T. Huy

Huỳnh Quốc Huy

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

10 2005 Số 340

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com

TẬP THỂ CÁN BỘ GIÁO VIÊN TRƯỜNG THPT NGUYỄN TẤT THÀNH

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TẤT THÀNH
THUỘC TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

KẾT QUẢ NĂM HỌC 2004-2005

- Trường tiên tiến xuất sắc của ngành Giáo dục Thủ đô.
- Trường tiên tiến xuất sắc về Thể dục Thể thao cấp Thành phố.
- Tập thể Lao động xuất sắc của Trường ĐHSP Hà Nội.
- 95% học sinh đạt học lực khá giỏi, trong đó có 43% học sinh giỏi.
- Đoạt 101 giải thi học sinh giỏi các môn văn hóa cấp Thành phố.
- Có 29 học sinh đạt từ 29 điểm trở lên trong kì thi Tuyển sinh Đại học 2005.
- 100% học sinh lớp chất lượng cao đỗ vào các trường Đại học lớn.
- Trường đã đoạt được 4 Huy chương Vàng, 4 Huy chương Bạc, 3 Huy chương Đồng về Thể dục Thể thao cấp Thành phố.

Hiệu trưởng
PGS.TS. Vương Dương Minh

Sách mới Tiếng Anh dành cho Tiểu học:
LET'S LEARN ENGLISH

Hãy học tiếng Anh cùng với các bạn *Nam* và *Mai* trong sách

Let's Learn English!

Đây là bộ sách tiếng Anh được biên soạn theo chương trình mới được ban hành của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại, kết hợp với tranh ảnh minh hoạ ngộ nghĩnh, tinh tế, rất hấp dẫn với các em học sinh tiểu học.

Nhà xuất bản Giáo dục hợp tác với Nhà xuất bản SNP Panpac Singapore xuất bản bộ sách này.

Các Sở Giáo dục - Đào tạo, các Công ty Sách - Thiết bị có thể đặt mua tại:

Hà Nội: Phòng phát hành SGK, 187B-Giảng Võ
ĐT: (04) 8562011 Fax: (04) 8562493

Đà Nẵng: Phòng phát hành SGK, 15-Nguyễn Chí Thanh
ĐT:(0511) 894504 Fax: (0511) 827368

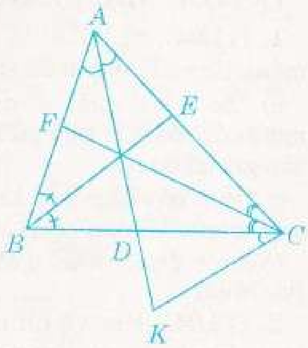
TP Hồ Chí Minh: Phòng phát hành SGK, 231-Nguyễn Văn Cừ, Q5
ĐT: (08) 8358423 Fax: (08) 8390727

SỬ DỤNG CÔNG THỨC ĐƯỜNG PHÂN GIÁC VÀO GIẢI TOÁN

HOÀNG VĂN ĐẮC
(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương)

Sử dụng định lí Ta-let và tam giác đồng dạng ta có thể tính được độ dài đường phân giác trong của một tam giác theo các cạnh của nó. Các công thức về độ dài đường phân giác sẽ giúp ta giải nhiều bài tập lí thú.

Xét tam giác ABC với các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi ba đường phân giác trong của ΔABC là $AD = d_a$, $BE = d_b$, $CF = d_c$.



Hình 1

Công thức đường phân giác trong của tam giác

Để tính độ dài $AD = d_a$ theo các cạnh a, b, c, trước hết tính BD, CD. Theo tính chất đường phân giác trong ta có

$$\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b} = \frac{BD+CD}{b+c} = \frac{BC}{b+c} = \frac{a}{b+c}.$$

Từ đó có $BD = \dfrac{ac}{b+c}$ (1) và $CD = \dfrac{ab}{b+c}$ (2).

Trong nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng tia CK sao cho $\widehat{BCK} = \widehat{BAD}$, tia CK cắt tia AD ở K (h. 1). Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{CDK}$ và $\widehat{ABD} = \widehat{CKD}$. Từ đó $\Delta ABD \backsim \Delta CKD$ (g, g), suy ra $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{CD}{KD} \Leftrightarrow AD.DK = BD.CD$.

$\Delta ABD \backsim \Delta AKC$ (g.g), suy ra $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AK}{AC} \Leftrightarrow AB.AC = AD.AK$.

Từ hai đẳng thức trên có $AD.AK - AD.DK = AB.AC - BD.CD$. Chú ý rằng $AK - DK = AD$ nên $AD^2 = AB.AC - BD.CD$ hay

$$d_a^2 = bc - BD.CD \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $d_a^2 = bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$ (4)

hay $$d_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) \qquad (5)$$

Để ý rằng $(b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)(b+c-a) = 2p(2p-2a) = 4p(p-a)$, nên từ (5) có

$$d_a^2 = \frac{4p(p-a)bc}{(b+c)^2} \text{ hay } d_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \qquad (6)$$

Từ (4), (5) và (6) với chú ý là $(b+c)^2 \geq 4bc$ ta có các bất đẳng thức đối với độ dài đường phân giác trong của tam giác :

$$bc - \frac{a^2}{4} \leq d_a^2 < bc \quad (7) \qquad \text{và } d_a^2 \leq p(p-a) \quad (8)$$

Đẳng thức ở (8) xảy ra khi và chỉ khi $AB = AC$. Đối với d_b, d_c có các công thức tương tự.

Một số bài toán ứng dụng công thức đường phân giác

Bài toán 1. *Gọi d_a, d_b, d_c là độ dài ba đường phân giác của tam giác ABC với $AB+BC+CA = 2p$. Chứng minh rằng :*

a) $ab+bc+ca - \dfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) \leq d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \leq p^2$;

b) $d_a + d_b + d_c \leq p\sqrt{3}$.

Lời giải. a) Từ công thức (8) có

$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \leq p(p-a) + p(p-b) + p(p-c)$
$= 3p^2 - 2p^2 = p^2$.

Áp dụng công thức (7) được

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \geq (ab+bc+ca) - \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

b) Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki và a) ta có : $(d_a + d_b + d_c)^2 \leq 3(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) \leq 3p^2$, suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra ở a) cũng như ở b) khi $a = b = c$, nghĩa là ΔABC đều.

Bài toán 2. *Chứng minh rằng tam giác ABC cân với đáy BC nếu hai phân giác trong BE và CF bằng nhau.*

Lời giải. Ta chứng minh trực tiếp khi sử dụng công thức (4). Theo giả thiết có

$$d_b = d_c \Rightarrow d_b^2 = d_c^2 \Rightarrow ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2} = ab - \frac{c^2ab}{(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow c-b+bc\left(\frac{c}{(a+b)^2} - \frac{b}{(a+c)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow c-b+bc.\frac{c^3-b^3+a^2(c-b)+2a(c^2-b^2)}{(a+b)^2(a+c)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (c-b)\left(1+bc.\frac{c^2+cb+b^2+a^2+2a(c+b)}{(a+b)^2(a+c)^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow c = b$ hay $AB = AC$.

Bài toán 3. *Giả sử các đường phân giác trong BE và CF của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng khi EM = FN thì ΔABC cân với đáy BC.*

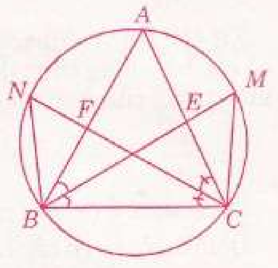
Lời giải. Sử dụng tính chất các góc nội tiếp (h. 2) ta có :

$\Delta ABE \backsim \Delta MCE$

nên $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{ME}{CE}$ (9)

$\Delta ACF \backsim \Delta NBF$

nên $\dfrac{AF}{CF} = \dfrac{NF}{BF}$ (10).



Hình 2

Từ (9), (10) và sử dụng các công thức (1), (2) và (6) ta được

$$EM = \frac{AE.CE}{BE} = \frac{b^2ca}{(a+c)\sqrt{ac(a+c+b)(a+c-b)}} \quad (11)$$

$$FN = \frac{AF.BF}{CF} = \frac{c^2ba}{(a+b)\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}} \quad (12)$$

Từ $EM = FN$ suy ra

$$b(a+b)\sqrt{b(a+b-c)} = c(a+c)\sqrt{c(a+c-b)}$$

$$\Rightarrow b^3(a+b)^2(a+b-c) - c^3(a+c)^2(a+c-b) = 0$$

$$\Rightarrow (b-c)(a+b+c)[b^2(a+b)(a+b-c) + c^2(a+c)(a+c-b)$$

$$+ bc(a+b)(a+c)] = 0 \Rightarrow b = c \text{ hay } AB = AC.$$

Các bài toán 2 và 3 cũng có thể chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Các bạn hãy sử dụng công thức đường phân giác và công thức Hê–rông về diện tích S của ΔABC để làm các bài tập sau :

Bài 1: Chứng minh rằng $d_a.d_b.d_c \le p.S$.

Bài 2: Chứng minh rằng $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \ge 3\sqrt{3}.S$.

Bài 3: Cho tam giác ABC. Gọi MN, PR, QS là hình chiếu vuông góc của các đoạn thẳng AB, BC, CA lên các đường phân giác ngoài ở các đỉnh C, A, B tương ứng. Chứng minh rằng:

$$MN + PR + QS \ge 6\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}.$$

Hi vọng rằng các bạn còn tìm thấy nhiều hệ thức khác liên quan đến độ dài đường phân giác của tam giác.

X hỏi ? Y, Z trả lời.

HỎI - SỐ NÀY

1. (9.05). Trong lịch sử, số âm ra đời trước hay phân số (số hữu tỉ) ra đời trước ?

(Một bạn ở trường THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định).

TRẢ LỜI - NHỮNG SỐ TRƯỚC

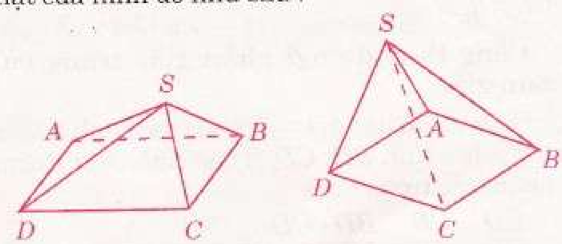
1. (11.04). a) "Số 0 là một số chẵn" là một mệnh đề và là mệnh đề sai.

b) "$2x + 3$ là một số nguyên dương" là một mệnh đề có chứa biến, đúng hay sai phụ thuộc vào giá trị của x.

c) "Bạn có chăm học không ?" không phải là một mệnh đề toán học.

(*Nguyễn Trung Kiên*, 12A3, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh)

2. (12.04). Khi vẽ hình chóp có đáy là hình bình hành thì có thể nhìn thấy cùng lúc ba mặt của hình đó như sau :



(*Nguyễn Trung Kiên*, 12A3, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh ; *Nguyễn Văn Đỉnh*, 12I, THPT Giao Thủy A, Nam Định).

Còn ý kiến của các bạn về những vấn đề này như thế nào ?

VŨ ĐỖ QUAN

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH, NĂM 2005

MÔN TOÁN

VÒNG I

(Dành cho mọi thí sinh. Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. a) Rút gọn biểu thức sau :

$$A=\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}}{2}}+\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}}{2}}.$$

b) Giải phương trình :

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}=4.$$

Câu 2. Chứng minh rằng $(n^3+17n)\vdots 6$ với mọi số tự nhiên n.

Câu 3. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\frac{x^2-4x}{1-x}=3x+m$, trong đó m là tham số. Tìm m để biểu thức $|x_1-x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$. Hai điểm I, J lần lượt thuộc hai cạnh BC và CD sao cho $\widehat{IAJ}=45°$. Đường chéo BD cắt AI và AJ tương ứng tại H và K. Tính tỉ số $\frac{HK}{IJ}$.

Câu 5. Cho hai đường tròn $(O_1\,;R_1)$ và $(O_2\,;R_2)$ có $R_1>R_2$, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn $(O_1\,;R_1)$ tại M và cắt đường tròn $(O_2\,;R_2)$ tại N (các điểm M, N khác A).

a) Xác định vị trí của đường thẳng d để độ dài đoạn thẳng MN lớn nhất.

b) Tìm tập hợp các trung điểm I của các đoạn thẳng MN khi đường thẳng d quay quanh điểm A.

VÒNG II

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán. Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 6. a). Tìm chữ số tận cùng của số $19^{6^{2005}}$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2-14n-256$ là một số chính phương.

Câu 7. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=2 \\ y+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2. \end{cases}$$

Câu 8. Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn

$$a^2+b^2+c^2+2<ab+3b+2c.$$

Câu 9. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a ($a>0$) và một điểm M chuyển động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng nếu M thuộc cung nhỏ AB thì $MA+MB=MC$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB+MC$.

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ có $AB=14$cm. Trong hình vuông có đánh dấu 76 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính 2cm chứa trong nó ít nhất 4 điểm trong số các điểm trên.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TRƯỜNG THPT LÊ HỒNG PHONG TP HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2005 - 2006

MÔN TOÁN

(Đề thi đã đăng trên THTT số 339, tháng 9.2005)

VÒNG I

Câu 1. a) Ta có biệt thức

$\Delta' = (3-2m)^2 - 4(m^2 - 3m + 2) = 1 > 0,$

nên PT đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của tham số m.

b) Theo công thức Vi-ét

$$x_1x_2 = \frac{m^2-3m+2}{4} = \frac{1}{4}\left(m-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{3}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của x_1x_2 là $\left(-\frac{1}{16}\right)$ đạt được khi $m = \frac{3}{2}$.

Câu 2. a) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x+y)^2 = 4xy+4\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=6\\ x.y=8.\end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai nghiệm (x, y) là $(4, 2)$; $(2, 4)$.

b) Điều kiện $x \neq -5$. Khi đó

$$x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5x}{x+5}\right)^2 + 10\left(\frac{x^2}{x+5}\right) = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2 + 10\left(\frac{x^2}{x+5}\right) = 11.$$

Đặt $y = \frac{x^2}{x+5}$ (1), PT trên trở thành

$y^2 + 10y - 11 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = -11.$

*) Với $y = -11$, thay vào (1) ta thấy PT ẩn x vô nghiệm.

*) Với $y = 1$, từ (1) có

$$x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Thử lại ta thấy $x_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ là hai nghiệm của PT đã cho.

Câu 3. a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{a-c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a}\left(\frac{b-c}{b}\right)}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right) = 1 \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{bc}{b-c}$.

b) Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương

$$2\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b} \Rightarrow 2\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}} . \frac{\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\leq (\sqrt{a}+\sqrt{b}) . \frac{\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Suy ra $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Câu 4. Gọi số chính phương có 4 chữ số cần tìm là $\overline{abcd}$ $(a \neq 0)$.

Đặt $n^2 = \overline{abcd}$ $(n \in N^*)$. Ta có $n^2 < 10000$ nên $n < 100$.

Khi tăng mỗi chữ số của số $\overline{abcd}$ lên một đơn vị thì được số $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}$. Từ giả thiết bài ra $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2$ $(m \in N^*)$. Lập luận như trên có $m < 100$, dẫn đến $2 \leq m+n < 200$.

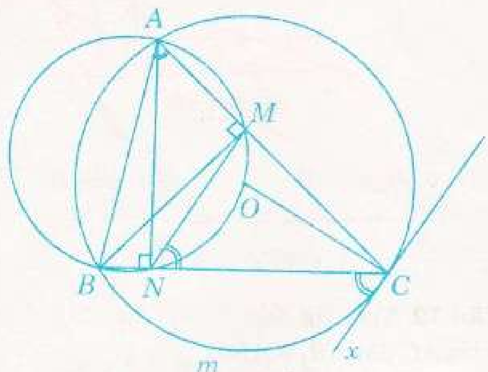
Xét hiệu

$m^2 - n^2 = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} - \overline{abcd} = 1111$

hay $(m-n)(m+n) = 1111$.

Vì $1111 = 1 \times 1111 = 11.101$, nên chỉ xảy ra $m - n = 11$ và $m + n = 101$, suy ra $m = 5$, $n = 45$. Vì vậy $\overline{abcd} = 45^2 = 2025$. Thử lại ta thấy số cần tìm là 2025.

Câu 5. a) Dựng tia tiếp tuyến Cx với đường tròn (O) (hình vẽ), khi đó $\widehat{BAC}=\widehat{BCx}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BmC}$). Mặt khác $\widehat{BAC}=\widehat{MNC}$ (cùng bù với $\widehat{MNB}$) suy ra $\widehat{MNC}=\widehat{BCx}$, từ đó $MN // Cx$. Mặt khác $Cx \perp OC$ nên $MN \perp OC$.

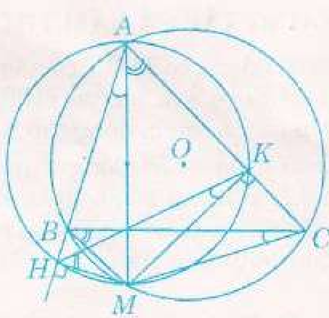


b) Ta thấy $\Delta CMN \backsim \Delta CBA$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{AB}=\dfrac{CN}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (vì ΔANC vuông cân tại N)

$\Rightarrow MN=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}$.

Câu 6. a) Bốn điểm A, H, M, K cùng nằm trên đường tròn đường kính AM. Ta có các góc nội tiếp sau bằng nhau : $\widehat{MBC}=\widehat{MAC}=\widehat{MHK}$, $\widehat{MCB}=\widehat{MAB}=\widehat{MKH}$ nên hai tam giác MBC và MHK đồng dạng với nhau.



b) Theo trên $\Delta MBC \backsim \Delta MHK$, suy ra $\dfrac{BC}{HK}=\dfrac{MB}{MH}$, mà $MB \geq MH$ dẫn đến $\dfrac{BC}{HK}\geq 1$ hay $HK \leq BC$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv B$, lúc đó $\widehat{ABM}=90^o \Leftrightarrow AM$ là đường kính của đường tròn (O). Do đó khi M là điểm đối xứng của A qua O thì độ dài HK lớn nhất.

VÒNG II

Câu 7. a) Giả sử x_o là nghiệm chung của hai PT. Ta có $x_o^2+x_o+m=0$ (1) ; $x_o^2+mx_o+1=0$.

Từ đó $(x_o^2+x_o+m)-(x_o^2+mx_o+1)=0$

$\Rightarrow (1-m)(x_o-1)=0$

Với $m=1$, cả hai PT đều có dạng $x^2+x+1=0$, PT này vô nghiệm.

Với $x_o=1$ thì từ (1) có $m=-2$, khi đó PT

$x^2+x+m=0$ có hai nghiệm là 1 và -2 ;

PT : $x^2+mx+1=0$ có nghiệm kép là 1. Kết luận $m=-2$.

b) Ta có biệt thức

$\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=(b^2+c^2-a^2)^2-(2bc)^2$

$=[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]=$

$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)<0$ (do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác) $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 8. a) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2-3)=0\\ x+y=-1.\end{cases}$$

Hệ này tương đương với tuyển của hai hệ

$$\begin{cases}x-y=0\\ x+y=-1\end{cases}\text{(I)}\qquad \begin{cases}x^2+xy+y^2-3=0\\ x+y=-1\end{cases}\text{(II)}$$

– Hệ (I) có nghiệm $(x,y)=\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

– Xét hệ (II), từ $x+y=-1$ có $y=-1-x$. Thay vào PT đầu của hệ (II) được

$x^2+x-2=0$.

Từ đó ta thấy hệ (II) có hai nghiệm $(1,-2)$; $(-2,1)$.

Kết luận : Hệ đã cho có nghiệm (x, y) là $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$; $(1,-2)$; $(-2,1)$.

b) Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của PT. Viết PT lại dưới dạng

$$\frac{2}{\dfrac{3x^2-5x+2}{x}}+\frac{13}{\dfrac{3x^2+x+2}{x}}=6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3x+\dfrac{2}{x}-5}+\frac{13}{3x+\dfrac{2}{x}+1}=6.$$

Đặt $3x+\dfrac{2}{x}-5=y$. PT đã cho trở thành

$\frac{2}{y}+\frac{13}{y+6}=6 \Leftrightarrow 2y^2+7y-4=0.$

Giải PT này được $y_1=\frac{1}{2}$; $y_2=-4$.

Với $y_1=\frac{1}{2}$ thì có $3x+\frac{2}{x}-5=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 6x^2-11x+4=0.$

PT này có nghiệm $x_1=\frac{4}{3}, x_2=\frac{1}{2}$.

Với $y_2=-4$, ta có $3x+\frac{2}{x}-5=-4$

$\Leftrightarrow 3x^2-x+2=0$, PT này vô nghiệm. Tóm lại PT đã cho có hai nghiệm $x_1=\frac{4}{3}, x_2=\frac{1}{2}$.

Câu 9. a) Ta có

$2(a^4+b^4)\geq ab^3+a^3b+2a^2b^2$

$\Leftrightarrow 4(a^4+b^4)\geq 2ab^3+2a^3b+4a^2b^2$

$\Leftrightarrow (b^4-2ab^3+a^2b^2)+(a^4-2a^3b+a^2b^2)+$

$+(3a^4+3b^4-6a^2b^2)\geq 0$

$\Leftrightarrow (b^2-ab)^2+(a^2-ab)^2+3(a^2-b^2)^2\geq 0.$

BĐT này đúng suy ra đpcm.

b) Với $a>b>0$ thì $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2}>a$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)+(2ab-b^2)+2\sqrt{(a^2-b^2)(2ab-b^2)}>a^2$

$\Leftrightarrow 2b(a-b)+2\sqrt{(a^2-b^2)(2ab-b^2)}>0,$

Suy ra đpcm.

Câu 10. Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ (a, b khác 0). Từ giả thiết có $\overline{ab}=m.ab \Rightarrow 10a+b=mab$, hay $b=a(mb-10)$, suy ra $b \vdots a$. Đặt $b=na$ ($n\leq 9$). Từ $na=a(mna-10)$ có $n=mna-10$ $\Leftrightarrow n(ma-1)=10$ nên $10 \vdots n \Rightarrow n\in\{1, 2, 5\}$.

– Với $n=1$ thì $ma-1=10 \Leftrightarrow ma=11$, suy ra $a=b=1$.

– Với $n=2$ thì $ma-1=5 \Leftrightarrow m.a=6 \Rightarrow a=1, 2, 3$, tương ứng có $b=2, 4, 6$.

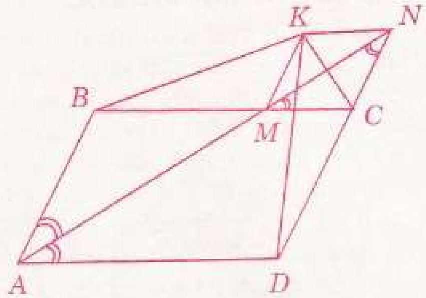
– Với $n=5$ thì $ma-1=2 \Leftrightarrow ma=3 \Rightarrow a=1$, tương ứng có $b=5$.

Thử lại được các số cần tìm là : 11, 12, 15, 24, 36.

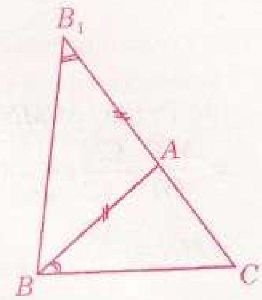
Câu 11. a) Ta có $\widehat{BAN}=\widehat{DNA}$ (so le trong), mà $\widehat{BAN}=\widehat{DAN}$ (gt) suy ra $\widehat{DAN}=\widehat{DNA}$ hay ΔDAN cân tại $D \Rightarrow DN=AD=BC$.

Nhận thấy ΔCMN cân tại C nên $CM=CN$, kết hợp với $KM=KN$ dẫn đến $CK\perp MN$.

b) Xét hai tam giác KBC và KDN có $BC=DN$, $KC=KN$, $\widehat{KCB}=\widehat{KND}$ $(=\widehat{KMC})$ $\Rightarrow \Delta KBC=\Delta KDN$, suy ra $\widehat{KBC}=\widehat{KDC}$ hay tứ giác $BKCD$ là tứ giác nội tiếp (đpcm).



Câu 12. Trên tia đối của tia AC đặt $AB_1=AB$ lúc đó $\widehat{BAC}=2\widehat{BB_1C}$, mà $\widehat{BAC}=2\widehat{ABC}$ $\Rightarrow \widehat{BB_1C}=\widehat{ABC}$, suy ra $\Delta BB_1C \backsim \Delta ABC$. Từ đó $\frac{B_1C}{BC}=\frac{BC}{AC}$ hay $BC^2=AC(AB+AC)$.



NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

VỀ MỘT BÀI THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2005

ĐỖ VĂN ĐỨC
(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Trong kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2005, đề thi toán khối D câu III (phần 1) có nội dung như sau :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm C(2 ; 0) và elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. *Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và* ΔABC *đều.*

Trong bài trên *điều kiện A, B đối xứng với nhau qua trục hoành* có thể suy ra được từ điều kiện ΔABC đều, tuy nhiên cho điều đó thì viết được $A(x_o, y_o)$, $B(x_o, -y_o)$ và lời giải dễ hơn nhiều.

Sau đây ta giải bài toán trên mà không cần điều kiện *A, B* đối xứng với nhau qua trục hoành và đưa ra một số bài toán cực trị có liên quan đến đường elíp đó.

Bài toán : *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm C(2 ; 0) và elip (E) có phương trình* $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. *Xác định vị trí các điểm A, B trên (E) thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

1) Tam giác CAB đều.

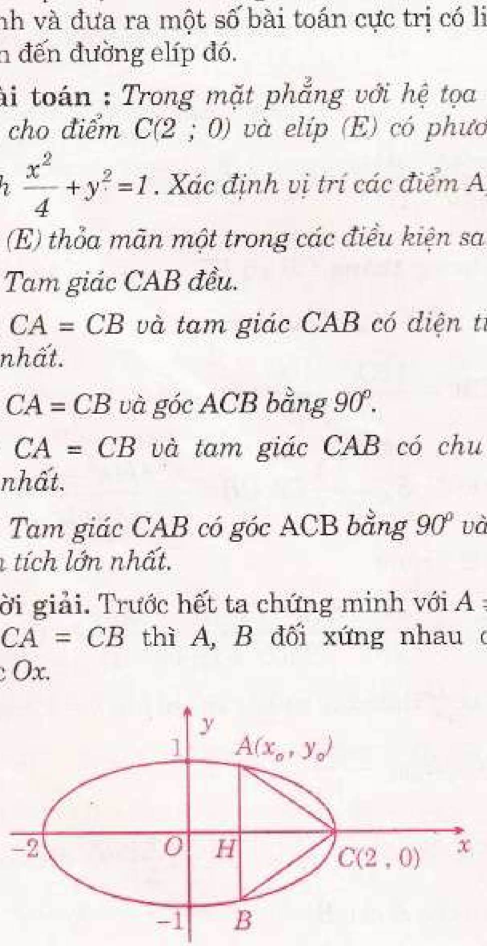
2) CA = CB và tam giác CAB có diện tích lớn nhất.

3) CA = CB và góc ACB bằng 90^o.

4) CA = CB và tam giác CAB có chu vi lớn nhất.

5) Tam giác CAB có góc ACB bằng 90^o *và có diện tích lớn nhất.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh với $A \neq B$ và $CA = CB$ thì A, B đối xứng nhau qua trục Ox.



Thật vậy, $A(x_o ; y_o)$; $B(x_1 ; y_1)$ là hai điểm phân biệt thuộc (E) và $CA = CB$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{x_o^2}{4}+y_o^2=\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\\(x_o-2)^2+y_o^2=(x_1-2)^2+y_1^2\ (*)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_o^2-x_1^2=4(y_1^2-y_o^2)\\(x_o-2)^2-(x_1-2)^2=y_1^2-y_o^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_o^2-x_1^2=4[(x_o-2)^2-(x_1-2)^2]$$

$$\Leftrightarrow (x_o-x_1)[3(x_o+x_1)-16]=0 \qquad (**)$$

Vì $-2 < x_o, x_1 < 2$ nên $(**) \Leftrightarrow x_o = x_1$. Khi đó từ (*) có $y_o^2=y_1^2$, do $A \neq B$ nên $y_1 = -y_o$. Suy ra $B(x_o, -y_o)$. Vậy A, B đối xứng với nhau qua trục hoành.

Gọi H là trung điểm của AB thì $H(x_o, 0)$.

1) ΔCAB đều $\Leftrightarrow CH=\frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2-x_o=\sqrt{3}|y_o|$ $\Leftrightarrow |y_o|=\frac{2-x_o}{\sqrt{3}}$. Vì $A, B \in (E)$ nên $\frac{x_o^2}{4}+\frac{(2-x_o)^2}{3}=1$ $\Leftrightarrow 7x_o^2-16x_o+4=0 \Rightarrow x_o=\frac{2}{7}$ (nghiệm $x_o = 2$ bị loại) dẫn đến $|y_o|=\frac{4\sqrt{3}}{7}$. Vậy $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ và $B\left(\frac{2}{7};\frac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};\frac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$ và $B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

2) $S_{\Delta CAB}=\frac{1}{2}AB.CH=(2-x_o)|y_o|=$

$$=(2-x_o)\sqrt{\frac{4-x_o^2}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{(2-x_o)^3(6+3x_o)}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{3(2-x_o)+6+3x_o}{4}\right]^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2-x_o=6+3x_o \Leftrightarrow x_o=-1 \Rightarrow |y_o|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Có 2 nghiệm : $A\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right);B\left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và đổi tọa độ trên của A cho B.

3) Giả sử $A(x_o, y_o)$, $(-2 < x_o < 2)$ lúc đó $B(x_o, -y_o)$. Ta có $HA = HC \Leftrightarrow |y_o| = 2 - x_o$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x_o^2} = 2(2-x_o)$

$\Rightarrow x_o = \frac{6}{5}$ (nghiệm $x_o = 2$ bị loại)

$\Rightarrow |y_o| = \frac{4}{5}$. Từ đó $A\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$; $B\left(\frac{6}{5},-\frac{4}{5}\right)$ và đổi tọa độ trên của A cho B.

4) Chu vi ΔCAB là $2p = 2CA + AB =$

$2\sqrt{(2-x_o)^2+y_o^2}+2|y_o|$

$= 2\sqrt{(2-x_o)^2+1-\frac{x_o^2}{4}}+2\sqrt{1-\frac{x_o^2}{4}}$

$= \sqrt{2-x_o}\left(\sqrt{10-3x_o}+\sqrt{2+x_o}\right)$

$= \sqrt{2-x_o}\left[\sqrt{10-3x_o}+\frac{\sqrt{(4+\sqrt{13})(2+x_o)}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}}\right]$

Áp dụng BĐT Bu–nhi–a–cốp–xki cho 2 bộ số $\left(1;\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{13}}}\right)$ và $\left(\sqrt{10-3x_o};\sqrt{(4+\sqrt{13})(2+x_o)}\right)$ ta được

$2p \le \sqrt{2-x_o}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4+\sqrt{13}}\right)[10-3x_o+(4+\sqrt{13})(2+x_o)]}$

$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{4+\sqrt{13}}}\sqrt{2-x_o}\sqrt{18+2\sqrt{13}+(1+\sqrt{13})x_o}$

$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}}.\sqrt{(2-x_o)(1+\sqrt{13})}\ \times$

$\times \sqrt{18+2\sqrt{13}+(1+\sqrt{13})x_o}$.

Áp dụng BĐT $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ được

$2p \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}}\ \times$

$\times\ [(2-x_o)(1+\sqrt{13})+18+2\sqrt{3}+x_o(1+\sqrt{13})]$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}}\ (20+4\sqrt{13})$

$= 2\sqrt{\frac{(5+\sqrt{13})^3}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sqrt{10-3x_o}=\sqrt{4+\sqrt{13}}\ \sqrt{(4+\sqrt{13})(2+x_o)}\\(1+\sqrt{13})(2-x_o)=18+2\sqrt{13}+(1+\sqrt{13})x_o\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_o = \frac{-8}{1+\sqrt{13}} \Rightarrow |y_o| = \frac{\sqrt{2(\sqrt{13}-1)}}{1+\sqrt{13}}$.

5) Đường thẳng AC có PT $y = k(x-2)$ (với $x \ne 2$) nên tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}y=k(x-2)\\\frac{x^2}{4}+k^2(x-2)^2=1\end{cases}$$

$\Rightarrow (4k^2+1)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow x_A = \frac{8k^2-2}{4k^2+1}$ (nghiệm $x = 2$ bị loại)

$\Rightarrow CA^2 = (x_A-2)^2+y_A^2 = (x_A-2)^2(k^2+1)$

$= \frac{16(k^2+1)}{(4k^2+1)^2}$ (do $y_A = k(x_A-2)$).

Đường thẳng CB có PT $y = -\frac{1}{k}(x-2)$ vì $CA \perp CB$. Tương tự có

$CB^2 = \frac{16(k^2+1)k^2}{(4+k^2)^2}$.

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{8k(k^2+1)}{(k^2+4)(4k^2+1)}$.

Để ý rằng

$S_{ABC} - \frac{16}{25} = \frac{8(k-1)^2(-8k^2+9k-8)}{25(k^2+4)(4k^2+1)} \le 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $k = 1$, nên

$\text{Max}S_{ABC} = \frac{16}{15} \Leftrightarrow k = 1$.

Từ đó $A\left(\frac{6}{5};-\frac{4}{5}\right)$; $B\left(\frac{6}{5};\frac{4}{5}\right)$ và đổi tọa độ trên của A cho B.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

CHỨNG MINH CÁC CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN CỤT

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

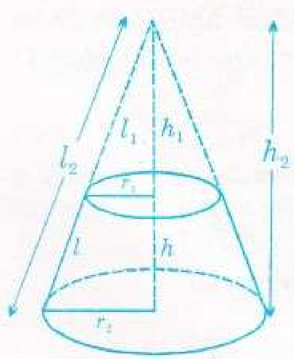
Trong chương *Hình trụ, hình nón, hình cầu* của SGK Toán 9 mới, các công thức tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt được công nhận:

$$S_{xq} = \pi l(r_1 + r_2)\,,\quad V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

trong đó r_1, r_2 là các bán kính đáy, l là độ dài đường sinh, h là chiều cao của hình nón cụt.

Các công thức trên được chứng minh dựa vào các công thức tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón. Dưới đây xin nêu chứng minh đó để các bạn tham khảo.

1. *Chứng minh công thức tính diện tích xung quanh của hình nón cụt*



Trên hình vẽ, ta thấy diện tích xung quanh của hình nón cụt là hiệu của diện tích xung quanh của hình nón lớn (bằng $\pi r_2 l_2$) và diện tích xung quanh của hình nón nhỏ cắt ra từ hình nón lớn (bằng $\pi r_1 l_1$). Do đó

$$\begin{aligned} S_{xq} &= \pi r_2 l_2 - \pi r_1 l_1 = \pi[r_2(l + l_1) - r_1(l_2 - l)] \\ &= \pi(r_2 l + r_2 l_1 - r_1 l_2 + r_1 l) \qquad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác ta có $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$ nên $r_2 l_1 = r_1 l_2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$$S_{xq} = \pi(r_2 l + r_1 l) = \pi l(r_1 + r_2).$$

2. *Chứng minh công thức tính thể tích của hình nón cụt*

Trên hình vẽ, ta thấy thể tích của hình nón cụt là hiệu thể tích của hình nón lớn (bằng $\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$) và thể tích của hình nón nhỏ (bằng $\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$) trong đó h_1 là đường cao hình nón nhỏ, h_2 là đường cao hình nón lớn. Do đó

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi(r_2^2 h_2 - r_1^2 h_1) \\ &= \frac{1}{3}\pi[r_2^2(h + h_1) - r_1^2(h_2 - h)] \\ &= \frac{1}{3}\pi(r_2^2 h + r_2^2 h_1 - r_1^2 h_2 + r_1^2 h) \qquad (3) \end{aligned}$$

Mặt khác ta có $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{h_1}{h_2}$ nên $r_2 h_1 = r_1 h_2$, suy ra $r_2^2 h_1 = r_1 r_2 h_2$ và $r_1 r_2 h_1 = r_1^2 h_2$ do đó

$$r_2^2 h_1 - r_1^2 h_2 = r_1 r_2(h_2 - h_1) = r_1 r_2 h \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)\,.$$

PROBLEMS IN THIS ISSUE *(Tiếp trang 17)*

T11/340. Let I be the incenter of a triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Put $IA = d_a$, $IB = d_b$, $IC = d_c$. Prove that

$$\sqrt{a(bc - d_a^2)} + \sqrt{b(ca - d_b^2)} + \sqrt{c(ab - d_c^2)} \le \sqrt{6abc}.$$

T12/340. Let P be a plane turning around the centroid of a regular tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ with side c. Let B_i be the projection of A_i (i = 1, 2, 3, 4) on the plane P. Find the greatest value of the sum

$$T = A_1B_1^4 + A_2B_2^4 + A_3B_3^4 + A_4B_4^4$$

in term of c and determine the position of P when the sum attains its greatest value.

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2004 - 2005
BẢNG A

VŨ ĐÌNH HÒA
(ĐHSP Hà Nội)

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1: *Xét các số thực x, y thỏa mãn điều kiện :* $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

Lời giải. Viết lại hệ thức điều kiện của đề bài dưới dạng :

$$x+y=3(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}).$$

Từ đó, kí hiệu G là tập giá trị của P, ta có : $a\in G \Leftrightarrow a$ là số thực sao cho hệ phương trình sau (ẩn x, y) có nghiệm

$$\begin{cases}3(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2})=a\\ x+y=a\end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Đặt $u=\sqrt{x+1}$ và $v=\sqrt{y+2}$, từ hệ (I) ta có hệ sau (ẩn u, v) :

$$\begin{cases}3(u+v)=a\\ u^2+v^2=a+3.\end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Ta có (II) $\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=\dfrac{a}{3}\\ uv=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{9}-a-3\right).\end{cases}$

Do đó hệ (I) có **nghiệm** $\Leftrightarrow$ Hệ II có nghiệm (u, v) với $u, v\geq 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (ẩn t)

$$18t^2-6at+a^2-9a-27=0$$

có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-a^2+18a+54\geq 0\\ a\geq 0\\ a^2-9a-27\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2}\leq a\leq 9+3\sqrt{15}.$$

Vậy, ta có $G=\left[\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2};\ 9+3\sqrt{15}\right]$.

Vì thế :

$$\min P=\frac{9+3\sqrt{21}}{2} \text{ và } \max P=9+3\sqrt{15}.$$

• **Chú ý.** *Bài toán còn có thể được giải bằng các phương pháp khác ; chẳng hạn, bằng phương pháp hình học (phương pháp tọa độ), phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cổ điển (bất đẳng thức Cô-si, bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski...).*

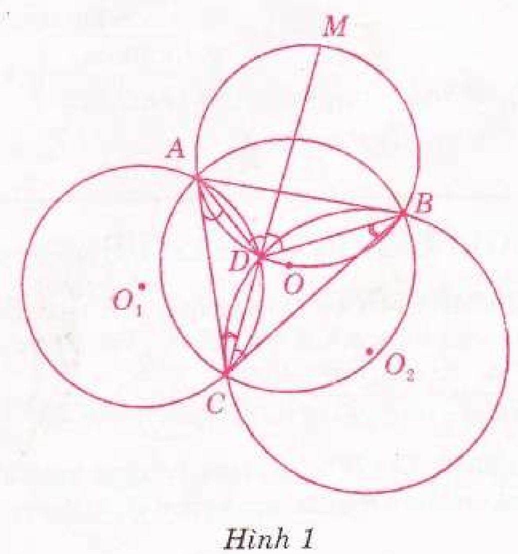
Bài 2. *Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) cố định, bán kính R. Cho A và B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho ba điểm A, B, O không thẳng hàng.*

Xét một điểm C nằm trên đường tròn (O), C không trùng với A và B. Dựng đường tròn (O_1) *đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng BC tại C; dựng đường tròn* (O_2) *đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. Hai đường tròn* (O_1) *và* (O_2) *cắt nhau tại điểm thứ hai D khác C. Chứng minh rằng :*

1) $CD\leq R$ *;*

2) Đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định, khi điểm C di động trên đường tròn (O) sao cho C không trùng với A và B.

((O) kí hiệu đường tròn tâm O).



Hình 1

Lời giải.

1) Từ cách xác định các đường tròn (O_1) và (O_2) ta có :

$\widehat{CAD}=\widehat{DCB}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CD}$ của (O_1)) (1)

$\widehat{ACD}=\widehat{CBD}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CD}$ của (O_2)) (2)

$\Rightarrow \Delta DAC \backsim \Delta DCB \Rightarrow \dfrac{DA}{DC}=\dfrac{DC}{DB}$

$\Rightarrow CD^2=DA.DB$ (3)

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ADB ta được

$AB^2=AD^2+DB^2-2AD.DB.\cos\widehat{ADB}$

$\Rightarrow AB^2 \geq 2AD.DB.(1-\cos\widehat{ADB})$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra:

$AB^2 \geq 2CD^2.(1-\cos\widehat{ADB})$ (5)

Áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác ABC, ta được $AB=2R.\sin\widehat{ACB}$. Kết hợp với (5) suy ra

$2R^2\sin^2\widehat{ACB} \geq CD^2(1-\cos\widehat{ADB})$ (6)

Từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{CAD}+\widehat{ACD}=\widehat{DCB}+\widehat{CBD}$

$=\widehat{CAD}+\widehat{CBD}=\widehat{ACD}+\widehat{DCB}=\widehat{ACB}$ (7)

Do đó $\widehat{ADC}=\widehat{BDC}=180^o-\widehat{ACB}$ (8)

Hơn nữa, dễ thấy :

– C và D nằm cùng phía đối với đường thẳng $AB \Leftrightarrow \widehat{CAD}+\widehat{CBD}<\widehat{CAB}+\widehat{CBA}$.

– C và D nằm khác phía đối với đường thẳng $AB \Leftrightarrow \widehat{CAD}+\widehat{CBD}>\widehat{CAB}+\widehat{CBA}$

Vì vậy, từ (7) suy ra :

– Nếu $\widehat{ACB}$ nhọn thì các điểm C và D nằm cùng phía đối với đường thẳng AB ;

– Nếu $\widehat{ACB}$ tù thì C và D nằm khác phía đối với đường thẳng AB.

Do đó, tùy thuộc vào $\widehat{ACB}$ là góc nhọn hay tù mà từ (8) ta sẽ có

$\widehat{ADB}=360^o-(\widehat{ADC}+\widehat{DCB})=2.\widehat{ACB}$,

hoặc sẽ có $\widehat{ADB}=\widehat{ADC}+\widehat{DCB}=360^o-2\widehat{ACB}$.

Suy ra ta luôn có : $\cos(\widehat{ADB})=\cos(2\widehat{ACB})$.

Vì thế, từ (6), ta được : $CD \leq R$ (đpcm).

2) Từ các kết quả đã chứng minh ở phần trên, ta dễ dàng suy ra :

– CD là đường phân giác của $\widehat{ADB}$ (9)

– O và D nằm cùng phía đối với đường thẳng AB (10)

– $\widehat{ADB}=\widehat{AOB}$ (11)

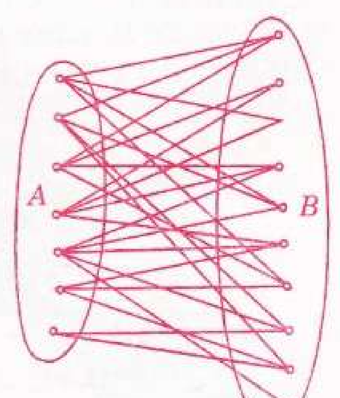
Từ (10) và (11) suy ra khi C di động thỏa mãn các yêu cầu của đề bài thì D di động trên cung AOB của đường tròn cố định (AOB). Vì thế, từ (9) suy ra đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định là trung điểm M của cung AB không chứa O của đường tròn (AOB).

Bài 3. *Trong mặt phẳng, cho bát giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ mà không có ba đường chéo nào của nó cắt nhau tại một điểm. Ta gọi mỗi giao điểm của hai đường chéo của một bát giác là một nút.*

Xét các tứ giác lồi mà mỗi tứ giác đều có cả bốn đỉnh của bát giác đã cho. Ta gọi mỗi tứ giác như vậy là một tứ giác con.

Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất có tính chất : Có thể tô màu n nút sao cho với mọi $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và $i \neq k$, nếu kí hiệu $s(i, k)$ là số tứ giác con nhận A_i, A_k làm đỉnh và đồng thời có giao điểm hai đường chéo là một nút đã được tô màu thì tất cả các giá trị $s(i, k)$ đều bằng nhau.

Lời giải. Ta dựng một đồ thị lưỡng phân có hai tập đỉnh A và B, cạnh chỉ nối đỉnh của A với đỉnh của B mà thôi. A là tập hợp tất cả các tứ giác có 4 đỉnh thuộc $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ mà giao điểm các đường chéo của nó được tô màu và B là tập hợp tất cả các cặp đỉnh (i, k) với $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và $i \neq k$. Ta có theo giả thiết đầu bài là $|A|=n$ và ...



Hình 2

(Xem tiếp trang 14)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

GÓC ĐỊNH HƯỚNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

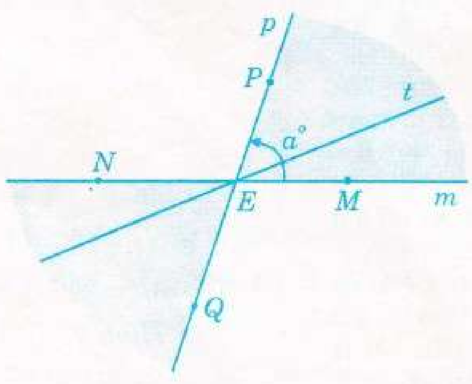
NGUYỄN MINH HÀ - NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

Góc định hướng của hai vectơ (GĐHVT) đã được xét trong phần trước (THTT số 339 tháng 9.2005), trong bài này sẽ trình bày về góc định hướng của hai đường thẳng (GĐHĐT), mối liên hệ giữa hai loại góc định hướng (GĐH) đó và một số hệ thức về góc định hướng của hai đường thẳng.

I. Khái niệm góc định hướng của hai đường thẳng

1. Trên mặt phẳng cho hai đường thẳng m và p cắt nhau tại điểm E. Lấy các điểm M, N thuộc đường thẳng m và các điểm P, Q thuộc đường thẳng p (các điểm M, P, E phân biệt nhau) (hình 1). Ta tưởng tượng khi cho đường thẳng t đi qua điểm E và quay quanh điểm E từ vị trí đường thẳng m đến trùng với đường thẳng p theo một hướng nhất định (dương hoặc âm) thì đường thẳng t quét nên một *góc định hướng của hai đường thẳng* m và p. Ta gọi m là đường thẳng đầu, p là đường thẳng cuối và kí hiệu góc định hướng đó là (m, p) hay (MN, PQ).

2. Giả sử $\widehat{MEP} = a^\circ$ với $0^\circ \le a^\circ < 180^\circ$, hướng từ EM tới EP là hướng dương (nghĩa là sđ $(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) = a^\circ$). Ta có công thức về số đo



Hình 1

GĐHĐT là sđ$(MN, PQ) = a^\circ + k.180^\circ$, trong đó $|k|$ là số lần quay *nửa vòng* từ đường thẳng EM đến đường thẳng EP, $k \ge 0$ nếu quay theo hướng dương, $k < 0$ nếu quay theo hướng âm. Nếu dùng đơn vị đo rađian ta có sđ$(MN, PQ) = \alpha + k\pi$. Như vậy mỗi GĐH của hai đường thẳng giao nhau cùng với một số k thì có một số đo xác định.

3. Đối với hai đường thẳng m, n song song hoặc trùng nhau và một số k ta quy ước có một góc định hướng của hai đường thẳng này, kí hiệu là (m, n) với sđ$(m, n) = k\pi$.

4. Hai GĐHĐT (m, n) và (u, v) được gọi là *bằng nhau* khi sđ(m, n) = sđ(u, v). Ta cũng kí hiệu sự bằng nhau đó là $(m, n) = (u, v)$.

Chú ý rằng hai GĐHĐT bằng nhau thì không nhất thiết hai đường thẳng đầu của chúng là cùng phương.

Quan hệ bằng nhau của các GĐHĐT có các tính chất : phản xạ, đối xứng, bắc cầu, nghĩa là các tính chất của quan hệ tương đương.

II. Mối liên hệ giữa các số đo của GĐHĐT và GĐHVT

Từ công thức sđ$(m, n) = \alpha + k\pi$ suy ra

sđ$(m, n) \equiv \alpha \pmod{\pi}$ và cũng viết là

$(m, n) \equiv \alpha \pmod{\pi}$.

Ta thấy nếu có đồng dư thức $a \equiv b \pmod{2\pi}$ thì $a = b + 2k\pi$ (k nguyên) suy ra $a \equiv b \pmod{\pi}$. Nói cách khác, một đồng dư thức đúng theo môđun 2π thì cũng đúng theo môđun π (điều ngược lại không chắc xảy ra).

Giả sử M, E, N thuộc đường thẳng m và P, E, Q thuộc đường thẳng p với EN, EQ là tia đối của tia EM, EP theo thứ tự (hình 1), từ các hệ thức cơ bản của số đo GĐHĐVT (trang 13 THTT số 339 tháng 9/2005) ta có :

Với $(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$ thì:

$(-\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) \equiv (\overrightarrow{EN}, \overrightarrow{EP}) \equiv \pi + \alpha \pmod{2\pi}$,

$(\overrightarrow{EM}, -\overrightarrow{EP}) \equiv (\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EQ}) \equiv \pi + \alpha \pmod{2\pi}$,

$(-\overrightarrow{EM}, -\overrightarrow{EP}) \equiv (\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$.

Theo nhận xét trên khi xét theo môđun π thì:

$(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) \equiv (-\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) \equiv (\overrightarrow{EM}, -\overrightarrow{EP}) \equiv$

$(-\overrightarrow{EM}, -\overrightarrow{EP}) \equiv \alpha \pmod{\pi}$.

Từ các điều trên ta có

$(m, p) \equiv (\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) \equiv (-\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EP}) \equiv (\overrightarrow{EM}, -\overrightarrow{EP})$

$= (-\overrightarrow{EM}, -\overrightarrow{EP}) \pmod{\pi}$ hay

$(m, p) \equiv (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \equiv (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{PQ}) \equiv (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{QP})$

$\equiv (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{QP}) \pmod{\pi}$.

Từ đó suy ra hệ thức :

$$(MN, PQ) \equiv (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \pmod{\pi} \quad (*)$$

Hệ thức này tương đương với hai hệ thức sau :

$$\left.\begin{aligned}(MN, PQ) &\equiv (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) \pmod{2\pi}\\ (MN, PQ) &\equiv (\overrightarrow{MN}, -\overrightarrow{PQ}) \pmod{2\pi}.\end{aligned}\right\} (**)$$

Các hệ thức (*) và (**) đặc trưng cho số đo GĐH của hai đường thẳng MN, PQ và cũng chỉ ra mối liên hệ giữa số đo GĐHĐT và số đo GĐHVT.

III. Một số hệ thức cơ bản của số đo GĐHĐT

Từ các hệ thức cơ bản của số đo GĐHVT trong phần trước và nhận xét ở mục trên ta có ngay các hệ thức từ (1) đến (4) về số đo của GĐHĐT :

1) *Hai đường thẳng m, n trùng nhau hoặc song song khi và chỉ khi* $(m, n) \equiv 0 \pmod{\pi}$.

2) *Hai GĐH ĐT ngược hướng :*

$$(m, n) \equiv -(n, m) \pmod{\pi}.$$

3) *Hệ thức Sa-lơ về GĐHĐT :*

$$(m, p) \equiv (m, n) + (n, p) \pmod{\pi}.$$

4) *Hiệu của hai GĐHĐT chung đường thẳng đầu :*

$$(n, p) \equiv (m, p) - (m, n) \pmod{\pi}.$$

So sánh các hệ thức (3) và (4) có quy tắc :

Khi chuyển một (số đo) GĐHĐT từ vế này sang vế kia của đồng dư thức theo môđun π, ta phải đổi dấu của nó.

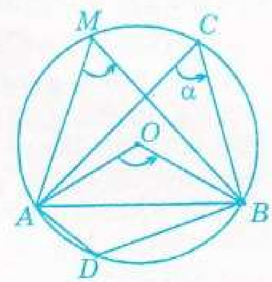
IV. Một số ứng dụng của GĐHĐT

1) *Góc nội tiếp và góc ở tâm*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Giữa góc định hướng nội tiếp và góc định hướng ở tâm của các đường thẳng có hệ thức :

$$(OA, OB) \equiv 2(CA, CB) \pmod{\pi}.$$

Hệ thức này suy ra từ hệ thức (10) theo môđun 2π của GĐHVT, chú ý rằng hệ thức này đúng với điểm C bất kì (khác A, B) nằm trên đường tròn tâm O (h. 2).



Hình 2

2) *Bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn*

Định lí : *Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn* $(MA, MB) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}$ *là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Chú ý rằng trong cách phát biểu trên khi điểm M trùng với A (hoặc B) ta coi MA (hoặc MB) là tiếp tuyến của đường tròn tâm O ngoại tiếp ΔABC.

Hướng dẫn chứng minh :

Thuận : Xét các điểm M thỏa mãn $(MA, MB) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}$. Theo hệ thức (**) thì

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi} \quad (5)$$

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{CA}, -\overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi} \quad (6)$$

Từ kết luận về bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn và cung chứa góc trong phần viết về GĐHVT ta thấy : hệ thức (5) chứng tỏ điểm M nằm trên cung tròn tâm O chắn dây AB và đi qua C, hệ thức (6) chứng tỏ điểm M nằm trên cung tròn tâm O chắn dây AB và không đi qua C ; từ đó suy ra điểm M nằm trên cả đường tròn tâm O.

Đảo : Giả sử điểm M nằm trên đường tròn tâm O ngoại tiếp ΔABC.

Theo hệ thức của GĐHVT về bốn điểm A, B, C, M cùng nằm trên một đường tròn khi C, M nằm cùng phía đối với đường thẳng AB thì $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$, còn khi C, M nằm khác phía đối với đường thẳng AB thì $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{MA}, -\overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$.

Khi xét theo môđun π thì

$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{MA},-\overrightarrow{MB}) \pmod \pi$,

từ đó suy ra $(MA, MB) \equiv (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \pmod \pi$

hay $(MA, MB) \equiv (CA, CB) \pmod \pi$.

Hệ quả : *Điều kiện cần và đủ để các điểm A, B, C, D phân biệt không thẳng hàng cùng nằm trên một đường tròn là*

$$(CA, CB) \equiv (DA, DB) \pmod \pi.$$

Hai bài báo về góc định hướng trên THTT số 339, 340 (tháng 9, 10 năm 2005) chỉ là những kiến thức ban đầu về GĐH. Tuy nhiên những kiến thức này cũng giúp giải nhanh gọn và chính xác khá nhiều bài tập liên quan đến việc biến đổi góc. Một số bài tập loại này sẽ còn được giới thiệu tiếp.

BÀI TẬP

1) Xét các đường thẳng m, n, u, v. Chứng minh rằng :

a) Nếu $m \parallel u$ và $n \parallel v$ thì $(m, n) \equiv (u, v) \pmod \pi$.

b) Nếu $m \perp u$ và $n \perp v$ thì $(m, n) \equiv (u, v) \pmod \pi$.

2) Cho hai điểm A, B nằm trên đường tròn tâm O. Chứng minh rằng : Điểm M thuộc đường tròn tâm O khi và chỉ khi

$$(MA, MB) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \pmod \pi.$$

BẠN CÓ BIẾT ?

(Tiếp trang 29)

...những điều chỉ dẫn về mặt thống kê của bài toán ban đầu : Dù sao, người ta cũng có thể ghi nhận rằng vấn đề ngược lại là cho một tỉ lệ tối đa số lượng những số nguyên tố sinh đôi, cũng khá hạn chế. Năm 2004, Jie Wu, ở Nancy, đã đạt được những ước lượng khá gần với điều người ta phỏng đoán, như một tỉ lệ thực sự.

Hỏi : *Cái gì làm nghẽn sự phỏng đoán đó ?*

G.T. Khá rõ ràng là các lí thuyết hiện nay, một mình chúng không đủ để đi đến thắng lợi. Do vậy, hẳn là phải có những ý tưởng mới. Còn phải rất lâu nữa, có thể hàng thế kỉ, nhưng cũng có thể có khả năng rằng những ý tưởng mới phải sáng tạo ra một cách không khó đến như vậy.

Về lí thuyết số, ít khi bước đi cuối cùng lại khó nhất, mà thường là bước đầu mới khó.

NGUYỄN VĂN THIÊM

(*Theo* **La Recherche** *tháng 9 - 2004*)

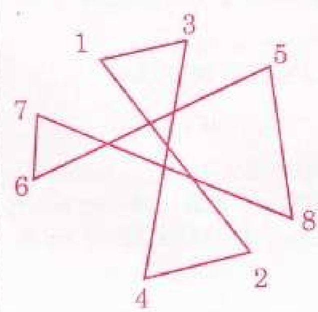
LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN ...

(Tiếp trang 11)

$|B| = C_8^2 = 28$. Một đỉnh của A được nối với một đỉnh (i, k) của B nếu như tứ giác tương ứng nhận i và k làm đỉnh. Như vậy từ mỗi đỉnh của A có đúng $C_4^2 = 6$ cạnh xuất phát.

Theo giả thiết, số cạnh của đồ thị lưỡng phân này nếu tính theo tổng số cạnh xuất phát từ các đỉnh của A sẽ là $s(i, k)$. Ta có $|B| = 28x$, với $x = s(i, k)$ là hằng số không đổi của bài toán. Nếu tính theo tổng số cạnh xuất phát từ các đỉnh của A, tổng số các cạnh sẽ là $n.C_4^2 = 6n$. Từ hai cách đếm khác nhau này, ta có được đẳng thức $6n = 28x$ và suy ra n chia hết cho 14, nên phải có $n \geq 14$.

Bây giờ ta khẳng định là $n = 14$ là đạt được. Thật vậy xét các đường chéo chính (nối các cặp đỉnh đối diện) của bát giác lồi đã cho, có 4 đường chéo như vậy, đánh số các đầu mút của chúng là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8 như trong hình 3. Tô màu 6 giao điểm của các đường chéo này, và giao điểm các đường chéo được tạo dựng bởi các tứ giác sinh bởi 4 cặp cạnh không kề nhau (nét vẽ liền trong hình) với các đường chéo có cách đều các đỉnh của nó (ví dụ với cạnh (1, 3) thì xét thêm (7, 5) và (6, 8), có thêm 2 nút phải tô màu là giao điểm các đường chéo của tứ giác (1, 3, 5, 7) và (1, 3, 6, 8)). Dễ thấy theo đối xứng cách tô màu 14 nút này thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

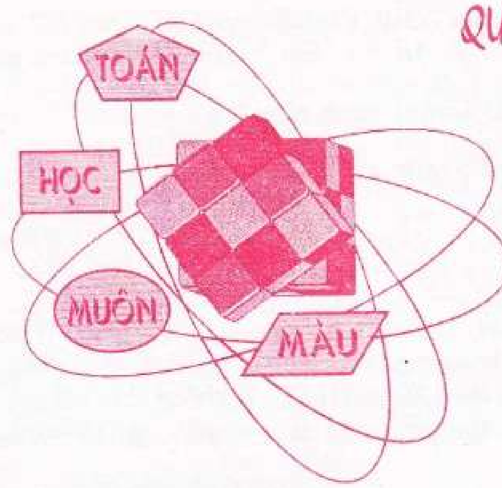


Hình 3

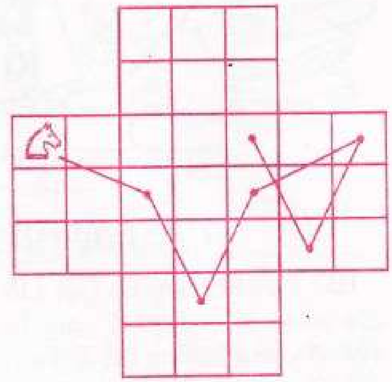
Cũng có thể viết tường minh các nút này là (1, 2, 3, 4), (1, 2, 5, 6), (1, 2, 7, 8), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 6, 8), (1, 4, 5, 8), (1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8), (2, 3, 6, 7), (2, 4, 5, 7), (2, 4, 6, 8), (3, 4, 5, 6), (3, 4, 7, 8) và (5, 6, 7, 8). Một kiểm tra trực tiếp cho thấy chúng thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Chú ý. *Bạn đọc có thể đặt cho mình câu hỏi tương tự là kết quả thay đổi như thế nào nếu thay 8 bằng các con số khác nhỏ hơn để thấy rằng bài toán chỉ thật sự thú vị với con số 8. Đây là những kết quả nghiên cứu chưa từng công bố ở đâu cả. Nguồn gốc của bài toán là giả thuyết Turan cho đến nay vẫn là bài toán mở với câu hỏi tương tự là tần số lặp của các bộ bằng nhau.*

(Kì sau đăng tiếp)



QUÂN MÃ ĐI TRÊN BÀN CỜ HÌNH CHỮ THẬP



Hình 1

Trên bàn cờ hình chữ thập ở hình 1 tạo bởi các ô vuông bằng nhau (cạnh có độ dài 1), một quân mã đi từ tâm ô vuông này sang tâm ô vuông khác theo quy tắc đường chéo hình chữ nhật kích thước 1×2 sao cho đi qua mỗi ô vuông không quá một lần và phải đi liên tiếp để đường đi tạo thành một đường gấp khúc (ô xuất phát được chọn tùy ý).

Dành cho bạn đọc

1) Chứng minh rằng quân mã không thể đi liên tiếp mà qua được tất cả các ô của hình chữ thập.

2) Bạn hãy chỉ ra cách đi liên tiếp của quân mã qua nhiều ô nhất của hình chữ thập.

Giải đáp : ĐẶT BI TRÊN BẢNG

(Đề đăng trên THTT số 337, tháng 7/2005)

Gọi tâm các ô vuông trên bảng ở hình 2 là A_i ($i = 1, 2, ..., 8$), B_j ($j = 1, 2, ..., 8$), C_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Có tất cả 21 hình vuông với các đỉnh nêu trên, gồm có 9 hình vuông tạo bởi 4 ô vuông có một đỉnh chung và 12 hình vuông lớn hơn là :

(1) $A_1A_3A_5A_7$; (2) $A_2A_4A_6A_8$;

(3) $B_1B_3B_5B_7$; (4) $B_2B_4B_6B_8$;

(5) $A_1A_8B_6B_3$; (6) $A_2B_8B_5A_3$;

(7) $B_1A_7A_6B_4$; (8) $B_2B_7A_5A_4$;

(9) $B_1B_8C_4C_2$; (10) $B_2C_1C_3B_3$;

(11) $C_1B_7B_6C_3$; (12) $C_2C_4B_5B_4$.

		A_1	A_2		
		B_1	B_2		
A_8	B_8	C_1	C_2	B_3	A_3
A_7	B_7	C_4	C_3	B_4	A_4
		B_6	B_5		
		A_6	A_5		

Hình 2

Từ yêu cầu của đề bài ta có hai điều khẳng định sau :

1) *Không thể đặt ít hơn 6 viên bi.*

Thực vậy, hình vuông $C_1C_2C_3C_4$ và 4 hình vuông (1), (2), (3), (4) có các đỉnh phân biệt nên phải đặt 5 viên bi vào đỉnh của 5 hình vuông đó. Xét các hình vuông có các đỉnh B_j và C_k. Theo trên có 1 viên bi đặt vào hình vuông $C_1C_2C_3C_4$ và 2 viên bi đặt vào hai hình vuông (3), (4), nhưng có đến 4 hình vuông có đỉnh B_j, C_k là các hình (9), (10), (11), (12), do đó một trong bốn đỉnh hình vuông này chưa có viên bi nào.

2) *Có cách đặt 6 viên bi thỏa mãn yêu cầu.*

Có nhiều cách giải, chẳng hạn đặt 6 viên bi vào các điểm A_1, A_4, B_4, B_5, B_8, C_1. Các bạn tự kiểm tra cách đặt như thế thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Các bạn sau có lời giải tốt :

- *Nguyễn Mạnh Nhất, Nguyễn Bá Dũng*, 12A1, THPT Thuận Thành 1, Bắc Ninh ;
- *Nguyễn Thị Lan*, 12 chuyên Anh, THPT chuyên Bắc Ninh ;
- *Trần Khắc Dũng*, 11B, THPT Anh Sơn 1, Nghệ An ;
- *Đỗ Thị Thu*, 9A, THCS Hải Hậu, Nam Định ;
- *Trịnh Văn Hoàng*, 10C1, THPT Hoằng Hóa 2, Thanh Hóa .

PHI PHI

CÁC LỚP THCS

Bài T1/340 (Lớp 6). Gọi x là tổng các chữ số của số $a = 3^{2004} + 2005$, gọi y là tổng các chữ số của số x và z là tổng các chữ số của số y. Tìm z.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP Hồ Chí Minh)

Bài T2/340. (Lớp 7). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A = |7x-5y| + |2z-3x| + |xy+yz+zx-2000| + t^2 - t + 2005,$

trong đó x, y, z, t là các số hữu tỉ.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/340. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$ sao cho A chia hết cho 2004 với x, y là các số nguyên dương.

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Bài T4/340. Giải phương trình

$$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x.$$

LÊ HOÀI BẮC
(SV 4B khoa Toán, ĐHSP Huế, Thừa Thiên – Huế)

Bài T5/340. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{1+z} + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y}$$

trong đó x, y, z là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

PHẠM HOÀNG HÀ
(GV THPT chuyên ngữ, ĐH Ngoại ngữ Hà Nội)

Bài T6/340. Cho tam giác ABC. Lấy điểm M nằm trong tam giác. AM cắt BC tại điểm E, CM cắt AB tại điểm F. Gọi N là điểm đối xứng của B qua trung điểm của EF. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động bên trong ΔABC.

NGUYỄN QUỲNH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T7/340. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng $S \le \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

TRẦN TUẤN ANH
(Khoa Toán Tin, ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/340. Cho $f(x)$ là đa thức bậc ba với các hệ số nguyên và hệ số bậc cao nhất bằng 1. Biết rằng $f(0) + f(1) + f(-1)$ không chia hết cho 3. Tìm $\lim \sqrt[3]{f(n)}$ khi số tự nhiên n dần tới vô hạn.

NGUYỄN SƠN HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/340. Có tồn tại chăng hàm số $f: (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f^2(x) \ge f(x+y)(f(x)+y)$$

với mọi số thực dương x, y ?

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T10/340. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{C_{k+i+j}^{k+2}} \ge 0$$

trong đó n, k là các số nguyên không âm, $n > 1$, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là một bộ n số thực bất kì và $C_m^r = \frac{m!}{r!(m-r)!}$.

HÀN NGỌC ĐỨC
(SV K47 A2 Toán Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

T11/340. Cho tam giác ABC với các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đặt $IA = d_a$, $IB = d_b$, $IC = d_c$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a(bc-d_a^2)} + \sqrt{b(ca-d_b^2)} + \sqrt{c(ab-d_c^2)} \le \sqrt{6abc}.$$

VŨ THÁI LUÂN
(SV K51C Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T12/340. Cho tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ có cạnh bằng c. Gọi P là mặt phẳng quay quanh tâm của tứ diện. Gọi B_i lần lượt là hình chiếu của A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) trên mặt phẳng P.

Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$T = A_1B_1^4 + A_2B_2^4 + A_3B_3^4 + A_4B_4^4$$

theo c và xác định vị trí của mặt phẳng P lúc đó.

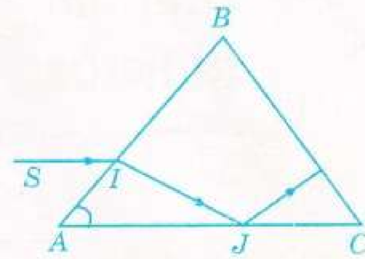
TRẦN VIỆT ANH
(SV K51 CLC khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/340. Một vệ tinh chuyển động theo một quỹ đạo tròn ở độ cao cách mặt Trái Đất bằng bán kính R của Trái Đất. Tại một thời điểm nào đó, từ vệ tinh phóng ra một trạm thăm dò đi tới một hành tinh khác, sau đó phần còn lại của vệ tinh chuyển động theo một quỹ đạo elíp đi tới gần mặt Trái Đất ở điểm đối diện với điểm xuất phát của trạm. Hỏi khối lượng của trạm thăm dò có thể chiếm một phần cực đại bằng bao nhiêu khối lượng của vệ tinh ? Cho biết thế năng của một vật khối lượng m trong trường hấp dẫn của một vật khối lượng M bằng $W_t = -G\dfrac{Mm}{r}$.

ĐẶNG THANH HẢI
(NXB Giáo dục)

Bài L2/340. Một lăng kính có chiết suất n ($n > 1$) đặt trong không khí, có tiết diện là một tam giác ABC với $\widehat{A} < 90°$. Một tia sáng đơn sắc SI chiếu song song với AC, tới mặt AB tại I và khúc xạ, tới AC tại J (xem hình vẽ). Chứng minh rằng tia IJ bị phản xạ toàn phần tại mặt AC với bất kì giá trị nào của góc A ($\widehat{A} < 90°$) và n ($n > 1$).



NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/340 (for 6th grade).

Let x be the sum of the digits of the number $a = 3^{2004} + 2005$, let y be the sum of the digits of the number x and let z be the sum of the digits of the number y. Find z.

T2/340 (for 7th grade).

Find the least value of the expression

$A = |7x-5y| + |2z-3x| + |xy+yz+zx-2000| + t^2 - t + 2005$,

where x, y, z, t are rational numbers.

T3/340. Find the least value of the expression $A = x^2+y^2$, where x, y are positive integers and A is divisible by 2004.

T4/340. Solve the equation

$$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x.$$

T5/340. Find the least value and the greatest value of the expression

$$P = \frac{x+y}{1+z} + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y}$$

where x, y, z are real numbers belonging to the segment $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

T6/340. Let ABC be a triangle. For a point M inside the triangle, let E be the point of intersection of AM and BC, let F be the point of intersection of CM and AB. Let N be the reflection of B in the midpoint of EF. Prove that the line MN passes through a fixed point when M move inside triangle ABC.

T7/340. Let S be the area of triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Prove that $S \le \dfrac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. When does equality occur ?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/340. Let $f(x)$ be a polynomial of degree 3 with integral coefficients and leading coefficient 1. Suppose that $f(0) + f(1) + f(-1)$ is not divisible by 3. Find $\lim \sqrt[3]{f(n)}$ when the integer n tends to infinity.

T9/340. Does there exist a function $f: (0 ; +\infty) \to (0 ; +\infty)$ satisfying the condition $f^2(x) \ge f(x + y)(f(x) + y)$ for all positive real numbers x, y ?

T10/340. Prove that $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{C_{k+i+j}^{k+2}} \ge 0$

where n, k are non negative integers, $n > 1$, $a_1, a_2, ..., a_n$ are n arbitrary real numbers, and $C_m^r = \dfrac{m!}{r!(m-r)!}$.

(Xem tiếp trang 9)

Bài T1/336. (Lớp 6). *Hãy so sánh các phân số sau (không làm phép chia trực tiếp) :*

$$\frac{222221}{222222};\ \frac{444443}{444445};\ \frac{666664}{666667};\ \frac{888885}{888889}.$$

Lời giải. Ta có

$$1-\frac{222221}{222222}=\frac{1}{222222}=\frac{12}{12\,.\,222222}=\frac{12}{2666664}$$

$$1-\frac{444443}{444445}=\frac{2}{444445}=\frac{6.2}{6\,.\,444445}=\frac{12}{2666670}$$

$$1-\frac{666664}{666667}=\frac{3}{666667}=\frac{4.3}{4\,.\,666667}=\frac{12}{2666668}$$

$$1-\frac{888885}{888889}=\frac{4}{888889}=\frac{3.4}{3\,.\,888889}=\frac{12}{2666667}.$$

Vì

$$\frac{12}{2666664}>\frac{12}{2666667}>\frac{12}{2666668}>\frac{12}{2666670}.$$

nên dễ dàng suy ra

$$\frac{222221}{222222}<\frac{888885}{888889}<\frac{666664}{666667}<\frac{444443}{444445}$$

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này và hầu hết làm theo cách trên. Một số bạn có cách giải khác, tóm tắt như sau:

Đặt $a=\frac{222221}{222222}$; $b=\frac{444443}{444445}$;

$c=\frac{666664}{666667}$; $d=\frac{888885}{888889}$.

Ta có thể tính được:

$\frac{1}{1-a}=222222$; $\frac{1}{1-b}=222222+\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{1-c}=222222+\frac{1}{3}$; $\frac{1}{1-d}=222222+\frac{1}{4}$.

Từ đó dễ dàng suy ra $a<d<c<b$. Ta được kết quả như trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: *Phan Mạnh Hải*, 6A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Vũ Đình Long*, 6A, *Trương Thị Hồng Nhung, Nguyễn Bá Liên, Nguyễn Tất Ngọc*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Trần Thị Mai Dung*, 6C, THCS Thái Hòa II, Nghĩa Đàn; **Hà Nội:** *Lê Quang Huy, Lê Minh Hoàng*, 6H1, THCS Trưng Vương, Q Hoàn Kiếm, *Nguyễn Thị Khánh Chi*, 6A11, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hà Tây:** *Lê Thành Nhân*, 6C, THCS Yên Nghĩa, Hà Đông; *Đinh Ngọc Thiện*, 6A, THCS Cổ Đông, TX Sơn Tây; **Đăk Lăk :** *Phan Thị Ngọc Yến*, 6A4, THCS Nguyễn Huệ, Krông Buk; **Quảng Trị :** *Trương Nhã Uyên*, 4/1, TH Hàm Nghi, Đông Hà; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phi Hùng*, 5A, TH Trung Trạch, Bố Trạch; **Quảng Ngãi:** *Võ Quang Viễn, Võ Quang Duyệt, Dương Trần Quỳnh Nam*, 6A, THCS Hành Trung, *Trương Thị Thu Hiền*, 6D, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Hải Dương:** *Trịnh Thị Hoàng Dung*, 6A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà; *Mạc Đức Huy*, 6A, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; **Vĩnh Phúc :** *Lê Thị Minh Phương*, 6A , THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Minh Dũng*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; *Nguyễn Văn Phương, Nguyễn Long Huy, Hoàng Thị Trang, Nguyễn Thị Giang B, Nguyễn Thị Ngọc, Nguyễn Thị Xuân, Lê Thị Tuyết Mai, Nguyễn Ngọc Quý, Nguyễn Thị Giang A, Bùi Thị Thu Hiền, Phùng Anh Quất, Nguyễn Diệu Linh, Nguyễn Thị Thu Trang*, 6A1, *Nguyễn Thị Kim Tuyến*, 6C, THCS Yên Lạc, H Yên Lạc ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Xuân Giang*, 6B, THCS Lê Hữu Lập, *Hoàng Hoa Mai*, 5A1, TH Tân Sơn, *Trịnh Quỳnh Trang*, 6H, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; *Hoàng Thị Thùy Trang*, 6B, THCS Hoằng Trinh, *Cao Thanh Tùng*, 6, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; *Mai Thế Tân*, 6A, THCS Cao Bá Quát, Bỉm Sơn; *La Hồng Quân*, 6B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; *Mai Thùy Dung*, 6C, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; *Nguyễn Thị Thu Hà*, 5A2, TH Thịnh Lộc, Hậu Lộc ; **Hải Phòng:** *Lê Anh Tú, Trần Đức Hùng*, 6A9, THCS Chu Văn An, Q Ngô Quyền .

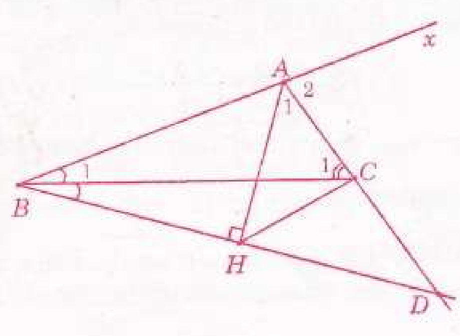
NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/336. (Lớp 7). *Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ACB}=45^o$ và góc A tù. Kẻ tia BD cắt tia đối của tia CA ở D sao cho $\widehat{CBD}=\widehat{ABC}$. Kẻ $AH\perp BD$ tại H. Tính góc CHD.*

Lời giải. (Theo bạn *Lê Trọng Cường*, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hóa**).

Gọi tia đối của tia AB là tia Ax. Xét ΔABH, theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có

$$\widehat{HAx}=\widehat{AHB}+\widehat{ABH}=90^o+2\widehat{B_1}$$



Xét ΔABC ta có

$$\widehat{A_2} = \widehat{C_1} + \widehat{B_1} = 45^o + \widehat{B_1} = \frac{1}{2}\widehat{HAx}.$$

Suy ra AC là tia phân giác của góc $\widehat{HAx}$.

Kết hợp với giả thiết BC là tia phân giác của góc ABH, suy ra HC là tia phân giác của góc AHD (Với mỗi tam giác, tia phân giác của một góc trong và hai đường phân giác của các góc ngoài thuộc hai đỉnh còn lại đồng quy tại một điểm).

Vậy $\widehat{CHD} = 45^o$.

Nhận xét. 1) Bạn *Lê Trọng Cường* còn nêu bài toán mở rộng hơn :

"Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} = 45^o$, $\widehat{A} > 45^o$ và $\widehat{A} \neq 90^o$. Kẻ tia By thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC, không chứa A sao cho $\widehat{CBy} = \widehat{CBA}$. Đường thẳng By cắt đường thẳng AC tại D. Kẻ $AH \perp BD$ tại H. Tính góc CHD".

Với bài toán này ta phải xét hai trường hợp :

TH1. $\widehat{A} > 90^o$, ta có kết quả như đã trình bày ở trên.

TH2. $45^o < \widehat{A} < 90^o$ ta có kết quả $\widehat{CHD} = 135^o$. Các bạn tự xét thêm bài toán mở rộng của bạn Cường khi $\widehat{A} < 45^o$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả :

Hòa Bình : *Bùi Minh Đức*, 7A, THCS Chi Nê, Lạc Thủy ; **Vĩnh Phúc :** *Kim Đình Sơn*, 7D, THCS Liên Bảo, TX. Vĩnh Yên ; **Nghệ An :** *Nguyễn Anh Tú*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; *Phạm Lê Nhật Hoàng*, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh ; *Nguyễn Thị Thúy*, 7B, THCS Hạnh Lâm ; **Quảng Ngãi :** *Lương Thị Yến Ánh*, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng ; **TP. Hồ Chí Minh :** *Lê Đức Thuận*, 7A6, THCS Trần Đại Nghĩa, Q. Phú Nhuận ; **Hà Tĩnh ;** *Nguyễn Trung Thành*, 7D, THCS TT Kỳ Anh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/336. *Nếu một tam giác vuông có số đo chiều dài các cạnh là các số nguyên thì số đo diện tích tam giác đó có thể là số chính phương không ?*

Lời giải. Giả sử tồn tại tam giác vuông có số đo chiều dài các cạnh a, b, c (a là cạnh huyền) là số nguyên mà số đo diện tích S là số chính phương, nghĩa là $a^2 = b^2 + c^2$ và $bc = 2S = 2k^2$ (k nguyên dương). Xét tam giác thỏa mãn điều kiện đó mà có cạnh huyền nhỏ nhất và a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau (vì nếu a, b c có ước chung lớn hơn 1 thì chia chúng cho ước chung đó). Vậy có số nguyên dương m, n khác tính chẵn lẻ, nguyên tố cùng nhau mà $a = m^2 + n^2$, $b = m^2 - n^2$, $c = 2mn$ (bạn đọc tự chứng minh hoặc xem bài *Phương pháp lùi vô hạn* trong THTT số 310 tháng 4.2003).

Từ $S = bc : 2$ suy ra $(m+n)(m-n)mn = k^2$.

Vì $(m, n) = 1$ và m, n khác tính chẵn lẻ nên $(m+n, m) = (m+n, n) = (m-n, m) = (m-n, n) = 1$. Gọi $d = (m+n, m-n)$ thì d lẻ là ước của $2m$, $2n$ nên $d = 1$. Vậy $m+n$, $m-n$, m, n *đôi một nguyên tố cùng nhau* mà tích của chúng bằng k^2 nên (theo sự phân tích ra thừa số nguyên tố) có bốn số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn :

$m+n = x^2$, $m-n = y^2$, $m = z^2$, $n = t^2$. Suy ra

$$\begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2) = 4m = (2z)^2 \\ (x+y)(x-y) : 2 = (x^2-y^2) : 2 = n = t^2 \\ 2z = 2\sqrt{m} < m^2 < m^2 + n^2 = a \text{ (vì } m \geq 2). \end{cases}$$

Vậy tam giác vuông cạnh $2z$, $x+y$, $x-y$ có số đo diện tích là số chính phương mà cạnh huyền $2z < a$: vô lí.

Vậy diện tích tam giác vuông có số đo các cạnh là số nguyên không thể là số chính phương.

Nhận xét. 1) Có bạn đưa sai công thức nghiệm của phương trình Py-ta-go. Một số bạn lập luận dài hoặc thiếu chặt chẽ. Chẳng hạn: $(m, n) = 1 \Rightarrow (m+n, m-n) = 1$; hoặc : $(m+n, m-n, m, n) = 1 \Rightarrow$ bốn số $m+n$, $m-n$, m, n đều chính phương (!)

2) Các bạn sau có lời giải đúng :

Quảng Trị : *Trương Xuân Nhã*, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà ; **Đăk Lăk :** *Võ Văn Tuấn*, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk ; **Thanh Hóa :** *Hoàng Đức Ý*, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa.

HOÀNG TRỌNG HẢO

Bài T4/336. *Giải hệ phương trình sau, trong đó a, b, c là các số dương cho trước :*

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{z} = c - zx \\ \dfrac{b}{y} - \dfrac{c}{x} = a - xy \\ \dfrac{c}{z} - \dfrac{a}{y} = b - yz \end{cases}$$

Lời giải. Nhân các phương trình của hệ với c, a, b, theo thứ tự ta được

$$\begin{cases} \dfrac{ac}{x} - \dfrac{bc}{z} = c^2 - czx \\ \dfrac{ba}{y} - \dfrac{ca}{x} = a^2 - axy \\ \dfrac{cb}{z} - \dfrac{ab}{y} = b^2 - byz \end{cases}$$

Cộng theo từng vế ba phương trình này ta có:

$$a^2+b^2+c^2=axy+byz+czx \qquad (1)$$

Mặt khác, quy đồng mẫu số các phương trình của hệ đã cho ta được :

$$\begin{cases} az-bx=cxz-x^2z^2 \\ bx-cy=axy-x^2y^2 \\ cy-ax=bzy-y^2z^2 \end{cases}$$

Cộng theo từng vế ba phương trình này ta có :

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=axy+byz+czx \qquad (2)$$

Cộng theo từng vế (1) và (2) ta được :

$$(a-xy)^2+(b-yz)^2+(c-zx)^2=0$$

$$\Leftrightarrow xy=a,\ yz=b,\ zx=c \qquad (\mathrm{I})$$

Do a, b, c là các số dương nên từ (I) suy ra x, y, z cùng dấu. Từ đó

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{ac}{b}} \\ y=\sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ z=\sqrt{\dfrac{bc}{a}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-\sqrt{\dfrac{ac}{b}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ z=-\sqrt{\dfrac{bc}{a}} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x, y, z) là :

$$\left(\sqrt{\frac{ac}{b}};\sqrt{\frac{ab}{c}};\sqrt{\frac{bc}{a}}\right),\left(-\sqrt{\frac{ac}{b}};-\sqrt{\frac{ab}{c}};-\sqrt{\frac{bc}{a}}\right).$$

Nhận xét. Đây là bài toán dễ, hầu hết các bạn đều giải đúng. Các bạn có lời giải gọn gàng là :

Hà Tây : *Nguyễn Thế Tâm*, 8A1, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ ; **Hải Phòng :** *Phạm Văn Dương*, *Phạm Văn Phương*, đội 7, xã Thủy Sơn, Thủy Nguyên ; **Nam Định :** *Phạm Thị Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên, *Nguyễn Duy Khánh*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Kiên Giang :** *Võ Đức Huy*, 8/4, THCS Lê Quý Đôn, Rạch Giá.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/336. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \ge 2\sqrt{2}$$

trong đó a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2=1$.

Lời giải. Gọi vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là A, ta có

$$A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)=\frac{1-a+b}{b}+\frac{1+a-b}{2}.$$

Vì $a^2+b^2=1$ và a, b là các số dương nên $0<a<1$, $0<b<1$. Do đó $1-a+b>0$, $1+a-b>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\dfrac{1-a+b}{b}$ và $\dfrac{1+a-b}{a}$, ta có

$$A \ge 2\sqrt{\frac{(1-a+b)(1+a-b)}{ab}}$$

$$=2\sqrt{\frac{1-a^2-b^2+2ab}{ab}}=2\sqrt{\frac{2ab}{ab}}=2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \dfrac{1-a+b}{b}=\dfrac{1+a-b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nhận xét.

1) Bài toán trên có thể giải bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thanh Hóa : *Hoàng Đức Ý*, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa ; *Cao Thanh Bình*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Trịnh Quang Thanh*, 8B, THCS Hàm Rồng, *Nguyễn Văn Hữu*, 9C, THCS Nông Cống, *Nguyễn Trọng Hùng*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn ; **Nghệ An :** *Trần Văn Phúc*, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Thị Hồng*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Hà Tây :** *Nguyễn Trung Nghĩa*, 8C, THCS Thạch Thất, *Trần Thị Thùy Trang*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Đức Tâm*, 9E, TX Phúc Yên, *Kim Đình Sơn*, 8D, TX Vĩnh Yên, *Hoàng Minh Toàn*, TX Vĩnh Yên ; **Hà Giang ;** *Phạm Hùng Sơn*, 8A, THCS TTr Vị Xuyên ; **Kiên Giang :** *Võ Đức Huy*, 8/4, THCS Lê Quý Đôn, TX Rạch Giá ; **Phú Thọ:** *Đào Đức Trung*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu ; **Hưng Yên :** *Lương Xuân Huy*, 8A, THCS Tiên Lữ ; **Nam Định :** *Cao Mạnh Hùng*, 9A, THCS Yên Định, Hải Hậu ; **Quảng Bình :** *Phan Hồng Sơn*, 8A, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/336. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với H là trực tâm. Chứng minh rằng :*

$$\frac{HA}{BC}+\frac{HB}{CA}+\frac{HC}{AB} \ge \sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

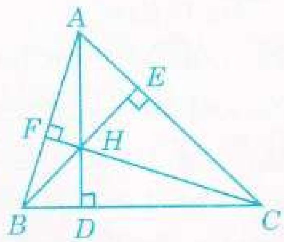
Lời giải. Đặt $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $x = AH$, $y = BH$, $z = CH$. Kí hiệu S là diện tích.

Ta có $\Delta AFC \backsim \Delta HEC$ nên $\dfrac{HC}{AC}=\dfrac{CE}{CF}$.

Từ đó $\dfrac{HC\times HB}{AC\times AB}=\dfrac{CE\times HB}{CF\times AB}=\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự ta có :

$\dfrac{HB\times HA}{AC\times BC}=\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$



$\dfrac{HA\times HC}{AB\times BC}=\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$

Nên $\dfrac{xy}{ab}+\dfrac{yz}{bc}+\dfrac{xz}{ac}=$

$=\dfrac{HA\times HB}{AC\times BC}+\dfrac{HB\times HC}{AC\times AB}+\dfrac{HC\times HA}{AB\times BC}$

$=\dfrac{S_{HBC}+S_{HAB}+S_{HAC}}{S_{ABC}}=1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{AH}{BC}=\frac{BH}{CA}=\frac{CH}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Mặt khác $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2\geq 3.\left(\dfrac{xy}{ab}+\dfrac{yz}{bc}+\dfrac{xz}{ac}\right)=3$

(CM trên và do $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}-\dfrac{x}{a}\right)^2\geq 0$).

Vậy $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\geq\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\dfrac{AH}{BC}=\dfrac{BH}{CA}=\dfrac{CH}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{HF}{CF}=\dfrac{HD}{AD}=\dfrac{HE}{BE}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow$ AD, BE, CF là trung tuyến. Khi đó tam giác ABC là đều.

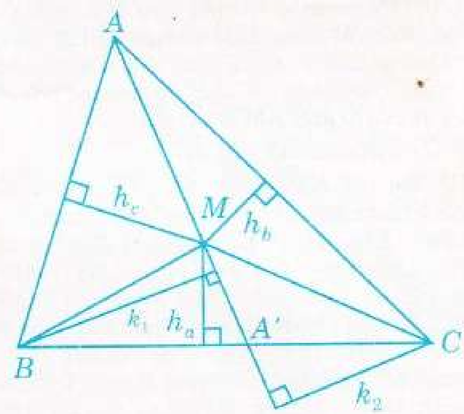
Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Phú Thọ : *Nguyễn Tiến Thanh*, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Văn Quang*, 9C, THCS Tự Lập, Mê Linh ; **Hải Dương :** *Nguyễn Huy Hoàng*, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 8A, THCS Tiên Lữ ; *Lê Thị Nguyệt*, 8A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hà Nội :** *Đỗ Như Milan*, 8A1, THCS Chu Văn An ; **Nam Định :** *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên, *Vũ Ngọc Trung*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, *Nguyễn Duy Khánh*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Thi Sách*, 8A, THCS Gio Mai, Gio Linh ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 9/4, trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/336. *Trong tam giác ABC lấy điểm M bất kì. Đặt BC = a, CA = b, AB = c. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các khoảng cách từ M đến các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm vị trí của điểm M để tích $h_a.h_b.h_c$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo a, b, c.*

Lời giải. (Của nhiều bạn)



Kí hiệu S là diện tích, p là nửa chu vi tam giác ABC. Vì điểm M nằm trong tam giác ABC nên

$$ah_a+bh_b+ch_c=2S \qquad (1)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ah_a, bh_b, ch_c ta có :

$$(ah_a)(bh_b)(ch_c)\leq\left(\frac{ah_a+bh_b+ch_c}{3}\right)^3 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $h_ah_bh_c\leq\dfrac{8S^3}{27abc}$ (3)

Theo công thức Hê–rông từ (3) có

$$h_ah_bh_c\leq\frac{8\left(\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right)^3}{27abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ah_a=bh_b=ch_c$. Lúc đó nếu gọi A' là giao điểm của đường thẳng AM với cạnh BC ; k_1, k_2 lần lượt là khoảng cách từ B, C đến đường thẳng AA' thì $\frac{A'B}{A'C}=\frac{k_1}{k_2}=\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}=\frac{c.h_c}{b.h_b}=1$. Suy ra AA' là đường trung tuyến của ΔABC. Lập luận tương tự ta thấy M nằm trên các đường trung tuyến của ΔABC, và do đó M là trọng tâm của tam giác này.

Vậy giá trị lớn nhất của tích $h_a.h_b.h_c$ bằng $\frac{8\left(\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right)^3}{27abc}$ đạt được khi và chỉ khi M là trọng tâm ΔABC.

Nhận xét.

1) Bài toán trên có thể mở rộng theo hướng : *Tìm vị trí của điểm M trong khối tứ diện ABCD sao cho tích các khoảng cách từ nó đến các mặt của tứ diện này là lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo thể tích, diện tích các mặt của tứ diện ABCD.*

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Hà Nội : *Đỗ Như Milan*, 8A1, THCS Chu Văn An ; **Vĩnh Phúc :** *Ngô Thị Lệ Hằng*, 9D, THCS Xuân Hòa, TX Phúc Yên ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Thị Thu Hà*, 8A1, THCS Lâm Thao, *Đào Đức Trung*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Bắc Ninh :** *Lê Thế Tài*, 9B, THCS Từ Sơn ; **Nam Định :** *Nguyễn Duy Khánh*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh, *Phạm Thị Phương Thanh*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định ; **Thanh Hóa :** *Hoàng Thị Thùy Trang*, 6B, THCS Hoằng Trinh, Hoằng Hóa, *Hoàng Đức Ý*, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa ; **Nghệ An :** *Phạm Anh Minh*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Đức Công*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Quảng Trị** *Trương Xuân Nhã*, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Như Quốc Trung*, *Nguyễn Như Đức Trung*, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt, Quận Hải Châu ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/336. *Cho p là số nguyên tố lẻ và đa thức $Q(x) = (p-1)x^p - x - 1$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương a sao cho Q(a) chia hết cho p^p.*

Lời giải. • *Nhận xét:* Trong tập số $\{1, 2, ..., p^p\}$ gồm p^p số, giả sử có hai số u, v khác nhau thì $Q(u) \not\equiv Q(v) \pmod{p^p}$.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Giả sử có $Q(u) \equiv Q(v) \pmod{p^p}$

$\Leftrightarrow (p-1)u^p - u - 1 \equiv (p-1)v^p - v - 1 \pmod{p^p}$

$\Leftrightarrow (p-1)(u^p - v^p) - (u-v) \equiv 0 \pmod{p^p}$ (1)

Theo định lí nhỏ Phec–ma thì $u^p \equiv u \pmod p$ và $v^p \equiv v \pmod p$ với p là số nguyên tố nên $u^p - v^p \equiv u - v \pmod p$. Từ đó và (1) suy ra $(p-2)(u-v) \equiv 0 \pmod p \Rightarrow u \equiv v \pmod p$ (2)

Cũng từ (1) có

$(u-v)((p-1)(u^{p-1}+u^{p-2}v+...+uv^{p-2}+v^{p-1})-1) \equiv 0$ $\pmod{p^p}$. Từ đó và (2) suy ra

$(u-v)((p-1).p.u^{p-1}-1) \equiv 0 \pmod{p^p}$ nên phải có $u - v \equiv 0 \pmod{p^p}$ điều này mâu thuẫn với điều giả sử $u \not\equiv v \pmod{p^p}$. Vậy nhận xét được chứng minh.

• Từ nhận xét trên suy ra trong tập số $\{1, 2, ..., p^p\}$ gồm p^p số thì tồn tại duy nhất một số a sao cho $Q(a) \equiv 0 \pmod{p^p}$ hay $Q(a) \vdots p^p$.

• Xét dãy số dạng $a_k = a + k.p^p$ với $k = 0, 1, 2, ...$ dễ thấy rằng $Q(a_k) \equiv Q(a) \equiv 0 \pmod{p^p}$ nghĩa là tồn tại vô hạn số a_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ thỏa mãn $Q(a_k)$ chia hết cho p^p.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn cho lời giải đúng. Một số bạn chọn dãy số (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ như sau:

$a_0 = \frac{p-1}{2}$ và $a_n = a_{n-1} + Q(a_{n-1})$ với $n = 1, 2, ...,$ rồi chứng minh bằng quy nạp rằng $Q(a_n) \vdots p^n$, từ đó cho $n = p$ thì chứng minh được nhận xét đã nêu trong lời giải trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Phú Thọ: *Trần Huy Đức*, 12 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Văn Quang*, 12A1, *Lê Công Truyền*, *Nguyễn Văn Ngọc*, *Nguyễn Xuân Thọ*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây:** *Nguyễn Xuân Việt*, 10 Toán, THPT Nguyễn Huệ; **Hà Nội:** *Đào Văn Thinh*, 10A1, PTCTT, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Trọng Nhật Quang*, 11A1 Toán, *Hà Minh Tuấn*, 10A2 Toán, PTCTT, ĐHKHTN Hà Nội; **Hải Dương:** *Vũ Xuân Dương*, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi, *Hoàng Văn Hùng*, 11A1, THPT Kinh Môn; **Nghệ An:** *Hoàng Thị Thủy*, 11A1, PTCTT, ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** *Lê Nam Trường*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Thái Thị Thu Trang*, 10A, THPT Vĩnh Linh, *Nguyễn Hải Thạch*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Trương Xuân Nhã*, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Quốc Việt*, 11T, *Lương Bá Linh*, 12T, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10A, THPT Phan Chu Trinh, Xuân Lộc, Sông Cầu; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 10 Toán, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Tuấn Tú*, 11CT, THPT Lê Hồng Phong, *Nguyễn Gia Luyện*, 9/8 THCS Nguyễn Du, Gò Vấp, *Vương Tất Đạt*, 10 Toán, THPT NK ĐHQG TP Hồ Chí Minh; **Cần Thơ:** *Nguyễn Minh Cường, Lâm Bá Lê Trương*, 10A1, *Võ Quốc Bá Cẩn*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

VIỆT HẢI

Bài T9/336. *Giải phương trình*

$$x^4 + 4ax^3 + 6b^2x^2 + 4c^3x + 1 = 0$$

trong đó a, b, c là các số thực dương, $a \le 1$, biết rằng phương trình này có bốn nghiệm thực.

Lời giải. Do các hệ số của PT đều dương và theo giả thiết thì PT có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 đều thực, nên cả bốn nghiệm này đều âm. Suy ra

$-x_1 > 0, -x_2 > 0, -x_3 > 0, -x_4 > 0.$

Theo định lí Vi-ét thì

$$\begin{cases}(-x_1)+(-x_2)+(-x_3)+(-x_4)=4a\\(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4)=1.\end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si,

$$[(-x_1)+(-x_2)+(-x_3)+(-x_4)]^4 \ge$$
$$\ge 4^4(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4), \qquad (1)$$

ta thu được $(4a)^4 \ge 4^4$, hay $a \ge 1$. Kết hợp với giả thiết $0 < a \le 1$, ta được $a = 1$.

Khi đó thì (1) xảy ra dấu đẳng thức, suy ra $(-x_1)=(-x_2)=(-x_3)=(-x_4)$

và $(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4)=1$.

Vậy nên $(-x_1)=(-x_2)=(-x_3)=(-x_4)=1$ và ta thu được cả bốn nghiệm của phương trình đều bằng -1.

Nhận xét. Đây là một bài toán không khó và có thể giải chỉ bằng kiến thức toán trung học cơ sở nên có rất nhiều bạn học sinh THCS tham gia giải. Các bạn sau có lời giải tốt :

Phí Quốc Tuân, 9D Toán, THCS Thạch Thất, **Hà Tây** ; *Phan Hồng Sơn, Phùng Phi Hùng*, 9A, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch, *Phạm Tiến Đồng*, 10, THPT chuyên **Quảng Bình** ; *Nguyễn Như Quốc Trung*, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt, **Đà Nẵng** ; *Nguyễn Thị Ngọc*, 6A, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** ; *Phạm Thành Thái, Nguyễn Quốc Thắng, Vũ Xuân Dương*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** ; *Trần Văn Huỳnh*, 10, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, *Trần Trung Dũng, Phùng Đình Phúc, Nguyễn Khắc Tùng*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Trần Khánh Hoàn*, 10A1, THPT Yên Mỹ, *Phạm Tiến Dũng*, 10 THPT chuyên **Hưng Yên** ; *Dương Minh Hùng, Nguyễn Quang Phương, Nguyễn Xuân Việt*, 10T, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tây**; *Nguyễn Trí Hiếu*, 10T, THPT chuyên **Bắc Ninh** ; *Hà Minh Tuấn*, 10A1, THPT chuyên, ĐHKHTN ; *Đào Văn Thịnh*, 10A1, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội** ; *Đỗ Thanh Tùng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du, **Đăk Lăk**; *Nguyễn Mạnh Hùng*, 10C10, THPT Phạm Ngũ Lão, **Hải Phòng** ; *Đinh Văn Sơn*, 10, THPT chuyên **Hà Tĩnh**; *Lê Hữu Điền Khuê*, 10T, THPT Quốc học Huế, **Thừa Thiên – Huế** ; *Hoàng Đức Trung*, 10, THPT chuyên **Bắc Giang** ; *Lê Văn Chánh*, 10, THPT chuyên **Bến Tre** ; *Trương Huy Tiếp*, 10, THPT chuyên **Đà Nẵng** ; *Nguyễn Tiến Dũng*, 10, THPT chuyên **Phú Yên** ; *Hoàng Trung Tính*, 10, THPT chuyên **Quảng Ngãi** ; *Thái Thị Thu Trang*, 10, THPT Vĩnh Linh, **Quảng Trị** ; *Hoàng Thị Hoàng Anh*, 10, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa** ; *Hoàng Vũ Hạnh*, 10, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa.**

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/336. *Tính tổng gồm 2n số hạng :*

$$S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \ldots + (-1)^k\frac{1}{k}.C_{2n}^{k-1} + \ldots + (-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n},$$

trong đó C_n^k là các hệ số của sự khai triển nhị thức Newton.

Lời giải. *Nhận xét:* Với mọi $k = 2, 3, \ldots, 2n+1$ ta có :

$$\frac{1}{k}.C_{2n}^{k-1} = \frac{1}{k}.\frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k+1)!} =$$
$$= \frac{1}{2n+1}.\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} = \frac{C_{2n+1}^k}{2n+1}.$$ Do đó :

$$S = \sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k.\frac{C_{2n+1}^k}{2n+1}$$
$$= \frac{1}{2n+1}.\left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k C_{2n+1}^k - C_{2n+1}^o + C_{2n+1}^1\right)$$
$$= \frac{1}{2n+1}\left((1-1)^{2n+1} - 1 + 2n + 1\right) = \frac{2n}{n+1}.$$

Nhận xét. Đây là bài toán đơn giản, cơ bản. Nhiều bạn giải theo cách phức tạp hơn : dùng đạo hàm hoặc tích phân. Các bạn lớp 10 sau có lời giải tốt :

Thái Nguyên : *Trần Tuấn Nghĩa*, 10T, THPT chuyên ; **Hà Nội :** *Hà Minh Tuấn*, 10A2, PTCTT ĐHKHTN, *Đào Văn Thịnh*, 10A1, PTCTT ĐHSP ; **Hà Tây :** *Trần Ngọc Thắng*, 10T, THPT Nguyễn Huệ ; **Hải Dương :** *Vũ Xuân Dương*, *Phạm Thành Thái*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Văn Huy*, 10A1, THPT Xuân Hòa, TX. Phúc Yên ; *Trần Văn Huỳnh*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch ; *Ngô Tuấn Anh*, 10A9, *Trần Trung Dũng*, *Phùng Đình Đức*, 10A1, THPT chuyên ; **Nam Định :** *Đinh Quang Huy*, 10T, THPT Lê Hồng Phong ; **Thanh Hóa :** *La Tiến Nam*, 10A1, THPT Thiệu Hóa ; **Quảng Bình :** *Đặng Ngọc Thanh*, 10T, THPT chuyên ; **TP Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Viết Huân*, 10T, THPT Nguyễn Thượng Hiền, *Lê Bùi Tiến Duy*, 10T, THPT Lê Hồng Phong ; **Phú Yên :** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10A, THPT Phan Chu Trinh, *Trần Hồ Thạnh Phú*, 10T, THPT Lương Văn Chánh ; **Đăk Lăk :** *Nguyễn Hữu Hiếu*, *Đỗ Thanh Tùng*, 10T, THPT Nguyễn Du ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/336. *Chứng minh rằng với tam giác ABC bất kì luôn có :*

a) $\cos A + \cos B + \cos C + \cot g A + \cot g B + \cot g C \geq \frac{3}{2} + \sqrt{3}$; (*)

b) $\sqrt{3}(\cos A + \cos B + \cos C) + \cot g(A/2) + \cot g(B/2) + \cot g(C/2) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (**)

Lời giải. (Dựa theo *Vũ Văn Quang*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

Trước hết, để được gọn gàng trong việc trình bày ta sử dụng các kí hiệu sau :

Kí hiệu

$f_1 = \sum \cos A = \cos A + \cos B + \cos C$;

$f_2 = \sum \cot g A = \cot g A + \cot g B + \cot g C$;

$f_3 = \sum \cot g \frac{A}{2} = \cot g \frac{A}{2} + \cot g \frac{B}{2} + \cot g \frac{C}{2}$;

$\prod \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{A}{2} . \sin \frac{B}{2} . \sin \frac{C}{2}$, ...

trong đó $0 < A, B, C$ và $A + B + C = \pi$.

Thế thì các vế trái của các BĐT (*) và (**) theo thứ tự có dạng :

$f = f(A, B, C) = f_1 + f_2$;

$g = g(A, B, C) = \sqrt{3} f_1 + f_3$.

Ta sử dụng các kết quả sau :

$$\sum \cos A = 1 + 4 \prod \sin \frac{A}{2} \quad (1)$$

$$\sum \cot g A = \frac{\sum \sin^2 A}{2 \prod \sin A} \quad (2)$$

$$\sum \cot g \frac{A}{2} = \frac{\sum \sin A}{4 \prod \sin \frac{A}{2}} \quad (3)$$

$$\prod \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{8} \quad (4) \qquad \prod \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (5)$$

$$\prod \cot g \frac{A}{2} \geq 3\sqrt{3} \ (6).$$

Bây giờ áp dụng BĐT Cô–si cho bốn số dương $\frac{\sin A}{2 \sin B \sin C}, \frac{\sin B}{2 \sin C \sin A}, \frac{\sin C}{2 \sin A \sin B}$ và $\frac{8}{\sqrt{3}} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ rồi đến bốn số dương :

$\frac{\sin A}{4 \prod \sin \frac{A}{2}}, \frac{\sin B}{4 \prod \sin \frac{A}{2}}, \frac{\sin C}{4 \prod \sin \frac{A}{2}}$ và $8\sqrt{3} . \prod \sin \frac{A}{2}$,

đồng thời sử dụng các BĐT (4), (5) và (6) ta lần lượt thu được các BĐT sau đây :

$$\sum \cot g A + \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\prod \sin \frac{A}{2} \right) \geq$$

$$\geq 4 \sqrt[4]{\frac{\prod \sin A}{\sqrt{3} \prod \sin A}} = 4 \sqrt[4]{\frac{1}{8\sqrt{3} \prod \cos \frac{A}{2}}} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (i)$$

$$\sum \cot g \frac{A}{2} + 8\sqrt{3} \left(\prod \sin \frac{A}{2} \right)$$

$$\geq 4 \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3} \prod \sin A}{8 \left(\prod \sin \frac{A}{2} \right)^2}} = 4 \sqrt[4]{\sqrt{3} \prod \cot g \frac{A}{2}} \geq 4\sqrt{3} \quad (ii)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC là đều.

• Cuối cùng, từ (1), (2), (i) và (4), ta được BĐT (*) cần tìm. Thật vậy :

$f = \sum \cot gA + \sum \cos A$

$= \left[\sum \cot gA + \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\prod \sin\frac{A}{2}\right)\right] + 1 - \left(\frac{8}{\sqrt{3}} - 4\right)\prod \sin\frac{A}{2} \geq$

$\geq \frac{4\sqrt{3}}{3} + 1 - \left(\frac{8}{\sqrt{3}} - 4\right).\frac{1}{8} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$.

• Từ (1), (3), (ii) và (4), ta được BĐT (**) cần tìm. Thật vậy :

$g = \sum \cot g\frac{A}{2} + \sqrt{3}\left(\sum \cos A\right)$

$= \sum \cot g\frac{A}{2} + 8\sqrt{3}\left(\prod \sin\frac{A}{2}\right) + \sqrt{3}\left(1 + 4\prod \sin\frac{A}{2}\right) -$

$- 8\sqrt{3}\left(\prod \sin\frac{A}{2}\right)$

$= \left[\sum \cot g\frac{A}{2} + 8\sqrt{3}\left(\prod \sin\frac{A}{2}\right)\right] + \sqrt{3} - 4\sqrt{3}\left(\prod \sin\frac{A}{2}\right)$

$\geq 4\sqrt{3} + \sqrt{3} - 4\sqrt{3}.\frac{1}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra ở (*) và (**) khi và chỉ khi ΔABC là đều. Bài toán đã được giải xong.

Nhận xét. 1) Nếu chúng ta để ý rằng những hàm lượng giác $f_1 = f_1(A, B, C)$, $f_2 = f_2(A, B, C)$, $f_3 = f_3(A, B, C)$ của ba biến số dương A, B, C không độc lập mà ràng buộc với nhau bởi đẳng thức $A+B+C = \pi$, với $\text{Max} f_1 = M_1 = \frac{3}{2}$, $\min f_2 = m_2 = \sqrt{3}$ và $\min f_3 = m_3 = 3\sqrt{3}$, thì bài toán T11/336 trên đây cho ta biết rằng :

Các hàm lượng giác $f(A, B, C) = f_1(A, B, C) + f_2(A, B, C)$ và $g(A, B, C) = \sqrt{3}f_1(A, B, C) + f_3(A, B, C)$ của ba biến số dương A, B, C phụ thuộc điều kiện $A+B+C = \pi$ và theo thứ tự có cực tiểu $f_{\min} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$ và $g_{\min} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ $= \frac{3}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$.

Lại để ý rằng :

$\min f = \frac{3}{2} + \sqrt{3} = M_1 + m_2$ và $\min g = \frac{3}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}M_1 + m_3$,

trong đó $M_1 = \frac{3}{2} < m_2 = \sqrt{3}$, cũng như $\sqrt{3}M_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3} < m_3 = 3\sqrt{3}$, đồng thời $f(A, B, C)$ và $g(A, B, C)$ đều đạt cực tiểu tại $A = B = C \left(= \frac{\pi}{3}\right)$ đồng thời với $f_1(A, B, C)$ đạt cực đại và $f_2(A, B, C)$ cũng như $f_3(A, B, C)$ đạt cực tiểu với cùng giá trị $A = B = C \left(= \frac{\pi}{3}\right)$.

Bạn *Phan Tiến Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên **Hưng Yên** đã phát biểu bài toán tổng quát hơn :

Giả sử r_1, r_2, r_3 là những số thực dương và $f, g; f_1, f_2, f_3$ là những hàm lượng giác của ba biến dương A, B, C $(A + B + C = \pi)$ được kí hiệu như trong lời giải ở trên. Thế thì :

a) Nếu $f = r_1f_1 + r_2f_2$ và $r_1M_1 \leq r_2m_2$ thì :

f đạt $f_{\min} = m' = r_1M_1 + r_2m_2$.

b) Nếu $g = r_1f_1 + r_3f_3$ và $r_1M_1 \leq r_3m_3$ thì :

g đạt $g_{\min} = m'' = r_1M_1 + r_3m_3$.

Các bạn có thể xét thêm trường hợp $r_1M_1 > r_2m_2$ và $r_1M_1 > r_3m_3$. Khi đó f và g có đạt cực trị không ? Phải chăng, khi đó f và g đạt cực đại ?

2) Một số bạn sử dụng phương pháp giải tích (khảo sát hàm số) lời giải quá dài, phức tạp và không chặt chẽ.

3) Đáng tiếc có một số bạn đã phạm sai lầm cơ bản về suy luận lôgic. Chẳng hạn, xuất phát từ $f \geq \frac{3}{2} + \sqrt{3}$ (cần chứng minh) suy ra $f_2 \geq \sqrt{3}$ (đúng) đã khẳng định rằng (*) được chứng minh (!).

4) Ngoài hai bạn *Vũ Văn Quang* và *Phan Tiến Dũng*, các bạn sau đây có lời giải tốt.

Vĩnh Phúc : *Nguyễn Xuân Thọ*, 11A1, THPT chuyên ; **Hưng Yên :** *Nguyễn Văn Thọ*, 11 Toán, THPT chuyên ; **Thanh Hóa :** *La Tiến Nam*, 10A1, THPT Thiệu Hóa, *Trần Văn Duy*, 12A1, THPT Hậu Lộc 1.

Ghi chú : Trong phần nhận xét về bài T12/335 trên THTT tháng 9/2005 do sơ xuất đã in thiếu tên hai bạn *Phan Tiến Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên và *Nguyễn Trọng Nhật Quang*, 11A1 Toán ĐHKHTN Hà Nội. Hai bạn đó đã có lời giải tốt, ngoài ra có nhận xét thêm rằng phương pháp sử dụng ba đường tròn đồng quy tại một điểm thuộc miền tam giác ABC còn giúp phát hiện và giải được một số bài toán có liên quan.

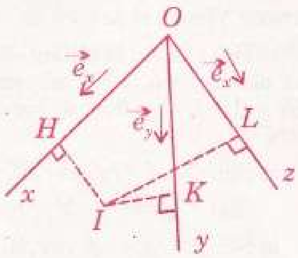
NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T12/336. *Cho hình tứ diện ABCD. Lấy điểm M nào đó nằm trong tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc DA, DB, DC sao cho MA', MB', MC' theo thứ tự song song với các mặt phẳng (DBC), (DCA), (DAB). Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp tứ diện A'B'C'D luôn đi qua một điểm cố định khác điểm D khi M chạy trong miền tam giác ABC.*

Lời giải. Trước hết xin phát biểu và chứng minh hai bổ đề sau đây

Bổ đề 1. Cho điểm O, số k, và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}.\vec{a} = k$ là một mặt phẳng.

Chứng minh : Lấy điểm M_o xác định mà $\overline{OM_o}.\overline{a}=k$ (có rất nhiều điểm M_o như vậy). Ta thấy :



$\overline{OM}.\overline{a}=k$

$\Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{a}=\overline{OM_o}.\overline{a}$

Hình 1

$\Leftrightarrow (\overline{OM}-\overline{OM_o}).\overline{a}=0 \Leftrightarrow \overline{M_oM}.\overline{a}=0.$

$\Leftrightarrow$ M thuộc mặt phẳng qua M_o, vuông góc với $\overline{a}$.

Bổ đề 2. Cho góc tam diện $Oxyz$ và ba số dương a, b, c. Các điểm A, B, C theo thứ tự thay đổi trên Ox, Oy, Oz sao cho :

$$a.OA+b.OB+c.OC=1.$$

Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ luôn đi qua một điểm cố định khác O.

Chứng minh : Gọi $\overline{e_x}, \overline{e_y}, \overline{e_z}$ là các vectơ đơn vị theo thứ tự cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Gọi H, K, L là hình chiếu của I trên Ox, Oy, Oz (h. 1). Đương nhiên, H, K, L là trung điểm của OA, OB, OC (1).

Từ (1), ta có :

$\overline{OI}\,(a\overline{e_x}+b.\overline{e_y}+c.\overline{e_z})$

$=a.\overline{OI}.\overline{e_x}+b.\overline{OI}.\overline{e_y}+c.\overline{OI}.\overline{e_z}$

$=a.OH+b.OK+c.OL$ (định lí hình chiếu)

$=\dfrac{1}{2}(a.OA+b.OB+c.OC)=\dfrac{1}{2}.$

Từ đó, theo Bổ đề 1, I luôn thuộc mặt phẳng (P) cố định xác định bởi điểm O và vectơ hằng $a.\overline{e_x}+b\overline{e_y}+c\overline{e_z}$ (2).

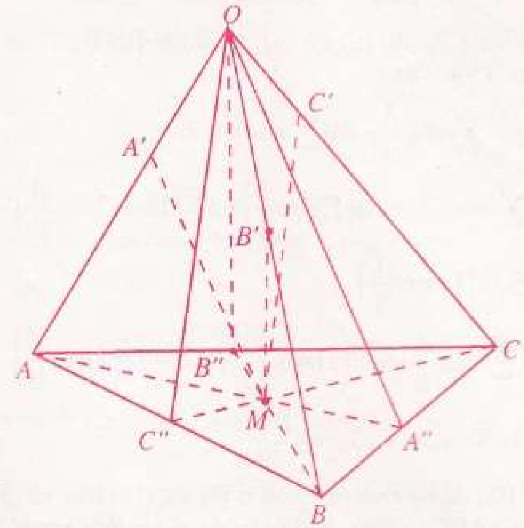
Gọi N là điểm đối xứng của O qua (P). Theo (2), N cố định. Theo tính chất đối xứng của mặt cầu, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ luôn đi qua điểm cố định $N \neq O$.

Trở lại việc giải bài toán (h. 2).

Gọi A'', B'', C'' lần lượt là giao điểm của AM, BM, CM với BC, CA, AB. Vì MA', MB', MC' theo thứ tự song song với (OBC), (OCA), (OAB) nên $MA'//OA''$, $MB'//OB''$, $MC'//OC''$. Từ đó, theo định lí Ta–lét, ta có :

$$\frac{OA'}{OA}+\frac{OB'}{OB}+\frac{OC'}{OC}=\frac{MA''}{AA''}+\frac{MB''}{BB''}+\frac{MC''}{CC''}=1$$

(kết quả quen thuộc).



Hình 2

Áp dụng bổ đề 2 cho góc tam diện $OABC$, ba số dương $\dfrac{1}{OA},\dfrac{1}{OB},\dfrac{1}{OC}$ và ba điểm A', B', C' ta có mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OA'B'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.

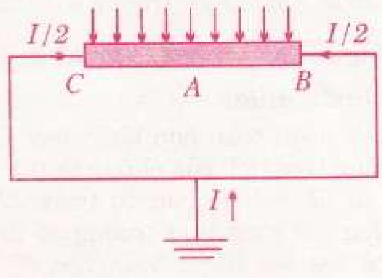
Nhận xét. Đây là bài toán khó. Lời giải của các bạn đều khá dài và phức tạp. Các bạn sau có lời giải tốt.

Vĩnh Phúc : *Vũ Văn Quang*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Trần Văn Huỳnh*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Cần Thơ :** *Võ Quốc Bá Cẩn*, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/336. *Một thanh dẫn điện đồng nhất, hai đầu thanh được nối đất như hình vẽ. Người ta chiếu một chùm êlectron lên bề mặt thanh dẫn. Số êlectron rơi vào bề mặt của thanh trên 1cm trong 1s là như nhau. Điện trở của thanh là R, cường độ dòng điện trên đoạn nối đất là I. Gọi A là trung điểm của thanh, B là điểm cuối thanh. Tìm hiệu điện thế U_{AB}.*

Lời giải. Do tính đối xứng nên cường độ dòng điện tại B và C là $I/2$ (chiều như hình



vẽ). Vì số êlectron rơi lên thanh trên 1cm trong 1s như nhau nên cường độ dòng điện tại điểm cách A một khoảng x là : $i_x = \frac{I}{2}.\frac{x}{l/2} = \frac{I.x}{l}$ (trong đó l là chiều dài thanh BC). Suy ra

$$dU = i_x dR = \frac{I.x}{l}.R.\frac{dx}{l} = \frac{IR}{l^2}xdx$$

Suy ra $U_{AB} = -\frac{IR}{l^2}\int_0^{l/2} xdx = -\frac{IR}{8}$ (có dấu trừ là do chiều dòng điện).

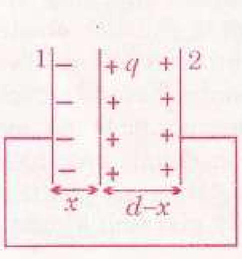
Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Bắc Ninh : Nguyễn Trọng Đạm, 12 Lí, THPT chuyên ; **Hà Nội :** *Nguyễn Tuấn Tú*, 10 Lí, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Tiền Giang :** *Ngô Hải Đăng*, 11 Lí, THPT chuyên ; **Hải Dương :** *Lê Hoàng Dũng*, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi ; **Nghệ An :** *Hà Thủy Nguyên*, A3, K32, THPT Phan Bội Châu ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Quang Hòa*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

Bài L2/336. *Một tụ điện phẳng chưa tích điện, điện môi là chân không, có điện dung C. Nối 2 bản tụ điện với nhau bằng một dây dẫn. Một bản kim loại mỏng, phẳng có kích thước bằng kích thước mỗi bản của tụ điện, được tích điện +q, đặt sát một trong hai bản tụ (hình vẽ). Tính công cần thiết để tịnh tiến bản kim loại đó theo phương vuông góc với các bản tụ đến vị trí cách đều các bản tụ.*

Bỏ qua tác dụng của trọng lực với bản kim loại.



Lời giải. (Dựa theo *Nguyễn Xuân Nam*, 12 Lí, THPT chuyên **Bắc Ninh**). Kí hiệu 1, 2 là hai bản tụ điện ; d là khoảng cách giữa hai bản tụ điện và S là diện tích của mỗi bản tụ điện và bản kim loại.

Xét bản kim loại cách bản 1 một khoảng x, cách bản 2 một khoảng $(d - x)$.

Cường độ điện trường do bản kim loại tích điện gây ra tại một điểm bất kì xung quanh nó là $E_o = \frac{q}{2\varepsilon_o S}$.

Cường độ điện trường do mỗi bản tụ điện gây ra tại mỗi điểm có cùng cường độ E. Từ $U_{12} = 0$, ta có :

$$(-E - E - E_o)x + (-E - E + E_o)(d - x) = 0$$

Suy ra : $2E = E_o\left(1 - \frac{2x}{d}\right)$.

Như vậy, bản kim loại tích điện đặt trong điện trường gây bởi hai bản tụ điện có cường độ 2E. Điện trường này tác dụng lên bản kim loại tích điện một lực :

$$F = 2Eq = qE_o\left(1 - \frac{2x}{d}\right).$$

Công của lực điện trường khi làm dịch chuyển bản kim loại một đoạn nhỏ dx là :

$$dA = Fdx = qE_o\left(1 - \frac{2x}{d}\right)dx \qquad (1)$$

Công cần thiết để tịnh tiến bản kim loại đến vị trí cách đều hai bản tụ điện bằng công của lực điện trường, được tính bằng cách lấy tích phân phương trình (1) :

$$A = \int_0^{d/2} qE_0\left(1 - \frac{2x}{d}\right)dx = \frac{qE_0 d}{4} = \frac{q^2 d}{8\varepsilon_0 S}$$

Vì $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ nên $A = \frac{q^2}{8C}$.

Nhận xét. 1) Một số bạn dùng phương pháp năng lượng để giải bài toán này cũng cho kết quả đúng.

2) Ngoài bạn *Nguyễn Xuân Nam*, các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hải Phòng : *Phạm Tuấn Hiệp*, 11 Lí, THPT năng khiếu Trần Phú ; **Tiền Giang** : *Ngô Hải Đăng*, 11 Lí, THPT Chuyên ; **Vĩnh Phúc** : *Trần Ngọc Linh*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Phú Thọ** : *Nguyễn Quang Huy*, 12A1, THPT chuyên Phú Thọ ; **Thanh Hoá** : *Nguyễn Tuấn Dương*, 12T, THPT Lam Sơn.

ANH HOÀNG

Mời các bạn xem Kết quả Cuộc thi giải Toán và Vật lí trên THTT năm học 2004-2005 trên số báo 341 tháng 11 năm 2005.

GIỚI THIỆU TOÁN CAO CẤP

GIẢI TÍCH KHÔNG CHUẨN MỰC

DƯ ĐỨC THẮNG
(GV. ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Thế kỉ XX vừa qua là thế kỉ của những cuộc cách mạng mang tính toàn cầu. Đó là cách mạng trong khoa học công nghệ, cách mạng trong kinh tế toàn thế giới, cách mạng trong nhận thức, trong tư tưởng, văn hóa, ... Toán học của thế kỉ XX cũng không phải là một ngoại lệ. Trong thế kỉ này, hàng loạt tư tưởng mới mang tính đột phá đã xuất hiện, tạo nên những thay đổi trong việc nghiên cứu Toán học hiện đại, đưa nó lên một tầm cao mới. Hòa vào cuộc cách mạng đó là sự ra đời của *Giải tích không chuẩn mực (Non Standard Analysis* – NSA).

Vào năm 1960, Abraham Robinson, giáo sư Toán thuộc trường đại học Princeton, đã sử dụng lí thuyết mô hình (*model theory*) đề xuất một cách nhìn nhận các **đại lượng vô cùng bé, vô cùng lớn**, những cơ sở của khái niệm giới hạn, nền tảng của mọi khái niệm trong giải tích, như là các **số lí tưởng**, tức là các phần tử không phải là các số mà ta đã quen thuộc từ trước đến nay, nhưng tính chất của chúng là có thể lớn hơn hay bé hơn vô hạn so với mọi số thực (thông thường). Đây là sự cụ thể hóa ý tưởng về các phần tử lí tưởng của G.W.Leibniz. Các số lí tưởng vô cùng lớn và vô cùng bé so với mọi số thực thông thường được kí hiệu tương ứng là i – lớn và i – nhỏ, với i là viết tắt của ideally (lí tưởng). Với cách nhìn như vậy trường số thực $\mathbb{R}$ có thể mở rộng thành trường số $^*\mathbb{R}$ mà ở đó tính acsimet không thỏa mãn, tức là tồn tại những số "thực" a i – lớn sao cho $a > nb$, với mọi $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Các số thực đã quen biết với chúng ta ($x \in \mathbb{R}$) được gọi là số thực chuẩn mực. Nói cách khác các số thực đã được định nghĩa từ trước đến nay đều là chuẩn mực, ví dụ số 0 là chuẩn mực, số π là chuẩn mực,.... Ngược lại, các số thuộc $^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ được gọi là các số (thực) không chuẩn mực, ví dụ như số ω i – lớn, số $r + \varepsilon$ với r là số chuẩn mực và ε là i – nhỏ dương, tức là nhỏ hơn mọi số thực dương khác 0 ... Lúc đó ta nhận được trường số $^*\mathbb{R}$ mở rộng của trường số thực $\mathbb{R}$, gọi là **trường số thực không chuẩn mực**.

Một cách hoàn toàn hợp lôgic, bây giờ ta có thể mở rộng Giải tích của chúng ta (tức là Giải tích mà ta đã nghiên cứu từ trước đến nay) theo hướng mở rộng như trường số thực : Ta gọi tất cả các đối tượng toán học đã biết từ trước đến nay, tức là những đối tượng toán học đã được định nghĩa theo một cách duy nhất nào đó là **chuẩn mực**, thêm vào đó ta đưa ra các đối tượng không chuẩn mực, ví dụ các số không chuẩn mực, các khoảng không chuẩn mực. Ví dụ :

– Hàm số $\ln x$ là một hàm chuẩn mực với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là một đối tượng chuẩn mực trên $\mathbb{R}$.

– Khoảng (ε, a) là một khoảng không chuẩn mực, với ε là một số *i –nhỏ,* ngoại trừ số 0 (là số i – nhỏ chuẩn mực duy nhất).

Lúc đó mở rộng của Giải tích Toán học được gọi là *Giải tích không chuẩn mực* (NSA). Các số lí tưởng là không chuẩn mực trong NSA và ta chỉ được ra rằng luôn tồn tại các phần tử không chuẩn mực trong một tập hợp chứa vô hạn phần tử. Trong giải tích không chuẩn mực, ta xây dựng hệ thống các phép toán, hệ thống tiên đề (mở rộng hệ tiên đề của lí thuyết tập hợp cổ điển) và các nguyên lí, từ đó phát biểu các khái niệm không chuẩn mực : khái niệm nội giới và ngoại giới (internal, external), khái niệm bóng (shadow) của một đối tượng toán học, hào quang (halo) và thiên hà (galaxy), ... Ta có thể hiểu một cách đơn giản rằng Giải tích không chuẩn mực được xây dựng dựa vào việc không sử dụng khái niệm giới hạn để định nghĩa các khái niệm mà thay vào đó là các khái niệm không chuẩn mực – i-nhỏ, i-lớn, i-gần, cùng hệ tiên đề mở rộng của nó.

Từ hệ thống những khái niệm, người ta có thể phát biểu những định nghĩa, tính chất của giải tích thông thường (gọi là giải tích chuẩn mực) và những chứng minh của chúng theo ngôn ngữ không chuẩn mực. Xét một cách tổng thể, giải tích không chuẩn mực là một mở rộng bảo toàn của giải tích chuẩn mực hiểu theo nghĩa những gì đúng đắn trong giải tích chuẩn mực vẫn đúng trong giải tích không

BẠN CÓ BIẾT ?

ĐI TÌM MỘT Ý TƯỞNG MỚI VỀ PHỎNG ĐOÁN NHỮNG SỐ NGUYÊN TỐ SINH ĐÔI

Lần thứ hai trong một năm, một thông báo chứng minh một kết quả về sự phân bố những số nguyên tố bị tuyên bố vô hiệu lực. Sự phỏng đoán những số nguyên tố sinh đôi, nói rằng tồn tại vô số những cặp số nguyên tố dạng (p, $p+2$), dường như còn có những triển vọng tốt sau này. Dưới đây, Gérald Tenenbaum, giáo sư trường đại học Henri-Poincaré (Nancy I, Pháp), trả lời phỏng vấn của tạp chí La Recherche về vấn đề trên.

Hỏi: *Tháng 5.2004, sự thông báo một chứng minh về phỏng đoán những số nguyên tố sinh đôi phải chăng bị chôn vùi thật sự ?*

G. Tenenbaum (G.T.). Sai lầm nói trong thông báo dường như khó chữa. Điều đó càng đáng tiếc khi ý tưởng xuất phát là hay. Nếu sự chứng minh đưa ra là đúng thì kì công tăng gấp đôi. Không chỉ có việc phỏng đoán đã được chứng minh mà sự chứng minh đó còn sử dụng những phương pháp "cổ điển", tức là chỉ với những công cụ mà lí thuyết ngày nay đã có.

Hỏi : *Năm ngoái, Cem Yildirim và Dan Goldston đã thông báo rằng một kết quả về phỏng đoán các số nguyên tố sinh đôi cũng đã bị tuyên bố vô hiệu lực. Phải chăng có một quan hệ gần gũi giữa hai sự kiện đó ?*

G.T. Đây là một sự tiến bộ về sự ước lượng khoảng cách trung bình giữa hai cặp nguyên tố liên tiếp. Thực ra, Granville và Soundararajan đã nhận xét rằng nếu sự chứng minh đúng thì sẽ có thể suy ra một kết quả so sánh được với sự phỏng đoán những số nguyên tố sinh đôi, như tồn tại vô số những cặp số nguyên tố dạng (p, $p+12$). Cả về những công trình này, cũng có một sự tiếp cận "cổ điển", do đó hơi đáng ngờ, mặc dù kết quả thông báo còn chưa nhiều thành tựu.

Hỏi: *Như vậy, việc phỏng đoán những số nguyên tố sinh đôi hiện nay như thế nào ?*

G.T. Người ta chờ mong những kết quả. Năm 1989, Antal Balog, ở Budapest, đã có những kết quả về sự phỏng đoán "khái quát", nghĩa là về những dãy số nguyên tố loại (p, $p+2$, $p+6$) hay những loại khác. Nhưng, mặc dù gây ấn tượng, những kết quả đó có một sự trình bày "lỏng lẻo" và chỉ cung cấp

(Xem tiếp trang 14)

---

chuẩn mực, đồng thời giải tích không chuẩn mực không đưa ra bất kì một tính chất hoàn toàn chưa có trong giải tích chuẩn mực. Mọi sự mở rộng đều nhằm mục đích cho ta thấy được sự khác nhau giữa những hiện tượng toán học mà ta không thể thấy được với cách nhìn của giải tích chuẩn mực, cũng như việc xem TV đen trắng (giải tích chuẩn mực) và TV màu (giải tích không chuẩn mực) đối với cùng một hình ảnh như nhau. Một ví dụ cụ thể là trường số thực, khi nhìn dưới góc độ chuẩn mực thì mọi số đều bình đẳng, nhưng khi xem xét dưới con mắt không chuẩn mực thì trường số thực $\mathbb{R}$ được chia thành ba lớp khác nhau : các số i – nhỏ, các số thực khác 0 thông thường (gọi là các số đánh giá được) và các số i – lớn.

Kể từ khi được phát minh đến nay, Giải tích không chuẩn mực đã được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực toán học hiện đại, như : giải tích phức, lí thuyết phương trình vi phân thường và phương trình vi phân đạo hàm riêng, lí thuyết tích phân và độ đo, lí thuyết xác suất và quá trình ngẫu nhiên,... Trong mỗi lĩnh vực, giải tích không chuẩn mực đã đạt được những thành tựu đáng kể. Mặc dù ta đều biết rằng Giải tích Toán học không cần phải chờ đến sự xuất hiện của Giải tích không chuẩn mực mới phát triển được, nhưng với ngôn ngữ không chuẩn mực các nhà toán học có một công cụ mới làm cho công việc xây dựng các tính chất và chứng minh chúng bớt đi tính nhàm chán. Bên cạnh việc đơn giản hóa các phép chứng minh (chỉ cần một vài dòng sử dụng hệ tiên đề không chuẩn mực là ta có thể thay thế cho phép chứng minh có thể tới hàng trang giấy), giải tích không chuẩn mực còn giúp ta tiếp cận vấn đề theo một hướng mới (gọi là phương pháp tiếp cận vô cùng nhỏ – *infinitesimals approach*), qua đó đạt được những kết quả đẹp đẽ, thú vị, mang đến cho Toán học những màu sắc mới, đa dạng phong phú, xứng đáng là đòn bẩy cho các ngành khoa học khác.

SINH VIÊN VỚI SỐ π

(π ≈ 3,1415926535897932384)

Ba ơi con rất nhớ nhà
Một mình con nhớ tới bà tới ông
Bốn tháng xa cách dòng sông
Một thời để nhớ trong lòng của con
Năm nào con chạy lon ton
Chín thơm quả ngọt, quả ngon bà dành
Hai mùa lá đỏ rồi xanh
Sáu năm đi mãi đã thành nhớ nhung
Năm nay chín nhớ mười mong
Ba ơi con sẽ về cùng quê xa
Năm nay con sẽ về nhà
Tám ngày sum họp nhà ta vui vầy
Chín rồi trái ngọt vườn cây
Bảy năm chăm sóc giờ đây đã vàng
Chín giờ theo chuyến đò ngang
Ba đưa xuống bến để sang thăm bà
Hai dòng sông đó quê ta
Ba chợt nhớ lại ngày xa mái trường
Tám năm chinh chiến mù sương
Bốn phương khói lửa vẫn thường đọc thơ.

*
* *

Hồn con ươm những ước mơ
Đêm đêm con nhớ vần thơ thuở nào
Số π hấp dẫn biết bao
Con đưa từng số đi vào thơ ca
Hồn thơ ý toán giao hòa
Sinh viên khoa Toán cũng là thi nhân.

TRẦN VĂN PHONG
(Toán 3B-K25, ĐH Quy Nhơn, Bình Định)

Bài thơ trên đây cho bạn cách nhớ 19 chữ số thập phân sau dấu phẩy của số π qua 19 chữ đầu dòng.

Giải đáp bài :

CÁCH GIẢI NÀO ĐƠN GIẢN NHẤT

(Đề đăng trên THTT số 338 tháng 8.2005)

Cách giải đơn giản nhất như sau :

Để chọn được 1 đội vô địch trong n đội bóng tham gia thi đấu thì phải có $n - 1$ đội bị loại. Theo thể thức đấu loại trực tiếp (cứ mỗi trận đấu thì 1 đội bị loại) thì phải tổ chức $n - 1$ trận đấu để loại bỏ $n - 1$ đội.

Với $n = 150$ đội thi đấu thì cần tổ chức 149 trận đấu để chọn được 1 đội vô địch.

Nhận xét: Nhiều bạn tìm các cách tính lần lượt số trận đấu hoặc chứng minh bằng quy nạp mà không chú ý đến *sự tương ứng giữa số trận đấu và số đội bị loại*. Khá nhiều bạn có lời giải đơn giản nhưng 5 bạn sau gửi bài sớm (tính theo dấu bưu điện) được nhận tặng phẩm :

- *Nguyễn Xuân Hồng*, 6A1, THCS Trần Quốc Toản, TX Uông Bí, Quảng Ninh;
- *Ngô Văn Tuấn Anh,* 23 Nguyễn Hữu Nghiêm, Tiền An, TX Bắc Ninh;
- *Nguyễn Thành Chinh*, 10A1, THPT An Nhơn 1, TTr. Bình Định, An Nhơn, Bình Định;
- *Nguyễn Thành Phụng*, 77 Nguyễn Du, TP Đà Nẵng;
- *Hoàng Hà Hưng*, 10 Lý, THPT Hoàng Văn Thụ, TX Hòa Bình.

VÂN KHANH

CHIA HÌNH VUÔNG THÀNH 10 HÌNH VUÔNG NHỎ BẰNG NHAU

Bạn hãy cắt một miếng bìa hình vuông đã cho ra làm nhiều mảnh để có thể ghép được thành 10 hình vuông nhỏ có kích thước bằng nhau sao cho số mảnh bị cắt ra là ít nhất.

TRẦN CUNG
(Hà Nội)

Giải đáp bài :

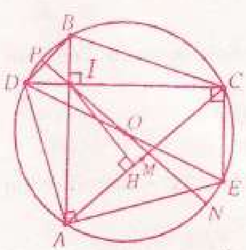
BÀI GIẢI QUÁ GỌN !

(THTT số 337, tháng 7 năm 2005)

• Theo cách đánh giá các bất đẳng thức : $IH \le IM = \dfrac{AC}{2} \le R$ và $S_{IAC} = \dfrac{1}{2}IH.AC \le \dfrac{1}{2}R.2R = R^2$. Chúng ta thấy $S_{IAC} = R^2$ khi $IH = IM = R$ và $AC = 2R$. Khi đó AC là đường kính của đường tròn (O) và I nằm trên đường tròn (O). Điều này trái với giả thiết I nằm trong đường tròn đó. Vậy không thể xảy ra *giá trị lớn nhất của* S_{IAC} *bằng* R^2.

Một cách giải đúng cho bài toán này (theo bạn *Dương Minh Tiến*, 11TL, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**) :

• Dựng đường kính DE của đường tròn (O), thì tứ giác $ABCE$ là hình thang cân, dẫn đến $BC = AE$. Ta có



$IA^2 + ID^2 = AD^2$;

$IB^2 + IC^2 = BC^2$

$\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$

$= AD^2 + BC^2$

$= AD^2 + AE^2 = 4R^2$ (1)

Giả sử đường thẳng IO cắt đường tròn (O) tại P, N. Khi đó $IA.IB = IC.ID = IP.IN = (R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2 > 0$, suy ra

$$IB = \frac{R^2 - OI^2}{IA}, ID = \frac{R^2 - OI^2}{IC}.$$

Thay vào (1) ta được

$$(IA^2 + IC^2).\left[1 + \frac{(R^2 - OI^2)^2}{IA^2.IC^2}\right] = 4R^2.$$

Do $IA^2 + IC^2 \ge 2IA.IC$ nên có :

$$2.IA.IC\left[1 + \frac{(R^2 - OI^2)^2}{IA^2.IC^2}\right] \le 4R^2 \quad (2)$$

Đặt S là diện tích tam giác IAC thì $2S = IA.IC$. Từ (2) ta có $4S^2 - 4R^2.S + (R^2 - OI^2)^2 \le 0$

$$\Rightarrow \frac{R^2 - OI\sqrt{2R^2 - OI^2}}{2} \le S \le \frac{R^2 + OI\sqrt{2R^2 - OI^2}}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAC là $\dfrac{R^2 + OI\sqrt{2R^2 - OI^2}}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $IA = IC = \sqrt{R^2 + OI\sqrt{2R^2 - OI^2}}$.

• Ngoài bạn Tiến, các bạn sau cũng có đáp án đúng : *Vũ Hồng Toản*, K18A, THPT chuyên lý, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** ; *Lê Tiến Thành*, 10A1, THPT Quế Võ I, *Ngô Văn Tuấn Anh*, 23 - Nguyễn Hữu Nghiêm, Tiến An, Tx. Bắc Ninh, **Bắc Ninh** ; *Đặng Văn Thanh*, 12A, THPT Khúc Thừa Dụ, Ninh Giang, **Hải Dương ;** *Nguyễn Phương Hoàng*, 11B1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, **Thanh Hóa**.

NGỌC HIỂN

CHẤM BÀI KIỂM TRA

Trong giờ kiểm tra 15 phút, một giáo viên cho bài toán về PT vô tỉ với nội dung :

Xác định các giá trị của tham số m để PT sau có nghiệm : $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(7-x)(2+x)} = m$.

Một học sinh giải như sau :

Điều kiện $-2 \le x \le 7$.

Đặt $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} = t$ (1) với $t \ge 0$.

Theo BĐT Bu–nhi–a–cốp–xki $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} \le 3\sqrt{2}$ nên $0 \le t \le 3\sqrt{2}$. Bình phương hai vế của (1) được $\sqrt{(7-x)(2+x)} = \dfrac{t^2 - 9}{2}$.

PT đã cho trở thành $-\dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{9}{2} = m$ (2)

PT ban đầu có nghiệm khi PT (2) có nghiệm với $0 \le t \le 3\sqrt{2}$. Đặt $y = -\dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{9}{2}$ ta tính được $y' = -t + 1, y' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm y trên $[0; 3\sqrt{2}]$

t	$-\infty$	0		1		$3\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y		$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{6\sqrt{2}-9}{2}$	

Từ bảng biến thiên và $\dfrac{6\sqrt{2}-9}{2} < \dfrac{9}{2}$ suy ra PT đã cho có nghiệm khi $\dfrac{6\sqrt{2}-9}{2} \le m \le 5$.

Các bạn hãy cùng tôi chấm bài kiểm tra này nhé.

CAO XUÂN NAM

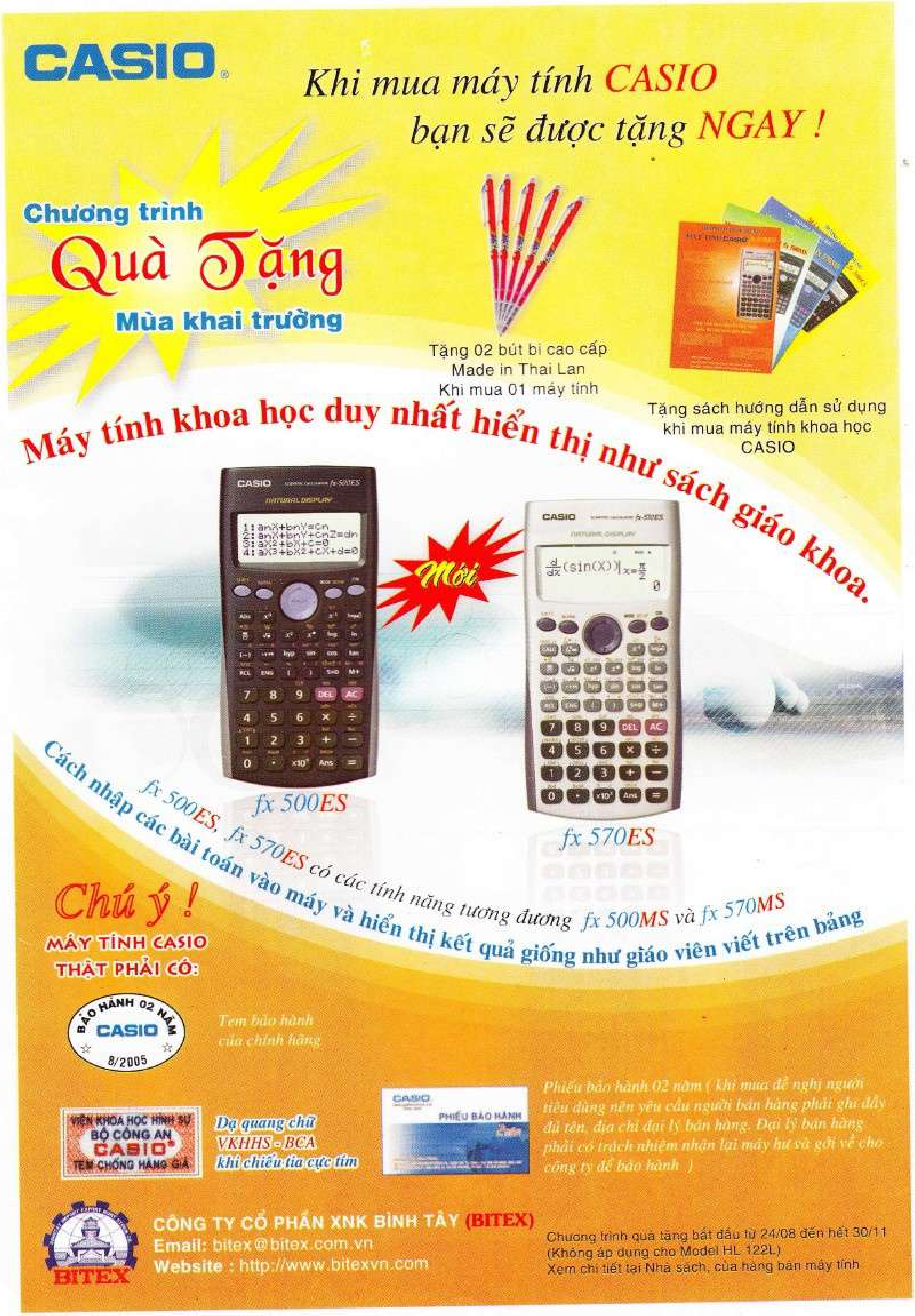
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 340 (10-2005)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập: PHAN DOÃN THOẠI. *Phó ban Phụ trách :* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC. *Thư kí Tòa soạn:* VŨ KIM THỦY.
Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, *231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.* ĐT : 08.8309049.


CASIO
Khi mua máy tính CASIO
bạn sẽ được tặng NGAY !
Chương trình
Quà Tặng
Mùa khai trường
Tặng 02 bút bi cao cấp
Made in Thai Lan
Khi mua 01 máy tính
Tặng sách hướng dẫn sử dụng
khi mua máy tính khoa học
CASIO
Máy tính khoa học duy nhất hiển thị như sách giáo khoa.
Mới
fx 500ES
fx 570ES
fx 500ES, fx 570ES có các tính năng tương đương fx 500MS và fx 570MS
Cách nhập các bài toán vào máy và hiển thị kết quả giống như giáo viên viết trên bảng
Chú ý !
MÁY TÍNH CASIO
THẬT PHẢI CÓ:
BẢO HÀNH 02 NĂM
CASIO
8/2005
Tem bảo hành
của chính hãng
VIỆN KHOA HỌC HÌNH SỰ
BỘ CÔNG AN
CASIO
TEM CHỐNG HÀNG GIẢ
Dạ quang chữ
VKHHS - BCA
khi chiếu tia cực tím
CASIO
PHIẾU BẢO HÀNH
Phiếu bảo hành 02 năm (khi mua đề nghị người tiêu dùng nên yêu cầu người bán hàng phải ghi đầy đủ tên, địa chỉ đại lý bán hàng. Đại lý bán hàng phải có trách nhiệm nhận lại máy hư và gởi về cho công ty để bảo hành)
BITEX
CÔNG TY CỔ PHẦN XNK BÌNH TÂY (BITEX)
Email: bitex@bitex.com.vn
Website : http://www.bitexvn.com
Chuong trình quà tặng bắt đầu từ 24/08 đến hết 30/11
(Không áp dụng cho Model HL 122L)
Xem chi tiết tại Nhà sách, cửa hàng bán máy tính

TRƯỜNG THCS THỦY DƯƠNG, HƯƠNG THỦY, THỪA THIÊN -HUẾ

Hiệu trưởng Trần Hào

Năm học 2004-2005, trường THCS Thủy Dương có 939 học sinh với 25 lớp và 50 cán bộ giáo viên, trong đó hầu hết có trình độ đại học. Từ năm 1983 đến nay (trên 22 năm) trường luôn đạt danh hiệu tiên tiến và tiên tiến xuất sắc cấp Tỉnh.

- Công đoàn cơ sở được Công đoàn Giáo dục Việt Nam tặng Bằng khen.

- Năm 1998: Được UBND Tỉnh tặng cờ thi đua xuất sắc.

- Được Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Bằng khen về phong trào thi đua yêu nước trong 5 năm (2001-2005).

- Năm 2003: Được Bộ Giáo dục tặng Bằng khen.

- Năm 2003: Trường được công nhận là đơn vị đạt chuẩn văn hóa và được công nhận lại năm 2004.

Tập thể giáo viên đoàn kết, có ý chí phấn đấu vươn lên và xây dựng thành công nhiều phong trào như:

• Hằng năm có nhiều em đạt học sinh giỏi cấp Huyện và có học sinh đạt giải cấp Tỉnh. Trường đã cùng địa phương xây dựng đề án bồi dưỡng, hỗ trợ học sinh giỏi trị giá 20 triệu đồng / năm.

• Tất cả giáo viên tiếp cận được với ứng dụng công nghệ thông tin và mọi người đều có khả năng soạn được giáo án trên máy tính. Tất cả học sinh từ lớp 6 đến lớp 9 đều được học môn Tin học.

• Được sự quan tâm của cấp trên nên cơ sở vật chất của trường phát triển khang trang, thiết bị dạy học hiện đại. Từ đó trường được tham gia chương trình *Intel teach to the future* để nâng cao chất lượng dạy và học.

• Trong phong trào thi đua dạy tốt cấp Huyện, cấp Tỉnh, trường luôn đạt giải cao: giải nhất cấp Tỉnh môn Toán, giải nhất Thư viện giỏi cấp Tỉnh.

• Phong trào Xây dựng môi trường Xanh - Sạch - Đẹp được xếp loại xuất sắc. Các hoạt động thể dục thể thao, xây dựng phòng bộ môn, thư viện đều được Sở Giáo dục khen thưởng.

• Trường đã phát huy sức mạnh của các lực lượng tham gia giáo dục, phong trào khuyến học được nâng cao. Từ chính quyền, Hội phụ huynh, Hội cựu học sinh, các họ tộc trong địa phương đều có phong trào khuyến học sôi nổi.

Tập thể cán bộ giáo viên trường THCS Thủy Dương

Với sự giúp đỡ của cấp trên và sự nỗ lực phấn đấu của đơn vị, trường đang phấn đấu đề nghị được công nhận trường THCS đạt chuẩn quốc gia.

ISSN : 0866–8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT42M5

Giấy phép XB số 67/GP–BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004
In 30700 bản tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2005

Giá : 4000 đồng
Bốn nghìn đồng