TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

2 2007
Số 356

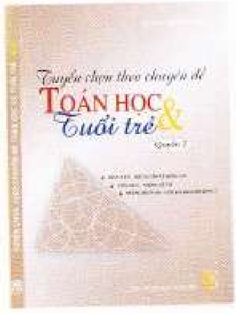
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Mừng Xuân Mới

SÁCH ĐANG PHÁT HÀNH

QUYỂN 2

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



Từ các bài đã in trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ những năm gần đây, sách tập hợp lại các bài viết theo ba chuyên đề nhằm phục vụ độc giả làm tài liệu tham khảo bổ ích.

Chuyên đề thứ nhất : **Toán THCS - Những tìm tòi sáng tạo**

Chuyên đề thứ hai : **Toán THCS - Những đề thi**

Chuyên đề thứ ba : **Những bài toán - Lời giải sao cho đúng?**

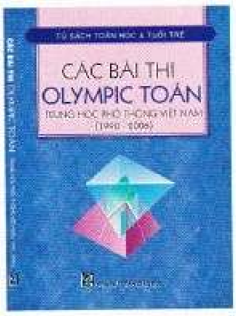
Sách dày 252 trang, khổ 19 x 26,5 cm, giá bán lẻ là 30000 đồng.

ĐÓNG TẬP cả năm 2006 THTT

Tất cả 12 số tạp chí của năm 2006 được đóng thành một tập ngoài có bìa cứng. Đây là cách để lưu giữ tạp chí tốt nhất, có hệ thống đối với các thư viện, các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán. Bạn cần mua xin liên hệ ngay với Tòa soạn. Giá bán lẻ 65000 đồng.

SÁCH SẮP PHÁT HÀNH

CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN THPT VIỆT NAM (1990-2006)



Bạn muốn tìm những đề toán hay ?

Bạn muốn biết những phương pháp giải lí thú ?

Các đề thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia THPT sẽ đáp ứng phần nào những yêu cầu đó của các bạn yêu toán.

Tủ sách THTT xin giới thiệu cuốn sách **Các bài thi Olympic toán THPT Việt Nam (1990-2006)**, trong đó có các đề thi và hướng dẫn giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT (bảng A và bảng B) từ năm 1990 đến 2006.

Sách cũng đăng các đề thi chọn đội tuyển Toán Quốc gia Việt Nam chuẩn bị dự thi Toán Quốc tế từ năm 1990 đến 2006.

Trong sách còn giới thiệu danh sách và thành tích của đoàn Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ lần đầu dự thi (1974) đến nay.

Sách khoảng 250 trang, khổ 17 x 24cm, sẽ xuất bản trong quý II năm 2007.

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 1

(tái bản)

Phương pháp giải toán, Toán học và Đời sống, Lịch sử Toán học là ba vấn đề được bạn yêu toán rất quan tâm. Đó cũng chính là ba chủ đề trong **Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1)**. Sách được tái bản theo yêu cầu của nhiều độc giả. Sách dày 300 trang, khổ 19x26,5cm, giá bán lẻ 34000 đồng. Sách sẽ phát hành từ quý II năm 2007.

Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Mua từ 10 quyển trở lên được trừ phí phát hành. Để biết thông tin chi tiết xin liên hệ:

ĐT/FAX: 04.5144272; Email: toanhoctt@yahoo.com

THƯ CHÚC TẾT ĐINH HỢI 2007
của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Nguyễn Thiện Nhân

Hà Nội, ngày 01 tháng 02 năm 2007

Kính gửi các thầy giáo, cô giáo, các bậc cha mẹ học sinh và các em học sinh, sinh viên thân mến,

Nhân dịp Xuân Đinh Hợi 2007, thay mặt Ban Cán sự Đảng và lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo tôi xin gửi tới các thầy giáo, cô giáo, các bậc cha mẹ học sinh và các em học sinh, sinh viên lời chúc đầu năm tốt lành.

Năm 2006 đánh dấu một năm thắng lợi mới của đất nước ta với nhiều sự kiện quan trọng: Đại hội Đảng toàn quốc lần thứ X, Diễn đàn Hợp tác Châu Á - Thái Bình Dương APEC và Việt Nam trở thành thành viên chính thức của Tổ chức Thương mại Thế giới WTO. Năm 2006 cũng đánh dấu một năm có nhiều chuyển biến tích cực của ngành giáo dục, đào tạo cả nước, được nhân dân đồng tình ủng hộ. Năm 2007 đòi hỏi toàn ngành chúng ta, các em học sinh, sinh viên, cùng các bậc cha mẹ và lãnh đạo chính quyền các cấp phải tiếp tục thực hiện cuộc vận động "hai không" - "*Nói không với tiêu cực trong thi cử và bệnh thành tích trong giáo dục*" - một cách kiên quyết, sáng tạo để dạy tốt hơn, học tốt hơn, vì tương lai của mỗi học sinh, sinh viên của đất nước ta. Mỗi thầy giáo, cô giáo hãy là một tấm gương về đạo đức, tự học và sáng tạo.

Nhân dịp xuân về, tôi xin chân thành cảm ơn hơn một triệu thầy giáo, cô giáo, cán bộ nhân viên của ngành giáo dục và đào tạo, một triệu cựu giáo chức và bốn triệu hội viên Hội Khuyến học Việt Nam đã vượt lên chính mình để đóng góp vào sự nghiệp hết sức vẻ vang, hun đúc và tiếp nối truyền thống dũng cảm, kiên cường, sáng tạo, đoàn kết từ thời Hùng Vương trong mỗi con người Việt Nam hôm nay để vươn tới đỉnh cao trí tuệ của thời đại, đưa con thuyền Việt Nam vượt lên trong dòng chảy của nhân loại đầu thế kỉ XXI. Tôi xin chân thành cảm ơn các đồng chí lãnh đạo Đảng, chính quyền, đoàn thể các cấp và các bậc cha mẹ học sinh, sinh viên đã chia sẻ, động viên và chung tay cùng các thầy giáo, cô giáo ở mọi miền đất nước trong sự nghiệp tự đổi mới vì con em của chúng ta, vì ngành của mình và vì cả nước. Mùa Xuân đang tràn về trên mỗi bản làng, phố phường và mỗi gia đình của đất mẹ Việt Nam.

NGUYỄN THIỆN NHÂN
Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo

Điều kiện cần và đủ
TRONG LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

NGUYỄN ANH THUẤN *(Sở GD-ĐT Hải Phòng)*
PHẠM VĂN DƯƠNG *(SV lớp KSCLC khóa 51 ĐHBK Hà Nội)*

Trong quá trình làm toán, chúng ta thường xuyên phải giải quyết hai vấn đề: bài toán chứng minh và bài toán tìm điều kiện. Ở bài toán chứng minh thường người ta cho điều A và yêu cầu chứng minh điều B. Với bài toán tìm điều kiện không phải lúc nào ta cũng thực hiện được phép biến đổi tương đương để đạt được kết quả, trong trường hợp ấy chúng ta thường phải xét điều kiện cần và đủ. Bài viết này xin nêu một số thí dụ tiêu biểu về những bài toán dạng như vậy.

✪ **Bài toán 1.** *Tìm m để phương trình (PT) sau có nghiệm duy nhất:* $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=m$ (1)

Lời giải

• *Điều kiện cần.* Trong PT (1) vai trò của x và $2-x$ là như nhau. Vì vậy nếu PT (1) có nghiệm là x_0 thì $2-x_0$ cũng là nghiệm của nó. Giả sử PT (1) có nghiệm duy nhất là x_0 thì $x_0=2-x_0$ $\Leftrightarrow x_0=1$. Thay vào (1) ta được $m=2$.

• *Điều kiện đủ.* Ta xét $m=2$ thì PT (1) có dạng

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=2 \qquad (2)$$

Cách 1. Điều kiện $0\le x\le 2$ (*)

Bình phương hai vế của PT (2) rồi rút gọn được $\sqrt{x(2-x)}=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn (*)).

Cách 2. Áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có $(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})^2\le 2(x+2-x)=4$
$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{2-x}\le 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2-x \Leftrightarrow x=1$. Suy ra PT (2) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Kết luận. Vậy với $m=2$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất. ☐

✪ **Bài toán 2.** *Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} a(x^2+1)+|x|=y \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

Lời giải

• *Điều kiện cần.* Giả sử hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$. Do $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ (I) nên suy ra $(-x_0; y_0)$ cũng là nghiệm của hệ (I). Từ tính duy nhất nghiệm suy ra $x_0=-x_0$ $\Leftrightarrow x_0=0$.

Thay vào hệ (I), ta được $\begin{cases} a=y \\ y^2=1 \end{cases}$ suy ra $a=-1$ hoặc $a=1$.

• *Điều kiện đủ.*

a) Nếu $a=-1$ thì hệ (I) có dạng

$$\begin{cases} |x|=x^2+1+y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

Ta thấy hệ (II) có ít nhất hai nghiệm $(x; y)=(1; -1)$ và $(x; y)=(0; -1)$ nên $a=-1$ không là giá trị cần tìm.

b) Nếu $a=1$ thì hệ (I) có dạng

$$\begin{cases} |x|+x^2=y-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad (\mathrm{III})$$

Từ $y-1=|x|+x^2$ suy ra $y\ge 1$, từ $x^2+y^2=1$ suy ra $y\le 1$. Vậy ta có $y=1$.

(Xem tiếp trang 28)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG ĐHSP TP HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2006 - 2007

NGÀY THỨ NHẤT

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. *(2 điểm)*

1) Giải phương trình $x^2 - 3x - |x-1| + 2 = 0$.

2) Giả sử các phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và $cy^2 + dy + a = 0$ (a và c khác 0) có các nghiệm tương ứng là x_1, x_2 và y_1, y_2. Chứng minh rằng $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 4$.

Bài 2. *(2 điểm)*

1) Với mỗi số tự nhiên $k \geq 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Áp dụng tính giá trị của biểu thức sau:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

2) Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}+\sqrt{y}=m\\ \sqrt{1-y}+\sqrt{x}=m.\end{cases}$$

Bài 3. *(2 điểm)*. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y)(x+z)=8\\ (y+x)(y+z)=16\\ (z+x)(z+y)=32.\end{cases}$$

Bài 4. *(4 điểm)*. Gọi AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC (D thuộc đoạn BC). Trên đoạn AD lấy hai điểm M, N sao cho $\widehat{ABN}=\widehat{CBM}$. BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

2) Áp dụng câu 1) chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

3) Chứng minh rằng $\widehat{BCF}=\widehat{ACM}$. Từ đó suy ra $\widehat{ACN}=\widehat{BCM}$.

NGÀY THỨ HAI

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 5. *(2 điểm)*.

Giải và biện luận theo tham số m phương trình sau:

$$\frac{x+2006}{x+2006-m}=\frac{x-2006}{x-2006+m}.$$

Bài 6. *(2 điểm)*. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2x^3=2y^2+y\\ 2y^3=2x^2+x.\end{cases}$$

Bài 7. *(1 điểm)*. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$xy+6x+2006y+12033=0.$$

Bài 8. *(2 điểm)*. Chứng minh rằng luôn tồn tại một số tự nhiên N có không quá 2007 chữ số sao cho các chữ số của N chỉ hoặc là 9 hoặc là 0 và N chia hết cho 10030.

Bài 9. *(1 điểm)*. Cho hai điểm phân biệt A, B. Hai đường tròn thay đổi lần lượt tiếp xúc với đường thẳng AB tại A, B và tiếp xúc ngoài với nhau tại C. Tìm quỹ tích điểm C.

Bài 10. *(2 điểm)*. Cho đường tròn tâm O và điểm A ở ngoài đường tròn. Một cát tuyến qua A cắt đường tròn tại B, C phân biệt. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại D. Đường thẳng qua D vuông góc với OA cắt đường tròn tại E, F (E thuộc đoạn DF). Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Chứng minh rằng:

1) Ngũ giác $AEMOF$ nội tiếp trong một đường tròn nào đó.

2) AE, AF là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh) giới thiệu

Chào IMO 2007 - Đợt 2

Bài I–6. Cho tam giác ABC vuông ở A. Hãy tìm tất cả các bộ sáu điểm phân biệt (M, N, P, Q, R, S) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) N, P nằm trên cạnh AB; Q, R nằm trên cạnh BC; S, M nằm trên cạnh AC;

2) $MN = PQ = RS$;

3) Lục giác $MNPQRS$ là một lục giác lồi nội tiếp và có ba đường chéo chính MQ, NR, PS đồng quy.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

Bài I–7. Cho k là một số thực thuộc khoảng $(-1; 2)$ và cho a, b, c là ba số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(a^2+b^2+c^2+k(ab+bc+ca)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\geq\frac{9(2-k)}{4}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào ?

TRẦN NAM DŨNG
(Tp. Hồ Chí Minh)

Bài I–8. Hỏi có tồn tại hay không số nguyên dương a sao cho trong dãy số (a_n), xác định bởi $a_n = n^3 + a^3$, với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$, thì bất kì hai số hạng liên tiếp nào cũng là hai số nguyên tố cùng nhau ?

V. XENDEROV
(CHLB Nga)

Bài I–9. Hỏi có tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho ta có thể ghi lên n đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của n-giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$ n số nguyên (không nhất thiết đôi một khác nhau) để các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

1) Tổng của n số được ghi bằng 2007;

2) Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, số được ghi tại đỉnh A_i bằng giá trị tuyệt đối của hiệu hai số được ghi tại hai đỉnh A_{i+1} và A_{i+2}. (Quy ước $A_{n+1} \equiv A_1$ và $A_{n+2} \equiv A_2$) ?

PHÚC HOÀNG
(Hà Nội)

Bài I–10. Trong mặt phẳng tọa độ, mỗi điểm có tọa độ nguyên được tô bởi một trong hai màu cho trước. Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp gồm vô số điểm có tọa độ nguyên là một hình có tâm đối xứng và đồng thời tất cả các điểm thuộc tập hợp đó được tô bởi cùng một màu.

V. PROTAXOV
(CHLB Nga)

HELLO IMO 2007

I-6. Let ABC be a right-angled triangle, with right angle at A. Find all sets of the six distinct points (M, N, P, Q, R, S) satisfying simultaneously the following conditions:

i) N, P lie on the side AB; Q, R lie on the side BC; S, M lie on the side AC;

ii) $MN = PQ = RS$;

iii) the hexagon $MNPQRS$ is a convex hexagon, inscribable in a circle, with concurrent principal diagonals MQ, NR, PS.

(Xem tiếp trang 31)

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An

Năm học 2006-2007

(Đề thi đăng trên THTT số 354, tháng 12 năm 2006)

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. a) ĐK $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Ta có $P = \dfrac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

Quy đồng mẫu số, rút gọn tử số đi đến

$$P = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}.$$

b) Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có $P < \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 > 0.$

BĐT này đúng với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Bài 2. a) *Đáp số* $m \leq 2$.

b) Với ĐK $m \leq 2$, giả sử a và $3a$ là hai nghiệm của PT (1). Theo định lí Viète, ta có

$$\begin{cases} a+3a=2m-2 \\ a.3a=m^2-3 \end{cases}$$

Giải hệ trên tìm được $m = -3 \pm 2\sqrt{6}$ (thỏa mãn ĐK).

Bài 3. a) ĐK $x \neq 0$ và $|x| < \sqrt{2}$.

Đặt $y = \sqrt{2-x^2} > 0$. Ta có hệ $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}$

Từ hệ trên nhận được:

$2(xy)^2 - xy - 1 = 0 \Leftrightarrow xy = 1$ hoặc $xy = -\dfrac{1}{2}$.

• Nếu $xy = 1$ thì $x + y = 2$. Giải ra tìm được $(x; y) = (1; 1)$.

• Nếu $xy = -\dfrac{1}{2}$ thì $x + y = -1$.

Giải ra tìm được $(x; y) = \left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ $(y > 0)$.

Tóm lại PT đã cho có hai nghiệm

$$x = 1; x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

b) Từ hệ điều kiện có

$$\begin{cases} a+2b=4c-2 \\ 2a-b=11-7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4-2c \\ b=3c-3 \end{cases}$$

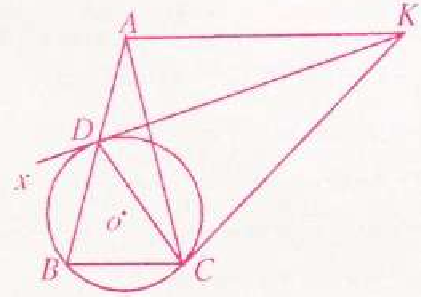
Vì $a \geq 0$ và $b \geq 0$ nên $\begin{cases} 4-2c \geq 0 \\ 3c-3 \geq 0 \end{cases}$ hay $1 \leq c \leq 2$.

Khi đó

$Q = 6(4 - 2c) + 7(3c - 3) + 2006c = 2015c + 3$.

Do $1 \leq c \leq 2$, suy ra $2018 \leq Q \leq 4033$.

Bài 4. (h. 1)



Hình 1

a) Vì tam giác ABC cân tại A và tam giác KDC cân tại K nên

$\widehat{BAC} = 180^\circ - 2\widehat{ABC}$; $\widehat{DKC} = 180^\circ - 2\widehat{KDC}$.

Do $\widehat{KDC} = \widehat{ABC}$, suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{DKC}$. Từ đó tứ giác $ADCK$ nội tiếp.

b) Từ câu a) $\widehat{CAK} = \widehat{CDK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CK}$) $= \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ suy ra $AK // BC$, nên tứ giác $ABCK$ là hình thang.

c) Hình thang $ABCK$ trở thành hình bình hành khi $AB // CK$, lúc đó $\widehat{BAC} = \widehat{ACK}$ (1). Theo trên ta có $\widehat{KCD} = \widehat{KDC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{ACK}$. Từ (1) ta thấy $\widehat{BCD} = \widehat{BAC}$. Từ đó suy ra cách dựng điểm D.

NGÀY THỨ HAI

Bài 5. a) ĐK $-1 \le x \le \frac{1}{2}$ (*)

Bình phương hai vế của PT đi đến

$2\sqrt{1-2x}.\sqrt{1+x} = x+2$

$\Leftrightarrow 4(1-2x)(1+x) = (x+2)^2$

$\Leftrightarrow 9x^2+8x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x = -\frac{8}{9}$ (thỏa mãn (*))

b) Ta có $ax+by+cz$

$= x(x^2-yz)+y(y^2-xz)+z(z^2-xy)$

$= x^3+y^3+z^3-3xyz$

$= x^3+y^3-(x+y)^3+3xyz\,(x+y) = 0$

(do $z = -x-y$).

Bài 6. a) Vì $x=1$ không thỏa mãn PT nên $x \ne 1$, suy ra

$y = \frac{x^2-5x+2}{x-1}$ hay $y = x-4-\frac{2}{x-1}$.

Các cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thỏa mãn PT là $(-1\,;-4)$, $(0\,;-2)$, $(2\,;-4)$, $(3\,;-2)$.

b) Từ giả thiết suy ra $a_n > 0,\ \forall n$.

Ta có $a_{n+1} = a_n(a_n+1) > a_n,\ \forall n$

$\Rightarrow a_1 < a_2 < \ldots < a_{2006}$. Vì $a_3 > 1$ nên $a_{2006} > 1$ (1)

Từ $a_{n+1} = a_n(a_n+1)$ suy ra

$$\frac{1}{a_n+1} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \qquad (2)$$

Thay $n = 1, 2, \ldots, 2005$ vào công thức (2), sau đó cộng thêm vào hai vế $\frac{1}{a_{2006}+1}$ được

$$A = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2005}} - \frac{1}{a_{2006}} + \frac{1}{a_{2006}+1}$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2006}} + \frac{1}{a_{2006}+1} = 2 - \frac{1}{a_{2006}(a_{2006}+1)}.$$

Từ (1) suy ra $1 < A < 2$, dẫn đến $[A] = 1$.

Bài 7. Đặt $x = az$; $y = bz$ $(a > 0, b > 0)$.

Từ $x+y+z = \frac{xy}{z}$, ta có $a+b+1 = ab$.

BĐT $(y+z)^4+(z+x)^4 < (x+y)^4$

$\Leftrightarrow (b+1)^4+(a+1)^4 < (a+b)^4 \qquad (1)$

BĐT $(b+1)^4+(a+1)^4 < ((b+1)^2+(a+1)^2)^2$

$\Leftrightarrow (b+1)^4+(a+1)^4 < (a^2+b^2+2a+2b+2)^2$

$= (a^2+b^2+2ab)^2 = (a+b)^4$ (do $a+b+1 = ab$).

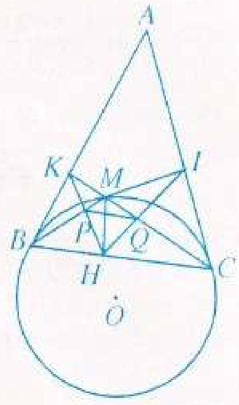
Vậy (1) được chứng minh.

Bài 8. (h. 2) a) Ta có $\widehat{PHQ} = \widehat{MCA} + \widehat{MBA}$ $= \widehat{MBC} + \widehat{MCB}$, suy ra $\widehat{PHQ} + \widehat{BMC} = 180^\circ$, dẫn đến tứ giác $MPHQ$ nội tiếp. Do đó

$\widehat{MPQ} = \widehat{MHQ} =$

$= \widehat{MCI} = \widehat{MBC}$

$\Rightarrow PQ // BC$.



Hình 2

b) Dễ thấy $\Delta MHK \backsim \Delta MIH$, do đó $\frac{MK}{MH} = \frac{MH}{MI}$,

hay $MH^2 = MI.MK$. Vậy $MH.MI.MK = MH^3$. Vậy $MH.MI.MK$ lớn nhất khi M là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

Bài 9. *Bạn đọc tự vẽ hình.* Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. Vì tam giác ABC nhọn nên H, I, K lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Ta có

$$\widehat{AMK} + \widehat{KMB} + \widehat{BMH} + \widehat{HMC} + \widehat{CMI} + \widehat{IMA} = 360^\circ.$$

Suy ra góc lớn nhất trong 6 góc trên không bé hơn 60°. Giả sử $\widehat{AMK}$ là góc lớn nhất, lúc đó $\widehat{AMK} \ge 60^\circ \Rightarrow MK = MA.\cos\widehat{AMK} \le MA.\cos 60^\circ \Rightarrow 2MK \le MA$ (*)

Vì khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ M đến ba đỉnh của tam giác ABC lớn hơn hoặc bằng MA. Khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác ABC bé hơn hoặc bằng MK, nên từ (*) có điều cần chứng minh.

THÁI VIẾT THẢO

(Sở GD – ĐT Nghệ An) giới thiệu

PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CHÂN ĐƯỜNG VUÔNG GÓC HẠ TỪ MỘT ĐIỂM XUỐNG MỘT MẶT PHẲNG

ĐỖ THANH SƠN
(GV ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Có nhiều bài toán hình học không gian mà khi giải các bài toán đó ta cần tìm chân đường vuông góc hạ từ một điểm xuống một mặt phẳng. Chẳng hạn, khi tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, tính góc tạo bởi một đường thẳng với một mặt phẳng, xác định số đo góc phẳng của nhị diện, tìm thiết diện của một hình chóp bị cắt bởi một mặt phẳng đi qua một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng nào đó... Việc xác định được chân đường vuông góc có vai trò quan trọng để tìm ra lời giải các bài toán. Nhiều học sinh thường bối rối trước các dạng toán như vậy. Bài viết này nhằm phân loại một số dạng toán thường gặp và đưa ra phương pháp giải chúng. Tác giả hi vọng qua bài báo cung cấp cho các bạn học sinh phương pháp nhận biết và giải quyết được các bài toán tương tự và hơn nữa là giải được đề thi vào Đại học và Cao đẳng.

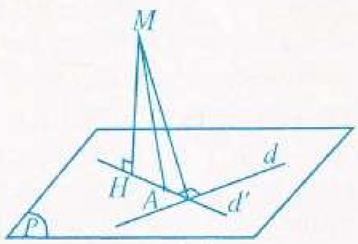
✪ **Bài toán.** *Cho mặt phẳng (P) và điểm M không thuộc mặt phẳng đó (M hoặc (P) thỏa mãn điều kiện cho trước). Xác định chân đường vuông góc H hạ từ M xuống (P).*

Trước hết, cần hiểu rằng xác định H không đơn thuần là thể hiện vị trí của H trên hình vẽ mà ta phải chỉ ra được các tính chất của H. Điểm H có nhiều tính chất thì càng có lợi cho ta khi giải toán. Dưới đây là một số trường hợp thường gặp và phương pháp xử lí trong mỗi trường hợp đó.

1. Trong mặt phẳng (P) có một điểm A và một đường d không đi qua A sao cho $MA \perp d$

Để xác định H ta tiến hành các bước sau: (h.1)

- Trong mặt phẳng (P) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d' \perp d$.



Hình 1

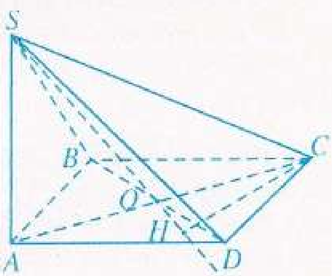
- Trong mặt phẳng (M, d'), dựng $MH \perp d'$. H là điểm cần tìm.

Thí dụ 1. *Cho hình chóp tam giác đều S.ABC xác định chân đường vuông góc hạ từ A đến mặt phẳng (SBC).*

Lời giải. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC và chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC. Từ đó $SA \perp BC$. Trên BC lấy điểm I sao cho $SI \perp BC$ và trên SI lấy điểm H sao cho $AH \perp SI$. Khi đó H là điểm phải tìm.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Xác định chân đường vuông góc hạ từ C xuống mặt phẳng (SBD).*

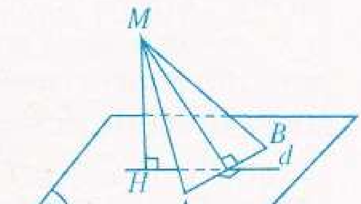
Lời giải. (h. 2) Ta có $SA \perp BD$, $AC \perp BD$ nên $BD \perp$ mp(SAC), suy ra $BD \perp SC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $SO \perp BD$. Chân đường vuông góc hạ từ C xuống mặt phẳng (SBD) nằm trên SO. Hạ $CH \perp SO$ thì H là điểm cần tìm.



Hình 2

2. Trong mặt phẳng (P) có hai điểm A, B sao cho $MA = MB$

Để tìm H ta tiến hành các bước sau (h.3):



Hình 3

• Trong mặt phẳng (P) kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng BC.

• Trong mặt phẳng $(M; d)$ dựng $MH \perp d$. H là điểm cần tìm.

Thí dụ 3. *Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác cân tại A và* $\widehat{SAB} = \widehat{SAC}$. *Xác định chân đường cao của hình chóp.*

Lời giải. Hai tam giác SAB và SAC bằng nhau (c.g.c), do đó $SB = SC$. Dựng đường cao AM của tam giác ABC, khi đó AM là đường trung trực của BC. Chân đường cao H hạ từ S của hình chóp nằm trên AM.

Thí dụ 4. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AB = AD và* $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD}$. *Xác định chân đường vuông góc hạ từ đỉnh A' xuống mặt phẳng (ABCD).*

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra $A'B = A'D$. Vì $ABCD$ là một hình thoi, nên đường chéo AC của hình thoi cũng là đường trung trực của đoạn BD. Chân đường vuông góc kẻ từ A' xuống mặt phẳng $(ABCD)$ thuộc đường thẳng AC.

Thí dụ 5. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Một mặt phẳng (α) đi qua AB cắt các cạnh SC và SD lần lượt tại các điểm M và N. Xác định chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (α).*

Lời giải. Ta có $MN//CD//AB$. Tứ giác $ABMN$ là một hình thang cân. Vì vậy đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy là đường trung trực của hai cạnh đáy đó. Vì $SA = SB$, nên theo trên chân đường vuông góc H kẻ từ S nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy hình thang $ABMN$.

Thí dụ 6. *Cho ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trong một mặt phẳng thỏa mãn điều kiện* $\widehat{xOy} = \widehat{xOz}$. *Xác định chân đường vuông góc hạ từ một điểm M thuộc Ox xuống mặt phẳng (yOz).*

Lời giải. Ta lấy trên các tia Oy, Oz các điểm A, B sao cho $OA = OB$. Các tam giác OMA và OMB bằng nhau, do đó $MA = MB$. Chân đường vuông góc H hạ từ M xuống mặt phẳng (yOz) nằm trên đường thẳng đi qua O và trung điểm của đoạn thẳng AB.

3. Tồn tại một đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P)

Để tìm H ta cần tiến hành các bước sau đây.

• Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) đi qua a và M.

• Kẻ qua M đường thẳng song song với a cắt giao tuyến tại H. Đó là điểm cần tìm.

Thí dụ 7. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Bên trong tam giác SAB ta lấy điểm M. Xác định chân đường vuông góc kẻ từ M xuống mặt phẳng (ABCD).*

Lời giải. Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $SO \perp$ mp $(ABCD)$. Đường thẳng SM cắt AB tại N. Đường thẳng đi qua M song song với SO cắt ON tại H. H là điểm cần tìm.

Thí dụ 8. *Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại C và cạnh SA vuông góc với mp (ABC). Xác định chân đường vuông góc hạ từ điểm M thuộc cạnh AB xuống mặt phẳng (SBC).*

Lời giải. Ta có $BC \perp$ mp (SAC). Vì vậy nếu chọn trên SC điểm K sao cho $AK \perp SC$, thì $AK \perp$ mp (SBC). Nối B với K và chọn trên đường BK điểm H sao cho $MH//AK$. H là điểm cần tìm.

4. Điểm M thuộc mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P)

Để tìm H ta cần

• Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).

• Chọn trên d điểm H sao cho $MH \perp d$. H là điểm cần tìm.

Thí dụ 9. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD. Cạnh bên SA ⊥ mp(ABCD).*

1) Xác định chân đường vuông góc hạ từ điểm M nằm trên đường SA xuống mặt phẳng (SBC).

2) Gọi O là giao điểm của AC và BD và (α) là mặt phẳng đi qua O song song với BC. Xác định chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (α).

Lời giải. 1) Từ giả thiết bài toán suy ra mp(SAB) $\perp$ mp(SBC). M thuộc mặt phẳng (SAB), nên chân đường vuông góc hạ từ M xuống mặt phẳng (SBC) nằm trên đường thẳng SB.

2) Vì $BC \perp$ mp(SAB) và $BD//$mp(α) nên mp(α) $\perp$ (SAB). S thuộc mp(SAB), do đó chân đường vuông góc hạ từ S xuống mp(α) nằm trên giao tuyến của (α) và (SAB).

(Xem tiếp trang 31)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I. *(2 điểm)*

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2}{x-1} \qquad (C)$$

2) Tìm trên đồ thị (C) một điểm có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tại điểm này tiếp tuyến của (C) tạo với hai đường tiệm cận của (C) tạo thành một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

Câu II. *(2 điểm)*. Giải các phương trình sau:

1) $\tan^2 x - \tan^2 x.\sin^3 x - (1 - \cos^3 x) = 0$;

2) $2\sqrt{x^2-9} = (x+5)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$.

Câu III. *(2 điểm)*

Cho $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{2\cos x + 3\sin x}dx$

$J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2\cos x + 3\sin x}dx$.

1) Tính $9I - 4J$ và $I + J$.

2) Từ đó suy ra kết quả I và J.

Câu IV. *(2 điểm)*

1) Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy cho ba đường thẳng

d_1: $3x - y - 4 = 0$; $\quad d_2$: $x + y - 6 = 0$;

d_3: $x - 3 = 0$.

Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết rằng A và C thuộc d_3, B thuộc d_1, D thuộc d_2.

2) Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}.$$

PHẦN TỰ CHỌN

Câu Va) *(2 điểm)*

(Theo chương trình THPT không phân ban)

1) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x - 5 = 0$ có một nghiệm duy nhất.

2) Có bao nhiêu số chẵn lớn hơn 500, mỗi số gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

Câu Vb. *(2 điểm)*

(Theo chương trình THPT phân ban thí điểm)

1) Giải phương trình

$$8.27^x - 38.18^x + 57.12^x - 27 = 0.$$

2) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SO = 1$ và đáy ABC có cạnh bằng $2\sqrt{6}$. Các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm của cạnh AC, AB. Tính thể tích hình chóp $S.AMN$ và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp đó.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV trường THPT Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng)

THỂ LỆ GỬI BÀI CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

- Bài cần đánh máy hoặc viết tay sạch sẽ, không dập xóa, trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng. Không gửi bản photocopy. Nếu bài đã chế bản nên gửi kèm file. Phông chữ nên là unicode.
- Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 4 trang A4 chế bản vi tính.
- Bài dịch cần gửi kèm bản photocopy bài gốc.
- Mỗi đề ra đều có kèm lời giải và không ghi 2 đề trên cùng 1 tờ giấy.
- Bài viết cho mục *Học sinh tìm tòi* cần có thẩm định của thầy giáo Toán và xác nhận của Hiệu trưởng.
- Ghi đầy đủ họ và tên thật, số điện thoại, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần. Bài không đăng không trả lại bản thảo.
- Ảnh tập thể gửi đăng phải là ảnh màu, cỡ nhỏ nhất 9×12. Sau ảnh ghi rõ nội dung ảnh và tên người chụp.
- Đối với bài giải gửi dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng. Phía trên bên trái ghi số thứ tự của bài, bên phải ghi rõ họ tên, ngày sinh, trường lớp, địa chỉ gia đình. Bài chỉ gửi về một địa chỉ : *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội*. Ngoài phong bì ghi rõ : *Dự thi giải toán số tạp chí* ... Không gửi bài giải của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì. Bài gửi có dán tem. Không cần gửi thư bảo đảm.
- Thời hạn nhận bài giải *Đề ra kì này* là hai tháng tính từ cuối tháng số tạp chí đó. Các bài giải cho các chuyên mục khác là 1 tháng.
- Bài đã gửi cho TH&TT thì không gửi cho các tạp chí khác.

THTT

Kì thi giải toán TRÊN MÁY TÍNH CASIO năm học 2006-2007

Nhằm khuyến khích hoạt động nâng cao kĩ năng giải toán bằng máy tính bỏ túi trong học tập của học sinh, Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức Kì thi khu vực giải toán trên máy tính Casio lần thứ 7 năm 2007. Mỗi tỉnh, thành phố là một đơn vị dự thi được cử một đội tuyển lớp 9 THCS (học sinh lớp 9 hoặc 8) thi theo đề lớp 9, một đội lớp 12 THPT(học sinh lớp 12 hoặc 11), một đội lớp 12 BTTHPT(học sinh lớp 12 hoặc 11) thi theo đề lớp 12. Mỗi đội không quá 5 thí sinh. Bộ Giáo dục và Đào tạo đảm nhiệm việc ra đề và chấm thi. Nội dung gồm các bài toán phổ thông thuộc chương trình cấp học.Các bài toán có yêu cầu về thuật toán hoặc kĩ thuật tính toán và giải được bằng kiến thức kĩ năng tính toán có trong chương trình học.

Cuộc thi sẽ diễn ra trong hai ngày đồng thời tại 4 địa phương: Thái Nguyên, Hải Phòng, Khánh Hòa và Tây Ninh. Ngày 13.03.2007 thí sinh thi 150 phút, giải 10 bài toán với số điểm tối đa là 50 ; ngày 14.03.2007 tổng kết và trao giải. Máy tính sử dụng là các loại máy Casio fx-220, 500MS; 500ES; 570MS; 570 ES. Điều lệ của cuộc thi giống như điều lệ đã công bố năm 2000.

Đến nay đã có 61 tỉnh thành đăng kí tham gia kì thi giải toán trên máy tính Casio lần thứ 7 với số lượng là 801 học sinh tham dự.

Nhà tài trợ là Công ty cổ phần XNK Bình Tây (BITEX) sẽ hỗ trợ cho mỗi hội đồng thi khu vực số tiền là 20.000.000 đồng và toàn bộ giải thưởng với cơ cấu và trị giá như sau: Mỗi cấp sẽ có không quá 3% số em đoạt giải Nhất, mỗi giải 800000 đồng; không quá 9 % đoạt giải Nhì, mỗi giải 500000 đồng; không quá18% đoạt giải Ba, mỗi giải 300000đồng. Mỗi khu vực có 3 giải toàn đoàn. Những học sinh đoạt giải được Bộ cấp giấy chứng nhận đoạt giải.

Ngoài ra, hàng năm Công ty hỗ trợ trang bị cho 4 trường THPT, 4 trường THCS, 4 trung tâm Giáo dục thường xuyên thuộc vùng khó khăn mỗi đơn vị 50 máy tính theo sự chỉ đạo của Bộ. Trợ cấp 160 học bổng 500000 đồng/học sinh cho học sinh vùng sâu, vùng xa, miền núi vượt khó học giỏi và trợ cấp học bổng 200000 đồng/học sinh cho học sinh đoạt giải nhất trong kì thi khu vực giải toán trên máy tính trúng tuyển vào Đại học.

VŨ ĐỖ QUAN

CÔNG TY CỔ PHẦN XNK BÌNH TÂY (BITEX) giới thiệu

Trong năm qua, cùng với sự chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo và sự phối hợp triển khai kịp thời đồng bộ giữa các Vụ thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo và các Sở GD-ĐT, chương trình tập huấn giáo viên cho tất cả các Sở có nhu cầu theo văn bản chỉ đạo của Bộ số 3498/GDTrH đã được Công ty Cổ phần XNK Bình Tây triển khai cùng với các Sở GD-ĐT kể từ tháng 4/2005 bước đầu đã đạt được những kết quả khả quan, giúp cho công tác ứng dụng thực hành toán trên máy tính đi vào chiều sâu và thiết thực hơn đối với giáo viên cũng như học sinh. Kể từ tháng 8/2005 đến tháng 12/2006 công ty đã tiến hành tập huấn cho 27 tỉnh thành phố gồm : TP. Hồ Chí Minh, Hà Nội, Thừa Thiên Huế, Bạc Liêu, Sóc Trăng, Quảng Nam, Khánh Hòa, Quảng Trị, Quảng Ngãi, Gia Lai, Vĩnh Long, Cần Thơ, Kiên Giang, Trà Vinh, An Giang, Hậu Giang, Bắc Giang, Lai Châu, Quảng Ninh, Hà Tây, Hòa Bình, Thái Nguyên, Nam Định, Hà Giang, Phú Yên, Đồng Tháp, Bình Thuận với tổng số giáo viên tham dự là: 14.188 giáo viên, đồng thời Công ty cũng đã tiến hành tập huấn cho các trường ĐHSP TP. Hồ Chí Minh, CĐSP Nha Trang, CĐSP Bình Định, CĐSP Phú Yên, CĐSP Bình Thuận, CĐSP Quảng Ngãi, Trường THPT Trần Phú TP. Hồ Chí Minh, Trường THCS An Lạc với tổng số 1.527 sinh viên, học sinh tham dự. Tổng chi phí tài trợ cho công tác tập huấn từ tháng 8/2005 đến 12/2006 là: 1.356.000.000 đồng.

Ngay từ tháng 11/2006, các Sở GD&ĐT đã chuẩn bị và triển khai cuộc thi cấp tỉnh, thành một cách chu đáo, nghiêm túc và mở rộng đến từng trường. Điều đó chứng tỏ cuộc thi giải toán trên máy tính CASIO đã mang lại nhiều điều bổ ích cho việc dạy và thực hành toán. Đến nay, đã có 39 tỉnh, thành phố tổ chức thi cấp tỉnh để tuyển chọn đội tuyển tham dự Kì thi toàn quốc cấp khu vực lần 7 vào tháng 03/2007, với số lượng học sinh tham gia là: 9.337 học sinh, tổng kinh phí do Công ty cổ phần XNK Bình Tây tài trợ đến các Sở GD&ĐT là: 323.000.000 đồng.

GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO

ĐỀ DÀNH CHO THCS

Bài 1. Tìm hai chữ số tận cùng của số 3^{2007}.

Bài 2. Tính diện tích của tam giác ABC nếu $AC = 5$ cm, $\widehat{A} = 70^0$, $\widehat{C} = 50^0$.

Bài 3. Tìm các số nguyên x và y sao cho

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{4}.$$

Bài 4. Hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh $AB =$ 10 cm, $AD = 4$ cm, điểm E thuộc cạnh CD sao cho $CE = 2DE$. Tính số đo góc AEB.

Bài 5. Tính giá trị của a và b nếu đa thức $5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b$ chia hết cho tam thức $3x^2 + 2x - 1$.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ nếu M nằm trên cạnh AB, N nằm trên cạnh AC, P và Q nằm trên cạnh BC của tam giác ABC có các cạnh $AB = 13$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 21$ cm.

Bài 7. Tính giá trị của biểu thức

$$1 + 2\cos\alpha + 3\cos^2\alpha + 4\cos^3\alpha$$

nếu α là góc nhọn sao cho $3\sin\alpha + \cos\alpha = 2$.

Bài 8. Hai đường tròn bán kính 9 cm và 4 cm tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A. Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn đó có các tiếp điểm là B và C. Tính diện tích của tam giác "cong" ABC.

Bài 9. Tính toạ độ giao điểm thứ hai của parabol $y = ax^2$ và đường thẳng $y = bx + c$ nếu giao điểm thứ nhất của chúng là điểm $A(3; -4)$ và đường thẳng đó tạo với trục Ox một góc 120^0.

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của phân thức $\dfrac{4x-3}{x^2+2x+3}$.

ĐỀ DÀNH CHO THPT

Bài 1. Giải phương trình $2\sin 2x + 3\cos x = 1$.

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính 5 dm và 6 dm nếu khoảng cách giữa hai tâm là 7 dm.

Bài 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^x + 9^y = 15 \\ 2^x + 3^y - 2^x.3^y = 2. \end{cases}$$

Bài 4. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ có các cạnh $AB = 6$ dm, $BC = 7$ dm, $CD = 8$ dm, $AD = 9$ dm, $SA = SB = SC = SD = 10$ dm.

Bài 5. Tính tổng của 20 số hạng đầu của dãy số (a_n) được xác định như sau: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n$ với mọi n nguyên dương.

Bài 6. Tính a, b, c nếu đường tròn $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ đi qua ba điểm

$$A(2\,;5),\ B\left(-\frac{7}{3};\frac{25}{6}\right),\ C(0{,}8\,;-3{,}4).$$

Bài 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{2}{x} = 5 \\ y^2 + xy + \dfrac{2}{y} = 5. \end{cases}$$

Bài 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 dm. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AA' và BC. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương tạo bởi mặt phẳng $(D'MN)$.

Bài 9. Cho $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x + y = 4$. Tính giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = (x^4 + 3)(y^4 + 3).$$

Bài 10. Tính toạ độ các giao điểm của parabol $y = x^2 + 2x - 2$ và đường tròn

$$x^2 + y^2 - 12x + 4y - 5 = 0.$$

Quy ước: *Chỉ nêu vắn tắt cách giải và kết quả. Nếu kết quả là số hữu tỉ thì viết dưới dạng số nguyên hoặc phân số tối giản. Nếu kết quả là số vô tỉ thì viết dưới dạng số thập phân gần đúng với 4 chữ số thập phân, đối với số đo góc thì chỉ lấy đến số nguyên giây và viết tách riêng độ, phút, giây.*

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ DÀNH CHO THCS

Bài 1. ĐS: 87.

Bài 2. ĐS: 13,2792 cm^2.

Bài 3. ĐS: (– 4 ; 2), (1 ; – 8), (2 ; 8), (4 ; 4), (12; 3).

Bài 4. ĐS: 98°50'31".

Bài 5. ĐS: $a = -\dfrac{842}{81}$, $b = \dfrac{292}{81}$.

Bài 6. ĐS: 63 cm^2.

Bài 7. ĐS: 8,7595.

Bài 8. ĐS: 14,6471 cm^2.

Bài 9. ĐS: B(0,8971; – 0,3987).

Bài 10. ĐS: GTLN = 0,5, GTNN = – 4.

ĐỀ DÀNH CHO THPT

Bài 1. Biến đổi phương trình đã cho thành phương trình bậc bốn đối với cos*x*. Tính cos*x* bằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp rồi tính *x*. Phương trình có hai họ nghiệm: $x_1 \approx 81^{\circ}44'15" + k\,360^{\circ}$; $x_2 \approx -27^{\circ}51'18" + k\,360^{\circ}$.

Bài 2. Gọi O_1 là tâm của đường tròn bán kính 5 dm, O_2 là tâm của đường tròn bán kính 6dm. *A* và *B* là các giao điểm của hai đường tròn đã cho. Diện tích cần tìm bằng tổng diện tích của hai hình tròn đã cho cộng với diện tích hai tam giác AO_1B và AO_2B trừ đi diện tích hai hình quạt AO_1B và AO_2B. $S \approx 168{,}2000$ dm^2.

Bài 3. Đặt $S = 2^x + 3^y$, $P = 2^x.3^y$ với điều kiện $S^2 \geq 4P > 0$. Chuyển hệ phương trình đã cho thành hệ phương trình đối với các ẩn *S* và *P*. Tính *S* và *P*. Sau đó tính 2^x, 3^y rồi tính *x* và *y*. Hệ phương trình có hai nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 \approx -0{,}6321 \\ y_1 \approx 1{,}2197 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx 1{,}9331 \\ y_2 \approx -0{,}3988. \end{cases}$$

Bài 4. Vì các cạnh bên bằng nhau nên chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy *ABCD*. Do đáy *ABCD* là tứ giác nội tiếp nên ta tính được đường chéo đáy theo các cạnh. Từ đó tính được diện tích đáy và bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy. Tiếp đó tính được đường cao và thể tích. $V \approx 154{,}7054$ dm^3.

Bài 5. Tính dần dần từng số hạng cho đến a_{20}. Sau đó cộng các số hạng đó lại. $S_{20} = -913$.

Bài 6. Thay toạ độ của ba điểm đã cho vào phương trình đường tròn ta được hệ ba phương trình bậc nhất đối với *a*, *b*, *c*. Giải hệ phương trình đó ta được giá trị của *a*, *b*, *c*.

$$a = -\frac{1141}{1062};\ b = -\frac{1961}{1062};\ c = -\frac{2079}{118}.$$

Bài 7. Trừ các vế tương ứng của hai phương trình ta được $(x-y)\left(x+y-\dfrac{2}{xy}\right) = 0$.

Trong trường hợp $x - y = 0$ ta được phương trình bậc ba đối với *x*. Từ đó tính được *x* và *y*.

Trong trường hợp $x + y - \dfrac{2}{xy} = 0$ ta được $x^2 + xy - \dfrac{2}{y} = 0$. Kết hợp phương trình này với phương trình đầu của hệ đã cho ta được mối quan hệ đơn giản giữa *x* và *y*. Tiếp đó tính được *x* và *y*. Hệ phương trình có 7 nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 \approx 1{,}3200 \\ y_1 \approx 1{,}3200 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx -1{,}7523 \\ y_2 \approx -1{,}7523 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \approx 0{,}4323 \\ y_3 \approx 0{,}4323 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 \approx 1{,}7143 \\ y_4 \approx 0{,}5217 \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 \approx 0{,}5217 \\ y_5 \approx 1{,}7143 \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 \approx 0{,}3464 \\ y_6 \approx -2{,}5824 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 \approx -2{,}5824 \\ y_7 \approx 0{,}3464. \end{cases}$$

Bài 8. Mặt phẳng $(D'MN)$ cắt *AB* tại điểm *K* sao cho $BK = \dfrac{1}{3}AB$. Từ đó tính được khoảng cách từ *D* đến *NK* và góc φ tạo bởi mặt phẳng $(D'MN)$ và mặt phẳng $(ABCD)$. Diện tích thiết diện bằng diện tích ngũ giác *AKNCD* chia cho $\cos\varphi$. $S \approx 1{,}2341$ dm^2.

Bài 9. Biến đổi *A* thành một hàm số của $t = xy$ với $0 \leq t \leq 4$. Sau đó tính giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn [0 ; 4].

$\min A \approx 327{,}0727$; $\max A = 777$.

Bài 10. Thay $y = x^2 + 2x - 2$ vào phương trình đường tròn ta được phương trình bậc bốn của *x*. Tìm nghiệm của phương trình này bằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp rồi tính giá trị tương ứng của *y*. Có hai giao điểm với toạ độ như sau:

$$\begin{cases} x_1 \approx 1{,}4315 \\ y_1 \approx 2{,}9121 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx -0{,}6505 \\ y_2 \approx -2{,}8778. \end{cases}$$

TRẦN VĂN VUÔNG
(*Hà Nội*)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

MỞ RỘNG MỘT BẤT ĐẲNG THỨC TRONG KÌ THI IMO NĂM 2005

PHAN THÀNH NAM
(Sinh viên khoa Toán - Tin ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh)

Bài viết AROUND AN INEQUALITY FROM THE 46th của tác giả *Nairi Sedrakyan* (đăng trên THTT số 345, tháng 3-2006) đã đưa ra và chứng minh một kết quả tổng quát bài số 3 trong kì thi IMO lần thứ 46, năm 2005:

✪ **Bài toán 1.** *Cho x, y, z là các số thực dương và* $xyz \geq 1$, *khi đó ta có bất đẳng thức (BĐT)*

$$\frac{x^\alpha - x}{x^\alpha + y + z} + \frac{y^\alpha - y}{y^\alpha + x + z} + \frac{z^\alpha - z}{z^\alpha + x + y} \geq 0$$

với $1 \leq \alpha \leq 3$.

(Bài 3 kì thi IMO năm 2005 là BĐT trên trong trường hợp $\alpha = \frac{5}{2}$).

Cuối bài viết đó có nêu dự đoán rằng BĐT trên đúng với mọi $\alpha \geq 1$ và đưa ra thêm chứng minh cho trường hợp $\alpha = 4$ để "củng cố" dự đoán đó.

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ chứng minh BĐT đó đúng với mọi $\alpha \geq 1$ trong một điều kiện *yếu hơn*. Chúng ta đến với:

✪ **Bài toán 2.** *Cho x, y, z là các số thực dương và* $xy + yz + zx \geq 3$, *khi đó*

$$\frac{x^\alpha - x}{x^\alpha + y + z} + \frac{y^\alpha - y}{y^\alpha + x + z} + \frac{z^\alpha - z}{z^\alpha + x + y} \geq 0$$

với mọi $\alpha \geq 1$.

Lời giải. Ta cần kết quả cơ bản sau:

Bổ đề. Cho x, y, z là các số thực dương, $x + y + z \geq 3$, khi đó với mọi $\beta > 1 > \lambda > 0$ thì

$$x^\beta + y^\beta + z^\beta \geq x + y + z \geq x^\lambda + y^\lambda + z^\lambda.$$

Chứng minh. Xét hàm $f(t) = t^\beta$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f''(t) = \beta(\beta - 1)t^{\beta-2} > 0$ với mọi $t > 0$. Vậy hàm f lồi ngặt trên $(0; +\infty)$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm f, ta có

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq x + y + z.$$

Vậy BĐT bên trái chứng minh xong. Bây giờ ta chứng minh BĐT bên phải. Nếu $x^\lambda + y^\lambda + z^\lambda < 3$ thì BĐT hiển nhiên đúng, vì $x + y + z \geq 3$. Ngược lại, nếu $x^\lambda + y^\lambda + z^\lambda \geq 3$ thì áp dụng BĐT bên trái, ta có

$$x + y + z = \left(x^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} + \left(y^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} + \left(z^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} \geq x^\lambda + y^\lambda + z^\lambda.$$

(Cũng có thể nhận xét hàm $g(t) = t^\lambda$ lõm trên $(0; +\infty)$, để suy ra BĐT $x + y + z \geq x^\lambda + y^\lambda + z^\lambda$).

Vậy bổ đề chứng minh xong. Các dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Trở lại bài toán 2 .Ta sẽ chứng minh quy nạp theo m kết quả sau đây.

"Bài toán 2 đúng với mọi $\alpha \in [1; m]$, với mọi số nguyên $m \geq 1$ (*) (và điều đó có nghĩa là bài toán 2 đúng với mọi $\alpha \geq 1$). "

Bước 1. Xét khi $m = 2$, nghĩa là $1 \leq \alpha \leq 2$ Trường hợp này ta sử dụng ý tưởng trong bài viết của tác giả *Nairi Sedrakyan*, ta có

$$\frac{x^\alpha - x}{x^\alpha + y + z} \geq \frac{x - x^{2-\alpha}}{x + y + z}.$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$x + y + z \geq x^{2-\alpha} + y^{2-\alpha} + z^{2-\alpha}.$$

Để ý $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \geq 9$ nên $x + y + z \geq 3$. Nếu $\alpha = 1$ hoặc $\alpha = 2$ thì vấn đề là đơn giản, còn nếu $1 < \alpha < 2$ thì áp dụng bổ đề với $x + y + z \geq 3$ và $0 < 2 - \alpha < 1$, ta có điều phải chứng minh.

Bước 2. Giả sử (*) đúng với m ($m \ge 2$), ta sẽ chứng minh (*) đúng với $m + 1$. Thật vậy, xét $\alpha \in [m; m+1]$, ta có

$$\frac{x^\alpha - x}{x^\alpha + y + z} \ge \frac{x^{\alpha-1} - 1}{x^{\alpha-1} + y + z}$$

(BĐT trên tương đương với $(x-1)(x^{\alpha-1}-1) \ge 0$).

Do đó chỉ cần chứng minh

$$\frac{x^{\alpha-1}-1}{x^{\alpha-1}+y+z}+\frac{y^{\alpha-1}-1}{y^{\alpha-1}+x+z}+\frac{z^{\alpha-1}-1}{z^{\alpha-1}+x+y} \ge 0 \quad (1)$$

Áp dụng giả thiết quy nạp với $\alpha - 1 \in [1 ; m]$, ta có

$$\frac{x^{\alpha-1}-x}{x^{\alpha-1}+y+z}+\frac{y^{\alpha-1}-y}{y^{\alpha-1}+x+z}+\frac{z^{\alpha-1}-z}{z^{\alpha-1}+x+y} \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^{\alpha-1}+y+z}+\frac{1}{y^{\alpha-1}+x+z}+\frac{1}{z^{\alpha-1}+x+y} \le \frac{3}{x+y+z} \le 1 \quad (2)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{b_i}\right) \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$ ta có

$$\frac{x^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}+y+z}+\frac{y^{\alpha-1}}{y^{\alpha-1}+x+z}+\frac{z^{\alpha-1}}{z^{\alpha-1}+x+y}$$

$$=\frac{x^\alpha}{x^\alpha+x(y+z)}+\frac{y^\alpha}{y^\alpha+y(x+z)}+\frac{z^\alpha}{z^\alpha+z(x+y)}$$

$$\ge \frac{\left(x^{\frac{\alpha}{2}}+y^{\frac{\alpha}{2}}+z^{\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{x^\alpha+y^\alpha+z^\alpha+2(xy+yz+zx)} \ge 1 \quad (3)$$

(vì theo bổ đề trên thì

$(xy)^{\frac{\alpha}{2}}+(yz)^{\frac{\alpha}{2}}+(zx)^{\frac{\alpha}{2}} \ge xy+yz+zx$).

Từ (2) và (3) ta suy ra (1), và bài toán 2 giải quyết xong! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha=1$ hoặc $x=y=z=1$. Với ý tưởng này, các bạn cũng có thể dễ dàng phát biểu và chứng minh bài toán cho n số.

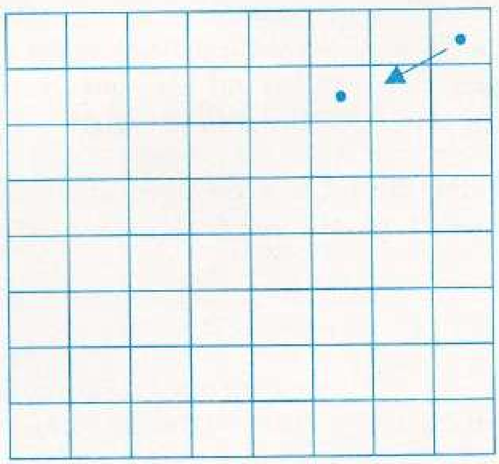
Để kết thúc, chúng tôi xin nêu thêm một số vấn đề xung quanh bài toán này. Trong bài báo đã dẫn, tác giả *Nairi Sedrakyan* cũng đã chứng minh khi $\alpha \in [-2 ; 1]$ thì BĐT ở bài toán 1 đổi chiều. Do đó, một cách tự nhiên, ta hi vọng bất đẳng thức (2) cũng đúng với mọi $\alpha \le 1$. Rất tiếc là điều này không đúng, ngay cả với giả thiết $xyz = 1$. Một phản thí dụ là $\alpha=-5$, $x = y = 0{,}9$ và $z = \frac{1}{x^2}$.

Một hướng mở rộng khác là liệu BĐT trong bài toán 2 có còn đúng khi thay giả thiết $xy+yz+zx \ge 3$ bởi giả thiết *yếu hơn* $x+y+z \ge 3$. Chúng tôi nghĩ rằng điều này đúng, và đã chứng minh được với một số trường hợp α cụ thể. Tuy nhiên, trường hợp tổng quát $\alpha \ge 1$ vẫn là một bài toán khó, mặc dù ta dễ dàng chứng minh khi $0 \le \alpha \le 1$ thì bất đẳng thức đổi chiều. Mong được trao đổi thêm với các bạn.

Giải trí toán học

Vui Tết với Bàn cờ điện tử ĐỔI MÀU

Nam có bàn cờ 8 × 8 ô vuông màu xanh. Mỗi khi đặt một quân cờ vào một ô thì toàn bộ các ô trên hàng ngang và hàng dọc cùng với ô đó sẽ đổi từ màu xanh sang đỏ. Luật chơi là các ô phải đặt tiếp theo như bước đi của quân mã trên bàn cờ vua. Hỏi Hà phải đặt thế nào để cần ít quân nhất sao cho tất cả các ô đều có màu đỏ?

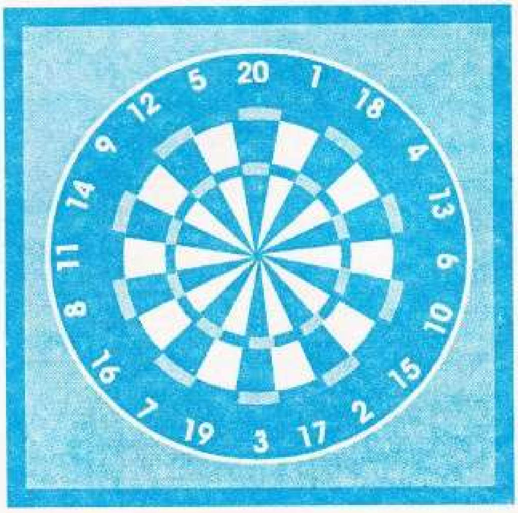


VKT

Toán học & Đời sống

Tạo ra sự ngẫu nhiên NHƯ THẾ NÀO ?

Để thực hiện những phép tính phức tạp, người ta nhờ đến các phương pháp Monte Carlo (Mongte Cáclô) và các sự kéo bấp bênh những mũi tên. Nhưng mối liên hệ giữa số các sự kéo mũi tên với độ chính xác của các phép tính là như thế nào?



Nếu kéo một số lớn những mũi tên nhỏ ở trong hình vuông, thì tỉ lệ những mũi tên đi đến hình tròn so với cả hình vuông có khả năng gần với tỉ số các diện tích, tức $\frac{\pi}{4}$, khi hình tròn nội tiếp hình vuông.

Để làm tốt một phép tính toán học, hoặc người ta nhờ đến một lí thuyết hiện có, hoặc sáng tạo ra một lí thuyết mới cần thiết. Thí dụ, để tính giá trị của số π, tức tỉ số giữa chu vi một đường tròn và bán kính của đường tròn đó, ngày nay người ta sử dụng nhiều công thức. Nhưng nói chung, những yêu cầu tính toán đã đến mức không thể sử dụng tất cả những lí thuyết cần thiết. Để vượt qua khó khăn này, từ vài thập niên gần đây, người ta sử dụng phương pháp gọi là *phương pháp Monte Carlo*. Phương pháp này, được Stanislaw Ulam lập ra trong thập kỉ bốn mươi của thế kỉ trước, cầu cứu đến sự ngẫu nhiên. Ví dụ, muốn tính π, người ta cho một hình tròn nội tiếp một hình vuông. Người ta tung ngẫu nhiên các mũi tên vào hình vuông với số lượng lớn. Các mũi tên có xu hướng thuộc về vòng tròn nhiều hơn được gọi là bấp bênh. Ta kéo những mũi tên nhỏ một cách bấp bênh ở trong hình vuông đó. Nếu kéo đủ các mũi tên nhỏ thì có thể hi vọng rằng tỉ lệ những mũi tên nhỏ đã thuộc về hình tròn so với cả hình vuông là gần với tỉ số các diện tích. Tỉ số này là $\frac{\pi r^2}{4r^2}=\frac{\pi}{4}$. Để thực hành một phương pháp như vậy, phải *tạo ra sự ngẫu nhiên*, tức là theo thí dụ trên, kéo những mũi tên nhỏ một cách thực sự bấp bênh. Có những phương pháp để cho máy tính làm điều đó: Cho máy tính kéo ra những số, những số này theo sau những số khác, theo một quy tắc định trước sao cho những số đó không có tính đều đặn. Khi đã có một dãy số như vậy, cần phải xác định bằng máy tính là phải kéo bao nhiêu mũi tên nhỏ để cho kết quả của sự ước tính đó là đáng tin cậy. Do vậy, một vấn đề cần biết là từ bao nhiêu sự kéo người ta có thể dừng lại một cách hợp lí và có thể hi vọng độ chính xác của phép tính.

Những phương pháp đã sử dụng luôn luôn có nhược điểm. Đó là hoặc không cho sự ước lượng sai số, hoặc không cho phép biết trước số mũi tên nhỏ cần phải kéo. Galin Jones, ở trường đại học Minesota, và các cộng tác viên, đề xuất những phương pháp mới để ước lượng khoảng cách giữa một giá trị thực và giá trị xấp xỉ theo phương pháp Monte Carlo. Phương pháp này kết thúc sau một thời gian định trước, lại bảo đảm được một độ chính xác nào đó mà máy tính đã chọn lúc đầu. Các ý tưởng của họ liên quan đến hai loại phương pháp hình thành các số bấp bênh: một phương pháp có lợi thế dễ thực hiện trên máy tính và phương pháp kia có lợi thế là một tính chất lí thuyết tốt hơn. Sự nghiên cứu kết thúc bằng sự phân tích một số thí dụ dùng để so sánh tính hiệu quả của hai phương pháp theo quan điểm thống kê. Muốn vậy, các nhà nghiên cứu ước lượng các khả năng tương ứng của các phương pháp đó trong việc mô phỏng một sự kéo bấp bênh trong các tập hợp dữ liệu khác nhau, liên quan cả đến bóng chày trong thể thao hoặc sự dò tìm các khối u trong y học.

NGUYỄN VĂN THIÊM
(theo La Recherche tháng 4-2006)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/356. (Lớp 6) Tính tổng sau gồm 1002 số hạng

$$S=\frac{1.3}{3.5}+\frac{2.4}{5.7}+\ldots+\frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots+\frac{1002.1004}{2005.2007}.$$

THÁI NHẬT PHƯƠNG
(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T2/356. (Lớp 7) Gọi BE và CF là hai đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A khi và chỉ khi

$$AB+BE=AC+CF.$$

LƯƠNG VĂN BÁ
(GV THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T3/356. Cho A là một số tự nhiên lớn hơn 9 và tạo bởi các chữ số 1, 3, 7, 9. Chứng minh rằng A luôn có ít nhất một ước nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 11.

TRẦN QUỐC HOÀN
(K09, K50CA, ĐH Công nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/356. Cho 10 số thực không âm a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 thỏa mãn các điều kiện $a_i^2+b_i^2=1$ (i = 1, 2, 3, 4, 5) và $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}.$$

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T5/356. Cho tam giác ABC không vuông với các đường cao AA', BB', CC'. Gọi D, E, F lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp trong các góc $\widehat{B'AC'}$, $\widehat{C'A'B}$, $\widehat{B'A'C}$ của các tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ tương ứng. Đường tròn bàng tiếp trong góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là trực tâm của tam giác MNP.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/356. Trong một giải đấu bóng đá có 10 đội bóng thi đấu theo thể thức mỗi đội đều gặp đội khác một lần. Người ta nhận thấy một điều thú vị là với 3 đội A, B, C bất kì, nếu A thắng B và B thắng C thì A thắng C. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai điều sau phải xảy ra:

(i) Có 4 đội A, B, C, D mà A thắng B, B thắng C và C thắng D.

(ii) Có 4 đội mà các trận giữa họ đều hòa.

MẠCH NGUYỆT MINH
(SV lớp CNTN khoa Toán – Tin K2003, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/356. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương và $abc \geq 1$ thì

$$a+b+c \geq \frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

PHẠM KIM HÙNG
(SV K9, hệ CNTT ngành Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/356. Cho dãy số (u_n) ; n = 1, 2, ... được xác định như sau:

$u_0 = a$ và $u_{n+1} = \sin^2(u_n + 11) - 2007$ với mọi số tự nhiên n, trong đó a là số thực cho trước. Chứng minh rằng

a) Phương trình $\sin^2(x + 11) - x = 2007$ có nghiệm duy nhất. Kí hiệu nghiệm đó là b.

b) $\lim u_n = b$.

TRẦN TUẤN ANH
(Khoa Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T9/356. Cho tam giác ABC không đều. Trên các cạnh BC, CA, AB thứ tự lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\dfrac{BA_1}{BC}=\dfrac{CB_1}{CA}=\dfrac{AC_1}{AB}$.

Chứng minh rằng nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 bằng nhau thì các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

THÁI THỊ THANH HOA
(GV khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

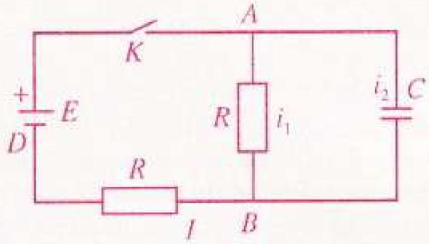
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/356. Hai vật nhỏ cùng khối lượng m được luồn vào một thanh cứng nhẵn nằm ngang và được nối với nhau bằng sợi dây nhẹ không giãn chiều dài $2L$. Ở chính giữa đoạn dây có

gắn một vật nhỏ khối lượng $2m$. Ban đầu người ta giữ cho ba vật có cùng độ cao, sợi dây căng rồi sau đó thả nhẹ. Hãy tìm vận tốc cực đại của mỗi vật. Bỏ qua sức cản của không khí.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/356. Ở sơ đồ dưới đây hãy tìm sự phụ thuộc của hiệu điện thế $U_{AB}=U_C$ của tụ điện C theo thời gian t nếu đóng khóa K lúc $t=0$.



NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/356. (for 6th grade)

Caculate the following sum S of 1002 terms

$$S=\frac{1.3}{3.5}+\frac{2.4}{5.7}+...+\frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}+...+\frac{1002.1004}{2005.2007}.$$

T2/356. (for 7th grade)

Let BE and CF be two altitudes of a triangle ABC. Prove that $AB=AC$ when and only when $AB+BE=AC+CF$.

T3/356. Let A be a natural number greater than 9, written in decimal system with digits 1, 3, 7, 9. Prove that A has at least a prime divisor not less than 11.

T4/346. Find the least value of the expression

$$P=\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}.$$

where a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 are non negative real numbers satisfying the conditions $a_i^2+b_i^2=1$ (i = 1, 2, 3, 4, 5) and $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=1$.

T5/356. Let be given a nonright-angled triangle ABC with its altitudes AA', BB', CC'. Let D, E, F be the centers of the escribed circles of the trangles $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ opposite A, A', A' respectively. The escribed circle of triangle ABC opposite A touches the lines BC, CA, AB at M, N, P respectively. Prove that the circumcenter of triangle DEF is the orthocenter of triangle MNP.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/356. Ten teams participated in a football competition where each team played against every other team exactly once. When the competition was over, it turned out that for every three teams A, B, C, if A defeated B and B defeated C then A defeated C.

Prove that there were four teams A, B, C, D such that A defeated B, B defeated C, C defeated D or such that each match between them was a draw.

T7/356. Prove that for abitrary positive numbers a, b, c such that $abc \geq 1$, we have

(Xem tiếp trang 31)

★**Bài T1/352.** *Tìm số có năm chữ số, biết rằng nếu đem số đó nhân với 2 thì được một số có sáu chữ số đôi một khác nhau và khác chữ số 0; nếu đem số đó nhân lần lượt với 5, 6, 7, 8, 11 thì cũng được tích là các số có sáu chữ số được viết bởi các chữ số như số nhận được khi nhân với 2 nhưng theo thứ tự khác.*

Lời giải. Gọi số phải tìm là $N = \overline{abcde}$ và $2N = \overline{mpqrst}$. Vì $2N \le 2.9999 \le 19998$ nên $m = 1$.

1) Xét chữ số e

• Nếu e là chẵn thì $5N$ có tận cùng là chữ số 0, trái giả thiết.

• Nếu $e = 5$ thì $2N$ có tận cùng là chữ số 0, trái giả thiết.

• Nếu $e = 1$ thì $2N$, $5N$, $6N$, $7N$, $8N$, $11N$ có tận cùng lần lượt là 2, 5, 6, 7, 8, 1.

Số $6N$ được viết bởi các chữ số trên và $6N$ chia hết cho 3 nhưng 2+5+6+7+8+1 = 29 không chia hết cho 3, mâu thuẫn.

• Nếu $e = 7$ thì $2N$, $5N$, $6N$, $7N$, $8N$, $11N$ có tận cùng lần lượt là 4, 5, 2, 9, 6, 7, trong đó không có $m = 1$, mâu thuẫn.

• Nếu $e = 9$ thì $2N$, $5N$, $6N$, $7N$, $8N$, $11N$ có tận cùng lần lượt là 8, 5, 2, 3, 2, 9, trong đó không có $m = 1$ (hoặc $6N$ không chia hết cho 3), mâu thuẫn.

Vậy chỉ có thể $e = 3$, lúc đó $2N$, $5N$, $6N$, $7N$, $8N$, $11N$ có tận cùng lần lượt là 6, 5, 8, 1, 4, 3 và $t = 6$, $m = 1$.

2) Xét chữ số p.

Do $2N < 5N < 6N < 7N < 8N < 11N$ nên chữ số đầu bên trái của $2N$, $5N$, $6N$, $7N$, $8N$, $11N$ theo thứ tự phải là 1, 3, 4, 5, 6, 8.

Từ $8N > 610000$ suy ra $2N > 152500$.

Từ $11N < 870000$ suy ra $2N < 159000$.

Do đó $p = 5$.

3) Xét chữ số s.

• Nếu $s = 3$ thì $2N = \overline{15qr36}$, suy ra $6N$ có tận cùng là $\overline{08}$, trái giả thiết.

• Nếu $s = 8$ thì $2N = \overline{15qr86}$, suy ra $8N$ có tận cùng là $\overline{44}$, trái giả thiết.

Vậy $s = 4$ và $2N = \overline{15qr46}$.

4) Xét các chữ số q và r.

• Nếu $q = 8$, $r = 3$ thì $8N = 4.2N = 4.158346 = 633384$, trái giả thiết.

• Vậy chỉ có thể là $q = 3$, $r = 8$. Ta có $2N = 153846$ và $N = 76923$. Thử lại thấy thỏa mãn đề bài. ❐

Nhận xét. Nếu biết khéo léo đánh giá lần lượt các chữ số e, p, s, như ở lời giải trên thì số lần thử tương đối ít. Ba bạn sau có lời giải tốt:

Nam Định: *Phùng Mạnh Linh*, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Bảo Nhi*, 6/5, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bình Định:** *Bùi Hồng Ngọc*, 7A6, THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/352.** *Cho a, b, c, d, m, n là các số nguyên dương sao cho ab = cd. Chứng minh rằng số* $A = a^{2n+1} + b^{2m+1} + c^{2n+1} + d^{2m+1}$ *là hợp số.*

Lời giải. Áp dụng hằng đẳng thức mở rộng

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + ... - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

(n là số tự nhiên lẻ), suy ra $(x^n + y^n) \vdots (x + y)$.

Ta có

$$(a^{2n+1} + c^{2n+1}) \vdots (a+c),\ (b^{2m+1} + d^{2m+1}) \vdots (b+d).$$

Đặt $A = (a + c)s + (b + d)t \qquad (s, t \in \mathbb{N}^*)$.

Theo giả thiết, $ab = cd$ nên $\frac{a}{c} = \frac{d}{b} = k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, suy ra $a = kc$, $d = kb$. Khi đó

$$A = (kc + c)s + (b + kb)t$$
$$= sc(k + 1) + tb(k + 1) = (sc + tb)(k + 1).$$

Vì $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k+1 \geq 2$; $s, t, b, c \in \mathbb{N}^*$ nên $sc + tb \geq 2$. Vậy A là hợp số. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn chứng minh trực tiếp kết quả $(x^n + y^n) \vdots (x+y)$ (n tự nhiên lẻ) bằng phương pháp quy nạp toán học, cũng dẫn đến kết quả như trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thanh Hằng, Lê Thanh Nga*, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh, *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch; **Hải Phòng:** *Đặng Tuấn Anh, Nguyễn Thị Thu Trang*, 7B8, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền; **Nam Định:** *Lê Thị Phương Thanh, Phùng Mạnh Linh*, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh; **Nghệ An:** *Lê Ngọc Quyên*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Cẩm Nhung*, 7/1, THCS Lê Văn Thiêm, TX Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** *Đặng Đình Đường, Hồ Tuấn Vũ*, 7A, *Lê Hồng Yến*, 7G, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bình Định:** *Bùi Hồng Ngọc*, 7A6, THCS Lê lợi, TP. Quy Nhơn.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/352. *Giải phương trình nghiệm nguyên* $x^5 - y^5 - xy = 32.$ (1)

Lời giải. Từ (1), ta có x, y là hai số chẵn vì trong các trường hợp ngược lại, vế trái là một số lẻ còn vế phải là một số chẵn (!)

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$= 32 + xy$ (2)

Vì $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$
$=(x^3+y^3)(x+y)+x^2y^2 \geq 0$ nên từ (2) ta có

$|x-y|(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) = |32+xy|$ (3)

Với $x = y$ phương trình (3) không thỏa mãn.

Với x, y là các số nguyên khác nhau thì $|x-y| \geq 1$, từ (3) suy ra

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4 \leq |32+xy| \quad (4)$$

Nếu $32 + xy < 0$ thì từ (4) suy ra

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4 \leq -32-xy$$

hay $(x^3+y^3)(x+y)+(x^2y^2+xy+32) \leq 0$.

Bất đẳng thức này không xảy ra vì trong vế trái có $(x^3+y^3)(x+y) \geq 0$ và

$$x^2y^2+xy+32=\left(xy+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{127}{4}>0.$$

Do đó $32 + xy \geq 0$.

Từ (4) suy ra $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4 \leq 32+xy$

hay $(x^4+x^3y+xy^3+y^4)+(x^2y^2-xy) \leq 32$

$$(x^3+y^3)(x+y)+xy(xy-1) \leq 32.$$

Vì $(x^3+y^3)(x+y) \geq 0$ nên $xy(xy-1) \leq 32$ (5)

Nếu $xy \geq 7$ thì $xy(xy-1) > 32$.

Nếu $xy \leq -6$ thì $xy(xy-1) > 32$.

Do đó từ (5) ta có $-6 < xy < 7$.

Lại vì x, y là hai số chẵn khác nhau nên xy chỉ có thể nhận giá trị 0 hoặc -4.

• Nếu $xy = 0$ thì $x = 0$ hoặc $y = 0$.

Thay $x = 0$ vào PT (1) ta được nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=-2. \end{cases}$

Thay $y = 0$ vào PT (1), ta được nghiệm $\begin{cases} x=2 \\ y=0. \end{cases}$

Nếu $xy = -4$ thì $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=2. \end{cases}$

Không thỏa mãn (1).

Vậy PT (1) có hai nghiệm là

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x=2 \\ y=0. \end{cases}$$ ❐

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán bằng cách xét các trường hợp: từ $xy = 0$, ta tìm được hai nghiệm như trên. Từ $xy < 0$ hoặc $xy > 0$, ta chứng minh được phương trình không thỏa mãn. Tuy nhiên, cách này cũng khá phức tạp.

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế; *Khương Mạnh Thắng*, 8A, *Khổng Hoàng Trang*, 7D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, *Nguyễn Thị Huyền Trang*, 7A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Chu Thanh Thảo*, 9K, THCS Hữu Nghị Việt Nam - Angiêri Q. Thanh Xuân; **Thanh Hóa:** *Lê Ngọc Long*, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Hồ Hoàng Việt Linh, Hồ Xuân Sơn, Phạm Thị Phương Anh, Phạm Tú Tài, Trần Thị Thảo*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T4/352. *Cho các số dương a, b, c thoả mãn abc ≥ 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải. Áp dụng các bất đẳng thức Bunhiacovski và Cauchy, ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}$$

$$\geq \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}+\sqrt{c+\sqrt{ab}}+\sqrt{a+\sqrt{bc}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{2.\sqrt{2}.\sqrt{b+\sqrt{ac}}+2\sqrt{2}.\sqrt{c+\sqrt{ab}}+2.\sqrt{2}\sqrt{a+\sqrt{bc}}}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{2+b+\sqrt{ac}+2+c+\sqrt{ab}+2+a+\sqrt{bc}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{a+b+c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+6}.$$

Để chứng minh (1), ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{a+b+c+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+6}\geq\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

Thật vậy ta có

$$(2)\Leftrightarrow 4(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca})$$
$$\geq 3(a+b+c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+18$$
$$\Leftrightarrow a+b+c+5(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\geq 18 \qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và sử dụng giả thiết $abc\geq 1$, ta có

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\geq 3;$$

$$5(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\geq 5.3\sqrt[3]{\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca}}$$
$$=15\sqrt[3]{abc}\geq 15.$$

Vậy (3) đúng, do đó (2) đúng. Vậy (1) được chứng minh.

Dễ thấy dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. □

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn đã giải đúng. Tuy nhiên một số lời giải còn dài.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: *Võ Thị Kiểm*, 6A, THCS Tráng Việt, Mê Linh; **Thái Bình:** *Nguyễn Quốc Trường*, 9A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Bùi Bắc Nam*, *Hồ Hoàng Việt Linh*, 8B, *Lê Quốc Hoàn*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Dương Đức Lâm*, A1, K32, cấp 2-3 Nguyễn Trung Thiên, Thạch Hà.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/352. *Tìm các số thực x và y thoả mãn*

$$\begin{cases}x+y\geq 4\\ (x^3+y^3)(x^7+y^7)=x^{11}+y^{11}.\end{cases}$$

Lời giải. • Trước hết ta chứng minh rằng: Nếu $x+y\geq 0$ và m, n là hai số nguyên dương thì

$$(x^m+y^m)(x^n+y^n)\leq 2(x^{m+n}+y^{m+n}) \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Thật vậy, BĐT (1) tương đương với

$$(x^m-y^m)(x^n-y^n)\geq 0 \qquad (2)$$

Do vai trò x, y như nhau nên giả sử $x\geq y$. Mặt khác $x+y\geq 0$ nên $x\geq -y$. Suy ra $x\geq |y|\geq 0$. Vì vậy $x^m\geq |y|^m\geq y^m$; $x^n\geq |y|^n\geq y^n$.

Từ đó thấy BĐT (2) đúng. Do đó BĐT (1) cũng đúng.

• Áp dụng hai lần BĐT (1) ta có

$$(x+y)(x^3+y^3)(x^7+y^7)\leq 2(x^4+y^4)(x^7+y^7)$$
$$\leq 4(x^{11}+y^{11}). \qquad (3)$$

Từ $x\geq |y|\geq 0$ suy ra $x^n\geq |y|^n\geq -y^n$ nên

$x^n+y^n\geq 0$ $(\forall n\in \mathbb{N})$.

Do đó $x^3+y^3\geq 0$, $x^7+y^7\geq 0$, $x^{11}+y^{11}\geq 0$.

Lại có $x+y\geq 4$ nên từ (3) suy ra

$$(x^3+y^3)(x^7+y^7)\leq x^{11}+y^{11}.$$

và $(x^3+y^3)(x^7+y^7)=x^{11}+y^{11}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x=y\\ x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2.\end{cases}$$

Vậy $x=2$, $y=2$ là các số cần tìm. □

Nhận xét. 1) Có nhiều bạn tham gia giải bài này. Trong đó một số bạn còn nhầm lẫn trong suy luận, chẳng hạn như: $x\geq y\Rightarrow x^{2k}\geq y^{2k}$ $(k\in \mathbb{N}^*)$ (!);

$x+y\geq 4\Rightarrow 2\geq\frac{1}{2}(x+y)$ (!);

Với mọi x, y đều có

$(x^m+y^m)(x^n+y^n)\le 2(x^{m+n}+y^{m+n})$ $(m,n\in\mathbb{N}^*)$ (!)

2) Bài toán có thể tổng quát như sau:

Tìm các số thực x, y thỏa mãn

$$\begin{cases} x+y\ge 4 \\ (x^m+y^m)(x^n+y^n)=x^{m+n+1}+y^{m+n+1} \end{cases} \quad (m,n\in\mathbb{N}^*).$$

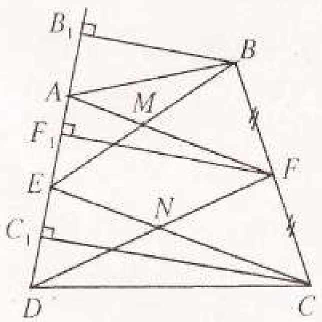
3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Khương Mạnh Thắng*, 8A, THCS Lập Thạch; **Phú Thọ:** *Hà Quyết Thắng, Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS LâmThao, Lâm Thao; **Thái Bình:** *Hoàng Minh Lập*, 8E, THCS Quang Trung, Kiến Xương, *Hà Thành Trung*, 9D, THCS TTr. Đông Hưng; *Nguyễn Quốc Trường*, 9A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải; **Thanh Hóa:** *Lê Trọng Cường*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Lê Văn Tuấn*, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn; **Nghệ An:** *Hồ Hữu Quân, Lê Quốc Hoàn*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T6/352. *Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. AF cắt BE tại M, CE cắt DF tại N. Tìm giá trị nhỏ nhất của* $P=\dfrac{MA}{MF}+\dfrac{MB}{ME}+\dfrac{NC}{NE}+\dfrac{ND}{NF}$.

Lời giải. (Theo nhiều bạn)



Dựng BB_1, FF_1, CC_1 vuông góc với đường thẳng AD (hình vẽ). Do F là trung điểm của BC nên FF_1 là đường trung bình của hình thang vuông BB_1C_1C.

Từ đó $2FF_1=BB_1+CC_1$.

Suy ra $S_{BAD}+S_{CAD}=2S_{FAD}$ (1)

Tương tự $S_{ABC}+S_{DBC}=2S_{EBC}$ (2)

Từ (1), (2) và áp dụng BĐT Cauchy ta thấy

$$P=\frac{2S_{ABE}}{2S_{FBE}}+\frac{2S_{BAF}}{2S_{EAF}}+\frac{2S_{CDE}}{2S_{EDF}}+\frac{2S_{DCE}}{2S_{FCE}}$$

$$=\frac{S_{BAD}}{S_{EBC}}+\frac{S_{ABC}}{S_{FAD}}+\frac{S_{DBC}}{S_{FAD}}+\frac{S_{CAD}}{S_{EBC}}$$

$$=2\left(\frac{S_{FAD}}{S_{EBC}}+\frac{S_{EBC}}{S_{FAD}}\right)\ge 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $S_{FAD}=S_{EBC}$ $\Leftrightarrow 2S_{EAF}=2S_{EBF}$ và $2S_{FDE}=2S_{ECF}$.

Lúc này $AB//CD//EF$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4, đạt được khi và chỉ khi $AB//CD$. ❒

Nhận xét. Đây là bài toán quen thuộc (chẳng hạn xem bài T5/289, THTT số 289, tháng 7 năm 2001). Hầu hết các bạn đều sử dụng phương pháp tỉ số diện tích hoặc định lí Thalès để giải bài này. Sau đây là các bạn có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: *Phạm Duy Long*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Thái Nguyên:** *Đào Hoàng Tùng*, 8A3, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** *Khương Mạnh Thắng*, 8A, *Phạm Ngọc Xuyên*, 9D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hữu Thanh*, 8A3, *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, *Tạ Đức Thành*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nam Định:** *Trần Thu Thủy*, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Thái Bình:** *Hoàng Minh Lập*, 8E, THCS Quang Trung, Kiến Xương; **Thanh Hóa:** *Lê Anh Công, Trịnh Minh Chiến*, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 8A, *Nguyễn Danh Dũng*, 8C, *Tăng Văn Bình*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** *Phan Long Tri Yên*, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 8^7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

HỒ QUANG VINH

★Bài T7/352. *Lấy ba điểm A, B, C trên đường tròn tâm O bán kính R sao cho* $CB-CA=R$ *và* $CA.CB=R^2$. *Tính số đo các góc của tam giác ABC.*

Lời giải. Trên đoạn CB lấy điểm D sao cho $BD=R$ thì $CD=CA$.

Do đó $CD.CB=CA.CB=CO^2$.

Suy ra $\dfrac{CD}{CO}=\dfrac{CO}{CB}$ nên $\Delta COD \backsim \Delta COB$.

Suy ra $\widehat{COD}=\widehat{CBO}=\widehat{OCB}$, $OD=CD=CA$.

Ta lại có $\widehat{OBD}+2\,\widehat{BDO}=180^\circ$ nên $5.\widehat{CBO}=180^\circ$ tức là $\widehat{CBO}=36^\circ$, $\widehat{BOC}=108^\circ$. Mà $\Delta OAC=\Delta BOD$ (c.c.c).

Suy ra $\widehat{AOC}=\widehat{CBD}=36^\circ$.

Ta có hai trường hợp:

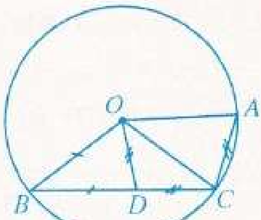
Trường hợp 1.

A và O cùng phía đối với BC. Ta có $\widehat{CBA}$

$= \frac{1}{2}\widehat{COA} = 18^\circ$.

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 54^\circ$.

$\widehat{ACB} = 108^\circ$.



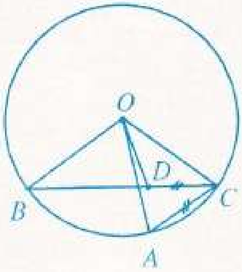
Trường hợp 2.

A khác phía với O đối với BC.

$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{COA} = 18^\circ$.

$\widehat{BAC} = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$

$\widehat{ACB} = 36^\circ$.❒



Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Tạ Đức Thành*, 9A3, THCS Lâm Thao; *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Hữu Trung*, 6B, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Thị Thu Hương*, 9A, THCS Lập Thạch; **Thái Bình**: *Hoàng Minh Lập*, 8E, THCS Quang Trung, Kiến Xương; **Nghệ An**: *Võ Hồng Đức*, 8A1, THCS TTr Quán Hành, Nghi Lộc; **Bình Định**: *Nguyễn Vũ Ái Nhã*, 9A4, THPT số 2 An Nhơn.

VŨ KIM THỦY

★Bài T8/352. *Dãy số (a_i) $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ được xác định bởi :*

$a_1 = 1$; $a_2 = -1$;

$a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}$ với $n = 3, 4, \ldots$

Tính giá trị của biểu thức

$$A = 2a_{2006}^2 + a_{2006}a_{2007} + a_{2007}^2.$$

Lời giải. (Theo bạn *Đặng Tuấn Anh*, A1, K34, THPT Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**).

Đặt $A_n = 2a_n^2 + a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2$.

Do $a_{n+1} = -a_n - 2a_{n-1}$ nên ta có

$$A_n = 2a_n^2 + a_n(-a_n - 2a_{n-1}) + (-a_n - 2a_{n-1})^2$$
$$= 2a_n^2 - a_n^2 - 2a_n a_{n-1} + a_n^2 + 4a_n a_{n-1} + 4a_{n-1}^2$$
$$= 2a_n^2 + 2a_{n-1}a_n + 4a_{n-1}^2$$
$$= 2(2a_{n-1}^2 + a_{n-1}a_n + a_n^2)$$
$$= 2A_{n-1}.$$

Vậy (A_n) là cấp số nhân với công bội 2, do đó

$A_n = 2^{n-1}A_1 = 2^{n-1}.2 = 2^n$.

Với $n = 2006$ ta có $A = A_{2006} = 2^{2006}$. ❒

Nhận xét. Tòa soạn nhận được một số rất lớn các lời giải của các bạn gửi tới. Tất cả đều làm đúng.

Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tốt hơn cả:

Yên Bái: *Hoàng Công Hiển*, 10A2, THPT Văn Chấn; **Bắc Giang:** *Hà Trọng Sỹ*, 10T, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Tây:** *Trần Thị Thùy Trang*, 10T6, THPT Ứng Hòa A; **Hà Tĩnh:** *Hoàng Văn Quân*, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** *Bùi Hữu Nhân*, 10T, THPT Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn; **Đồng Tháp:** *Võ Hoàng Nam*, 11T, THPT Cao Lãnh; **Kiên Giang:** *Lê Viết Sơn* 10T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T9/352. *Kí hiệu N_m là tập hợp tất cả các số nguyên không bé hơn số nguyên m cho trước. Tìm tất cả các hàm $f: N_m \to N_m$ thoả mãn $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$, $\forall x, y \in N_m$.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh f là một đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(y_1) = f(y_2)$ thì hiển nhiên

$f(x^2 + f(y_1)) = f(x^2 + f(y_2))$, $\forall x \in N_m$

$\Leftrightarrow y_1 + (f(x))^2 = y_2 + (f(x))^2$

Do đó $y_1 = y_2$, tức là f là một đơn ánh. Với mỗi $k \in N_m$, hay $k \geq m$, đặt $f(k) = l$. Ta chứng minh rằng $l = k$. Theo giả thiết thì

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \ \forall x, y \in N_m \quad (1)$$

Lần lượt thay $x = k$, $y = k$ và $x = y = k$ vào (1), thu được

$$f(k^2 + f(y)) = y + l^2, \forall y \in N_m \quad (2)$$
$$f(x^2 + l) = k + (f(x))^2, \forall x \in N_m \quad (3)$$
$$f(k^2 + l) = k + l^2 \quad (4)$$

thay $y = k^2 + l$ vào (2) và sử dụng (4), ta được

$$f(k^2 + k + l) = k^2 + l + l^2 \quad (5)$$

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f(n(k^2+l^2)+l-l^2) = n(k^2+l^2)+k-k^2 \quad (6)$$

và $f(k+n(k^2+l^2)) = l+n(k^2+l^2)$ (7)

Thật vậy, (6) và (7) đúng với $n = 1$ do (4) và (5). Giả sử (6) và (7) đúng đến n nào đó. Ta chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$.

Thay $y = k+n(k^2+l^2)$ vào (2) và sử dụng (7), ta được

$$f(k^2+l+n(k^2+l^2)) = k+n(k^2+l^2)+l^2$$

$$\Leftrightarrow f((n+1)(k^2+l^2)+l-l^2) = (n+1)(k^2+l^2)+k-k^2 \quad (8)$$

Tiếp tục thay $y = (n+1)(k^2+l^2)-l-l^2$ vào (2) và sử dụng (8), ta được

$$f(k^2+f((n+1)(k^2+l^2)+l-l^2)$$

$$= (n+1)(k^2+l^2)+l-l^2+l^2$$

$$\Leftrightarrow f(k+(n+1)(k^2+l^2)) = l+(n+1)(k^2+l^2) \quad (9)$$

Vậy hai hệ thức (6) và (7) đúng với $n+1$, tức là chúng đúng với mọi số nguyên dương n.

Tiếp theo, thay $x = k^2+k+l^2$, $y = k$ vào (1) và sử dụng (5), ta thu được

$$f((k^2+k+l^2)^2+l)$$

$$= k-k^2+(k^2+l^2)(k^2+(l+1)^2) \quad (10)$$

Nếu trong (6) ta chọn $n = k^2+(l+1)^2$ thì

$$f(k^2+(l+1)^2(k^2+l^2)+l-l^2)$$

$$= k-k^2+(k^2+l^2)(k^2+(l+1)^2) \quad (11)$$

Từ tính đơn ánh của f, (10) và (11), suy ra

$$k^2+(l+1)^2 = l^2+(k+1)^2 \text{ hay } l = k.$$

Vậy nên $f(x) = x$, $x \in N_m$. ❐

Nhận xét. Đây là đề toán có nguồn gốc từ bài thi Olympic Toán Quốc tế tại CHLB Nga năm 1992:

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2+f(y)) = y+(f(x))^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tuy nhiên, bài toán rời rạc hóa trên tập N_m là một bài toán khó. Đa số các bạn giải y nguyên theo cách giải của bài toán Olympic trên nên lời giải không đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ Bài T10/352. *Giả sử hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2+xy+x=1 & (1) \\ y^2+xy+x+y=1 & (2) \end{cases}$$

có đúng một nghiệm $(x_0\,;\,y_0)$ với $x_0 > 0$ và $y_0 > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x_0}+\frac{1}{y_0} = 8\cos^3\frac{\pi}{7}$.

Lời giải. Trước hết ta sẽ làm rõ sự kiện: Hệ phương trình (HPT) (1), (2) có duy nhất một nghiệm $x > 0$, $y > 0$.

Thật vậy $x > 0$, $y > 0$ là nghiệm của HPT (1), (2) tương đương với

$$\begin{cases} y = \dfrac{1-x-x^2}{x} \\ (y+1)(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x}-x-1 & (1') \\ \left(\dfrac{1}{x}-x\right)\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = 1 & (2') \end{cases}$$

$$(2') \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1+x = 1 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+1 = 0.$$

Đặt $f(x) = x^3-2x^2-x+1$.

Ta có $f'(x) = 3x^2-4x-1$.

Từ (1) có $x < 1$, và với $0 < x < 1$ thì

$f'(x) = 3x^2-4x-1 = 3(x^2-x)-x-1 < 0$.

Do đó $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $0 \le x \le 1$.

Mặt khác $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ trong khoảng $0 < x < 1$ có duy nhất một nghiệm.

Chú ý $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ nên $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1+x = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}-1-x+x^2 = x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x}-x-1 = x-x^2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{x}+\frac{1}{x(1-x)} = \frac{2-x}{x(1-x)} = \frac{1}{x^3} \quad (3)$$

(do $f(x) = 0 \Rightarrow 1-x = x^2(2-x)$

$\Rightarrow x(1-x) = x^3(2-x)$).

Xét trường hợp $\frac{1}{x} = 2\cos\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ta có $\frac{f(x)}{x^3} = 1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

$= 1-4\cos\varphi-4\cos^2\varphi+8\cos^3\varphi$

$= 2(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi)-2(2\cos^2\varphi-1)+$
$+ 2\cos\varphi-1$

$= 2\cos3\varphi-2\cos2\varphi+2\cos\varphi-1$

$= \frac{1}{\sin\varphi}(2\cos3\varphi.\sin\varphi-2\cos2\varphi.\sin\varphi$

$$+ 2\cos\varphi.\sin\varphi - \sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{\sin\varphi}(\sin 4\varphi - \sin 2\varphi - \sin 3\varphi + \sin\varphi$$

$$+ \sin 2\varphi - \sin\varphi)$$

$$= \frac{\sin 4\varphi - \sin 3\varphi}{\sin\varphi} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4\varphi = 3\varphi + 2k\pi & (k \in \mathbb{N}^*) \\ 4\varphi = \pi - 3\varphi + 2k\pi & (k \in \mathbb{N}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \varphi = 2k\pi & (k \in \mathbb{N}^*) \\ \varphi = \frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7} & (k \in \mathbb{N}) \end{array}\right.$$

Vì $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ nên $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}\right\}$.

Mặt khác $0 < x < 1$ nên $\cos\varphi = \frac{1}{2x} > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \varphi < \frac{\pi}{3}$. Bởi vậy $\varphi = \frac{\pi}{7}$.

Như vậy nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$ với $0 < x < 1$ là $x_0 = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}$.

Do đó theo (3) ta có $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} = \frac{1}{x_0^3} = 8\cos^3\frac{\pi}{7}$. ❐

Nhận xét. 1) Đây là bài toán giải tích tương đối phức tạp, đòi hỏi nhiều kĩ năng đẹp của đại số, của lượng giác. Đại đa số các bạn học sinh "tận dụng" giả thiết cho biết HPT (1), (2) có duy nhất nghiệm $x > 0$, $y > 0$, chỉ còn chứng minh $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} = 8\cos^3\frac{\pi}{7}$. Chú ý với $0 < x < 1$, ta đặt được $\frac{1}{x} = 2\cos\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, chỉ trong trường hợp $\frac{1}{2} < x < 1$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hòa Bình: *Vũ Việt Dũng*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Lăng*, 11A1, THPT Lương Tài I; **Nam Định:** *Phạm Văn Cảnh*, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Phan Minh Thắng*, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Hạnh Dung*, 12T, THPT chuyên Hà Tĩnh.

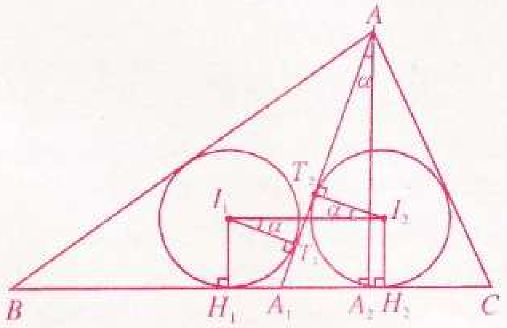
NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T11/352. *Tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao xuất phát từ A, B, C và p là nửa chu vi của tam giác. Lấy điểm A_1 thuộc cạnh BC sao cho đường tròn nội tiếp các tam giác ABA_1, ACA_1 bằng nhau và gọi bán kính các đường tròn đó là r_A. Ta cũng định nghĩa tương tự cho r_B, r_C. Chứng minh rằng $2(r_A + r_B + r_C) + p \le h_a + h_b + h_c$.*

Lời giải. Đa số các bạn đều nhận thấy đề in nhầm lẫn (dấu ≤ cần phải thay bằng dấu ≥).

Lời giải sau đây của bạn *Nguyễn Minh Đức*, 11A2, khối PT chuyên, ĐHSP Hà Nội).

Gọi (I_1), (I_2) là đường tròn nội tiếp các tam giác ABA_1, ACA_1; T_1, T_2 thứ tự là tiếp điểm của AA_1 với (I_1), (I_2); H_1, H_2 thứ tự là tiếp điểm của BC với (I_1), (I_2); A_2 là hình chiếu của A trên BC (hình vẽ).



Dễ thấy $\widehat{T_1I_1I_2} = \widehat{T_2I_2I_1} = \widehat{A_1AA_2} = \alpha$.

Ta có $2r_a = I_1T_1 + I_2T_2 = I_1I_2\cos\alpha = H_1H_2.\cos\alpha$

$= (A_1H_1 + A_1H_2)\cos\alpha$

$= \left(\frac{A_1B + A_1A - BA}{2} + \frac{A_1C + A_1A - CA}{2}\right)\cos\alpha$

$= \left(AA_1 + \frac{BC - BA - CA}{2}\right)\cos\alpha$

$= AA_1\cos\alpha - (p - a)\cos\alpha = AA_2 - (p - a)\cos\alpha$

$\ge h_a - (p - a)$.

Tương tự, ta có

$2r_b \ge h_b - (p - b)$; $2r_c \ge h_c - (p - c)$.

Suy ra $2(r_a + r_b + r_c) + p \ge h_a + h_b + h_c$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều. ❐

Nhận xét. 1) Khá nhiều bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên đa số các lời giải cũng khá dài dòng vì đều phải thông qua việc chứng minh đẳng thức $AA_1 = \sqrt{p(p-a)}$.

2) Ngoài bạn *Đức*, chỉ có ba bạn cho lời giải ngắn gọn tương tự như trên: *Vũ Việt Dũng*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Võ Thanh Xuân*, 12A6, THPT số 2, Tuy Phước, **Bình Định**; *Phạm Văn Cảnh*, 10T, THPT Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

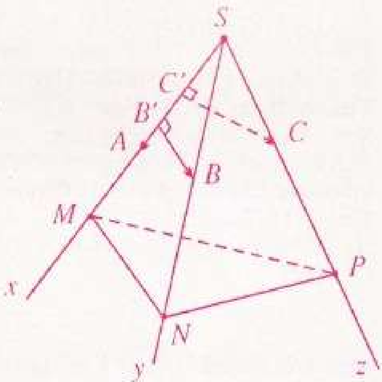
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thanh Bình, Nguyễn Hoàng Hải*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *Nhữ Văn Vinh*, 11A1, THPT Tân Yên II; **Hà Nội:** *Trần Nhật Tân*, 10A1 Toán, ĐHKHTN, ĐHQG HN, *Nguyễn Thanh Hoa*, 11A1 Toán, Khối THPT chuyên ĐHSP HN; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Trung*, 11A2, THPT Bình Minh, Đan Phượng; **Nam Định:** *Đặng Đức Hiệp, Cao Văn Huy*, 11H, THPT Giao Thủy; **Hải Phòng:** *Nguyễn Trung Kiên*, 10T, THPT NK Trần Phú; **Nghệ An:** *Hoàng Minh Thắng*, 11A1, THPT Phan Bội Châu; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Đình Quốc Bảo*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T12/352. *Cho hình chóp tam giác S.MNP có $\widehat{MSN} + \widehat{NSP} + \widehat{PSM} = 180^\circ$ và các góc phẳng nhị diện cạnh SM, SN, SP theo thứ tự là α, β, γ. Chứng minh rằng*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1.$$

Lời giải. (Dựa theo bạn *Nguyễn Quốc Đại*, 11 chuyên Toán, THPT Lê Hồng Phong, TP. **Nam Định**).



Kí hiệu $\widehat{ySz} = a$, $\widehat{zSx} = b$ và $\widehat{xSy} = c$; $\widehat{Sx} = \alpha$, $\widehat{Sy} = \beta$ và $\widehat{Sz} = \gamma$.

Trước hết ta chứng minh công thức sau đây, gọi là *Định lí cosin thứ nhất trong góc tam diện* mà nội dung của nó đã được nhắc đến trong phần nhận xét về lời giải bài toán T12/329 trong số 333 tháng 3 năm 2005.

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha \qquad (*)$$

Chứng minh. Trên các cạnh Sx, Sy, Sz lần lượt lấy các vectơ đơn vị $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$. Thế thì: $SA = SB = SC = 1$ và $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}) = a$, $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SA}) = b$, $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}) = c$.

Gọi B' và C' lần lượt là hình chiếu của B và C trên Sx; thế thì $(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}) = \alpha$.

Ta hãy tính $\overrightarrow{B'B}.\overrightarrow{C'C}$ bằng hai cách khác nhau. Để ý rằng ta có: $B'B = \sin c$, $C'C = \sin b$; $SB' = \pm\cos c$, $SC' = \pm\cos b$ (dấu + hay − tùy theo b và c nhỏ hơn hay lớn hơn 90°). Thế thì, một mặt ta được

$$\overrightarrow{B'B}.\overrightarrow{C'C} = \sin b\sin c\cos\alpha \qquad (1)$$

Mặt khác, từ $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SC'}$ nên

$$\overrightarrow{B'B}.\overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB'}.\overrightarrow{SC'} - (\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB'} + \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC'})$$

Từ đó $\overrightarrow{B'B}.\overrightarrow{C'C} = \cos a - \cos b.\cos c \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta thu được công thức (*) cần thiết lập.

Đến đây, trở lại bài toán với giả thiết

$$a + b + c = 180^\circ \qquad (3)$$

ta được $\cos a = -\cos(b + c) \qquad (4)$

Từ (*) và (4) thu được

$$\cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha = -\cos b\cos c + \sin b\sin c \qquad (5)$$

Từ (5) suy ra $\cos\alpha = 1 - 2\cot b.\cot c \qquad (6)$

Mặt khác

$$\cot a.\cot b + \cot b.\cot c + \cot c.\cot a = 1 \qquad (7)$$

Từ (6) cùng hai biểu thức tương tự và (7) thu được hệ thức cần tìm

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1. \ \square$$

Nhận xét. 1) Nội dung bài toán đề cập đến độ lớn của tất cả các mặt (góc phẳng ở đỉnh) và các góc phẳng nhị diện của một góc tam diện, cụ thể là góc tam diện đỉnh S của hình chóp tam giác $S.MNP$. Bởi vậy ta có thể phát biểu lại nội dung bài toán sao cho chỉ xét đến góc tam diện mà thôi.

Mệnh đề. Chứng minh rằng nếu các mặt (góc phẳng ở đỉnh) của một góc tam diện biểu thị các góc của một tam giác nào đó thì tổng cosin các nhị diện (góc phẳng nhị diện) của nó bằng 1.

Phương pháp vectơ được sử dụng trong chứng minh hệ thức (*) trên đây *không phải là phương pháp duy nhất*. Ngoài phương pháp vectơ, chúng ta còn có thể sử dụng định lí cosin trong tam giác vào việc thiết lập hệ thức (*). Muốn vậy, ta phải làm xuất hiện một tam giác $A_1B_1C_1$ có góc $\widehat{B_1A_1C_1}$ là *góc phẳng nhị diện* cạnh Sx bằng α được tạo thành từ việc lấy tương giao của góc tam diện được xét với một mặt phẳng nào đó vuông góc với cạnh Sx (ở điểm A_1) và cắt Sy, Sz tương ứng ở B_1, C_1. Sau đó chỉ việc áp dụng định lí cosin vào hai tam giác thường $A_1B_1C_1$, SB_1C_1 và định lí sin vào hai tam giác vuông A_1SB_1, A_1SC_1 thì cũng thiết lập được (*).

2) Một số bạn áp dụng định lí cosin vào hai tam giác nhưng sau đó tìm cách chuyển sang những hệ thức lượng giác thành thử lời giải không gọn.

Bạn *Hoàng Đức Hải*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, TP Vinh, **Nghệ An** đã đề xuất một lời giải hình học của bài toán. Bạn Hải chỉ ra rằng trên các tia SN và SP có thể tìm được duy nhất các điểm N' và P' sao cho $SMN'P'$ là một tứ diện gần đều rồi sau đó sử dụng diện tích để thiết lập hệ thức mà bài toán đòi hỏi. Tuy nhiên, chứng minh này của bạn *Hải* không chặt chẽ vì chỉ đúng trong trường hợp các mặt của góc tam diện $S(MNP)$ đều phải là *góc nhọn*. Đáng tiếc có một bạn sử dụng phương pháp cắt các cạnh có chung đỉnh S của ba mặt bên của hình chóp $S.MNP$ rồi trải lên mặt phẳng đáy MNP nhưng chỉ từ một điều kiện (3) duy nhất nêu trong đề bài toán đã vội vàng *ngộ nhận* $S.MNP$ là một tứ diện đều(!)

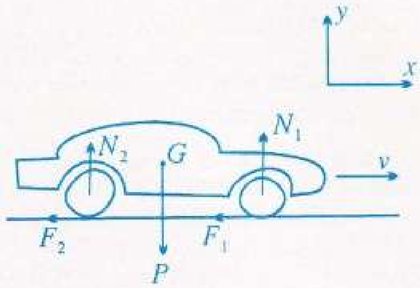
3) Ngoài bạn *Nguyễn Quốc Đại*, các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn gàng hơn cả.

Hải Dương: *Nguyễn Ngọc Uyển*, 12A3, THPT Phúc Thành, Kinh Môn; **Hải Phòng:** *Đoàn Minh Duyên*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Lê Duy Toàn*, 11A1, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Quảng Ninh:** *Phạm Dương Hưng*, 12$_2$, THPT Hoàng Diệu, Điện Bàn; **Bến Tre:** *Lê Văn Chánh*, 12 Toán, THPT Bến Tre, TX Bến Tre.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★Bài L1/352. *Một ôtô có khối lượng m = 1200kg. Sau khi bị hãm phanh cả bốn bánh, xe chuyển động chậm dần với gia tốc a = 0,5g (lấy g = 9,8m/s²). Cho biết trọng tâm G của ôtô cách mặt đường 75cm và nằm giữa hai trục trước và sau xe, chúng cách nhau 3,0m. Tính độ lớn của lực ma sát mà mặt đường tác dụng lên các bánh trước và các bánh sau. Hỏi phanh trước hay phanh sau chóng hỏng hơn ?*

Lời giải. Vì bị hãm phanh cả 4 bánh nên ô tô chuyển động trượt trên đường và lực ma sát của mặt đường tác dụng lên 4 bánh là lực ma sát trượt. Hình bên vẽ các ngoại lực tác dụng lên ôtô (gồm hai lực ma sát, trọng lực $\vec{P}$ và hai phản lực $\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}$).



Chiếu phương trình của định luật II Newton lên 2 trục Ox và Oy:

Ox: $-(F_1 + F_2) = -\pi a \Rightarrow F_1 + F_2 = 5880$ (N)(1)

Oy: $N_1 + N_2 - mg = 0 \Rightarrow \dfrac{F_1+F_2}{\mu} = mg$ (2)

(μ là hệ số ma sát).

Áp dụng quy tắc momen đối với G:

$1{,}5N_1 = 1{,}5N_2 + 0{,}75F_1 + 0{,}75F_2$

$\Rightarrow \dfrac{1{,}5(F_1-F_2)}{\mu} = 0{,}75(F_1 + F_2)$ (3)

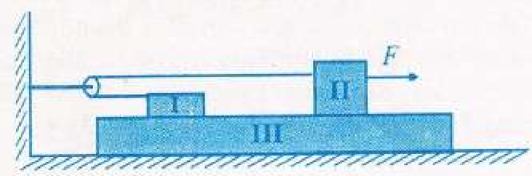
Từ (1), (2), (3) và thay số ta được: $F_1 = 3675$N và $F_2 = 2205N$. Vì vậy phanh trước chóng hỏng hơn. ❐

Nhận xét. Nhiều bạn biết cách giải nhưng trước hết là tính toán sai, dẫn đến kết quả sai. Các bạn có lời giải gọn và đáp số đúng:

Vĩnh Phúc: *Lỗ Tất Thắng*, 10A3, *Văn Đăng Sơn*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Phạm Đức Linh*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** *Trần Ngọc Toàn*, 10A2, THPT chuyên Hà Nam; **Thanh Hóa:** *Lê Bá Sơn*, 11F, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Nghĩa*, 11A3, *Trịnh Văn Thắng*, A3, K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An ; **Quảng Trị:** *Lê Hà Thùy Trang*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Kim Khuyên*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

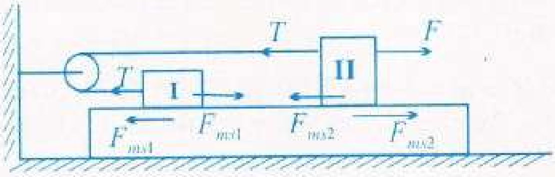
MAI ANH

Bài L2/352. *Hai vật I và II có khối lượng thứ tự là m, 2m được nối với nhau và đều nằm trên vật III có khối lượng 5m như hình vẽ.*



Biết rằng dây nhẹ không giãn và khối lượng của ròng rọc không đáng kể. Bỏ qua ma sát ở ròng rọc và ma sát giữa vật III với sàn. Tác dụng một lực F nằm ngang lên vật II. Hệ số ma sát giữa các vật I, II với vật III là k. Tìm gia tốc của mỗi vật.

Lời giải. Các lực tác dụng theo phương ngang lên mỗi vật như hình vẽ.



Tùy theo độ lớn của lực F, có thể xảy ra các trường hợp sau đây:

- Cả hệ đứng yên.

- Vật I trượt trên vật III còn vật II không trượt trên vật III.

- Cả vật I và vật II đều trượt trên vật III.

• Xét trường hợp vật I trượt trên vật III còn vật II không trượt trên vật III, khi ấy F_{ms1} là lực ma sát trượt (bằng kmg), còn F_{ms2} là lực ma sát nghỉ (nhỏ hơn $2kmg$). Ta có

$$T - kmg = ma_{\text{I}} \quad (1)$$

$$F - T - kmg = (2m + 5m)a_{\text{II}} \quad (2)$$

Mặt khác $a_{\text{I}} = a_{\text{II}} = a_{\text{III}} = a$ (3)

Từ các phương trình (1), (2), (3), ta tìm được

$$a = \frac{F - 2kmg}{8m} \quad (4)$$

Đối với vật III ta có phương trình

$F_{ms2} - F_{ms1} = 5ma$ hay $F_{ms2} - kmg = 5ma$.

Điều kiện để vật I trượt trên vật III, còn vật II không trượt trên vật III là $a > 0$ (khi $F > 2kmg$) và $F_{ms2} < 2kmg$.

Từ (5) suy ra $a < \frac{kg}{5}$; sử dụng (4) ta tìm được $F < 3,6kmg$.

Do đó lực F cần thoả mãn $2kmg < F < 3,6kmg$.

• Trường hợp cả hệ đứng yên thì lực F cần thoả mãn điều kiện $F \le 2kmg$.

• Trường hợp cả hai vật I và II cùng trượt trên vật III thì lực F cần thỏa mãn điều kiện $F \ge 3,6kmg$.

Khi đó, gia tốc của vật I và vật II là

$$a_{\text{I}} = a_{\text{II}} = \frac{F - F_{ms1} - F_{ms2}}{3m} = \frac{F - 3kmg}{3m}.$$

Gia tốc của vật III là

$$a_{\text{III}} = \frac{F_{ms2} - F_{ms1}}{5m} = \frac{2kmg - kmg}{5m} = 0,2kg. \ \square$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: *Hà Trọng Nghĩa*, 10 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Tuyên Quang**: *Nguyễn Văn Hiếu*, 11B1, *Đào Văn Đại*, 11B1, THPT Hàm Yên; **Phú Thọ**: *Trần Hữu Mạnh*, 12A5, THPT Phù Ninh; **Vĩnh Phúc**: *Lỗ Tất Thắng*, *Nguyễn Trung Quân*, 10A3, *Văn Mạnh Tuấn*, *Nguyễn Khánh Duy*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An**: *Phan Duy Thắng*, 11A4, *Nguyễn Tuấn Vũ*, 11A7, THPT chuyên Đại học Vinh, *Phan Đình Thái*, 11G, THPT Nghĩa Đàn, *Nguyễn Hồ Như Ý*, *Trần Văn Thắng*, *Trần Khắc Thành*, A3K34, *Nguyễn Tất Nghĩa*, *Nguyễn Lê Thương*, *Nguyễn Anh Minh*, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu ; **Hà Nam**: *Đinh Hoàng Thanh*, 10A2, THPT chuyên Hà Nam; **Nam Định**: *Nguyễn Tuấn Toàn*, 12C5, THPT Hải Hậu A; **Hưng Yên**: *Dạ Lan Hương*, Hiến Nam, Email: dalanhuong915@yahoo.com; **Thanh Hoá**: *Lê Bá Sơn*, 11F, THPT Lam Sơn, *Lê Thị My*, 11A5, THPT Yên Định I; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 12A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ, *Trần Thế Minh*, 11A1, THPT Nguyễn Huệ; **Quảng Bình**: *Phan Việt Hùng*, 10A5, THPT Đào Duy Từ; **Cần Thơ**: *Phạm Ngọc Quân*, 10A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN VĂN THUẬN

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ... *(Tiếp trang 2)*

Thay $y = 1$ vào hệ (III) ta được $\begin{cases} x^2+|x|=0 \\ x^2=0. \end{cases}$

Vậy $(x ; y) = (0 ; 1)$ là nghiệm duy nhất của hệ (III).

Kết luận. Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a = 1$.❐

✪ **Bài toán 3.** *Tìm a sao cho với mọi giá trị của b hệ phương trình sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} (a-1)x^5+y^5=1 \\ 1+(a+1)bxy^4=a^2 \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

Lời giải

• *Điều kiện cần.* Giả sử hệ (IV) có nghiệm với mọi giá trị của b suy ra với $b = 0$ hệ (IV) cũng có nghiệm, tức là hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} (a-1)x^5+y^5=1 \\ a^4=1. \end{cases}$

Suy ra $a = 1$ hoặc $a = -1$.

• *Điều kiện đủ.*

a) Với $a = 1$ thì hệ (IV) có dạng $\begin{cases} y^5=1 \\ bx=0. \end{cases}$

Hệ này ít nhất có $(x; y) = (0; 1)$ là nghiệm với mọi giá trị của b. Suy ra hệ (IV) có nghiệm với mọi giá trị của b.

b) Với $a = -1$ hệ (IV) có dạng $\begin{cases} -2x^5+y^5=1 \\ 1=1. \end{cases}$

Hệ này nhận ít nhất $(x; y) = (0; 1)$ là nghiệm với mọi giá trị của b.

Kết luận. Với $a = 1$ hoặc $a = -1$ thì hệ (IV) có nghiệm với mọi giá trị của b.❐

✪ **Bài toán 4.** *Tìm m để hai phương trình sau tương đương:*

$$x^2+(m^2-5m+6)x=0 \quad (3)$$

và $x^2+2(m-3)x+m^2-7m+12=0$ (4)

Lời giải

• *Điều kiện cần.* Giả sử PT (3) và PT (4) tương đương với nhau. Vì PT (3) luôn có nghiệm $x = 0$ nên PT (4) cũng phải có nghiệm $x = 0$. Vì vậy, ta phải có $m^2-7m+12=0 \Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = 4$.

• *Điều kiện đủ.*

a) Nếu $m = 3$ thì PT (3) và (4) đều có dạng $x^2 = 0$. Suy ra với $m = 3$ thì PT (3) tương đương với PT (4).

b) Nếu $m = 4$ thì PT (3) và PT (4) đều có dạng $x^2 + 2x = 0$. Suy ra với $m = 3$ thì PT (3) tương đương với PT (4).

Kết luận. PT (3) tương đương với PT (4) khi và chỉ khi $m = 3$ hoặc $m = 4$.❐

Qua các bài toán trên chắc các bạn đã thấy được phần nào tầm quan trọng của việc áp dụng điều kiện cần và đủ để giải bài toán tìm điều kiện. Để luyện tập xin mời các bạn làm một số bài tập áp dụng sau đây.

Bài 1. Tìm a để các phương trình và hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\sqrt{x-5}+\sqrt{9-x} = a$;

b) $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)} = a$;

c) $\sqrt[3]{(2x+a)^2}+\sqrt[3]{(2x-a)^2}+\sqrt[3]{4x^2+a^2}=\sqrt[3]{a}$;

d) $\begin{cases} xy+x+y=a+2 \\ x^2y+xy^2=a+1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=a \\ x+y=3a. \end{cases}$

Bài 2. Tìm a để với mọi giá trị của b hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)+x+y=b \\ y-x=b. \end{cases}$$

Bài 3. Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$(1+m^2)x^2-2(m^2-1)x+m^2-3=0$$

và $x^2+(m-1)x+m^2-3m+1=0$.

Thư từ bạn muôn nơi

Tâm sự đầu năm

✻ "...Quả thật *Toán học & Tuổi trẻ* đã giành được tình cảm của người yêu Toán. Trên *Toán học & Tuổi trẻ* luôn có những bài viết, những chuyên mục như "Chuẩn bị thi vào Đại học", "Bạn đọc tìm tòi", "Đề ra kì này", "Câu lạc bộ"... Chúng đã giúp đỡ một cách thiết thực cho chúng em..."

NGUYỄN MẠNH TUẤN

(Thôn 5 xã Thái Yên, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

✻ "... Nhờ có báo *Toán học & Tuổi trẻ*, em đã tìm được rất nhiều bài toán hay với những lời giải sáng tạo khiến mỗi lần đọc là em cảm thấy rất thán phục. Qua báo, em cũng học được cách trình bày một bài toán sao cho logic, chặt chẽ mà ngắn gọn. Cô giáo khen em rất nhiều về sự tiến bộ đó và mỗi lần như vậy em đều nghĩ đến *Toán học & Tuổi trẻ*, thầm cảm ơn báo đã giúp cho em yêu thích và sáng tạo hơn trong việc học và giải Toán..."

TRỊNH THỊ THÙY LINH

(50Đ, Hòa Bình, Hà Trung, Thanh Hoá)

✻ "... Điều đầu tiên *Toán học & Tuổi trẻ* dạy tôi là sự khiêm tốn, sự học hỏi và vươn lên không ngừng trong học tập, nghiên cứu chứ không được tự đắc với những gì mình đang có. Từ một con người có phần kiêu căng, tự mãn, tôi đã nhận ra rằng kiến thức của mình còn nông cạn lắm, bản thân mình còn kém cỏi lắm, mình cần phải học hỏi thật nhiều nữa. *Toán học & Tuổi trẻ* đã mang đến cho tôi sự kiên trì, cẩn thận, giúp tôi phát huy óc sáng tạo, dạy tôi cách học, cách nghĩ... Đó là những điều quý giá mà trước đây tôi chưa có.

Từ khi làm quen với *Toán học & Tuổi trẻ*, tôi đã tiến bộ rất nhiều. Những phương pháp học toán, giải toán của *Toán học & Tuổi trẻ* đã mang lại cho tôi nhiều điều lí thú và bổ ích, giúp tôi có kết quả tốt hơn trong học tập, nhất là ở môn Toán..."

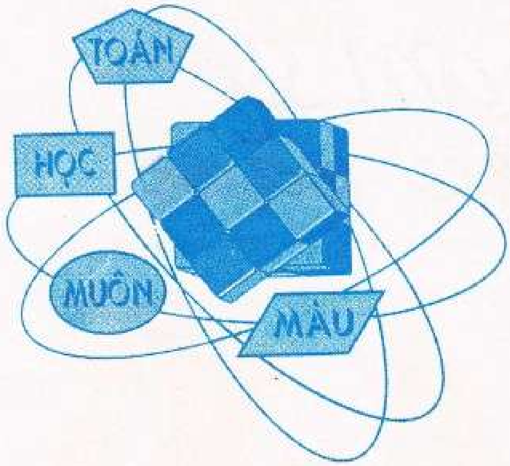
DƯƠNG VĂN AN

(11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, Bà Rịa - Vũng Tàu)

✻ "... Sau 2 năm kể từ ngày đặt báo, em cảm thấy mình như thay đổi nhiều về môn Toán. Trên báo là những kiến thức hoàn toàn mới mẻ đối với em, thực sự đó là những kiến thức quý báu và đáng trân trọng. Tạp chí đang được các bạn học sinh đón đọc rất nồng nhiệt, dường như không có sự phân biệt lứa tuổi, hoàn cảnh..."

NHỮ VĂN VỊNH

(Tân Yên, Bắc Giang)



SẮP XẾP 2007 ĐÈN BA MÀU

Để chào mừng xuân mới 2007 người ta dự định sắp xếp 2007 chiếc đèn theo một vòng tròn lớn ở một quảng trường, mỗi đèn có một trong ba màu Tím, Đỏ, Lam sao cho màu Tím là ít nhất. Hai cách sắp xếp đèn coi là như nhau nếu qua một phép quay quanh tâm vòng tròn một góc là bội nào đó của $\frac{360^\circ}{2007}$ thì cách xếp này giống hệt cách xếp kia.

Dành cho bạn đọc

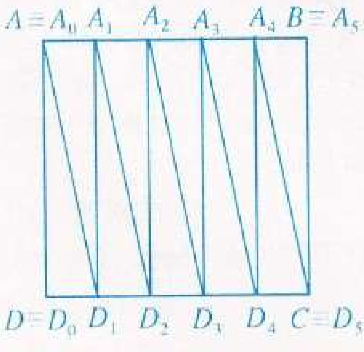
1) Có bao nhiêu cách sắp xếp đèn màu nếu có không quá ba đèn cùng màu liền nhau?

2) Có bao nhiêu cách sắp xếp đèn màu nếu có không quá bốn đèn cùng màu liền nhau?

Giải đáp bài

PHÂN CHIA HÌNH VUÔNG thành các tam giác có diện tích bằng nhau

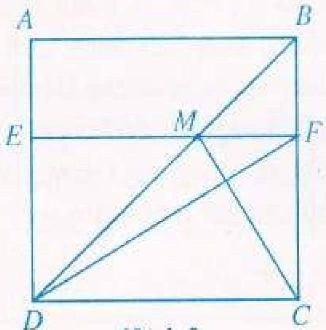
(Đề đăng trên THTT số 353 tháng 11.2006)



Hình 1

1) Chia cạnh AB và cạnh CD của hình vuông $ABCD$ thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm theo thứ tự $A_0 \equiv A$, A_1, A_2, ..., $A_n \equiv B$ và $D_0 \equiv D$, D_1, D_2, ..., $D_n \equiv C$ (hình 1 ứng với $n = 5$). Nối A_iD_i và $A_{i-1}D_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) ta được $2n$ tam giác bằng nhau.

2) Có bốn đỉnh hình vuông thuộc ba tam giác nên phải có ít nhất hai đỉnh cùng thuộc một tam giác, chẳng hạn là C, D. Giả sử tam giác cần tìm là MCD, có $\frac{ED.DC}{AD.DC} = \frac{S_{MCD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3}$, suy ra điểm M phải thuộc đoạn EF thỏa mãn $ED = \frac{2}{3}AD$ và $EF // AB$. Để phân chia đa giác $MDABC$ thành hai tam giác thì hoặc M thuộc đường chéo BD (hay AC), hoặc M trùng với F (hay E).



Hình 2

• Nếu M thuộc BD thì $S_{ADB} = \frac{S_{ABCD}}{2} > \frac{S_{ABCD}}{3}$.

• Nếu M trùng với F thì không thể kẻ BD (theo trên) nên chỉ kẻ được AF, nhưng

$$S_{ADF} = \frac{AD.EF}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2} > \frac{S_{ABCD}}{3}.$$

Vậy không thể phân chia một hình vuông thành ba tam giác có diện tích bằng nhau.

Người ta đã chứng minh rằng không thể phân chia một hình vuông thành một số lẻ các tam giác có diện tích bằng nhau.

Nhận xét. Các bạn giải bài đều có kết luận đúng nhưng phần lớn lập luận không chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải tốt:

1) *Đỗ Thị Thu Thảo*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP. **Hải Dương**.

2) *Dương Văn An*, 11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

3) *Lương Xuân Huy*, 10A1, THPT Tiên Lữ, **Hưng Yên**.

PHI PHI

HELLO... *(Tiếp trang 4)*

I-7. Let be given a real number k in the interval $(-1; 2)$ and three pairwise distinct real numbers a, b, c. Prove that

$$\left(a^2+b^2+c^2+k(ab+bc+ca)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\geq\frac{9(2-k)}{4}.$$

When does equality occur?

I-8. Does there exist a positive integer a such that in the sequence of numbers (a_n) defined by $a_n = n^3 + a^3$ for all $n = 1, 2, 3, \ldots$ every two consecutive terms are coprime integers?

I-9. Does there exist a positive integer n such that one can assign to each vertex $A_1, A_2, \ldots, A_n$ of a convex n-polygon an integer (these n integers are not necessarily distinct) so that

i) the sum of these n integers is equal to 2007, and

ii) for every $i = 1, 2, \ldots, n$, the number assigned to A_i is equal to the absolute value of the difference of the numbers assigned to A_{i+1} and A_{i+2} (with the convention $A_{n+1} \equiv A_1$ and $A_{n+2} \equiv A_2$)?

I–10. Suppose that in the coordinate plane every integral point (i. e. point with integral coordinates) was colored in one of two given colors. Prove that there exists a infinite set of integral points of the same color, forming a figure admitting a center of symmetry.

(Đề thi đăng trên các số 355, 356, 357 và đáp án đăng trên các số 357, 358, 359. Danh sách các bạn đoạt giải đăng trên số 360 (6.2007).

PROBLEMS ... *(Tiếp trang 17)*

$$a+b+c\geq\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}.$$

When does equality occur?

T8/356. The sequence of numbers (u_n); $n = 1, 2, \ldots$, is defined by : $u_0 = a$ and

$u_{n+1} = \sin^2(u_n + 11) - 2007$ for all natural number n, where a is a given real number.

Prove that:

i) The equation $\sin^2(x + 11) - x = 2007$ has a unique solution. Denote it by b.

ii) $\lim u_n = b$.

T9/356. Let ABC be a nonregular triangle. Take three points A_1, B_1, C_1 lying on the sides BC, CA, AB respectively such that $\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{AC_1}{AB}$.

Prove that if the triangles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 have equal circumradii then A_1, B_1, C_1 are the midpoints of the sides BC, CA, AB respectively.

PHƯƠNG PHÁP ... *(Tiếp trang 8)*

Để kết thúc bài viết, đề nghị các bạn hãy giải các bài tập sau đây.

Bài 1. Cho một lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và trung điểm hai cạnh bên BB', CC'. Xác định chân đường vuông góc hạ từ một trong các điểm sau đây xuống mặt phẳng (α):

1) Từ các đỉnh A', B, C' của hình lăng trụ;

2) Từ trung điểm I của BC;

3) Từ trọng tâm G của tam giác $A'B'C'$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$. Trên đường thẳng d đi qua A vuông góc với mặt phẳng hình vuông, ta lấy điểm S (khác A). Xác định chân đường vuông góc hạ từ điểm C và trung điểm của cạnh BC xuống mặt phẳng (SBD).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SC$, $SB = SD$ và đáy $ABCD$ là hình thoi.

1) Xác định chân đường vuông góc hạ từ giao điểm các đường chéo đáy xuống một mặt bên.

2) Xác định chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt bên (SBC).

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 356 (2-2007)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THO. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

Câu lạc bộ

Thơ Tết

LTS. Hoa đào dẫu chưa vào phố lúc THTT làm số 1.2007 nhưng hoa đào đã nở trên trang bìa và thơ bạn gần xa góp cho trang báo mới có nội dung náo nức xuân, đáng nét của mùa xuân đến với bạn đọc. Bây giờ là lúc chúng tôi nhận được nhiều bài thơ hơn và tờ báo cũng sẽ đến đúng lúc các bạn chào đón Tết. Nào mời các bạn đọc thơ chào xuân Đinh Hợi về.

Xuân

Nghiêng nghiêng cửa sổ nhánh đào
Giật mình gác bút người vào vườn thơ.
Người làm toán giải bài mơ
Mới xuân buổi trước bây giờ đã xuân
Dặm đời mỏi bước qua dần
Tết Đinh Hợi đến, mấy lần xuân qua?
Nghiêng nghiêng cửa sổ nhánh đào
Đào thơm mỏi bút... người vào vườn thơ...

TRẦN VĂN HẠNH
(Đội 9, Nghĩa An, Ninh Giang, Hải Dương)

Cảm tác

Khi cùng mua tờ Toán tuổi trẻ
Bưu điện còn mỗi một tờ, chúng tôi cùng đến trễ
Tôi đùa em
hay mình giữ làm "của chung" em nhé!
Trong giấc mơ của tôi
Mái tóc em bay bay
"Chẳng kém những đường parabol huyền diệu"
Tôi tìm em một chiều
Mượn báo...
Rời giảng đường dấu yêu, ngày tháng cứ trôi
Tôi, em về cùng chung trường dạy học
Truyền tình yêu toán cho những em thơ
Bính Tuất qua
Yêu nhau từ nhịp cầu yêu toán học
Đinh Hợi lại về
Toán học tuổi trẻ mình nhịp nối của tình yêu.

NGUYỄN TẤN HƯNG
GV THPT Ba Gia, Sơn Tịnh, Quảng Ngãi

Mùa Xuân với người làm toán

Người làm toán miệt mài trên trang sách
Thả tâm hồn vào đường thẳng, đường cong
Những con số im lìm biết nói
Thật diệu kì con số hóa thi nhân
Người làm toán cặm cụi quanh năm
Cộng số, vẽ hình, tìm phán đoán
Nét suy tư hằn sâu trên trán
Đến chân lí cuộc đời từ... con số vô tri

Năm tháng qua - Tuổi trẻ qua đi
Còn lại những bài toán trọc trằn thao thức
Trăn trở lo toán như số phận
Tô đẹp thêm cuộc sống con người

Mùa xuân đến với người làm toán
Có sắc thắm hoa đào trước gió mùa xuân
Có thịt mỡ dưa hành bên bánh chưng xanh
Có tiếng chim và trời xôn xao nắng

Mùa xuân đến với người làm toán
Có cả đất trời, nhạc họa, thi ca
Đất nước mình đang đổi thịt thay da
Toán học góp sức cùng vận hội...

HOÀNG MINH ĐỨC
(Tổ toán trường THCS Quảng Minh, Quảng Trạch, Quảng Bình)

Xuân này Câu lạc bộ lì xì cho các bạn thơ:

Nguyễn Thanh Hằng, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Vĩnh Phúc**; *Đinh Tuấn Anh*, số 73 phố Muối, phường Tam Thanh, **Lạng Sơn**; *Hoàng Minh Đức*, GV trường THCS Quảng Minh, Quảng Trạch, **Quảng Bình**; *Trần Viết Minh*, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**; *Trần Văn Hạnh*, đội 9, Nghĩa An, Ninh Giang, **Hải Dương**; *Phạm Văn Tuân*, K46A Toán, ĐH Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Tấn Hưng*, GV THPT Ba Gia, Sơn Tịnh, **Quảng Ngãi**; *Trần Thị Hạnh*, 7A1, THCS Tế Tiêu, huyện Mỹ Đức, **Hà Tây**; *Phạm Thịnh*, xí nghiệp sửa chữa các công trình dầu khí Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

Thơ xuân gửi toán

Ngóng báo xuân về đến thật mau
Một ngày trông đợi cũng là lâu
Đã là tri kỉ trong ngày trước
Lại bạn đồng hành đến mai sau
Trải mấy chục niên càng thắm sắc
Qua trăm ngàn số vẫn tươi màu
Nôm na khai bút đôi dòng chữ
Mong báo xuân về đọc cùng nhau

ĐINH TUẤN ANH
(Số 73 phố Muối, phường Tam Thanh, Lạng Sơn)

Toán học tuổi trẻ

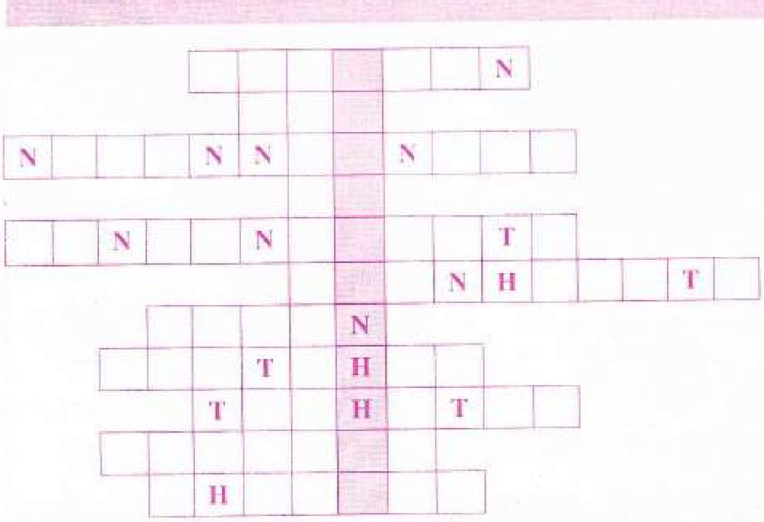
Mỗi tháng một số,
Tô điểm cho đời,
Tri thức loài người,
Vô cùng vô tận.
Say mê cần mẫn,
Sẽ được đáp đền.
Kiến thức làm nên,
Hành trang cuộc sống.

Xin chúc năm mới,
Thêm một tuổi đời.
Toán học rạng ngời,
Thêm nhiều thành tựu.
Thêm trang, thêm số,
Thêm giải, thêm đề.
Bạn trẻ say mê,
Sống cùng toán học.

PHẠM VĂN TUÂN
(K46A Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)

Ô chữ: Mùa Xuân hội nhập

Số THTT này đến tay bạn đúng lúc Tết đến, Xuân về. Bạn đang ngắm hoa đào, hoa mai hay đang thưởng thức bánh chưng, bánh tét? Bạn hãy cùng bạn mình hay cùng anh cùng chị mình để giải Ô chữ này với các gợi ý sau nhé:



Dòng 1: Bắt đầu mùa xuân
Dòng 2: Các nước ở hai châu này tham gia ASEM.
Dòng 3: Nhiệm vụ của ngành Giáo dục là đào tạo...
Dòng 4: Tổ chức lớn nhất của thế giới.
Dòng 5: Kinh tế nước ta hi vọng đón nhận...
Dòng 6: Sự kiện nổi bật cuối năm 2006 của nước ta
Dòng 7: Hiệp hội các quốc gia Đông Nam Á.
Dòng 8: Lĩnh vực là thế mạnh của nước ta hiện nay.
Dòng 9: Tương lai đất nước phụ thuộc nhiều vào họ.
Dòng 10: Sau năm Bính Tuất.
Dòng 11: Cuộc thi đặc biệt đang diễn ra.

Cột dọc tô màu sẽ có nội dung là gì nhỉ?

QUÀ TẶNG DÀNH CHO CÁC BẠN GIẢI ĐÚNG VÀ SỚM THEO DẤU BƯU ĐIỆN

VŨ ĐÔ QUAN

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT58M7
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2007
Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng