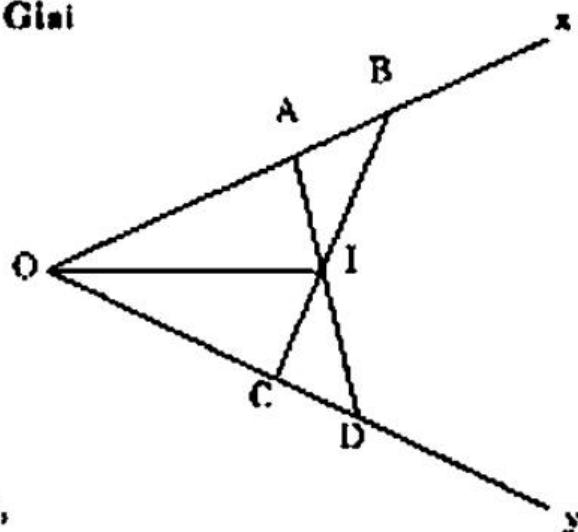


42. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy hai điểm A, B. Trên tia Oy lấy hai điểm C, D sao cho $OA = OC$, $OB = OD$. Gọi I là giao điểm của hai đoạn thẳng AD và BC . Chứng minh rằng I cách đều hai cạnh Ox và Oy của góc xOy .

Giải

$\triangle OAD \cong \triangle OCB$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OCB}$, $\widehat{ODA} = \widehat{OBC}$
 $\angle AIB = \angle IDC$ (g.c.g)
 $\Rightarrow IA = IC$
 $\triangle OAI \cong \triangle OCI$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OCI}$
 $\Rightarrow OI$ là tia phân giác của $x\bar{O}y$

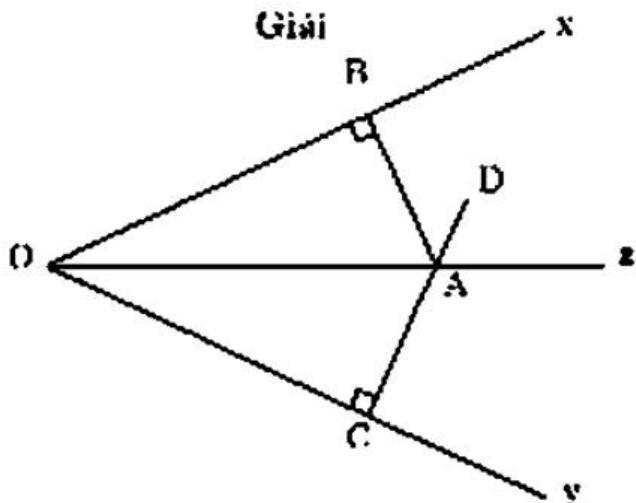
Do đó I cách đều hai cạnh Ox , Oy của góc $x\bar{O}y$.



43. Cho góc xOy khác góc bẹt. Oz là tia phân giác của góc xOy . A là điểm trên tia Oz ($A \neq O$). Vẽ $AB \perp Ox$ tại B, $AC \perp Oy$ tại C. D là điểm bất

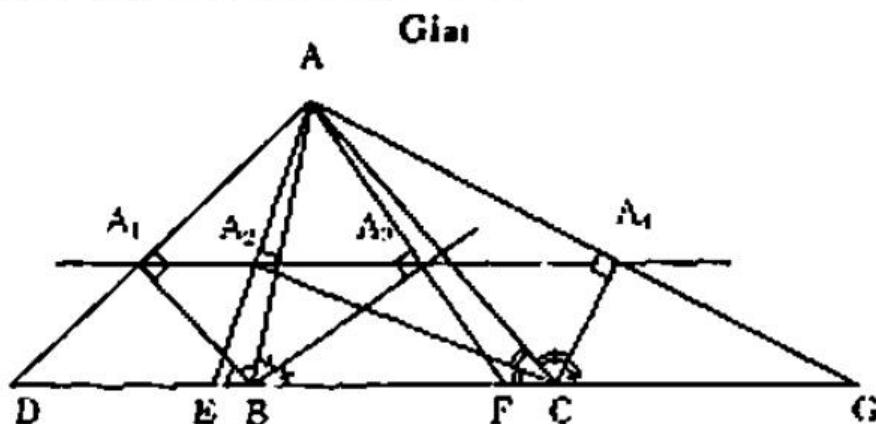
kì trên tia đối của tia AC. Chứng minh rằng DC > AB.

Giai
 $AB = AC$
 Mà $DC > AC$
 Nên $DC > AB$



■ BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

44. Từ đỉnh A của tam giác ABC, kẻ các đường vuông góc xuống các tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của các góc tại đỉnh B và C. Chứng minh rằng chân các đường vuông góc đó thẳng hàng.
(Đề kiểm tra lớp 7 chuyên Toán, trường chuyên Văn Toản, huyện Đức Phổ, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 1986 - 1987)



Các tia AA_1, AA_2, AA_3, AA_4 cắt đường thẳng BC lần lượt tại D, E, F, G. Chứng minh được A_1, A_2, A_3, A_4 lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, AE, AF, AG. Từ đó chứng minh A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 cùng song song với BC. Do đó theo tiên đề O-clit về đường thẳng song song thì các đường thẳng A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 trùng nhau. Vậy bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng

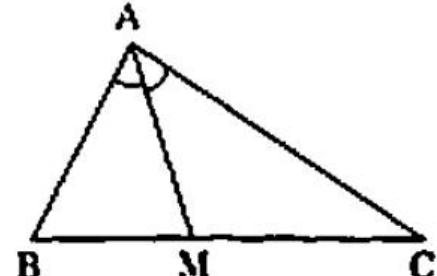
BB. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

CỦA TAM GIÁC

A/ KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẨN NHỚ

1. Đường phân giác của tam giác :

Cho hình bên, đoạn thẳng AM được gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh



A. chia đôi góc A của tam giác ABC.

Đường thẳng AM được gọi là đường phân giác của tam giác ABC
Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

Tính chất: Trong một tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy.

2. Tính chất ba đường phân

giác của tam giác :

Định lí: Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

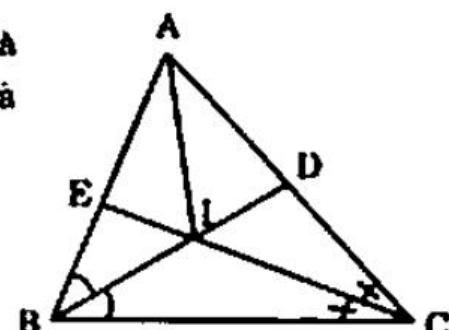
B/ BÀI TẬP

1. BÀI TẬP CƠ BẢN

45. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 70^\circ$. Gọi I là giao điểm của hai đường phân giác BD và CE. Tính BAI.

Giải

$$\widehat{BAI} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$



46. Cho tam giác ABC, hai đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Vẽ IH $\perp AB$ ($H \in AB$), IK $\perp AC$ ($K \in AC$). Chứng minh rằng AH = AK.

Giải

I là giao điểm ba đường phân giác của $\triangle ABC$

$\Rightarrow I$ cách đều hai cạnh AB và AC. Hay AH = AK.

47. Cho tam giác ABC vuông tại A, I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác. Gọi khoảng cách từ I đến các cạnh của tam giác ABC là r.

Chứng minh rằng $AB + AC - BC = 2r$.

Giải

Vẽ IH $\perp AB$ tại H, IK $\perp AC$ tại K và IL $\perp BC$ tại L.

Ta có $IH = IK = IL$.

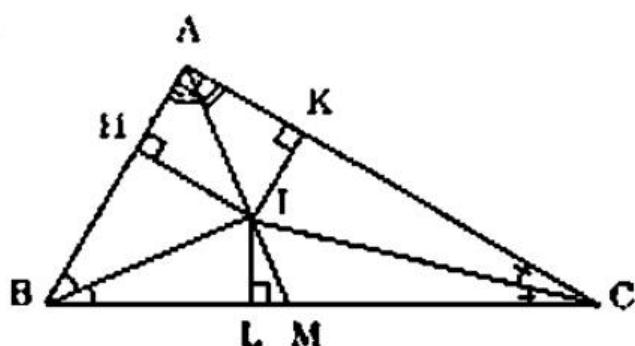
$\angle HBI = \angle LBI$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow BH = BL$.

Tương tự $CK = CL$.

Do đó $2r = AH + AK$

$$= AB - BH + AC - CK$$

Hay $AB + AC - BC = 2r$.



48. Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh AB, AC, BC. Tia AI cắt BC tại M. Chứng minh rằng :

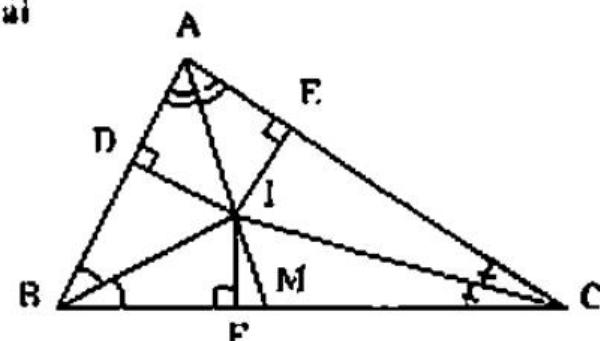
a) $ID = IE = IF$

b) $\widehat{BIF} = \widehat{CIM}$.

Giai

a) I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC
 $\Rightarrow ID = IE = IF$.

b) $\widehat{BIF} = \widehat{CIM} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$.



BÀI TẬP NÂNG CAO

49. Cho tam giác ABC. Hai đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I, qua I kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại M và cắt BC tại N. Chứng minh rằng $MN = MA + NB$.

Giai

Ta có AI là tia phân giác của góc $\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$
 $\Rightarrow MN // AB \Rightarrow \widehat{A_1} = h$

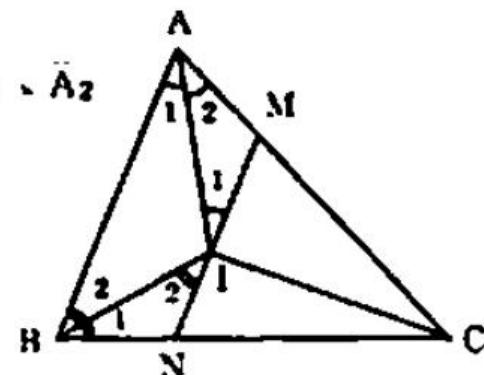
Do đó $\triangle AMI$ cân tại M

$\Rightarrow AM = MI \quad (1)$

Tương tự $\triangle BNI$ cân tại N

$\Rightarrow NB = NI \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MN = MA + NB$.



50. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 120^\circ$. Gọi O là giao điểm các đường phân giác AD và CE. Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC tại F.

Chứng minh rằng :

a) $\widehat{BDF} = \widehat{ADF}$

b) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Giai

a) Ta có $\widehat{BAD} + \widehat{DAC} = 60^\circ$

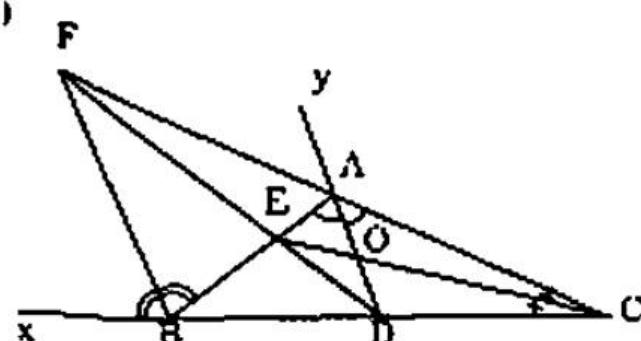
$\Rightarrow \widehat{FAY} = \widehat{DAC} = 60^\circ$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{FAY}$.

Xét $\triangle ABD$ có hai đường phân giác góc ngoài ở đỉnh A và B cắt nhau tại F

Suy ra DF là tia phân giác của góc ADB.

Vậy $\widehat{BDF} = \widehat{ADF}$



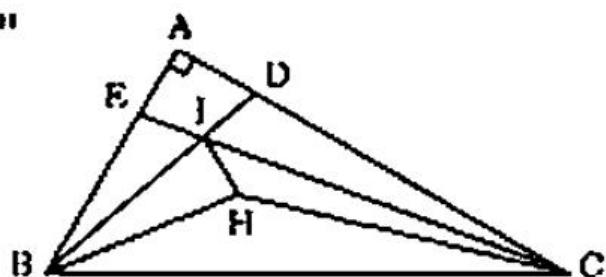
b) Tương tự xét $\triangle ACD$ ta cũng có DE là phân giác góc ngoài tại đỉnh D .
Do đó DE và DF đều là tia phân giác của góc \widehat{ADB} .
Vậy D, E, F thẳng hàng.

51. Cho tam giác ABC vuông tại A . D và E lần lượt trên các cạnh AC và AB sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$, $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi I là giao điểm của BD và CE . Chứng minh rằng tam giác IDE cân.

Giải

Gọi H là giao điểm của hai tia phân giác của góc \widehat{IBC} và \widehat{ICB} .

Chứng minh $ID = IE = IH$
Suy ra $\triangle IDE$ cân tại I .



52. Cho tam giác ABC cân tại A , đường phân giác BD . Tia phân giác của góc BDC cắt BC tại M , tia phân giác góc ADB cắt AB tại F . Gọi N là giao điểm FD và BC .

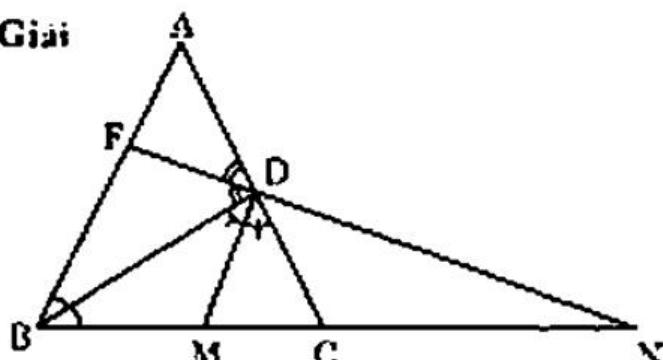
Chứng minh rằng $MN = 2BD$.

Giải

Hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau nên ta có $DM \perp DN$.

Gọi E là trung điểm cun MN .

Chứng minh $BD = DE = \frac{MN}{2}$



Suy ra $MN = 2BD$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

53. a) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K, S lần lượt là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC , ABH , ACH . Chứng minh rằng $AI \perp KS$.

(Đề thi tuyển sinh bổ sung vào lớp 10 chuyên Toán trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2008 - 2009)

- b) Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong BD và CE cắt nhau tại I . Biết rằng $ID = IE$. Chứng minh rằng hoặc tam giác ABC cân tại A hoặc $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, trường Phổ thông năng khiếu, DHQG Tp. Hồ Chí Minh, năm học 1994 - 1995)

Giải

- a) Gọi D là giao điểm của BI và AS .

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{CAH}$ (cùng phụ với góc BAC)

$$\widehat{ABK} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$$

$$\widehat{ADC} = \frac{1}{2} \widehat{CAH}$$

Vậy $\widehat{ABK} = \widehat{DAC}$

Ta có $\widehat{DAC} + \widehat{BAD} = 90^\circ$

Nên $\widehat{ABK} + \widehat{BAD} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ADK} = 90^\circ \Rightarrow KD \perp AS$$

Chứng minh tương tự cũng có $SI \perp AK$.

$\triangle AKS$ có KD, SI là hai đường cao cắt nhau tại I

$\Rightarrow I$ là trung tâm của tam giác AKS

$\Rightarrow AI \perp KS$.

b) $\triangle ABC$ có BD, CE là hai đường phân giác cắt nhau tại $I \Rightarrow AI$ là đường phân giác của tam giác ABC .

• Xét $AE = AD$

$$\widehat{AEI} = \widehat{ADI} \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow A\bar{E}I = A\bar{D}I$$

$$\widehat{AEC} = \widehat{ADB} \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow AC = AB$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A

• Xét $AE < AD$

Trên đoạn AD lấy M sao cho $AM = AE$

$$\widehat{AEI} = \widehat{AMI} \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow IE = IM, A\bar{E}I = A\bar{M}I$$

Ta có $IM = ID (= IE) \Rightarrow \triangle IMD$ cân tại I

$$\Rightarrow I\bar{M}D = I\bar{D}M \Rightarrow A\bar{M}I = I\bar{D}C$$

$$\text{Do vậy } \widehat{AEC} = \widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{ABC} + \frac{\widehat{ACB}}{2} = \widehat{BAC} + \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2\widehat{BAC}$$

$$\text{Do đó } \widehat{BAC} = 180^\circ : 3 = 60^\circ$$

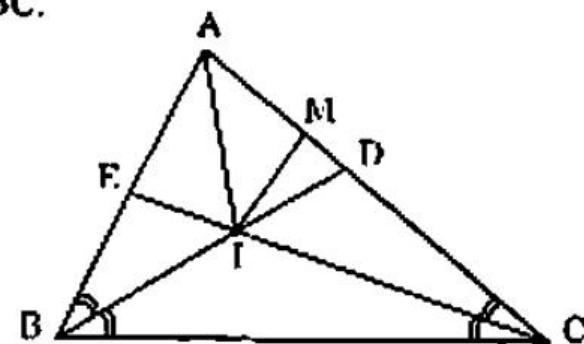
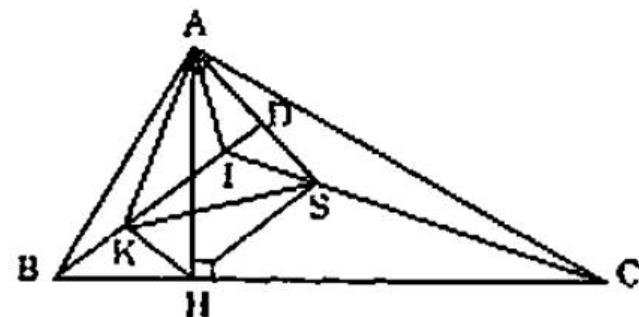
87. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT DOANH THĂNG

A/ KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CÁN NHỎ

1. Định lí về tính chất của các điểm thuộc đường trung trực

Định lí 1 (định lí thuận)

Điểm nằm trên đường trung trực của một doanh thăng thì cách đều hai đầu mút của doanh thăng đó.



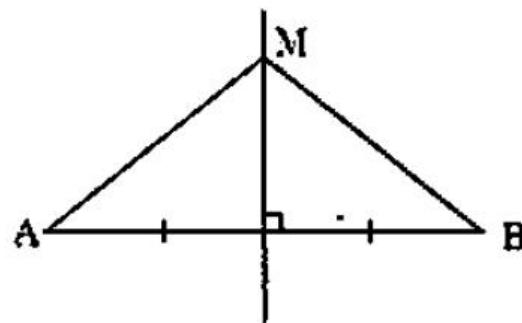
2. Định lí đảo

Định lí 2 (định lí đảo)

Điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow MA = MB$

Nhận xét: Tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó



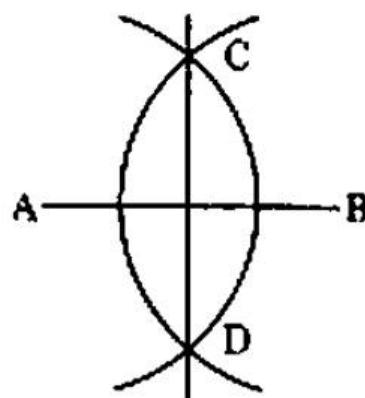
3. Ứng dụng

Ta có thể vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB bằng thước và compa như sau:

Lấy A làm tâm vẽ cung tròn bán kính lớn hơn $\frac{1}{2} AB$, sau đó lấy B làm tâm vẽ cung tròn có cùng bán kính đó sao cho hai cung tròn này có hai điểm chung, gọi là C và D.

Dùng thước vẽ đường thẳng CD, đường thẳng CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Chú ý: CD cắt AB tại trung điểm của đoạn thẳng AB.

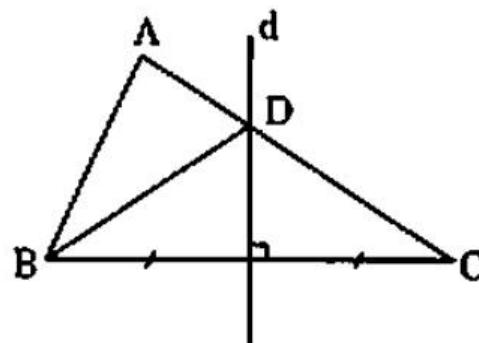


B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

54. Cho hình vẽ bên có d là đường trung trực của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng $AB < AC$.

Giai



d là đường trung trực của BC

Mà $D \in d \Rightarrow DB = DC$

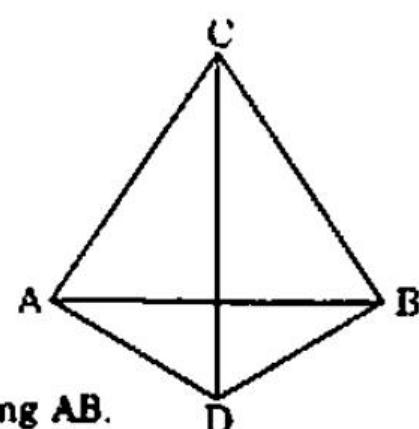
Xét $\triangle ABD$ có $AB < AD + DB$.

Do đó $AB < AD + DC$. Vậy $AB < AC$.

55. Cho hình vẽ bên, tam giác ABC cân đỉnh C, tam giác ABD cân đỉnh D

Chứng minh rằng CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB

Giai



$\triangle ABC$ cân đỉnh C (giả thiết) $\Rightarrow CA = CB$

$\Rightarrow C$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Tương tự D cùng nằm trên đường trung trực của cùn đoạn thẳng AB

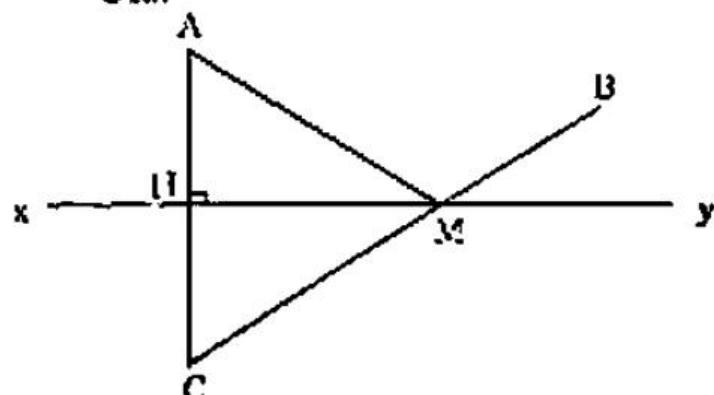
Suy ra CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

56. Cho hai điểm A và B cùng nằm trên một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng xy. Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với xy tại H. Trên tia đối của tia HA lấy điểm C sao cho $HA = HC$. BC cắt xy tại M. Chứng minh rằng $MA = MC$

Giai

Chứng minh được xy là đường trung trực của đoạn thẳng AC

Suy ra $MA = MC$



57. Cho tam giác cân AMN, BMN, CMN có chung đáy MN. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giai

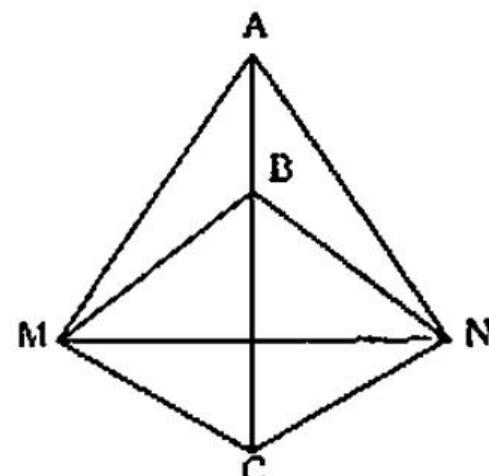
ΔAMN cân có cạnh đáy MN

$\Rightarrow AM = AN$

$\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực
đoạn thẳng MN

Tương tự B, C cũng thuộc
đường trung trực của đoạn
thẳng MN

$\Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng



BÀI TẬP NÂNG CAO

58. Cho hai điểm A và B ở trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng a. Xác định điểm M trên đường thẳng a sao cho MA, MB tạo với đường thẳng a hai góc bằng nhau.

Giai

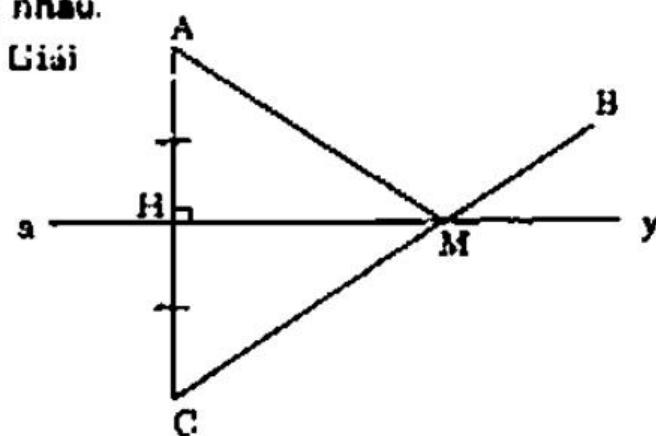
Vẽ AH \perp a; H \in a

Trên tia đối của tia HA lấy

điểm C sao cho $HC = HA$

BC cắt đường thẳng a tại M

M là điểm cần tìm.



59. Cho góc nhọn $xOy = \alpha$ và điểm M nằm trong góc xOy . Ở ngoài góc xOy lấy hai điểm A, B sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng MA và Oy là đường trung trực của đoạn thẳng MB.

a) Chứng minh tam giác AOB cân.

b) Tính số đo góc \widehat{AOB} theo α .

c) Nếu $\alpha = 90^\circ$ thì điểm O ở vị trí nào trên đoạn thẳng AB? Vì sao?

Giai

a) $OA = OB = OM$

$\Rightarrow \triangle AOB$ cân tại O.

b) Gọi I, K lần lượt là giao điểm của MA với Ox và MB với Oy

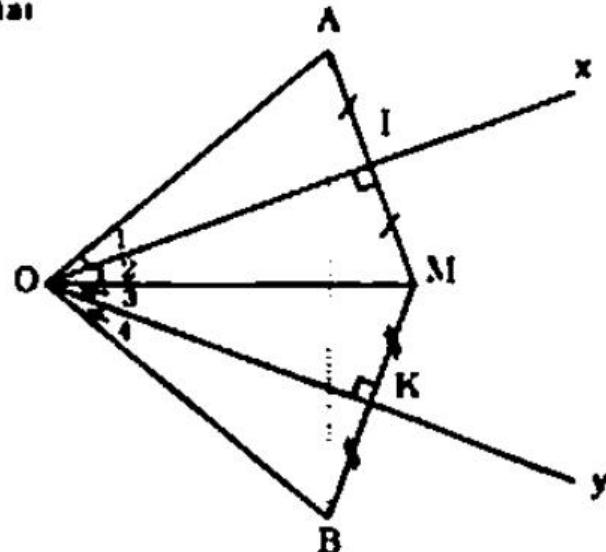
$\triangle AOM$ cân tại O có OI là đường trung tuyến nên OI cũng là đường phân giác
 $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Tương tự $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

$$\text{Ta có } \widehat{AOB} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2\widehat{xOy} = 2\alpha$$

c) Nếu $\alpha = 90^\circ$ thì $\widehat{AOB} = 180^\circ$ Ta có ba điểm A, O, B thẳng hàng
 Mà $OA = OB$

Vậy O là trung điểm của đoạn thẳng AB



60. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường trung trực của cạnh AC cắt AB tại D. Biết CD là tia phân giác của góc \widehat{ACB} . Tính các góc của tam giác ABC.

Giai

Ta có $DA = DC \Rightarrow \triangle ADC$ cân tại D

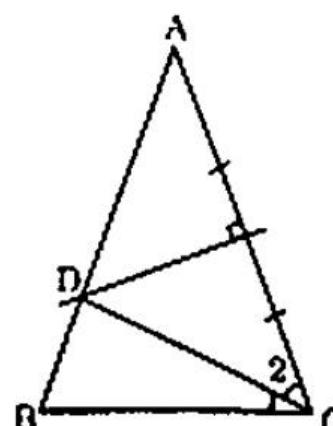
$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{C} = 2\hat{A} \quad (1)$$

$$\triangle ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} \quad (2)$$

$$\triangle ABC \text{ có: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \hat{A} = 36^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{C} = 72^\circ$$



61. Cho góc xAy khác góc bẹt. Az là tia phân giác, B là điểm cố định trên tia Ax . C là điểm chuyển động trên đoạn thẳng AB, D là điểm chuyển động trên tia Ay sao cho $AD = BC$. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng CD đi qua một điểm cố định.

Giai

Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB .

Gọi H, M lần lượt là giao điểm của d với AB, Az

$$\Rightarrow AH = HB; MH \perp AB$$

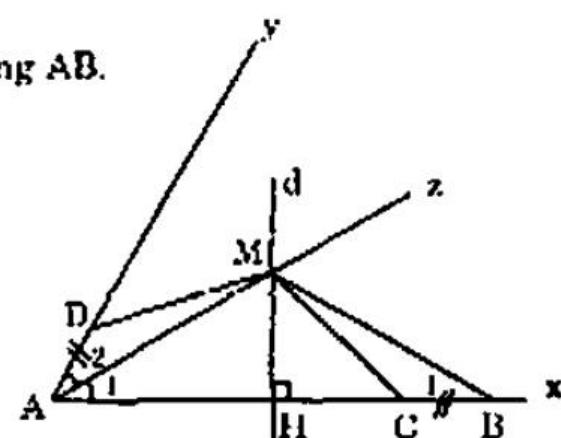
M là điểm cố định

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_1 (\hat{A}_1)$$

$$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BCM (\text{c.g.c})$$

Suy ra $MD = MC$

$\Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng CD .



III BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

62. Ở miền trong của góc nhọn xOy vẽ tia Oz sao cho $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{yOz}$. Qua

điểm A thuộc tia Oy , vẽ tia AH vuông góc với Ox , tia AH cắt Oz ở B . Trên tia Bz lấy điểm D sao cho $BD = OA$. Trên tia BD lấy điểm E sao cho $DE = OB$.

a) Chứng minh rằng tam giác AOE cân.

b) Chứng minh rằng hai đoạn thẳng OD và EB có chung đường trung trực

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận Tân Bình, năm học 2002 - 2003)

Giai

a) Từ $DE = OB$ (gt)

$$\Rightarrow OB + BE = DE + BE \Rightarrow OE = BD$$

Mà $BD = OA$ (gt)

Nên $OE = OA \Rightarrow \triangle AOE$ cân tại O

b) Gọi I là trung điểm của

BE . Vẽ đường thẳng m vuông góc với BE tại I .

Ta có m là đường trung trực của đoạn thẳng EB

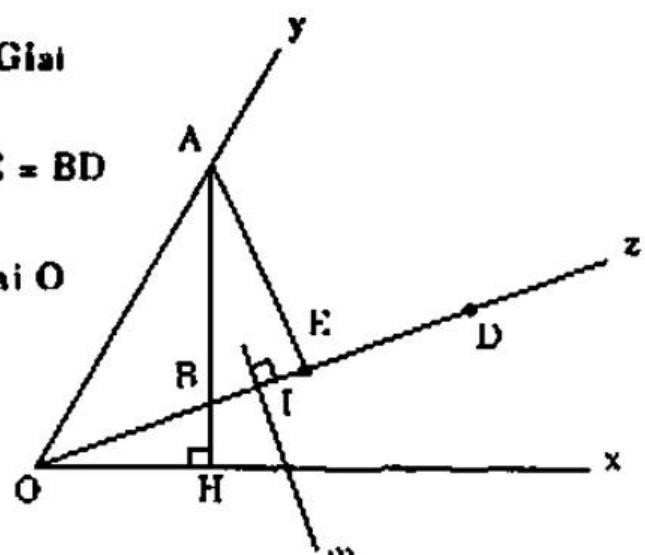
$$OB = DE, IB = IE$$

$$\Rightarrow OB + IB = DE + IE \Rightarrow IO = ID$$

Mà $m \perp OD$

Do đó m là đường trung trực của đoạn thẳng OD .

Vậy OD và EB có chung đường trung trực.



88. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨM NHỎ

1. Đường trung trực của tam giác

Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.

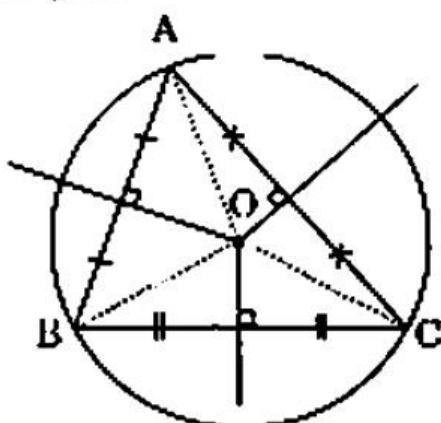
Mỗi tam giác có ba đường trung trực

Tính chất: Trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh này.

2. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

Định lí: Ba đường trung trực của một tam giác đều đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

Chú ý : Có một đường tròn tâm O đi qua ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Đường tròn này gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC



B/ BÀI TẬP

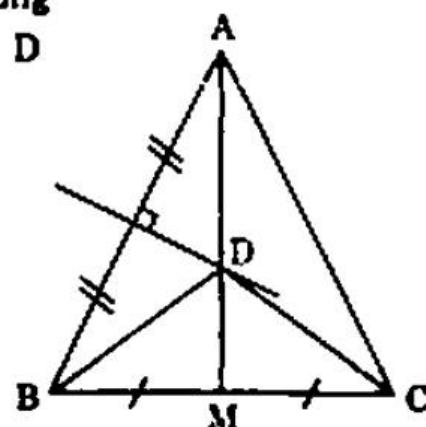
LJ BÀI TẬP CƠ BẢN

63. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường trung tuyến AM cắt đường trung trực của AB tại D
Chứng minh rằng $DA = DB = DC$.

Giai

ΔABC cân tại A có AM là đường trung tuyến nên AM cũng là đường trung trực.

Ta có D là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC nên $DA = DB = DC$.

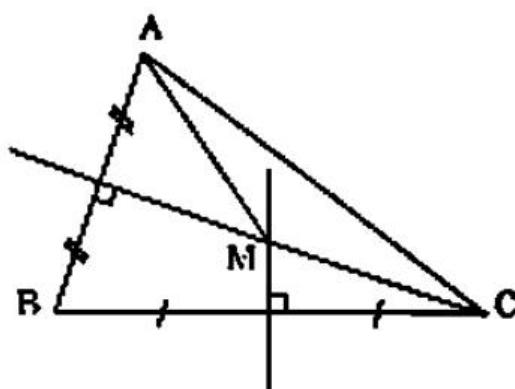


64. Cho tam giác ABC. Các đường trung trực của AB và BC cắt nhau ở M. Chứng minh rằng $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$.

Giai

M là giao điểm các đường trung trực của ΔABC nên $MA = MC$

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA}$



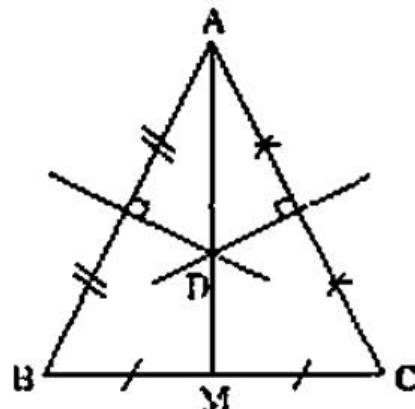
65. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm BC. Các đường trung trực của AB, AC cắt nhau tại D. Chứng minh rằng A, M, D thẳng hàng.

Giai

D là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$ (1)

$\triangle ABC$ cân tại A, AM là đường trung tuyến nên AM cũng là đường trung trực (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, M, D thẳng hàng.



66. Cho tam giác ABC. Đường trung trực của cạnh AC cắt đường trung trực của cạnh BC tại O. Đường thẳng vuông góc với OA tại A cắt đường thẳng vuông góc với OB tại B ở D.

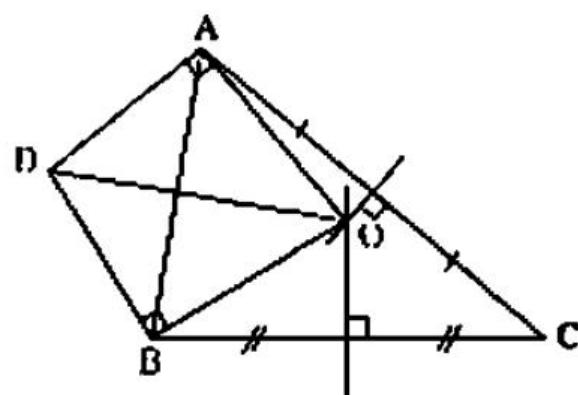
Chứng minh rằng DO là tia phân giác của góc \widehat{ADB} .

Giai

O là giao điểm của các đường trung trực của tam giác ABC nên $OA \perp OB$.

Mà $OA \perp AD$, $OB \perp BD$.

Do đó DO là tia phân giác của góc \widehat{ADB} .



BÀI TẬP NÂNG CAO

67. Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.

Giai

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, vẽ đường trung trực của AB và BC cắt ở I.

$\Rightarrow IA = IB \Rightarrow \triangle IAB$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IBA}$

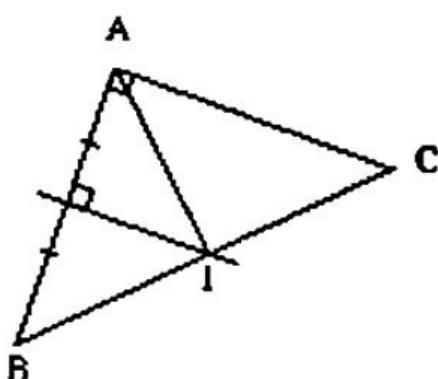
Mà $\widehat{IAB} + \widehat{IAC} = \widehat{IAB} + \widehat{ICA} (= 90^\circ)$

$\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICA}$

$\Rightarrow \triangle IAC$ cân tại I $\Rightarrow IA = IC$

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC.

Do vậy các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.



68. Cho tam giác ABC có \widehat{BAC} tù. Đường trung trực của AB cắt đường trung trực của BC tại O và cắt BC tại D. Chứng minh rằng $\widehat{OBD} = \widehat{OAD} = \widehat{OCB}$

Giai

O là giao điểm các đường trung trực
của AB, BC

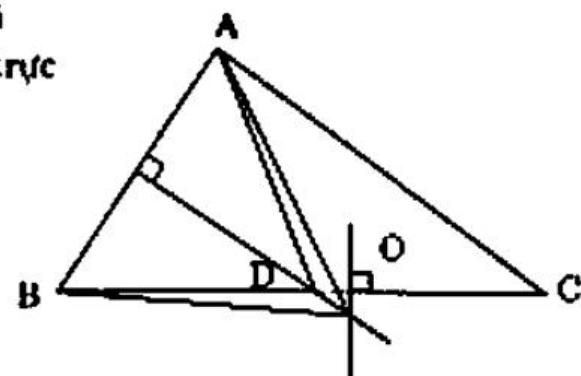
$$\Rightarrow OB = OC = OA.$$

$\triangle OCB$ cân đỉnh O

$$\Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{OCB} \quad (1)$$

$$\triangle OBD \cong \triangle OAD \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{OAD} \quad (2)$$



$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \widehat{OBD} = \widehat{OAD} = \widehat{OCB}$$

69. Cho tam giác ABC đều. Trên các cạnh AB, BC, AC lấy theo thứ tự ba điểm D, E, F sao cho $AD = BE = CF$.

a) Chứng minh tam giác DEF đều

b) Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC. Chứng minh rằng O cũng là giao điểm các đường trung trực của tam giác DEF.

Giai

$$\text{a)} \triangle ADF \cong \triangle BED \text{ (c.g.c)}$$

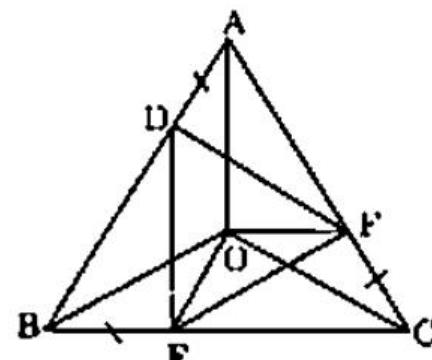
$$\Rightarrow DF = DE \quad (1)$$

$$\triangle BED \cong \triangle CFE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = EF \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } DE = EF = FD$$

$$\Rightarrow \triangle DEF \text{ đều.}$$



b) O là giao điểm các đường trung trực của tam giác đều ABC nên $OA = OB = OC$ và các tia OA, OB, OC lần lượt là các tia phân giác của các góc \widehat{BAC} , \widehat{ABC} và \widehat{ACB} .

$$\text{Ta có } \triangle DAO \cong \triangle BOE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OD = OE \quad (3)$$

$$\triangle DAO \cong \triangle COF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OD = OF \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } OD = OE = OF.$$

Vậy O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle DEF$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

70. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ $AH \perp BC$ tại H. Tia phân giác của góc \widehat{HAB} cắt BC tại D, tia phân giác của góc \widehat{HAC} cắt BC tại E. Chứng minh rằng giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC là giao điểm các đường trung trực của tam giác ADE.

(Đề kiểm tra lớp 7 chuyên Toán, trường THCS Colette Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 1994 - 1995)

Giai

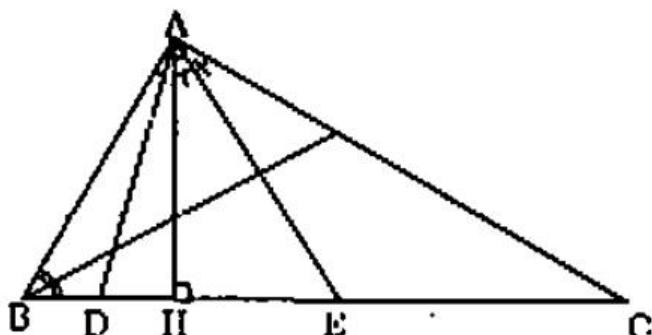
Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{HEA}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow \triangle BEA$ cân tại B.

Do vậy tia phân giác của góc ABC là đường trung trực của AE.

Chứng minh tương tự cũng có tia phân giác góc ACB là đường trung trực của AD.

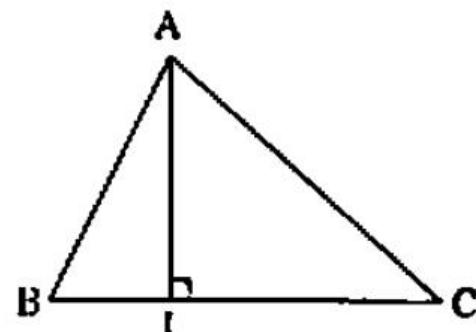
Vậy giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC là giao điểm các đường trung trực của tam giác ADE.

**§9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC****A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẨN NHỎ****1. Đường cao của tam giác**

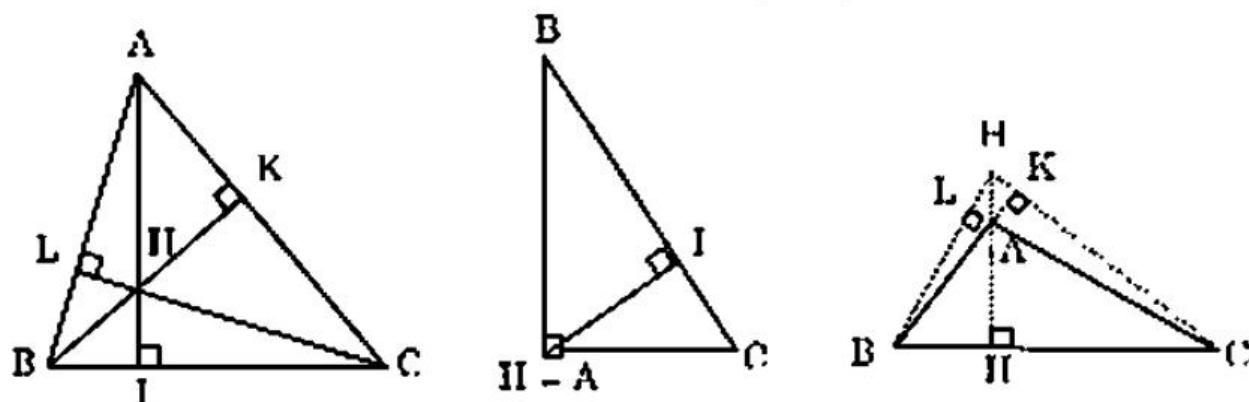
Cho hình bên, đoạn thẳng AI là một đường cao của tam giác ABC, ta còn nói AI là đường cao xuất phát từ đỉnh A (của tam giác ABC).

Đôi khi còn gọi đường thẳng AI là một đường cao của tam giác ABC.

Mỗi tam giác có ba đường cao.

**2. Tính chất ba đường cao của tam giác**

Định lí: Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm.



Điểm H gọi là trực tâm của tam giác ABC.

3. Vẽ các đường cao, trung tuyến, trung trực, phân giác của tam giác cân

Tính chất của tam giác cân:

- Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

Nhận xét:

- Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cung xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.
- Trong tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau.

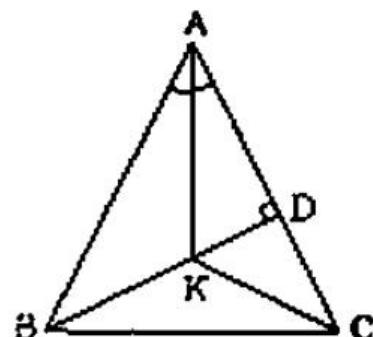
B/ BÀI TẬP

LJ BÀI TẬP CƠ BẢN

71. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao BD cắt tia phản giác của góc A tại K. Chứng minh rằng CK vuông góc với AB.

Giai

$\triangle ABC$ cân tại A, AK là tia phản giác của góc A nên AK cũng là đường cao.
 $\triangle ABC$ có $AK \perp BC$, BK $\perp AC$ nên K là trực tâm.
Suy ra $CK \perp AB$.

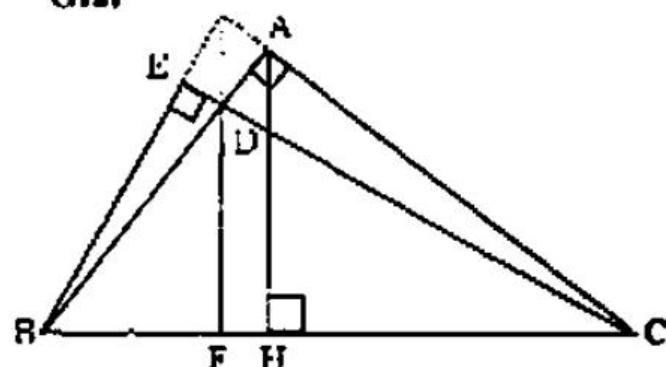


72. Cho tam giác ABC vuông tại A. AH là đường cao. D là điểm trên cạnh AB. Vẽ BE vuông góc với CD tại E, vẽ đường thẳng qua D song song với AH cắt BC tại F

Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BE, DF đồng quy.

Giai

Ta có $AH \perp BC$ (gt)
 $DF \parallel AH$ (gt)
 $\Rightarrow DF \perp BC$
Xét $\triangle ABC$ có CA , BE , DF là ba đường cao (vì $CA \perp DB$, $BE \perp CD$, $DF \perp BC$)
nên đồng quy.



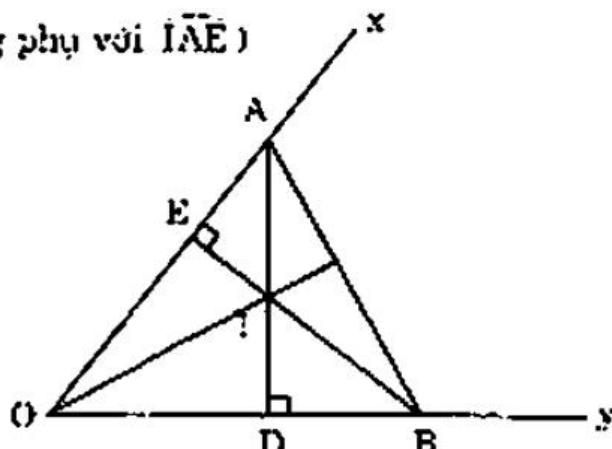
73. Cho $xOy = 60^\circ$. Trên tia Ox lấy điểm A, qua A kẻ đường thẳng vuông góc với Oy tại D. Trên tia đối tia DO lấy điểm B, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với Ox tại E, BE cắt AD tại I.

a) Chứng minh rằng $OI \perp AB$. b) Tính AIB .

Giai

a) $\triangle AOB$ có hai đường cao AD và BE cắt nhau tại I nên I là trực tâm
 $\Rightarrow OI \perp AD$.

- b) Ta có $\angle AIE = \angle OOD = 60^\circ$ (cùng phụ với $\angle AOE$)
 $\Rightarrow \angle AIB = 180^\circ - \angle AIE = 120^\circ$



74. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH. Chứng minh rằng CM vuông góc với AN.

Giai

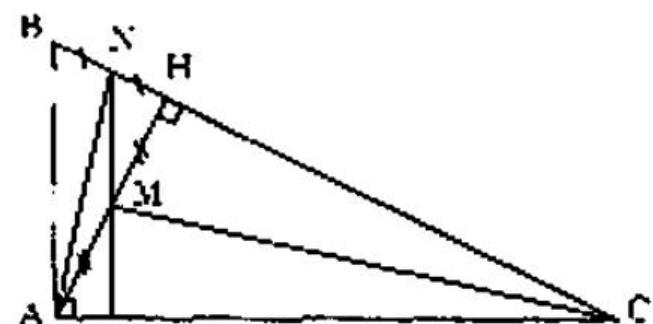
Xét $\triangle AJIB$ có N là trung điểm BH, M là trung điểm AH, nên chung minh được $MN \parallel AB$.

Mà $AB \perp AC$

Do đó $MN \perp AC$

$\triangle ANC$ có $AH \perp NC$, $NM \perp AC$

$\Rightarrow M$ là trung tâm của tam giác ANC. Suy ra $CM \perp AN$.



BÀI TẬP NÂNG CAO

75. Cho tam giác ABC. Qua mỗi đỉnh A, B, C kẻ các đường thẳng song song với cạnh đối diện, chúng cắt nhau tạo thành tam giác DEF. Chứng minh rằng các đường cao của tam giác ABC là đường trung trực của tam giác DEF.

Giai

Ta có $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AD = BC \quad (1)$$

Tương tự $\triangle AEC \cong \triangle CAB$ (c.g.c)

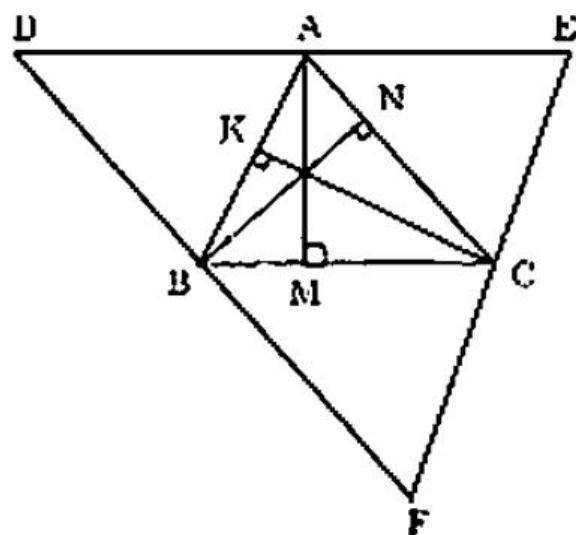
$$\Rightarrow AE = BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A là trung điểm của DE.

Kẻ đường cao AM của $\triangle ABC$.

Ta có $AM \perp BC$ mà $DE \parallel BC$ nên $AM \perp DE$.

Vậy AM là đường trung trực của DE.



Chứng minh tương tự ta cũng có BN là đường trung trực của DF, CK là đường trung trực của EF.

Do đó các đường cao của tam giác ABC là các đường trung trực của tam giác DEF.

76. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A bờ là đường thẳng BC lấy hai điểm D và E sao cho BD \perp BA, BD = BA, CE \perp CA, CE = CA. Chứng minh rằng các đường thẳng AH, BE, CD cùng đi qua một điểm.

Giai

Trên tia đối tia AH lấy
điểm I sao cho AI = BC.

Gọi M là giao điểm của IB và DC

Ta có $\angle ABI = \angle ABD$ (c g c)

$$\Rightarrow \angle IBA = \angle BDC.$$

Ta lại có $\angle DBM + \angle IBA - \angle DBA = 90^\circ$.

Xét $\triangle BOM$ có $\angle DBM + \angle BDM = 90^\circ$

nên $\angle DMB = 90^\circ \Rightarrow IB \perp DC$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $BE \perp IC$

$\triangle BIC$ có IB, BE, CI là ba đường cao nên AH, BE, CD cùng đi qua một điểm.

77. a) Cho tam giác nhọn ABC có BD và CE là hai đường cao cắt nhau
tại H. Tính số đo góc ACB, biết rằng có $AB = CH$
b) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD và CE. Chứng
minh rằng $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

Giai

a) Gọi F là giao điểm của AH và BC.

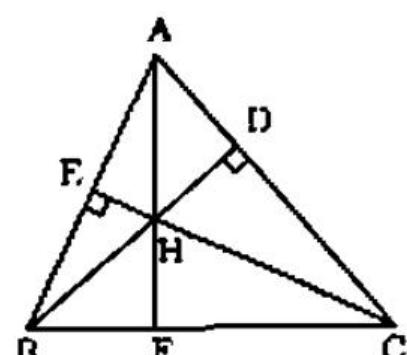
$\triangle ABC$ có BD và CE là hai đường cao
cắt nhau tại H
 $\Rightarrow H$ là trực tâm tam giác ABC

$\Rightarrow AF \perp BC$

$\angle FAB = \angle FCH$ (anh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow FB = FH \Rightarrow \triangle FBH$ vuông cân tại F

$\Rightarrow \angle HBF = 45^\circ$. Vậy $\angle ACB = 45^\circ$.

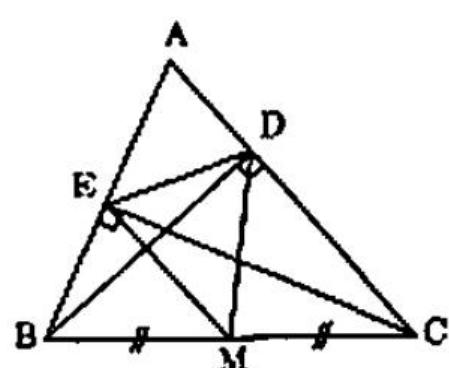


b) Gọi M là trung điểm BC

$$ME = MD = MB = MC = \frac{BC}{2}$$

$\triangle MED$ cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{MDE} = \frac{180^\circ - \widehat{DME}}{2}$$



$$\Delta MDC \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{MDC} = \frac{180^\circ - \widehat{DMC}}{2}$$

$$\text{Do đó } \widehat{ADE} = 180^\circ - \widehat{NDE} - \widehat{MDC}$$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{DME}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{DMC}}{2} = \widehat{ABC}$$

III BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

78. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH. Lấy các điểm L và K sao cho AC là đường trung trực của HL, AB là đường trung trực của HK. Đường thẳng KL cắt AB, AC lần lượt tại P và Q.

Chứng minh rằng AH là tia phân giác của góc PHQ. Có nhận xét gì về giao điểm các đường phân giác trong của tam giác HPQ?

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, Quận 6, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 1996 - 1997)

Giai

$$\Delta AKP \cong \Delta AHP (\text{c.c.c}) \Rightarrow \widehat{AKP} = \widehat{AHP}$$

$$\Delta AHQ \cong \Delta ALQ (\text{c.c.c}) \Rightarrow \widehat{AHQ} = \widehat{ALQ}$$

$$AK = AL = AH$$

$$\Delta AKL \text{ cân tại } A \Rightarrow \widehat{AKP} = \widehat{ALQ}$$

$$\text{Do vậy } \widehat{AHP} = \widehat{AHQ}.$$

Gọi Hx là tia đối của tia HP

Để dàng chứng minh được HC là tia phân giác góc QHx, QC là tia phân giác góc HQI.

Do vậy PC là tia phân giác của góc HPQ.

Ta có $\widehat{BPC} = 90^\circ$. Tương tự có $\widehat{BQC} = 90^\circ$.

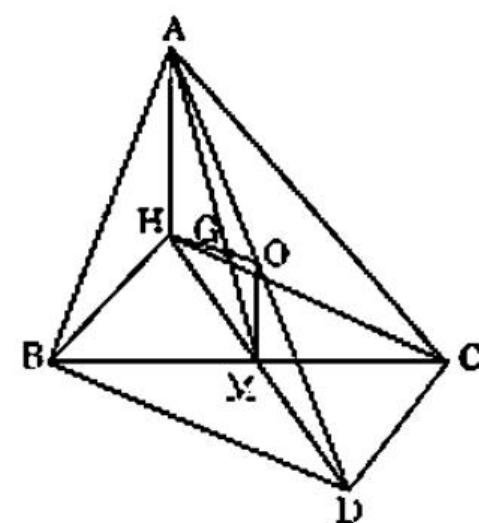
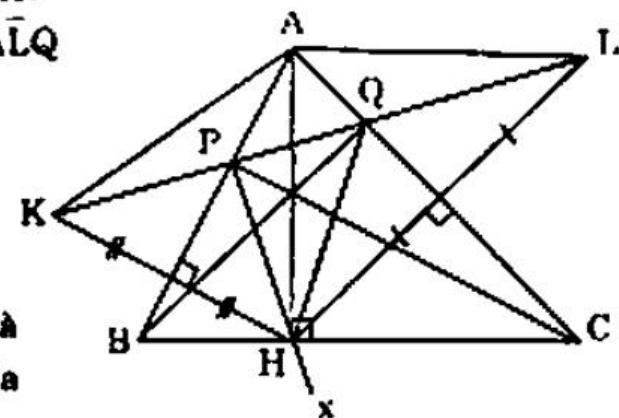
Do đó AH, BQ, CP là các đường cao của tam giác ABC.

Vậy giao điểm các đường phân giác trong của tam giác HPQ là trục tâm của tam giác ABC.

79. a) Cho tam giác ABC. H là trục tâm, G là trọng tâm, O là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC.

Chứng minh rằng H, G, O thẳng hàng và $HG = 2GO$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7 trường THCS Coleste, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 1995 - 1996)



b) Cho tam giác ABC cân tại A và đường cao AH. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CB$.

1) Chứng minh C là trọng tâm của tam giác ADE.

2) Tia AC cắt DE tại M.

Chứng minh rằng AE song song với HM.

'Đề thi chung kết giải Lê Quý Đôn, báo Khát Quát Đỏ, TP Hồ Chí Minh, năm học 2009 - 2010.'

Giai

a) Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Trên tia đối của tia OA lấy
điểm D sao cho $OD = OA$

Ta có $OA = OC$

$\Rightarrow \triangle OAC$ cân tại O

$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA$

Và $OC = OD$

$\Rightarrow \triangle OCD$ cân tại O $\Rightarrow \angle OCD = \angle ODC$

Ta có $\angle OAC + \angle ODC + \angle OCA + \angle OCD = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ$

Ta có $BH \perp AC$ (H là trực tâm tam giác ABC), $DC \perp AC$ ($\angle ACD = 90^\circ$)

Do đó $BH \parallel DC$

Tương tự $DB \parallel CH$

$ABHC = ACDB$ (c.g.c) $\Rightarrow BH = CD$

$\triangle MBH \sim \triangle MCD$ (c.g.c)

Từ đó có $MH = MD$, H, M, D thẳng hàng

Xét $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm (gt)

$\Rightarrow G$ thuộc đoạn thẳng AM và $AG = \frac{2}{3}AM$

Xét $\triangle AHD$ có AM là đường trung tuyến, G thuộc đoạn thẳng AM và

$AG = \frac{2}{3}AM$.

$\Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác AHD.

Mà HO là đường trung tuyến của tam giác AHD

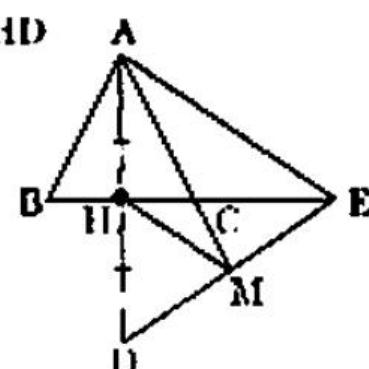
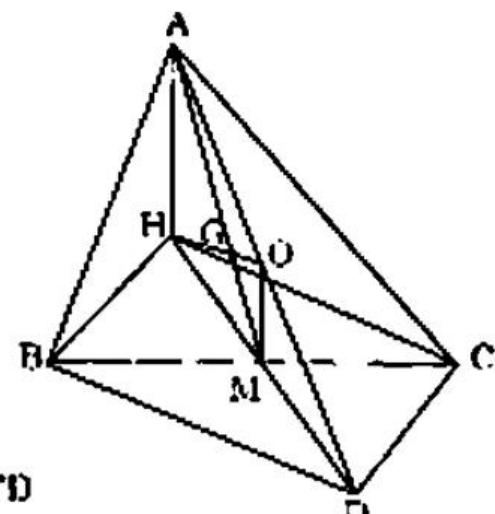
Do vậy HO đi qua G và $HG = 2GO$.

t) 1) $CH = \frac{1}{2}BC$ nên $CH = \frac{1}{2}CE$.

$\triangle ADE$ có EH là đường trung

tuyến và $EC = \frac{2}{3}EH$ nên C là

trọng tâm của tam giác ADE.



- 2) C là trọng tâm của tam giác ADE \Rightarrow AM là đường trung tuyến của tam giác ADE \Rightarrow M là trung điểm của ED.
Từ đó chứng minh được HM // AE.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Cho tam giác ABC có $\hat{B} < \hat{C}$. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. D là điểm trên đường thẳng AH. So sánh BH và HC, \hat{DBC} và \hat{DCB} .

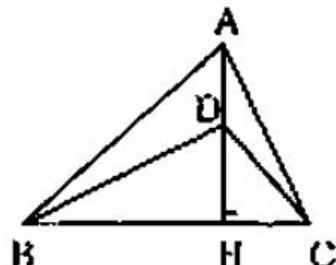
Giai

$\triangle ABC$ có $\hat{B} < \hat{C} \Rightarrow AC < AB$

$AC < AB \Rightarrow HC < HB$

$HC < HB \Rightarrow DC < DB$

$\triangle DBC$ có $DC < DB \Rightarrow \hat{DCB} < \hat{DBC}$



2. Cho tam giác ABC vuông tại A. BD là đường phân giác. Ké DE \perp BC tại E. Chứng minh rằng :

a) $DA = DE$ b) $DC > DA$

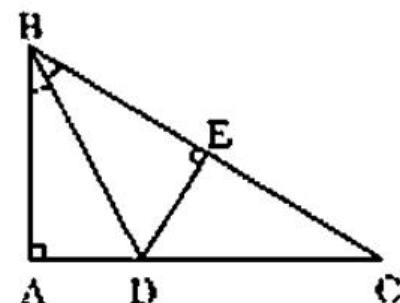
Giai

a) $\triangle ABD \cong \triangle EBD$

(cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AD = DE$.

b) $\triangle DEC$ có $DC > DE$ Vậy $DC > DA$



3. a) Cho tam giác ABC có $\hat{A} > 90^\circ$. Trên cạnh AC lấy hai điểm D và E (D nằm giữa A và E).

Chứng minh rằng $BA < BD < BE < BC$.

b) Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm nằm giữa B và C. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng AM. Chứng minh rằng $BE + CF < BC$.

Giai

a) $\triangle ABD$ có $\hat{A} > 90^\circ$ nên góc

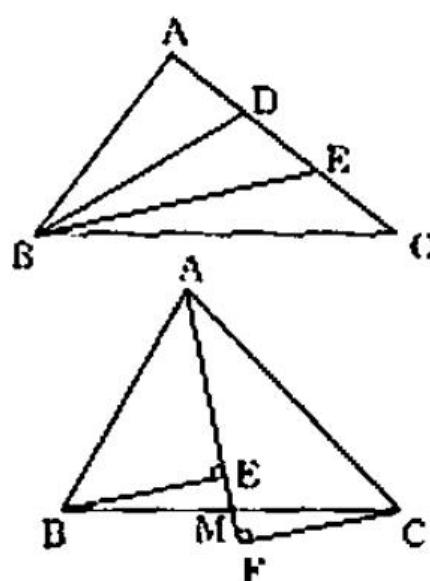
\hat{A} là góc lớn nhất trong tam giác ABD $\Rightarrow BD > BA$

Chứng minh tương tự có :

$BE > BD$ và $BC > BE$.

b) $BE < BM$ và $CF < CM$

$\Rightarrow BE + CF < BC$



4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 54^\circ$, trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC} = 18^\circ$

Chứng minh rằng $BD < AC$.

Giai

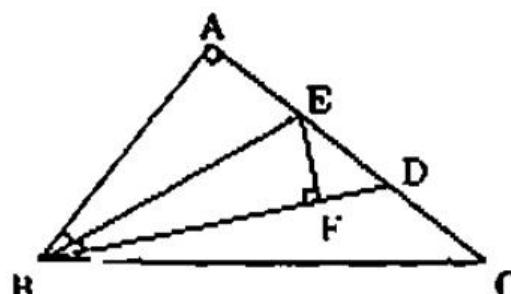
Vẽ BE là tia phân giác của góc \widehat{ABD} ($E \in AD$). Vẽ EF $\perp BD$ tại F.

Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{EBD} - \widehat{DBC} = 18^\circ$.

Do vậy $AE = FE$, $BE = EC$;

$FD < EF$ và $BF < BE$

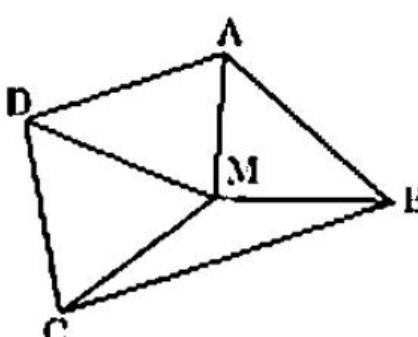
Từ đó có $BD < AC$.



5. Cho hình vẽ bên.

Xác định vị trí điểm M để tổng $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

Giai



M là giao điểm của AC và BD

6. Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G.

Chứng minh rằng $GA = GB = GC$

Giai

Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AG với BC, BG với AC và CG với AB. Chứng minh được $AD = BE = CF$.

Từ $AD = BF = CF \Rightarrow AG = BG = CG$

7. Cho $x\bar{O}y$ khác góc bẹt. Hai điểm P, Q lần lượt nằm trên hai cạnh Ox, Oy.

a) Hãy tìm điểm M cách đều hai cạnh của góc $x\bar{O}y$ và cách đều hai điểm P, Q.

b) Nếu $OP = OQ$ thì có bao nhiêu điểm M thỏa mãn các điều kiện trong câu a?

Giai

a) M là giao điểm của đường trung trực d của PQ và đường phân giác (trong và ngoài) của góc $x\bar{O}y$

b) Nếu $OP = OQ$ thì d trùng với đường thẳng tia Oz. Vậy mọi điểm thuộc Oz đều thỏa mãn bài toán.

8. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^\circ$. Từ B và C kẻ BD và CE vuông góc với các đường thẳng AC và AB tại D và E. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC.

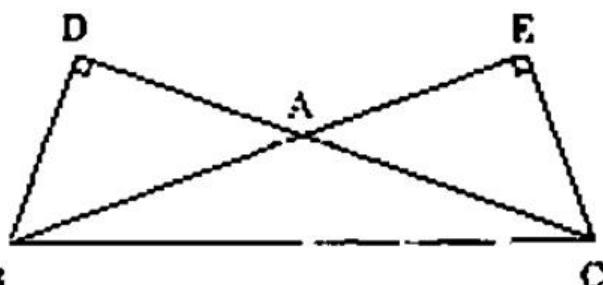
a) Chứng minh các tam giác ABD và ACE là các tam giác vuông cân nếu có $\widehat{BAC} = 135^\circ$.

b) Có thể khẳng định rằng ba đường thẳng AH, BD và CE cùng đi qua một điểm không? Vì sao?

Giai

a) $\angle BAD = \angle CAE = 45^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABD$ và $\triangle ACE$ là các tam giác vuông cân.

b) AH, BD và CE là ba đường cao của tam giác ABC nên cùng đi qua một điểm



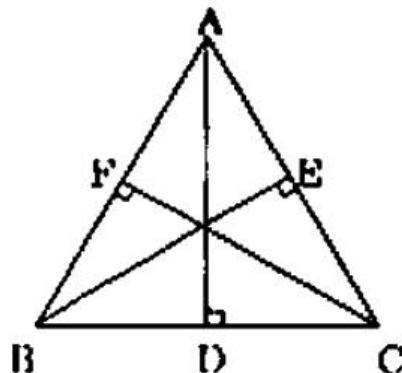
9. Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF và $AD = BE = CF$.

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Giai

Ta có: $\angle ABD = \angle BAE$
 (canh huyền - canh góc vuông)
 $\Rightarrow \angle ABD = \angle BAE$
 $\angle ADC = \angle CFA$

(canh huyền - canh góc vuông)
 $\Rightarrow \angle ACD = \angle CAF$
 Do đó $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC$
 \Rightarrow Tam giác ABC đều.



10. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Trên đoạn thẳng AD lấy các điểm M, N sao cho $\overline{ABM} \perp \overline{CBN}$

Chứng minh rằng $\overline{ACM} \perp \overline{BCN}$

Giai

Vẽ các điểm E, F, K sao cho AB là đường trung trực của ME, BC là đường trung trực của MF, AC là đường trung trực của MK.

Chứng minh được $\triangle AEK$ cân tại A, AM là đường phân giác

Do đó AM là đường trung trực của đoạn thẳng EK

$$\begin{aligned} &\Rightarrow NE = NK \\ &\angle BEN = \angle BMF \text{ (c.g.c)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow NE = MF$$

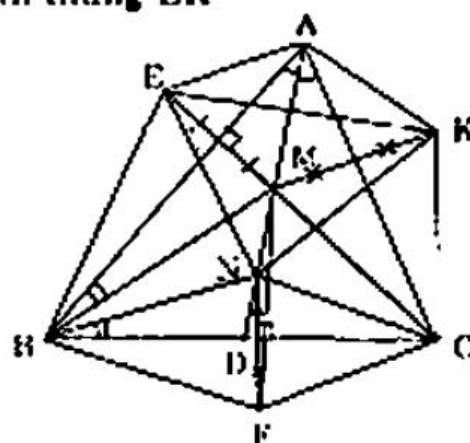
$$\text{Do đó } NK = MF$$

$$\angle CNK = \angle CFM \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \overline{NCK} = \overline{FCM}$$

$$\Rightarrow \overline{MCK} = \overline{FCN}$$

$$\Rightarrow \overline{ACM} \perp \overline{BCN}$$



ÔN TẬP CUỐI NĂM

A/ ĐẠI SỐ

1. Tính $A = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} - \dots - \frac{1}{2008.2009}$

Giai

$$A = \frac{1}{1.2} - \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{2008.2009} \right) = \dots = \frac{1}{2009}$$

2. Tìm các số nguyên dương x, y biết rằng $2^x - 2^y = 1024$

Giai

Ta có $2^x - 2^y = 1024 \Rightarrow 2^x > 2^y \Rightarrow x > y$

Do đó, có $2^y(2^{x-y} - 1) = 2^{10}$

$2^{x-y} - 1$ là số lẻ, $2^{x-y} - 1 > 0$, $2^{x-y} - 1$ là ước của 2^{10} .

Do đó $2^{x-y} - 1 = 1$. Vậy $2^y = 2^{10}$

Vì vậy $y = 10$ và $2^{x-y} - 1 = 1$. Từ đó có $x = 11$.

3. Chứng minh rằng :

a) $7^{86} + 7^{85} - 7^{84}$ chia hết cho 55. b) $4^{12} + 32^8 - 8^8$ chia hết cho 8.

c) $16^5 - 2^{15}$ chia hết cho 31.

Giai

a) $7^{86} + 7^{85} - 7^{84} = 7^{84}(7^2 + 7 - 1) = 7^{84}.55$

b) $4^{12} + 32^8 - 8^8 = 2^{24} + 2^{24} - 2^{24} = 2^{24}.5$

c) $16^5 - 2^{15} = 2^{20} - 2^{15} = 2^{15}.31$

4. Tìm chữ số tận cùng của

a) $A = 19^n + 5n + 1890^n$ với $n \in \mathbb{N}$. b) $B = 2^{2^n} + 1$ với $n \in \mathbb{N}$

Giai

a) $n = 0$ thì A có chữ số tận cùng là 2.

n chẵn, $n \neq 0$ thì A có chữ số tận cùng là 1

n lẻ thì A có chữ số tận cùng là 4.

b) $n = 0$ thì B có chữ số tận cùng là 2.

$n = 1$ thì B có chữ số tận cùng là 5.

$n \geq 2$ thì B có chữ số tận cùng là 7.

5. Cho $ac = bd$; b, c khác 0 và $b \neq -c$

Chứng minh rằng : $\left(\frac{a+d}{b+c}\right)^{2008} = \frac{a^{2008} + d^{2008}}{b^{2008} + c^{2008}}$

Giai

Ta có $ac = bd$.

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{a+d}{b+c} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2008} = \left(\frac{d}{c}\right)^{2008} = \left(\frac{a+d}{b+c}\right)^{2008}$$

$$\Rightarrow \frac{a^{2008}}{b^{2008}} = \frac{d^{2008}}{c^{2008}} = \left(\frac{a+d}{b+c}\right)^{2008} \Rightarrow \left(\frac{a+d}{b+c}\right)^{2008} = \frac{a^{2008} + d^{2008}}{b^{2008} + c^{2008}}$$

6. Số học sinh giỏi của trường M ở các khối 6 ; 7 ; 8 ; 9 theo tỉ lệ 1,2 ; 1,4 ; 1,5 ; 1,7. Hỏi số học sinh giỏi của mỗi khối? Biết rằng khối 7 có số học sinh giỏi nhiều hơn số học sinh giỏi của khối 6 là 18 học sinh.

Giai

Gọi số học sinh giỏi của các khối 6 ; 7 ; 8 ; 9 lần lượt là a, b, c, d ($a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$).

Theo điều bài ta có : $\frac{a}{1,2} = \frac{b}{1,4} = \frac{c}{1,5} = \frac{d}{1,7}$ và $b - a = 18$.

Theo tính chất của dây tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{a}{1,2} = \frac{b}{1,4} = \frac{c}{1,5} = \frac{d}{1,7} = \frac{b - a}{1,4 - 1,2} = \frac{18}{0,2} = 90$$

$$\bullet \frac{a}{1,2} = 90 \Rightarrow a = 90 \cdot 1,2 = 108 \quad \bullet \frac{b}{1,4} = 90 \Rightarrow b = 90 \cdot 1,4 = 126$$

$$\bullet \frac{c}{1,5} = 90 \Rightarrow c = 90 \cdot 1,5 = 135 \quad \bullet \frac{d}{1,7} = 90 \Rightarrow d = 90 \cdot 1,7 = 153$$

7. Khi viết các phân số sau dưới dạng số thập phân thì được số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn?

a) $\frac{33n + 17}{88}$ ($n \in \mathbb{N}$);

b) $\frac{23456789}{(19^n + 1) \cdot 19^n + 2}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Giai

a) Từ $33n + 17 \mid 11$, mẫu 88 $\vdots 11$

Nên khi viết phân số dưới dạng tóm giản mẫu vẫn có ước là 11.

Do đó phân số này đổi thành số thập phân vô hạn tuần hoàn.

b) $19^n ; 19^n + 1 ; 19^n + 2$ là ba số nguyên liên tiếp nên tồn tại một số chia hết cho 3.

Mà $19^n \not\mid 3$. Do đó $19^n + 1 \vdots 3$ hoặc $19^n + 2 \vdots 3$

Suy ra $(19^n + 1) \cdot 19^n + 2 \vdots 3$.

8. Tính tổng các chữ số của A biết: $\sqrt{A} = \frac{99 \dots 96}{2010 \text{ chữ số } 9}$

Giai

$$\begin{aligned} A &= \frac{99 \dots 96^2}{2010 \text{ chữ số } 9} = \frac{99 \dots 96^2}{2010 \text{ chữ số } 9} - 4^2 + 16 \\ &= \left(\frac{99 \dots 96}{2010 \text{ chữ số } 9} - 4 \right) \cdot \left(\frac{99 \dots 96}{2010 \text{ chữ số } 9} + 4 \right) + 16 \\ &= \frac{99 \dots 9}{2010 \text{ chữ số } 9} \cdot \frac{20 \dots 0}{2009 \text{ chữ số } 0} + 16 \end{aligned}$$

Tổng các chữ số của số A là : $9 \cdot 2010 + 2 + 1 + 6 = 18099$

9. Vẽ đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \frac{2}{3}x$ b) $y = 3|x|$ c) $y = \frac{|x|}{x}$.

Giai

a) Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x$ là đường thẳng OA với O(0 ; 0) và A(3 ; 2)

b) $y = 3|x| = \begin{cases} 3x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -3x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ c) $y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

10. Tính giá trị của đa thức : $A = 12x^3 - 8x^2y - 28y^2 + 42xy + 19$
tại x, y thỏa mãn $2x^2 + 7y = 0$.

Giai

$$\begin{aligned} A &= 12x^3 - 8x^2y - 28y^2 + 42xy + 19 \\ &= 12x^3 + 42xy - 8x^2y - 28y^2 + 19 \\ &= 6x(2x^2 + 7y) - 4y(2x^2 + 7y) + 19 = 6x0 - 4y0 + 19 = 19 \end{aligned}$$

11. Cho hai đa thức $A = -13x^2 + 10xy + 3y^2$ và $B = 7x^2 - 5xy - y^2$.

Chứng tỏ rằng A, B không thể cùng có giá trị âm.

Giai

$$A + 2B = (-13x^2 + 10xy + 3y^2) + 2(7x^2 - 5xy - y^2) = x^2 + y^2 > 0$$

12. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ và $6a + 2b = -3c$. Chứng minh rằng
trong ba số $P(1), P(-1), P(2)$ có ít nhất một số không âm, ít nhất một
số không dương.

Giai

$$P(1) + P(-1) + P(2) = 6a + 2b + 3c = 0$$

13. Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $x \cdot P(x+2) = (x-5) \cdot P(x)$.

Chứng minh rằng đa thức có ít nhất hai nghiệm.

Giai

Cho $x = 0$, ta có $0 \cdot P(2) = -5 \cdot P(0)$

$\Rightarrow P(0) = 0 \Rightarrow 0$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

Cho $x = 5$, ta có $5 \cdot P(7) = 0 \cdot P(5)$

$\Rightarrow P(7) = 0 \Rightarrow 7$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

Vậy $P(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và 7 .

14. Cho đa thức $Q(x)$ thỏa mãn điều kiện : $(x-1)Q(x+2) = (x^2 - 9)Q(x)$

Chứng minh rằng đa thức có ít nhất ba nghiệm.

Giai

Cho $x = 1$, ta có $0 \cdot Q(3) = -8Q(1)$

$\Rightarrow Q(1) = 0 \Rightarrow 1$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

Cho $x = 3$, ta có $2Q(5) = 0 \cdot Q(3)$

$\Rightarrow Q(5) = 0 \Rightarrow 5$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

Cho $x = -3$, ta có $-4Q(-1) = 0 \cdot Q(-3)$

$\Rightarrow Q(-1) = 0 \rightarrow -1$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.

Vậy $Q(x)$ có ít nhất ba nghiệm là 1, 5 và -1.

B/ HÌNH HỌC

15. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến BM. Trên tia đối tia MB lấy điểm E sao cho $ME = MB$.

a) Chứng minh $CE \perp AC$

b) So sánh $M\bar{B}A$ và $M\bar{B}C$

Giai

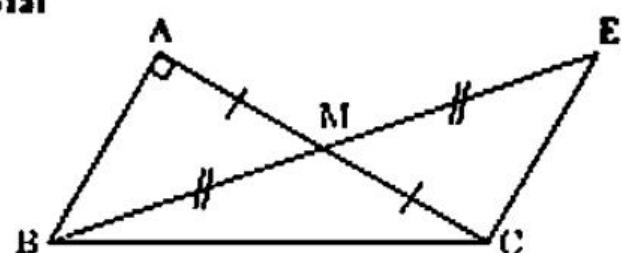
a) $\angle MAB = \angle MCE$ (c.g.c)

$$\Rightarrow M\bar{B}A = M\bar{E}C \Rightarrow AB \parallel CE$$

Mà $AB \perp BC$

Nên $CE \perp AC$

b) $M\bar{B}A = M\bar{E}C, M\bar{E}C > E\bar{B}C$



16. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, AB. Gọi G là giao điểm BM và CN. Chứng minh rằng :

a) Tam giác AMN cân.

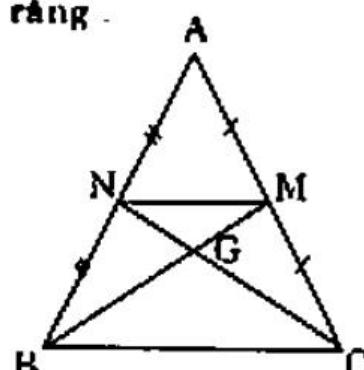
b) Tam giác GBC cân.

Giai

a) $AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A

b) Chứng minh $BM = CN$. Từ đó có $BG = CG$

Do đó $\triangle BGC$ cân tại G



17. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD và CE. Trên tia đối tia BD lấy điểm M sao cho $BM = AC$, trên tia đối tia CE lấy điểm N sao cho $CN = AB$. Chứng minh rằng :

a) $\triangle ABM \cong \triangle NAC$.

b) $\triangle AMN$ vuông cân.

Giai

a) $A\bar{B}M = A\bar{C}N$ (cùng bù với hai góc bằng nhau)

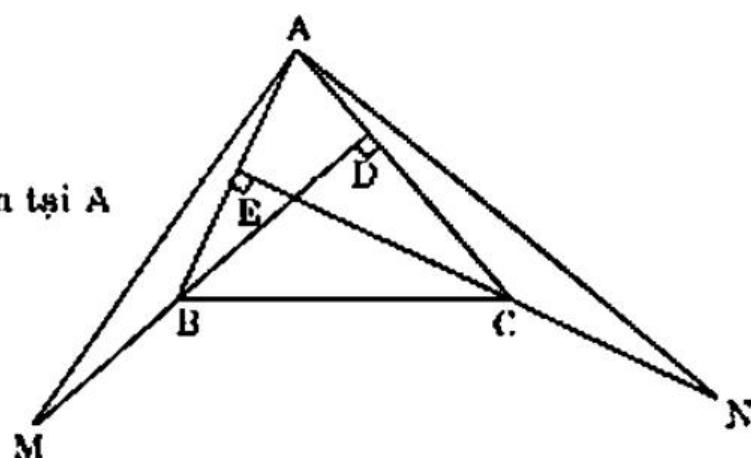
$\triangle ABM \cong \triangle NCA$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AM = AN$$

b) $D\bar{A}M = N\bar{A}C$

$$\Rightarrow M\bar{A}N = 90^\circ$$

Do đó $\triangle AMN$ vuông cân tại A



18. Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 120^\circ$ và đường phân giác AD.

Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt AC tại E.

a) Chứng minh tam giác ABE đều

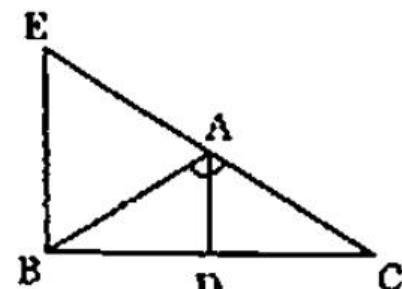
b) So sánh các cạnh của tam giác BEC.

Giải

a) $\widehat{EBA} - \widehat{BAD} = 60^\circ$

$$\widehat{EAB} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 60^\circ$$

b) $BE < BC < CE$



19. Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 40^\circ$. Gọi H là giao điểm của

đường phân giác AD và đường trung tuyến BE. Gọi K là giao điểm của

đường vuông góc với AB tại B và đường vuông góc với AC tại C.

a) So sánh AB và BC.

b) Chứng minh CH đi qua trung điểm của cạnh AB.

c) Chứng minh ba điểm A, H, K thẳng hàng.

Giải

a) ΔABC cân tại A có $\hat{A} = 40^\circ$

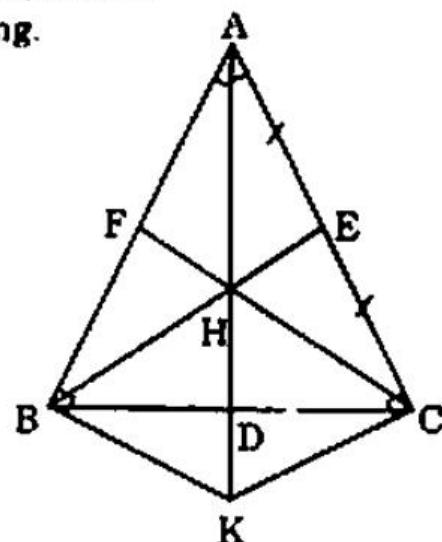
$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 70^\circ$$

$$\hat{C} > \hat{A} \Rightarrow AB > BC$$

b) ΔABC cân tại A có AD là
đường phân giác nên AD
cũng là đường trung tuyến
 $\Rightarrow H$ là trọng tâm của tam
giác ABC

Do đó CH đi qua trung điểm cạnh AB

c) A, H, K nằm trên đường trung trực của BC.



20. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm D

sao cho $BD = BA$. Tia phân giác của góc \widehat{ABC} cắt AD tại H và AC tại E. Gọi F là trung điểm của DC, AF cắt CH tại K.

a) So sánh các cạnh của tam giác ABC.

b) Chứng minh $\Delta ABE \cong \Delta DBE$.

c) Chứng minh $BE > AD$.

d) Chứng minh $KC = 2KH$.

Giải

a) $BC > AC > AB$

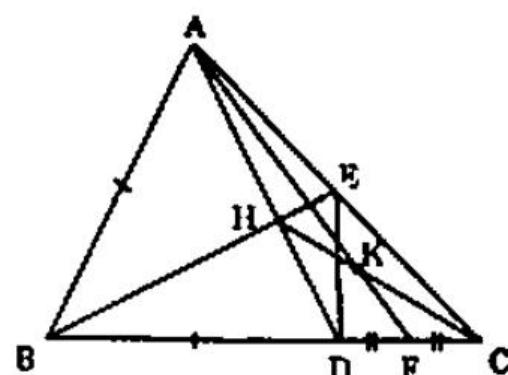
b) $\Delta ABE \cong \Delta DBE$ (c.g.c)

c) $BE > AB$

$$\text{Mà } AB = AD$$

Nên $BE > AD$

d) K là trọng tâm của tam giác ADC $\Rightarrow KC = 2KH$



21. Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 120^\circ$). Vẽ ra phía ngoài tam giác các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng :

a) $\Delta BDC = \Delta CEB$

b) $IB = IC$

c) D và E cách đều đường thẳng BC.

a) $\Delta BDC = \Delta CEB$ (c.g.c)

b) $\Delta BDC = \Delta CEB$

$$\Rightarrow \widehat{ICB} = \widehat{IBC}$$

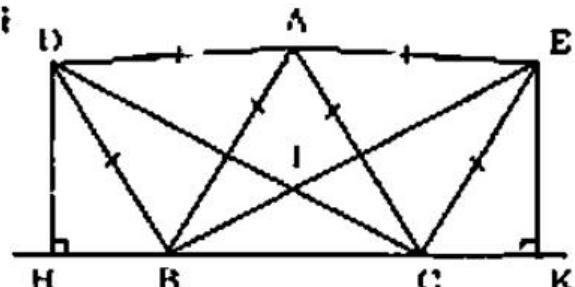
Do đó ΔIBC cân tại I

$$\Rightarrow IB = IC$$

c) Kẻ DH \perp BC tại H và EK \perp BC tại K

$$\Delta BHD = \Delta CKE$$
 (cạnh huyền \cdot góc nhọn) $\Rightarrow DH = EK$

Giai



22. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Kẻ DE \perp BC tại E.

Trên tia đối tia AB lấy điểm F sao cho AF = CE. Chứng minh rằng :

a) $\Delta ABD = \Delta EBD$

b) D, E, F thẳng hàng

Giai

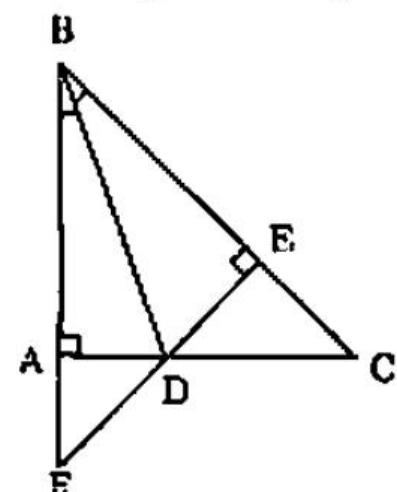
a) $\Delta ABD = \Delta EBD$ (cạnh huyền \cdot góc nhọn)

b) $\widehat{ADF} = \widehat{EDC}$

$$\text{Mà } \widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ADF} + \widehat{ADE} = 180^\circ$$

Do đó E, D, F thẳng hàng



23. Cho tam giác ABC ($AB > AC$). Vẽ đường cao BD và CE. Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho AF = AC. Vẽ FG vuông góc với AC tại G và FH vuông góc với BD tại H. Chứng minh $FG = HD = CE$.

Giai

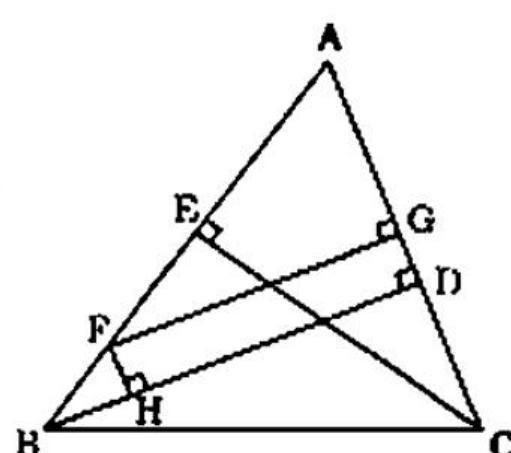
$\Delta FGD = \Delta DHG$ (g.c.g)

$$\Rightarrow FG = HD$$

$\Delta GAF = \Delta EAC$ (cạnh huyền \cdot góc nhọn)

$$\Rightarrow FG = CE$$

Do đó $FG = HD = CE$.

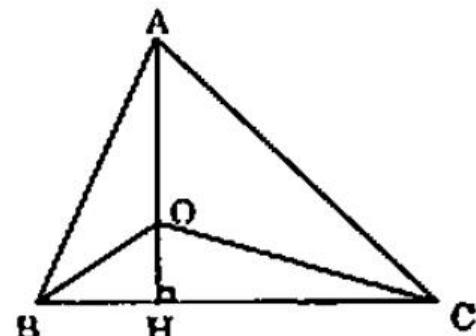


24. Cho tam giác ABC có $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$, đường cao AH. Gọi O là điểm nằm giữa A và H.
So sánh OB và OC.

Giải

$$AC > AB \Rightarrow HC > HB$$

$$HB > HC \Rightarrow OC > OB$$



25. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Đường thẳng qua H song song với AB cắt AC tại K. BK cắt AH tại G. Gọi I là trung điểm AB. Chứng minh rằng

a) G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) C, G, I thẳng hàng.

c) KI là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

Giải

a) ABC cân tại A có AH là đường cao nên AH cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABC.

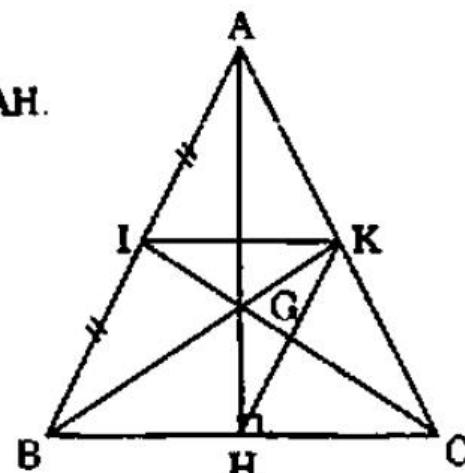
b) CI là đường trung tuyến
của tam giác ABC.

c) $KA = KH$

$\Rightarrow K$ thuộc đường trung trực của AH.

Tương tự I cũng thuộc đường trung trực của AH.

Do đó IK là đường trung trực của AH.



26. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác CD. Gọi H là hình chiếu của B trên đường thẳng CD. E là điểm trên CD sao cho $HE = HD$. Chứng minh rằng

a) $\widehat{BEC} = \widehat{CDA}$

b) $FD \perp BC$

c) $FD \parallel BE$.

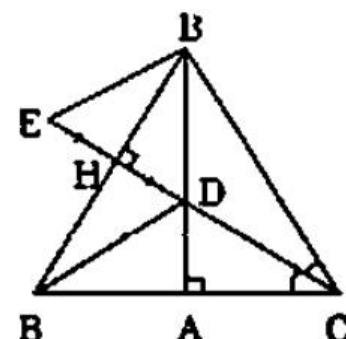
Giải

a) $\widehat{BEC} = \widehat{CDA}$ ($= \widehat{BDE}$)

b) D là trực tâm của tam giác BFC.

c) $BE \perp BC$ và $FD \perp BC$.

Suy ra $FD \parallel BE$.



27. Cho tam giác ABC. D và E lần lượt trên các cạnh AC, AB sao cho

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}, \widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}. BD \text{ và } CE \text{ cắt nhau tại } I, \text{ biết } ID = IE.$$

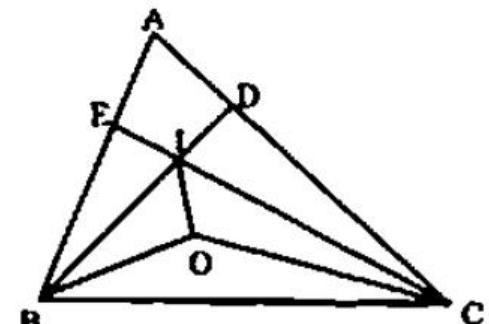
Chứng minh rằng hoặc tam giác ABC cân tại A hoặc $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Giai

Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác IBC.

Xét ba trường hợp

$$\widehat{EIB} = 60^\circ, \widehat{EIB} > 60^\circ \text{ và } \widehat{EIB} < 60^\circ$$



28. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$. Trên tia đối của tia EB lấy điểm D sao cho $DE = BC$.
Chứng minh tam giác CED là tam giác cân.

Giai

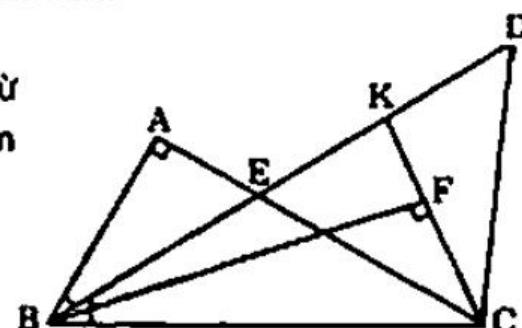
Vẽ tia phân giác của góc \widehat{CBD} , rồi từ C kẻ đường vuông góc với tia phân giác đó tại F cắt BD tại K

$\triangle BKC$ cân tại B $\Rightarrow BK = BC$

Từ đó có $BE = KD$

$\triangle EBC \cong \triangle KDC$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = DC$

$\Rightarrow DC = DE$. Do đó $\triangle CDE$ cân tại D



29. Cho tam giác ABC vuông tại A. D là điểm trên cạnh BC, E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC.

a) Chứng minh $AD = EF$.

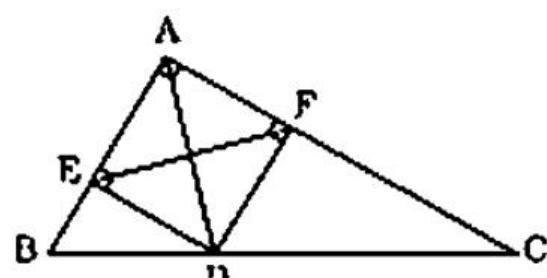
b) Xác định vị trí của D để EF có độ dài ngắn nhất.

Giai

a) $\triangle AEF \cong \triangle FDA$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AD = EF$$

b) EF có độ dài ngắn nhất khi $AD \perp BC$ tại D



30. Cho tam giác ABC. Gọi I và K là chân các đường vuông góc kẻ từ A đến đường phân giác của các góc \widehat{B} và \widehat{C} . Chứng minh rằng :

a) $IK \parallel BC$;

$$b) IK = \frac{AB + AC - BC}{2}$$

Giai

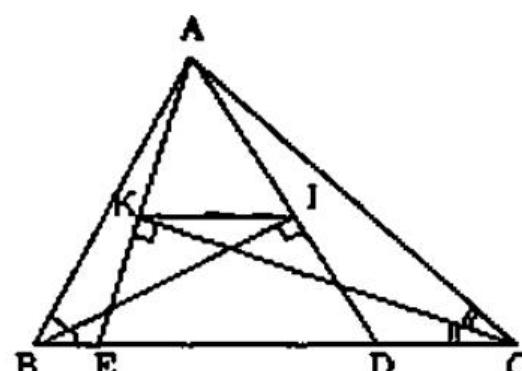
a) $\triangle ABD$ cân tại B

$\Rightarrow BI$ là đường trung tuyến

$$\Rightarrow IA = ID$$

Tương tự $KA = KE$

Do đó $IK \parallel BC$



$$b) IK = \frac{DE}{2} = \frac{AB + AC - BC}{2}$$

31. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H.

Chứng minh rằng $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$.

Giai

Kẻ HM // AB ($M \in AC$) và HN // AC ($N \in AB$).

Ta có $AM = NH$, $AN = HM$

$$\Rightarrow HA < AN + AM \quad (1)$$

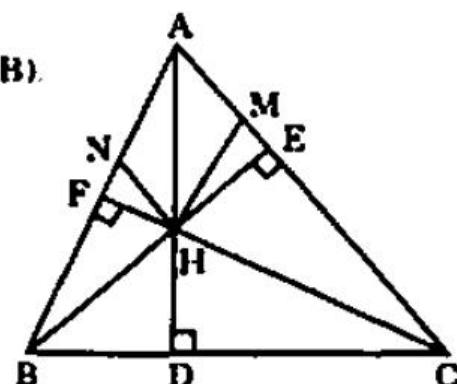
$$\triangle HBN \text{ vuông tại } H \text{ nên } HB < BN \quad (2)$$

$$\text{Tương tự } HC < CM \quad (3)$$

Từ (1) (2) và (3) suy ra :

$$HA + HB + HC < AB + AC$$

$$\text{Do đó } HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$



32. Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A vẽ các điểm D, E sao cho BD vuông góc và bằng BA, BE vuông góc và bằng BC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh rằng ba điểm A, D, M thẳng hàng.

Giai

• Xét $AB = AC$. Ta có $M = D$, bài toán đúng.

• Xét $AB \neq AC$; $\triangle ABC$ và $\triangle DBE$ có $AB = BD$, $BC = BE$ (gt), $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$ (cùng phụ với \widehat{CBD}), do đó $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

Gọi F là giao điểm của ED và AC. Ta có $AB \parallel DF$ (cùng vuông góc với BD), $AF \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB)

nên $\triangle ABD \sim \triangle DFA$ (g.c.g)

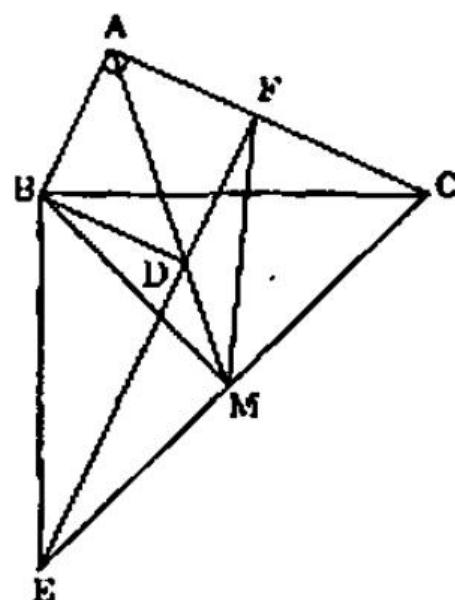
Kết hợp với $AB = BD$

$$\text{ta có } AB = BD = DF = AF \quad (1)$$

Trong các tam giác vuông BEC và FEC ta có :

$$BM = FM = \frac{1}{2}EC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A, D, M cùng thuộc đường trung trực của đoạn BF.
Vậy ba điểm A, D, M thẳng hàng.



PHỤ LỤC

CÁC BÀI TOÁN HAY VÀ KHÓ

A/ ĐẠI SỐ

Bài 1. Cho số nguyên tố $p > 3$. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Giải

Giả sử trong 20 chữ số của cách viết thập phân của p^n không có 3 chữ số nào giống nhau. Do đó mỗi một chữ số trong 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 9 xuất hiện đúng 2 lần.

Như vậy tổng các chữ số của số p^n là: $2(0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 90$

Suy ra $p^n \nmid 3 \Rightarrow p \nmid 3$

Mâu thuẫn vì p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Vậy trong 20 chữ số đó có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 2. Cho số tự nhiên có sáu chữ số 654321. Hỏi có khi nào thu được một số chính phương từ việc hoán đổi vị trí 6 chữ số của số trên không?

Giải

Số 654321 có tổng các chữ số là $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Do vậy khi hoán đổi vị trí các chữ số của số 654321 để được một số mới thì với mọi cách hoán đổi tổng các chữ số vẫn không đổi là 21. Mà 21 chia hết cho 3 và không chia hết cho 9 nên không thể nào ta thu được một số chính phương.

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn:

$$\begin{aligned} & a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + 14) \\ &= b + (b + 1) + (b + 2) + \dots + (b + 16) \\ &= c + (c + 1) + (c + 2) + \dots + (c + 18) \end{aligned}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + 14) &= 15a + 105 \\ b + (b + 1) + (b + 2) + \dots + (b + 16) &= 17b + 136 \\ c + (c + 1) + (c + 2) + \dots + (c + 18) &= 19c + 171 \end{aligned}$$

Do đó $15a + 105 = 17b + 136 = 19c + 171 = t$ ($t \in \mathbb{N}, t > 171$)

$$\text{Nên } a = \frac{t}{15} - 7, \quad b = \frac{t}{17} - 8, \quad c = \frac{t}{19} - 9$$

Để $a, b, c \in \mathbb{N}$ và a, b, c có giá trị nhỏ nhất thì $t = \text{BCNN}(15, 17, 19) = 4845$.

Vậy $a = 316, b = 277, c = 246$.

Bài 4. Cho p, q là hai số nguyên tố liên tiếp, $2 < p < q$.

Chứng tỏ rằng: $\frac{p+q}{2}$ là một hợp số.

Giải

p, q là các số nguyên tố lớn hơn 2

$\Rightarrow p, q$ là các số lẻ.

Đặt $p + q = 2a$ ($a \in \mathbb{N}^*$), ta có $\frac{p+q}{2} = a$

Vì $p < q \Rightarrow p + p < p + q < q + q$

$$\Rightarrow 2p < 2a < 2q$$

$$\Rightarrow p < a < q$$

p, q là hai số nguyên tố liên tiếp

Do đó a là hợp số

Vậy $\frac{p+q}{2}$ là hợp số.

Bài 5. Tìm ba chữ số bên trái dấu tiên của số M , biết rằng:

$$M = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 999^{1000} + 1000^{1000}$$

Giải

$$\text{Ta có: } 1000^{1000} < M < 1000^1 + 1000^2 + 1000^3 + \dots + 1000^{999} + 1000^{1000}$$

$$\frac{100 \dots 0}{3000 \text{ chữ số}} < M < \frac{100100100 \dots 1000}{3001 \text{ chữ số}}$$

Do vậy ba chữ số bên trái dấu tiên của số M là 100.

Bài 6. Hỏi có bao nhiêu số nguyên n sao cho $-1964 \leq n \leq 2011$ và phân

số $\frac{n^2 + 2}{n + 9}$ chưa tối giản?

Giải

$$\frac{n^2 + 2}{n + 9} = \frac{n^2 - 81 + 83}{n + 9} = n - 9 + \frac{83}{n + 9}$$

Phân số $\frac{n^2 + 2}{n + 9}$ chưa tối giản khi và chỉ khi $\frac{83}{n + 9}$ chưa tối giản,

nghĩa là $\text{UCLN}(83, n + 9) \neq 1$ mà 83 là số nguyên tố nên điều đó xảy ra khi $n + 9 = 83k$ với $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$.

Theo giả thiết có $-1964 \leq 83k - 9 \leq 2011$ hay là $-1955 \leq 83k \leq 2020$

Do đó $-23 \leq k \leq 24$

Vì $k \neq 0$ nên $k \in \{-23, -22, \dots, -2, -1\} \cup \{1, 2, \dots, 24\}$ tức là k có 47 giá trị, như vậy $n = 83k - 9$ tương ứng lấy 47 giá trị.

Bài 7. Tính: $2014 - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{4.9} - \frac{1}{6.12} - \dots - \frac{1}{36.57} - \frac{1}{38.60}$

Giải

$$\begin{aligned} & 2014 - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{4.9} - \frac{1}{6.12} - \dots - \frac{1}{36.57} - \frac{1}{38.60} \\ & = 2014 \left(\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.9} + \frac{1}{6.12} + \dots + \frac{1}{36.57} + \frac{1}{38.60} \right) \\ & = 2014 - \frac{1}{2.3} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{18.19} + \frac{1}{19.20} \right) \\ & = 2014 - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{18} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \\ & = 2014 - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{20} \right) = 2014 - \frac{1}{6} \cdot \frac{19}{20} = 2014 - \frac{19}{120} = 2013 \frac{101}{120} \end{aligned}$$

Bài 8. Cho 2013 số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 2013. Đặt trước mỗi số dấu "+" hoặc dấu "-" rồi thực hiện phép tính thì được tổng là M. Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

Giải

Từ 1 đến 2013 có số chữ số lẻ là lẻ nên M là số lẻ.

$$|M| \geq 1$$

$$\begin{aligned} & M = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2010 - 2011 - 2012 + 2013 \\ & = 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (2010 - 2011 - 2012 + 2013) \\ & = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1.

Bài 9. Tìm x, biết:

$$(x - 2)^2 = \frac{38}{25} + \frac{9}{10} - \frac{11}{15} + \frac{13}{21} - \frac{15}{28} + \frac{17}{36} - \dots + \frac{197}{4851} - \frac{199}{4950}.$$

Giải

$$\begin{aligned} & (x - 2)^2 = \frac{38}{25} + \frac{9}{10} - \frac{11}{15} + \frac{13}{21} - \frac{15}{28} + \frac{17}{36} - \dots + \frac{197}{4851} - \frac{199}{4950} \\ & (x - 2)^2 = \frac{38}{25} + 2 \times \left(\frac{9}{20} - \frac{11}{30} + \frac{13}{42} - \frac{15}{56} + \frac{17}{72} - \dots + \frac{197}{9702} - \frac{199}{99000} \right) \\ & (x - 2)^2 = \frac{38}{25} + 2 \times \left(\frac{5+4}{5 \times 4} - \frac{6+5}{6 \times 5} + \frac{7+6}{6 \times 7} - \dots + \frac{99+98}{98 \times 99} - \frac{100+99}{99 \times 100} \right) \\ & (x - 2)^2 = \frac{38}{25} + 2 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} - \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \end{aligned}$$

$$(x - 2)^2 = \frac{38}{25} + 2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{100} \right)$$

$$(x - 2)^2 = \frac{38}{25} + 2 \times \frac{6}{25}$$

$$(x - 2)^2 = \frac{38}{25} + \frac{12}{25}$$

$$(x - 2)^2 = 2$$

$$x - 2 = \sqrt{2} \text{ hoặc } x - 2 = -\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} + 2 \text{ hoặc } x = -\sqrt{2} + 2$$

Vậy $x = \sqrt{2} + 2$ hoặc $x = -\sqrt{2} + 2$.

Bài 10. Tìm số \overline{abcde} , biết rằng $\sqrt{\overline{abcd}} = 5e + 1$

Giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{\overline{abcd}} = 5e + 1 \Leftrightarrow \overline{abcd} = (5e + 1)^2 \quad (*)$$

$$\text{Vì } (5.6 + 1)^2 = 31^2 = 961$$

Do đó với chữ số $e \leq 6$ thì $(5e + 1)^2 < 1000$ không thỏa mãn (*)

- Với $e = 7$ thì $(5.7 + 1)^2 = 1296$

Khi đó $\overline{abcd} = 12967$ thỏa mãn đề bài

- Với $e = 8$ thì $(5.8 + 1)^2 = 1681$, không thỏa mãn vì có hai chữ số 1.
- Với $e = 9$ thì $(5.9 + 1)^2 = 2116$, không thỏa mãn vì có hai chữ số 1.

Vậy bài toán có một đáp số là: $\overline{abcde} = 12967$.

Bài 11. Tìm số: \overline{abcde} , biết rằng $\overline{abcd} = (\overline{ab})^3$

Giải

$$\overline{abcde} = 1000\overline{ab} + \overline{cde} = (\overline{ab})^3$$

$$\text{Đặt } x = \overline{ab}, y = \overline{cde}$$

$$\text{Ta có: } 1000x + y = x^3$$

$$\text{Do đó: } x^3 \geq 1000x \Leftrightarrow x^2 \geq 1000$$

$$1000 > 32^2. \text{ Ta có } x \geq 32 \quad (1)$$

$$\text{Vì } y < 1000 \text{ nên } x^3 < 1000x + 1000$$

$$\text{Do đó } x(x^2 - 1000) < 1000$$

$$\text{Nếu } x \geq 33 \text{ thì } x(x^2 - 1000) \geq 33(33^2 - 1000) = 33.89 = 2937 > 1000$$

$$\Rightarrow x < 33 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $x = 32$

$$\overline{abcde} = 32^3 = 32768.$$

Bài 12. Một đường tròn được chia làm 6 cung trên đó viết các số 1, 5, 4, 0, 6, 0 (theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Mỗi một lần thực hiện có thể cộng hai số ở cạnh nhau với 1. Hỏi có thể xảy ra trường hợp sau một số lần thực hiện tất cả các số trên các cung tròn bằng nhau hay không?

Giải

Gọi a, b, c, d, e, f là các số trên các cung tròn theo ngược chiều quay của kim đồng hồ. Sau mỗi lần biến đổi, đại lượng $S = a - b + c - d + e - f$ luôn bằng 6.

Do vậy không thể xảy ra trường hợp tất cả các số trên các cung tròn đều bằng nhau vì khi này ta có $S = 0$.

Bài 13. Cho tổng sau gồm 2007 số hạng: $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2007^{2008}}$

Chứng minh rằng giá trị của A là số không nguyên

Giải

Số nguyên tố lớn nhất mà không vượt quá 2007 là 2003. Quy đồng mẫu số các số hạng của A ta được $A = \frac{B}{C}$ với mẫu số chung $C = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots 2007^{2008}$ chia hết cho 2003^{2004} . Từ số B là tổng của 2007 số tự nhiên có dạng $2^3 \cdot 3^4 \cdots 2007^{2008} \cdot 1^3 \cdot 3^4 \cdots 2007^{2008} + 1^2 \cdot 2^3 \cdot 4^4 \cdots 2007^{2008} + \dots$, trong đó tử số của số hạng $\frac{1}{2003^{2004}}$ có dạng:

$1^2 \cdot 2^3 \cdots 2002^{2003} \cdot 2004^{2005} \cdot 2005^{2006} \cdot 2006^{2007} \cdot 2007^{2008}$ nên nó không chia hết cho 2003, còn tử số của tất cả các số hạng còn lại của A thì chia hết cho 2003^{2004} , do đó B không chia hết cho 2003. Vậy A không thể là số nguyên.

Bài 14. Cho hai số dương a, b thỏa mãn:

$$a^{2012} + b^{2012} = a^{2013} + b^{2013} = a^{2014} + b^{2014}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $M = 20a + 11b + 2013$

Giải

$$\text{Ta có: } (a^{2013} + b^{2013})(a + b) - ab(a^{2012} + b^{2012})$$

$$= a^{2014} + a^{2013}b + ab^{2013} + b^{2014} - a^{2013}b - ab^{2013} = a^{2014} + b^{2014}$$

$$\text{Mà } a^{2012} + b^{2012} = a^{2013} + b^{2013} = a^{2014} + b^{2014} \neq 0 \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó } a + b - ab = 1 \Leftrightarrow a(1 - b) + b = 1$$

$$\Leftrightarrow a(1 - b) + b - 1 = 0 \Leftrightarrow (1 - b)(a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a - 1 = 0 \text{ hoặc } 1 - b = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } b = 1$$

$$\text{Nếu } a = 1 \text{ thì } b^{2012} = b^{2013} \Leftrightarrow b = 1$$

Nếu $b = 1$ thì $a^{2012} - a^{2013} \Leftrightarrow a = 1$

$$\text{Vậy } M = 20 + 11 + 2013 = 2044$$

Bài 15. Cho a, b, c thoả mãn:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ và } b^2 = 2c^2 - 2013$$

Tính giá trị của biểu thức: $M = 5a^2 - 7b^2 - c^2$

Giải

$$\text{Ta có: } a^2 = b^2 + c^2 \text{ và } b^2 = 2c^2 - 2013$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 0 \text{ và } b^2 - 2c^2 = -2013$$

$$\text{Do đó } M = 5a^2 - 7b^2 - c^2$$

$$= (5a^2 - 5b^2 - 5c^2) + (-2b^2 + 4c^2)$$

$$= 5(a^2 - b^2 - c^2) - 2(b^2 - 2c^2)$$

$$= 5.0 - 2(-2013) = 0 + 4026 = 4026$$

Bài 16. Cho a, b, c thoả mãn:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = 2013$$

Tính giá trị của biểu thức: $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$

Giải

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = 2013$$

$$\frac{(b-a)-(c-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-b)-(a-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(a-c)-(b-c)}{(c-a)(c-b)} = 2013$$

$$\frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-b} = 2013$$

$$2\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) = 2013$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 1006.5.$$

Bài 17. Tìm a, b, c biết rằng: $a(a+b+c) = -\frac{1}{24}$, $b(a+b+c) = \frac{1}{16}$ và

$$c(a+b+c) = -\frac{1}{72}.$$

Giải

$$\text{Ta có: } a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c) = -\frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \left(-\frac{1}{72}\right)$$

$$\text{Do đó: } (a+b+c)(a+b+c) = \frac{1}{144}$$

$$(a + b + c)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$a + b + c = \pm \frac{1}{12}$$

- Xét $a + b + c = \frac{1}{12}$

$$a(a + b + c) = -\frac{1}{24}. \text{ Nên } a \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{24}. \text{ Ta có } a = -\frac{1}{2}$$

$$b(a + b + c) = \frac{1}{16}. \text{ Nên } b \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{16}. \text{ Ta có } b = \frac{3}{4}$$

$$c(a + b + c) = -\frac{1}{72}. \text{ Nên } c \cdot \frac{1}{12} = -\frac{1}{72}. \text{ Ta có } c = -\frac{1}{6}$$

- Xét $a + b + c = -\frac{1}{12}$

$$a(a + b + c) = -\frac{1}{24}. \text{ Nên } a \cdot \frac{-1}{12} = \frac{-1}{24}. \text{ Ta có } a = \frac{1}{12}$$

$$b(a + b + c) = \frac{1}{16}. \text{ Nên } b \cdot \frac{-1}{12} = \frac{1}{16}. \text{ Ta có } b = -\frac{3}{4}$$

$$c(a + b + c) = \frac{-1}{72}. \text{ Nên } c \cdot \frac{-1}{12} = \frac{-1}{72}. \text{ Do đó } c = \frac{1}{6}$$

Bài 18. Tìm các số nguyên x, y, z biết rằng: $(x + y)(x - y) = 8^z + 10$

Giải

- $z < 0$. Vẽ trái là số nguyên, vẽ phải không là số nguyên.
- $z = 0$. Ta có $(x + y)(x - y) = 8^0 + 10$

$$(x + y)(x - y) = 11$$

$x + y$	1	11	-1	-11
$x - y$	11	1	11	-1

$2x$	12	12	-12	-12
$2y$	-10	10	10	-10

x	6	6	-6	-6
y	-5	5	5	-5

- $z > 0$. Ta có: $8^z \mid 4, 10 \mid 4$ và $10 \mid 2$

Do đó $8^z + 10 \mid 4$ và $8^z + 10 \mid 2$ (1)

Mặt khác $(x + y) + (x - y) = 2x$, chẵn

$\Rightarrow x + y$ và $x - y$ cùng tính chẵn, lẻ.

$\Rightarrow (x + y)(x - y) \mid 4$ hoặc $(x + y)(x - y) \mid 16$

$$\Rightarrow (x + y)(x - y) \mid 4 \text{ hoặc } (x + y)(x - y) \mid 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có không tồn tại các số nguyên x, y, z ($z > 0$) để có:

$$(x + y)(x - y) = 8^3 + 10$$

Vậy các bộ ba số nguyên (x, y, z) cần tìm là:

$$(6; -5; 0); (6; 5; 0); (-6; 5; 0); (-6; -5; 0)$$

Bài 19. Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn:

$$(x + 2014)^2 = 64(x + 2007)^2 \quad (*)$$

Giải

Ta có: $(x + 2014)^2 \geq 0$. Do đó $64(x + 2007)^2 \geq 0$

Nên $x + 2007 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2007$

Mà $x = -2007$ thì $(x + 2014)^2 = 9$ và $64(x + 2007)^2 = 0$

$x = -2007$ không thỏa mãn bài toán

Vậy $x \geq -2006$

Vì $x + 2007 > 1$. Ta có:

$$(x + 2014)^2 = 64(x + 2007)^2 \geq 64(x + 2007)^2$$

Nên $x + 2014 \geq 8(x + 2007)$

$$\Leftrightarrow x + 2014 \geq 8x + 16056 \Leftrightarrow 7x \leq -14042 \Leftrightarrow x \leq -2006$$

Nên $x = -2006$. Thử lại $x = -2006$ thỏa mãn bài toán

Vậy $x = -2006$.

Bài 20. Có tồn tại hay không các số nguyên x, y sao cho:

$$x^3 - y^3 = 10 \times 10 \times 2010?$$

Giải

Ta thấy 2010 chia hết cho 3 nên $x^3 - y^3 = 10 \times 10 \times 2010$ phải chia hết cho 3.

Đặt $x = 3k + r$ với $k \in \mathbb{Z}$; r bằng $0, 1, 2$ thì $x^3 = (3k + r)^3 = 9m + r^3$ với $m \in \mathbb{Z}$.

Đặt $y = 3h + s$ với $h \in \mathbb{Z}$, s bằng $0, 1, 2$ thì $y^3 = (3h + s)^3 = 9n + s^3$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Từ đó, nếu $x^3 - y^3 = 9(m - n) + r^3 - s^3$ chia hết cho 3 thì $r^3 - s^3$ phải chia hết cho 3, điều này xảy ra chỉ khi $r = s$; lúc đó $x^3 - y^3 = 9(m - n)$ chia hết cho 9 trong khi $10 \times 10 \times 2010$ không chia hết cho 9. Vậy không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đề bài.

Bài 21. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x + y)^3 \leq 100x + 43$

Giải

Vì $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $100x + 43 \leq 100x + 100y$

Do đó $(x + y)^3 \leq 100(x + y) \Rightarrow (x + y)^4 \leq 100 < 4^4 \Rightarrow x + y < 4$

Mà $x + y \geq 2$ ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

Do vậy $x + y = 2$ hoặc $x + y = 3$

- $x + y = 2$

Ta có $x + y = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

- $x + y = 3$

Ta có $x = 2, y = 1$ hoặc $x = 1, y = 2$

$x = 2, y = 1$ (thỏa mãn điều kiện);

$x = 1, y = 2$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = 1, y = 1; x = 2, y = 1$

Bài 22. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên (a, b, c) thỏa mãn:

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = 1964^{2013}$$

Giai

Ta có:

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = 1964^{2013}$$

$$a^3(b - c) + b^3(c - b + b - a) + c^3(a - b) = 1964^{2013}$$

$$a^3(b - c) + b^3(c - b) + b^3(b - a) + c^3(a - b) = 1964^{2013}$$

$$(b - c)(a^3 - b^3) - (a - b)(b^3 - c^3) = 1964^{2013}$$

$$(a - b)(b - c)(a^2 + ab + b^2 - b^2 - bc - c^2) = 1964^{2013}$$

$$(a - b)(b - c)(a^2 - c^2) + (ab - bc) = 1964^{2013}$$

$$(a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c) = 1964^{2013} \quad (*)$$

- Nếu a, b, c có hai số chia cho 3 có cùng số dư thì $a - b \equiv 3$ hoặc $a - c \equiv 3$

- Nếu a, b, c chia cho 3 có số dư khác nhau thì $a + b + c \equiv 3$ (Vì $0 + 1 + 2 \equiv 3$)

Do vậy $(a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c) \not\equiv 3$, với mọi $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Mà $1964^{2013} \not\equiv 3$

Như vậy (*) không xảy ra!

Vậy không có a, b, c là các số nguyên để có:

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = 1964^{2013}$$

Bài 23. Cho số nguyên dương n sao cho 2^n và 5^n có chữ số đầu tiên giống nhau. Chứng tỏ rằng số tạo bởi hai số 2^n và 5^n viết liền nhau có $n + 1$ chữ số, trong đó có ít nhất hai chữ số 3.

Giai

Giả sử khi viết trong hệ thập phân số 2^n có k chữ số, số 5^n có h chữ số và chữ số đầu tiên bên trái của hai số đó đều là a ($k \geq 1, h \geq 2, n \geq 2$). Vì 2^n và 5^n đều không chia hết cho 10 nên ta có:

$$a \cdot 10^{k-1} < 2^n < (a+1) \cdot 10^{k-1}; a \cdot 10^{h-1} < 5^n < (a+1) \cdot 10^{h-1}.$$

Từ đó $a^2 \cdot 10^{k+h-1} < 10^n < (a+1)^2 \cdot 10^{k+h-2}$ (*)

Vì $1 \leq a < 10$ nên từ (*) có $10^{k+h-2} < 10^n < 10^{k+h-1}$. Suy ra $n = k + h - 1$ hay $k + h = n + 1$, do đó số tạo bởi hai số 2^n và 5^n viết liền nhau có $n + 1$ chữ số. Thay $k + h = n + 1$ vào (*) ta thu được $a^2 < 10 < (a+1)^2$. Từ đó chỉ có thể xảy ra $a = 3$. Chẳng hạn với $n = 5$ thì $2^5 = 32$ và $5^5 = 3125$. Như vậy khi viết hai số 2^n và 5^n liền nhau thì phải có ít nhất hai chữ số 3.

Bài 24. Cho đa thức $P(x) = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$

Chứng minh rằng $|P(2014) - P(1)| \geq 2013$

Giải

Ta có: $P(2014) = 2014a + b$, $P(1) = a + b$ và $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ nên $|a|$ là số nguyên dương $\Rightarrow |a| \geq 1$

Do đó $|P(2014) - P(1)| = |2014a + b - a - b| = |2013a| = 2013|a| \geq 2013$

Bài 25. Hãy chỉ ra bốn đa thức bậc hai sao cho mỗi đa thức có nghiệm còn tổng của hai đa thức bất kì trong bốn đa thức đó không có nghiệm.

Giải

Bốn đa thức x^2 , $(x+1)^2$, $(x+2)^2$, $(x+3)^2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Để thấy các đa thức x^2 , $(x+1)^2$, $(x+2)^2$, $(x+3)^2$ có nghiệm lần lượt là $0, -1, -2, -3$.

Mặt khác $x^2 + (x+1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ và } (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ và } x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ và } x = -1$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy đa thức $x^2 + (x+1)^2$ không có nghiệm

Làm tương tự trên các đa thức:

$x^2 + (x+2)^2$, $x^2 + (x+3)^2$, $(x+1)^2 + (x+2)^2$, $(x+1)^2 + (x+3)^2$, $(x+2)^2 + (x+3)^2$ cũng không có nghiệm.

Bài 26. Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(20)P(11) = 2013$. Chứng minh rằng đa thức $P(x) - 8$ không có nghiệm nguyên.

Giải

Giả sử đa thức $P(x) - 8$ có nghiệm nguyên a

Khi đó $P(x) - 8 = (x-a)Q(x)$ ($Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên)

Suy ra $P(20) = (20-a)Q(20) + 8$

$$P(11) = (11-a)Q(11) + 8$$

$P(20)P(11) = 2013$ là số lẻ

$\Rightarrow P(20), P(11)$ là các số lẻ

$\Rightarrow 20 - a, 11 - a$ là các số lẻ

$\Rightarrow (20 - a) - (11 - a) = 9$ là số chẵn điều này vô lí!

Điều giả sử trên sai

Vậy đa thức $P(x) - 8$ không có nghiệm nguyên.

Bài 27. Cho đa thức $P(x)$

$$P(x) = (a + 9)x^3 + (b + 6)x + 2013$$

(a, b là hằng số) và $P(-7) = 4$. Tính $P(7)$

Giải

$$\text{Ta có } P(7) = (a + 9)7^3 + (b + 6).7 + 2013$$

$$\begin{aligned} P(-7) &= (a + 9)(-7)^3 + (b + 6)(-7) + 2013 \\ &= -(a + 9).7^3 - (b + 6).7 + 2013 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } P(7) + P(-7) = 2013 + 2013 = 4026$$

$$\text{Nên } P(7) = 4026 - P(-7) = 4026 - 4 = 4022$$

Bài 28. Cho đa thức $P(x)$

$$P(x) = x^{2014} + 2x^{2015} + 3x^{2014} + \dots + 2016x + 2017$$

Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Giải

Giả sử đa thức $P(x)$ có nghiệm nguyên x_0

$$\text{Ta có } x_0^{2016} + 2x_0^{2015} + 3x_0^{2014} + \dots + 2016x_0 + 2017 = 0$$

Nên x_0 là ước của 2017 $\Rightarrow x_0$ là số lẻ

Do đó các số $x_0^{2016}, 3x_0^{2014}, 5x_0^{2012}, \dots, 2017$ là các số lẻ (có 1009 số)

và các số $2x_0^{2015}, 4x_0^{2013}, \dots, 2016x_0$ là các số chẵn (có 1008 số)

Vậy $x_0^{2016} + 2x_0^{2015} + \dots + 2016x_0 + 2017$ là số lẻ nên không thể bằng 0.

Vậy đa thức $P(x)$ không thể có nghiệm nguyên.

Bài 29. Cho tổng gồm 2014 số hạng: $S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{2013}{5^{2013}} + \frac{2014}{5^{2014}}$

Chứng tỏ rằng: $S < \frac{1}{3}$

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{n}{5^n} = \frac{4n+1}{16 \cdot 5^{n-1}} - \frac{4n+5}{16 \cdot 5^n} \quad (*)$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Thật vậy } \frac{4n+1}{16 \cdot 5^{n-1}} - \frac{4n+5}{16 \cdot 5^n} = \frac{20n+5 - 4n-5}{16 \cdot 5^{n-1}} = \frac{16n}{16 \cdot 5^{n-1}} = \frac{n}{5^{n-1}}$$

Thay n lần lượt từ 1 đến 2014 vào (*) ta có:

$$S = \left(\frac{5}{16} - \frac{9}{16.5} \right) + \left(\frac{9}{16.5} - \frac{13}{16.5} \right) + \dots + \left(\frac{5057}{16.5^{2013}} - \frac{5061}{16.5^{2014}} \right)$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{5061}{16.5^{2014}} < \frac{5}{16} < \frac{1}{3}$$

Vậy $S < \frac{1}{3}$

Bài 30. Chứng minh rằng số các chữ số của hai số:
 $2008^{2009} + 2^{2009}$ và 2008^{2009} bằng nhau.

Giai

Giả sử số $a = 2008^{2009}$ có n chữ số thì $10^{n-1} \leq 2008^{2009} < 10^n$. Từ đó $10^n > 2008^{2009} \geq (10^3)^{2009}$ nên $n > 6027$

Số $b = 2008^{2009} + 2^{2009} > a \geq 10^{n-1}$ nên số b có ít nhất n chữ số.

Do đó số b có ít nhất $n+1$ chữ số thì $b \geq 10^n$

Nên $2008^{2009} < 10^n \leq 2008^{2009} + 2^{2009}$

$$\Rightarrow (2.1004)^{2009} < (2.5)^n \leq (2.1004)^{2009} + 2^{2009}$$

$$\Rightarrow 2^{2009}.1004^{2009} < 2^n.5^n \leq 2^{2009}.1004^{2009} + 2^{2009}$$

Vì $n > 6027$ nên có: $1004^{2009} < 2^{n-2009}.5^n \leq 1004^{2009} + 1$

1004^{2009} và $1004^{2009} + 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp mà $2^{n-2009}.5^n$ cũng là số tự nhiên lớn hơn 10 nên chỉ có thể là:

$$2^{n-2009}.5^n = 1004^{2009} + 1$$

Nhưng đẳng thức này không thể xảy ra vì về trái là số chẵn còn về phải là số lẻ.

Như vậy số b có n chữ số, nghĩa là hai số 2008^{2009} và $2008^{2009} + 2^{2009}$ có số các chữ số bằng nhau

Bài 31. Cho 2013 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2013}} = 1007.$$

Chứng minh rằng ít nhất hai trong 2013 số tự nhiên trên bằng nhau.

Giai

Giả sử không có hai số nào trong 2013 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ là bằng nhau

$$\begin{aligned} \text{Do đó, ta có: } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2013}} &\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013} \\ &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + 1006 = 1007 \end{aligned}$$

2012 số hạng

Mâu thuẫn giả thiết.

Vậy ít nhất hai trong 2013 số tự nhiên đã cho bằng nhau.

Bài 32. Các số tự nhiên từ 1 đến 9 được điền vào các ô vuông 3×3 sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng nhau. Hỏi số ở ô vuông nằm chính giữa bằng bao nhiêu?

Giải

Gọi các số $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ là các số thỏa mãn yêu cầu của đề bài được điền vào các ô vuông như hình vẽ có tổng mỗi hàng mỗi cột, mỗi đường chéo đều bằng m

Ta có:

$$a + b + c = m, d + e + f = m, g + h + i = m.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } a + b + c + d + e + f + g + h + i &= 45 \\ &= m + m + m \Rightarrow m = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta còn có } a + e + i &= c + e + g = b + e + h \\ &= d + e + f = m \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } a + e + i + c + e + g + b + e + h + d + e + f = 4m$$

$$\Rightarrow (a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 3e = 4m$$

$$45 + 3e = 4 \cdot 15$$

$$3e = 15 \Leftrightarrow e = 5$$

Vậy số ở ô vuông chính giữa là 5

Bài 33. Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \dots + \frac{1}{2013.2015} + \frac{1}{2014.2016} < \frac{3}{4}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \dots + \frac{1}{2013.2015} + \frac{1}{2014.2016} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{4.6} + \dots + \frac{2}{2013.2015} + \frac{2}{2014.2016} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2013.2015} \right) + \left(\frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \dots + \frac{2}{2014.2016} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2015} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2016} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2015} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2016} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2.2015} - \frac{1}{2.2016} < \frac{3}{4} \end{aligned}$$



a	b	c
d	e	f
g	h	i

Bài 34. Cho a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Giải

Nếu $a + b + c = 0$ thì $a = b = c = 0$

Ta có: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$ đúng (vì $0 \leq 2$)

Xét $a + b + c \neq 0$

Ta có $a \leq 1, (b - 1)(c - 1) \leq 0, bc \geq 0$

Do đó $a \leq 1, b + c \leq bc + 1, bc \geq 0$

$$\text{Nên } 0 < a + b + c \leq 2bc + 2 \Rightarrow \frac{1}{bc+1} \leq \frac{2}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{bc+1} \leq \frac{2a}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{ca+1} \leq \frac{2b}{a+b+c} \quad (2), \quad \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Bài 35.

a) Chứng minh rằng $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc$$

Giải

$$\text{a)} (x + y)(x - y) = x(x - y) + y(x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

b) a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nên $a + b > c, a + c > b,$

$b + c > a$ (Bất đẳng thức tam giác)

$$\Rightarrow a + b - c > 0, a - b + c > 0, -a + b + c > 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } a^2 - (b - c)^2 \leq a^2, b^2 - (c - a)^2 \leq b^2, c^2 - (a - b)^2 \leq c^2$$

$$\text{Do đó: } (a + b - c)(a - b + c) \leq a^2, (b + c - a)(b - c + a) \leq b^2;$$

$$(c + a - b)(c - a + b) \leq c^2$$

Kết hợp (*), ta có:

$$[(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)]^2 \leq (abc)^2$$

$$\text{Vậy } (a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc$$

Bài 36. Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq \frac{a - b}{b+5} + \frac{b - c}{c+5} + \frac{c - a}{a+5}$$

Giải

$$\text{Ta có } (a + b + c) - \left(\frac{a - b}{b+5} + \frac{b - c}{c+5} + \frac{c - a}{a+5} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(a - \frac{a-b}{b+5} \right) + \left(b - \frac{b-c}{c+5} \right) + \left(c - \frac{c-a}{a+5} \right) \\
 &= \frac{ab+4a+b}{b+5} + \frac{bc+4b+c}{c+5} + \frac{ca+4c+a}{a+5} \geq 0
 \end{aligned}$$

(vì $a, b, c \geq 0$)

$$\text{Vậy } a + b + c \geq \frac{a}{b+5} + \frac{b}{c+5} + \frac{c}{a+5}$$

Bài 37. Tìm x, y biết rằng:

$$|x - 2013| + |x - 2014| + |y - 2015| + |x - 2016| = 3$$

Giải

Ta có: $|A| = |-A| \geq A$

$$\text{Do vậy } |x - 2013| + |x - 2016| = |x - 2013| + |2016 - x|$$

$$\geq x - 2013 + 2016 - x = 3$$

Kết hợp với giả thiết ta có:

$$|x - 2014| + |y - 2015| \leq 0$$

Điều này chỉ xảy ra khi:

$$|x - 2014| = 0 \text{ và } |y - 2015| = 0$$

$$x = 2014 \text{ và } y = 2015$$

$$x = 2014 \text{ và } y = 2015$$

Thay vào $|x - 2013| + |x - 2014| + |y - 2015| + |x - 2016| = 3$, ta thấy thỏa mãn.

Vậy $x = 2014, y = 2015$.

Bài 38. Cho a, b, c thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 + 3} + \frac{c^2 - a^2}{b^2 + 4} + \frac{a^2 - b^2}{c^2 + 5}$$

Tính giá trị của $2012ab + 2013c$

Giải

$$\text{Từ } a^2 + b^2 + c^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 + 3} + \frac{c^2 - a^2}{b^2 + 4} + \frac{a^2 - b^2}{c^2 + 5}$$

$$\text{Ta có: } a^2 - \frac{a^2 - b^2}{c^2 + 5} + b^2 - \frac{b^2 - c^2}{a^2 + 3} + c^2 - \frac{c^2 - a^2}{b^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2(c^2 + 4a^2 + b^2)}{c^2 + 5} + \frac{a^2b^2 + 2b^2 + c^2}{a^2 + 3} + \frac{b^2c^2 + 3c^2 + a^2}{b^2 + 4} = 0$$

Do đó $a = b = c = 0$

Vậy $2012ab + 2013c = 0$

Bài 39. Phản nguyên của số x , kí hiệu là $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] = n$$

Giải

Nếu $n = 2k$ thì $\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] = k + k = 2k = n$

Nếu $n = 2k + 1$ thì $\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] = \left[k + \frac{1}{2} \right] + (k + 1) = k + k + 1 = 2k + 1 = n$

Vậy $\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] = n$

Bài 40. Tìm các số nguyên dương n để: $n^2 + 11n + \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n}{2} \right]$ là số nguyên tố.

Giải

Ta chứng minh được: $\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] = n$

Do đó $n^2 + 11n + \left[\frac{n+1}{2} \right] + \frac{n}{2} = n^2 + 11n + n = n(n + 12)$ là số nguyên tố nên $n = 1$.

Bài 41. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có:

$$\left[\frac{n+3}{4} \right] + \left[\frac{n+5}{4} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] = n + 1$$

Giải

Ta có: $\left[\frac{n+3}{4} \right], \left[\frac{n+5}{4} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] \leq \frac{n+3}{4} + \frac{n+5}{4} + \frac{n}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{n+3}{4} \right] + \left[\frac{n+5}{4} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] \leq n + 2$$

Mặt khác $\left[\frac{n+3}{4} \right] + \left[\frac{n+5}{4} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] > \frac{n+3}{4} - 1 + \frac{n+5}{4} - 1 + \frac{n}{2} - 1$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{n+3}{4} \right] + \left[\frac{n+5}{4} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] > n - 1$$

Ta có: $n - 1 < \left[\frac{n+3}{4} \right] + \left[\frac{n+5}{4} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] \leq n + 2$

Vì $n + 3 = (n - 1) + 4$, $n + 5 = (n + 1) + 4$. Do đó:

$\frac{n+3}{4}, \frac{n+5}{4}$ không thể đồng thời là số nguyên

Nên $\left[\frac{n+3}{4} \right] + \left[\frac{n+5}{4} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] \leq n+1$

Với $n = 5$ ta có: $\left[\frac{5+3}{4} \right] + \left[\frac{5+5}{4} \right] + \left[\frac{5}{2} \right] = 2 + 2 + 2 = 6$

Như vậy: $\left[\frac{n+3}{4} \right] + \left[\frac{n+5}{4} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] = n$

Vậy $\left[\frac{n+3}{4} \right] + \left[\frac{n+5}{4} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] = n+1$

Bài 42. Có 3 trường học, mỗi trường có n học sinh. Mỗi một học sinh quen với ít nhất $n+1$ học sinh từ hai trường khác. Chứng minh rằng có thể chọn ra từ mỗi trường một bạn sao cho ba học sinh được chọn đều quen nhau.

Giải

Gọi A là học sinh có nhiều bạn quen nhất ở một trường khác. Gọi số bạn này là k.

Giả sử A ở trường I và những bạn quen A là B₁, B₂, ..., B_k ở trường II.

Ta có: $k \geq \frac{n+1}{2}$

Vì có ít nhất 1 học sinh C ở trường III quen với A. Giả sử C không quen với B, ta có C quen với nhiều nhất $n-k$ học sinh ở trường II. Suy ra C quen với ít nhất $(n+1) - (n-k) = k+1$ học sinh ở trường I. Điều này mâu thuẫn với cách chọn A

Vậy C phải quen với 1 bạn B nào đó.

Ta có A, B, C là ba học sinh đều một quen nhau.

Bài 43. Trong một kỳ thi, 60 thí sinh phải giải 3 bài toán. Khi kết thúc kỳ thi, người ta nhận thấy rằng: với hai thí sinh bất kỳ luôn có ít nhất một bài toán mà cả hai thí sinh đó đều giải được

Chứng minh rằng:

- a) Nếu có một bài toán mà mọi thí sinh đều không giải được thì phải có một bài toán khác mà mọi thí sinh đều giải được.
- b) Có một bài toán mà có ít nhất 40 thí sinh giải được.

Giải

Gọi ba bài toán là A, B, C

- a) Không mất tính tổng quát, giả sử mọi thí sinh đều không giải được bài toán A.
- Nếu mọi thí sinh đều không giải được bài toán B thì từ giả thiết ta có mọi thí sinh đều giải được bài toán C

- Nếu mọi thí sinh đều giải được bài toán B và bài toán C thì ta có mọi thí sinh đều giải được bài toán B, bài toán C.
- Nếu có một thí sinh chỉ giải được một bài toán giả sử giải được bài toán B Xét học sinh này với tất cả học sinh còn lại. Theo giả thiết, có mọi thí sinh đều giải được bài toán B.

Vậy nếu có một bài toán mà mọi thí sinh đều không giải được thì phải có một bài toán khác mà mọi thí sinh đều giải được

- b) Theo giả thiết ta có mọi thí sinh chỉ giải đúng một bài toán. Nếu có một thí sinh chỉ giải đúng một bài toán, xét học sinh này với tất cả các học sinh còn lại, ta có mọi thí sinh đều giải được bài toán đó. Ta chỉ còn xét trường hợp mà mọi thí sinh giải được ít nhất hai bài toán.

Gọi số thí sinh giải được A, B mà không giải được C là x, số thí sinh giải được B, C mà không giải được A là y, số thí sinh giải được A, C mà không giải được B là z, số thí sinh giải được cả A, B, C là t ($x, y, z, t \in \mathbb{N}$)

$$\text{Ta có } x + y + z + t = 60 \quad (1)$$

Cách 1: Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán

$$\text{Ta có: } x + z + t < 40; x + y + t < 40; y + z + t < 40$$

$$\text{Do đó } x + z + t + x + y + t + y + z + t < 40 + 40 + 40$$

$$2(x + y + z + t) + t < 120$$

Kết hợp (1) có $t < 0$. Điều này vô lý! Điều giả sử ở trên là sai.

Vậy có một bài toán mà có ít nhất 40 thí sinh giải được

Cách 2: Ta có số học sinh không giải được A là y, không giải được B là z, không giải được C là x.

$$\text{Nếu } x > 20, y > 20, z > 20 \text{ thì } x + y + z > 60. \text{ Mâu thuẫn} \quad (1)$$

Do đó trong ba số x, y, z phải có một số không vượt quá 20

Như vậy có một bài toán mà có nhiều nhất 20 thí sinh không giải được. Do đó bài toán này có ít nhất 40 thí sinh giải được.

Vậy có một bài toán mà có ít nhất 40 thí sinh giải được.

B/ HÌNH HỌC

Bài 44. Ở hình vẽ, các tam giác ABC, ACD,

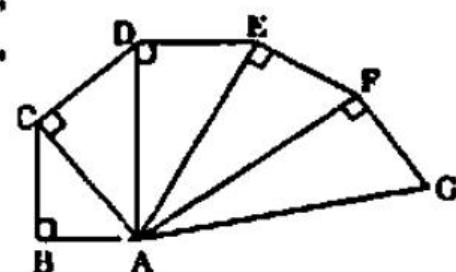
ADE, AEF, AFG lần lượt vuông tại B, C,

D, E, F. Biết rằng:

$$AB = BC = CD = DE = EF = FG = 1$$

Tính tổng:

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 + AF^2 + AG^2$$



Giải

$\triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow AD^2 = AC^2 + CD^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\text{Nên } AD^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$\triangle ADE$ vuông tại $D \Rightarrow AE^2 = AD^2 + DE^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\text{Nên } AE^2 = 2 + 1 = 3$$

$\triangle AEF$ vuông tại $E \Rightarrow AF^2 = AE^2 + EF^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\text{Nên } AF^2 = 3 + 1 = 4$$

$\triangle AFG$ vuông tại $F \Rightarrow AG^2 = AF^2 + FG^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\text{Nên } AG^2 = 4 + 1 = 5$$

$$\text{Vậy } AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 + AF^2 + AG^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Bài 45. Cho tam giác đều ABC , M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA : MB : MC = 3 : 4 : 5$. Vẽ $AH \perp BM$ tại H .

Chứng minh rằng: $AH = \frac{3}{10} MC$.

Giải

Vẽ tam giác đều ABD (D và A cùng nằm trên một mặt phẳng bờ MB ,

$$\text{Đặt } \frac{MA}{3} = \frac{MB}{4} = \frac{MC}{5} = a$$

$$\Rightarrow MA = 3a, MB = 4a, MC = 5a.$$

$\triangle ABCM \sim \triangle BAD$ (c.g.c)

$$\text{Nên } AD = MC = 5a$$

$$\triangle MDA$$
 có $MD^2 + MA^2 = AD^2 (= 25a^2)$

$\Rightarrow \triangle MDA$ vuông tại M .

$$\text{Do đó } \widehat{AMB} = \widehat{AMD} + \widehat{DMB} = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AMH} = 30^\circ$$

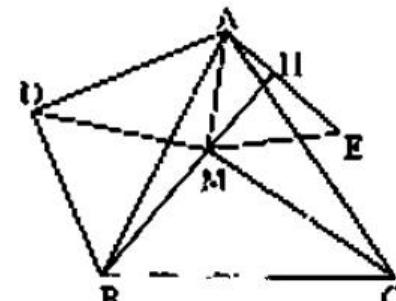
E là điểm trên tia đối của tia HA sao cho $HE = HA$.

$\triangle MAE$ cân tại M có $\widehat{AME} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \triangle MAE$$
 đều $\Rightarrow AE = MA \Rightarrow AH = \frac{1}{2} MA$

$$\text{Mà } MA = \frac{3}{5} MC$$

$$\text{Do đó } AH = \frac{3}{10} MC$$



Bài 46. Cho tam giác ABC cân tại A. Qua A vẽ đường thẳng d song song với BC. Trên đường thẳng d, các cạnh AB, AC lần lượt lấy D, E, F sao cho C và D cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB và $DE = DF$.

Chứng minh rằng: $\widehat{AED} = \widehat{AFD}$

Giải

Vẽ $DM \perp AB$ tại M, $DN \perp AC$ tại N

Ta có $\widehat{MAD} = \widehat{ABC}$ (đồng vị và d // BC);

$\widehat{NAD} = \widehat{ACB}$ (so le trong và d // BC);

$\widehat{NAD} = \widehat{ACB}$ (so le trong và d // BC);

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ABC cân tại A)

Do đó $\widehat{MAD} = \widehat{NAD} \Rightarrow DM = DN$

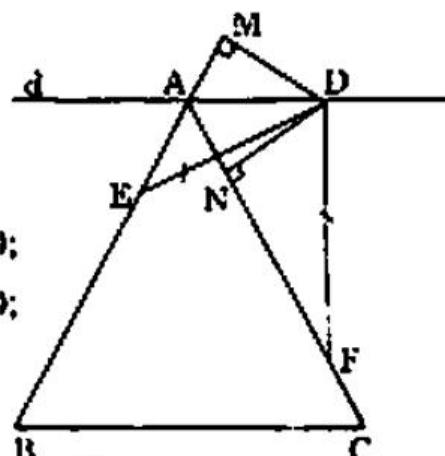
Xét $\triangle MDE$ ($DME = 90^\circ$) và $\triangle NDF$ ($DNF = 90^\circ$)

Có $DE = DF$ (gt), $DM = DN$ (chứng minh trên)

Do đó $\triangle MDE \cong \triangle NDF$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

Vậy $\widehat{MED} = \widehat{MFD}$

Hay $\widehat{AED} = \widehat{AFD}$



Bài 47. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$, AD là đường phân giác.

Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt BC tại E. Tính giá trị của:

$$\frac{CE}{AB + AC - BC}$$

Giải

Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$

Ta có $\widehat{BAD} + \widehat{EAF} = \widehat{CAD} + \widehat{EAC} (= 90^\circ)$

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (AD là tia phân giác \widehat{BAC})

Nên $\widehat{EAF} = \widehat{EAC}$

Xét $\triangle AFE$ và $\triangle ACE$ có:

$AF = AC$, AE (cạnh chung), $\widehat{EAF} = \widehat{EAC}$

Do đó $\triangle AFE \cong \triangle ACE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACE}$

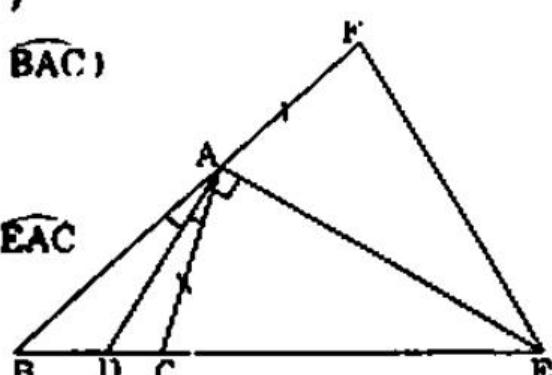
Mà $\widehat{ACE} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$

Do đó $\widehat{AFE} = 70^\circ$

$\triangle BEF$ có $\widehat{B} + \widehat{BFE} + \widehat{BEF} = 180^\circ$

$$40^\circ + 70^\circ + \widehat{BEF} = 180^\circ$$

$$\widehat{BEF} = 70^\circ$$



$\triangle BEF$ có $\widehat{BFE} = \widehat{BEF}$ ($\approx 70^\circ$) $\Rightarrow \triangle BEF$ cân tại B

$\Rightarrow BE = BF$. Do đó $BC + CE = AB + AC$

$\Rightarrow CE = AB + AC - BC$

Vậy $\frac{CE}{AB + AC - BC} = 1$

Bài 48. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) với hai đường cao BD, CE.

Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BD = h_b$, $CE = h_c$. Chứng minh rằng:

$$c^n + h_c^n \leq b^n + h_b^n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Giai

Trường hợp: $\widehat{BAC} = 90^\circ$

Ta có $c = h_b$, $b = h_c$.

Do đó $c^n + h_c^n = b^n + h_b^n$

Trường hợp: $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$

Ta có: $c.h_c = b.h_b$ ($= 2S_{ABC}$)

$$\text{Nên } \frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c}{b}\right)^n = \left(\frac{h_b}{h_c}\right)^n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

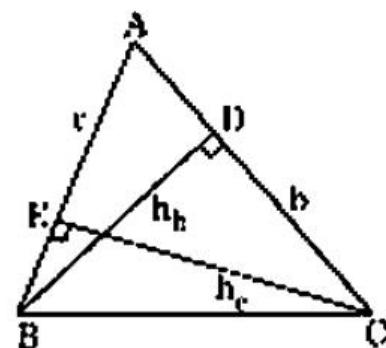
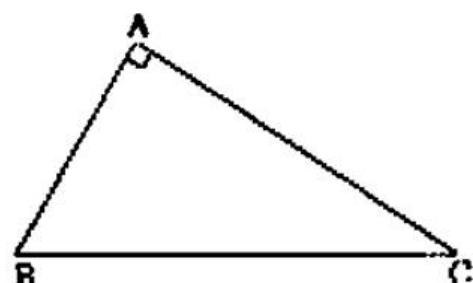
$$\Rightarrow \frac{c^n}{b^n} = \frac{h_b^n}{h_c^n} = \frac{c^n - h_b^n}{b^n - h_c^n}$$

Do $b > h$, nên $b^n > h_c^n \Rightarrow b^n - h_c^n > 0$

$$\text{Mà } c^n < b^n \text{ (vì } c < b\text{)} \text{ nên } \frac{c^n}{b^n} < 1$$

$$\text{Ta có: } \frac{c^n - h_b^n}{b^n - h_c^n} < 1 \Rightarrow c^n - h_b^n < b^n - h_c^n \Rightarrow c^n + h_c^n < b^n + h_b^n$$

Vậy $c^n + h_c^n \leq b^n + h_b^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$



Bài 49. Cho tam giác ABC vuông tại A. I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$CI^2 = \frac{(BC - AB)^2 + AC^2}{2}$$

Giai

Vẽ CD $\perp BI$ tại D, CD cắt AB tại E

$\triangle BCE$ cân tại B

Nên BD là đường trung tuyến của tam giác BCE

Do đó $BE = BC$, $CE = 2CD$

Mặt khác:

$$\bar{B}\bar{C} = 180^\circ - (\bar{B}\bar{C} + \bar{C}\bar{B})$$

$$= 180^\circ - \left(\frac{\bar{A}\bar{B}}{2} + \frac{\bar{A}\bar{C}}{2} \right) = 135^\circ$$

$\Rightarrow \bar{D}\bar{I}\bar{C} = 45^\circ$. $\triangle DIC$ vuông cân tại D .

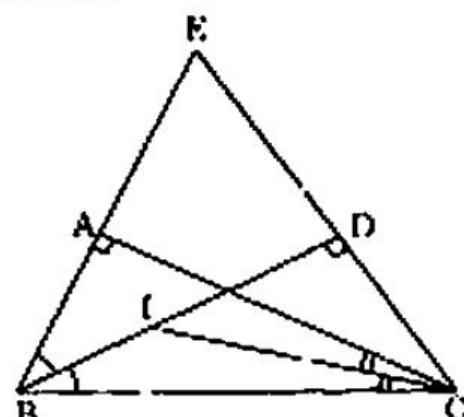
Do đó $CI^2 = DI^2 + CD^2 = 2CD^2$

Ta có: $AE = BE - AB = BC - AB$

$\triangle ACE$ vuông tại $A \Rightarrow CE^2 = AE^2 + AC^2$

$$\Rightarrow 4CD^2 = (BC - AB)^2 + AC^2 \Rightarrow 2CI^2 = (BC - AB)^2 + AC^2$$

$$\text{Vậy } CI^2 = \frac{(BC - AB)^2 + AC^2}{2}$$



Bài 50. Cho tam giác ABC có $\bar{A}\bar{B}\bar{C} = 40^\circ$, $\bar{A}\bar{C}\bar{B} = 30^\circ$. Bên ngoài tam giác đó dựng tam giác ADC có $\bar{A}\bar{C}\bar{D} = \bar{C}\bar{A}\bar{D} = 50^\circ$. Chứng minh rằng tam giác BAD cân.

Giải

Vẽ $AE \perp BC$ tại E , $DH \perp AC$ tại H

Trong tam giác vuông AEC có $\bar{A}\bar{C}\bar{E} = 30^\circ$.

Ta chứng minh được:

$$AE = \frac{1}{2}AC \quad (1)$$

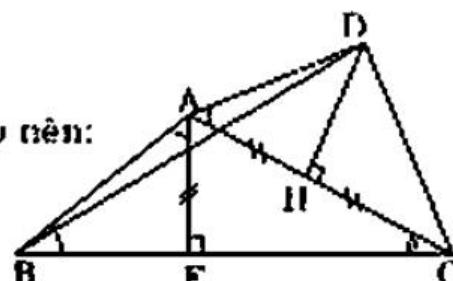
Tam giác ADC cân tại D , DH là đường cao nên:

$$AH = \frac{1}{2}AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AH$

Mà $\bar{B}\bar{A}\bar{E} = \bar{D}\bar{A}\bar{H} = 50^\circ$ nên $\triangle ABE \cong \triangle ADH$, do đó $AB = CD$

Vậy tam giác BAD cân tại A



Bài 51. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C vẽ tam giác ABD vuông cân tại B . Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD . Vẽ CM vuông góc với AE tại M . Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng CM , K là giao điểm của BM và DN . Tính số đo góc BKD .

Giải

Từ giả thiết suy ra $AB = AC = DB = DC$ và $\bar{C}\bar{D}\bar{B} = \bar{D}\bar{C}\bar{A} = 90^\circ$

Vẽ $BH \perp AE$ ($H \in AE$)

Gọi P là giao điểm của CM và AB

Vì $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, CA = AB.

$$\widehat{ACP} = \widehat{BAE} (90^\circ - \widehat{MAC})$$

Nên $\Delta ABE \cong \Delta CAP$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AP = BE = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} BA, \text{ suy ra } AP = BP$$

Ta thấy tam giác PHA cân tại P, mà PM \perp HA nên HM = AM (1)

Ta lại có $\Delta ABH = \Delta CAM$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow BH = AM$ (2)

Từ (1) và (2) có HM = HB, suy ra tam giác HBM vuông tại H

Nên $\widehat{BHM} = 45^\circ$

Theo trên AH = CM, suy ra $AM = CN \left(= \frac{1}{2} CM \right)$

Do đó $\Delta CDN \cong \Delta ACM$

$$\Rightarrow \widehat{DNC} = \widehat{CMA} = 90^\circ \Rightarrow DN \perp CP$$

Mà EM \perp CP

$$\text{Do đó } DN \vee EM \Rightarrow \widehat{BKD} = \widehat{BME} = 45^\circ$$

Vậy $\widehat{BKD} = 45^\circ$

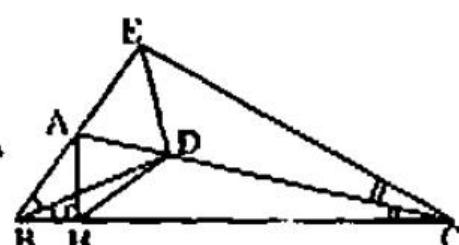
Bài 32. Cho tam giác ABC có góc B và góc C nhọn. Vẽ đường phân giác BD và đường cao AH của tam giác đó. Biết rằng $\widehat{ADB} - \widehat{AHD} = \alpha$.
Tính số đo góc α .

Giải

Ta có $\alpha = \widehat{ADB}$ (gt)

$$\text{Do đó } \alpha = \widehat{ADB} = \widehat{DBC} + \widehat{BCA} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \widehat{BCA}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + 2\widehat{BCA} = 2\alpha.$$



Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $\widehat{ACE} = \widehat{ACB}$

Tam giác EBC có D là giao điểm ba đường phân giác và:

$$\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{BEC} = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \widehat{DEC} = \frac{\widehat{BEC}}{2} = 90^\circ - \alpha$$

$\Rightarrow \widehat{DHC}$ (do $\widehat{AHD} = \alpha$).

Suy ra $\Delta DEC \cong \Delta DHC$ (g.c.g) $\Rightarrow CE = CH$

Ta có $\Delta CEA \cong \DeltaCHA$ (c.g.c) nên $\widehat{CEA} = \widehat{CHA} = 90^\circ$, $\widehat{AHD} + \widehat{AED} = 90^\circ$.

$$\text{Do đó } \alpha = \widehat{AHD} = \widehat{AED} = \frac{\widehat{AEC}}{2} = 45^\circ$$

Vậy $\alpha = 45^\circ$

Bài 53. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Giả sử trong tam giác có điểm M thỏa mãn điều kiện $\widehat{MBA} = \widehat{MAC} = \widehat{MCB}$. Tính $MA : MB : MC$.

Giải

Vẽ CN \perp AM tại N. Ta có $\widehat{NMC} = \widehat{A_1} + \widehat{C_2} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 45^\circ$

Suy ra tam giác MNC vuông cân tại N, do đó $MN = CN$.

Mặt khác: $\widehat{B_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BMA} = 90^\circ$$

Xét hai tam giác vuông ABM và CAN có

$$AB = AC, \widehat{B_1} = \widehat{A_1}$$

Do đó $\triangle ABM \cong \triangle CAN$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra $MB = AN, MA = CN$

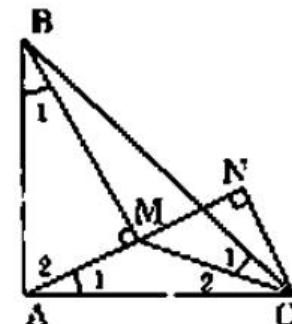
$$\text{Vậy } MA = MN = \frac{1}{2} AN \Rightarrow MA = \frac{1}{2} MB$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông cân MNC, ta có:

$$MC^2 = 2MN^2 \Rightarrow MC = MN\sqrt{2} \text{ hay } MC = MA\sqrt{2}.$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } MA : MB = 1 : 2, MA : MC = 1 : \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } MA : MB : MC = 1 : 2 : \sqrt{2}$$



Bài 54. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia AC lấy hai điểm E và F sao cho $\widehat{ABE} = 15^\circ$ và $CE = CF$. Tính số đo của góc CBF.

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ BE chứa điểm F, vẽ tam giác đều BED.

$$\text{Ta có: } \widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CBD} = 30^\circ$$

Khi đó BC là tia phân giác góc EBD nên
 $CD = CE = CF$ suy ra tam giác DEF
 vuông cân tại D

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } \widehat{DEF} &= 180^\circ - \widehat{AEB} - \widehat{BED} \\ &= 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ \end{aligned}$$

Do đó $BC \parallel DF$ (vì $\widehat{BCA} = \widehat{DEF} = 45^\circ$)

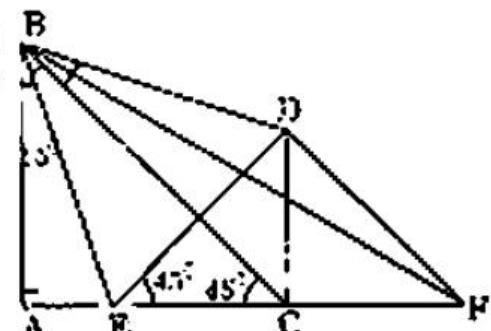
Ta có: tam giác DBF cân tại D (vì $DB = DF = DE$) và:

$$\widehat{BDF} = \widehat{BDE} + \widehat{EDF} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

$$\text{Nên: } \widehat{DFB} = \widehat{DBF} = 15^\circ$$

$$\text{Do vậy: } \widehat{CBF} = \widehat{DFB} = 15^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{CBF} = 15^\circ$$



Bài 55. Cho tam giác đều ABC có AD, BE, CF là các đường cao. Điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Gọi I, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên AD, BE, CF.

Chứng minh rằng $AI + BK + CL$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Giải

Ta có $AD = BE = CF = h$, không đổi và $AB = BC = AC$.

Vẽ $MT \perp BC$ tại T, $MR \perp AC$ tại R, $MV \perp AB$ tại V.

Chứng minh được:

$$MT = ID = AD - AI = h - AI$$

$$\text{Tương tự } MR = h - BK, MV = h - CL.$$

Mặt khác:

$$S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}$$

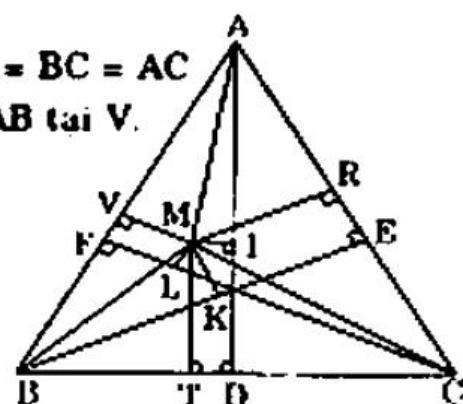
$$\text{Do đó } \frac{1}{2} BC \cdot MT + \frac{1}{2} AC \cdot MR + \frac{1}{2} AB \cdot MV = \frac{1}{2} BC \cdot AD$$

$$\text{Nên } MT + MR + MV = AD = h$$

$$\text{Vì vậy } h = MI + h - BK + h - CL = h$$

$$\text{Do đó } AI + BK + CL = 2h, \text{ không đổi.}$$

Vậy tổng $AI + BK + CL$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.



Bài 56. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$), AH là đường cao. D là điểm nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A và tam giác DBC cân tại D. Đường trung trực cùn đoạn thẳng AB cắt BC tại E. Chứng minh rằng:

a) $DE \perp BC$

b) BD, AH, DH có độ dài bằng nhau là ba cạnh của một tam giác vuông.

Giải

a) E thuộc đường trung trực của AB (gt)

$$\Rightarrow AE = BE \Rightarrow \triangle ABE \text{ cân tại } E$$

$$\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{EBA}$$

$$\text{Mà } \widehat{EAB} + \widehat{EAC} = \widehat{EBA} + \widehat{ECA} = 90^\circ$$

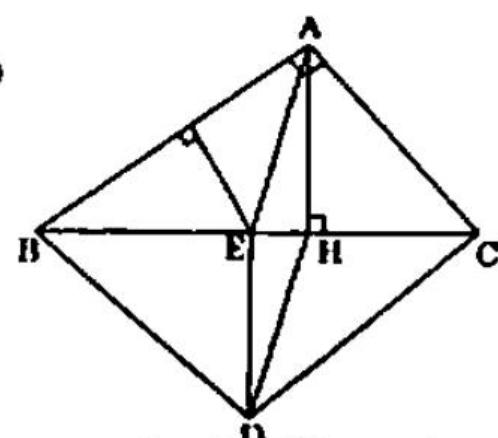
$$\text{Nên } \widehat{EAC} = \widehat{ECA} \Rightarrow \triangle EAC \text{ cân tại } E$$

$$\Rightarrow AE = CE$$

$$\text{Ta có: } BE = CE (= AE)$$

$\triangle BDC$ cân tại D có DE là đường trung tuyến nên DE cũng là đường cao.

Vậy $DE \perp BC$



b) $\triangle DBE$ vuông tại $E \Rightarrow BD^2 = BE^2 + DE^2$ (định lý Py-ta-go)

Tương tự có $DH^2 = DE^2 + EH^2$, $AE^2 = AH^2 + EH^2$.

Do đó: $BD^2 = BE^2 + DE^2 = AE^2 + DH^2 - EH^2$

$$\Rightarrow AE^2 - EH^2 + DH^2 = AH^2 + DH^2$$

$$\Rightarrow BD^2 = AH^2 + DH^2$$

Vậy BD , DH , AH có độ dài bằng độ dài ba cạnh của một tam giác vuông

Bài 57. Tìm tam giác vuông sao cho tam giác vuông này có thể cắt ra thành 5 tam giác vuông nhỏ bằng nhau

Giai

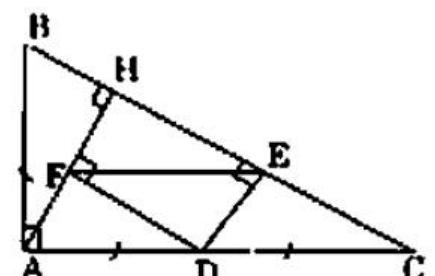
Xét tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2AB$

Vẽ $AH \perp BC$ tại H

Gọi D là trung điểm cạnh AC .

Vẽ $DE \perp BC$ tại E , $DF \perp AH$ tại F

Để chứng minh được 5 tam giác vuông HBA , FAD , EDC , DEF , HFE bằng nhau.



Vậy tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2AB$ là tam giác vuông cần tìm

Bài 58. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} < 90^\circ$. Vẽ phia ngoài tam giác ABC dựng các tam giác đều ABD , BCE . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD và M là trung điểm của cạnh AC .

Chứng minh rằng $GM \perp EM$.

Giai

Trên tia đối của tia ME lấy F sao cho $MF = ME$

Xét $\triangle MAF$ và $\triangle MCE$ có $MA = MC$,

$MF = ME$, $\widehat{AMF} = \widehat{CME}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle MAF = \triangle MCE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AF = CE$, $\widehat{MAF} = \widehat{MCE}$

Ta có G là trọng tâm tam giác đều

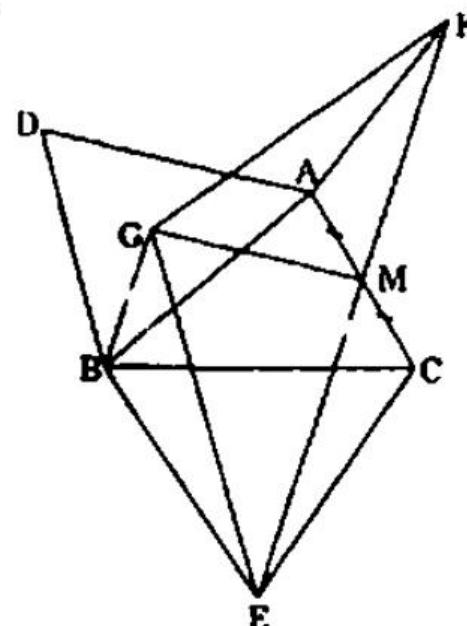
$\Rightarrow GA = GB$

Mặt khác:

$$\widehat{GAF} = 360^\circ - \widehat{GAB} - \widehat{BAC} - \widehat{MAF} = 360^\circ - 30^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{MCE}$$

$$\Rightarrow 360^\circ - 30^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} - 60^\circ = 270^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB})$$

$$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{ABC} = \widehat{GBE}$$



Xét $\triangle AGF$ và $\triangle BG E$ có $GA = GB$, $AF = BE$ ($= CE$), $\widehat{GAF} = \widehat{GBE}$

Do đó $\triangle AGF = \triangle BG E$ (c.g.c) $\Rightarrow GF = GE \Rightarrow \triangle GEF$ cân tại G .

$\triangle GEF$ cân tại G , GM là đường trung tuyến nên GM cũng là đường cao.
Vậy $GM \perp EM$.

Bài 59. Cho tam giác ABC cân tại A , BD là đường trung tuyến. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{ABD}$.

Chứng minh rằng: $DAE = BCE$

Giải

Vẽ $AM \perp BD$, tại M , $CN \perp BD$ tại N , $CK \perp AE$ tại K

Xét $\triangle MBA$ ($\widehat{BMA} = 90^\circ$) và $\triangle KAC$ ($\widehat{ACK} = 90^\circ$) có $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A), $\widehat{ABM} = \widehat{KAC}$ (gt)

Do đó $\triangle MBA = \triangle KAC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow AM = CK$$

Xét $\triangle MAD$ ($\widehat{AMD} = 90^\circ$) và $\triangle NCD$ ($\widehat{CND} = 90^\circ$) có $AD = CD$ (BD là đường trung tuyến), $\widehat{ADM} = \widehat{CDN}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle MAD = \triangle NCD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow AM = CN$$

Ta có $CN = CK$ ($= AM$) $\Rightarrow EC$ là tia phân giác \widehat{KEN}

$$\Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{NEC}$$

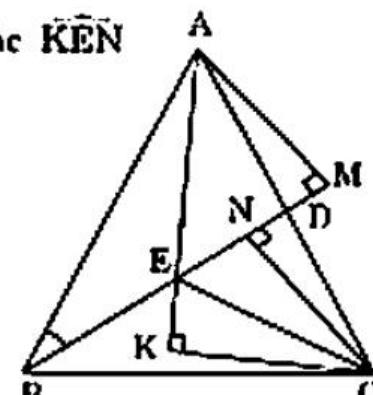
$$\Rightarrow \widehat{EAC} + \widehat{ACE} = \widehat{EBC} + \widehat{BCE}$$

$$\text{Nên } \widehat{ABE} + \widehat{ACE} = \widehat{EBC} + \widehat{BCE} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{ABE} + \widehat{EBC} = \widehat{ACE} + \widehat{BCE} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } \widehat{ABE} = \widehat{BCE}$$

$$\text{Vậy } \widehat{DAE} = \widehat{BCE} = \widehat{ABE}$$



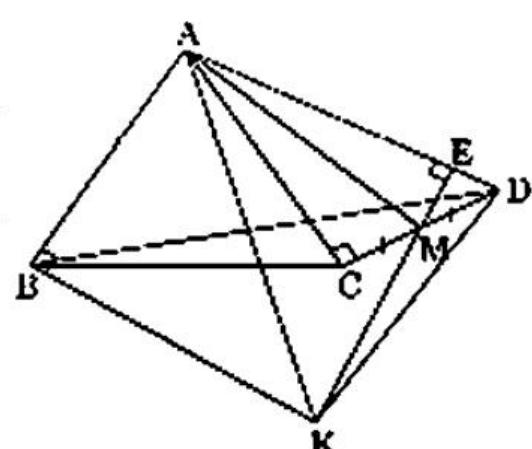
Bài 60. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên đường thẳng vuông góc với AC tại C lấy D (B, D nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC). Đường thẳng vuông góc với AB tại B và đường thẳng đi qua trung điểm M của CD vuông góc với AD tại E , cắt nhau tại K . Chứng minh rằng tam giác KBD cân.

Giải

Ta có $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A), $MC = MD$ (M là trung điểm của CD)

Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông, ta có:

$$\begin{aligned} KB^2 &= KA^2 - AB^2 = KA^2 - AC^2 \\ &= (KE^2 + AE^2) - (AM^2 - MC^2) \\ &= KE^2 + AE^2 - AM^2 + MC^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= KD^2 - ED^2 \\
 &+ AM^2 = ME^2 + AM^2 + MC^2 \\
 &= KD^2 - (ED^2 + ME^2) + MC^2 \\
 &= KD^2 - MD^2 + MC^2 = KD^2 \Rightarrow KB = KD
 \end{aligned}$$

Vậy tam giác KBD cân tại K

Bài 61. Cho tam giác ABC cân tại A. M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho: $\angle MAC = \angle MBA = \angle MCB$. Gọi N là trung điểm của cạnh AC. Chứng minh rằng ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Giải

Gọi K là giao điểm của BM và AC

Vẽ AD ⊥ BK tại D, CE ⊥ BK tại E, CF ⊥ AM tại F

Xét $\triangle DBA$ ($\angle BDA = 90^\circ$) và $\triangle FAC$ ($\angle AFC = 90^\circ$) có:

$$AB = AC (\triangle ABC \text{ cân tại } A), \angle DBA = \angle FAC \text{ (gt)}$$

Do đó $\angle DBA = \angle FAC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow AD = CF$$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$$\Rightarrow \angle MBA = \angle MBC = \angle MCB + \angle MCA \text{ và } \angle MBA = \angle MCB$$

Nên $\widehat{MBC} = \widehat{MCA}$

$$\Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{MCB} = \widehat{MCA} + \widehat{MCA} \Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{CMF}$$

$$\Rightarrow MC \text{ là tia phân giác } \angle EMF \Rightarrow CE = CF$$

$$AD \perp BM, CE \perp BM \Rightarrow AD \parallel CE.$$

$$\angle KAD = \angle KCE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow KA = KC.$$

Nên K và N trùng nhau.

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Bài 62. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm D thuộc nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C sao cho tam giác DAB vuông cân tại D. Điểm E (E khác A) trên đoạn thẳng AD. Đường thẳng qua E vuông góc với BE cắt AC tại F. Chứng minh rằng EBF vuông cân

Giải

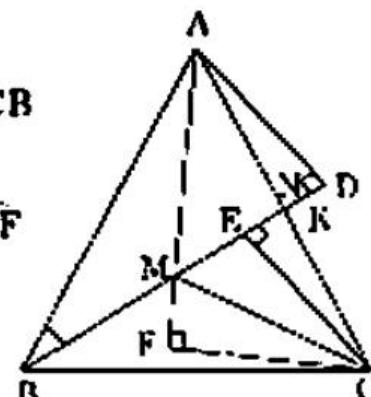
Tren đoạn thẳng BD lấy điểm M sao cho $BM = AE$.

Mà $DB = DA \Rightarrow DM = DE \Rightarrow \triangle DME$ cân tại D

Mặt khác $\widehat{MDE} = 90^\circ$

Do đó $\triangle DME$ vuông cân tại D

$$\Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{DEM} = 45^\circ$$



$$\widehat{BME} = \widehat{EAF} = 135^\circ$$

Xét $\triangle MEB$ và $\triangle AFE$ có:

$$\widehat{BME} = \widehat{EAF} = 135^\circ$$

$\widehat{MBE} = \widehat{AEF}$ (cùng phụ với góc \widehat{BED}), $BM = AE$

Do đó $\triangle MEB \cong \triangle AFE$ (g.c.g)

$$\Rightarrow EB = EF \Rightarrow \triangle EBF \text{ cân tại } E.$$

$$\text{Mà } \widehat{BEF} = 90^\circ \text{ (BE } \perp EF)$$

Vậy tam giác EBF vuông cân tại E .

Bài 63. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AD , E là trung điểm của đoạn thẳng AD . Vẽ DM vuông góc với BE tại M

Chứng minh rằng AM vuông góc với CM

Giải

Gọi N là trung điểm của cạnh AC , K là giao điểm của BE và DN

$$\text{Ta có } DN \parallel AB, DN = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2}$$

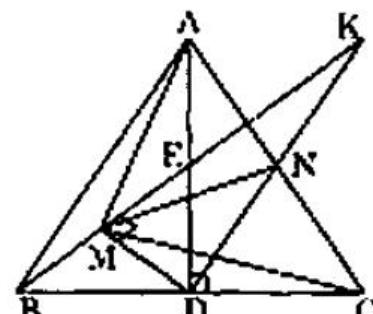
Xét $\triangle EDK$ và $\triangle EBA$ có:

$$\widehat{DEK} = \widehat{AEB}$$
 (đối đỉnh), $ED = EA$

$$\widehat{EDK} = \widehat{EAB}$$
 (so le trong và $DN \parallel AB$)

$$\text{Do đó } \triangle EDK \cong \triangle EAB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow DK = AB$$

$$\text{Nên } DN = \frac{DK}{2}. \text{ Ta có } N \text{ là trung điểm của } DK$$



$$\triangle AMDK \text{ vuông tại } M, MN \text{ là đường trung tuyến} \rightarrow MN = \frac{DK}{2}$$

$$\text{Do vậy } MN = \frac{AC}{2}$$

$$\triangle MAC \text{ có } MN \text{ là đường trung tuyến và } DN = \frac{AC}{2}$$

Chứng minh được $\triangle MAC$ vuông tại M

Vậy AM vuông góc với CM

Bài 64. Trên tia Ax lấy các điểm A, B, C, D theo thứ tự từ trái sang phải sao cho $AB^2 = BC \cdot BD$. Chứng minh rằng. $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$

Giải



$$\text{Ta có } AB^2 = BC \cdot BD \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{AB}{AB - BC} &= \frac{BD}{AB + BD} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD} \\ \Rightarrow \frac{AB}{AC} &= \frac{AD - AB}{AD} \Rightarrow \frac{AB}{AC} \cdot 1 - \frac{AB}{AD} \\ \Rightarrow \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AD} &\cdot 1 = 1 \Rightarrow AB \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} \end{aligned}$$

Bài 65.

a) Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng:

$$AB^{2013} + AC^{2013} < BC^{2013}$$

b) Cho tam giác ABC có $\hat{A} > 90^\circ$. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + AC^2 < BC^2$$

c) Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + AC^2 > BC^2$$

Giai

a) $\triangle ABC$ vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Py-ta-go)

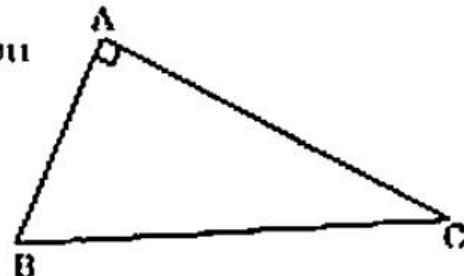
$$AB < BC, AC < BC$$

$$\text{Do đó } AB^{2011} < BC^{2011}, AC^{2011} < BC^{2011}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} &AB^{2013} + AC^{2013} \\ &= AB^{2011} \cdot AB^2 + AC^{2011} \cdot AC^2 \\ &< BC^{2011} \cdot AB^2 + BC^{2011} \cdot AC^2 \\ &= BC^{2011} (AB^2 + AC^2) \\ &= BC^{2011} \cdot BC^2 = BC^{2013} \end{aligned}$$

Vậy $AB^{2013} + AC^{2013} < BC^{2013}$



b) Vẽ CD ⊥ AB tại D

Để thấy A nằm giữa B và D.

$$\text{Do vậy } DB^2 = (AD + AB)^2 > AD^2 + AB^2$$

$\triangle ADB$ vuông tại D

$$\Rightarrow DB^2 + DC^2 = BC^2 \text{ (định lí Py-ta-go)}$$

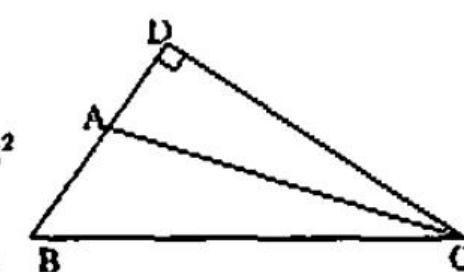
$\triangle ADC$ vuông tại D

$$\Rightarrow AC^2 = DA^2 + DC^2 \text{ (định lí Py-ta-go)}$$

$$\text{Do đó } BC^2 = DC^2 + BD^2 = AC^2 - DA^2 + DB^2$$

$$> AC^2 - DA^2 + (DA^2 + AB^2) = AC^2 + AB^2$$

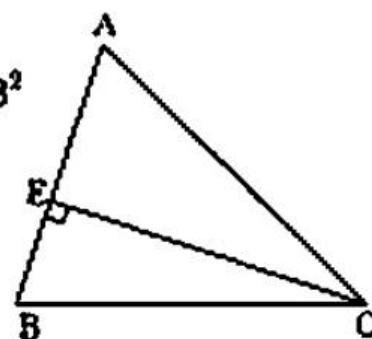
Vậy $AB^2 + AC^2 < BC^2$



c) Vẽ CE ⊥ AB tại E

Để thấy E nằm giữa A và B.

$$\text{Do vậy } AB > AE, AC > CE$$



$\triangle BEC$ vuông tại E

$$\Rightarrow BE^2 + CE^2 = BC^2 \text{ (định lý Py-ta-go)}$$

$$\text{Do đó } AB^2 + AC^2 > BE^2 + CE^2 = BC^2$$

$$\text{Vậy } AB^2 + AC^2 > BC^2$$

Bài 66. Có thể cắt một tam giác không cân thành hai tam giác bằng nhau bởi một đường thẳng được không?

Giải

Giả sử tam giác ABC được cắt bởi đường thẳng d thành hai tam giác bằng nhau

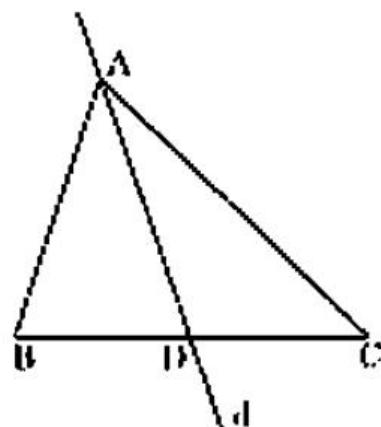
Đường thẳng d phải đi qua một đỉnh của tam giác

Giả sử đường thẳng d đi qua A và cắt cạnh BC tại D

d cắt tam giác ABC thành hai tam giác bằng nhau, do đó đối diện với cạnh chung AD là hai góc bằng nhau

Ta có: $\hat{B} = \hat{C}$. Mâu thuẫn giả thiết

Vậy không thể cắt tam giác ABC không cân thành hai tam giác bằng nhau bởi một đường thẳng



Bài 67. Tồn tại hay không tồn tại 2013 điểm sao cho với bất kì hai điểm A, B nào trong 2013 điểm ấy cũng tồn tại một điểm C nào đó trong các điểm còn lại mà $\widehat{ACB} > 60^\circ$.

Giải

Giả sử tồn tại 2013 điểm có tính chất của đề bài toán

Gọi A, B là hai điểm có khoảng cách lớn nhất trong tất cả các khoảng cách giữa hai điểm trong 2013 điểm đã cho.

Theo đề bài tồn tại điểm C sao cho $\widehat{ACB} < 60^\circ$. Vì điểm C không thể thuộc đường thẳng AB.

Xét $\triangle ABC$ có AB là cạnh lớn nhất nên \widehat{ACB} là góc lớn nhất.

Vì $\widehat{ACB} < 60^\circ$. Nên $\widehat{BAC} < 60^\circ$, $\widehat{ABC} < 60^\circ$

Suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} < 180^\circ$

Điều này vô lí!

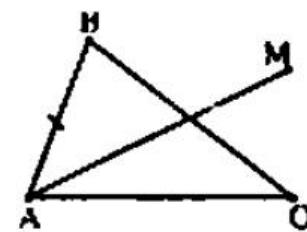
Vậy không tồn tại 2013 điểm có tính chất như đề bài toán.

Bài 68. Ở một nước nọ có 100 sân bay. Khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau. Từ mỗi sân bay, máy bay cất cánh và bay đến sân bay gần nhất.

Chứng minh rằng bất kì sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay cùng bay đến.

Giải

Nếu có 2 máy bay, bay từ sân bay A và B đến sân bay O thì AB là cạnh lớn nhất của tam giác OAB. Do đó $\widehat{AOB} > 60^\circ$



Xét sân bay M, giả sử có n máy bay, bay từ các sân bay M_1, M_2, \dots, M_n bay đến M. Ta có một trong các góc $M_i M M_j$, không vượt quá $\frac{360^\circ}{n}$

$$\text{Ta có } \frac{360^\circ}{n} > 60^\circ \Rightarrow n < 6$$

Vậy không thể có quá 5 máy bay cùng bay đến một sân bay.

Bài 69. Cho tam giác có số đo các đường cao là các số nguyên, khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến cạnh của tam giác là 1. Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều.

Giải

Gọi x, y, z lần lượt là các đường cao ứng với các cạnh a, b, c của tam giác. Để thấy rằng đường cao của một tam giác luôn lớn hơn hai lần khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến cạnh của tam giác, tức là $x > 2, y > 2, z > 2$.

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$, nên $x \geq 3, y \geq 3, z \geq 3$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{ax} + \frac{b}{by} + \frac{c}{cz} = \frac{a+b+c}{2S_{ABC}} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $x = y = z = 3$

Vậy tam giác ABC đều

Bài 70. Chứng minh rằng tồn tại 6 điểm trong đó có 1 điểm nằm ngoài đường thẳng d, 5 điểm kia nằm trên đường thẳng d sao cho mọi khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ trong 6 điểm đó đều là các số tự nhiên.

Giải

Xét 6 điểm A, B, C, D, E, F trên
hình vẽ bên $AB \perp EF$

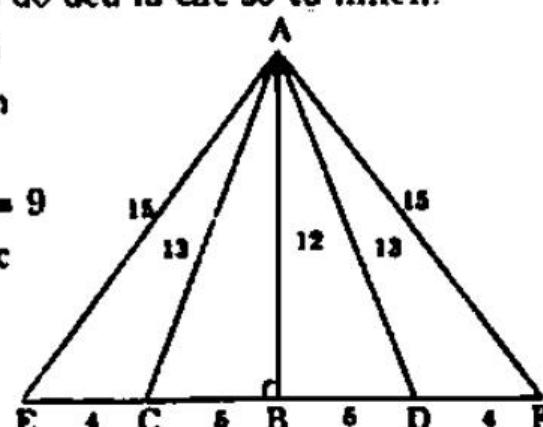
$$AB = 12, BC = BD = 5, BE = BF = 9$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào các
tam giác vuông cho ta:

$$AC = AD = 13$$

$$AE = AF = 15$$

Vậy 6 điểm A, B, C, D, E, F này thỏa mãn bài toán.



MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I. Số hữu tỉ. Số thực

§1. Tập hợp Q các số hữu tỉ	3
§2 Cộng, trừ số hữu tỉ	6
§3 Nhân, chia số hữu tỉ	11
§4 Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ. Cộng, trừ, nhân, chia số thập phân	15
§5 Luỹ thừa của một số hữu tỉ	19
§6 Tỉ lệ thức	23
§7 Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau	27
§8 Số thập phân hữu hạn. Số thập phân vô hạn tuần hoàn Làm tròn số	30
§9 Số vô tỉ. Khái niệm về căn bậc hai Số thực	33
Ôn tập chương I	35

Chương II. Hàm số và đồ thị

§1 Đại lượng tỉ lệ thuận. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ thuận	39
§2 Đại lượng tỉ lệ nghịch. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ nghịch	43
§3 Hàm số	46
§4 Mật phỏng tọa độ	49
§5 Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$)	53
Ôn tập chương II	57

Chương III. Thống kê

§1 Thu thập số liệu thống kê, tần số	58
§2 Bảng "tần số" các giá trị của dấu hiệu	62
§3 Biểu đồ	66
§4 Số trung bình cộng	70
Ôn tập chương III	74

Chương IV. Biểu thức đại số

§1 Khái niệm về biểu thức đại số Giá trị của một biểu thức đại số	76
§2 Đơn thức	80
§3 Đơn thức đồng dạng	83
§4 Đa thức Cộng, trừ đa thức	86
§5 Đa thức một biến cộng, trừ đa thức một biến	90
§6 Nghiệm của đa thức một biến	94
Ôn tập chương IV	97

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. Đường thẳng vuông góc, đường thẳng song song

§1 Hai góc đối đỉnh	100
§2 Hai đường thẳng vuông góc	102
§3 Các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng	
Hai đường thẳng song song	106
§4 Tiết lộ Câu hỏi về đường thẳng song song	
Từ vuông góc đến song song	111
§5 Định lí	115
Ôn tập chương I	119

Chương II. Tam giác

§1 Tổng ba góc của một tam giác	120
§2 Hai tam giác bằng nhau	124
§3 Trường hợp bằng nhau thứ nhất của tam giác : cạnh - cạnh - cạnh (c c c)	126
§4 Trường hợp bằng nhau thứ hai của tam giác : cạnh - góc - cạnh (c.g.c)	129
§5 Trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác : góc - cạnh - góc (g.c.g)	133
§6 Tam giác cân	137
§7 Định lí Py-ta-go	140
§8 Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông	143
Ôn tập chương II	146

Chương III. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác các đường đóng quy trong tam giác

§1 Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác	149
§2 Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu	153
§3 Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác bất đẳng thức tam giác	157
§4 Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác	161
§5 Tính chất ba phân giác của một góc	165
§6 Tính chất ba đường phân giác của tam giác	168
§7 Tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng	172
§8 Tính chất ba đường trung trực của tam giác	177
§9 Tính chất ba đường cao của tam giác	180
Ôn tập chương III	186
Ôn tập cuối năm	189

PHỤ LỤC CÁC BÀI TOÁN HAY VÀ KHÓ

A ĐẠI SỐ	198
B. HÌNH HỌC	215

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7 (Tái bản)

NGUYỄN DỨC TÂN-NGUYỄN ANH HOÀNG-NGUYỄN DOÀN VŨ

Chủ trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập

DINH THỊ THANH THỦY

Biên tập **NGÔ QUỐC NHÂN**

Sửa bài in **HOÀNG NHẤT**

Trình bày : Công ty KHANG VIỆT

Bìa : Công ty KHANG VIỆT

NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

62 Nguyễn Thị Minh Khai, Q.1, TP.HCM

ĐT: 38225340 - 38296764 - 38247225 - Fax: 84.8.38222726

Email: tunghop@nxbhcm.com.vn

Sách online: www.nxbhcm.com.vn - Ebooks: www.sachweb.vn

NHÀ SÁCH TỔNG HỢP 1

62 Nguyễn Thị Minh Khai, Q.1, TP.HCM - ĐT: 38 256 804

NHÀ SÁCH TỔNG HỢP 2

K6 - K8 Nguyễn Tất Thành, Q.4, TP.HCM - ĐT: 39 433 868

Đối tác liên kết và tổng phát hành



**CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT**

Địa chỉ: 73 Ông Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM

Điện thoại: 08 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968

Fax: 08 3911 0880

Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

Website: www.khangvietbook.com.vn

www.nhasachkhangviet.vn

Số lượng 2 000 cuốn, khổ 16x24cm.

Mã số ISBN: 978-604-58-2412-2

Tại: Cty TNHH MTV IN ẤN MÃI THỊNH DỨC

Website: www.inanmaiinthinh.com

Địa chỉ: 71, Kha Van Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Q. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh

Số XNKX: 2104-2015/XNKPI/13-149/THTPHCM ngày 18/08/2015.

Quyết định xuất bản số: 1046/QĐ-THTPHCM-2015 do NXB Tổng Hợp Thành Phố Hồ Chí Minh cấp ngày 21/08/2015.

In xong và nộp lưu chiểu Quý IV năm 2015.

khangvietbook.com.vn

Điện thoại trực tuyến nhanh: (08) 3910.3821
Di động: 0903.906.848

Mời bạn tham khảo tại website: www.khangvietbook.com.vn

Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn



KHANG VIET FAIIASA



Nhà Sách KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P. Đa Kao - Q.1 - Tp. Hồ Chí Minh

Điện thoại: (08) 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968

Fax: (08) 39110880

Trực tuyến



New Shop.vn

caominhbook.com.vn



8 935092

535531

Giá: **66.000** Đồng

