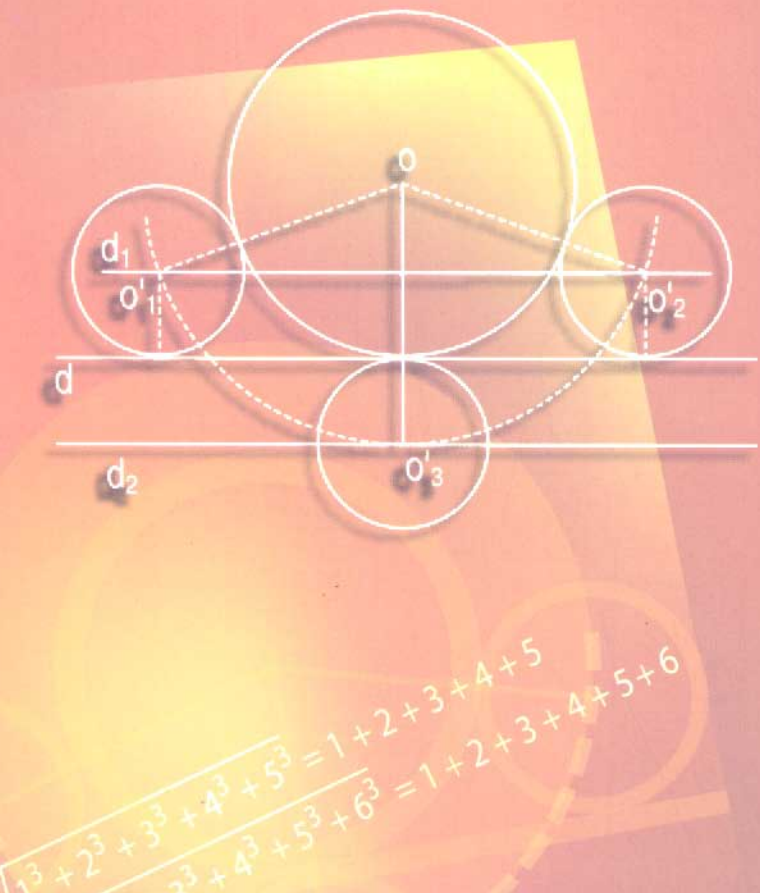
TÔN THÂN (Chủ biên) - VŨ HỮU BÌNH
TRẦN PHƯƠNG DUNG - LÊ VĂN HỒNG - NGUYỄN HỮU THẢO

BÀI TẬP TOÁN 9

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TÔN THÂN (Chủ biên)
VŨ HỮU BÌNH - TRẦN PHƯƠNG DUNG - LÊ VĂN HỒNG - NGUYỄN HỮU THẢO

Bài tập TOÁN 9

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ sáu)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01–2011/CXB/776–1235/GD

Mã số : 2B903T1

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm qua, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 do chính các tác giả sách giáo khoa Toán THCS biên soạn đã được sử dụng kèm theo sách giáo khoa và đã mang lại những hiệu quả thiết thực. Bộ sách đã là một tài liệu bổ ích giúp các thầy, cô giáo có thêm tư liệu trong việc soạn giảng, giúp các em học sinh tự học, tự rèn luyện kĩ năng, qua đó củng cố được kiến thức cơ bản, hình thành phương pháp giải toán, tăng thêm khả năng vận dụng kiến thức và góp phần rèn luyện tư duy toán học.

Để đáp ứng tốt hơn nhu cầu ngày càng cao của các thầy, cô giáo và các em học sinh, chúng tôi tiến hành chỉnh lí và bổ sung bộ sách bài tập hiện có theo hướng tạo nhiều cơ hội hơn nữa để các em học sinh được củng cố kiến thức toán học cơ bản, được rèn luyện kĩ năng theo ***Chuẩn kiến thức, kĩ năng*** trong ***Chương trình Giáo dục phổ thông*** được Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 5 tháng 5 năm 2006. Nói chung, ở mỗi "xoắn" (§), cuối mỗi chương sẽ có thêm phần ***Bài tập bổ sung***. Trong phần này, có thể có các *câu hỏi trắc nghiệm khách quan* để các em học sinh tự kiểm tra, đánh giá mức độ nắm vững kiến thức của mình. Một số dạng bài tập chưa có trong sách giáo khoa cũng được bổ sung nhằm làm phong phú thêm các thể loại bài tập, giúp các em học sinh tập dượt vận dụng kiến thức trong nhiều tình huống khác nhau. Bộ sách cũng được bổ sung một số bài tập dành cho các em học sinh khá, giỏi. Những bài tập này được đánh dấu "*". Bên cạnh đó, các tác giả cũng chú ý chỉnh sửa cách diễn đạt ở một số chỗ cho thích hợp và dễ hiểu hơn.

Chúng tôi hi vọng rằng với việc chỉnh lí và bổ sung như trên, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 sẽ góp phần tích cực hơn nữa trong việc nâng cao chất lượng dạy và học môn Toán ở các trường THCS trong cả nước, đáp ứng tốt hơn nữa nhu cầu đa dạng của các đối tượng học sinh khác nhau.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng song bộ sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy, cô giáo và bạn đọc gần xa để trong các lần tái bản sau bộ sách được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, tháng 10 năm 2009

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I

CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

A. ĐỀ BÀI

§1. Căn bậc hai

1. Tính căn bậc hai số học của

a) 0,01 ; b) 0,04 ; c) 0,49 ; d) 0,64 ;

e) 0,25 ; f) 0,81 ; g) 0,09 ; h) 0,16.

2. Dùng máy tính bỏ túi (máy tính CASIO *fx-220*, CASIO *fx-500A*, SHARP *EL–500M*,...) tìm x thoả mãn đẳng thức (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

a) $x^2 = 5$; b) $x^2 = 6$;

c) $x^2 = 2,5$; d) $x^2 = \sqrt{5}$.

3. Số nào có căn bậc hai là

a) $\sqrt{5}$; b) 1,5 ;

c) – 0,1 ; d) $-\sqrt{9}$?

4. Tìm x không âm, biết :

a) $\sqrt{x} = 3$; b) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$;

c) $\sqrt{x} = 0$; d) $\sqrt{x} = -2$.

5. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

a) 2 và $\sqrt{2}+1$; b) 1 và $\sqrt{3}-1$;

c) $2\sqrt{31}$ và 10 ; d) $-3\sqrt{11}$ và -12.

6. Tìm những khẳng định đúng trong các khẳng định sau

a) Căn bậc hai của 0,36 là 0,6 ;

b) Căn bậc hai của 0,36 là 0,06 ;

c) $\sqrt{0,36}=0,6$;

d) Căn bậc hai của 0,36 là 0,6 và – 0,6 ;

e) $\sqrt{0,36}=\pm 0,6$.

7. Trong các số $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{5^2}$; $-\sqrt{5^2}$; $-\sqrt{(-5)^2}$, số nào là căn bậc hai số học của 25 ?

8. Chứng minh :

$$\sqrt{1^3+2^3}=1+2;$$

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3}=1+2+3;$$

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3}=1+2+3+4.$$

Viết tiếp một số đẳng thức tương tự.

9. Cho hai số a, b không âm. Chứng minh :

a) Nếu $a<b$ thì $\sqrt{a}<\sqrt{b}$;

b) Nếu $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ thì $a<b$.

(Bài tập này chứng minh định lí ở §1, chương I, phần Đại số, sách giáo khoa Toán 9 tập một).

10. Cho số m dương. Chứng minh :

a) Nếu $m>1$ thì $\sqrt{m}>1$;

b) Nếu $m<1$ thì $\sqrt{m}<1$.

11. Cho số m dương. Chứng minh :

a) Nếu $m>1$ thì $m>\sqrt{m}$;

b) Nếu $m<1$ thì $m<\sqrt{m}$.

Bài tập bổ sung

1.1. Giá trị của $\sqrt{0,16}$ là

(A) 0,04 ; (B) 0,4 ;

(C) 0,04 và −0,04 ; (D) 0,4 và −0,4.

Hãy chọn đáp án đúng.

§2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

12. Tìm x để căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{-2x+3}$; b) $\sqrt{\dfrac{2}{x^2}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{4}{x+3}}$; d) $\sqrt{\dfrac{-5}{x^2+6}}$.

13. Rút gọn rồi tính

a) $5\sqrt{(-2)^4}$; b) $-4\sqrt{(-3)^6}$;

c) $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$; d) $2\sqrt{(-5)^6}+3\sqrt{(-2)^8}$.

14. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{(4+\sqrt{2})^2}$; b) $\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$;

c) $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}$; d) $2\sqrt{3}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$.

15. Chứng minh

a) $9+4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^2$; b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}=-2$;

c) $(4-\sqrt{7})^2=23-8\sqrt{7}$; d) $\sqrt{23+8\sqrt{7}}-\sqrt{7}=4$.

16*. Biểu thức sau đây xác định với giá trị nào của x ?

a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$; b) $\sqrt{x^2-4}$;

c) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$; d) $\sqrt{\dfrac{2+x}{5-x}}$.

17*. Tìm x, biết

a) $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$; b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$;

c) $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5$; d) $\sqrt{x^4} = 7$.

18. Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 - 7$; b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$; c) $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13$.

19. Rút gọn các phân thức

a) $\dfrac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$ (với $x \neq -\sqrt{5}$) ;

b) $\dfrac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2 - 2}$ (với $x \neq \pm\sqrt{2}$).

20. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

a) $6 + 2\sqrt{2}$ và 9 ; b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và 3 ;

c) $9 + 4\sqrt{5}$ và 16 ; d) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ và 2.

21. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; b) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$;

c) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x < 0$; d) $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2}$ với $x > 4$.

22. Với n là số tự nhiên, chứng minh đẳng thức

$$\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2.$$

Viết đẳng thức trên khi n là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Bài tập bổ sung

2.1. Đẳng thức nào đúng nếu x là số âm

(A) $\sqrt{9x^2} = 9x$; (B) $\sqrt{9x^2} = 3x$;

(C) $\sqrt{9x^2} = -9x$; (D) $\sqrt{9x^2} = -3x$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

23. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính

a) $\sqrt{10}.\sqrt{40}$; b) $\sqrt{5}.\sqrt{45}$;

c) $\sqrt{52}.\sqrt{13}$; d) $\sqrt{2}.\sqrt{162}$.

24. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính

a) $\sqrt{45.80}$; b) $\sqrt{75.48}$;

c) $\sqrt{90.6,4}$; d) $\sqrt{2,5.14,4}$.

25. Rút gọn rồi tính

a) $\sqrt{6,8^2-3,2^2}$; b) $\sqrt{21,8^2-18,2^2}$;

c) $\sqrt{117,5^2-26,5^2-1440}$; d) $\sqrt{146,5^2-109,5^2+27.256}$.

26. Chứng minh

a) $\sqrt{9-\sqrt{17}}.\sqrt{9+\sqrt{17}}=8$;

b) $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)+(1+2\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}=9$.

27. Rút gọn

a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

28. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{3}+2$ và $\sqrt{2}+\sqrt{6}$;

c) 16 và $\sqrt{15}.\sqrt{17}$; d) 8 và $\sqrt{15}+\sqrt{17}$.

29. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

$$\sqrt{2003}+\sqrt{2005} \text{ và } 2\sqrt{2004}.$$

30*. Cho các biểu thức

$$A=\sqrt{x+2}.\sqrt{x-3} \text{ và } B=\sqrt{(x+2)(x-3)}.$$

a) Tìm x để A có nghĩa. Tìm x để B có nghĩa.

b) Với giá trị nào của x thì A = B ?

31. Biểu diễn $\sqrt{ab}$ ở dạng tích các căn bậc hai với a < 0 và b < 0.

Áp dụng tính $\sqrt{(-25).(-64)}$.

32. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{4(a-3)^2}$ với $a \ge 3$;

b) $\sqrt{9(b-2)^2}$ với $b < 2$;

c) $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ với $a > 0$;

d) $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ với $b < 0$.

33*. Tìm điều kiện của x để các biểu thức sau có nghĩa và biến đổi chúng về dạng tích

a) $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x-2}$;

b) $3\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}$.

34. Tìm x, biết

a) $\sqrt{x-5}=3$;

b) $\sqrt{x-10}=-2$;

c) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{5}$;

d) $\sqrt{4-5x}=12$.

35. Với n là số tự nhiên, chứng minh

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=\sqrt{(2n+1)^2}-\sqrt{(2n+1)^2-1}.$$

Viết đẳng thức trên khi n bằng 1, 2, 3, 4.

Bài tập bổ sung

3.1. Giá trị của $\sqrt{1{,}6}.\sqrt{2{,}5}$ bằng

(A) 0,20 ;

(B) 2,0 ;

(C) 20,0 ;

(D) 0,02.

Hãy chọn đáp án đúng.

§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

36. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính

a) $\sqrt{\dfrac{9}{169}}$;

b) $\sqrt{\dfrac{25}{144}}$;

c) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$;

d) $\sqrt{2\dfrac{7}{81}}$.

37. Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính

a) $\dfrac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$; b) $\dfrac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}$; d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$.

38*. Cho các biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{2x+3}{x-3}} \text{ và } B = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-3}}.$$

a) Tìm x để A có nghĩa. Tìm x để B có nghĩa.

b) Với giá trị nào của x thì A = B ?

39. Biểu diễn $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ với $a < 0$ và $b < 0$ ở dạng thương của hai căn thức.

Áp dụng tính $\sqrt{\dfrac{-49}{-81}}$.

40. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$ $(y > 0)$;

b) $\dfrac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$ $(x > 0)$;

c) $\dfrac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$ $(m > 0$ và $n > 0)$;

d) $\dfrac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^6}}$ $(a < 0$ và $b \neq 0)$.

41. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$ $(x \geq 0)$;

b) $\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\dfrac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$ $(x \neq 1, y \neq 1$ và $y \geq 0)$.

42. Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho của x rồi tính giá trị của nó :

a) $\sqrt{\dfrac{(x-2)^4}{(3-x)^2}}+\dfrac{x^2-1}{x-3}$ $(x < 3)$; tại $x = 0,5$;

b) $4x-\sqrt{8}+\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$ $(x > -2)$; tại $x = -\sqrt{2}$.

43*. Tìm x thoả mãn điều kiện

a) $\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-1}} = 2$; b) $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$;

c) $\sqrt{\dfrac{4x+3}{x+1}} = 3$; d) $\dfrac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$.

44. Cho hai số a, b không âm. Chứng minh

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ *(Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm).*

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

45. Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, chứng minh

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}.$$

46. Với a dương, chứng minh

$$a+\frac{1}{a} \geq 2.$$

Bài tập bổ sung

4.1. Giá trị của $\sqrt{\dfrac{49}{0,09}}$ bằng

(A) $\dfrac{7}{3}$; (B) $\dfrac{70}{3}$; (C) $\dfrac{7}{30}$; (D) $\dfrac{700}{3}$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§5. Bảng căn bậc hai

47. Dùng bảng căn bậc hai tìm x, biết

a) $x^2 = 15$; b) $x^2 = 22{,}8$;

c) $x^2 = 351$; d) $x^2 = 0{,}46$.

48. Dùng bảng bình phương tìm x, biết

a) $\sqrt{x} = 1{,}5$; b) $\sqrt{x} = 2{,}15$;

c) $\sqrt{x} = 0{,}52$; d) $\sqrt{x} = 0{,}038$.

49. Kiểm tra kết quả bài 47 và 48 bằng máy tính bỏ túi.

50. Thử lại kết quả bài 47 bằng bảng bình phương.

51. Thử lại kết quả bài 48 bằng bảng căn bậc hai.

52. Điền vào các chỗ trống (...) trong phép chứng minh sau :

Số $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Thật vậy, giả sử $\sqrt{2}$ không phải là số vô tỉ thì phải tồn tại các số nguyên m và n sao cho $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, trong đó n > 0 còn hai số m và n không có ước số chung nào khác 1 hay −1 (hai số m và n nguyên tố cùng nhau).

Khi đó, ta có... hay $2n^2 = m^2$. (1)

Kết quả (1) chứng tỏ số nguyên m là số chẵn, nghĩa là m = 2p với p là số nguyên.

Thay m = 2p vào (1) ta được..., suy ra $n^2 = 2p^2$. (2)

Kết quả (2) chứng tỏ n phải là số chẵn.

Hai số m và n đều là số chẵn, mâu thuẫn với...

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

53. Chứng minh :

a) Số $\sqrt{3}$ là số vô tỉ ;

b) Các số $5\sqrt{2}$; $3+\sqrt{2}$ đều là số vô tỉ.

54. Tìm tập hợp các số x thoả mãn bất đẳng thức

$$\sqrt{x} > 2$$

và biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

55. Tìm tập hợp các số x thoả mãn bất đẳng thức

$$\sqrt{x} < 3$$

và biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

Bài tập bổ sung

5.1. Tra bảng căn bậc hai, tìm $\sqrt{35,92}$ được $\sqrt{35,92} \approx 5,993$. Vậy suy ra $\sqrt{0,3592}$ có giá trị gần đúng là :

(A) 0,5993 ; (B) 5,993 ; (C) 59,93 ; (D) 599,3.

Hãy chọn đáp án đúng.

§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

56. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{7x^2}$ với $x > 0$; b) $\sqrt{8y^2}$ với $y < 0$;

c) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$; d) $\sqrt{48y^4}$.

57. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 0$; b) $x\sqrt{13}$ với $x < 0$;

c) $x\sqrt{\dfrac{11}{x}}$ với $x > 0$; d) $x\sqrt{\dfrac{-29}{x}}$ với $x < 0$.

58. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$; b) $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0,5\sqrt{8}$;

c) $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a}$ với $a \geq 0$;

d) $\sqrt{16b} + 2\sqrt{40b} - 3\sqrt{90b}$ với $b \geq 0$.

59. Rút gọn các biểu thức

a) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60}$; b) $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{250}$;

c) $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$; d) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$.

60. Rút gọn các biểu thức

a) $2\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{\sqrt{75}}-3\sqrt{5\sqrt{48}}$; b) $2\sqrt{8\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-3\sqrt{20\sqrt{3}}$.

61. Khai triển và rút gọn các biểu thức (với x và y không âm)

a) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)$; b) $(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)$;

c) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y+\sqrt{xy})$; d) $(x+\sqrt{y})(x^2+y-x\sqrt{y})$.

62. Khai triển và rút gọn các biểu thức (với x, y không âm)

a) $(4\sqrt{x}-\sqrt{2x})(\sqrt{x}-\sqrt{2x})$; b) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})$.

63. Chứng minh

a) $\dfrac{(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}=x-y$ với $x>0$ và $y>0$;

b) $\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}=x+\sqrt{x}+1$ với $x\geq 0$ và $x\neq 1$.

64. a) Chứng minh

$$x+2\sqrt{2x-4}=(\sqrt{2}+\sqrt{x-2})^2 \text{ với } x\geq 2 \text{ ;}$$

b) Rút gọn biểu thức

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} \text{ với } x\geq 2.$$

65. Tìm x, biết

a) $\sqrt{25x}=35$; b) $\sqrt{4x}\leq 162$;

c) $3\sqrt{x}=\sqrt{12}$; d) $2\sqrt{x}\geq\sqrt{10}$.

66*. Tìm x, biết

a) $\sqrt{x^2-9}-3\sqrt{x-3}=0$; b) $\sqrt{x^2-4}-2\sqrt{x+2}=0$.

67*. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, chứng minh :

a) Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất ;

b) Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi bé nhất.

Bài tập bổ sung

6.1. Rút gọn biểu thức $3\sqrt{x^2y} + x\sqrt{y}$ với $x < 0$, $y \geq 0$ ta được

(A) $4x\sqrt{y}$; (B) $-4x\sqrt{y}$; (C) $-2x\sqrt{y}$; (D) $4\sqrt{x^2y}$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§7. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai (tiếp theo)

68. Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn và rút gọn (nếu được)

a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; b) $\sqrt{\dfrac{x^2}{5}}$ với $x \geq 0$;

c) $\sqrt{\dfrac{3}{x}}$ với $x > 0$; d) $\sqrt{x^2 - \dfrac{x^2}{7}}$ với $x < 0$.

69. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn (nếu được)

a) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{26}{5-2\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; d) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$.

70. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$; b) $\dfrac{5}{12(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})} - \dfrac{5}{12(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}$;

c) $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \dfrac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$; d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.

71. Chứng minh đẳng thức

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \text{ với n là số tự nhiên.}$$

72. Xác định giá trị biểu thức sau theo cách thích hợp

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}.$$

73. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

$$\sqrt{2005}-\sqrt{2004} \text{ với } \sqrt{2004}-\sqrt{2003}.$$

74. Rút gọn

$$\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{9}}.$$

75. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x \neq y$;

b) $\dfrac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}$ với $x \geq 0$.

76. Trục căn thức ở mẫu

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$.

77. Tìm x, biết

a) $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{10+\sqrt{3}x}=2+\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{3x-2}=2-\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{x+1}=\sqrt{5}-3$.

78. Tìm tập hợp các giá trị x thoả mãn điều kiện sau và biểu diễn tập hợp đó trên trục số

a) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3}$;

b) $\sqrt{3-2x} \leq \sqrt{5}$.

79. Cho các số x và y có dạng

$$x = a_1\sqrt{2}+b_1 \text{ và } y = a_2\sqrt{2}+b_2,$$

trong đó a_1, a_2, b_1, b_2 là các số hữu tỉ. Chứng minh

a) x + y và x.y cũng có dạng $a\sqrt{2}+b$ với a và b là số hữu tỉ ;

b) $\dfrac{x}{y}$ với $y \neq 0$ cũng có dạng $a\sqrt{2}+b$ với a và b là số hữu tỉ.

Bài tập bổ sung

7.1. Với x < 0 ; y < 0, biểu thức $x\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}$ được biến đổi thành

(A) $\dfrac{x}{y^2}\sqrt{xy}$; (B) $\dfrac{x}{y}\sqrt{xy}$; (C) $-\dfrac{x}{y^2}\sqrt{xy}$; (D) $-\dfrac{x}{y}\sqrt{xy}$.

Hãy chọn đáp án đúng.

7.2. Giá trị của $\dfrac{6}{\sqrt{7}-1}$ bằng

(A) $\sqrt{7}-1$; (B) $1-\sqrt{7}$; (C) $-\sqrt{7}-1$; (D) $\sqrt{7}+1$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

80. Rút gọn các biểu thức

a) $(2-\sqrt{2})(-5\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-5)^2$;

b) $2\sqrt{3a}-\sqrt{75a}+a\sqrt{\dfrac{13,5}{2a}}-\dfrac{2}{5}\sqrt{300a^3}$ với a > 0.

81. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ với $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $a \neq b$;

b) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}$ với $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $a \neq b$.

82. a) Chứng minh

$$x^2+x\sqrt{3}+1=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$x^2 + x\sqrt{3} + 1.$$

Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu ?

83. Chứng tỏ giá trị các biểu thức sau là số hữu tỉ

a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-5} - \dfrac{2}{\sqrt{7}+5}$; b) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

84. Tìm x, biết

a) $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \dfrac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6$;

b) $\sqrt{25x-25} - \dfrac{15}{2}\sqrt{\dfrac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$.

85. Cho biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}.$$

a) Rút gọn P nếu $x \geq 0$; $x \neq 4$;

b) Tìm x để P = 2.

86. Cho biểu thức

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right).$$

a) Rút gọn Q với $a > 0$, $a \neq 4$ và $a \neq 1$.

b) Tìm giá trị của a để Q dương.

87. Với ba số a, b, c không âm, chứng minh bất đẳng thức

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} .$$

Hãy mở rộng kết quả cho trường hợp bốn số, năm số không âm.

Bài tập bổ sung

8.1. Bất phương trình

$$\sqrt{32}x - (\sqrt{8} + \sqrt{2})x > \sqrt{2}$$

tương đương với bất phương trình

(A) $\sqrt{20}x > \sqrt{2}$; (B) $2\sqrt{5}x > \sqrt{2}$;

(C) $15\sqrt{2}x > \sqrt{2}$; (D) $\sqrt{2}x > \sqrt{2}$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§9. Căn bậc ba

88. Tính (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

$$\sqrt[3]{-343}\ ;\ \sqrt[3]{0{,}027}\ ;\ \sqrt[3]{1{,}331}\ ;\ \sqrt[3]{-0{,}512}\,.$$

89. Tìm x, biết

a) $\sqrt[3]{x} = -1{,}5$; b) $\sqrt[3]{x-5} = 0{,}9$.

90. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}} = \dfrac{1}{b}\sqrt[3]{ab}$ $(b \neq 0)$.

91. Tìm giá trị gần đúng của căn bậc ba mỗi số sau bằng bảng lập phương và kiểm tra bằng máy tính bỏ túi (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

a) 12 ; b) 25,3 ;

c) −37,91 ; d) −0,08.

92. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

a) $2\sqrt[3]{3}$ và $\sqrt[3]{23}$; b) 33 và $3\sqrt[3]{1333}$.

93. Tìm tập hợp các giá trị x thoả mãn điều kiện sau và biểu diễn tập hợp đó trên trục số

a) $\sqrt[3]{x} \geq 2$; b) $\sqrt[3]{x} \leq -1{,}5$.

94. Chứng minh

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right].$$

Từ đó, chứng tỏ :

a) Với ba số x, y, z không âm thì

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz\ ;$$

b) Với ba số a, b, c không âm thì

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ *(Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm).*

Dấu đẳng thức xảy ra khi ba số a, b, c bằng nhau.

95*. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm, chứng minh

a) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng tổng ba kích thước thì hình lập phương có thể tích lớn nhất ;

b) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng thể tích thì hình lập phương có tổng ba kích thước bé nhất.

Ôn tập chương I

96. Nếu x thoả mãn điều kiện

$$\sqrt{3+\sqrt{x}} = 3$$

thì x nhận giá trị là

(A) 0 ; (B) 6 ; (C) 9 ; (D) 36.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

97. Biểu thức

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$$

có giá trị là

(A) 3 ; (B) 6 ; (C) $\sqrt{5}$; (D) $-\sqrt{5}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

98. Chứng minh các đẳng thức

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$;

b) $\sqrt{\dfrac{4}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\dfrac{4}{(2+\sqrt{5})^2}}=8$.

99. Cho $A=\dfrac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{4x-2}$.

Chứng minh $|A| = 0,5$ với $x \neq 0,5$.

100. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}$;

c) $(15\sqrt{200}-3\sqrt{450}+2\sqrt{50}):\sqrt{10}$.

101. a) Chứng minh

$$x-4\sqrt{x-4}=(\sqrt{x-4}-2)^2\ ;$$

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức

$$A=\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}.$$

102. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau :

$$A=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\ ; \qquad B=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}.$$

a) Chứng minh rằng $A \geq 1$ và $B \geq \sqrt{5}$;

b) Tìm x, biết

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1\ ; \qquad \sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=2.$$

103. Chứng minh

$$x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \text{ với } x>0.$$

Từ đó, cho biết biểu thức $\dfrac{1}{x-\sqrt{x}+1}$ có giá trị lớn nhất là bao nhiêu ?

Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu ?

104. Tìm số x nguyên để biểu thức $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên.

105. Chứng minh các đẳng thức (với a, b không âm và a ≠ b)

a) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\dfrac{2b}{b-a}=\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

b) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=1$.

106. Cho biểu thức

$$A=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}.$$

a) Tìm điều kiện để A có nghĩa.

b) Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị của A không phụ thuộc vào a.

107. Cho biểu thức

$$B=\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\qquad \text{với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

a) Rút gọn B ;

b) Tìm x để B = 3.

108. Cho biểu thức

$$C=\left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}+\frac{x+9}{9-x}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\qquad \text{với } x>0 \text{ và } x \neq 9.$$

a) Rút gọn C ;

b) Tìm x sao cho $C < -1$.

Bài tập bổ sung

I.1. Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy so sánh $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ với $\sqrt{5}+1$.

B. LỜI GIẢI – CHỈ DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Căn bậc hai

1. a) 0,1 ; b) 0,2 ; c) 0,7 ; d) 0,8 ;
e) 0,5 ; f) 0,9 ; g) 0,3 ; h) 0,4.

2. a) $x_1 = \sqrt{5}$ và $x_2 = -\sqrt{5}$.

Ta có : $x_1 \approx 2,236$ và $x_2 \approx -2,236$;

Câu b) và c) tương tự ;

d) $x_1 = \sqrt{\sqrt{5}}$ và $x_2 = -\sqrt{\sqrt{5}}$.

Ta có : $x_1 \approx 1,495$ và $x_2 \approx -1,495$.

3. a) 5 ; b) 2,25 ; c) 0,01 ; d) 9.

4. a) *Giải* : $x = 3^2$, vậy $x = 9$;

b) *Đáp số* : $x = 5$;

c) *Đáp số* : $x = 0$;

d) *Giải* : Căn bậc hai số học thì không âm nên không tồn tại x thoả mãn $\sqrt{x} = -2$.

5. a) *Giải* : Ta có $1 < 2$ nên $1 < \sqrt{2}$. Từ đó

$$1 + 1 < 1 + \sqrt{2}$$

hay

$$2 < 1 + \sqrt{2}.$$

b) *Hướng dẫn* : Chứng tỏ $2 > \sqrt{3}$, từ đó suy ra

$$1 > \sqrt{3} - 1.$$

c) *Đáp số* : $2\sqrt{31} > 10$.

d) *Giải* : Vì $11 < 16$ nên $\sqrt{11} < \sqrt{16}$, tức là $\sqrt{11} < 4$.

Nhân hai vế của bất đẳng thức $\sqrt{11} < 4$ với -3, ta được $-3\sqrt{11} > -12$.

6. Câu c) và d) đúng.

7. $\sqrt{(-5)^2}$ và $\sqrt{5^2}$.

8. Kiểm tra để thấy mỗi đẳng thức đều có vế trái bằng vế phải. Chẳng hạn, với đẳng thức thứ ba, ta có

Vế trái : $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} = \sqrt{1+8+27+64} = \sqrt{100} = 10.$

Vế phải : $1 + 2 + 3 + 4 = 10.$

Vậy đẳng thức xảy ra.

Ta có thể viết tiếp hai đẳng thức tương tự như :

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3} = 1+2+3+4+5\ ;$$

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3} = 1+2+3+4+5+6.$$

9. a) *Giải :* Do a, b không âm và a < b nên b > 0, suy ra

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} > 0. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có

$$a-b = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}). \qquad (2)$$

Vì a < b nên a – b < 0, từ (2) suy ra

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) < 0. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3), ta có :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} < 0 \text{ hay } \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

b) *Hướng dẫn :* Chứng minh tương tự câu a) hoặc dùng phương pháp phản chứng.

10. a) Chú ý $\sqrt{1} = 1$, từ đó vận dụng kết quả câu a) bài 9 khi thay a bởi 1 và thay b bởi m ta có kết quả.

b) Tương tự câu a) nhưng thay a = m, b = 1.

11. a) Theo bài 10, câu a) ta có $\sqrt{m} > 1$.

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đó với số dương $\sqrt{m}$ (m dương nên $\sqrt{m}$ xác định và dương), ta được $m > \sqrt{m}$;

b) Tương tự câu a).

Bài tập bổ sung

1.1. Chọn (B).

§2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

12. a) $\sqrt{-2x+3}$ có nghĩa khi và chỉ khi

$$-2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 1,5.$$

b) $\sqrt{\dfrac{2}{x^2}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\dfrac{2}{x^2} \geq 0$.

Do $x^2 \geq 0$, nên $\dfrac{2}{x^2} \geq 0$ khi và chỉ khi $x \neq 0$ (để cho $\dfrac{2}{x^2}$ có nghĩa).

c) $\sqrt{\dfrac{4}{x+3}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\dfrac{4}{x+3} \geq 0$.

Do $4 > 0$ nên $\dfrac{4}{x+3} \geq 0$ khi và chỉ khi $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

d) $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + 6 > 0$. Suy ra $\dfrac{-5}{x^2+6} < 0$ với mọi x.

Vậy không tồn tại x để $\sqrt{\dfrac{-5}{x^2+6}}$ có nghĩa.

13. a) 20 ; b) −108 ; c) 25 ; d) 298.

14. a) $4+\sqrt{2}$; b) $3-\sqrt{3}$; c) $\sqrt{17}-4$; d) $\sqrt{3}+2$.

15. a) Biến đổi vế phải

$$(\sqrt{5}+2)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2.\sqrt{5}.2 + 2^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}.$$

Ta có vế phải bằng vế trái.

b) Biến đổi

$$9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 + 2^2 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5}-2)^2.$$

Vậy $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5} = \left|\sqrt{5}-2\right| - \sqrt{5}$

$$= \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2.$$

Câu c) và d) tương tự hai câu trên.

16. a) *Giải :* Ta biết tích hai số ab không âm khi và chỉ khi : hoặc $a \geq 0$ và $b \geq 0$ hoặc $a \leq 0$ và $b \leq 0$.

Theo nhận xét trên thì $\sqrt{(x-1)(x-3)}$ xác định nếu $(x-1)(x-3) \geq 0$, nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : $x - 1 \geq 0$ và $x - 3 \geq 0$. Nghĩa là x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq 1$ và $x \geq 3$. Vậy $x \geq 3$.

Trường hợp 2 : $x - 1 \leq 0$ và $x - 3 \leq 0$. Nghĩa là x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \leq 1$ và $x \leq 3$. Vậy $x \leq 1$.

Như vậy với $x \leq 1$ hoặc $x \geq 3$ thì biểu thức đã cho xác định.

Tập hợp những giá trị x đó được kí hiệu là :

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 3\}.$$

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 1.

Hình 1

b) *Hướng dẫn :* $\sqrt{x^2 - 4}$ hay $\sqrt{(x-2)(x+2)}$ xác định khi $(x-2)(x+2) \geq 0$, nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau ;

Trường hợp 1 : $x - 2 \geq 0$ và $x + 2 \geq 0$, ta sẽ tìm được $x \geq 2$.

Trường hợp 2 : $x - 2 \leq 0$ và $x + 2 \leq 0$, ta sẽ tìm được $x \leq -2$.

Đáp số : $x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 2.

Hình 2

c) *Hướng dẫn :* Ta biết thương $\dfrac{a}{b}$ không âm khi và chỉ khi : hoặc $a \geq 0$ và $b > 0$ hoặc $a \leq 0$ và $b < 0$.

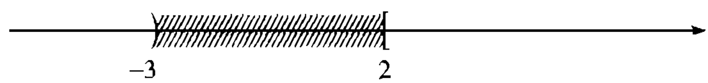
Theo nhận xét trên thì $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$ xác định nếu $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$, nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : $x - 2 \geq 0$ và $x + 3 > 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq 2$ và $x > -3$. Vậy $x \geq 2$.

Trường hợp 2 : $x - 2 \leq 0$ và $x + 3 < 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \leq 2$ và $x < -3$. Vậy $x < -3$.

Như vậy với $x \geq 2$ hoặc $x < -3$ thì biểu thức đã cho xác định.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 3.



Hình 3

d) *Hướng dẫn :*

$\sqrt{\dfrac{2+x}{5-x}}$ xác định nếu $\dfrac{2+x}{5-x} \geq 0$, nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : $2 + x \geq 0$ và $5 - x > 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq -2$ và $x < 5$.

Vậy $-2 \leq x < 5$.

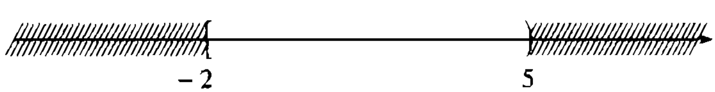
Trường hợp 2 : $2 + x \leq 0$ và $5 - x < 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \leq -2$ và $x > 5$.

Trong trường hợp này ta thấy không tồn tại x thoả mãn đồng thời

$$x \leq -2 \text{ và } x > 5.$$

Như vậy với $-2 \leq x < 5$ thì biểu thức đã cho xác định.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 4.



Hình 4

17. a) *Giải* : Vì $\sqrt{9x^2} = |3x|$ nên để tìm x thoả mãn $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$ ta đưa về tìm x thoả mãn $|3x| = 2x + 1$ tức là tìm nghiệm của phương trình

$$|3x| = 2x + 1. \qquad (1)$$

Ta xét hai trường hợp :

– Khi $3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, ta giải phương trình

$$3x = 2x + 1.$$

Ta có $3x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Giá trị $x = 1$ thoả mãn $x \geq 0$, nên $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (1).

– Khi $3x < 0 \Leftrightarrow x < 0$, ta giải phương trình

$$-3x = 2x + 1.$$

Ta có $-3x = 2x + 1 \Leftrightarrow -5x = 1 \Leftrightarrow x = -0{,}2$.

Giá trị $x = -0{,}2$ thoả mãn $x < 0$, nên $x = -0{,}2$ là một nghiệm của phương trình (1).

Tổng hợp hai trường hợp trên, ta thấy hai giá trị $x_1 = 1$ và $x_2 = -0{,}2$ là các nghiệm của phương trình (1).

Vậy các giá trị cần tìm là $x_1 = 1$ và $x_2 = -0{,}2$.

b) *Hướng dẫn :* Tương tự câu a).

Vì $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x + 3)^2} = |x + 3|$ nên đưa về tìm nghiệm của phương trình

$$|x + 3| = 3x - 1. \qquad (2)$$

Xét hai trường hợp :

– Khi $x + 3 \geq 0$, giải $x + 3 = 3x - 1$ được $x = 2$ thoả mãn $x + 3 \geq 0$, nên $x = 2$ là một nghiệm của (2).

– Khi $x + 3 < 0$, giải $-x - 3 = 3x - 1$ được $x = -0{,}5$. Vì $x = -0{,}5$ không thoả mãn $x + 3 < 0$ nên giá trị $x = -0{,}5$ không phải là nghiệm của (2).

Tổng hợp hai trường hợp trên ta thấy chỉ có duy nhất một giá trị $x = 2$ là nghiệm của (2).

Vậy giá trị cần tìm là $x = 2$.

c) *Hướng dẫn :* Tương tự câu a).

Vì $\sqrt{1-4x+4x^2} = \sqrt{(1-2x)^2} = |1-2x|$ nên đưa về tìm nghiệm của phương trình

$$|1-2x| = 5. \qquad (3)$$

Có thể giải phương trình (3) bằng một trong hai cách sau.

Cách 1 :

Ta giải phương trình $1 - 2x = 5$ (được $x = -2$) và giải phương trình $1 - 2x = -5$ (được $x = 3$).

Tổng hợp ta được hai nghiệm của (3) là $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

Cách 2 :

Ta xét hai trường hợp :

– Khi $1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0{,}5$, ta giải phương trình

$$1 - 2x = 5,$$

được $x = -2$ là một nghiệm của (3) (vì thoả mãn $x \leq 0{,}5$).

– Khi $1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > 0{,}5$, ta giải phương trình

$$2x - 1 = 5,$$

được $x = 3$ là một nghiệm của (3) (vì thoả mãn $x > 0{,}5$).

Tổng hợp hai trường hợp, ta có hai nghiệm của (3) là $x_1 = -2$ và $x_2 = 3$.

d) Vì $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2|$ nên đưa về tìm x thoả mãn

$$|x^2| = 7 \text{ hay } x^2 = 7.$$

Suy ra các giá trị cần tìm là $x_1 = -\sqrt{7}$ và $x_2 = \sqrt{7}$.

18. a) $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.

b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2$.

c) $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = (x + \sqrt{13})^2$.

19. a) $\dfrac{x^2-5}{x+\sqrt{5}} = \dfrac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{x+\sqrt{5}} = x - \sqrt{5}.$

b) $\dfrac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x^2-2} = \dfrac{(x+\sqrt{2})^2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}.$

20. a) *Cách 1* : Ta viết 9 = 6 + 3, rồi quy về so sánh $2\sqrt{2}$ và 3.

Ta có $2\sqrt{2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2^2.(\sqrt{2})^2} = \sqrt{8}$

$3 = \sqrt{3^2} = \sqrt{9}$.

Do $\sqrt{8} < \sqrt{9}$, tức là $2\sqrt{2} < 3$

nên suy ra $6 + 2\sqrt{2} < 6 + 3$,

nghĩa là $6 + 2\sqrt{2} < 9$.

Cách 2 : Từ $9 = 6 + 2.1{,}5$ quy về so sánh $\sqrt{2}$ với 1,5 để từ đó suy ra $6 + 2\sqrt{2} < 9$.

b) Để so sánh : $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ với 3,

ta đưa về so sánh $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ với 3^2

hay so sánh $5 + 2\sqrt{2}.\sqrt{3}$ với 9.

Vì $9 = 5 + 2.2$ nên ta chỉ việc so sánh $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ với 2.

Ta có $(\sqrt{2}.\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2(\sqrt{3})^2 = 2.3 = 6$ và $2^2 = 4$ nên $\sqrt{2}.\sqrt{3} > 2$.

Từ $\sqrt{2}.\sqrt{3} > 2$, ta suy ra $5 + 2\sqrt{2}.\sqrt{3} > 9$.

Vậy ta có $\sqrt{2}+\sqrt{3} > 3$.

c) Từ 16 = 9 + 7, để so sánh $9 + 4\sqrt{5}$ và 16 ta quy về so sánh $4\sqrt{5}$ và 7.

Ta có $(4\sqrt{5})^2 = 4^2.(\sqrt{5})^2 = 16.5 = 80$

và $7^2 = 49$ nên $(4\sqrt{5})^2 > 7^2$.

Từ $(4\sqrt{5})^2 > 7^2$, suy ra $4\sqrt{5} > 7$.

Vậy $9 + 4\sqrt{5} > 16$.

d) Nhận xét vì $\sqrt{11} > \sqrt{3}$ nên $\sqrt{11} - \sqrt{3} > 0$.

Để so sánh $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ và 2 ta quy về so sánh :

$(\sqrt{11} - \sqrt{3})^2$ với 2^2

hay $14 - 2\sqrt{11}.\sqrt{3}$ với 4

hay $14 - 2\sqrt{11}.\sqrt{3}$ với $14 - 2.5$.

Vì $(\sqrt{11}.\sqrt{3})^2 = (\sqrt{11})^2(\sqrt{3})^2 = 33$ và $5^2 = 25$ nên $\sqrt{11}.\sqrt{3} > 5$ suy ra $-2\sqrt{11}.\sqrt{3} < -2.5$.

Vậy $14 - 2\sqrt{11}.\sqrt{3} < 14 - 2.5$. Từ đó ta có $\sqrt{11} - \sqrt{3} < 2$.

21. a) Biến đổi : $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$.

Rút gọn được kết quả là -1.

b) Biến đổi $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$;

Rút gọn được kết quả là $2\sqrt{2}$.

c) $\sqrt{9x^2} - 2x = \sqrt{(3x)^2} - 2x = |3x| - 2x$.

Với $x < 0$, rút gọn được kết quả là $-5x$.

d) Với $x > 4$ ta có $\sqrt{16 - 8x + x^2} = \sqrt{(4 - x)^2} = |4 - x| = x - 4$.

Rút gọn được kết quả là $2x - 8$.

22. Biến đổi vế trái ta được $2n + 1$.

Biến đổi vế phải ta được $2n + 1$.

Từ đó ta có vế trái bằng vế phải, vậy đẳng thức đúng.

(Thực ra, đẳng thức đúng với n là số thực không âm).

Với $n = 1$ có $\sqrt{4} + \sqrt{1} = 4 - 1$;

Với $n = 2$ có $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 9 - 4$;

Với $n = 3$ có $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 16 - 9$;

Với n = 4 có $\sqrt{25}+\sqrt{16} = 25 - 16$;

Với n = 5 có $\sqrt{36}+\sqrt{25} = 36 - 25$;

Với n = 6 có $\sqrt{49}+\sqrt{36} = 49 - 36$;

Với n = 7 có $\sqrt{64}+\sqrt{49} = 64 - 49$.

Bài tập bổ sung

2.1. Chọn (D).

§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

23. a) *Giải :* $\sqrt{10}.\sqrt{40} = \sqrt{10.40} = \sqrt{400} = 20$;

b) *Đáp số :* 15 ; c) *Đáp số :* 26 ; d) *Đáp số :* 18.

24. a) *Giải :* $\sqrt{45.80} = \sqrt{9.5.5.16} = \sqrt{9}.\sqrt{25}.\sqrt{16} = 3.5.4 = 60$;

b) *Đáp số :* 60 ; c) *Đáp số :* 24 ; d) *Đáp số :* 6.

25. a) *Giải :* $\sqrt{(6{,}8+3{,}2)(6{,}8-3{,}2)} = \sqrt{10.3{,}6} = \sqrt{36} = 6$;

b) *Đáp số :* 12 ; c) *Đáp số :* 108 ; d) *Đáp số :* 128.

26. a) Biến đổi vế trái

$$\sqrt{9-\sqrt{17}}.\sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})}$$
$$= \sqrt{9^2-(\sqrt{17})^2} = \sqrt{81-17}$$
$$= \sqrt{64} = 8.$$

b) Biến đổi vế trái được $2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{6} = 9$.

27. a)Viết mẫu ở dạng

$$\sqrt{2.2}.\sqrt{3} + \sqrt{2.14} = \sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{3} + \sqrt{2}.\sqrt{14} = \sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{14}).$$

b) Biến đổi tử theo cách :

Tách $\sqrt{16} = 4 = 2+2 = \sqrt{4}+\sqrt{4}$.

Sau đó nhóm các số với nhau và biến đổi :

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}) =$$

$$= (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{2}.\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{3}+\sqrt{2}.\sqrt{4})$$

$$= (1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}).$$

Từ đó, rút gọn được kết quả là $1+\sqrt{2}$.

28. a) Đưa về so sánh $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ với $(\sqrt{10})^2$ hay so sánh $5 + 2\sqrt{2}.\sqrt{3}$ với 10.

Kết quả được $\sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{10}$.

b) Tương tự câu a) :

So sánh $(\sqrt{3}+2)^2$ với $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$

hay so sánh $7+4\sqrt{3}$ với $8+2\sqrt{12}$.

Do $8+2\sqrt{12} = 8+4\sqrt{3}$ nên $7+4\sqrt{3} < 8+2\sqrt{12}$.

Từ đó suy ra $\sqrt{3}+2 < \sqrt{2}+\sqrt{6}$.

c) Biến đổi $\sqrt{15}.\sqrt{17} = \sqrt{16-1}.\sqrt{16+1} = \sqrt{16^2-1}$.

Do $16^2-1 < 16^2$ nên $\sqrt{16^2-1} < \sqrt{16^2}$.

Vậy $\sqrt{15}.\sqrt{17} < 16$.

d) So sánh hai bình phương là 8^2 và $(\sqrt{15}+\sqrt{17})^2$, từ đó quy về so sánh $32 = 2.16$ với $2\sqrt{15}.\sqrt{17} = 2\sqrt{16^2-1}$.

Kết quả được $\sqrt{15}+\sqrt{17} < 8$.

29. Có thể dùng cách tương tự câu d) bài 28.

Kết quả $\sqrt{2003}+\sqrt{2005} < 2\sqrt{2004}$.

30. a) • A có nghĩa khi $x+2 \geq 0$ và $x-3 \geq 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq -2$ và $x \geq 3$.

Như vậy, A có nghĩa với $x \geq 3$.

• B có nghĩa khi $(x + 2)(x - 3) \geq 0$. Nghĩa là, x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1* : $x + 2 \geq 0$ và $x - 3 \geq 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq -2$ và $x \geq 3$. Vậy $x \geq 3$.

– *Trường hợp 2* : $x + 2 \leq 0$ và $x - 3 \leq 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \leq -2$ và $x \leq 3$. Vậy $x \leq -2$.

Như vậy, B có nghĩa khi $x \leq -2$ hoặc $x \geq 3$.

b) Để A và B đồng thời có nghĩa thì $x \geq 3$.

Khi đó, ta có A = B (theo tính chất khai phương một tích).

31. Do a và b âm nên $-a$ và $-b$ dương.

Khi đó, ta có $\sqrt{a.b} = \sqrt{(-a).(-b)} = \sqrt{-a}.\sqrt{-b}$.

Áp dụng, ta có $\sqrt{(-25).(-64)} = \sqrt{25}.\sqrt{64} = 5.8 = 40$.

32. a) $2(a - 3)$; b) $3(2 - b)$; c) $a(a + 1)$; d) $b(b - 1)$.

33. a) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $\sqrt{x^2 - 4}$ và $\sqrt{x - 2}$ đồng thời có nghĩa.

• $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{(x-2)(x+2)}$ có nghĩa khi $x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$ (câu b) bài tập 16).

• $\sqrt{x - 2}$ có nghĩa khi $x \geq 2$.

Vậy điều kiện để biểu thức đã cho có nghĩa là $x \geq 2$.

Với điều kiện trên ta có

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{(x-2)(x+2)} = \sqrt{x-2}.\sqrt{x+2}.$$

Từ đó ta có :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x - 2} &= \sqrt{x-2}.\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x-2}\\ &= (\sqrt{x+2} + 2)\sqrt{x-2}.\end{aligned}$$

b) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $\sqrt{x + 3}$ và $\sqrt{x^2 - 9}$ đồng thời có nghĩa. Vậy điều kiện để biểu thức đã cho có nghĩa là x phải đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x + 3 \geq 0$ và $x^2 - 9 \geq 0$.

• $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.

• $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0$. (1)

Giải (1) (tương tự câu a) bài 16) ta có : $x \leq -3$ hoặc $x \geq 3$.

Vậy với $x \geq 3$ hoặc $x = -3$ thì x thoả mãn đồng thời hai bất đẳng thức $x + 3 \geq 0$ và $x^2 - 9 \geq 0$.

Với $x \geq 3$ ta biến đổi được kết quả là $(3+\sqrt{x-3})\sqrt{x+3}$.

34. a) *Hướng dẫn :* Quy về giải $x-5=3^2$.

Đáp số : $x = 14$;

b) *Đáp số :* Vô nghiệm ; c) *Đáp số :* $x = 3$; d) *Đáp số :* $x = -28$.

35. Khai triển vế trái ta được

$$(\sqrt{n+1})^2 - 2\sqrt{n+1}.\sqrt{n} + (\sqrt{n})^2 = n+1+n-2\sqrt{n(n+1)}$$
$$= 2n+1-2\sqrt{n(n+1)}.$$

Biến đổi vế phải

$$(2n+1)-\sqrt{4n^2+4n+1-1} = 2n+1-\sqrt{4n(n+1)} = 2n+1-\sqrt{4}.\sqrt{n(n+1)}.$$

Từ đó, suy ra hai vế bằng nhau. Vậy đẳng thức đúng.

(Thực ra đẳng thức đúng với n là số thực không âm).

Với n = 1 có $(\sqrt{2} - \sqrt{1})^2 = \sqrt{9} - \sqrt{8}$;

Với n = 2 có $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \sqrt{25} - \sqrt{24}$;

Với n = 3 có $(\sqrt{4} - \sqrt{3})^2 = \sqrt{49} - \sqrt{48}$;

Với n = 4 có $(\sqrt{5} - \sqrt{4})^2 = \sqrt{81} - \sqrt{80}$.

Bài tập bổ sung

3.1. Chọn (B).

§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

36. a) $\sqrt{\dfrac{9}{169}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{169}} = \dfrac{3}{13}$; b) $\dfrac{5}{12}$; c) $\dfrac{5}{4}$; d) $\dfrac{13}{9}$.

37. a) $\dfrac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}} = \sqrt{\dfrac{2300}{23}} = \sqrt{100} = 10$; b) 5 ; c) 4 ; d) 0,2.

38. a) Biểu thức A có nghĩa khi $\dfrac{2x+3}{x-3} \geq 0$, ta sẽ tìm được $x \leq -1,5$ hoặc $x > 3$.

Biểu thức B có nghĩa khi $\sqrt{2x+3}$ và $\sqrt{x-3}$ có nghĩa và $\sqrt{x-3}$ khác 0. Nghĩa là B có nghĩa khi x thoả mãn đồng thời hai bất đẳng thức $2x + 3 \geq 0$ và $x - 3 > 0$ hay x thoả mãn $x > 3$.

b) Để A và B đồng thời có nghĩa thì $x > 3$.

Khi đó, ta có A = B (theo tính chất khai phương một thương).

39. Với $a < 0$ và $b < 0$, ta có :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}.$$

Áp dụng tính $\sqrt{\dfrac{-49}{-81}}$ được kết quả là $\dfrac{7}{9}$.

40. a) 3y ; b) $\dfrac{4}{x}$; c) $\dfrac{3n}{2}$; d) $\dfrac{-1}{2a\sqrt{2}}$.

41. a) Vì $x \geq 0$ nên có $x = (\sqrt{x})^2$, từ đó có

$$x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \text{ và } x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2.$$

Khai phương được kết quả là $\dfrac{\left|\sqrt{x} - 1\right|}{\sqrt{x} + 1}$.

Có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối tuỳ theo $0 \leq x < 1$ hay $x \geq 1$.

b) Với $y > 0$, ta có $y - 2\sqrt{y} + 1 = (\sqrt{y} - 1)^2$. Rút gọn được kết quả là

$$\frac{\left|\sqrt{y} - 1\right|}{(\sqrt{y} - 1)(x - 1)}.$$

Nếu có thêm điều kiện $y < 1$ thì kết quả là $\dfrac{1}{1 - x}$.

Nếu có thêm điều kiện y > 1 thì kết quả là $\frac{1}{x-1}$.

42. a) • Rút gọn :

Với điều kiện x < 3 khi đó $|3-x| = 3-x$, rút gọn ta được kết quả $\frac{5-4x}{3-x}$.

• Giá trị biểu thức khi x = 0,5 là 1,2.

b) • Rút gọn :

+ Với điều kiện x > 0, được kết quả là $5x-\sqrt{8}$;

+ Với điều kiện x < 0 (nhưng vẫn thoả mãn điều kiện x > −2), được kết quả là $3x-\sqrt{8}$.

• Thay giá trị $x = -\sqrt{2}$ vào biểu thức $3x - \sqrt{8}$ và rút gọn ta được giá trị của biểu thức là $-5\sqrt{2}$.

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba thì được kết quả là $-7{,}071$.

43. a) Điều kiện xác định của $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}}$ là $\frac{2x-3}{x-1} \geq 0$.

Ta có $\frac{2x-3}{x-1} \geq 0$ nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1* : $2x - 3 \geq 0$ và $x - 1 > 0$, ta sẽ tìm được $x \geq 1{,}5$.

– *Trường hợp 2* : $2x - 3 \leq 0$ và $x - 1 < 0$, ta sẽ tìm được $x < 1$.

Như vậy, với điều kiện x < 1 hoặc x ≥ 1,5, ta có $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}}$ xác định.

Từ $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$, theo định nghĩa căn bậc hai số học, ta có $\frac{2x-3}{x-1} = 2^2$.

Giải phương trình $\frac{2x-3}{x-1} = 4$, ta được x = 0,5, thoả mãn điều kiện.

Vậy x = 0,5 là giá trị phải tìm.

b) Điều kiện xác định của $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}}$ là

$$2x - 3 \geq 0 \text{ và } x - 1 > 0.$$

Nghĩa là x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq 1{,}5$ và $x > 1$ hay x thoả mãn $x \geq 1{,}5$.

Như vậy, ta có $x \geq 1{,}5$ là điều kiện để $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}}$ có nghĩa.

Với điều kiện $x \geq 1{,}5$, theo quy tắc chia hai căn bậc hai, ta có :

$$\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{2x-3}{x-1}}.$$

Do vậy, với $x \geq 1{,}5$, ta quy về giải bài toán tìm x, biết

$$\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2,$$

và tìm được $x = 0{,}5$.

Tuy nhiên giá trị này không thoả mãn điều kiện $x \geq 1{,}5$.

Vậy không tồn tại giá trị nào của x để $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$.

Chú ý : Có thể chứng tỏ không tồn tại x thoả mãn $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ như sau :

$$2x - 3 = 2(x-1) - 1, \text{ nên } \sqrt{2x-3} < \sqrt{2(x-1)}.$$

Do đó $$\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} < \frac{\sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x-1}}.$$

Mặt khác, $$\frac{\sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{2(x-1)}{x-1}} = \sqrt{2},$$

suy ra $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} < \sqrt{2} < 2$.

Do $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}}$ luôn nhỏ hơn 2 nên không tồn tại x để $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$.

c) Tương tự câu a) tìm được x = – 1,2 thoả mãn

$$\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3.$$

d) *Hướng dẫn* : Tương tự câu b) chứng tỏ không tồn tại x thoả mãn

$$\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3.$$

44. Do a và b không âm nên $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ xác định. Ta có

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Khai triển vế trái, ta có

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

Từ đó, suy ra

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Chia hai vế của bất đẳng thức trên cho 2 ta được bất đẳng thức phải chứng minh.

Rõ ràng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

45. Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số a, b không âm, ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}. \quad (1)$$

Cộng a + b vào cả hai vế của bất đẳng thức (1) và biến đổi được

$$2(a+b) \geq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2. \quad (2)$$

Chia hai vế của bất đẳng thức (2) cho 4 rồi khai phương sẽ được điều phải chứng minh.

46. Biến đổi biểu thức được $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$ hoặc áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số a và $\frac{1}{a}$.

Bài tập bổ sung

4.1. Chọn (B).

§5. Bảng căn bậc hai

47. Tra bảng ta được

a) $x_1 \approx 3,8730$ suy ra $x_2 \approx -3,8730$;

b) $x_1 \approx 4,7749$ suy ra $x_2 \approx -4,7749$;

c) $x_1 \approx 18,7350$ suy ra $x_2 \approx -18,7350$;

d) $x_1 \approx 0,6782$ suy ra $x_2 \approx -0,6782$.

48. Tra bảng ta được

a) $x \approx 2,25$ (thực ra 2,25 là giá trị đúng) ;

b) $x \approx 4,623$; c) $x \approx 0,2704$; d) $x \approx 0,001444$.

49. Có thể kiểm tra theo hai cách

– Tìm giá trị nghiệm bằng máy tính bỏ túi.

Ví dụ, tính giá trị $x_1 = \sqrt{15}$ bằng máy tính bỏ túi được kết quả 3,872983346 (máy hiện kết quả gần đúng với 10 chữ số).

– Thử lại giá trị tìm được bằng máy tính bỏ túi.

Ví dụ, thay giá trị $x_1 \approx 3,873$ vào phương trình

$$x^2 = 15$$

ta có $(3,873)^2 = 15,000129 \approx 15$.

50. Ví dụ thử lại câu a) bài 47. Ta tìm các ô có giá trị gần với 15 ở trong bảng bình phương được ô 14,98 và ô 15,05. Với ô 14,98 tra bảng được 3,87, đây là kết quả gần đúng thiếu. Nếu chọn ô 15,05 tra bảng sẽ được số 3,88, đây là kết quả gần đúng thừa.

51. Ví dụ thử lại câu b) bài 48. Tra bảng căn bậc hai cho số 4,623 : Trước hết ta tìm căn bậc hai của 4,62 được 2,149. Tìm thêm chữ số ở cột số 3 phần hiệu chính ứng với dòng 4,6 được số 1, vậy cộng thêm 1 vào chữ số 9 ở số 2,149 ta được số 2,150.

52. Cần bổ sung

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{m^2}{n^2} \text{ ;}$$

$2n^2 = (2p)^2$;

giả thiết m và n nguyên tố cùng nhau.

53. a) Lập luận tương tự bài tập 52, thay đặc điểm số chẵn bởi số chia hết cho 3.

b) Lập luận bằng phản chứng.

Ví dụ, giả sử $5\sqrt{2}$ là số hữu tỉ a, nghĩa là có số a hữu tỉ mà

$$5\sqrt{2} = a.$$

Khi đó $$\sqrt{2} = \frac{a}{5}$$

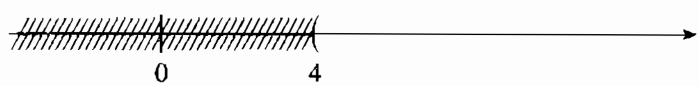
nên $\sqrt{2}$ cũng là số hữu tỉ.

Điều này vô lí, vì ta đã biết $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

54. Điều kiện $x \geq 0$.

Đưa bất đẳng thức đã cho về $\sqrt{x} > \sqrt{4}$ suy ra $x > 4$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số ta có hình 5.



Hình 5

55. Kết quả : $0 \leq x < 9$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số ta có hình 6.

Hình 6

Bài tập bổ sung

5.1. Chọn (A).

§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

56. a) $x\sqrt{7}$; b) $-2y\sqrt{2}$; c) $5x\sqrt{x}$; d) $4y^2\sqrt{3}$.

57. a) $\sqrt{5x^2}$; b) $-\sqrt{13x^2}$; c) $\sqrt{11x}$; d) $-\sqrt{-29x}$.

58. a) $-\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{2}$; c) $6\sqrt{a}$; d) $4\sqrt{b}-5\sqrt{10b}$.

59. a) $6-\sqrt{15}$; b) 10 ; c) 7 ; d) 22.

60. a) 0 ; b) $4\sqrt{2\sqrt{3}}-8\sqrt{5\sqrt{3}}$.

61. a) $1-x\sqrt{x}$; b) $x\sqrt{x}+8$; c) $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$; d) $x^3+y\sqrt{y}$.

62. a) $(6-5\sqrt{2})x$; b) $6x-2y-\sqrt{xy}$.

63. a) Biến đổi vế trái ta có

$$\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2 \;=x-y.$$

b) Đặt $\sqrt{x}=a$ ta có $\sqrt{x^3}=a^3$. Áp dụng hằng đẳng thức

$$a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$$

và rút gọn vế trái.

64. a) Biến đổi

$$x+2\sqrt{2x-4}=2+2\sqrt{2}\sqrt{x-2}+x-2$$
$$=(\sqrt{2}+\sqrt{x-2})^2.$$

b) Tương tự câu a), ta có $x-2\sqrt{2x-4}=(\sqrt{2}-\sqrt{x-2})^2$.

Do đó, $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}=$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{x-2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{x-2})^2}$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{x-2}+\left|\sqrt{2}-\sqrt{x-2}\right| \text{ (vì } \sqrt{2}+\sqrt{x-2}>0\text{)}.$$

Ta thấy :

- Nếu $x<4$ (nhưng $x\ge 2$) thì $x-2<2$; khi đó $\sqrt{2}-\sqrt{x-2}>0$ và kết quả rút gọn là $2\sqrt{2}$.
- Nếu $x\ge 4$ thì $x-2\ge 2$; khi đó $\sqrt{2}-\sqrt{x-2}\le 0$ và kết quả rút gọn là $2\sqrt{x-2}$.

65. a) *Cách 1 :* Ta có $25x = 35.35$, suy ra $x = 49$.

Cách 2 : Biến đổi vế trái được $5\sqrt{x}$ rồi quy về tìm x, biết

$$\sqrt{x} = 7.$$

Từ đó tìm được $x = 49$.

b) $0 \le x \le 6561$; c) $x = \frac{4}{3}$; d) $x \ge 2,5$.

66. a) Trước hết, điều kiện để các căn thức xác định là x phải thoả mãn đồng thời hai bất đẳng thức

$$x^2 - 9 \ge 0 \text{ và } x - 3 \ge 0.$$

Ta sẽ tìm được $x \ge 3$ là điều kiện để đồng thời có

$$x^2 - 9 \ge 0 \text{ và } x - 3 \ge 0.$$

Với điều kiện $x \ge 3$, ta có

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{(x-3)(x+3)} = \sqrt{x-3}\sqrt{x+3}.$$

Vậy để tìm x thoả mãn

$$\sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x-3} = 0,$$

ta đưa về tìm x thoả mãn

$$\sqrt{x-3}\sqrt{x+3} - 3\sqrt{x-3} = 0 \text{ hay } \sqrt{x-3}(\sqrt{x+3} - 3) = 0.$$

- Giải $\sqrt{x-3} = 0$ ta được $x = 3$, thoả mãn điều kiện $x \ge 3$.
- Giải $\sqrt{x+3} - 3 = 0$, ta có $\sqrt{x+3} = 3$ hay $x + 3 = 9$,

suy ra $x = 6$, thoả mãn điều kiện $x \ge 3$.

Vậy tìm được hai giá trị là $x_1 = 3$; $x_2 = 6$.

b) Điều kiện để các căn thức xác định là x phải thoả mãn đồng thời hai bất đẳng thức

$$x^2 - 4 \ge 0 \quad \text{và} \quad x + 2 \ge 0.$$

* Xét $x^2 - 4 \ge 0$, vì $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ nên $x^2 - 4 \ge 0$ khi và chỉ khi $(x-2)(x+2) \ge 0$. Ta tìm được $x \ge 2$ hoặc $x \le -2$.

* Xét $x + 2 \geq 0$ ta có $x \geq -2$.

Như vậy, x phải thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1 :* $x \geq 2$ và $x \geq -2$. Ta có $x \geq 2$.

– *Trường hợp 2 :* $x \leq -2$ và $x \geq -2$. Ta có $x = -2$.

Vậy điều kiện để các căn thức xác định là $x \geq 2$ hoặc $x = -2$.

• Với $x = -2$ thì $\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x+2} = 0$. Vậy $x = -2$ là một giá trị phải tìm.

• Với $x \geq 2$ thì $x + 2 > 0$ và $x - 2 \geq 0$ nên $\sqrt{x+2}$ và $\sqrt{x-2}$ xác định. Do đó

$$\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x+2} = \sqrt{(x-2)(x+2)} - 2\sqrt{x+2} = 0$$

hay $$\sqrt{x+2}(\sqrt{x-2} - 2) = 0.$$

Với nhận xét $\sqrt{x+2} > 0$ ta tìm được $x = 6$.

• Vậy tìm được hai giá trị là $x_1 = -2$ và $x_2 = 6$.

67. Kí hiệu a và b là kích thước của hình chữ nhật, ta có a và b dương.

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số a, b không âm, ta có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

a) Với các hình chữ nhật có cùng chu vi thì

$\frac{a+b}{2}$ không đổi (bằng một phần tư chu vi).

Từ bất đẳng thức $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ và $\frac{a+b}{2}$ không đổi suy ra $\sqrt{ab}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{a+b}{2}$ khi $a = b$.

Điều đó có nghĩa là trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

b) Với các hình chữ nhật có cùng diện tích thì tích ab không đổi nên từ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ suy ra $\frac{a+b}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{ab}$ khi a = b. Điều đó có nghĩa là trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi bé nhất.

Bài tập bổ sung

6.1. Chọn (C).

§7. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai (tiếp theo)

68. a) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; b) $\frac{x}{5}\sqrt{5}$; c) $\frac{\sqrt{3x}}{x}$; d) $\frac{-x}{7}\sqrt{42}$.

69. a) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$; b) $10+4\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

70. a) 2 ; b) $-\frac{5\sqrt{2}}{4}$; c) 3 ; d) 2.

71. Biến đổi vế phải bằng cách nhân cả tử và mẫu với $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ hoặc xuất phát từ kết quả $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=1$.

(Thực chất, đẳng thức đúng với n là số thực không âm).

72. Dùng kết quả bài tập 71, quy về tính

$$(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3}).$$

Rút gọn được $\sqrt{4}-\sqrt{1}=1$.

Đáp số : 1.

73. Theo bài tập 71 ta có

$$\sqrt{2005}-\sqrt{2004}=\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}}$$

và $$\sqrt{2004}-\sqrt{2003}=\frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}.$$

Quy về so sánh

$$\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}} \text{ với } \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}.$$

Khi đó, thấy ngay mẫu ở biểu thức thứ nhất lớn hơn mẫu ở biểu thức thứ hai, các số này đều dương nên suy ra

$$\sqrt{2005}-\sqrt{2004} < \sqrt{2004}-\sqrt{2003}.$$

74. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn, được kết quả là 2.

75. a) *Hướng dẫn :* Biến đổi tử :

$$(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y).$$

Sau đó rút gọn ta được kết quả

$$x+\sqrt{xy}+y.$$

b) *Đáp số :* $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$.

76. a) *Hướng dẫn :* $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1+\sqrt{2})(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})}$

$$= \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)^2-2} = \frac{(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}.$$

Khai triển tử và mẫu, sau đó rút gọn ta được kết quả là :

$$\frac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

b) *Đáp số :* $\dfrac{4+\sqrt{5}-3\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{22}$.

77. a) Ta biết nếu $\sqrt{x} = a$ với $a \geq 0$ thì $x = a^2$, nên ta đưa về tìm x thoả mãn

$$2x+3=(1+\sqrt{2})^2.$$

Giải phương trình này ta có $x = \sqrt{2}$.

b) Lập luận tương tự câu a), ta đưa về tìm x thoả mãn

$$10 + \sqrt{3}x = (2 + \sqrt{6})^2 \text{ hay } 10 + \sqrt{3}x = 10 + 4\sqrt{6}.$$

Từ đó, tìm được $x = 4\sqrt{2}$.

c) Trước hết, nhận xét $2 - \sqrt{3} > 0$, nên đưa về tìm x thoả mãn

$$3x - 2 = (2 - \sqrt{3})^2.$$

Từ đó, tìm được $x = 3 - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

d) Trước hết, nhận xét $\sqrt{5} - 3 < 0$ (vì $\sqrt{5} < 3$), do đó không có giá trị nào của x thoả mãn $\sqrt{x+1} = \sqrt{5} - 3$ (vế trái không âm, vế phải âm).

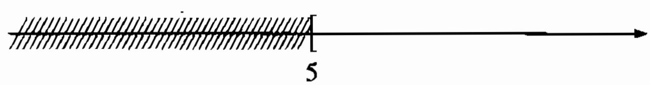
78. a) Với điều kiện $x - 2 \geq 0$ (tức $x \geq 2$), theo định lí so sánh các căn bậc hai số học, ta có

$$\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow x - 2 \geq 3.$$

Giải bất phương trình $x - 2 \geq 3$ ta có $x \geq 5$.

Kết hợp điều kiện $x \geq 2$, ta có tập các giá trị x cần tìm là $x \geq 5$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 7.



Hình 7

b) Trước hết, điều kiện để căn thức xác định là $3 - 2x \geq 0$, tức là $x \leq 1,5$.

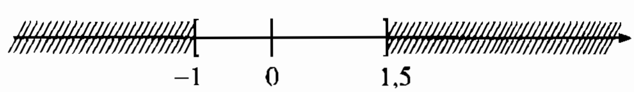
Với điều kiện $x \leq 1,5$, theo định lí so sánh các căn bậc hai số học, ta có

$$\sqrt{3-2x} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 3 - 2x \leq 5.$$

Giải bất phương trình $3 - 2x \leq 5$ ta có $x \geq -1$.

Kết hợp điều kiện $x \leq 1,5$, ta có tập các giá trị x cần tìm là $-1 \leq x \leq 1,5$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 8.



Hình 8

79. a) Ta có

$$x + y = (a_1 + a_2)\sqrt{2} + (b_1 + b_2)$$

trong đó $a_1 + a_2$ và $b_1 + b_2$ là các số hữu tỉ (tổng hai số hữu tỉ là số hữu tỉ).

Khi đó, $x.y = (a_1\sqrt{2} + b_1)(a_2\sqrt{2} + b_2)$.

Khai triển tích trên và nhóm gộp thích hợp, ta được

$$xy = (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} + (2a_1a_2 + b_1b_2).$$

Ta thấy $a_1b_2 + a_2b_1$ và $2a_1a_2 + b_1b_2$ đều là các số hữu tỉ.

b) Ta cần chỉ ra rằng nếu $y \neq 0$, thì $\frac{1}{y}$ cũng có dạng $a\sqrt{2} + b$ với a và b là các số hữu tỉ rồi áp dụng kết quả câu a).

Ta có $\dfrac{1}{a_2\sqrt{2} + b_2} = \dfrac{a_2\sqrt{2} - b_2}{(a_2\sqrt{2} + b_2)(a_2\sqrt{2} - b_2)}$

$$= \frac{a_2}{2a_2^2 - b_2^2}\sqrt{2} - \frac{b_2}{2a_2^2 - b_2^2}.$$

Vì $y \neq 0$ nên a_2 và b_2 không đồng thời bằng 0. Từ đó suy ra mẫu $2a_2^2 - b_2^2 \neq 0$ (do a_2 và b_2 không đồng thời bằng 0, nếu $2a_2^2 - b_2^2 = 0$ thì suy ra $\sqrt{2} = \dfrac{b_2}{a_2}$, mâu thuẫn với $\sqrt{2}$ là số vô tỉ).

Vậy $\dfrac{1}{y}$ có dạng $a\sqrt{2} + b$ với a và b là số hữu tỉ.

Bài tập bổ sung

7.1. Chọn (A).

7.2. Chọn (D).

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

80. a) $(2-\sqrt{2})(-5\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-5)^2 = -10\sqrt{2}+5.2-(18-30\sqrt{2}+25).$

Đáp số : $-33+20\sqrt{2}.$

b) $2\sqrt{3a}-\sqrt{75a}+a\sqrt{\dfrac{13,5}{2a}}-\dfrac{2}{5}\sqrt{300a^3} =$

$= 2\sqrt{3a}-5\sqrt{3a}+\dfrac{a}{2a}\sqrt{27a}-\dfrac{2}{5}.10a\sqrt{3a}.$

Đáp số : $-(1,5+4a)\sqrt{3a}.$

81. a) *Giải :* $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$$= \frac{a+2\sqrt{ab}+b+a-2\sqrt{ab}+b}{a-b} = \frac{2(a+b)}{a-b};$$

b) *Hướng dẫn.*

Cách 1 : Quy đồng mẫu rồi rút gọn.

Cách 2 : Trục căn thức của phân thức thứ nhất và sau đó trừ phân thức thứ hai.

Đáp số : $\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$, có thể để kết quả ở dạng $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

82. a) Khai triển vế phải được $x^2+\sqrt{3}\,x+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}$. Rút gọn sẽ được vế trái.

b) Giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{1}{4}$ đạt được khi

$$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0, \text{ tức là khi } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

83. a) Rút gọn biểu thức, ta được $\dfrac{-10}{9}$ là số hữu tỉ ;

b) Rút gọn biểu thức, ta được 12 là số hữu tỉ.

84. a) *Hướng dẫn :* Đưa về tìm x thoả mãn

$$2\sqrt{x+5}-3\sqrt{x+5}+4\sqrt{x+5}=6.$$

Điều kiện : $x \geq -5$.

Rút gọn, ta có $3\sqrt{x+5} = 6$ và tìm được $x = -1$.

b) *Đáp số :* $x = 17$.

85. a) *Giải :* Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, ta có

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$$

b) *Hướng dẫn :* $P = 2$ khi và chỉ khi

$$\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \text{ hay } 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+4.$$

Từ đó tính được $x = 16$.

86. a) $Q = \dfrac{\sqrt{a}-(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)\sqrt{a}} : \dfrac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a}-1)\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{a-1-(a-4)} = \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}.3}.$$

b) Với $a > 0$, ta có $\sqrt{a} > 0$. Vậy

$$Q = \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}$$

dương khi và chỉ khi $\sqrt{a} - 2 > 0$.

Giải $\sqrt{a} - 2 > 0$ ta có $\sqrt{a} > 2 \Leftrightarrow a > 4$.

Vậy Q dương khi $a > 4$.

87. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm ta có :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (1)$$

$$\frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc} \qquad (2)$$

$$\frac{c+a}{2} \ge \sqrt{ca}. \qquad (3)$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được :

$$a + b + c \ge \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Mở rộng cho bốn số a, b, c, d không âm, ta có bất đẳng thức

$$a + b + c + d \ge \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}.$$

Mở rộng cho năm số a, b, c, d, e không âm, ta có bất đẳng thức

$$a + b + c + d + e \ge \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{de} + \sqrt{ea}.$$

Bài tập bổ sung

8.1. Chọn (D).

§9. Căn bậc ba

88. Ta có kết quả lần lượt là : –7 ; 0,3 ; 1,1 ; –0,8.

89. a) *Giải :* Từ định nghĩa căn bậc ba, biết $\sqrt[3]{x} = -1,5$, ta có $x = (-1,5)^3$.

Suy ra $x = -3,375$.

b) *Hướng dẫn :* Tương tự, từ $\sqrt[3]{x-5} = 0,9$, ta có

$$x - 5 = (0,9)^3.$$

Suy ra $x = 5 + (0,9)^3$.

Tính được $x = 5,729$.

90. a) $\sqrt[3]{a^3b} = \sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b} = a\sqrt[3]{b}$.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{ab}{b^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{b^3}} = \dfrac{1}{b}\sqrt[3]{ab}.$

91. a) 2,289 ; b) 2,936 ; c) −3,359 ; d) − 0,431.

92. a) *Giải :* $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3.3} = \sqrt[3]{24}$.

Ta có 24 > 23, nên $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{23}$.

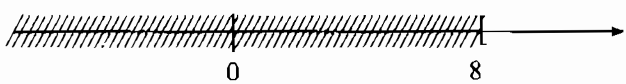
Vậy $2\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{23}$.

b) *Hướng dẫn :* Ta có $11 = \sqrt[3]{11^3} = \sqrt[3]{1331}$. Từ đó suy ra $33 < 3\sqrt[3]{1333}$.

93. a) *Giải :* Theo tính chất căn bậc ba, ta có

$$\sqrt[3]{x} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \geq \sqrt[3]{2^3} \Leftrightarrow x \geq 2^3 \Leftrightarrow x \geq 8.$$

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta được hình 9.



Hình 9

b) *Hướng dẫn :* Tương tự câu a), ta có $x \leq -3,375$.

94. Khai triển vế phải và rút gọn, ta được kết quả vế phải bằng vế trái.

a) Nếu x, y, z không âm thì x + y + z không âm. Suy ra

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$$

Từ đó, ta có $$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz.$$

b) Đặt $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$.

Ta thấy a, b, c không âm, nên x, y và z không âm. Dựa vào kết quả câu a) ta có

$$\frac{(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 + (\sqrt[3]{c})^3}{3} \geq \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c}.$$

Suy ra $$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

95. Lập luận tương tự bài 67.

Ôn tập chương I

96. Chọn (D).

(Có thể nhẩm và loại các trường hợp (A) ; (B) và (C)).

97. Chọn (A).

98. a) Ta thấy $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ xác định và không âm, nên theo định nghĩa căn bậc hai số học, ta sẽ chứng tỏ bình phương của nó bằng 6.

Ta có $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}$

$$= 4 + 2\sqrt{2^2-3} = 4+2 = 6.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

b) Ta biến đổi vế trái.

$$\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = \frac{2}{\left|2-\sqrt{5}\right|}-\frac{2}{\left|2+\sqrt{5}\right|}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{5}+2} = \frac{2(\sqrt{5}+2)-2(\sqrt{5}-2)}{5-4} = 8.$$

Vậy đẳng thức đúng.

99. Rút gọn $A = \dfrac{|2x-1|}{2(2x-1)}$. Xét hai trường hợp

– Nếu $x > 0{,}5$ ta có $A = 0{,}5$;

– Nếu $x < 0{,}5$ ta có $A = -0{,}5$.

Suy ra điều phải chứng minh.

100. a) *Chú ý* : $4-2\sqrt{3} = 3+1-2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3}-1)^2$.

Đáp số : 1.

b) *Chú ý* : $15-6\sqrt{6} = (3-\sqrt{6})^2$ và $33-12\sqrt{6} = (3-2\sqrt{6})^2$.

Đáp số : $\sqrt{6}$.

c) Thực hiện phép chia cho $\sqrt{10}$.

Đáp số : $23\sqrt{5}$.

101. a) Khai triển vế phải, so sánh với vế trái, suy ra đẳng thức đúng.

b) Áp dụng câu a) ta có

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}.$$

Từ đó, nhận thấy $x \geq 4$ là điều kiện xác định của A.

Rút gọn được $\quad A = \sqrt{x-4} + 2 + \left|\sqrt{x-4} - 2\right|$.

Ta thấy $\sqrt{x-4} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} \geq 2 \Leftrightarrow x - 4 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 8$.

Do đó :

- Với $x \geq 8$, ta có

$$A = \sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2 = 2\sqrt{x-4}.$$

- Với $x < 8$ (và $x \geq 4$), ta có

$$A = \sqrt{x-4} + 2 + 2 - \sqrt{x-4} = 4.$$

102. Điều kiện xác định của A là $x \geq 0$.

Điều kiện xác định của B là $x \geq 1$.

a) Với điều kiện $x \geq 0$, ta có $x + 1 \geq 1$ nên $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{1}$.

Từ đó suy ra $\quad \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 1$ hay $A \geq 1$.

Với điều kiện $x \geq 1$ ta có $x + 4 \geq 1 + 4$ hay $x + 4 \geq 5$ nên $\sqrt{x+4} \geq \sqrt{5}$.

Từ đó suy ra $\quad \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5}$ hay $B \geq \sqrt{5}$.

b) Áp dụng kết quả câu a) ta có

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 1.$$

Do đó, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x} = 0 \text{ và } \sqrt{x+1} = 1.$$

Ta tìm được $x = 0$.

Theo kết quả câu a), ta có

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5},$$

mà $\sqrt{5} > 2$ nên $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} > 2$.

Vậy, không tồn tại x thoả mãn $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 2$.

103. Khai triển $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, ta được $x - \sqrt{x} + 1$.

Vậy ta có đẳng thức

$$x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Ta thấy $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ và dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{1}{4}$.

Do vậy, $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ và dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{4}$.

Vậy $x - \sqrt{x} + 1$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{4}$ và giá trị này đạt được khi $x = \frac{1}{4}$.

Suy ra $\dfrac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

104. Ta biến đổi $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$.

Để $1 + \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên thì $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ phải có giá trị nguyên.

Do x nguyên nên $\sqrt{x}$ là số vô tỉ hoặc là số nguyên.

- Với $\sqrt{x}$ là số vô tỉ thì $\sqrt{x} - 3$ là số vô tỉ nên $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ không thể là số nguyên. Vậy trong trường hợp này không có giá trị nào của x để biểu thức đã cho nhận giá trị nguyên.

- Với $\sqrt{x}$ là số nguyên thì $\sqrt{x} - 3$ là nguyên. Vậy để $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ nguyên ta phải có $\sqrt{x} - 3$ phải là ước của 4.

Mặt khác, theo định nghĩa căn bậc hai thì $x \geq 0$ và $\sqrt{x} \geq 0$.

Vậy giá trị x nguyên cần tìm phải không âm và phải thoả mãn điều kiện $\sqrt{x} \geq 0$ và $\sqrt{x} - 3$ là ước của 4.

Ta thấy 4 có các ước số là ± 4 ; ± 2 và ± 1.

Với ước là 4, ta có $\sqrt{x} - 3 = 4$, suy ra x = 49 ;

Với ước là −4, ta có $\sqrt{x} - 3 = -4$, không tồn tại x ;

Với ước là 2, ta có $\sqrt{x} - 3 = 2$, suy ra x = 25 ;

Với ước là −2, ta có $\sqrt{x} - 3 = -2$; suy ra x = 1 ;

Với ước là 1, ta có $\sqrt{x} - 3 = 1$; suy ra x = 16 ;

Với ước là −1, ta có $\sqrt{x} - 3 = -1$, suy ra x = 4.

105. a) Chọn mẫu chung của vế trái là 2(a − b), biến đổi vế trái ta có :

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2(a-b)} - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2(a-b)} + \frac{4b}{2(a-b)} =$$

$$= \frac{a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - (a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) + 4b}{2(a-b)} = \frac{4\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2(a-b)}.$$

Rút gọn, ta suy ra vế trái bằng vế phải.

b) Ta biến đổi vế trái

$$\left(\frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$$

$$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$$

$$= \frac{[(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})]^2}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2} = 1.$$

Vậy đẳng thức đúng.

106. a) Để các căn thức bậc hai xác định thì điều kiện là a và b không âm.

Để cho các mẫu khác 0 thì điều kiện là $a \neq 0$, $b \neq 0$ và $a \neq b$.

Vậy điều kiện để A có nghĩa là $a > 0$, $b > 0$ và $a \neq b$.

b) Ta biến đổi A như sau :

$$A = \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1}.$$

Rút gọn tiếp, ta được $A = -2\sqrt{b}$.

Vậy giá trị của A không phụ thuộc vào a mà chỉ phụ thuộc vào b.

107. a) *Chú ý :* $\sqrt{x^3} - 1 = (\sqrt{x})^3 - 1 = (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$

$$1 + \sqrt{x^3} = 1 + (\sqrt{x})^3 = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x).$$

Từ đó biến đổi được :

$$B = \frac{2x + 1 - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x^3} - 1}.(1 - 2\sqrt{x} + x)$$

$$= \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3} - 1}.(\sqrt{x} - 1)^2 = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x} - 1.$$

b) $B = 3$ khi và chỉ khi $\sqrt{x} - 1 = 3$.

Ta có $\sqrt{x} - 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$.

108. a) *Chú ý :* Với $x > 0$ thì

$$9 - x = (3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x}).$$

Vậy $(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})$ là mẫu chung của biểu thức trong ngoặc thứ nhất.

Cũng từ $x > 0$, có

$$x - 3\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3).$$

Vậy $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)$ là mẫu chung của biểu thức trong ngoặc thứ hai.

Thực hiện biến đổi trong mỗi ngoặc và rút gọn được

$$C = \frac{3(\sqrt{x}+3)}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}\cdot\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}+2)}.$$

Đáp số : $C = \dfrac{-3\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)}$.

b) $C < -1$ khi $\dfrac{-3\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)} + 1 = \dfrac{4-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)}$ có giá trị âm.

Do $2(\sqrt{x}+2)$ dương nên $4-\sqrt{x}$ phải âm. Ta tìm được $x > 16$.

Bài tập bổ sung

I.1. *Hướng dẫn*

– Nhận xét $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.

– Đặt $a = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ và $b = \sqrt{5}+1$.

– Đưa về so sánh a^2 với b^2 hay $5+2\sqrt{6}$ với $6+2\sqrt{5}$.

– Đưa về so sánh a^2-5 với b^2-5 hay so sánh $2\sqrt{6}$ với $1+2\sqrt{5}$.

– Đưa về so sánh $(a^2-5)^2$ với $(b^2-5)^2$ hay so sánh 24 với $21+4\sqrt{5}$.

– Có thể chứng tỏ được $24 < 21+4\sqrt{5}$ (vì $3 < 4\sqrt{5} \Leftrightarrow 3 < \sqrt{80}$).

– Từ kết quả $3 < \sqrt{80}$ suy luận ngược lại, suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < \sqrt{5}+1$.

Chương II

HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. ĐỀ BÀI

§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

1. Trong các bảng sau ghi các giá trị tương ứng của x và y. Bảng nào xác định y là hàm số của x ? Vì sao ?

x	1	2	4	5	7	8
y	3	5	9	11	15	17

a)

x	3	4	3	5	8
y	6	8	4	8	16

b)

2. Cho hàm số $y = f(x) = 1,2x$. Tính các giá trị tương ứng của y khi cho x các giá trị sau đây, rồi lập bảng giá trị tương ứng giữa x và y :

$-2,50$; $-2,25$; $-2,00$; $-1,75$; $-1,50$; $-1,25$; -1 ;

$-0,75$; $-0,50$; $-0,25$; 0 ; $0,25$; $0,50$; $0,75$;

1 ; $1,25$; $1,50$; $1,75$; $2,00$; $2,25$; $2,50$.

3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{4}x$. Tính

$f(-5)$; $f(-4)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

$f(1)$; $f(2)$; $f(4)$; $f(a)$; $f(a + 1)$.

4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 5$ với $x \in \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên **R**.

5. Biểu diễn các điểm sau đây trên cùng hệ trục toạ độ. Nối theo thứ tự các điểm đã cho bằng các đoạn thẳng để được một đường gấp khúc với điểm đầu là A, điểm cuối là M.

A(1 ; 6) ; B(6 ; 11) ; C(14 ; 12) ; D(12 ; 9) ;
E(15 ; 8) ; F(13 ; 4) ; G(9 ; 7) ; H(12 ; 1) ;
I(16 ; 4) ; K(20 ; 1) ; L(19 ; 9) ; M(22 ; 6).

Bài tập bổ sung

1.1. Cho 4 bảng ghi các giá trị tương ứng của x và y (h. bs. 1)

Bảng 1

x	0,5	1	1,5	0,5	2	2,5
y	2,5	3	4,5	3,5	5	6,5

Bảng 2

x	−1	−2	1	1,5	1,5	2
y	3	5	3	2	1	5

Bảng 3

x	0	1	1,5	2	2,5	3
y	0	2	3	4	5	6

Bảng 4

x	−1	2	−1	3	4	5
y	−2	3	2	5,5	6,5	8,5

Hình bs. 1

Trong các bảng trên đây, bảng xác định y là hàm số của x là :

(A) Bảng 1 ; (B) Bảng 2 ; (C) Bảng 3 ; (D) Bảng 4.

1.2. Cho hàm số $y = f(x) = 4 - \frac{2}{5}x$ với $x \in \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng hàm số đã cho nghịch biến trên **R**.

§2. Hàm số bậc nhất

6. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ? Hãy xác định các hệ số a, b và xét xem hàm số nào đồng biến ? Hàm số nào nghịch biến ?

a) $y = 3 - 0,5x$; b) $y = -1,5x$; c) $y = 5 - 2x^2$;

d) $y = (\sqrt{2} - 1)x + 1$; e) $y = \sqrt{3}(x - \sqrt{2})$; f) $y + \sqrt{2} = x - \sqrt{3}$.

7. Cho hàm số bậc nhất $y = (m + 1)x + 5$.

a) Tìm giá trị của m để hàm số y là hàm số đồng biến ;

b) Tìm giá trị của m để hàm số y là hàm số nghịch biến.

8. Cho hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x + 1$.

a) Hàm số là đồng biến hay nghịch biến trên **R** ? Vì sao ?

b) Tính các giá trị tương ứng của y khi x nhận các giá trị sau :

0 ; 1 ; $\sqrt{2}$; $3 + \sqrt{2}$; $3 - \sqrt{2}$.

c) Tính các giá trị tương ứng của x khi y nhận các giá trị sau :

0 ; 1 ; 8 ; $2 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{2}$.

9. Một hình chữ nhật có kích thước là 25cm và 40cm. Người ta tăng mỗi kích thước của hình chữ nhật thêm x cm. Gọi S và P thứ tự là diện tích và chu vi của hình chữ nhật mới tính theo x.

a) Hỏi rằng các đại lượng S và P có phải là hàm số bậc nhất của x không ? Vì sao ?

b) Tính các giá trị tương ứng của P khi x nhận các giá trị (tính theo đơn vị cm) sau :

0 ; 1 ; 1,5 ; 2,5 ; 3,5.

10. Chứng minh rằng hàm số bậc nhất $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

11. Với những giá trị nào của m thì các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất ?

a) $y = \sqrt{m - 3}\,x + \dfrac{2}{3}$;

b) $S = \dfrac{1}{m + 2}t - \dfrac{3}{4}$ (t là biến số).

12. Tìm trên mặt phẳng toạ độ tất cả các điểm :

a) Có tung độ bằng 5 ;

b) Có hoành độ bằng 2 ;

c) Có tung độ bằng 0 ;

d) Có hoành độ bằng 0 ;

e) Có hoành độ và tung độ bằng nhau ;

f) Có hoành độ và tung độ đối nhau.

13. Tìm khoảng cách giữa hai điểm trên mặt phẳng toạ độ, biết rằng :

a) $A(1 ; 1)$, $B(5 ; 4)$;

b) $M(-2 ; 2)$, $N(3 ; 5)$;

c) $P(x_1 ; y_1)$, $Q(x_2 ; y_2)$.

Bài tập bổ sung

2.1. Trong các hàm số dưới đây, hàm số bậc nhất là :

(A) $y = 3 - 2x + x^2$; (B) $y = \dfrac{4}{x+3} - \dfrac{2}{5}$;

(C) $y = \dfrac{3}{2}(\sqrt{x} + 5)$; (D) $y = \dfrac{2x+5}{3}$.

2.2. Trong các hàm số bậc nhất dưới đây, hàm số đồng biến là :

(A) $y = \dfrac{5-3x}{2} + 7$; (B) $y = \dfrac{7+2x}{3} - 5$;

(C) $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3+x}{5}$; (D) $y = 13 - \dfrac{3x+1}{5}$.

2.3. Trong các hàm số bậc nhất dưới đây, hàm số nghịch biến là :

(A) $y = 5 - \dfrac{7-x}{3}$; (B) $y = 15 - \dfrac{3x-1}{2}$;

(C) $y = \dfrac{4x+5}{3} - 1$; (D) $y = \dfrac{4x+1}{3} - \dfrac{2}{5}$.

2.4. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{m} + \sqrt{5}}{\sqrt{m} - \sqrt{5}}.x + 2010$.

a) Với điều kiện nào của m thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất ?

b) Tìm các giá trị của m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên **R**.

§3. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

14. a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$$y = x + \sqrt{3}\ ; \qquad (1)$$

$$y = 2x + \sqrt{3}. \qquad (2)$$

b) Gọi giao điểm của đường thẳng $y = x + \sqrt{3}$ với các trục Oy, Ox theo thứ tự là A, B và giao điểm của đường thẳng $y = 2x + \sqrt{3}$ với các trục Oy, Ox theo thứ tự là A, C. Tính các góc của tam giác ABC (dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx-220* hoặc CASIO *fx-500A*).

15. Cho hàm số $y = (m - 3)x$.

a) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến ? Nghịch biến ?

b) Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1 ; 2).

c) Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm B(1 ; –2).

d) Vẽ đồ thị của hai hàm số ứng với giá trị của m tìm được ở các câu b), c).

16. Cho hàm số $y = (a - 1)x + a$.

a) Xác định giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

b) Xác định giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng –3.

c) Vẽ đồ thị của hai hàm số ứng với giá trị của a tìm được ở các câu a), b) trên cùng hệ trục toạ độ Oxy và tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng vừa vẽ được.

17. a) Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ Oxy đồ thị các hàm số sau :

$$y = x\ (d_1)\ ; \qquad y = 2x\ (d_2)\ ; \qquad y = -x + 3\ (d_3).$$

b) Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A, B. Tìm toạ độ của các điểm A, B và tính diện tích tam giác OAB.

Bài tập bổ sung

3.1. Cho hàm số bậc nhất $y = (m - 1{,}5)x + 5$ (1)

a) Khi m = 3, đồ thị của hàm số (1) đi qua điểm :

(A) (2 ; 7) ; (B) (2,5 ; 8) ; (C) (2 ; 8) ; (D) (–2 ; 3).

b) Khi m = 2, đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại điểm :

(A) (1 ; 0) ; (B) (2 ; 0) ; (C) (−1 ; 0) ; (D) (−10 ; 0).

3.2. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 xác định bởi các hàm số bậc nhất sau :

$y = 0,5x - 3$ (d_1) ; $y = -1,5x + 5$ (d_2).

Đường thẳng (d_1) và đường thẳng (d_2) cắt nhau tại điểm :

(A) (2 ; −2) ; (B) (4 ; −1) ; (C) (−2 ; −4) ; (D) (8 ; 1).

3.3. Cho ba đường thẳng sau :

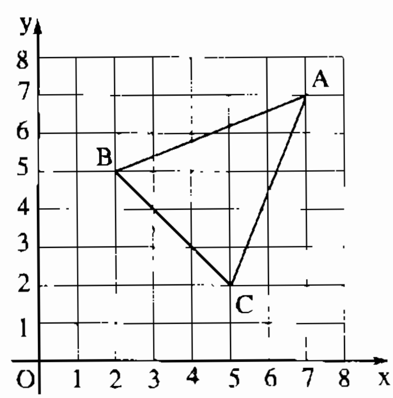
$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$ (d_1) ; $y = \frac{3}{5}x - \frac{5}{2}$ (d_2) ; $y = kx + 3,5$ (d_3).

Hãy tìm giá trị của k để sao cho ba đường thẳng đồng quy tại một điểm.

3.4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm A, B, C có toạ độ như sau : A(7 ; 7), B(2 ; 5), C(5 ; 2).

a) Hãy viết phương trình của các đường thẳng AB, BC và CA.

b) Coi độ dài mỗi đơn vị trên các trục Ox, Oy là 1cm, hãy tính chu vi, diện tích của tam giác ABC (lấy chính xác đến hai chữ số thập phân).



Hình bs. 2

§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

18. Cho hàm số $y = ax + 3$. Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x$;

b) Khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = 2 + \sqrt{2}$.

19. Biết rằng với x = 4 thì hàm số $y = 2x + b$ có giá trị 5.

a) Tìm b ;

b) Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị của b tìm được ở câu a).

20. Tìm hệ số a của hàm số $y = ax + 1$, (1)

biết rằng khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = 3 + \sqrt{2}$.

21. Xác định hàm số $y = ax + b$ biết đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.

22. Xác định hàm số trong mỗi trường hợp sau, biết đồ thị của hàm số là đường thẳng đi qua gốc toạ độ :

a) Đi qua điểm A(3 ; 2) ;

b) Có hệ số a bằng $\sqrt{3}$;

c) Song song với đường thẳng $y = 3x + 1$.

23. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm A(1 ; 2), B(3 ; 4).

a) Tìm hệ số a của đường thẳng đi qua A và B ;

b) Xác định hàm số biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua A và B.

24. Cho đường thẳng $y = (k + 1)x + k$. (1)

a) Tìm giá trị của k để đường thẳng (1) đi qua gốc toạ độ ;

b) Tìm giá trị của k để đường thẳng (1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$;

c) Tìm giá trị của k để đường thẳng (1) song song với đường thẳng $y = \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 3$.

Bài tập bổ sung

4.1. Đường thẳng $y = kx + \frac{1}{2}$ song song với đường thẳng $y = \frac{2}{3} - \frac{5x}{7}$ khi k có giá trị là :

(A) $\frac{2}{3}$; (B) 5 ; (C) $\frac{5}{7}$; (D) $-\frac{5}{7}$.

4.2. Đường thẳng $y = \frac{2m + 3}{5}x + \frac{4}{7}$ và đường thẳng $y = \frac{5m + 2}{3}x - \frac{1}{2}$ song song với nhau khi m có giá trị là :

(A) 1 ; (B) $\frac{19}{31}$; (C) $-\frac{1}{19}$; (D) $\frac{1}{3}$.

4.3. Hai đường thẳng $y = (2m + 1)x - \frac{2}{3}$ và $y = (5m - 3)x + \frac{3}{5}$ cắt nhau khi m có giá trị khác với giá trị sau :

(A) $\frac{4}{7}$; (B) $\frac{4}{3}$; (C) $-\frac{2}{7}$; (D) $-\frac{4}{3}$.

4.4. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{3} - 1}.x + \sqrt{k} + \sqrt{3}$. (d)

a) Tìm giá trị của k để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $2\sqrt{3}$.

b) Tìm giá trị của k để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

c) Chứng minh rằng, với mọi giá trị $k \geq 0$, các đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định. Hãy xác định toạ độ của điểm cố định đó.

§5. Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b

25. a) Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và đi qua điểm A(2 ; 1) ;

b) Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và đi qua điểm B(1 ; –2) ;

c) Vẽ đồ thị của các hàm số với hệ số góc tìm được ở các câu a), b) trên cùng một mặt phẳng toạ độ và chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

26. Cho hai đường thẳng

$y = ax + b$; (d)

$y = a'x + b'$. (d')

Chứng minh rằng :

Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, hai đường thẳng (d) *và* (d') *vuông góc với nhau khi và chỉ khi* $a . a' = -1$.

27. a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của các hàm số sau :

$$y = x \;; \qquad (1)$$

$$y = 0,5x. \qquad (2)$$

b) Đường thẳng (d) song song với trục Ox và cắt trục tung Oy tại điểm C có tung độ bằng 2, theo thứ tự cắt các đường thẳng (1) và (2) tại D và E. Tìm toạ độ của các điểm D, E. Tính chu vi và diện tích của tam giác ODE.

28. a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của các hàm số

$$y = -2x \;; \qquad (1)$$

$$y = 0,5x. \qquad (2)$$

b) Qua điểm K(0 ; 2) vẽ đường thẳng (d) song song với trục Ox. Đường thẳng (d) cắt các đường thẳng (1) và (2) lần lượt tại A và B. Tìm toạ độ của các điểm A, B.

c) Hãy chứng tỏ rằng $\widehat{AOB} = 90^\circ$ (hai đường thẳng $y = -2x$ và $y = 0,5x$ vuông góc với nhau).

29. Cho hàm số $y = mx + (2m + 1)$. (1)

Với mỗi giá trị của $m \in \mathbf{R}$, ta có một đường thẳng xác định bởi (1). Như vậy, ta có một *họ đường thẳng* xác định bởi (1). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, họ đường thẳng xác định bởi (1) luôn đi qua một điểm cố định. Hãy xác định toạ độ của điểm đó.

Bài tập bổ sung

5.1. a) Hệ số góc của đường thẳng $y = \dfrac{3x - 5}{2}$ là :

(A) 3 ; (B) (–5) ; (C) $\dfrac{3}{2}$; (D) $-\dfrac{5}{2}$.

b) Hệ số góc của đường thẳng $y = \dfrac{3 - \sqrt{3}x}{5}$ là :

(A) 3 ; (B) $\dfrac{3}{5}$; (C) $-\sqrt{3}$; (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

5.2. a) Hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và điểm $M\left(\sqrt{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ là :

(A) $\sqrt{3}$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{3}{2}$.

b) Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $P(1\,;\sqrt{3}+\sqrt{2})$ và $Q(\sqrt{3}\,;3+\sqrt{2})$ là :

(A) $-\sqrt{3}$; (B) $(\sqrt{3}-1)$; (C) $(1-\sqrt{3})$; (D) $\sqrt{3}$.

5.3. a) Góc hợp bởi đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$ và trục Ox là :

(A) $26^\circ 34'$; (B) 30° ; (C) 60° ; (D) $30^\circ 58'$.

b) Góc hợp bởi đường thẳng $y = \frac{7+2x}{5}$ và trục Ox là :

(A) $54^\circ 28'$; (B) $81^\circ 52'$; (C) $21^\circ 48'$; (D) $63^\circ 26'$.

(Chú ý : Dùng máy tính bỏ túi tính góc chính xác đến phút).

5.4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho bốn điểm A, B, C, D có toạ độ nguyên như sau :

A(4 ; 5), B(1 ; −1), C(4 ; −4), D(7 ; −1).

a) Viết phương trình của các đường thẳng AB, BC, CD và DA.

b) Tính (theo độ, phút) các góc của tứ giác ABCD bằng máy tính bỏ túi.

Ôn tập chương II

30. a) Với những giá trị nào của m thì hàm số $y = (m+6)x - 7$ đồng biến ?

b) Với những giá trị nào của k thì hàm số $y = (-k+9)x + 100$ nghịch biến ?

31. Với những giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số $y = 12x + (5-m)$ và $y = 3x + (3+m)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung ?

32. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng $y = (a - 1)x + 2$ và $y = (3 - a)x + 1$ song song với nhau.

33. Với điều kiện nào của k và m thì hai đường thẳng sau sẽ trùng nhau ?

$$y = kx + (m - 2);$$
$$y = (5 - k)x + (4 - m).$$

34. Cho đường thẳng $y = (1 - 4m)x + m - 2$. (d)

a) Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) đi qua gốc toạ độ ?

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) tạo với trục Ox một góc nhọn ? Góc tù ?

c) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại một điểm có tung độ bằng $\frac{3}{2}$.

d) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

35. Cho đường thẳng $y = (m - 2)x + n$ $(m \neq 2)$. (d)

Tìm các giá trị của m và n trong mỗi trường hợp sau :

a) Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(–1 ; 2), B(3 ; –4) ;

b) Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $2 + \sqrt{2}$;

c) Đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$;

d) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$;

e) Đường thẳng (d) trùng với đường thẳng $y = 2x - 3$.

36. a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$y = 3x + 6$; (1) $y = 2x + 4$; (2)

$y = x + 2$; (3) $y = \frac{1}{2}x + 1$. (4)

b) Gọi giao điểm của các đường thẳng (1), (2), (3), (4) với trục hoành là A và với trục tung lần lượt là B_1, B_2, B_3, B_4, ta có $\widehat{B_1Ax} = \alpha_1$; $\widehat{B_2Ax} = \alpha_2$; $\widehat{B_3Ax} = \alpha_3$; $\widehat{B_4Ax} = \alpha_4$. Tính các góc α_1, α_2, α_3, α_4.

(*Hướng dẫn :* Dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx-220* hoặc CASIO *fx-500A* hoặc CASIO *fx-500MS*... tính $tg\alpha_1$, $tg\alpha_2$, $tg\alpha_3$, $tg\alpha_4$ rồi tính ra các góc tương ứng).

c) Có nhận xét gì về độ dốc của các đường thẳng (1), (2), (3), (4) ?

37. a) Cho các điểm M(–1 ; –2), N(–2 ; –4) , P(2 ; –3) , Q(3 ; –4,5). Tìm toạ độ của các điểm M', N', P', Q' lần lượt đối xứng với các điểm M, N, P, Q qua trục Ox.

b) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng hệ trục toạ độ :

$$y = |x| ;$$

$$y = |x + 1|.$$

c) Tìm toạ độ giao điểm của đồ thị của các hàm số $y = |x|$ và $y = |x + 1|$.

Từ đó, suy ra phương trình $|x| = |x + 1|$ có một nghiệm duy nhất.

38. Cho các hàm số :

$$y = 2x - 2 ; \qquad (d_1)$$

$$y = -\frac{4}{3}x - 2 ; \qquad (d_2)$$

$$y = \frac{1}{3}x + 3 . \qquad (d_3)$$

a) Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_3) với (d_1) và (d_2) theo thứ tự là A, B, tìm toạ độ của A, B.

c) Tính khoảng cách AB.

B. LỜI GIẢI – CHỈ DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

1. Bảng a) xác định y là hàm số của biến số x vì với mỗi giá trị của x ta xác định được một giá trị tương ứng duy nhất của y.

Bảng b) không xác định y là hàm số của x vì với mỗi giá trị xác định của x không phải khi nào cũng xác định duy nhất một giá trị tương ứng của y. Cụ thể, khi $x = 3$, y lấy giá trị là 6 và 4.

2. Với hàm số $y = f(x) = 1,2x$, dùng máy tính CASIO *fx-220* tính các giá trị của y theo x (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) ta được kết quả thể hiện ở bảng sau :

x	–2,50	–2,25	–2,00	–1,75	–1,50	–1,25	–1
y = 1,2x	–3,00	–2,70	–2,40	–2,10	–1,80	–1,50	–1,20

x	–0,75	–0,50	–0,25	0	0,25	0,50	0,75
y = 1,2x	–0,90	–0,60	–0,30	0	0,30	0,60	0,90

x	1	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
y = 1, 2x	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00

Hướng dẫn cách ấn phím :

– Ấn $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (thực hiện phép tính cho kết quả có hai chữ số ở phần thập phân).

– Ấn $\boxed{1}$ $\boxed{.}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ (để lưu hằng số 1,2 và phép tính nhân).

– Muốn tính giá trị của y, chỉ cần nhập giá trị của x vào máy rồi ấn phím $\boxed{=}$.

* *Ghi chú :* Chỉ cần tính giá trị của y tương ứng với những giá trị của x dương ($x > 0$) ; Từ đó suy ra các giá trị của y ứng với những giá trị âm của x có cùng giá trị tuyệt đối.

3. Với $y = f(x) = \dfrac{3}{4}x$, ta có :

$f(-5) = -\dfrac{15}{4}$; $f(-4) = -3$; $f(-1) = -\dfrac{3}{4}$; $f(0) = 0$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{8}$;

$f(1) = \dfrac{3}{4}$; $f(2) = \dfrac{3}{2}$; $f(4) = 3$; $f(a) = \dfrac{3a}{4}$; $f(a+1) = \dfrac{3}{4}(a+1)$.

4. Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{2}{3}x + 5$.

Chứng minh hàm số đồng biến trên **R** :

Với x_1, x_2 bất kì thuộc **R**, ta có :

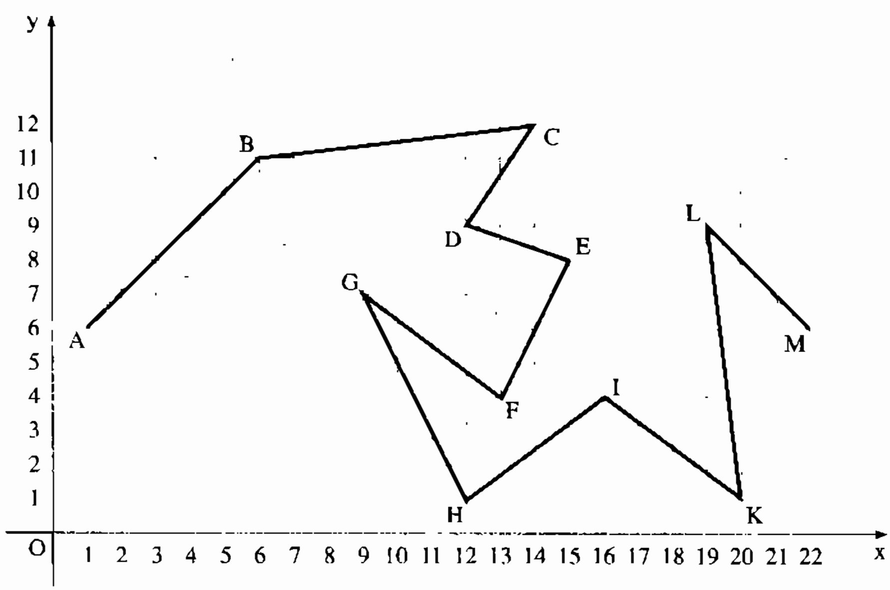
$$y_1 = f(x_1) = \frac{2}{3}x_1 + 5; \qquad y_2 = f(x_2) = \frac{2}{3}x_2 + 5.$$

Nếu $x_1 < x_2$ thì $x_1 - x_2 < 0$ và do đó

$$y_1 - y_2 = \left(\frac{2}{3}x_1 + 5\right) - \left(\frac{2}{3}x_2 + 5\right) = \frac{2}{3}(x_1 - x_2) < 0.$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên **R**.

5. Dựng hệ trục toạ độ Oxy, rồi dựng các điểm theo toạ độ của chúng, nối theo thứ tự các điểm, ta được một đường gấp khúc (h.10).



Hình 10

Bài tập bổ sung

1.1. (C).

1.2. Với x_1, x_2 là hai giá trị bất kì của x thuộc **R**, ta có :

$$y_1 = f(x_1) = 4 - \frac{2}{5}x_1 \ ; \ y_2 = f(x_2) = 4 - \frac{2}{5}x_2.$$

Nếu $x_1 < x_2$ thì $x_1 - x_2 < 0$. Khi đó ta có :

$$y_1 - y_2 = \left(4 - \frac{2}{5}x_1\right) - \left(4 - \frac{2}{5}x_2\right)$$

$$= -\frac{2}{5}(x_1 - x_2) > 0.$$ Suy ra $y_1 > y_2$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số nghịch biến trên **R**.

§2. Hàm số bậc nhất

6. a) $y = 3 - 0,5x$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = -0,5$, $b = 3$.

Đây là hàm số nghịch biến vì $a = -0,5 < 0$.

b) $y = -1,5x$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = -1,5$, $b = 0$.

Đây là hàm số nghịch biến vì $a = -1,5 < 0$.

c) $y = 5 - 2x^2$ không phải là hàm số bậc nhất.

d) $y = (\sqrt{2} - 1)x + 1$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = \sqrt{2} - 1$, $b = 1$.

Đây là hàm số đồng biến vì $a = \sqrt{2} - 1 > 0$.

e) $y = \sqrt{3}(x - \sqrt{2}) = \sqrt{3}x - \sqrt{3}.\sqrt{2} = \sqrt{3}x - \sqrt{6}$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = \sqrt{3}$; $b = -\sqrt{6}$.

Đây là hàm số đồng biến vì $a = \sqrt{3} > 0$.

f) Từ $y + \sqrt{2} = x - \sqrt{3}$ suy ra $y = x - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$, do đó y là hàm số bậc nhất đối với x, có hệ số $a = 1$, $b = -(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Đây là hàm số đồng biến vì $a = 1 > 0$.

7. Hàm số $y = (m + 1)x + 5$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = m + 1$.

a) Hàm số đồng biến khi $a = m + 1 > 0$ hay $m > -1$.

b) Hàm số nghịch biến khi $a = m + 1 < 0$ hay $m < -1$.

Chú ý : Khi $m = -1$ thì $y = 0x + 5$. Giá trị của y không thay đổi với mọi giá trị của x và luôn luôn có giá trị bằng 5. Trong trường hợp này, ta nói y là một hàm hằng.

8. Xét hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x + 1$.

Đây là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = 3 - \sqrt{2}$, $b = 1$.

a) Hàm số đã cho là hàm số đồng biến trên **R**, vì có hệ số $a = 3 - \sqrt{2} > 0$.

b) $x = 0$, $y = 1$.

$x = 1$, $y = (3 - \sqrt{2}).1 + 1 = 4 - \sqrt{2}$.

$x = \sqrt{2}$, $y = (3 - \sqrt{2}).\sqrt{2} + 1 = 3\sqrt{2} - 1$.

$x = 3 + \sqrt{2}$, $y = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) + 1 = 8$.

$x = 3 - \sqrt{2}$, $y = (3 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) + 1 = 12 - 6\sqrt{2}$.

c) • Với $y = 0$, ta có :

$$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 0 \Rightarrow (3 - \sqrt{2})x = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{-1(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{-(3 + \sqrt{2})}{7}.$$

• Với $y = 1$, ta có :

$$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 1 \Rightarrow (3 - \sqrt{2})x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (vì } 3 - \sqrt{2} \neq 0).$$

• Với $y = 8$, ta có :

$$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 8 \Rightarrow x = \frac{7}{3 - \sqrt{2}} = \frac{7(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = 3 + \sqrt{2}.$$

• Với $y = 2 + \sqrt{2}$, ta có :

$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 2 + \sqrt{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{5 + 4\sqrt{2}}{7}.$$

• Với $y = 2 - \sqrt{2}$, ta có :

$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 2 - \sqrt{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}.$$

9. Hình chữ nhật ban đầu ABCD có kích thước là AB = 40cm, AD = 25cm. Sau khi tăng mỗi kích thước của hình chữ nhật thêm x cm, ta được hình chữ nhật mới có các kích thước là

$$AB' = (40 + x)\text{cm và } AD' = (25 + x)\text{cm (h.11)}.$$

a) Ta có :

$S = (40 + x)(25 + x)$

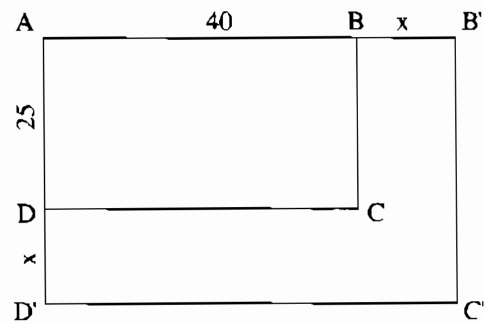
$= 1000 + 65x + x^2$; (1)

$P = 2(40 + x) + 2(25 + x)$

$= 4x + 130.$ (2)

S không phải là hàm số bậc nhất đối với x vì không có dạng ax + b.

P là hàm số bậc nhất đối với x với hệ số a = 4, b = 130.



Hình 11

b) Tính giá trị tương ứng của P theo giá trị của x, ta có bảng sau :

x	0	1	1,5	2,5	3,5
P = 4x + 130	130	134	136	140	144

10. Xét hàm số bậc nhất y = ax + b ($a \neq 0$) trên tập hợp số thực **R**.

• *Xét trường hợp* $a > 0$

Giả sử x_1, x_2 là hai giá trị bất kì của x thuộc **R** và $x_1 < x_2$. Khi đó ta có :

$$y_1 - y_2 = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2).$$

Từ giả thiết $x_1 < x_2$, suy ra $x_1 - x_2 < 0$. Từ đó suy ra $y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) < 0$.

Vậy, với $a > 0$, hàm số $y = ax + b$ là hàm số đồng biến.

• *Xét trường hợp* $a < 0$

Với hai giá trị x_1, x_2 bất kì thuộc **R** và giả sử $x_1 < x_2$, lập luận tương tự như trên ta có :

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) > 0 \text{ hay } y_1 > y_2.$$

Vậy, với $a < 0$, hàm số $y = ax + b$ là hàm số nghịch biến.

11. Ta có

a) Hàm số $y = \sqrt{m-3}\,x + \dfrac{2}{3}$ là hàm số bậc nhất khi hệ số của x là $\sqrt{m-3} \neq 0$.

$$\sqrt{m-3} \neq 0 \text{ khi } m - 3 > 0 \text{ hay } m > 3.$$

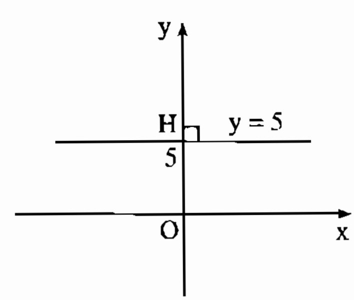
Vậy, khi $m > 3$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b) $S = \dfrac{1}{m+2}t - \dfrac{3}{4}$ là hàm số bậc nhất đối với biến số t chỉ khi hệ số $\dfrac{1}{m+2} \neq 0$.

$\dfrac{1}{m+2} \neq 0$ khi $m + 2 \neq 0$ hay $m \neq -2$.

Vậy, khi $m \neq -2$ thì S là hàm số bậc nhất của t.

12. a) Các điểm trên mặt phẳng toạ độ có tung độ bằng 5 là các điểm M(x ; 5). Vì hình chiếu vuông góc của các điểm M(x ; 5) trên trục Oy là điểm H có tung độ bằng 5 nên tập hợp các điểm M(x ; 5) là đường thẳng vuông góc với trục Oy tại điểm H có tung độ bằng 5. Nói cách khác, tập hợp các điểm M(x ; 5) là đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục tung tại điểm H có tung độ bằng 5 (h.12).



Hình 12

Phương trình của đường thẳng là y = 5 (hay y = 0.x + 5).

b) Tương tự như trên, ta có :

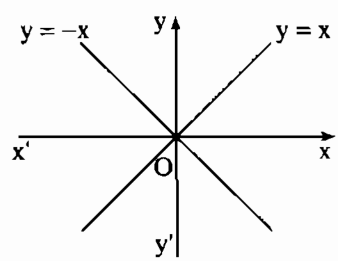
Tập hợp các điểm có hoành độ bằng 2, tung độ tuỳ ý là đường thẳng song song với trục Oy và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Phương trình của đường thẳng là x = 2.

c) Tập hợp các điểm có tung độ bằng 0 là trục hoành Ox, có phương trình là y = 0.

d) Tập hợp các điểm có hoành độ bằng 0 là trục tung Oy, có phương trình là x = 0.

e) Tập hợp các điểm trên mặt phẳng toạ độ có hoành độ bằng tung độ chính là tập hợp các điểm M(x ; y) trong đó x = y. Vì x, y cùng dấu nên M(x ; y) thuộc góc phần tư thứ I và thứ III. Mặt khác |x| = |y| nên M(x ; y) cách đều Ox và Oy.



Hình 13

Vậy tập hợp các điểm có hoành độ bằng tung độ là đường thẳng y = x chứa tia phân giác của góc xOy (h.13).

f) Tương tự như câu e), tập hợp các điểm có hoành độ và tung độ đối nhau là đường thẳng y = –x chứa tia phân giác của góc yOx' (góc phần tư thứ II và thứ IV) (h.13).

13. (h.14)

a) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$

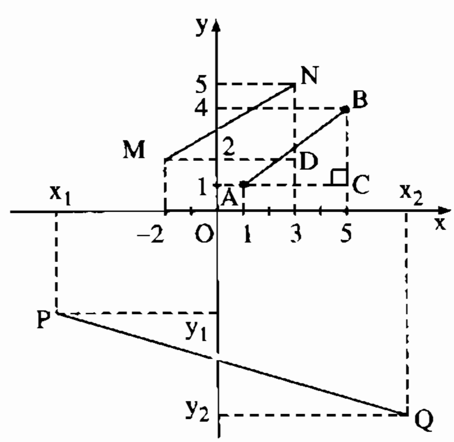
$= \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5.$

b) $MN = \sqrt{MD^2 + ND^2}$

$= \sqrt{(3+2)^2 + (5-2)^2} \approx 5{,}83.$

c) Tổng quát ta có :

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$



Hình 14

Bài tập bổ sung

2.1. (D). **2.2.** (B). **2.3.** (B).

2.4. a) $\sqrt{m}$ xác định khi $m \ge 0$ (1)

$\sqrt{m} - \sqrt{5} \ne 0$ khi $m \ge 0$ và $m \ne 5$ (2).

Vậy điều kiện để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất là $m \ge 0$ và $m \ne 5$.

b) Với điều kiện $m \ge 0$ và $m \ne 5$ thì $\sqrt{m} + \sqrt{5} > 0$. Do đó, điều kiện để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên **R** là : $\sqrt{m} - \sqrt{5} > 0$, suy ra $\sqrt{m} > \sqrt{5} \Leftrightarrow m > 5$.

§3. Đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0)

14. (h.15)

a) • Vẽ đường thẳng $y = x + \sqrt{3}$.

Trước hết tìm điểm trên Oy có tung độ bằng $\sqrt{3}$ và điểm trên Ox có hoành độ bằng $-\sqrt{3}$.

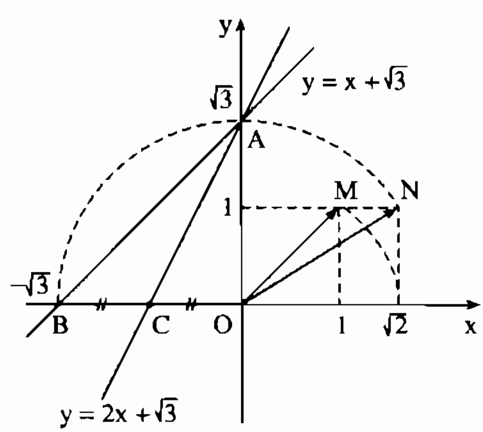
– Dựng điểm M(1 ; 1) được

$$OM = \sqrt{2}.$$

– Quay một cung tâm O, bán kính OM cắt tia Ox tại điểm trên trục Ox có hoành độ $\sqrt{2}$.

– Dựng điểm N($\sqrt{2}$; 1), được $ON = \sqrt{3}$.

– Vẽ cung tâm O bán kính $ON = \sqrt{3}$ để xác định hai điểm $A(0 ; \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3} ; 0)$. Đó là



Hình 15

hai điểm có toạ độ thoả mãn phương trình $y = x + \sqrt{3}$.

Vẽ đường thẳng qua A, B ta được đồ thị của hàm số

$$y = x + \sqrt{3}.$$

• Vẽ đường thẳng $y = 2x + \sqrt{3}$.

– Cho x = 0, tính được $y = \sqrt{3}$, ta có điểm $A(0 ; \sqrt{3})$.

– Cho y = 0, tính được $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có điểm $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; 0\right)$.

Đường thẳng qua A, C là đồ thị của hàm số $y = 2x + \sqrt{3}$.

b) Tính các góc của tam giác ABC.

$$\text{tg}(\widehat{ABC}) = 1 \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^o ;$$

$$\text{tg}(\widehat{ACO}) = 2 \Rightarrow \widehat{ACO} \approx 63^o26'.$$

Hướng dẫn : Tính góc ACO trên máy tính bỏ túi CASIO *fx-220* (hoặc CASIO *fx-500A*) như sau :

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan^{-1}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\leftarrow}$

được $\widehat{ACO} \approx 63^o26'5,82'' \approx 63^o26'$.

Tính góc ACB :

$$\widehat{ACB} = 180^o - \widehat{ACO} \quad \text{(hai góc bù nhau),}$$

$$\widehat{ACB} \approx 116^o34'.$$

Tính góc BAC :

$$\widehat{BAC} = \widehat{ACO} - \widehat{ABC} \quad \text{(góc ngoài bằng tổng hai góc trong không kề với nó),}$$

$$\widehat{BAC} \approx 63^o26' - 45^o,$$

$$\widehat{BAC} \approx 18^o26'.$$

Đáp số : $\widehat{ABC} = 45^o$; $\widehat{ACB} \approx 116^o34'$; $\widehat{BAC} \approx 18^o26'$.

15. a) Hàm số $y = (m - 3)x$ đồng biến khi $m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Hàm số $y = (m - 3)x$ nghịch biến khi $m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

b) Đồ thị của hàm số $y = (m - 3)x$ đi qua điểm $(1 ; 2)$, nên ta có :

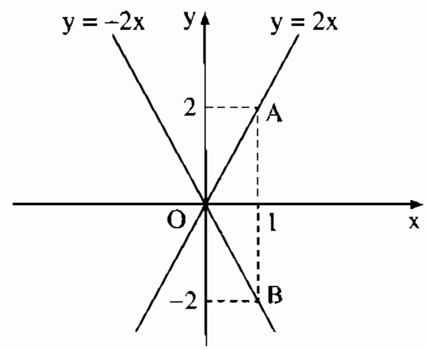
$$2 = (m - 3).1 \Rightarrow m = 5.$$

Trả lời : Khi $m = 5$, đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(1 ; 2)$.

c) Tương tự câu b), ta có :

$$-2 = (m - 3).1 \Rightarrow m = 1.$$

Trả lời : Khi $m = 1$, đồ thị của hàm số là đường thẳng đi qua điểm $(1 ; -2)$.



Hình 16

d) (h.16)

– Vẽ hệ trục toạ độ Oxy.

– Dựng các điểm $A(1 ; 2)$, $B(1 ; -2)$ trên mặt phẳng toạ độ.

– Vẽ đường thẳng qua O, A.

– Vẽ đường thẳng qua O, B.

16. a) Hàm số $y = (a - 1)x + a$ có tung độ gốc là a.

Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Vậy $a = 2$.

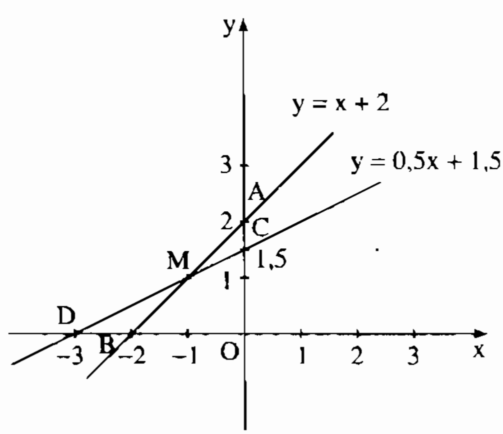
Hàm số trong trường hợp này là $y = x + 2$.

b) Hàm số $y = (a - 1)x + a$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3, do đó tung độ của điểm này bằng 0. Ta có :

$$0 = (a - 1)(-3) + a$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Hàm số trong trường hợp này có dạng : $y = 0{,}5x + 1{,}5$.



Hình 17

c) (h.17)

• Vẽ đồ thị $y = x + 2$. (1)

– Cho $x = 0$, được $y = 2$, ta có $A(0 ; 2)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = x + 2$.

– Cho $y = 0$, được $x = -2$, ta có $B(-2 ; 0)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = x + 2$.

Vẽ đường thẳng qua hai điểm $A(0 ; 2)$, $B(-2 ; 0)$ được đồ thị của hàm số (1).

• Vẽ đồ thị $y = 0,5x + 1,5$. (2)

– Cho $x = 0$, được $y = 1,5$, ta có $C(0 ; 1,5)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = 0,5x + 1,5$.

– Cho $y = 0$, được $x = -3$, ta có $D(-3 ; 0)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = 0,5x + 1,5$.

Vẽ đường thẳng qua hai điểm $C(0 ; 1,5)$, $D(-3 ; 0)$ được đồ thị của hàm số (2).

• Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng vừa vẽ :

Gọi toạ độ của giao điểm M là $(x_1 ; y_1)$, ta có $M(x_1 ; y_1)$.

– Vì $M(x_1 ; y_1)$ thuộc đường thẳng (1) nên $y_1 = x_1 + 2$. (3)

– Vì $M(x_1 ; y_1)$ thuộc đường thẳng (2) nên $y_1 = 0,5x_1 + 1,5$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra :

$$x_1 + 2 = 0,5x_1 + 1,5 \Rightarrow x_1 = -1.$$

Với $x_1 = -1$, tính được $y_1 = 1$.

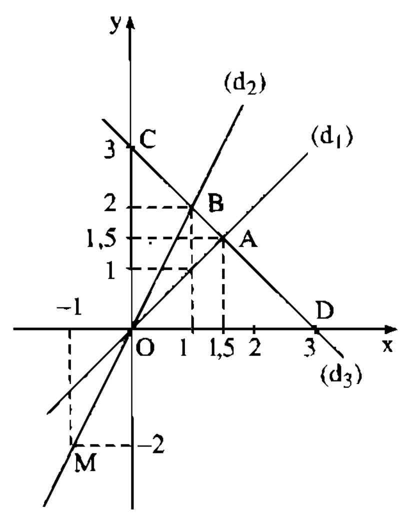
Vậy, toạ độ giao điểm M của hai đường thẳng là $M(-1 ; 1)$.

17. (h.18) a) Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ Oxy các hàm số :

$y = x$ (d_1) ;

$y = 2x$ (d_2) ;

$y = -x + 3$ (d_3) .



Hình 18

• Đồ thị của hàm số $y = x$ là đường thẳng (d_1), đó chính là đường phân giác của góc xOy.

• Đồ thị của hàm số $y = 2x$ là đường thẳng (d_2) qua $O(0 ; 0)$ và điểm $M(-1 ; -2)$.

• Đồ thị của hàm số $y = -x + 3$ là đường thẳng (d_3) đi qua hai điểm $C(0 ; 3)$ và $D(3 ; 0)$.

b) Tìm toạ độ của các điểm A, B và tính diện tích tam giác OAB.

• Vì điểm $A(x ; y)$ thuộc (d_1) và (d_3) nên ta có : $x = -x + 3 \Rightarrow x = 1{,}5$. Thay $x = 1{,}5$ vào một trong hai hàm số $y = x$, $y = -x + 3$, tính được $y = 1{,}5$.

Vậy điểm A có toạ độ là $(1{,}5 ; 1{,}5)$.

• Vì điểm $B(x ; y)$ thuộc (d_2) và (d_3) nên ta có : $2x = -x + 3 \Rightarrow x = 1$. Thay $x = 1$ vào một trong hai hàm số $y = 2x$, $y = -x + 3$, tính được $y = 2$.

Vậy điểm B có toạ độ là $(1 ; 2)$.

• Gọi diện tích của các tam giác OAB, OBD, OAD thứ tự là S_{OAB}, S_{OBD}, S_{OAD}, và áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}a.h$, ta có :

$$S_{OAB} = S_{OBD} - S_{OAD} = \frac{1}{2}.3.2 - \frac{1}{2}.3.1{,}5 = \frac{1}{2}.3(2 - 1{,}5) = 0{,}75.$$

Vậy số đo diện tích tam giác OAB bằng 0,75 (đơn vị diện tích).

Chú ý : Nếu đơn vị đo trên các trục Ox, Oy là cm thì diện tích tam giác OAB bằng $0{,}75\ cm^2$.

Bài tập bổ sung

3.1. a) (C) ; b) (D).

3.2. (B).

3.3. • Trước hết tìm giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

– Tìm hoành độ của giao điểm :

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 15.$$

– Tìm tung độ của giao điểm :

$$y = \frac{2}{5}.15 + \frac{1}{2} = 6{,}5.$$

• Tìm k (bằng cách thay toạ độ của giao điểm vào phương trình (d_3)) :

$$6,5 = k.15 + 3,5 \Leftrightarrow 15k = 3 \Leftrightarrow k = 0,2.$$

Trả lời : Khi k = 0,2 thì ba đường thẳng đồng quy tại điểm (15 ; 6,5).

3.4. a) • Gọi phương trình đường thẳng AB là y = ax + b.

Toạ độ các điểm A, B phải thoả mãn phương trình y = ax + b nên ta có :

$$\begin{cases} 7 = a.7 + b \\ 5 = a.2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ b = \dfrac{21}{5}. \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng AB là $y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{21}{5}$.

• Gọi phương trình của đường thẳng BC là y = a'x + b'.

Tương tự như trên ta có :

$$\begin{cases} 5 = a'.2 + b' \\ 2 = a'.5 + b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = -1 \\ b' = 7. \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng BC là y = −x + 7.

• Gọi phương trình của đường thẳng AC là y = a"x + b".

Tương tự như trên ta có :

$$\begin{cases} 7 = a''.7 + b'' \\ 2 = a''.5 + b'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'' = \dfrac{5}{2} \\ b'' = -\dfrac{21}{2}. \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng AC là $y = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{21}{2}$.

b) • Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông lần lượt có các cạnh huyền là AB, AC, BC và sử dụng máy tính bỏ túi, tính được AB ≈ 5,39cm ; AC ≈ 5,39cm ; BC ≈ 4,24cm.

Do đó chu vi của tam giác ABC là AB + BC + CA ≈ 15,02cm.

• Diện tích tam giác ABC bằng diện tích hình vuông cạnh dài 5cm trừ đi tổng diện tích ba tam giác vuông xung quanh (có các cạnh huyền lần lượt là AB, BC, CA). Tính được : $S_{ABC} = 10,5(cm^2)$.

§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

18. a) Đường thẳng $y = ax + 3$ song song với đường thẳng $y = -2x$ suy ra $a = -2$.

b) Khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì hàm số $y = ax + 3$ có giá trị tương ứng là $2 + \sqrt{2}$ vậy ta phải có :

$$2 + \sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2}) + 3 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

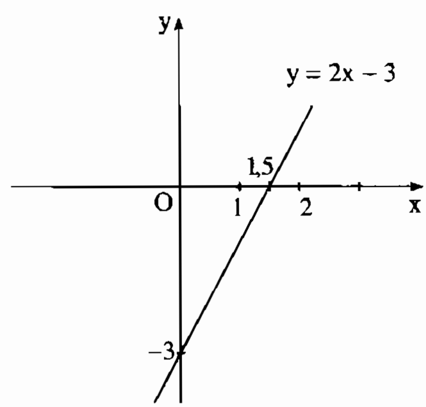
19. (h.19)

a) Với $x = 4$, hàm số $y = 2x + b$ có giá trị là 5. Do đó, ta có :

$$5 = 2.4 + b \Rightarrow b = -3.$$

b) Theo trên, ta có $y = 2x - 3$.

Đồ thị của hàm số $y = 2x - 3$ là đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 ; cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1,5$.



Hình 19

20. Thay các giá trị của x, y vào (1), ta có :

$$3 + \sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2}) + 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2}.$$

21. Xác định hàm số $y = ax + b$ thực chất là xác định các hệ số a và b.

• Vì đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 nên $b = 3$.

• Vì đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 nên tung độ y của giao điểm bằng 0, ta có :

$$0 = a(-2) + 3 \Rightarrow a = 1,5.$$

Vậy, ta có hàm số $y = 1,5x + 3$.

22. a) Đường thẳng qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Vì đường thẳng qua điểm $A(3 ; 2)$ nên toạ độ của điểm A phải thoả mãn $y = ax$, có nghĩa là :

$$2 = a.3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}.$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{2}{3}x$.

b) Đường thẳng qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Vì đường thẳng có hệ số a bằng $\sqrt{3}$ nên ta có : $a = \sqrt{3}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \sqrt{3}x$.

c) Đường thẳng qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Đường thẳng $y = ax$ song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên ta có : $a = 3$.

Vậy hàm số cần tìm là : $y = 3x$.

23. Giả sử đường thẳng đi qua A và B có dạng : $y = ax + b$. Khi đó :

– Điểm $A(1 ; 2)$ thuộc đường thẳng $y = ax + b$ khi và chỉ khi

$$2 = a.1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 2 - a. \tag{1}$$

– Điểm $B(3 ; 4)$ thuộc đường thẳng $y = ax + b$ khi và chỉ khi

$$4 = a.3 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 4 - 3a. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$2 - a = 4 - 3a \quad \Leftrightarrow \quad a = 1.$$

Thay $a = 1$ vào (1 ta có $b = 1$.

Vậy :

a) Hệ số a của đường thẳng đi qua A và B là 1 ;

b) Hàm số $y = x + 1$ có đồ thị là đường thẳng đi qua A và B.

24. a) Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua gốc toạ độ khi $b = 0$, nên đường thẳng $y = (k + 1)x + k$ qua gốc toạ độ khi $k = 0$, khi đó hàm số là $y = x$.

b) Đường thẳng $y = ax + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b. Do đó, đường thẳng

$$y = (k + 1)x + k$$

cắt trục tung tại điểm có tung độ là $1 - \sqrt{2}$ khi

$$k = 1 - \sqrt{2}.$$

Hàm số trong trường hợp này là

$$y = (2 - \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2}).$$

c) Đường thẳng

$$y = (k + 1)x + k$$

song song với đường thẳng

$$y = \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 3$$

khi và chỉ khi $k + 1 = \sqrt{3} + 1$ và $k \neq 3$.

Suy ra $k = \sqrt{3}$ và hàm số là $y = (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$.

Bài tập bổ sung

4.1. (D).

4.2. (C).

4.3. (B).

4.4. a) Để biểu thức ở vế phải xác định thì $k \geq 0$.

Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $2\sqrt{3}$ khi :

$$\sqrt{k} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{k} = \sqrt{3} \Rightarrow k = 3.$$

b) Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 khi :

$$\frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{3} - 1}.1 + \sqrt{k} + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k} + 1 + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{k} + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k} + 1 + \sqrt{3}\sqrt{k} + \sqrt{3}.\sqrt{3} - \sqrt{k} - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{k} + 4 - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{k} = \frac{\sqrt{3} - 4}{\sqrt{3}} < 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy đường thẳng (d) không cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 với mọi giá trị của $k \geq 0$.

Nói cách khác, họ đường thẳng $y = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{3} - 1}x + \sqrt{k} + \sqrt{3}$ không bao giờ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

c) Gọi điểm cố định mà các đường thẳng (d) đều đi qua là $P(x_o, y_o)$.

Ta có :

$$y_o = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{3} - 1}.x_o + \sqrt{k} + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow y_o(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{k} + 1)x_o + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{k} + \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow y_o(\sqrt{3} - 1) = (x_o + \sqrt{3} - 1)\sqrt{k} + x_o + 3 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (x_o + \sqrt{3} - 1)\sqrt{k} + x_o + 3 - \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})y_o = 0. \ (*)$$

Phương trình (*) nghiệm đúng với mọi giá trị không âm của $\sqrt{k}$, do đó ta có :

$$\begin{cases} x_o + \sqrt{3} - 1 = 0 \\ x_o + 3 - \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\,y_o = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = 1 - \sqrt{3} \\ y_o = \sqrt{3} - 1. \end{cases}$$

Vậy, với $k \geq 0$, các đường thẳng (d) đều đi qua điểm cố định $P(1 - \sqrt{3}\,; \sqrt{3} - 1)$.

§5. Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b

25. a) Đường thẳng đi qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$.

Vì đường thẳng $y = ax$ qua điểm $A(2\,;1)$ nên ta có :

$$1 = a.2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Vậy hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và điểm $A(2\ ;\ 1)$ là $\frac{1}{2}$.

b) Đường thẳng qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Vì đường thẳng qua điểm $B(1\ ;\ -2)$ nên toạ độ của điểm B phải thoả mãn :

$$-2 = a.1 \Rightarrow a = -2.$$

Vậy hệ số góc cần tìm là -2.

c) (h.20)

Vẽ đồ thị của hai hàm số

$$y = \frac{1}{2}x \text{ và } y = -2x$$

trên cùng hệ trục toạ độ Oxy.

– Dựng điểm $A(2\ ;\ 1)$ và $B(1\ ;\ -2)$.

– Kẻ đường thẳng qua O, A ta được đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$.

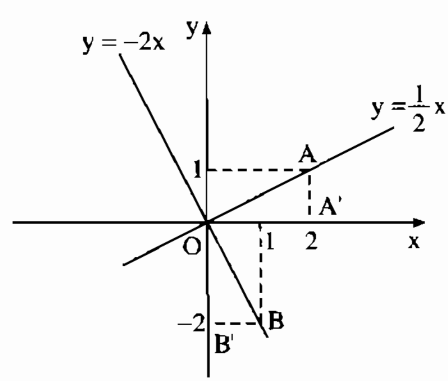
– Kẻ đường thẳng qua O, B ta được đồ thị của hàm số $y = -2x$.

• Gọi A' là hình chiếu của A trên Ox, B' là hình chiếu của B trên Oy. Hai tam giác OBB' và OAA' bằng nhau (vì có hai cặp cạnh góc vuông bằng nhau), nên ta có các góc tương ứng bằng nhau :

$$\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'}$$

mà $\widehat{BOB'} + \widehat{BOA'} = 90^\circ$ (vì $Ox \perp Oy$)

nên $\widehat{BOA'} + \widehat{A'OA} = 90^\circ$.



Hình 20

Vậy hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

26. (h.21)

Cho hai đường thẳng :

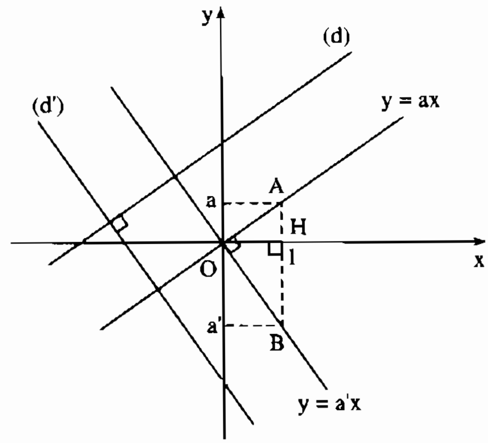
$y = ax + b$; (d)

$y = a'x + b'$. (d')

Ta phải chứng minh

(d) $\perp$ (d') $\Leftrightarrow a.a' = -1$.

Qua O kẻ các đường thẳng song song với (d) và (d'). Các đường thẳng này tương ứng sẽ là $y = ax$ và $y = a'x$.



Hình 21

• Trước hết, ta chứng minh rằng nếu (d) $\perp$ (d') thì $a.a' = -1$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử a > 0, suy ra a' < 0 (vì các góc tạo bởi đường thẳng $y = ax$ và $y = a'x$ với tia Ox hơn kém nhau 90^o).

Đường thẳng $y = ax$ đi qua điểm A(1 ; a).

Đường thẳng $y = a'x$ đi qua điểm B(1 ; a').

Dễ thấy AB $\perp$ Ox tại điểm H có hoành độ bằng 1.

Vì (d) $\perp$ (d') (theo giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^o \Rightarrow HA.HB = OH^2$ hay $a.|a'| = 1 \Rightarrow -a.a' = 1 \Rightarrow a.a' = -1$ (đpcm).

• Ta chứng minh điều ngược lại : Nếu $a.a' = -1$ thì (d) $\perp$ (d').

Thật vậy, từ $a.a' = -1 \Rightarrow a.|a'| = 1 \Rightarrow HA.HB = OH^2 \Rightarrow \dfrac{HA}{OH} = \dfrac{OH}{HB}$

$\Rightarrow \Delta HOA \backsim \Delta HBO \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{OBH}$

mà $\widehat{OBH} + \widehat{HOB} = 90^o \Rightarrow \widehat{AOH} + \widehat{HOB} = \widehat{AOB} = 90^o$, từ đó suy ra (d) $\perp$ (d').

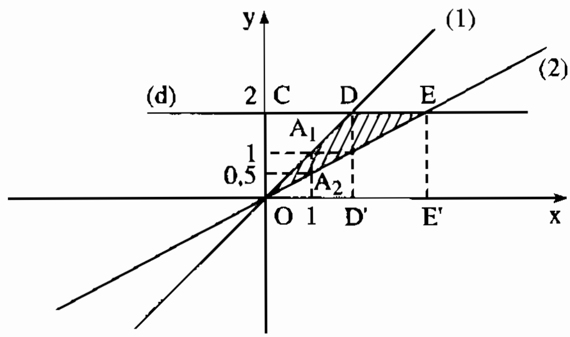
Vậy ta có đpcm.

27. (h.22)

a) Dựng các điểm $A_1(1\ ;\ 1)$ và $A_2(1\ ;\ 0,5)$, lần lượt vẽ đường thẳng qua O và A_1, đường thẳng qua O và A_2 được hai đường thẳng (1) và (2) là đồ thị của các hàm số

$y = x\ ;$ (1)

$y = 0,5x.$ (2)



Hình 22

b) Qua điểm C trên trục tung Oy có tung độ bằng 2, vẽ đường thẳng (d) song song với trục Ox. Đường thẳng (d) theo thứ tự cắt các đường thẳng (1) và (2) tại D và E.

– Tính toạ độ của D : Điểm D thuộc đường thẳng (d) nên có tung độ y = 2. Thay giá trị y = 2 vào phương trình (1), tính được x = 2.

Vậy ta có : D(2 ; 2).

– Tính toạ độ của E : Tương tự, điểm E có tung độ y = 2.

Thay giá trị y = 2 vào (2) tính được x = 4.

Ta có điểm E(4 ; 2).

Gọi hình chiếu của D trên Ox là D', của E trên Ox là E'. Ta có :

$$OD' = 2\ ;\ OE' = 4$$

$$OD^2 = OD'^2 + DD'^2 \Rightarrow OD = \sqrt{OD'^2 + DD'^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$OE^2 = OE'^2 + EE'^2 \Rightarrow OE = \sqrt{OE'^2 + EE'^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$DE = OE' - OD' \Rightarrow DE = 4 - 2 = 2.$$

Chu vi của tam giác ODE bằng $(\sqrt{8} + \sqrt{20} + 2)$ (đơn vị dài).

Diện tích tam giác ODE bằng $\frac{1}{2}DE.OC = \frac{1}{2}.2.2 = 2$ (đơn vị diện tích).

28. (h.23)

a) – Vẽ đồ thị

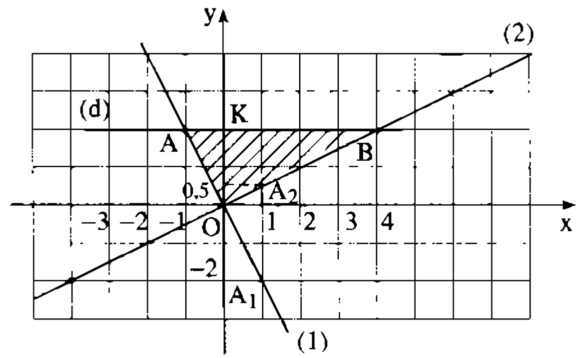
$$y = -2x. \qquad (1)$$

Cho $x = 1$, $y = -2.1 = -2$ đường thẳng $y = -2x$ qua gốc toạ độ $O(0 ; 0)$ và điểm $A_1(1 ; -2)$.

– Vẽ đồ thị

$$y = 0{,}5x. \qquad (2)$$

Cho $x = 1$, $y = 0{,}5.1 = 0{,}5$.



Hình 23

Đường thẳng $y = 0{,}5x$ qua gốc toạ độ $O(0 ; 0)$ và điểm $A_2(1 ; 0{,}5)$.

b) Gọi $A(x ; 2)$ là giao điểm của đường thẳng (1) và đường thẳng (d), ta có :

$$-2.x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{-2} = -1.$$

Vậy ta có $A(-1 ; 2)$.

Gọi $B(x ; 2)$ là giao điểm của đường thẳng (2) và đường thẳng (d), ta có :

$$0{,}5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{0{,}5} = 4.$$

Vậy ta có $B(4 ; 2)$.

c) *Ta đã biết : Nếu* $a.a' = -1$ *thì hai đường thẳng* $y = ax$ *và* $y = a'x$ *vuông góc với nhau (Bài tập 26).*

Xét hai đường thẳng $y = -2x$ và $y = 0{,}5x$:

Vì $(-2) . (0{,}5) = -1$ nên hai đường thẳng này vuông góc với nhau.

Bằng phương pháp minh hoạ hình học, xét hai tam giác vuông ở K (OAK và BOK), ta có :

$$\frac{AK}{OK} = \frac{OK}{BK} \left(\text{vì } \frac{1}{2} = \frac{2}{4}\right),$$

suy ra $\Delta OAK \backsim \Delta BOK$.

Từ đó, ta có :

$$\widehat{AOK} = \widehat{OBK}$$

mà $\widehat{OBK} + \widehat{KOB} = 90^o$ nên $\widehat{AOK} + \widehat{KOB} = 90^o$.

29. Ta phải chứng minh họ đường thẳng

$$y = mx + (2m + 1) \qquad (1)$$

luôn đi qua một điểm cố định nào đó.

Giả sử điểm $M(x_0 ; y_0)$ là điểm mà họ đường thẳng (1) luôn luôn đi qua với mọi m, thế thì toạ độ (x_0, y_0) của điểm M phải thoả mãn (1) với mọi m. Nghĩa là với mọi số thực m, ta có :

$$y_0 = mx_0 + (2m + 1) \Leftrightarrow (x_0 + 2)m + (1 - y_0) = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) nghiệm đúng với mọi giá trị của ẩn m, do đó phải có các hệ số đều bằng 0, nghĩa là :

$$x_0 + 2 = 0 \text{ và } 1 - y_0 = 0.$$

Suy ra $x_0 = -2$ và $y_0 = 1$.

Vậy ta có điểm $M(-2 ; 1)$ là điểm cố định mà họ đường thẳng (1) luôn luôn đi qua với mọi số thực m.

Bài tập bổ sung

5.1. a) (C) ;

b) (D).

5.2. a) (C) ;

b) (D).

5.3. a) (A) ;

b) (C).

5.4. a) Phương trình của đường thẳng AB có dạng

$$y = ax + b.$$

Do đường thẳng đi qua $A(4 ; 5)$ và $B(1 ; -1)$ nên ta có :

$$5 = a.4 + b \qquad (1)$$

$$-1 = a.1 + b \qquad (2)$$

Trừ từng vế của (1) và (2), ta có :

$6 = 3a \Rightarrow a = 2.$

Thay a = 2 vào (1) để tìm b, ta có :

$5 = 2.4 + b \Rightarrow b = -3.$

Vậy phương trình của đường thẳng AB là

$$y = 2x - 3.$$

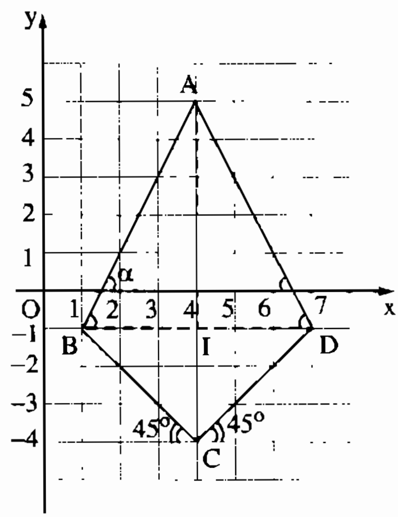
Làm tương tự như trên, ta có :

Phương trình của đường thẳng BC là

$$y = -x.$$

Phương trình của đường thẳng CD là

$$y = x - 8.$$



Hình bs. 3

Phương trình của đường thẳng DA là $y = -2x + 13$.

b) (h.bs. 3) Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại I.

– Đường thẳng AB có hệ số góc bằng 2, do đó ta có

$\mathrm{tg}\alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63^o26'$ (tính trên máy tính bỏ túi).

Suy ra $\widehat{ABD} \approx 63^o26'$.

Tam giác ABD cân, nên cũng có $\widehat{ADB} \approx 63^o26'$.

Từ đó suy ra $\widehat{BAD} = 180^o - 2.\widehat{ABD} \approx 53^o8'$.

Đường thẳng BC có hệ số góc bằng –1 nên BC là phân giác của góc vuông phần tư thứ tư của mặt phẳng toạ độ Oxy.

Đường thẳng CD có hệ số góc bằng 1, do đó CD song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Từ đó suy ra : $\widehat{BCD} = 180^o - 45^o - 45^o = 90^o$.

Và do đó : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = (360^o - \widehat{BCD} - \widehat{BAD}) : 2 \approx 108^o26'$.

Ôn tập chương II

30. a) Hàm số $y = (m + 6)x - 7$ đồng biến khi hệ số của x dương, nghĩa là :

$$m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -6.$$

Trả lời : Với $m > -6$ thì hàm số $y = (m + 6)x - 7$ đồng biến.

b) Hàm số $y = (-k + 9)x + 100$ nghịch biến khi hệ số của x âm, nghĩa là :

$$9 - k < 0 \Leftrightarrow k > 9.$$

Trả lời : Với $k > 9$ thì hàm số $y = (-k + 9)x + 100$ nghịch biến.

31. Hai đường thẳng $y = 12x + (5 - m)$ và $y = 3x + (3 + m)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung, nghĩa là chúng có cùng tung độ gốc vì thế phải có :

$$3 + m = 5 - m$$

$$\Leftrightarrow 2m = 2 \Leftrightarrow m = 1.$$

Trả lời : Khi $m = 1$, hai hàm số đã cho là $y = 12x + 4$ và $y = 3x + 4$ và đồ thị của chúng cắt nhau tại một điểm trên trục tung có tung độ bằng 4.

32. Hai đường thẳng

$$y = (a - 1)x + 2 \text{ và } y = (3 - a)x + 1$$

có tung độ gốc khác nhau (vì $b = 2$ và $b' = 1$ nên $b \neq b'$).

Do đó, chúng song song với nhau khi và chỉ khi $a - 1 = 3 - a$. Suy ra $a = 2$.

Trả lời : Khi $a = 2$ thì hai đường thẳng đã cho song song với nhau.

33. Hai đường thẳng $y = kx + (m - 2)$ và $y = (5 - k)x + (4 - m)$ trùng nhau khi và chỉ khi :

$$k = 5 - k \quad \text{và} \quad m - 2 = 4 - m.$$

Suy ra $k = 2,5$ và $m = 3$.

Trả lời : Khi $k = 2,5$ và $m = 3$ thì hai đường thẳng đã cho trùng nhau.

34. a) $y = (1 - 4m)x + m - 2$ (d)

là hàm số bậc nhất và có đồ thị là đường thẳng đi qua gốc toạ độ khi :

$$1 - 4m \neq 0 \qquad (1)$$

và $$m - 2 = 0. \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra $m \neq \frac{1}{4}$; từ (2) suy ra m = 2.

Trả lời : Với m = 2 thì đường thẳng (d) đi qua gốc toạ độ.

b) Nếu $1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$ thì (d) tạo với trục Ox một góc nhọn.

Nếu $1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$ thì (d) tạo với trục Ox một góc tù.

Trả lời : Với $m < \frac{1}{4}$ thì đường thẳng (d) tạo với trục Ox một góc nhọn.

Với $m > \frac{1}{4}$ thì đường thẳng (d) tạo với trục Ox một góc tù..

c) Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{3}{2}$ khi :

$$m - 2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Trả lời : Với $m = 3\frac{1}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{3}{2}$.

d) Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$ khi :

$$0 = (1 - 4m)\frac{1}{2} + m - 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} - 2m + m - 2 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Trả lời : $m = -\frac{3}{2}$ thì (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

35. a) Đường thẳng $y = (m - 2)x + n$ (d) đi qua hai điểm $A(-1 ; 2)$ và $B(3 ; -4)$. Khi đó toạ độ của các điểm A, B thoả mãn (d), nghĩa là :

$$2 = (m - 2)(-1) + n \quad (1)$$

và
$$-4 = (m - 2).3 + n. \quad (2)$$

Rút gọn hai phương trình (1) và (2), ta được

$$-m + n = 0\ ; \qquad (1')$$

$$3m + n = 2. \qquad (2')$$

Từ (1') suy ra n = m. Thay vào (2'), ta có 3m + m = 2 suy ra $m = \frac{1}{2}$.

Trả lời : Khi $m = n = \frac{1}{2}$ thì (d) đi qua hai điểm A và B đã cho.

b) Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$ nên ta có $n = 1 - \sqrt{2}$.

Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $2 + \sqrt{2}$, nên ta có :

$$0 = (m-2)(2+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow m - 2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}} + 2 = \frac{3+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{3(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Trả lời : Khi $n = 1 - \sqrt{2}$ và $m = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $2 + \sqrt{2}$.

c) Ta có :

$$y = 0{,}5x - 1{,}5. \qquad (d_1)$$

Đường thẳng (d) cắt (d_1) khi $m - 2 \neq 0{,}5$, còn n lấy giá trị tuỳ ý. Suy ra (d) cắt (d_1) khi $m \neq 2{,}5$ còn n tuỳ ý.

Trả lời : (d) cắt (d_1) khi $m \neq 2{,}5$ và n tuỳ ý.

d) Ta có

$$y = -1{,}5x + 0{,}5\ . \qquad (d_2)$$

Đường thẳng

$$y = (m-2)x + n \qquad (d)$$

song song với (d_2) khi :

$$m - 2 = -1,5 \text{ và } n \neq 0,5$$

hay $m = 0,5$ và $n \neq 0,5$.

Trả lời : (d) song song với (d_2) khi $m = 0,5$ và $n \neq 0,5$.

e) Ta có : $y = 2x - 3.$ (d_3)

Đường thẳng (d) trùng với (d_3) khi : $m - 2 = 2$ và $n = -3$

hay $m = 4$ và $n = -3$.

Trả lời : Khi $m = 4$ và $n = -3$ thì hai đường thẳng (d) và (d_3) trùng nhau.

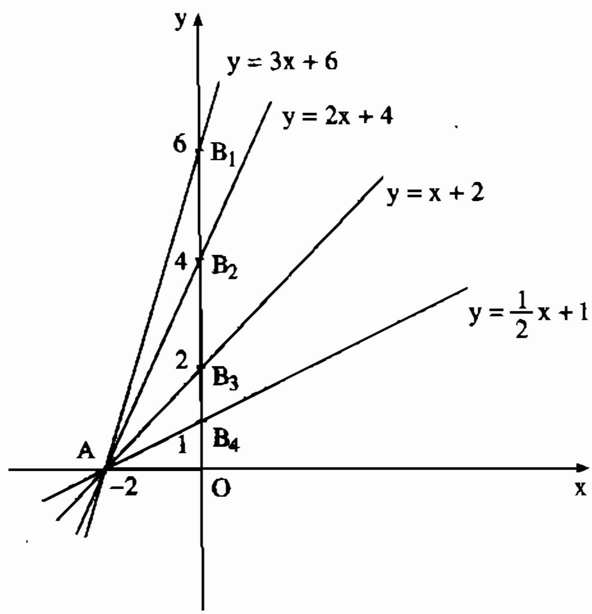
36. (h.24)

a) – Đồ thị của hàm số $y = 3x + 6$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B_1(0 ; 6)$.

– Đồ thị của hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B_2(0 ; 4)$.

– Đồ thị của hàm số $y = x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B_3(0 ; 2)$.

– Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x + 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B_4(0 ; 1)$.



Hình 24

b) Gọi $\widehat{B_1Ax} = \alpha_1$, $\widehat{B_2Ax} = \alpha_2$, $\widehat{B_3Ax} = \alpha_3$, $\widehat{B_4Ax} = \alpha_4$. Dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx*-220 tính $tg\alpha_1, tg\alpha_2, tg\alpha_3, tg\alpha_4$ và suy ra các góc tương ứng. Ta có :

$$tg\alpha_1 = 3 \Rightarrow \alpha_1 \approx 71^o33'54,18''.$$

$$tg\alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 \approx 63^o26'5,82''.$$

$$\text{tg}\alpha_3 = 1 \Rightarrow \alpha_3 \approx 45^\circ.$$

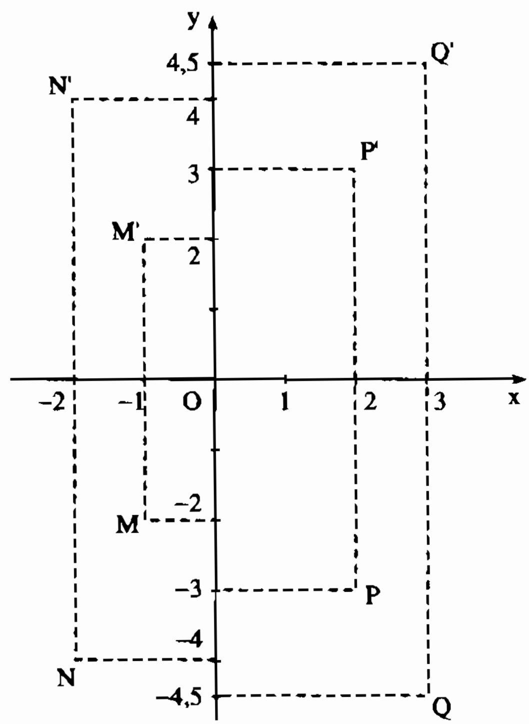
$$\text{tg}\alpha_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_4 \approx 26^\circ 33' 54{,}18".$$

c) Từ sự tăng dần của các hệ số góc : $\frac{1}{2} < 1 < 2 < 3$ và sự tăng dần của các góc α :

$$26^\circ 33' < 45^\circ < 63^\circ 26' < 71^\circ 33',$$

rút ra nhận xét :

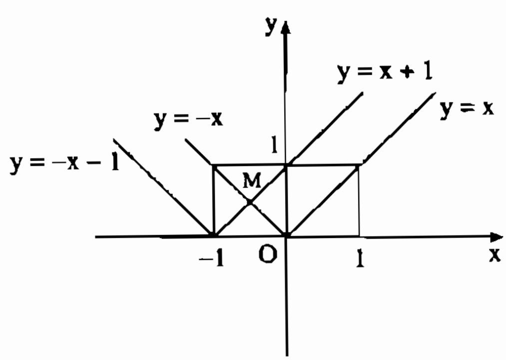
Với $a > 0$, khi a càng lớn thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và tia Ox càng lớn, và do đó độ dốc của đường thẳng (so với trục nằm ngang Ox) càng lớn.



Hình 25

37. a) (h.25) Gọi M', N', P', Q' là các điểm lần lượt đối xứng với các điểm M, N, P, Q qua trục Ox, ta thấy rằng hoành độ của các điểm đối xứng nhau qua trục hoành bằng nhau, còn tung độ của các điểm đó thì đối nhau : M'(–1 ; 2) ; N'(–2 ; 4) ; P'(2 ; 3) ; Q'(3 ; 4,5).

b) (h.26)



Hình 26

$$\bullet\ y = |x| = \begin{cases} x \text{ khi } x \ge 0 \\ -x \text{ khi } x \le 0. \end{cases}$$

Ta vẽ đồ thị $y = x$ với $x \ge 0$.

Vẽ đồ thị $y = -x$ với $x \le 0$.

• $y = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 \text{ với } x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -(x + 1) \text{ với } x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1. \end{cases}$

Ta vẽ đồ thị $y = x + 1$ với $x \geq -1$.

Vẽ đồ thị $y = -x - 1$ với $x \leq -1$.

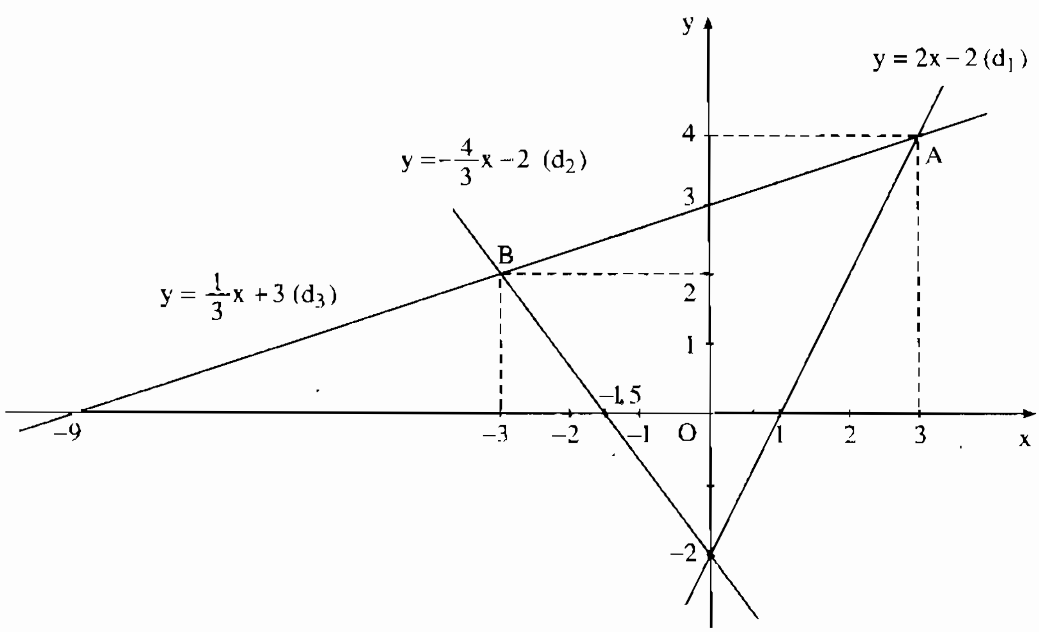
c) (h.26). Đồ thị $y = -x$ cắt đồ thị $y = x + 1$ tại điểm $M(x_0 ; y_0)$. Vì M thuộc cả hai đồ thị nên toạ độ của M phải thoả mãn các hàm số, nghĩa là :

$$y_0 = -x_0 = x_0 + 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right).$$

Đồ thị $y = |x|$ và đồ thị $y = |x + 1|$ chỉ cắt nhau tại một điểm duy nhất $M\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Suy ra phương trình $|x| = |x + 1|$ chỉ có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{2}$.

38. (h.27)



Hình 27

a) Đường thẳng (d_1) : $y = 2x - 2$ đi qua hai điểm $(0 ; -2)$ và $(1 ; 0)$.

Đường thẳng (d_2) : $y = -\frac{4}{3}x - 2$ đi qua hai điểm $(0 ; -2)$ và $(-1,5 ; 0)$.

Đường thẳng (d_3) : $y = \frac{1}{3}x + 3$ đi qua hai điểm $(0 ; 3)$ và $(-9 ; 0)$.

b) Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1) và (d_2) thứ tự tại A, B.

• Tìm toạ độ của $A(x_1 ; y_1)$.

Vì điểm A thuộc cả hai đường thẳng (d_1) và (d_3) nên ta có :

$$y_1 = 2x_1 - 2 = \frac{1}{3}x_1 + 3 \Rightarrow x_1 = 3 ; y_1 = 4 \Rightarrow A(3 ; 4).$$

• Tìm toạ độ của $B(x_2 ; y_2)$.

Vì điểm B thuộc cả hai đường thẳng (d_2) và (d_3) nên ta có :

$$y_2 = -\frac{4}{3}x_2 - 2 = \frac{1}{3}x_2 + 3 \Rightarrow x_2 = -3 ; y_2 = 2 \Rightarrow B(-3 ; 2).$$

c) Sử dụng kết quả bài 13,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2}.$$

$AB = \sqrt{40} \approx 6,32$ (đơn vị dài trên trục toạ độ).

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Trong các bài tập tính toán bằng số của chương này,
các số đo độ dài ở mỗi bài nếu không ghi đơn vị ta quy ước là cùng đơn vị đo.

A. ĐỀ BÀI

§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Hãy tính x và y trong các hình sau :

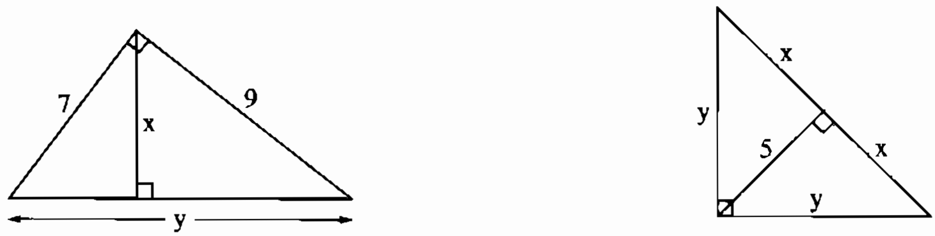
1. (h.1 a, b)

Hình 1

2. (h.2 a, b)

Hình 2

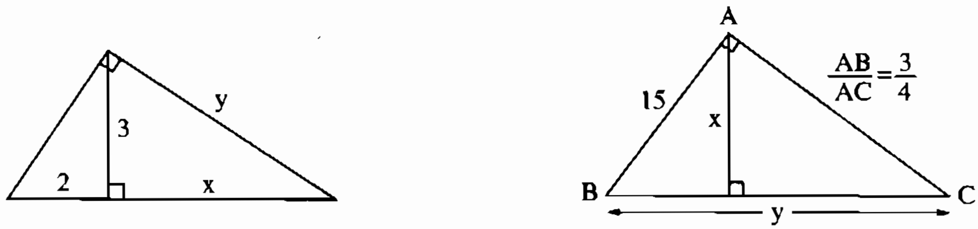
3. (h.3 a, b)



a) b)

Hình 3

4. (h.4 a, b)



a) b)

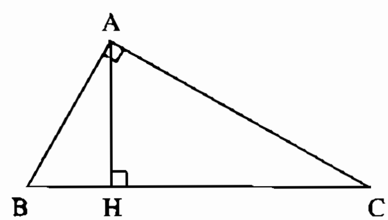
Hình 4

5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (h.5).

Giải bài toán trong mỗi trường hợp sau :

a) Cho AH = 16 , BH = 25. Tính AB, AC, BC, CH ;

b) Cho AB = 12, BH = 6. Tính AH, AC, BC, CH.



Hình 5

6. Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 5 và 7, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và các đoạn thẳng mà nó chia ra trên cạnh huyền.

7. Đường cao của một tam giác vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 3 và 4. Hãy tính các cạnh góc vuông của tam giác này.

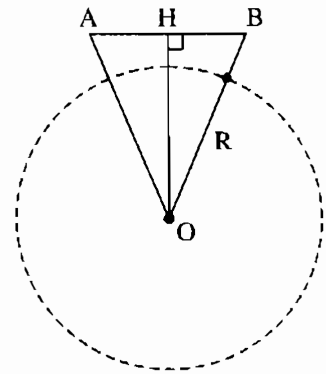
8. Cạnh huyền của một tam giác vuông lớn hơn một cạnh góc vuông là 1cm và tổng của hai cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền 4cm. Hãy tính các cạnh của tam giác vuông này.

9. Một tam giác vuông có cạnh huyền là 5 và đường cao ứng với cạnh huyền là 2. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.

10. Cho một tam giác vuông. Biết tỉ số hai cạnh góc vuông là 3 : 4 và cạnh huyền là 125cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông và hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$, đường cao AH = 30cm. Tính HB, HC.

12. Hai vệ tinh đang bay ở vị trí A và B cùng cách mặt đất 230km có nhìn thấy nhau hay không nếu khoảng cách giữa chúng theo đường thẳng là 2200km ? Biết rằng bán kính R của Trái Đất gần bằng 6370km và hai vệ tinh nhìn thấy nhau nếu OH > R (h.6).



Hình 6

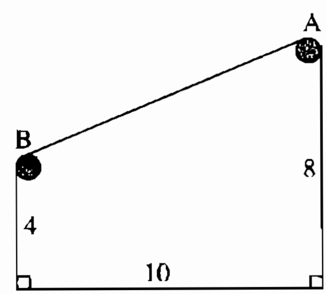
13. Cho hai đoạn thẳng có độ dài là a và b. Dựng các đoạn thẳng có độ dài tương ứng bằng :

a) $\sqrt{a^2 + b^2}$;

b) $\sqrt{a^2 - b^2}$ (a > b).

14. Cho hai đoạn thẳng có độ dài là a và b. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{ab}$ như thế nào ?

15. Giữa hai toà nhà (kho và phân xưởng) của một nhà máy người ta xây dựng một băng chuyền AB để chuyển vật liệu. Khoảng cách giữa hai toà nhà là 10m, còn hai vòng quay của băng chuyền được đặt ở độ cao 8m và 4m so với mặt đất (h.7). Tìm độ dài AB của băng chuyền.



Hình 7

16. Cho tam giác có độ dài các cạnh là 5, 12, 13. Tìm góc của tam giác đối diện với cạnh có độ dài 13.

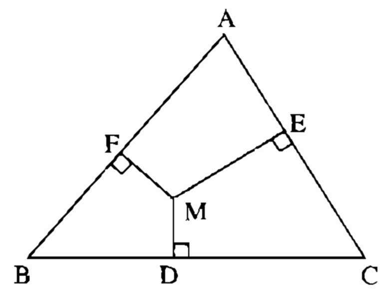
17. Cho hình chữ nhật ABCD. Đường phân giác của góc B cắt đường chéo AC thành hai đoạn $4\frac{2}{7}$m và $5\frac{5}{7}$m. Tính các kích thước của hình chữ nhật.

18. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ đường cao AH. Chu vi của tam giác ABH là 30cm và chu vi tam giác ACH là 40cm. Tính chu vi của tam giác ABC.

19. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh AB = 6cm và AC = 8cm. Các đường phân giác trong và ngoài của góc B cắt đường thẳng AC lần lượt tại M và N. Tính các đoạn thẳng AM và AN.

20. Cho tam giác ABC. Từ một điểm M bất kì trong tam giác kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các cạnh BC, CA, AB (h.8). Chứng minh rằng

$BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$.



Hình 8

Bài tập bổ sung

1.1. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB : AC = 3 : 4 và đường cao AH bằng 9cm. Khi đó độ dài đoạn thẳng HC bằng

(A) 6cm ; (B) 9cm ; (C) 12cm ; (D) 15cm.

Hãy chọn phương án đúng.

1.2. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB : AC = 4 : 5 và đường cao AH bằng 12cm. Khi đó độ dài đoạn thẳng HB bằng

(A) 6cm ; (B) 9,6cm ; (C) 12cm ; (D) 15cm.

Hãy chọn phương án đúng.

• Trong các bài (1.3, 1.4, 1.5) ta sẽ sử dụng các kí hiệu sau đây đối với tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH :

AB = c, AC = b, BC = a, AH = h, BH = c', CH = b'.

1.3. a) Tính h, b, c nếu biết b' = 36, c' = 64.

b) Tính h, b, b', c' nếu biết a = 9, c = 6.

1.4. Hãy biểu thị b', c' qua a, b, c.

1.5. Chứng minh rằng :

a) $h = \dfrac{bc}{a}$;

b) $\dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{b'}{c'}$.

1.6. Đường cao của một tam giác vuông kẻ từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn, trong đó đoạn lớn bằng 9cm. Hãy tính cạnh huyền của tam giác vuông đó nếu hai cạnh góc vuông có tỉ lệ 6 : 5.

1.7. Trong tam giác có các cạnh là 5cm, 12cm, 13cm, kẻ đường cao đến cạnh lớn nhất. Hãy tính các đoạn thẳng mà đường cao này chia ra trên cạnh lớn nhất đó.

1.8. Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH bằng 12cm. Hãy tính cạnh huyền BC nếu biết HB : HC = 1 : 3.

1.9. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ C đến BM và H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ? Tại sao ?

a) $\Delta HCD \backsim \Delta ABM$.

b) AH = 2HD.

1.10. Cho hình thang ABCD vuông tại A có cạnh đáy AB bằng 6cm, cạnh bên AD bằng 4cm và hai đường chéo vuông góc với nhau. Tính độ dài các cạnh DC, CB và đường chéo DB.

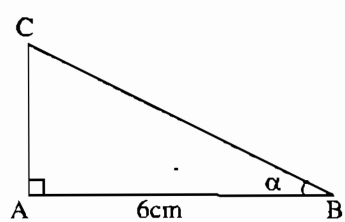
§2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

21. Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 40° rồi viết các tỉ số lượng giác của góc 40°.

22. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

23. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 30^\circ$, BC = 8cm. Hãy tính cạnh AB (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba), biết rằng $\cos 30^\circ \approx 0,866$.



Hình 9

24. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 6cm, $\widehat{B} = \alpha$ (h.9).

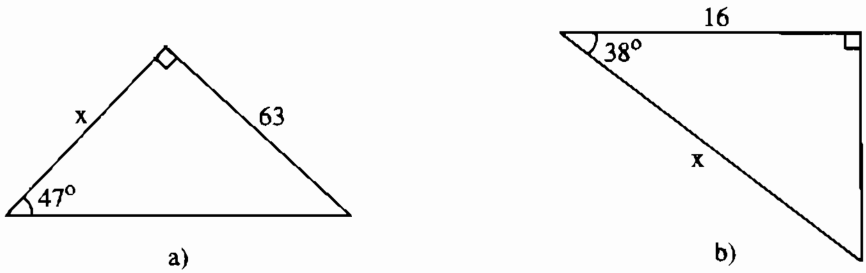
Biết $tg\alpha = \frac{5}{12}$, hãy tính

a) Cạnh AC ;

b) Cạnh BC.

25. Tìm giá trị x (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) trong mỗi tam giác vuông với kích thước được chỉ ra trên hình 10, biết rằng :

$$tg47^o \approx 1{,}072 \text{ ; } \cos38^o \approx 0{,}788.$$



Hình 10

26. Cho tam giác ABC vuông tại A, trong đó AB = 6cm, AC = 8cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc C.

27. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Tính sinB, sinC trong mỗi trường hợp sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư), biết rằng :

a) AB = 13 ;   BH = 5.

b) BH = 3 ;   CH = 4.

28. Hãy biến đổi các tỉ số lượng giác sau đây thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45^o :

$$\sin75^o,\ \cos53^o,\ \sin47^o20',\ tg62^o,\ cotg82^o\,45'.$$

29. Xét quan hệ giữa hai góc trong mỗi biểu thức rồi tính :

a) $\dfrac{\sin 32^o}{\cos 58^o}$;   b) $tg76^o - cotg14^o$.

30. Đường cao MQ của tam giác vuông MNP chia cạnh huyền NP thành hai đoạn NQ = 3, PQ = 6. Hãy so sánh cotgN và cotgP. Tỉ số nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu lần ?

31. Cạnh góc vuông kề với góc 60° của một tam giác vuông bằng 3. Sử dụng bảng lượng giác của các góc đặc biệt, hãy tìm cạnh huyền và cạnh góc vuông còn lại (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư).

32. Đường cao BD của tam giác nhọn ABC bằng 6 ; đoạn thẳng AD bằng 5.

a) Tính diện tích tam giác ABD ;

b) Tính AC, dùng các thông tin dưới đây nếu cần :

$$\sin C = \frac{3}{5},\ \cos C = \frac{4}{5},\ \operatorname{tg} C = \frac{3}{4}.$$

33. Cho $\cos\alpha = 0,8$. Hãy tìm $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư).

34. Hãy tìm $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) nếu biết

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$; b) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{4}$.

35. Dựng góc nhọn α, biết rằng

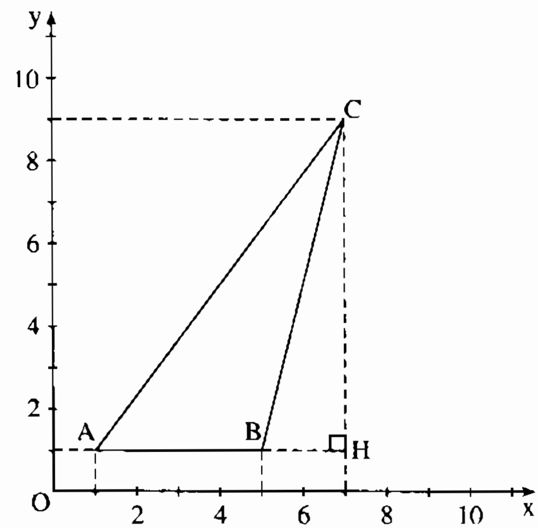
a) $\sin\alpha = 0,25$; b) $\cos\alpha = 0,75$;

c) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; d) $\operatorname{cotg}\alpha = 2$.

36. Trong mặt phẳng toạ độ, các đỉnh của tam giác ABC có toạ độ như sau : A(1 ; 1) ; B(5 ; 1) ; C(7 ; 9) (h.11). Hãy tính

a) Giá trị của $\operatorname{tg}\widehat{BAC}$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) ;

b) Độ dài của cạnh AC.



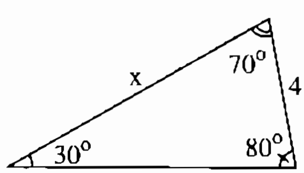
Hình 11

37. Cho hình 12.

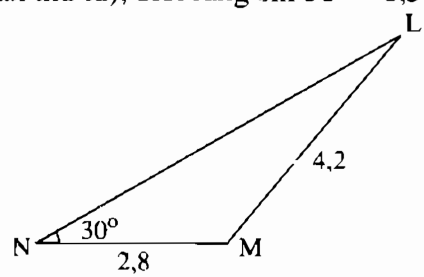
Hãy viết một phương trình để từ đó có thể tìm được x (không phải giải phương trình này).

38. Cho hình 13.

Hãy tính sinL (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư), biết rằng $\sin 30^{\circ} = 0,5$.



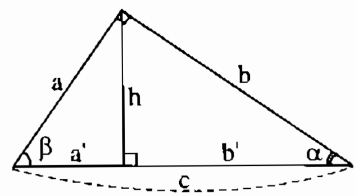
Hình 12



Hình 13

Bài tập bổ sung

Xét hình bs. 4. Tìm đẳng thức đúng trong các bài từ 2.1 đến 2.11.



Hình bs. 4

2.1. (A) $\sin\alpha = \frac{a}{b}$; (B) $\sin\alpha = \frac{b}{c}$;

(C) $\sin\alpha = \frac{b'}{b}$; (D) $\sin\alpha = \frac{h}{b}$.

2.2. (A) $\cos\alpha = \frac{a}{b}$; (B) $\cos\alpha = \frac{a}{c}$;

(C) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; (D) $\cos\alpha = \frac{b}{b'}$.

2.3. (A) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}$; (B) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{c}$;

(C) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{h}$; (D) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{b'}$.

2.4. (A) $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$; (B) $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{c}$;

(C) $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{a}{c}$; (D) $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{h}{b}$.

2.5. (A) $\sin\alpha = \sin\beta$; (B) $\sin\alpha = \cos\beta$;

(C) $\sin\alpha = \mathrm{tg}\beta$; (D) $\sin\alpha = \mathrm{cotg}\beta$.

2.6. (A) $\cos\alpha = \cos\beta$; (B) $\cos\alpha = \mathrm{tg}\beta$;

(C) $\cos\alpha = \mathrm{cotg}\beta$; (D) $\cos\alpha = \sin\beta$.

2.7. (A) $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta$; (B) $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}\beta$;

(C) $\mathrm{tg}\alpha = \sin\beta$; (D) $\mathrm{tg}\alpha = \cos\beta$.

2.8. (A) $\mathrm{cotg}\alpha = \mathrm{tg}\beta$; (B) $\mathrm{cotg}\alpha = \mathrm{cotg}\beta$;

(C) $\mathrm{cotg}\alpha = \cos\beta$; (D) $\mathrm{cotg}\alpha = \sin\beta$.

2.9. (A) $\cos^2\alpha + \sin^2\beta = 1$; (B) $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$;

(C) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; (D) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 2$.

2.10. (A) $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha$; (B) $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha - \cos\alpha$;

(C) $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha.\cos\alpha$; (D) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2.11. (A) $\cot g\alpha = 1 + tg\alpha$; (B) $\cot g\alpha = 1 - tg\alpha$;

(C) $\cot g\alpha = 1.tg\alpha$; (D) $\cot g\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$.

2.12. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. Hãy tìm $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $\cot g\alpha$ $(0^o < \alpha < 90^o)$.

2.13. Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$. Hãy tìm $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $\cot g\alpha$ $(0^o < \alpha < 90^o)$.

2.14. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = \dfrac{1}{3}BC$. Hãy tính sinC, cosC, tgC, cotgC.

2.15. Hãy tính

a) $2\sin30^o - 2\cos60^o + tg45^o$;

b) $\sin45^o + \cot g60^o . \cos30^o$;

c) $\cot g44^o . \cot g45^o . \cot g46^o$.

2.16. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^o$. Chứng minh rằng

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC.$$

2.17. Cho tứ giác ABCD có α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo chứng minh rằng $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

2.18. Cho góc nhọn α

a) Chứng minh rằng $\dfrac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha} = \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

b) Cho $tg\alpha = \dfrac{1}{3}$. Tính $\dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

2.19. Tính giá trị của biểu thức

a) $\dfrac{3\cot g60^o}{2\cos^2 30^o - 1}$; b) $\dfrac{\cos60^o}{1 + \sin60^o} + \dfrac{1}{tg30^o}$.

2.20. Trong hình thang vuông ABCD với các đáy là AD, BC có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^o$, $\widehat{ACD} = 90^o$. BC = 4cm, AD = 16cm. Hãy tìm các góc C và D của hình thang.

2.21. Tính các góc của một hình thoi, biết hai đường chéo của nó có độ dài là $2\sqrt{3}$ và 2.

2.22. Các cạnh của một hình chữ nhật bằng 3cm và $\sqrt{3}$ cm. Hãy tìm các góc hợp bởi đường chéo và các cạnh của hình chữ nhật đó.

§3. Bảng lượng giác

Với các bài toán trong §3 dưới đây, các kết quả tính góc được làm tròn đến phút và các kết quả tính độ dài và tính các tỉ số lượng giác được làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư.

39. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm

$$\sin 39^\circ 13' \ ; \cos 52^\circ 18' \ ; \mathrm{tg} 13^\circ 20' \ ; \mathrm{cotg} 10^\circ 17' \ ; \sin 45^\circ \ ; \cos 45^\circ.$$

40. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm góc nhọn x, biết

a) $\sin x = 0{,}5446$; b) $\cos x = 0{,}4444$; c) $\mathrm{tg}x = 1{,}1111$.

41. Có góc nhọn x nào mà

a) $\sin x = 1{,}0100$; b) $\cos x = 2{,}3540$; c) $\mathrm{tg}x = 1{,}6754$?

42. Cho hình 14. Biết :

$AB = 9\text{cm},\ AC = 6{,}4\text{cm},$
$AN = 3{,}6\text{cm},\ \widehat{AND} = 90^\circ,$
$\widehat{DAN} = 34^\circ.$

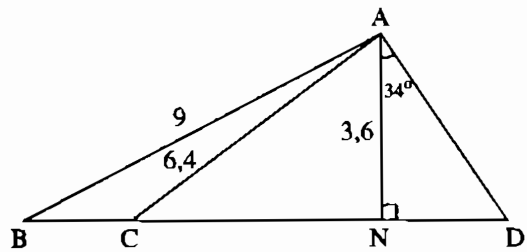
Hãy tính

a) CN ;

b) $\widehat{ABN}$;

c) $\widehat{CAN}$;

d) AD.



Hình 14

43. Cho hình 15. Biết :

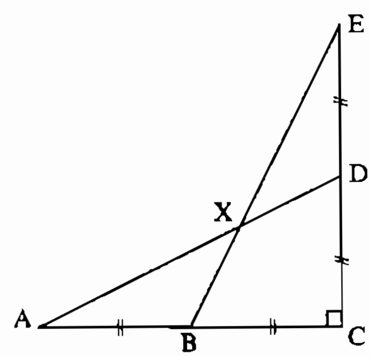
$\widehat{ACE} = 90^\circ$, AB = BC = CD = DE = 2cm.

Hãy tính

a) AD, BE ;

b) $\widehat{DAC}$;

c) $\widehat{BXD}$.



Hình 15

44. Đoạn thẳng LN vuông góc với đoạn thẳng AB tại trung điểm N của AB ; M là một điểm của đoạn thẳng LN và khác với L, N. Hãy so sánh các góc $\widehat{LAN}$ và $\widehat{MBN}$.

45. Không dùng bảng lượng giác và máy tính bỏ túi, hãy so sánh

a) $\sin 25^\circ$ và $\sin 70^\circ$; b) $\cos 40^\circ$ và $\cos 75^\circ$;

c) $\sin 38^\circ$ và $\cos 38^\circ$; d) $\sin 50^\circ$ và $\cos 50^\circ$.

46. Không dùng bảng lượng giác và máy tính bỏ túi, hãy so sánh

a) $tg 50^\circ 28'$ và $tg\, 63^\circ$; b) $cotg 14^\circ$ và $cotg 35^\circ 12'$;

c) $tg 27^\circ$ và $cotg 27^\circ$; d) $tg 65^\circ$ và $cotg 65^\circ$.

47. Cho x là một góc nhọn, biểu thức sau đây có giá trị âm hay dương ? Vì sao ?

a) $\sin x - 1$; b) $1 - \cos x$;

c) $\sin x - \cos x$; d) $tgx - cotgx$.

48. Không dùng bảng lượng giác và máy tính bỏ túi, hãy so sánh

a) $tg 28^\circ$ và $\sin 28^\circ$; b) $cotg 42^\circ$ và $\cos 42^\circ$;

c) $cotg 73^\circ$ và $\sin 17^\circ$; d) $tg 32^\circ$ và $\cos 58^\circ$.

49. Tam giác ABC vuông tại A, có $AC = \frac{1}{2}BC$. Tính :

sinB, cosB, tgB, cotgB.

50. Tính các góc của tam giác ABC, biết AB = 3cm, AC = 4cm và BC = 5cm.

51. Để vẽ một tam giác cân có góc ở đáy là 50° mà không có thước đo góc, một học sinh vẽ một tam giác cân có cạnh bên 3cm, cạnh đáy 4cm. Tính góc ở đáy mà em học sinh đó đã vẽ. Sai số so với số đo phải vẽ là bao nhiêu ?

Bài tập bổ sung

3.1. Hãy so sánh

a) $\sin\alpha$ và $tg\alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$; b) $\cos\alpha$ và $cotg\alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.

c) $\sin 35^\circ$ và $tg 38^\circ$; d) $\cos 33^\circ$ và $tg 61^\circ$.

3.2. Không tính giá trị cụ thể, hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

a) $\sin 20^\circ$, $\cos 20^\circ$, $\sin 55^\circ$, $\cos 40^\circ$, $tg 70^\circ$.

b) $tg 70^\circ$, $cotg 60^\circ$, $cotg 65^\circ$, $tg 50^\circ$, $\sin 25^\circ$.

3.3. Trong tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng b, góc đối diện với nó bằng β.

a) Hãy biểu thị cạnh góc vuông kia, góc đối diện với cạnh này và cạnh huyền qua b và β.

b) Hãy tìm các giá trị của chúng khi b = 10cm, $\beta = 50^o$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

3.4. Trong tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng b, góc nhọn kề với nó bằng α.

a) Hãy biểu thị cạnh góc vuông kia, góc nhọn kề với cạnh này và cạnh huyền qua b và α.

b) Hãy tìm các giá trị của chúng khi b = 12cm, $\alpha = 42^o$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

§4. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Trong các bài toán từ đây trở đi, các kết quả tính độ dài, diện tích, các tỉ số lượng giác được làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba và các kết quả tính góc được làm tròn đến phút.

52. Các cạnh của một tam giác có độ dài 4cm, 6cm và 6cm. Hãy tính góc nhỏ nhất của tam giác đó.

53. Tam giác ABC vuông tại A có AB = 21cm, $\widehat{C} = 40^o$. Hãy tính các độ dài

a) AC ; b) BC ;

c) Phân giác BD.

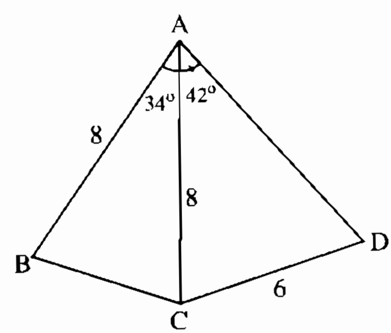
54. Cho hình 16. Biết :

AB = AC = 8cm, CD = 6cm, $\widehat{BAC} = 34^o$ và $\widehat{CAD} = 42^o$. Hãy tính

a) Độ dài cạnh BC ;

b) $\widehat{ADC}$;

c) Khoảng cách từ điểm B đến cạnh AD.

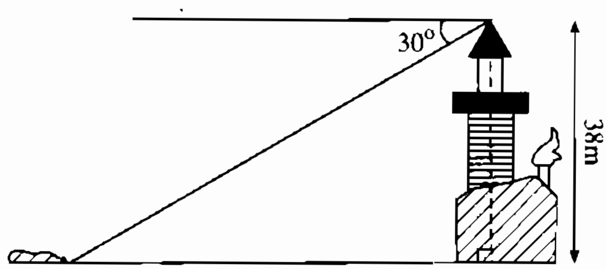


Hình 16

55. Cho tam giác ABC trong đó AB = 5cm, AC = 8cm, $\widehat{BAC} = 20^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC, có thể dùng các thông tin dưới đây nếu cần

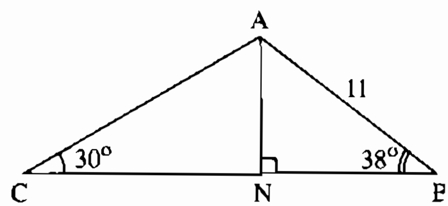
$$\sin 20^\circ \approx 0{,}3420,\ \cos 20^\circ \approx 0{,}9397,\ \mathrm{tg}20^\circ \approx 0{,}3640.$$

56. Từ đỉnh một ngọn đèn biển cao 38m so với mặt nước biển, người ta nhìn thấy một hòn đảo dưới góc 30° so với đường nằm ngang chân đèn (h.17). Hỏi khoảng cách từ đảo đến chân đèn (ở mực nước biển) bằng bao nhiêu ?



Hình 17

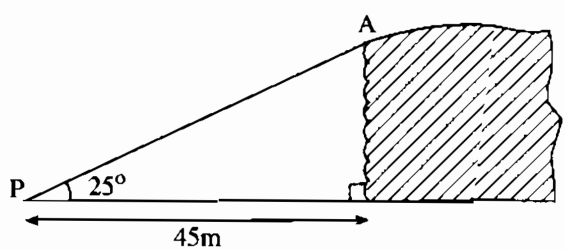
57. Trong tam giác ABC có AB = 11cm, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, N là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC (h.18). Hãy tính AN, AC.



Hình 18

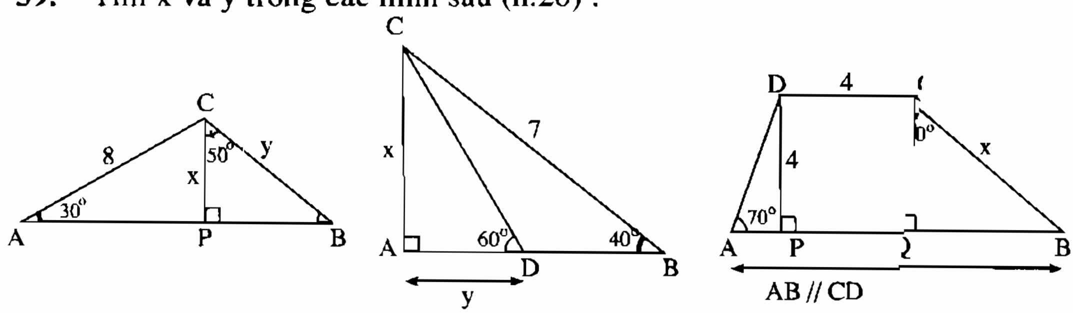
58. (h.19)

Để nhìn thấy đỉnh A của một vách đá dựng đứng, người ta đã đứng tại điểm P cách chân vách đá một khoảng 45m và nhìn lên một góc 25° so với đường nằm ngang (góc nhìn lên này được gọi là góc "nâng"). Hãy tính độ cao của vách đá.



Hình 19

59. Tìm x và y trong các hình sau (h.20) :



a) b) c)

Hình 20

60. Cho hình 21. Biết :

$\widehat{QPT} = 18^\circ$,

$\widehat{PTQ} = 150^\circ$,

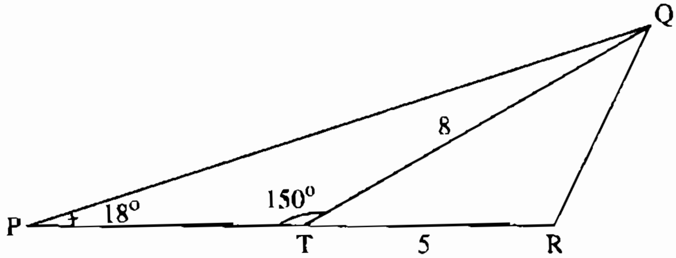
QT = 8cm,

TR = 5cm.

Hãy tính

a) PT ;

b) Diện tích tam giác PQR.



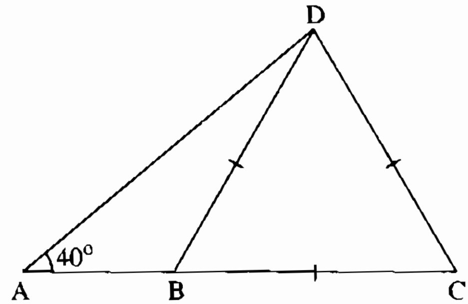
Hình 21

61. (h.22)

Cho BCD là tam giác đều cạnh 5cm và góc DAB bằng 40°. Hãy tính

a) AD ;

b) AB.



Hình 22

62. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết HB = 25cm, HC = 64cm, tính $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

63. Cho tam giác ABC có BC = 12cm, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính

a) Đường cao CH và cạnh AC ;

b) Diện tích tam giác ABC.

64. Tính diện tích của hình bình hành có hai cạnh 12cm và 15cm, góc tạo bởi hai cạnh ấy bằng 110°.

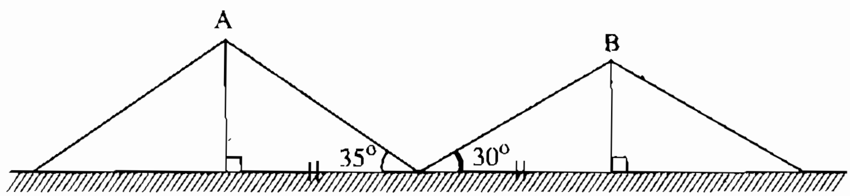
65. Tính diện tích hình thang cân, biết hai cạnh đáy là 12cm và 18cm, góc ở đáy bằng 75°.

66. Một cột cờ cao 3,5m có bóng trên mặt đất dài 4,8m. Hỏi góc giữa tia sáng mặt trời và bóng cột cờ là bao nhiêu ?

67. Từ đỉnh một toà nhà cao 60m, người ta nhìn thấy một chiếc ô tô đang đỗ dưới một góc 28° so với đường nằm ngang. Hỏi chiếc ôtô đang đỗ cách toà nhà đó bao nhiêu mét ?

68. Một em học sinh đứng ở mặt đất cách tháp ăng-ten 150m. Biết rằng em nhìn thấy đỉnh tháp ở góc 20^{0} so với đường nằm ngang, khoảng cách từ mắt đến mặt đất bằng 1,5m. Hãy tính chiều cao của tháp.

69. Hai cột thẳng đứng của hai trại A và B, của lớp 9A và lớp 9B, cách nhau 8m. Từ một cái cọc ở chính giữa hai cột, người ta đo được góc giữa các dây căng từ đỉnh hai cột của hai trại A và B đến cọc tạo với mặt đất lần lượt là 35^{0} và 30^{0}(h.23). Hỏi trại nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu mét ?

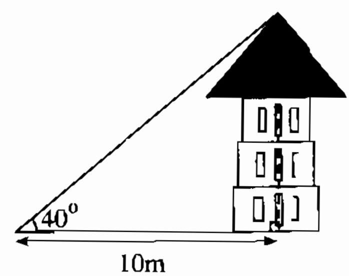


Hình 23

70. Một người trinh sát đứng cách một toà nhà một khoảng 10m. Góc "nâng" từ chỗ anh ta đứng đến nóc toà nhà là 40^{0} (h.24) .

a) Tính chiều cao của toà nhà.

b) Nếu anh ta dịch chuyển sao cho góc "nâng" là 35^{0} thì anh ta cách toà nhà bao nhiêu mét ? Khi đó anh ta tiến lại gần hay ra xa ngôi nhà ?

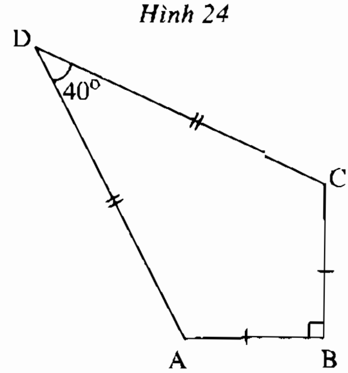


Hình 24

71. Một chiếc diều ABCD có AB = BC, AD = DC. Biết AB = 12cm, $\widehat{ADC} = 40^{0}$, $\widehat{ABC} = 90^{0}$ (h.25). Hãy tính

a) Chiều dài cạnh AD ;

b) Diện tích của chiếc diều.



Hình 25

Bài tập bổ sung

Trong tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là a, b ; góc đối diện với cạnh a là α ; góc đối diện với cạnh b là β và cạnh huyền l c. Hãy tìm khẳng định đúng trong các bài (từ 4.1 đến 4.4).

4.1. (A) $a = c\sin\alpha$; (B) $a = c\cos\alpha$; (C) $a = c\mathrm{tg}\alpha$; (D) $a = \mathrm{cotg}\alpha$.

4.2. (A) $a = c\sin\beta$; (B) $a = c\cos\beta$; (C) $a = c\mathrm{tg}\beta$; (D) $a = \mathrm{cotg}\beta$.

4.3. (A) $a = b\sin\alpha$; (B) $a = b\cos\alpha$; (C) $a = b\mathrm{tg}\alpha$; (D) $a = b\mathrm{cotg}\alpha$.

4.4. (A) $a = b\sin\beta$; (B) $a = b\cos\beta$; (C) $a = b\mathrm{tg}\beta$; (D) $a = b\mathrm{cotg}\beta$.

4.5. Hãy tìm diện tích của tam giác cân có góc ở đáy bằng α nếu biết :

a) Cạnh bên bằng b ; b) Cạnh đáy bằng a.

4.6. Trong hình thang ABCD, tổng của hai đáy AD và BC bằng b, đường chéo AC bằng a, góc ACB bằng α. Hãy tìm diện tích của hình thang đó.

4.7. Cho tam giác ABC có BC = 7, $\widehat{ABC} = 42^o$, $\widehat{ACB} = 35^o$. Gọi H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A. Hãy tính AH (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

4.8. Cho tam giác nhọn MNP. Gọi D là chân đường cao của tam giác đó kẻ từ M. Chứng minh rằng

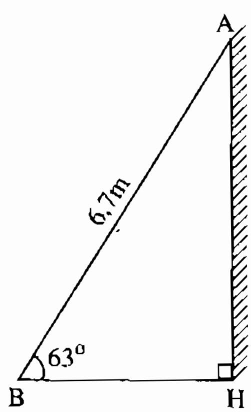
a) $S_{MNP} = \dfrac{1}{2}MP.NP.\sin P$; b) $DP = \dfrac{MN.\sin N}{\mathrm{tg}\, P}$;

c) $\Delta DNE \backsim \Delta MNP$, trong đó E là chân đường cao của tam giác MNP kẻ từ P.

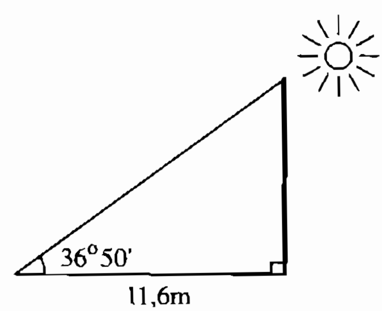
§5. Ứng dụng thực tế các tỉ số lượng giác của góc nhọn

72. *Bài toán cái thang*

Thang AB dài 6,7m tựa vào tường làm thành góc 63^o với mặt đất (h.26). Hỏi chiều cao của thang đạt được so với mặt đất ?



Hình 26



Hình 27

73. *Bài toán cột cờ*

Làm dây kéo cờ : Tìm chiều dài của dây kéo cờ, biết bóng của cột cờ (chiếu bởi ánh sáng mặt trời) dài 11,6m và góc nhìn mặt trời là $36^o50'$ (h.27).

74. *Bài toán con mèo*

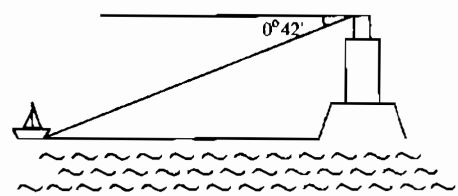
Một con mèo ở trên cành cây cao 6,5m. Để bắt mèo xuống cần phải đặt thang sao cho đầu thang đạt độ cao đó, khi đó góc của thang với mặt đất là bao nhiêu, biết chiếc thang dài 6,7m ?

75. *Bài toán đài quan sát*

Đài quan sát ở Toronto, Ontario, Canada cao 533m. Ở một thời điểm nào đó vào ban ngày, Mặt Trời chiếu tạo thành bóng dài 1100m. Hỏi lúc đó góc tạo bởi tia sáng mặt trời và mặt đất là bao nhiêu ?

76. *Bài toán hải đăng*

Một người quan sát ở đài hải đăng cao 80 feet (đơn vị đo lường Anh) so với mặt nước biển, nhìn một chiếc tàu ở xa với góc $0^o42'$. Hỏi khoảng cách từ tàu đến chân hải đăng tính theo đơn vị hải lí là bao nhiêu ? (1 hải lí = 5280 feet) (h.28).



Hình 28

77. *Bài toán máy bay hạ cánh*

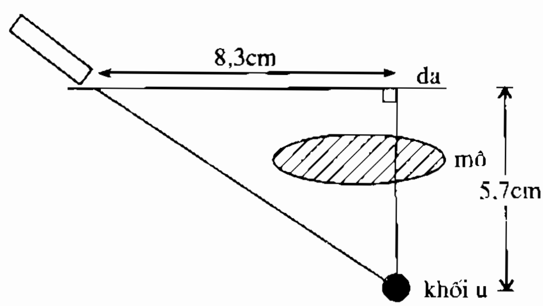
Một máy bay đang bay ở độ cao 10km. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.

a) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 3^o thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh ?

b) Nếu cách sân bay 300km máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu ?

78. *Bài toán chiếu xạ chữa bệnh*

Một khối u của một bệnh nhân cách mặt da 5,7cm, được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u (trên mặt da) 8,3cm (h.29).



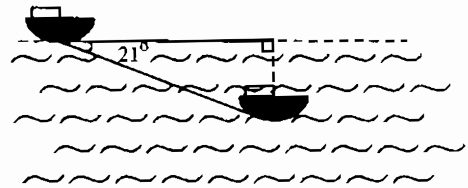
Hình 29

a) Hỏi góc tạo bởi chùm tia với mặt da ?

b) Chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu để đến được khối u ?

79. *Bài toán tàu ngầm*

Tàu ngầm đang ở trên mặt biển bỗng đột ngột lặn xuống theo phương tạo với mặt nước biển một góc 21° (h.30).



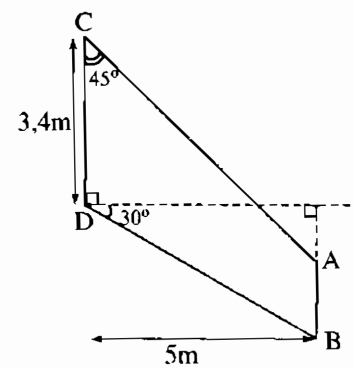
Hình 30

a) Nếu tàu chuyển động theo phương lặn xuống được 300m thì nó ở độ sâu bao nhiêu ? Khi đó khoảng cách theo phương nằm ngang so với nơi xuất phát là bao nhiêu ?

b) Tàu phải chạy bao nhiêu mét để đạt đến độ sâu 1000m ?

Bài tập bổ sung

5.1. (h.bs.5). Mô tả cánh của một máy bay. Hãy tính các độ dài AC, BD, AB của cánh máy bay theo các số liệu được cho trong hình đó.



Hình bs.5

Ôn tập chương I

80. Hãy tính $\sin\alpha$ và $\operatorname{tg}\alpha$, nếu

a) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; b) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$; c) $\cos\alpha = 0{,}6$.

81. Hãy đơn giản các biểu thức

a) $1 - \sin^2\alpha$;

b) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$;

c) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;

d) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$;

e) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

g) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$;

h) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

i) $\operatorname{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$.

82. Trong một tam giác với các cạnh có độ dài 6, 7, 9, kẻ đường cao đến cạnh lớn nhất. Hãy tìm độ dài đường cao này và các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh lớn nhất đó.

83. Hãy tìm độ dài cạnh đáy của một tam giác cân, nếu đường cao kẻ xuống đáy có độ dài là 5 và đường cao kẻ xuống cạnh bên có độ dài là 6.

84. Tam giác ABC vuông tại A, AB = a, AC = 3a. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho AD = DE = EC.

a) Chứng minh $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$.

b) Chứng minh $\Delta BDE \backsim \Delta CDB$.

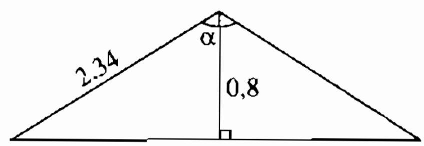
c) Tính tổng $\widehat{AEB} + \widehat{BCD}$ bằng hai cách

Cách 1 : Sử dụng kết quả ở câu b) ;

Cách 2 : Dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng lượng giác.

85. (h.31)

Tính góc α tạo bởi hai mái nhà, biết rằng mỗi mái nhà dài 2,34m và cao 0,8m.



Hình 31

86. Cho hình 32. Biết :

$AD \perp DC$, $\widehat{DAC} = 74^\circ$,

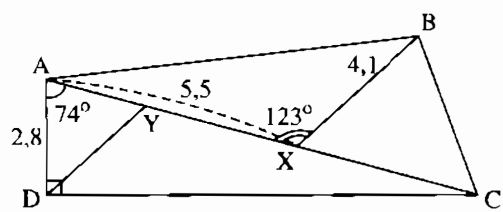
$\widehat{AXB} = 123^\circ$, AD = 2,8cm,

AX = 5,5cm, BX = 4,1cm.

a) Tính AC.

b) Gọi Y là điểm trên AX sao cho DY // BX. Hãy tính XY.

c) Tính diện tích tam giác BCX.

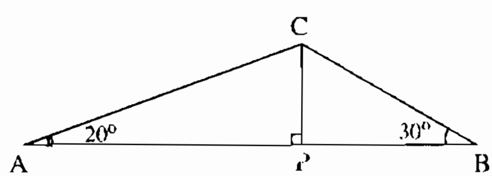


Hình 32

87. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 20^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$, AB = 60cm. Đường vuông góc kẻ từ C đến AB cắt AB tại P (h.33). Hãy tìm

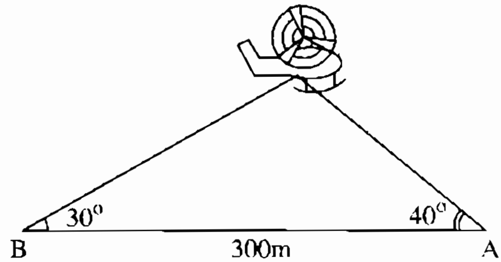
a) AP, BP ;

b) CP.



Hình 33

88. Điểm hạ cánh của một máy bay trực thăng ở giữa hai người quan sát A và B. Biết khoảng cách giữa hai người này là 300m, góc "nâng" để nhìn thấy máy bay tại vị trí A là 40^o và tại vị trí B là 30^o (h.34). Hãy tìm độ cao của máy bay.



Hình 34

89. Cho hình thang với đáy nhỏ là 15cm, hai cạnh bên bằng nhau và bằng 25cm, góc tù bằng 120^o. Tính chu vi và diện tích của hình thang đó.

90. Cho tam giác ABC vuông ở A, AB = 6cm, AC = 8cm.

a) Tính BC, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

b) Phân giác của góc A cắt BC tại D. Tính BD, CD.

c) Từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB và AC. Tứ giác AEDF là hình gì ? Tính chu vi và diện tích của tứ giác AEDF.

91. Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên là AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết AD = 5a, AC = 12a.

a) Tính $\dfrac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$.

b) Tính chiều cao của hình thang ABCD.

92. Cho tam giác cân ABC, AB = AC = 10cm, BC = 16cm. Trên đường cao AH lấy điểm I sao cho AI = $\dfrac{1}{3}$AH. Vẽ tia Cx song song với AH, Cx cắt tia BI tại D.

a) Tính các góc của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tứ giác ABCD.

93. Cho tam giác ABC. Biết

AB = 21cm, AC = 28cm, BC = 35cm.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Tính sinB, sinC.

94. Cho hình thang ABCD. Biết hai đáy AB = a và CD = 2a, cạnh bên AD = a, $\widehat{A} = 90^o$.

a) Chứng minh tgC = 1.

b) Tính tỉ số diện tích tam giác DBC và diện tích hình thang ABCD.

c) Tính tỉ số diện tích tam giác ABC và diện tích tam giác DBC.

95. Cho tam giác ABC có góc B bằng 120^o, BC = 12cm, AB = 6cm. Đường phân giác của góc B cắt cạnh AC tại D.

a) Tính độ dài đường phân giác BD.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh AM $\perp$ BD.

96. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH chia cạnh huyền BC thành hai đoạn BH, CH có độ dài lần lượt là 4cm, 9cm. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC.

a) Tính độ dài đoạn thẳng DE.

b) Các đường thẳng vuông góc với DE tại D và tại E lần lượt cắt BC tại M và N. Chứng minh M là trung điểm của BH và N là trung điểm của CH.

c) Tính diện tích tứ giác DENM.

97. Cho tam giác ABC vuông ở A, $\widehat{C} = 30^o$, BC = 10cm.

a) Tính AB, AC.

b) Từ A kẻ AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Chứng minh

MN // BC và MN = AB.

c) Chứng minh hai tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

98. Cho tam giác ABC có AB = 6cm, AC = 4,5cm, BC = 7,5cm.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A. Tính các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ và đường cao AH của tam giác.

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $S_{ABC} = S_{BMC}$.

99. Gọi AM, BN, CL là ba đường cao của tam giác ABC. Chứng minh

a) $\Delta ANL \backsim \Delta ABC$;

b) AN.BL.CM = AB.BC.CA.cosAcosBcosC.

Bài tập bổ sung

I.1. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 105^{\circ}$, $\widehat{B} = 45^{\circ}$, BC = 4cm. Tính độ dài các cạnh AB, AC.

I.2. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tính $\cos\widehat{MAN}$.

I.3. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao BH. Hãy tính góc A và các cạnh AB, BC, nếu biết BH = h và $\widehat{C} = \alpha$.

I.4. Hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 120^{\circ}$, AB = a, BC = b. Các đường phân giác của bốn góc A, B, C, D cắt nhau tạo thành tứ giác MNPQ. Tính diện tích tứ giác MNPQ.

I.5. Cho tam giác ABC vuông tại C có $\widehat{B} = 37^{\circ}$. Gọi I là giao điểm của cạnh BC với đường trung trực của AB. Hãy tính AB, AC, nếu biết BI = 20.

B. LỜI GIẢI – CHỈ DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Các định lí 1, 2, 3 được sử dụng để giải bài tập trong mục này thuộc §1 chương I, phần Hình học, SGK Toán 9, tập một.

1. a) *Hướng dẫn :* Dùng định lí Py-ta-go để tính x + y, sau đó dùng định lí 1 để tính x và y.

Đáp số : $x = \dfrac{25}{\sqrt{74}}$; $y = \dfrac{49}{\sqrt{74}}$.

b) *Hướng dẫn :* Trước hết tính y nhờ định lí 1, sau đó tính x (x = 16 – y).

Đáp số : y = 12,25 ; x = 3,75.

2. a) Áp dụng định lí 1.

$$x^2 = 2(2 + 6) = 16 \Rightarrow x = 4.$$

$$y^2 = 6(2 + 6) = 48 \Rightarrow y = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

b) Áp dụng định lí 2 ta có x = 4.

3. a) Áp dụng định lí Py-ta-go tính y, sau đó áp dụng định lí 3 tính x.

$$x = \frac{63}{\sqrt{130}}; \qquad y = \sqrt{130}.$$

b) Trong tam giác vuông, trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền, do đó x = 5.

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có $y = 5\sqrt{2}$.

4. a) *Hướng dẫn :* Dùng định lí 2 để tính x, sau đó tính y bằng định lí Py-ta-go hay định lí 1.

Đáp số : x = 4,5 ; $y = \sqrt{29,25}$.

b) *Hướng dẫn :* $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{15}{AC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AC = 20$. Biết AB, AC, dùng định lí Py-ta-go để tính y, sau đó áp dụng định lí 3 để tính x.

Đáp số : y = 25 ; x = 12.

5. a) *Hướng dẫn : Cách 1 :* Trước tiên dùng định lí Py-ta-go để tính AB, sau đó dùng định lí 1 tính BC. Từ đó suy ra CH (= BC – HB). Cuối cùng dùng định lí 1 hoặc định lí Py-ta-go để tính AC.

Cách 2 : Cũng có thể tính trước CH nhờ định lí 2, sau đó tính BC, rồi tính AB, AC nhờ định lí 1.

Đáp số : $AB = \sqrt{881} \approx 29{,}68$; $BC = 35{,}24$;

$CH = 10{,}24$; $AC \approx 18{,}99$.

b) *Hướng dẫn : Cách 1 :* Dùng định lí 1 tính BC, từ đó suy ra CH (= BC – HB). Dùng định lí 2 để tính AH. Cuối cùng dùng định lí 1 để tính AC.

Cách 2 : Cũng có thể dùng định lí Py-ta-go để tính ngay AH. Sau đó dùng định lí 2 để tính CH từ đó suy ra BC và cuối cùng tính AC nhờ định lí 1 hoặc định lí Py-ta-go.

Đáp số : $BC = 24$; $CH = 18$;

$AH = \sqrt{108} \approx 10{,}39$; $AC = \sqrt{432} \approx 20{,}78$.

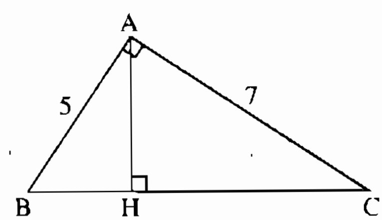
6. (h.35)

$BC = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$;

$AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{35}{\sqrt{74}}$;

$BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{25}{\sqrt{74}}$;

$CH = \dfrac{AC^2}{BC} = \dfrac{49}{\sqrt{74}}$.

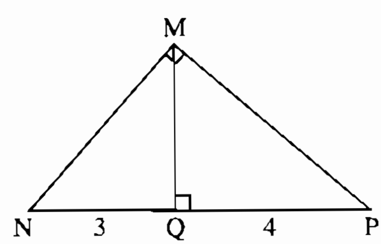


Hình 35

7. (h.36)

$MN^2 = NQ.NP = 3 \,.\, 7 = 21 \Rightarrow MN = \sqrt{21}$;

$MP^2 = PQ.NP = 4 \,.\, 7 = 28 \Rightarrow MP = \sqrt{28}$.



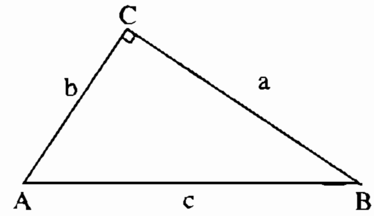
Hình 36

8. (h.37) Giả sử tam giác vuông có các cạnh góc vuông là a, b và cạnh huyền là c. Giả sử c lớn hơn a là 1cm. Ta có hệ thức

$$c - 1 = a \; ; \qquad (1)$$

$$a + b - c = 4 \; ; \qquad (2)$$

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (3)$$



Hình 37

Từ (1) và (2) suy ra $c - 1 + b - c = 4$ hay $b = 5$.

Thay $a = c - 1$ và $b = 5$ vào (3) ta có $(c - 1)^2 + 5^2 = c^2$.

Suy ra $-2c + 1 + 25 = 0$.

Do đó, $c = 13$ và $a = 12$.

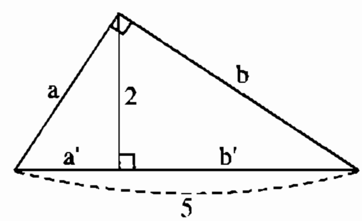
Đáp số : $a = 12$cm ; $b = 5$cm ; $c = 13$cm.

9. (h.38)

Ta có các hệ thức sau

$$a' + b' = 5 \; ; \qquad (1)$$

$$a' \,.\, b' = 2^2. \qquad (2)$$



Hình 38

Giả sử $a' < b'$. Từ (1) và (2) suy ra $a' = 1$; $b' = 4$. Cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông đã cho là cạnh a (có hình chiếu trên cạnh huyền là a'), ta có

$$a^2 = 5a' = 5 \,.\, 1, \text{ suy ra } a = \sqrt{5}.$$

10. *Hướng dẫn :* Tỉ số giữa hai cạnh góc vuông là 3 : 4, nghĩa là : Nếu một cạnh có độ dài là 3a thì cạnh kia có độ dài là 4a. Tìm a từ hệ thức

$$(3a)^2 + (4a)^2 = 125^2 \; (a = 25).$$

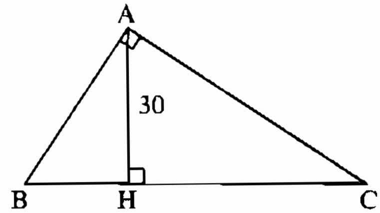
Từ đó biết hai cạnh góc vuông là 75 và 100. Trở lại bài toán : Biết ba cạnh của một tam giác vuông. Tìm hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền. Áp dụng định lí 1.

Đáp số : 75cm ; 100cm ; 45cm ; 80cm.

11. (h.39)

$\Delta ABH \backsim \Delta CAH \Rightarrow \dfrac{AB}{CA} = \dfrac{AH}{CH}$

$\Rightarrow \dfrac{5}{6} = \dfrac{30}{CH} \Rightarrow CH = 36.$



Hình 39

Mặt khác, $BH.CH = AH^2$

$\Rightarrow BH = \dfrac{AH^2}{CH} = \dfrac{30^2}{36} = 25.$

Đáp số : HB = 25cm ; HC = 36cm.

12. Vì A, B cùng cách mặt đất 230km nên tam giác OAB cân tại O. Mặt khác, khoảng cách AB bằng 2200km và bán kính Trái Đất gần bằng 6370km, nên ta có

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{42350000} \approx 6508 > 6370.$$

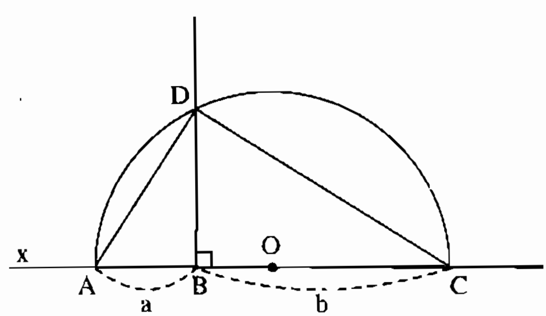
Vậy hai vệ tinh đó nhìn thấy nhau.

13. a) Dựng tam giác vuông với hai cạnh góc vuông bằng a và b. Khi đó, cạnh huyền của tam giác này có độ dài $\sqrt{a^2 + b^2}$.

b) Dựng tam giác vuông có cạnh huyền là a, một cạnh góc vuông là b. Khi đó cạnh góc vuông kia có độ dài $\sqrt{a^2 - b^2}$.

14. (h.40).

Trên đường thẳng x lấy ba điểm liên tiếp A, B, C sao cho AB = a, BC = b. Vẽ nửa đường tròn đường kính AC. Từ B kẻ đường vuông góc với AC ; đường vuông góc này cắt nửa đường tròn tại D. Khi đó, đoạn thẳng DB có độ dài $\sqrt{ab}$.



Hình 40

Lưu ý : Vì D nằm trên đường tròn đường kính AC nên :

$$OA = OC = OD = \frac{AC}{2}.$$

Tam giác ACD có đường trung tuyến OD ứng với cạnh AC bằng một nửa cạnh AC nên là tam giác vuông tại D.

15. *Đáp số :* Độ dài băng chuyền gần bằng 10,8m.

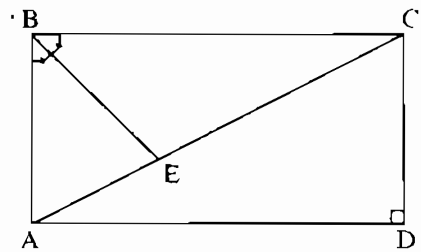
16. Vì $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$

nên tam giác đã cho là tam giác vuông và góc đối diện với cạnh có độ dài 13 chính là góc vuông.

17. (h.41)

Cách 1 : Trong tam giác ABC, gọi đường phân giác của góc B là BE. Theo tính chất đường phân giác trong của một tam giác, ta có :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CE}{CB} \text{ hay } \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CB}. \quad (1)$$



Hình 41

Thay giá trị của AE, CE vào (1) ta có

$$\frac{4\frac{2}{7}}{5\frac{5}{7}} = \frac{AB}{CB} \text{ hay } \frac{AB}{CB} = \frac{3}{4}. \quad (2)$$

Biến đổi (2) bằng cách bình phương hai vế, ta có

$$\frac{AB^2}{CB^2} = \frac{9}{16}. \quad (3)$$

Từ (3) suy ra

$$\frac{AB^2 + CB^2}{CB^2} = \frac{9+16}{16} \text{ hay } \frac{AC^2}{CB^2} = \frac{5^2}{4^2}. \quad (4)$$

Từ (4) suy ra

$$\frac{AC}{BC} = \frac{5}{4}. \quad (5)$$

Mặt khác, ta có

$$AC = AE + EC = 4\frac{2}{7} + 5\frac{5}{7} = 10.$$

Thay giá trị của AC vào (5) ta tìm được

$$BC = 8.$$

Thay giá trị của BC vào (2) ta tìm được

$$AB = \frac{3BC}{4} = \frac{3.8}{4} = 6.$$

Vậy các kích thước của hình chữ nhật là 6m ; 8m.

Cách 2 : Làm tương tự như trong cách 1, tính được $AB = \frac{3}{4}CB$.

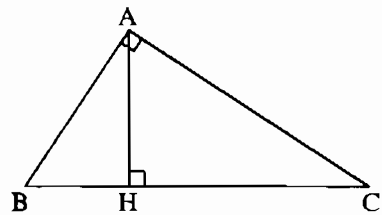
Trong tam giác vuông ABC, ta có

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\text{hay } \frac{9}{16}BC^2 + BC^2 = (AE + EC)^2 = 100.$$

Từ đó suy ra $BC^2 = 64$.

18. (h.42)



Hình 42

Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là chu vi của tam giác AHB, CHA và CAB.

$\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ suy ra

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{AB}{CA}. \quad (1)$$

Từ (1), ta có :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{3^2} = \frac{AC^2}{4^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{3^2 + 4^2} = \frac{BC^2}{5^2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{5} \Rightarrow AB : AC : BC = 3 : 4 : 5.$$

Mặt khác $\Delta AHB \backsim \Delta CHA \backsim \Delta CAB$, suy ra

$$P_1 : P_2 : P_3 = AB : AC : BC = 3 : 4 : 5.$$

Vậy nếu $P_1 = 30$cm, $P_2 = 40$cm thì $P_3 = 50$cm.

19. (h.43)

Trong tam giác vuông ABC, AB = 6, AC = 8, suy ra BC = 10 (định lí Py-ta-go).

Với đường phân giác BM, ta có

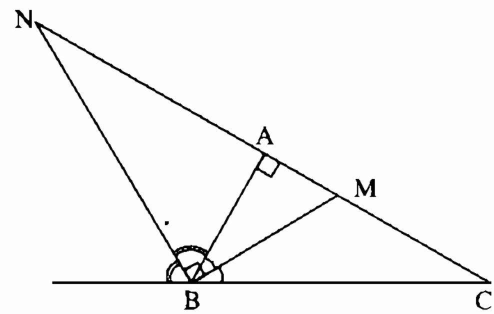
$$\frac{AM}{AB} = \frac{CM}{CB}$$

hay $$\frac{AM}{CM} = \frac{AB}{CB}.$$

Suy ra $$\frac{AM}{AM + CM} = \frac{AB}{AB + CB}$$

hay $$\frac{AM}{8} = \frac{6}{16}.$$

Suy ra $$AM = \frac{6\,.\,8}{16} = 3.$$



Hình 43

Xét tam giác BMN. Do BM và BN lần lượt là đường phân giác trong và đường phân giác ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC nên BM ⊥ BN. Vậy tam giác BMN vuông tại B.

Với đường cao BA ứng với cạnh huyền MN ta có

$$BA^2 = AM\,.\,AN.$$

Suy ra

$$AN = BA^2 : AM = 6^2 : 3 = 12.$$

Đáp số : AM = 3cm ; AN = 12cm.

20. *Hướng dẫn :* Đặt các đoạn thẳng trong đẳng thức cần chứng minh vào các tam giác vuông thích hợp, rồi áp dụng định lí Py-ta-go để chứng minh. Chẳng hạn :

$BD^2 = BM^2 - MD^2$,... Lưu ý hoán vị các số hạng của tổng một cách thích hợp.

Bài tập bổ sung

1.1. *Hướng dẫn* : $\Delta ABC \backsim \Delta HAC$ nên $\frac{3}{4} = \frac{AB}{AC} = \frac{HA}{HC}$,

suy ra $HC = \frac{4}{3}HA = 12$. Chọn (C).

1.2. *Hướng dẫn* : $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ nên $\frac{4}{5} = \frac{AB}{AC} = \frac{HB}{HA}$

suy ra $HB = \frac{4}{5}HA = \frac{48}{5} = 9,6$. Chọn (B).

1.3. *Hướng dẫn* :

a) $h^2 = b'c'$ kéo theo $h = 48$; $a = b' + c' = 100$ từ $b^2 = ab'$ suy ra $b = 60$, từ $c^2 = ac'$ suy ra $c = 80$.

b) $c' = \frac{c^2}{a} = 4$, $b' = a - c' = 5$, $b^2 = ab' = 45$ nên $b = 3\sqrt{5}$; $h^2 = b'c' = 20$, nên $h = 2\sqrt{5}$.

1.4. Từ $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$ suy ra $b' = \frac{b^2}{a}$, $c' = \frac{c^2}{a}$.

1.5. a) Hai cách :

Cách 1. Dùng công thức tính diện tích tam giác vuông ABC :

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc \text{ suy ra } h = \frac{bc}{a}.$$

Cách 2. Dùng tam giác đồng dạng : $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ suy ra $\frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA}$

tức là $\frac{b}{h} = \frac{a}{c}$, vậy $h = \frac{bc}{a}$.

b) Từ $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$ suy ra $\frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'}$.

1.6. Xét tam giác ABC vuông tại A với AB > AC, gọi AH là đường cao kẻ từ A thì ta có :

$\frac{AB}{AC} = \frac{6}{5}$, $HB = 9$. Từ đó $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} = \frac{9}{BC - 9} = \frac{36}{25}$ nên $BC - 9 = \frac{25}{4}$,

suy ra $BC = \frac{61}{4} = 15\frac{1}{4}$ (cm).

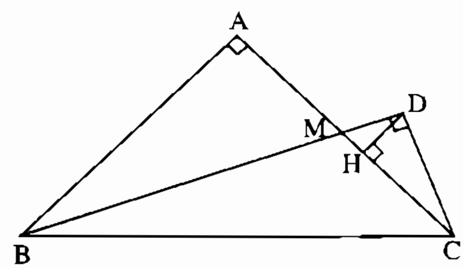
1.7. Xét tam giác ABC có AB = 5cm, AC = 12cm, BC = 13cm.

Vì $13^2 = 5^2 + 12^2$ nên Δ ABC là tam giác vuông tại A. Gọi AH là đường cao kẻ từ A thì $HB = \frac{AB^2}{BC} = \frac{25}{13}$ (cm), $HC = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13}$ (cm).

1.8. $AH^2 = HB.HC = 12^2 = 144$ mà HC = 3HB nên $HB^2 = \frac{12^2}{3} = 48$, suy ra $HB = 4\sqrt{3}$, $HC = 12\sqrt{3}$ và $BC = HB + HC = 16\sqrt{3}$ (cm).

1.9. (h. bs. 6). a) Hai tam giác vuông HCD và DCM đồng dạng (có cùng góc nhọn tại C) mà $\Delta DCM \backsim \Delta ABM$ (vì là hai tam giác vuông có $\widehat{DMC} = \widehat{AMB}$), vậy $\Delta HCD \backsim \Delta ABM$. Khẳng định a) là đúng.

b) Theo câu a), từ AB = 2AM, suy ra HC = 2HD. Ta có HC < MC (H là chân đường cao hạ từ D của tam giác DCM vuông tại D) nên HC = 2HD < MC = AM < AH (do M nằm giữa A và H), vì thế 2HD không thể bằng AH. Khẳng định b) là sai.



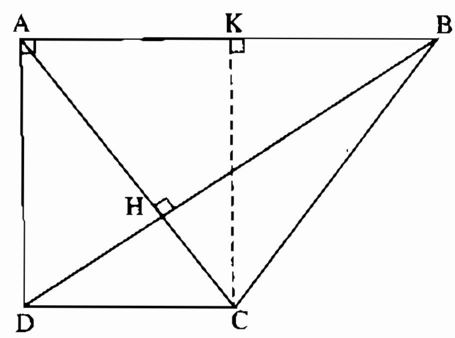
Hình bs. 6

1.10. (h.bs. 7) Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại H. Trong tam giác vuông ABD, ta có

$$\frac{HD}{HB} = \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{4^2}{6^2} = \frac{4}{9}.$$

Dễ thấy $\Delta HDC \backsim \Delta HBA$ nên $\frac{DC}{AB} = \frac{HD}{HB} = \frac{4}{9}$ suy ra

$DC = \frac{4}{9}.6 = \frac{8}{3}$ (cm).



Hình bs. 7

Kẻ đường cao CK của tam giác ABC, dễ thấy $KB = AB - DC = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$.

Từ đó $BC^2 = KB^2 + KC^2 = KB^2 + AD^2 = \frac{100}{9} + 16 = \frac{244}{9}$

suy ra $BC = \dfrac{\sqrt{244}}{3} = \dfrac{2\sqrt{61}}{3}$ (cm).

Tam giác vuông ABD có $DB^2 = AB^2 + AD^2 = 6^2 + 4^2 = 52$, từ đó $DB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (cm).

§2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

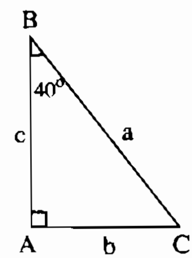
21. (h.44)

Vẽ tam giác vuông ABC, có $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{B} = 40^o$.

Đo các cạnh của tam giác, chẳng hạn AB = c, AC = b, BC = a. Khi đó

$$\sin 40^o = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a},\ \cos 40^o = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a},$$

$$tg40^o = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c},\ cotg\,40^o = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$



Hình 44

22. *Hướng dẫn :* Vẽ tam giác ABC vuông tại A.

Viết các tỉ số sinB, sinC theo các cạnh của tam giác ABC.

Thực hiện phép chia $\dfrac{\sin B}{\sin C}$ rồi rút gọn.

23. *Hướng dẫn :* $\cos B = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC\cos B$.

Đáp số : 6,928 (cm).

24. a) $\dfrac{AC}{AB} = tg\alpha = \dfrac{5}{12} \Rightarrow \dfrac{AC}{6} = \dfrac{5}{12} \Rightarrow AC = \dfrac{6.\,5}{12} = 2,5$ (cm) ;

b) $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 6,5$ (cm).

25. *Đáp số :* a) $x \approx 58,769$;

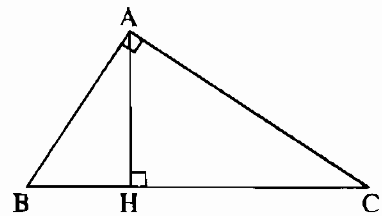
b) $x \approx 20,305$.

26. *Hướng dẫn :* Tính cạnh BC, sau đó tính các tỉ số lượng giác của góc B theo định nghĩa.

Vì $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc phụ nhau nên từ các tỉ số lượng giác của góc B suy ra các tỉ số lượng giác của góc C.

27. (h.45)

Trước tiên, dựa vào các hệ thức giữa cạnh và đường cao của tam giác vuông, tính AH, BC (đối với câu a)) ; Tính AB, AC (đối với câu b)). Sau đó, viết sinB, sinC theo định nghĩa rồi viết kết quả dưới dạng số thập phân.



Hình 45

Đáp số :

a) $\sin B = \dfrac{12}{13} \approx 0{,}9231$; $\sin C = \dfrac{13}{33{,}8} \approx 0{,}3846$;

b) $\sin B = \dfrac{AC}{BC} \approx 0{,}7559$; $\sin C = \dfrac{AB}{BC} \approx 0{,}6547$.

28. *Hướng dẫn :* Sử dụng quan hệ giữa các tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

29. *Đáp số :* a) 1 ; b) 0.

30. *Đáp số :* cotgP = 2 cotgN.

31. *Đáp số :* 6 và 5,1962.

32. a) *Đáp số :* 15 ;

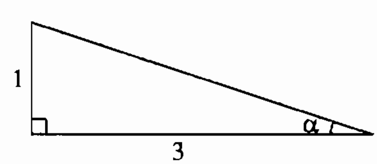
b) *Hướng dẫn :* Trước tiên tính CD trong tam giác vuông BCD.

Đáp số : AC = 13.

33. *Hướng dẫn :* Sử dụng kết quả của bài tập 14 chương I, phần Hình học, sách giáo khoa Toán 9 tập một.

Đáp số : $\sin\alpha = 0{,}6$; $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}75$; $\mathrm{cotg}\alpha \approx 1{,}3333$.

34. a) (h.46) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$ nên α là một góc nhọn của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 1 và 3, từ đó ta tính được cạnh huyền khoảng 3,1623.



Hình 46

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{1}{3,1623} \approx 0,3162$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{3,1623} \approx 0,9487$.

b) Tương tự câu a) ta có

$$\sin\alpha = 0,8 \ ; \ \cos\alpha = 0,6.$$

35. Đưa các tỉ số lượng giác về dạng phân số.

– Dựng tam giác vuông biết cạnh huyền và cạnh góc vuông (hoặc hai cạnh góc vuông) lần lượt bằng tử và mẫu của các tỉ số lượng giác.

– Trong mỗi tam giác vuông đó, xác định góc α tương ứng.

Ví dụ :

$$\sin\alpha = 0,25 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{4}.$$

Dựng tam giác vuông có cạnh huyền bằng 4 và cạnh góc vuông bằng 1. Trong tam giác đó, α là góc đối diện với cạnh bằng 1.

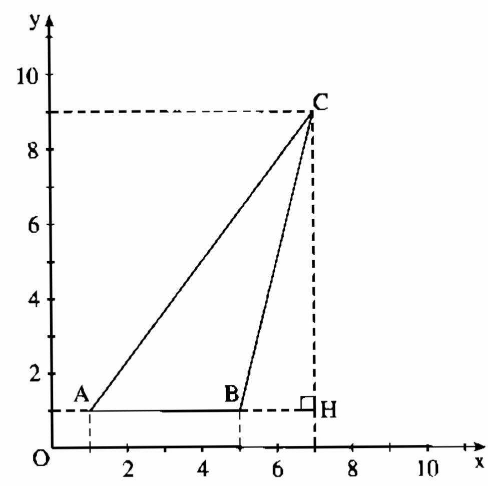
36. (h.47)

a) $\operatorname{tg}\widehat{BAC} = \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{9-1}{7-1} = \dfrac{8}{6}$;

$\operatorname{tg}\widehat{BAC} \approx 1,3333.$

b) $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} =$

$= \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2} = 10.$



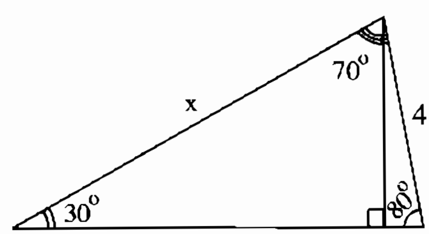
Hình 47

37. (h.48) Kẻ đường cao xuất phát từ đỉnh góc 70^o. Chẳng hạn ta có phương trình sau

$$x \,.\, \sin 30^o = 4\sin 80^o.$$

38. Làm tương tự bài 37 ta có

$$\sin L = \frac{2,8\sin 30^o}{4,2} \approx 0,3333.$$



Hình 48

Bài tập bổ sung

2.1. (D).

2.2. (C).

2.3. (D).

2.4. (A).

2.5. (B).

2.6. (D).

2.7. (B).

2.8. (A).

2.9. (C).

2.10. (D).

2.11. (D).

2.12. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \dfrac{3}{4}$ nên $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \sqrt{3}.$$

2.13. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{3},\ cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

2.14. Do $AB = \dfrac{1}{3}BC$ nên $\sin C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Từ đó $\cos C = \sqrt{1 - \dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$tgC = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},\ cotgC = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

2.15. a) $2\sin30^\circ - 2\cos60^\circ + tg45^\circ = tg45^\circ = 1$ (do $\sin30^\circ = \cos60^\circ$).

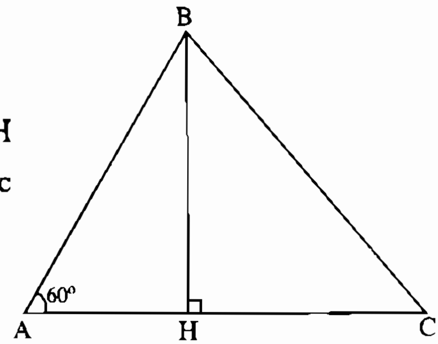
b) $\sin45^\circ + cotg60^\circ.\cos30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

c) $\text{cotg}44^{o}\,.\,\text{cotg}45^{o}\,.\,\text{cotg}46^{o} = \text{cotg}45^{o} = 1$

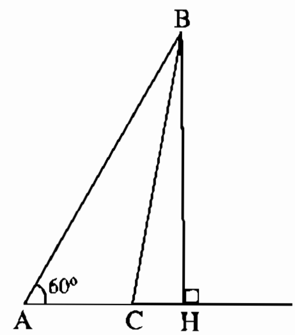
(vì $\text{cotg}44^{o} = \text{tg}46^{o}$ (do $44^{o} + 46^{o} = 90^{o}$)

mà $\text{tg}46^{o}\,.\,\text{cotg}46^{o} = 1$).

2.16. Kẻ đường cao BH của tam giác ABC thì H nằm trên tia AC (để $\widehat{BAC} = 60^{o}$ là góc nhọn), do đó $HC^2 = (AC - AH)^2$ (xem h. bs. 8a, 8b).



Hình bs . 8a



Hình bs. 8b

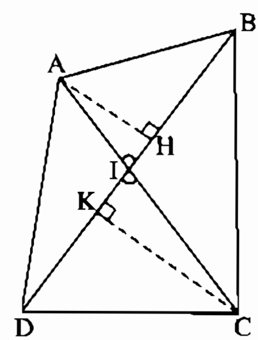
Công thức Py-ta-go cho ta

$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$
$$= BH^2 + (AC - AH)^2$$
$$= BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC.AH$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AC.AH.$$

Do $\widehat{BAC} = 60^{o}$ nên $AH = AB\cos60^{o} = \dfrac{AB}{2}$,

suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC$.

2.17. Giả sử hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại I, $\widehat{AIB} = \alpha$ là góc nhọn (xem h. bs. 9).



Hình bs. 9

Kẻ đường cao AH của tam giác ABD và đường cao CK của tam giác CBD.

Ta có : $AH = AI\sin\alpha$, $CK = CI\sin\alpha$, diện tích tam giác ABD là $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}BD.AH$, diện tích tam giác CBD là

$$S_{CBD} = \frac{1}{2}BD.CK.$$

Từ đó diện tích S của tứ giác ABCD là

$$S = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2}BD.(AH + CK)$$
$$= \frac{1}{2}BD.(AI + CI)\sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}BD.AC\sin\alpha.$$

2.18. a) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$

b) $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}.$

2.19. a) $\dfrac{3\operatorname{cotg}60^\circ}{2\cos^2 30^\circ-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{3}{2}-1}=2\sqrt{3}.$

b) $\dfrac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}30^\circ}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=2.$

2.20. (h.bs. 10). Kẻ đường cao CH của tam giác ACD vuông tại C. Khi đó

AH = BC = 4, HD = AD – AH = 12.

Từ đó

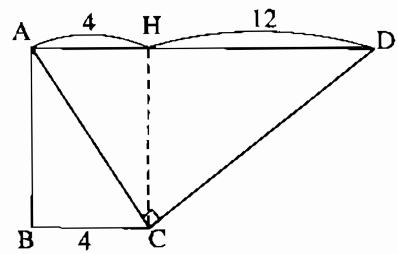
$HC^2 = HA.HD = 48$, vậy $HC = 4\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông HCD, ta có

$$\operatorname{tg}D=\frac{HC}{HD}=\frac{4\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}30^\circ$$

nên $\widehat{D}=30^\circ$. Suy ra

$\widehat{BCD}=180^\circ-30^\circ=150^\circ.$



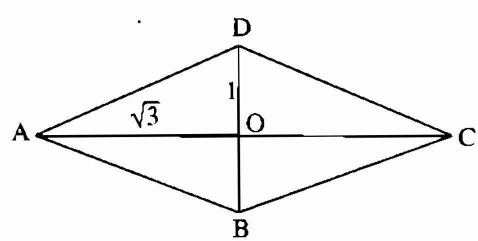
Hình bs. 10

2.21. (h.bs.11). Coi đường chéo

$AC = 2\sqrt{3}$, đường chéo BD = 2 thì để ý rằng AC và BD vuông góc, ta có

$$\operatorname{tg}\widehat{DAC}=\frac{OD}{OA}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}30^\circ$$

nên $\widehat{DAC}=30^\circ$ từ đó góc A của hình thoi là 60°. Suy ra $\widehat{C}=60^\circ$ còn $\widehat{B}=\widehat{D}=120^\circ$.



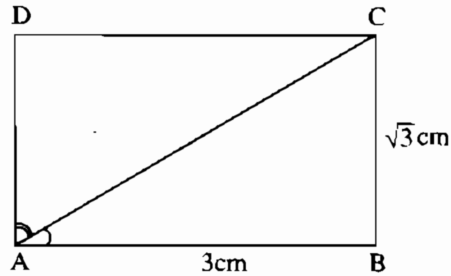
Hình bs. 11

2.22. (h.bs.12). Hình chữ nhật ABCD có $AB = 3cm$, $BC = \sqrt{3}$ cm nên

$$\text{tg}\,\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}\,30^\circ.$$

Vậy $\widehat{BAC} = 30^\circ$,

$\widehat{DAC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



Hình bs. 12

§3. Bảng lượng giác

39. *Đáp số :* 0,6323 ; 0,6115 ; 0,2370 ; 5,5118 ; 0,7071 ; 0,7071.

40. *Đáp số :* a) 33° ; b) $63^\circ37'$; c) 48°.

41. *Đáp số :* a) Không có ; b) Không có ; c) $x \approx 59^\circ10'$.

42. *Đáp số :* a) $CN \approx 5,2915$; b) $\widehat{ABN} \approx 23^\circ35'$;

c) $\widehat{CAN} \approx 55^\circ46'$; d) $AD \approx 4,3426$.

43. *Đáp số :*

a) $AD = BE \approx 4,4721$ (cm) ;

b) $\widehat{DAC} \approx 26^\circ34'$;

c) $\widehat{BXD} = 360^\circ - 90^\circ - \widehat{XDC} - \widehat{XBC}$

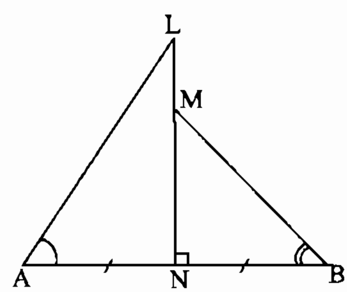
trong đó $\widehat{XBC} = \widehat{XDC}$.

Từ đó ta tính được $\widehat{BXD} \approx 143^\circ8'$.

44. (h.49)

Hướng dẫn : So sánh $\text{tg}\,\widehat{LAN}$ và $\text{tg}\,\widehat{MBN}$.

Đáp số : $\widehat{LAN} > \widehat{MBN}$.



Hình 49

45. *Hướng dẫn :* Dựa vào nhận xét về tính đồng biến của hàm số sin và tính nghịch biến của hàm số cosin.

a) $\sin 25^\circ < \sin 70^\circ$;

b) $\cos 40^\circ > \cos 75^\circ$;

c) $\sin 38^o = \cos 52^o < \cos 38^o$;

d) $\sin 50^o = \cos 40^o > \cos 50^o$.

46. *Hướng dẫn :* Làm tương tự bài 45.

47. a) *Đáp số :* $\sin x - 1 < 0$; b) *Đáp số :* $1 - \cos x > 0$;

c) *Đáp số :* $\sin x - \cos x > 0$ khi $x > 45^o$ và $\sin x - \cos x < 0$ khi $x < 45^o$;

d) *Hướng dẫn :* Làm tương tự câu c).

48. *Hướng dẫn :* Biểu thị $tg\alpha$ và $cotg\alpha$ qua $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, rồi chú ý rằng $0 < \sin\alpha < 1$, $0 < \cos\alpha < 1$.

Đáp số :

a) $tg28^o > \sin 28^o$;

b) $cotg42^o > \cos 42^o$;

c) $cotg73^o > \sin 17^o$;

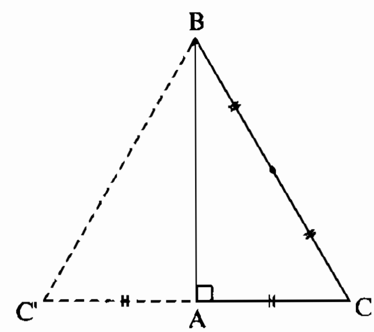
d) $tg32^o > \cos 58^o$.

49. (h.50)

Tam giác ABC là "một nửa" tam giác đều BCC'. Do đó $\widehat{B} = 30^o$.

Vậy $\sin B = \frac{1}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$tgB = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $cotgB = \sqrt{3}$.



Hình 50

50. *Đáp số :*

$\widehat{A} = 90^o$; $\widehat{B} \approx 53^o8'$; $\widehat{C} \approx 36^o52'$.

51. *Đáp số :* $48^o11'$; $1^o49'$.

Bài tập bổ sung

3.1. a) Do $0 < \cos\alpha < 1$ và $\sin\alpha > 0$ nên $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > \sin\alpha$.

b) Do $0 < \sin\alpha < 1$ và $\cos\alpha > 0$ nên $cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > \cos\alpha$.

c) Theo a) $\sin 35^o < \text{tg}35^o$, mà khi góc lớn lên thì tang cũng lớn lên nên $\text{tg}35^o < \text{tg}38^o$. Vậy $\sin 35^o < \text{tg}38^o$.

d) Theo b) $\cos 33^o < \text{cotg}33^o$ mà khi góc lớn lên thì cotang nhỏ đi nên $\text{cotg}33^o < \text{cotg}29^o = \text{tg}61^o$. Suy ra $\cos 33^o < \text{tg}61^o$.

3.2. a) Để ý rằng với các góc nhọn, khi góc lớn lên thì sin của nó lớn lên và chú ý rằng $\cos 20^o = \sin 70^o$, $\cos 40^o = \sin 50^o$ và do $\sin\alpha < \text{tg}\alpha$ nên từ

$\sin 20^o < \sin 50^o\ (= \cos 40^o) < \sin 55^o < \sin 70^o\ (= \cos 20^o) < \text{tg}70^o$

suy ra $\sin 20^o < \cos 40^o < \sin 55^o < \cos 20^o < \text{tg}70^o$.

b) Để ý rằng với các góc nhọn, khi góc lớn lên thì tang của góc đó lớn lên và chú ý rằng $\text{cotg}60^o = \text{tg}30^o$, $\text{cotg}65^o = \text{tg}25^o$ và do $\sin\alpha < \text{tg}\alpha$ nên từ

$\sin 25^o < \text{tg}25^o\ (= \text{cotg}65^o) < \text{tg}30^o\ (= \text{cotg}60^o) < \text{tg}50^o < \text{tg}70^o$

suy ra $\sin 25^o < \text{cotg}65^o < \text{cotg}60^o < \text{tg}50^o < \text{tg}70^o$.

3.3. Trong tam giác ABC vuông tại A, cạnh AC = b, $\widehat{ABC} = \beta$ thì :

a) $AB = c = \dfrac{b}{\text{tg}\beta} = b\,\text{cotg}\beta$, $\widehat{ACB} = 90^o - \beta$, $BC = a = \dfrac{b}{\sin\beta}$.

b) Khi b = 10 (cm), $\beta = 50^o$ thì

$c = \dfrac{10}{\text{tg}\,50^o} \approx 8{,}391(\text{cm})$, $\widehat{ACB} = 40^o$, $a = \dfrac{10}{\sin 50^o} \approx 13{,}054(\text{cm})$.

3.4. Trong tam giác ABC vuông tại A, cạnh AC = b, $\widehat{ACB} = \alpha$ thì :

a) $AB = c = b\,\text{tg}\alpha$, $\widehat{ABC} = 90^o - \alpha$, $BC = a = \dfrac{b}{\cos\alpha}$.

b) Khi b = 12 (cm), $\alpha = 42^o$ thì

$c = 12\text{tg}42^o \approx 10{,}805(\text{cm})$, $\widehat{ABC} = 48^o$, $a = \dfrac{12}{\cos 42^o} \approx 16{,}148(\text{cm})$.

§4. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

52. (h.51)

Hướng dẫn :

Góc nhỏ nhất của tam giác là góc ở đỉnh đối diện với cạnh 4cm, (góc α trên hình 51).

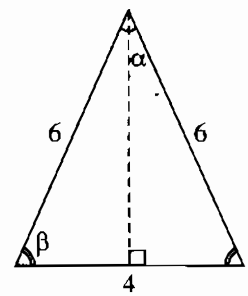
Tam giác đã cho là tam giác cân có cạnh bên là 6cm, đáy là 4cm. Kẻ đường cao ứng với cạnh 4cm.

Cách 1 : Tính $\cos\beta$, từ đó tính β và suy ra α bởi :

$$\alpha = 180^o - 2\beta.$$

Cách 2 : Cũng có thể tính $\sin\frac{\alpha}{2}$, từ đó suy ra $\frac{\alpha}{2}$ rồi tính α.

Đáp số : $\alpha \approx 38^o57'$.



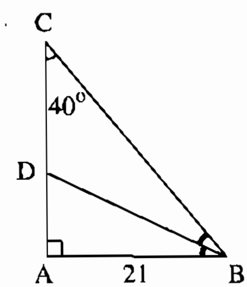
Hình 51

53. (h.52)

Đáp số : a) $AC \approx 25{,}027$cm ;

b) $BC \approx 32{,}670$cm ;

c) $BD \approx 23{,}171$cm.



Hình 52

54. (h.53)

a) *Hướng dẫn :* $BC = 2.8.\sin 17^o \approx 4{,}678$(cm) ;

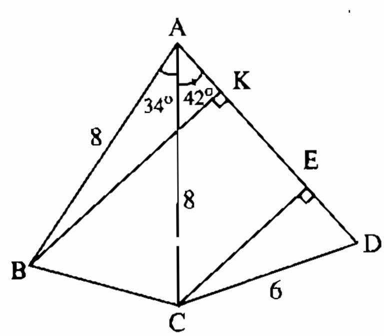
b) *Hướng dẫn :* Kẻ CE vuông góc với AD ($E \in AD$).

Tính CE, sau đó tính $\widehat{ADC}$.

Đáp số : $\widehat{ADC} \approx 63^o9'$;

c) *Hướng dẫn :* Kẻ BK vuông góc với AD ($K \in AD$).

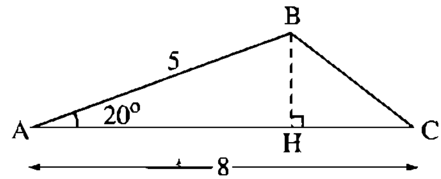
Đáp số : $BK \approx 7{,}762$(cm).



Hình 53

55. (h.54)

Hướng dẫn : Kẻ BH vuông góc với AC. Dựa vào tam giác vuông ABH, biết cạnh huyền AB, biết góc A, theo tỉ số sin của góc A ta tính được BH. Từ đó tính được diện tích tam giác ABC theo công thức



Hình 54

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH.$$

Đáp số :

$$S_{ABC} \approx 6,840(cm^2).$$

56. *Đáp số :* Xấp xỉ 65,818m.

57. *Đáp số :* $AN \approx 6,772cm$;

$AC \approx 13,544cm$.

58. *Đáp số :* Xấp xỉ 20,984m.

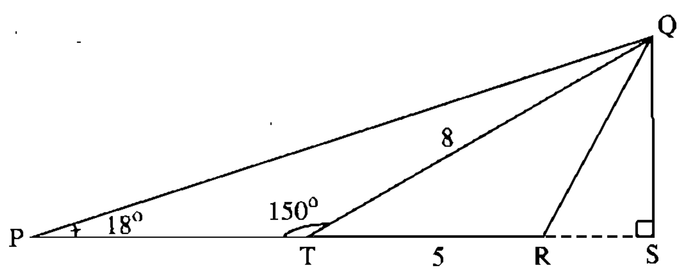
59. *Đáp số :* a) $x = 4$; $y \approx 6,223$;

b) $x \approx 4,5$; $y \approx 2,598$;

c) $x \approx 6,223$; $y \approx 10,223$.

60. (h.55)

a) *Hướng dẫn :* Kẻ QS vuông góc với PR ($S \in PR$). Tính QS, PS, TS, từ đó tính PT.



Hình 55

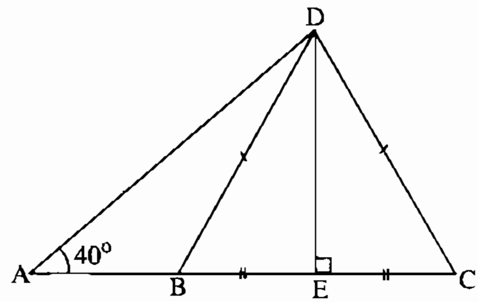
Đáp số : $PT \approx 5,383cm$.

b) *Hướng dẫn :*

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}QS \,.\, PR \approx 20{,}766(cm^2).$$

61. (h.56) *Hướng dẫn :* Kẻ DE vuông góc với BC ($E \in BC$).

Dựa vào tam giác đều BDC, tính được DE. Dựa vào tam giác vuông ADE biết góc A, cạnh góc vuông DE, theo tỉ số sin của góc A ta tính được AD, theo tỉ số tang của góc A ta tính được AE từ đó tính được AB.



Hình 56

Đáp số : a) $AD \approx 6{,}736$cm ;

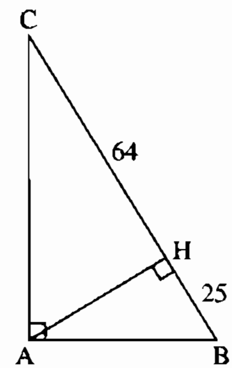
b) $AB \approx 2{,}660$cm.

62. (h.57)

$$AH = \sqrt{HB\,.\,HC} = 40(cm)\ ;$$

$$tgB = \frac{AH}{BH} = 1{,}6 \Rightarrow \hat{B} \approx 57^o59'\ ;$$

$$\hat{C} = 90^o - \hat{B} \approx 32^o1'.$$



Hình 57

63. (h.58)

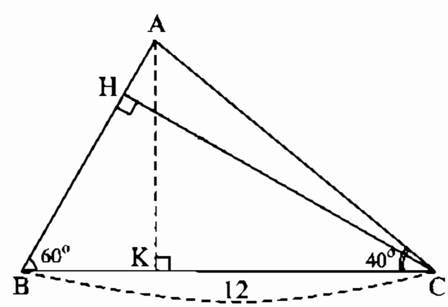
Hướng dẫn : Tính góc A, tính HC, từ đó tính AC.

Kẻ AK vuông góc với BC. Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AK.$$

Dựa vào tam giác vuông AKC. Khi biết góc C và biết cạnh huyền AC, theo tỉ số sin của góc C ta tính được AK. Từ đó suy ra

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AC.\sin C.$$



Hình 58

Đáp số : a) CH ≈ 10,392cm ;

AC ≈ 10,552cm.

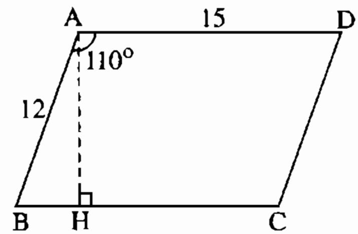
b) $S_{ABC} \approx 40,696cm^2$.

64. *Hướng dẫn* (h.59)

$\widehat{A} = 110^o$ suy ra $\widehat{B} = 70^o$. Từ đó tính được AH = AB.sinB.

$$S_{ABCD} = AH.BC.$$

Đáp số : Xấp xỉ $169,146cm^2$.



Hình 59

65. *Hướng dẫn :* Tính đường cao của hình thang dựa vào một tam giác vuông đã biết một góc nhọn và một cạnh góc vuông, cạnh góc vuông còn lại là đường cao phải tìm. Đường cao của hình thang xấp xỉ 11,196cm.

Đáp số : $S \approx 167,940cm^2$.

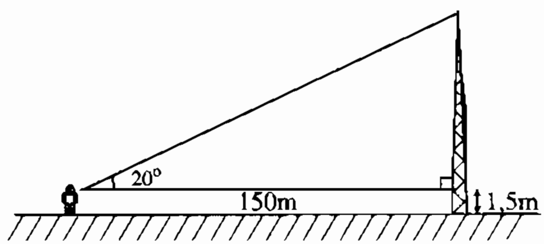
66. *Đáp số :* $36^o6'$.

67. *Đáp số :* 112,86m.

68. (h.60)

Đáp số : 56,1m.

69. *Trả lời :* Trại A cao hơn trại B là 0,491m.



Hình 60

70. *Đáp số :* a) 8,391m ;

b) 11,984m. Anh ta lùi ra xa ngôi nhà hơn.

71. a) *Hướng dẫn :* Tính AC.

Lưu ý rằng tam giác DAC cân tại D nên biết $\widehat{D}$, biết AC thì tính được AD.

Đáp số : AD ≈ 24,811cm.

b) *Hướng dẫn :* $S_{\text{diều}} = S_{DAC} + S_{ABC}$.

Đáp số : $S_{\text{diều}} \approx 269,849cm^2$.

Bài tập bổ sung

4.1. (A).

4.2. (B).

4.3. (C).

4.4. (D).

4.5. Xét tam giác cân ABC có AB = AC, $\widehat{ABC} = \alpha$, đường cao AH (h.bs.13)

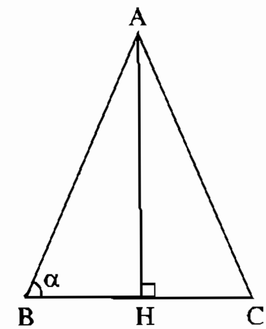
a) AB = AC = b thì AH = b$\sin\alpha$,

BH = $b\cos\alpha$ nên diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}AH.BC = AH.BH$

$= b^2\sin\alpha\cos\alpha.$

b) BC = a thì $AH = \frac{a}{2}\text{tg}\,\alpha$ nên

$S = \frac{a}{2}.AH = \frac{a^2}{4}\text{tg}\,\alpha.$



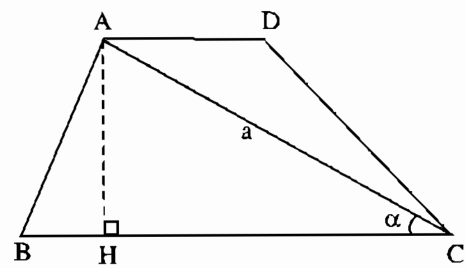
Hình bs. 13

4.6. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC (h.bs.14). Ta có AD + BC = b,

AC = a, $\widehat{ACB} = \alpha$, suy ra

AH = a$\sin\alpha$ và diện tích hình thang là

$S = \frac{AD + BC}{2}.AH = \frac{ab}{2}\sin\alpha.$



Hình bs. 14

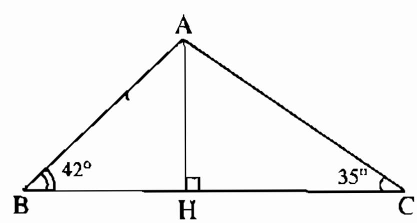
4.7. (h.bs.15). Đặt AH = h thì rõ ràng

$BH = h\,\text{cotg}\,\widehat{ABH} = h\,\text{cotg}\,42^o$,

$CH = h\,\text{cotg}\,\widehat{ACH} = h\,\text{cotg}\,35^o$ (để ý rằng H thuộc đoạn BC vì 35^o, 42^o đều là góc nhọn). Do đó

$7 = BC = BH + CH$

$= h\,(\text{cotg}42^o + \text{cotg}35^o)$, suy ra



Hình bs. 15

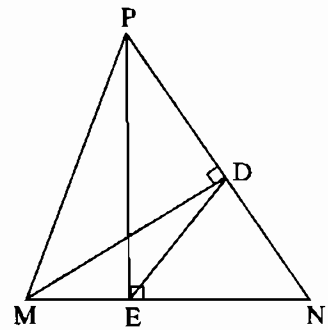
$$h = \frac{7}{\text{cotg}\,42^o + \text{cotg}\,35^o} = \frac{7}{\text{tg}\,48^o + \text{tg}\,55^o} \approx 2{,}757.$$

4.8. (h. bs. 16) a) Ta có $MD = MP\sin P$, suy ra

$$S_{MNP} = \frac{1}{2}NP.MD = \frac{1}{2}NP.MP\sin P.$$

b) Ta có $MD = MN\sin N$ và $MD = DP\,\mathrm{tg}\,P$ nên từ đó suy ra $DP = \dfrac{MN\sin N}{\mathrm{tg}\,P}$.

c) Hai tam giác vuông DMN và EPN đồng dạng vì có góc nhọn N chung nên $\dfrac{DN}{MN} = \dfrac{EN}{PN}$. Hai tam giác DNE và MNP đồng dạng vì có góc N chung và $\dfrac{DN}{MN} = \dfrac{EN}{PN}$.



Hình bs. 16

§5. Ứng dụng thực tế các tỉ số lượng giác của góc nhọn

72. *Đáp số :* Xấp xỉ 6m.

73. *Đáp số :* Xấp xỉ 17,38m.

Chú ý : Độ dài của dây kéo cờ phải gấp đôi chiều cao của cột cờ.

74. *Đáp số :* Xấp xỉ $75^o58'$.

75. *Đáp số :* Xấp xỉ $25^o51'$.

76. *Đáp số :* Xấp xỉ 1,24 hải lí .

77. *Đáp số :* a) Xấp xỉ 191km ;

b) Xấp xỉ $1^o54'$.

78. *Đáp số :*

a) Xấp xỉ $34^o\ 28'$;

b) Xấp xỉ 10,1cm.

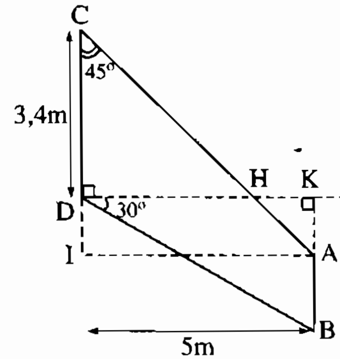
79. *Đáp số :*

a) Xấp xỉ 108m ; Xấp xỉ 280m ;

b) Xấp xỉ 2790m.

Bài tập bổ sung

5.1. Đường thẳng AC cắt đường thẳng vuông góc với CD tại D ở điểm H thì tam giác CDH là tam giác vuông cân, DH = CD = 3,4m. Đường thẳng AB cắt DH tại K thì DK = 5m nên H nằm ở giữa D, K (xem h. bs. 17).



Hình bs. 17

Dựng hình chữ nhật AKDI thì AIC là tam giác vuông cân, AI = KD = 5m và $AC = AI\sqrt{2} = 5\sqrt{2}(m)$.

Trong tam giác vuông BKD, có

$$DB = \frac{DK}{\cos 30^o} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 5{,}77(m).$$

Ta có HKA là tam giác vuông cân, AK = HK = DK – DH = DK – DC

= 5 – 3,4 = 1,6.

Ta có $KB = DK\text{tg}30^o = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, nên suy ra

$$AB = KB - KA = \frac{5\sqrt{3}}{3} - 1{,}6 \approx 1{,}29\ (m).$$

Ôn tập chương I

80. *Đáp số :* a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\text{tg}\alpha = \frac{12}{5}$.

b) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; $\text{tg}\alpha = \frac{8}{15}$.

c) $\sin\alpha = 0{,}8$; $\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

81. *Đáp số :*

a) $\cos^2\alpha$; b) $\sin^2\alpha$;

c) 2 ; d) $\sin^3\alpha$;

e) 1 ;   g) $\sin^2\alpha$;

h) 1 ;   i) $\sin^2\alpha$.

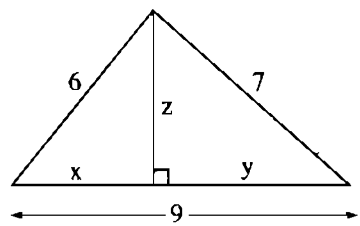
82. (h.61)

Hướng dẫn :

Dùng định lí Py-ta-go để đưa về các hệ thức

$$6^2 - x^2 = 7^2 - y^2,$$
$$x + y = 9.$$

Đáp số : $x \approx 3{,}778$; $y \approx 5{,}222$; $z \approx 4{,}661$.



Hình 61

83. (h.62)

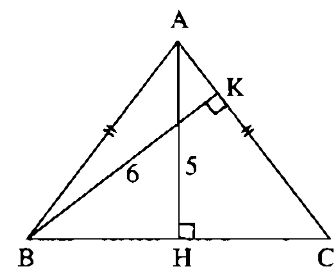
Hướng dẫn : AB = AC ; AH = 5 ; BK = 6.

Tính BC từ hai cách tính diện tích tam giác ABC :

$$5 \,.\, BC = 6 \,.\, AC \ (= 2S_{ABC})$$

trong đó tính AC qua $\dfrac{BC}{2}$ nhờ áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông AHC.

Đáp số : BC = 7,5.



Hình 62

84. (h.63)

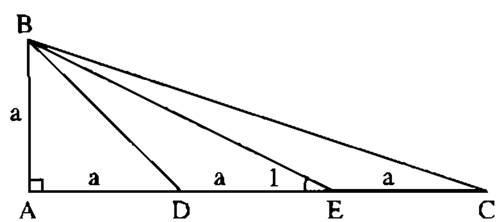
a) $\dfrac{DE}{DB} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \dfrac{DE}{DB} = \dfrac{DB}{DC}$;

b) Sử dụng kết quả câu a) chứng minh $\Delta BDE \backsim \Delta CDB$ (c.g.c) ;

c) *Cách 1* : Từ kết quả câu b) suy ra $\hat{E}_1 = \widehat{CBD}$.

Do đó

$$\widehat{AEB} + \widehat{BCD} = \hat{E}_1 + \widehat{BCD} =$$
$$= \widehat{CBD} + \widehat{BCD} = \widehat{ADB} = 45^o.$$



Hình 63

Cách 2 : $\quad tgE_1 = \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \hat{E}_1 \approx 26^o34'$;

$$tgC = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \hat{C} \approx 18^o26',$$

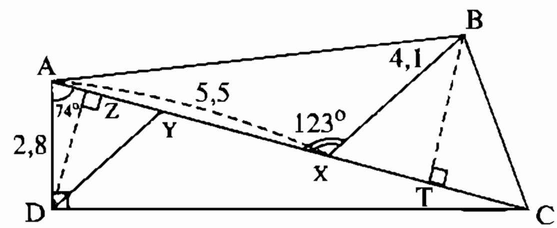
do đó $\qquad \hat{E}_1 + \hat{C} \approx 26^o34' + 18^o26' = 45^o$.

85. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0,8}{2,34} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} \approx 70^o \Rightarrow \alpha \approx 140^o$.

86. (h.64)

a) *Hướng dẫn :* Dựa vào tam giác vuông ADC. Khi biết góc A, cạnh góc vuông AD, theo tỉ số cosin của góc A ta tính được AC.

Đáp số : AC ≈ 10,160(cm) ;



Hình 64

b) *Hướng dẫn :* Kẻ DZ ⊥ AC (Z ∈ AC). Tính DZ.

Từ DY // BX, tính $\widehat{DYZ}$. Từ đó tính được :

$$DY \approx 3,210 \ ; \ AZ \approx 0,772 \ ; \ ZY \approx 1,748 \ ; \ AY \approx 2,520.$$

Đáp số : XY ≈ 2,980(cm) ;

c) *Hướng dẫn :* Kẻ BT ⊥ XC (T ∈ XC), CX = AC – AX ≈ 4,660 ; $\widehat{BXC} = 57^o$.

$$S_{BCX} = \frac{1}{2}CX.BT.$$

Dựa vào tam giác vuông BXT. Khi biết cạnh huyền BX và biết góc BXT, theo tỉ số sin của góc BXT ta tính được BT :

$$BT = BX.\sin\widehat{BXC}.$$

Đáp số : $S_{BCX} \approx 8,012(cm^2)$.

87. *Hướng dẫn :* Đặt AP = x suy ra BP = 60 – x. Ta có phương trình

$$xtg20^o = (60-x)tg30^o.$$

Đáp số : AP ≈ 36,801cm ; BP ≈ 23,119cm ; CP ≈ 13,396cm.

88. *Đáp số :* 102,611m.

89. *Đáp số :* Chu vi bằng 105cm, diện tích xấp xỉ 595cm^2.

90. a) *Đáp số :* BC = 10cm, $\hat{B} \approx 53°8'$, $\hat{C} \approx 36°52'$;

b) *Hướng dẫn :* Sử dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABC, ta có :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Đáp số : BD ≈ 4,286cm ; CD ≈ 5,714cm.

c) *Đáp số :* Hình vuông cạnh 3,429cm. Chu vi : 13,716cm. Diện tích : 11,758cm^2.

91. *Đáp số :* a) Xấp xỉ 2,429 ;

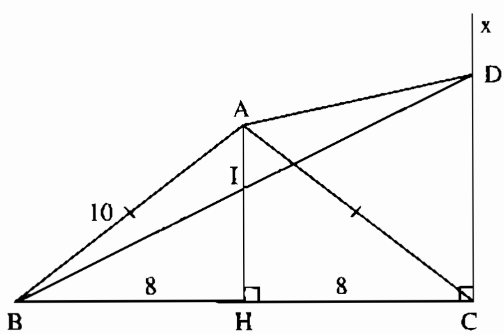
b) Đường cao xấp xỉ 4,615a.

92. (h.65)

Đáp số :

a) $\hat{A} \approx 106°16'$; $\hat{B} = \hat{C} \approx 36°52'$.

b) $S_{ABCD} = S_{ABH} + S_{AHCD} = 80(cm^2)$.



Hình 65

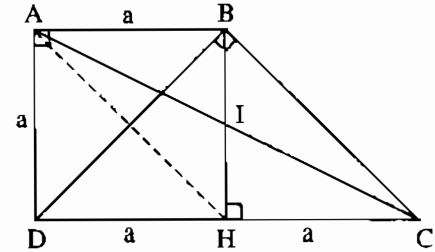
93. a) *Hướng dẫn :* Dùng định lí Py-ta-go đảo.

b) *Đáp số :* sinB = 0,8 ; sinC = 0,6.

94. (h.66)

a) *Hướng dẫn :* Gọi H là trung điểm DC. Chứng minh tứ giác ABHD là hình vuông. Khi đó tam giác BHC vuông cân tại H, suy ra tgC = 1.

b) *Đáp số :* $\frac{S_{DBC}}{S_{ABCD}} = \frac{2}{3}$.



Hình 66

c) *Hướng dẫn :*

Cách 1 : Tứ giác ABCH là hình bình hành, suy ra $\Delta BIC = \Delta HIA$, do đó $S_{ABC} = S_{ABH} = \frac{1}{2} S_{BCD}$.

Cách 2 : Ta cũng có thể nhận xét hai tam giác ABC và BDC có các cạnh đáy DC = 2AB, đường cao ứng với cạnh AB của tam giác ABC và đường cao ứng với cạnh DC của tam giác BCD bằng nhau.

Đáp số : $\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \frac{1}{2}$.

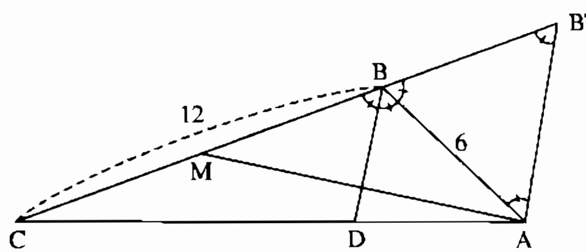
95. (h.67)

a) *Hướng dẫn :* Từ A kẻ đường thẳng song song với DB, đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại B'.

Khi đó ta có tam giác đều ABB' cạnh 6cm.

Tính DB nhờ biến đổi tỉ lệ thức $\frac{BD}{B'A} = \frac{CD}{CA}$.

Đáp số : BD = 4cm.



Hình 67

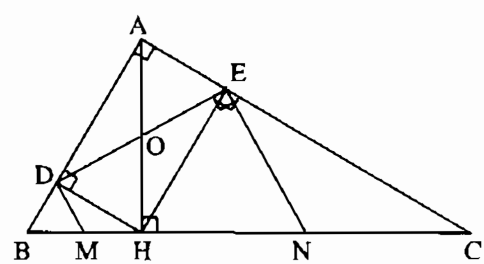
b) *Hướng dẫn :* Tam giác ABM cân tại B nên suy ra được $AM \perp BD$.

96. (h.68)

a) *Hướng dẫn :* Tứ giác ADHE là hình chữ nhật nên DE = AH. Tính AH nhờ hệ thức trong tam giác vuông ABC.

Đáp số : DE = 6cm.

b) *Hướng dẫn :* Chứng minh $\Delta DOM = \Delta HOM$ (Lưu ý chúng là hai tam giác vuông) suy ra DM = HM.



Hình 68

Mặt khác, chứng minh tam giác MBD cân tại M, suy ra MB = MD. Do đó BM = HM hay M là trung điểm BH.

Chứng minh tương tự để có N là trung điểm của HC.

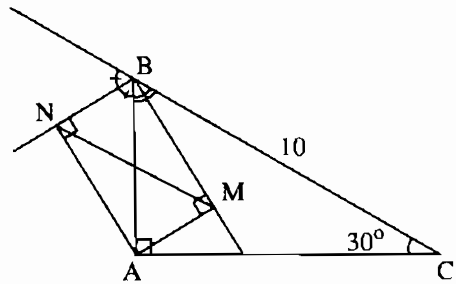
c) *Hướng dẫn :* Tứ giác EDMN là hình thang với đường cao DE, các đáy DM và EN đều biết được độ dài.

Đáp số : $S_{EDMN} = 19{,}5cm^2$.

97. (h.69)

a) *Đáp số :* AB = 5cm, AC ≈ 8,66cm ;

b) *Hướng dẫn :* Tính góc BMN. Suy ra $\widehat{BMN} = \widehat{MBC}$. Do đó MN // BC. Chứng minh tứ giác AMBN là hình chữ nhật, suy ra MN = AB.



Hình 69

c) *Hướng dẫn :* Tam giác MAB và ABC là những tam giác vuông. Hãy chỉ ra các cặp góc nhọn tương ứng bằng nhau, chẳng hạn $\widehat{MAB} = \widehat{ABC}$. Tỉ số đồng dạng là $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

98. a) *Hướng dẫn :* Chứng minh $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Đáp số : $\hat{B} \approx 36^o52'$; $\hat{C} \approx 53^o8'$;

AH = 3,6cm.

b) *Trả lời :* Tập hợp các điểm M là hai đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng bằng AH.

99. (h.70)

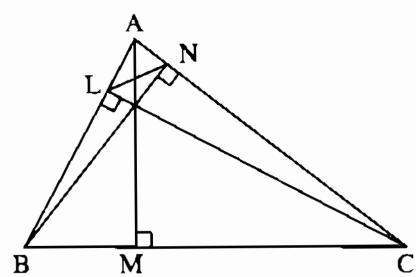
a) Hai tam giác vuông ANB và ALC có góc nhọn A chung nên $\Delta ANB \backsim \Delta ALC$.

Suy ra $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AL}{AC}$.

Do đó $\Delta ANL \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).

b) Ta có AN = AB.cosA ; BL = BC.cosB ; CM = AC . cosC.

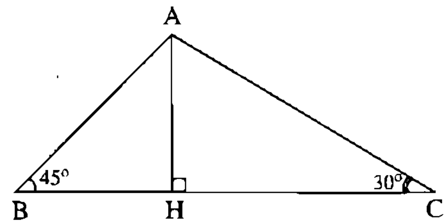
Từ đó suy ra đpcm.



Hình 70

Bài tập bổ sung

I.1. Vẽ đường cao AH. Đặt BH = x, CH = y thì do H nằm giữa B và C (hai góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ là góc nhọn) suy ra x + y = 4 (xem h. bs. 18).



Hình bs. 18

Ta có BH = AH = HCtg30° nên

$x = y\text{tg}30^\circ = \dfrac{y}{\sqrt{3}}$. Vậy ta được

$x + \sqrt{3}x = 4$, suy ra $x = \dfrac{4}{1+\sqrt{3}} \approx 1{,}46$ (cm).

Vậy $AB = \dfrac{AH}{\sin 45^\circ} = \dfrac{2AH}{\sqrt{2}} \approx 2{,}06$ (cm).

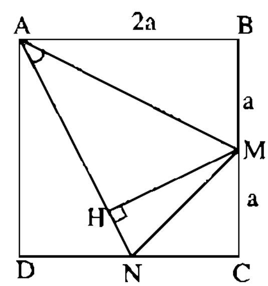
$AC = 2AH \approx 1{,}46 \,.\, 2 = 2{,}92$ (cm).

I.2. (h.bs.19). Kẻ đường cao MH của tam giác cân AMN. Ta có $\sin\widehat{NAM} = \dfrac{HM}{AM}$

và diện tích tam giác AMN là $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}AN.MH$

$= \dfrac{1}{2}AN.AM\sin\widehat{NAM} = \dfrac{1}{2}AN^2\sin\widehat{NAM}$

$= \dfrac{1}{2}(AD^2 + DN^2)\sin\widehat{NAM} = \dfrac{5a^2}{2}\sin\widehat{NAM}.$



Hình bs. 19

Mặt khác, $S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{MNC}$

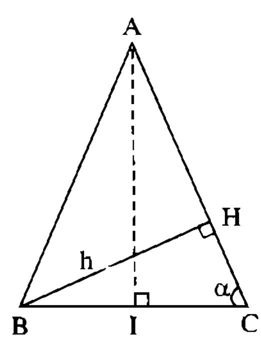
$$= 4a^2 - 2a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Suy ra $\sin\widehat{NAM} = \dfrac{3}{5}$, từ đó $\cos\widehat{NAM} = \sqrt{1 - \sin^2\widehat{NAM}} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$.

I.3. (h.bs.20). $\widehat{A} = 180^\circ - 2\alpha$. Tam giác vuông HBC có $BC = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Kẻ đường cao AI của tam giác ABC thì được

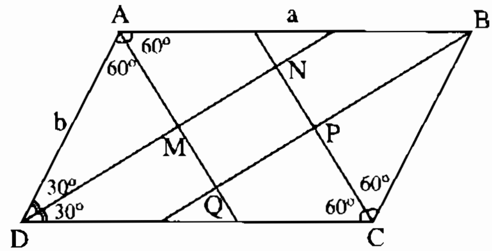
$$AC = \frac{IC}{\cos\alpha} = \frac{\frac{BC}{2}}{\cos\alpha} = \frac{h}{2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Vậy $AB = AC = \dfrac{h}{2\sin\alpha\cos\alpha}$.



Hình bs. 20

I.4. (h.bs.21). Đường phân giác của góc A cắt đường phân giác của góc D tại M thì tam giác ADM có hai góc bằng 60^o và 30^o nên các đường phân giác đó vuông góc với nhau. Lập luận đó chứng tỏ hình MNPQ có 4 góc vuông nên MNPQ là hình chữ nhật.



Hình bs. 21

Trong tam giác vuông ADM có $DM = AD\sin\widehat{DAM} = b\sin 60^o = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông DCN (N là giao của đường phân giác góc D và đường phân giác góc C) có $DN = DC\sin\widehat{DCN} = a\sin 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $MN = DN - DM = (a-b)\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông DCN có $CN = CD\cos 60^o = \frac{a}{2}$. Trong tam giác vuông BCP (P là giao của đường phân giác góc C với đường phân giác góc B) có $CP = CB\cos 60^o = \frac{b}{2}$. Vậy $NP = CN - CP = \frac{a-b}{2}$.

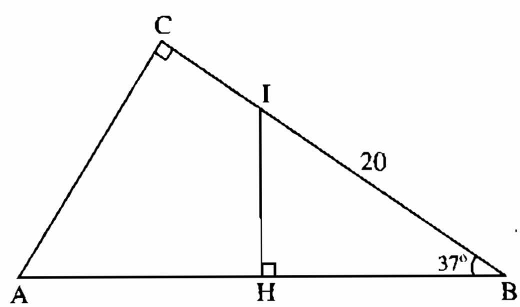
Suy ra diện tích hình chữ nhật MNPQ là

$$MN \times NP = (a-b)^2\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

I.5. (h.bs.22). Gọi H là trung điểm của AB thì trong tam giác vuông HBI, ta có HB = IB cosB nên $AB = 2HB = 2IB\cos B = 40\cos 37^o \approx 31{,}95$.

Trong tam giác vuông ABC, ta có : $AC = AB\sin B$

$= 31{,}95\sin 37^o \approx 19{,}23$.



Hình bs. 22

Chương II

ĐƯỜNG TRÒN

A. ĐỀ BÀI

§1. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

1. Cho hình chữ nhật ABCD có AD = 12cm, CD = 16cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

2. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy xác định vị trí tương đối của mỗi điểm

$$A(1\ ;\ -1),\ B(-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2})\text{ và }C(1\ ;\ 2)\text{ đối với đường tròn }(O\ ;\ 2).$$

3. Hãy nối mỗi ô ở cột trái với một ô ở cột phải để được khẳng định đúng :

(1) Tập hợp các điểm có khoảng cách đến điểm O cố định bằng 3cm	(4) có khoảng cách đến điểm O nhỏ hơn hoặc bằng 3cm.
(2) Đường tròn tâm O bán kính 3cm gồm tất cả những điểm	(5) cách điểm O một khoảng bằng 3cm.
(3) Hình tròn tâm O bán kính 3cm gồm tất cả những điểm	(6) là đường tròn tâm O bán kính 3cm.
	(7) có khoảng cách đến điểm O lớn hơn 3cm.

4. Cho góc nhọn xOy và hai điểm D, E thuộc tia Oy. Dựng đường tròn tâm M đi qua D và E sao cho tâm M nằm trên tia Ox.

5. Trong các câu sau, câu nào đúng ? Câu nào sai ?

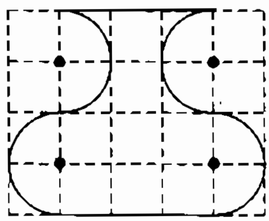
a) Hai đường tròn phân biệt có thể có hai điểm chung.

b) Hai đường tròn phân biệt có thể có ba điểm chung phân biệt.

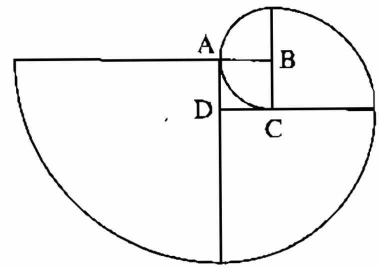
c) Tâm của đường tròn ngoại tiếp một tam giác bao giờ cũng nằm trong tam giác ấy.

6. a) Quan sát hình lọ hoa trên giấy kẻ ô vuông (h.71) rồi vẽ lại hình đó vào vở.

b) Quan sát đường xoắn ốc trên hình 72 rồi vẽ lại hình đó vào vở. Tính bán kính của các cung tròn tâm B, C, D, A, biết cạnh hình vuông ABCD bằng 1 đơn vị dài.



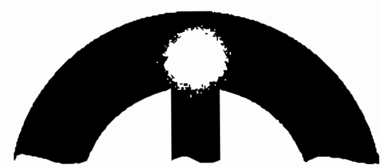
Hình 71



Hình 72

7. (h.73)

Có một chi tiết máy (mà đường viền ngoài là đường tròn) bị gãy. Làm thế nào để xác định được bán kính của đường viền ?



Hình 73

8. Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo, OA = $\sqrt{2}$ cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 2cm. Trong năm điểm A, B, C, D, O, điểm nào nằm trên đường tròn ? Điểm nào nằm trong đường tròn ? Điểm nào nằm ngoài đường tròn ?

9. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ đường tròn (O) có đường kính BC, nó cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D, E.

a) Chứng minh rằng CD $\perp$ AB, BE $\perp$ AC.

b) Gọi K là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng AK vuông góc với BC.

10. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3cm. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng :

(A) $2\sqrt{3}$ cm ; (B) 2cm ; (C) $\sqrt{3}$ cm ; (D) $\sqrt{2}$ cm.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

11. Cho hình vuông ABCD.

a) Chứng minh rằng bốn đỉnh của hình vuông cùng nằm trên một đường tròn. Hãy chỉ ra vị trí của tâm đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn đó, biết cạnh của hình vuông bằng 2dm.

12. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn ở D.

a) Vì sao AD là đường kính của đường tròn (O) ?

b) Tính số đo góc ACD.

c) Cho BC = 24cm, AC = 20cm. Tính đường cao AH và bán kính đường tròn (O).

13*. Tam giác ABC cân tại A, BC = 12cm, đường cao AH = 4cm. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

14*. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm bên ngoài đường tròn. Dựng đường kính COD sao cho AC = BD.

Bài tập bổ sung

1.1. Xét tính đúng – sai của mỗi khẳng định sau :

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O).

a) Nếu BC là đường kính của đường tròn thì $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

b) Nếu AB = AC thì AO vuông góc với BC.

c) Nếu tam giác ABC không vuông thì điểm O nằm bên trong tam giác đó.

1.2. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của DE, DC, BC, BE. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q thuộc cùng một đường tròn.

1.3. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo ; E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng sáu điểm E, B, F, G, D, H thuộc cùng một đường tròn.

§2. Đường kính và dây của đường tròn

15. Cho tam giác ABC, các đường cao BH và CK. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn ;

b) HK < BC.

16. Tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^o$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

b) So sánh độ dài AC và BD. Nếu AC = BD thì tứ giác ABCD là hình gì ?

17. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và dây EF không cắt đường kính. Gọi I và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến EF. Chứng minh rằng IE = KF.

18. Cho đường tròn (O) có bán kính OA = 3cm. Dây BC của đường tròn vuông góc với OA tại trung điểm của OA. Tính độ dài BC.

19. Cho đường tròn (O), đường kính AD = 2R. Vẽ cung tâm D bán kính R, cung này cắt đường tròn (O) ở B và C.

a) Tứ giác OBDC là hình gì ? Vì sao ?

b) Tính số đo các góc CBD, CBO, OBA.

c) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

20. a) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD. Các đường vuông góc với CD tại C và D tương ứng cắt AB ở M và N. Chứng minh rằng AM = BN.

b) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên AB lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Qua M và qua N, kẻ các đường thẳng song song với nhau, chúng cắt nửa đường tròn lần lượt ở C và D. Chứng minh rằng MC và ND vuông góc với CD.

21*. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng CH = DK.

22. Cho đường tròn (O ; R) và điểm M nằm bên trong đường tròn.

a) Hãy nêu cách dựng dây AB nhận M làm trung điểm.

b) Tính độ dài AB ở câu a) biết rằng R = 5cm ; OM = 1,4cm.

23. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên trong đường tròn, điểm B nằm bên ngoài đường tròn sao cho trung điểm I của AB nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây CD vuông góc với OI tại I. Hãy cho biết ACBD là hình gì ? Vì sao ?

Bài tập bổ sung

2.1. Độ dài cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn (O ; R) bằng

(A) $\frac{R}{2}$; (B) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; (C) $R\sqrt{3}$; (D) Một đáp số khác.

Hãy chọn phương án đúng.

2.2. Cho đường tròn (O ; 2cm). Vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD.

2.3. Cho đường tròn (O ; R), dây AB khác đường kính. Vẽ về hai phía của AB các dây AC, AD. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ B đến AC và AD. Chứng minh rằng :

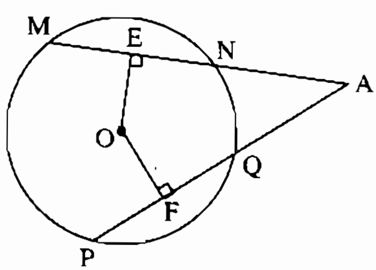
a) Bốn điểm A, H, B, K thuộc cùng một đường tròn ;

b) HK < 2R.

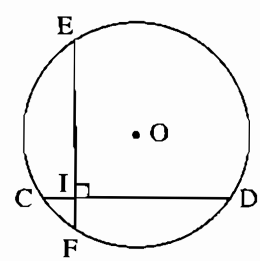
§3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

24. Cho hình 74, trong đó MN = PQ. Chứng minh rằng :

a) AE = AF ; b) AN = AQ.



Hình 74



Hình 75

25. Cho hình 75, trong đó hai dây CD, EF bằng nhau và vuông góc với nhau tại I, IC = 2cm, ID = 14cm. Tính khoảng cách từ O đến mỗi dây.

26. Cho đường tròn (O), dây AB và dây CD, AB < CD. Giao điểm K của các đường thẳng AB, CD nằm ngoài đường tròn. Đường tròn (O ; OK) cắt KA và KC tại M và N.

Chứng minh rằng KM < KN.

27. Cho đường tròn (O) và điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng dây AB vuông góc với OI tại I ngắn hơn mọi dây khác đi qua I.

28. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$. Gọi OH, OI, OK theo thứ tự là khoảng cách từ O đến BC, AC, AB. So sánh các độ dài OH, OI, OK.

29. Cho đường tròn (O), hai dây AB, CD bằng nhau và cắt nhau tại điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng :

a) IO là tia phân giác của một trong hai góc tạo bởi hai dây AB và CD.

b) Điểm I chia AB, CD thành các đoạn thẳng bằng nhau đôi một.

30. Cho đường tròn tâm O bán kính 25cm. Hai dây AB, CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự bằng 40cm, 48cm. Tính khoảng cách giữa hai dây ấy.

31. Cho đường tròn (O), các bán kính OA và OB. Trên cung nhỏ AB lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Gọi C là giao điểm của các đường thẳng AM và BN. Chứng minh rằng :

a) OC là tia phân giác của góc AOB.

b) OC vuông góc với AB.

32*. Cho đường tròn tâm O bán kính 5dm, điểm M cách O là 3dm.

a) Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M.

b) Tính độ dài dây dài nhất đi qua M.

33*. Cho đường tròn (O), hai dây AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Cho biết AB > CD, chứng minh rằng MH > MK.

34*. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm bên trong đường tròn và không cùng thuộc một đường kính. Dựng hai dây song song và bằng nhau sao cho điểm A nằm trên một dây, điểm B nằm trên dây còn lại.

Bài tập bổ sung

3.1. Cho đường tròn (O) đường kính 6cm, dây AB bằng 2cm. Khoảng cách từ O đến AB bằng

(A) $\sqrt{35}$ cm ; (B) $\sqrt{5}$ cm ; (C) $4\sqrt{2}$ cm ; (D) $2\sqrt{2}$ cm.

Hãy chọn phương án đúng.

3.2. Cho đường tròn (O), điểm I nằm bên trong đường tròn (I khác O). Dựng dây AB đi qua I và có độ dài ngắn nhất.

3.3*. Cho đường tròn (O ; 25cm), điểm C cách O là 7cm. Có bao nhiêu dây đi qua C có độ dài là một số nguyên xentimét ?

§4. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

35. Trên mặt phẳng toạ độ cho điểm I có toạ độ $(-3\ ;\ 2)$. Nếu vẽ đường tròn tâm I bán kính bằng 2 thì đường tròn đó có vị trí tương đối như thế nào đối với các trục toạ độ ?

36. Cho đường thẳng a. Tâm I của tất cả các đường tròn có bán kính 5cm và tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào ?

37. Cho điểm A cách đường thẳng xy là 12cm. Vẽ đường tròn (A ; 13cm).

a) Chứng minh rằng đường tròn (A) có hai giao điểm với đường thẳng xy.

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính độ dài BC.

38. Cho đường tròn (O) bán kính bằng 2cm. Một đường thẳng đi qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn và cắt đường tròn tại B và C, trong đó AB = BC. Kẻ đường kính COD. Tính độ dài AD.

39. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), AB = 4cm, BC = 13cm, CD = 9cm.

a) Tính độ dài AD.

b) Chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC.

40. Cho đường tròn (O), bán kính OA, dây CD là đường trung trực của OA.

a) Tứ giác OCAD là hình gì ? Vì sao ?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại C, tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I. Tính độ dài CI biết OA = R.

41*. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Qua điểm C thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến d. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB. Chứng minh rằng :

a) CE = CF ;

b) AC là tia phân giác của góc BAE ;

c) $CH^2 = AE.BF$.

Bài tập bổ sung

4.1. Cho đoạn thẳng AB. Đường tròn (O) đường kính 2cm tiếp xúc với đường thẳng AB. Tâm O nằm trên

(A) Đường vuông góc với AB tại A ;

(B) Đường vuông góc với AB tại B ;

(C) Hai đường thẳng song song với AB và cách AB một khoảng 1cm ;

(D) Hai đường thẳng song song với AB và cách AB một khoảng 2cm.

Hãy chọn phương án đúng.

4.2. Cho đường tròn (O ; 2cm), điểm A di chuyển trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tại A, lấy điểm M sao cho AM = OA. Điểm M chuyển động trên đường nào ?

4.3. Cho đường tròn (O ; 15cm), dây AB = 24cm. Một tiếp tuyến song song với AB cắt các tia OA, OB theo thứ tự ở E, F. Tính độ dài EF.

§5. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

42. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Dùng thước và compa, hãy dựng các điểm B và C thuộc đường tròn (O) sao cho AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

43. Cho điểm A nằm trên đường thẳng d, điểm B nằm ngoài đường thẳng d. Dựng đường tròn (O) đi qua A và B, nhận đường thẳng d làm tiếp tuyến.

44. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường tròn (B ; BA) và đường tròn (C ; CA), chúng cắt nhau tại điểm D (khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (B).

45*. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Vẽ đường tròn (O) có đường kính AH. Chứng minh rằng :

a) Điểm E nằm trên đường tròn (O) ;

b) DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

46. Cho góc nhọn xOy, điểm A thuộc tia Ox.

Dựng đường tròn tâm I tiếp xúc với Ox tại A và có tâm I nằm trên tia Oy.

47. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không giao nhau. Dựng tiếp tuyến của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến đó song song với d.

Bài tập bổ sung

5.1. Xét tính đúng – sai của mỗi khẳng định sau :

a) Nếu đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) tại A thì d vuông góc với OA.

b) Nếu đường thẳng d vuông góc với bán kính OA của đường tròn (O) thì d là tiếp tuyến của đường tròn.

5.2. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD vuông góc với OA tại trung điểm của OA. Gọi M là điểm đối xứng với O qua A. Chứng minh rằng MC là tiếp tuyến của đường tròn.

§6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

48. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

b) Vẽ đường kính NOC. Chứng minh rằng MC // AO.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết OM = 3cm, OA = 5cm.

49. Cho đường tròn (O), điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến MD, ME với đường tròn (D, E là các tiếp điểm). Qua điểm I thuộc cung nhỏ DE, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt MD và ME theo thứ tự ở P và Q. Biết MD = 4cm, tính chu vi tam giác MPQ.

50. Cho góc xOy khác góc bẹt, điểm A nằm trên tia Ox. Dựng đường tròn (I) đi qua A và tiếp xúc với hai cạnh của góc xOy.

51. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là điểm bất kì thuộc tia Ax. Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By ở N.

a) Tính số đo góc MON.

b) Chứng minh rằng MN = AM + BN.

c) Chứng minh rằng $AM.BN = R^2$ (R là bán kính của nửa đường tròn).

52. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp điểm trên AC, AB theo thứ tự là D, E. Cho BC = a, AC = b, AB = c. Tính độ dài các đoạn tiếp tuyến AD, AE theo a, b, c.

53. Tính diện tích tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I ; r).

54. Cho đường tròn (O ; 3cm) và điểm A có AO = 5cm. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Tính độ dài OH.

b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E. Tính chu vi tam giác ADE.

55. Cho đường tròn (O ; 2cm), các tiếp tuyến AB và AC kẻ từ A đến đường tròn vuông góc với nhau tại A (B và C là các tiếp điểm).

a) Tứ giác ABOC là hình gì ? Vì sao ?

b) Gọi M là điểm bất kì thuộc cung nhỏ BC. Qua M kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E. Tính chu vi tam giác ADE.

c) Tính số đo góc DOE.

56. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (A ; AH). Kẻ các tiếp tuyến BD, CE với đường tròn (D, E là các tiếp điểm khác H). Chứng minh rằng :

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng ;

b) DE tiếp xúc với đường tròn có đường kính BC.

57. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có chu vi 2p, bán kính đường tròn nội tiếp bằng r thì diện tích S của tam giác có công thức :

$$S = p.r$$

58. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D, E.

a) Tứ giác ADOE là hình gì ? Vì sao ?

b) Tính bán kính của đường tròn (O) biết AB = 3cm, AC = 4cm.

59. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$AB + AC = 2(R + r).$$

60. Cho tam giác ABC, đường tròn (K) bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với các tia AB và AC theo thứ tự tại E và F. Cho BC = a, AC = b, AB = c. Chứng minh rằng :

a) $AE = AF = \dfrac{a+b+c}{2}$;

b) $BE = \dfrac{a+b-c}{2}$;

c) $CF = \dfrac{a+c-b}{2}$.

61*. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là một điểm bất kì thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D.

a) Chứng minh rằng đường tròn có đường kính CD tiếp xúc với AB.

b) Tìm vị trí của điểm M để hình thang ABDC có chu vi nhỏ nhất.

c) Tìm vị trí của C, D để hình thang ABDC có chu vi bằng 14cm, biết AB = 4cm.

62*. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua một điểm M thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D. Gọi N là giao điểm của AD và BC, H là giao điểm của MN và AB. Chứng minh rằng :

a) $MN \perp AB$;

b) MN = NH.

63*. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng

$$S_{ABC} = BD.\,DC.$$

Bài tập bổ sung

6.1. Độ dài mỗi cạnh của tam giác đều ngoại tiếp đường tròn (O ; r) bằng

(A) $r\sqrt{3}$; (B) $2r\sqrt{3}$; (C) 4r ; (D) 2r.

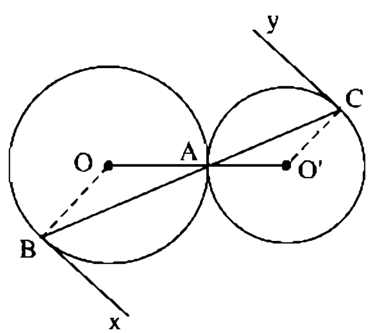
Hãy chọn phương án đúng.

6.2. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng đi qua O và song song với AB cắt AC ở D. Đường thẳng đi qua O và song song với AC cắt AB ở E. Tứ giác ADOE là hình gì ?

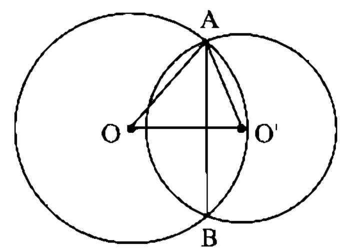
6.3. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Kẻ dây CD song song với AB. Chứng minh rằng BC = BD.

§7. Vị trí tương đối của hai đường tròn

64. Cho hình 76, trong đó hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A. Chứng minh rằng các tiếp tuyến Bx và Cy song song với nhau.



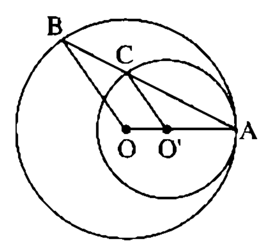
Hình 76



Hình 77

65. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B như trên hình 77. Biết OA = 15cm, O'A = 13cm, AB = 24cm. Tính độ dài OO'.

66. Cho hai đường tròn (O), (O') tiếp xúc nhau tại A như trên hình 78. Chứng minh rằng các bán kính OB và O'C song song với nhau.



Hình 78

67. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ các đường kính AOC, AO'D. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng và AB ⊥ CD.

68. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi I là trung điểm của OO'. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA, cắt các đường tròn (O) và (O') tại C và D (khác A). Chứng minh rằng AC = AD.

69. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, trong đó O' nằm trên đường tròn (O). Kẻ đường kính O'OC của đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng CA, CB là các tiếp tuyến của đường tròn (O').

b) Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB ở I. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng O'B ở K. Chứng minh rằng ba điểm O, I, K thẳng hàng.

70*. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Dây AC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O') tại A. Dây AD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Gọi K là điểm đối xứng với A qua trung điểm I của OO', E là điểm đối xứng với A qua B. Chứng minh rằng :

a) $AB \perp KB$;

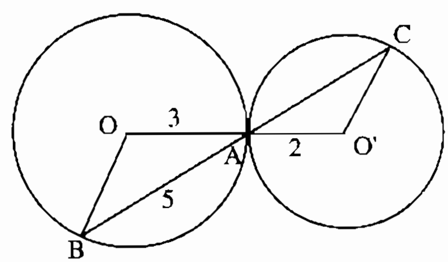
b) Bốn điểm A, C, E, D nằm trên cùng một đường tròn.

Bài tập bổ sung

7.1. Cho h. bs. 23, trong đó OA = 3, O'A = 2, AB = 5. Độ dài AC bằng

(A) $\frac{10}{3}$; (B) 3,5 ; (C) 3 ; (D) 4.

Hãy chọn phương án đúng.



Hình bs. 23

7.2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại C và D (khác B). Chứng minh rằng $OO' = \frac{1}{2}CD$.

§8. Vị trí tương đối của hai đường tròn (tiếp theo)

71. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ các đường tròn (I ; IA) và (B ; BA).

a) Hai đường tròn (I) và (B) nói trên có vị trí tương đối như thế nào đối với nhau ? Vì sao ?

b) Kẻ một đường thẳng đi qua A, cắt các đường tròn (I) và (B) theo thứ tự tại M và N. So sánh các độ dài AM và MN.

72. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Gọi AB là dây bất kì của đường tròn nhỏ. Đường thẳng AB cắt đường tròn lớn ở C và D (A nằm giữa B và C). So sánh các độ dài AC và BD.

73. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn ($C \in (O)$, $D \in (O')$).

a) Tính số đo góc CAD.

b) Tính độ dài CD biết OA = 4,5cm, O'A = 2cm.

74. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Một đường tròn (O') cắt một đường tròn tâm O tại A, B và cắt đường tròn tâm O còn lại tại C, D. Chứng minh rằng AB // CD.

75. Cho đường tròn (O ; 3cm) và đường tròn (O' ; 1cm) tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai bán kính OB, O'C song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO'.

a) Tính số đo góc BAC.

b) Gọi I là giao điểm của BC và OO'. Tính độ dài OI.

76. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB, AO'C. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, $D \in (O)$, $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Tính số đo góc DAE.

b) Tứ giác ADME là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

77*. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O'). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO', Q là điểm đối xứng với N qua OO'. Chứng minh rằng :

a) MNQP là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

c) MN + PQ = MP + NQ.

78. Cho hai đường tròn (O ; 2cm) và (O' ; 3cm), OO' = 6cm.

a) Hai đường tròn (O),(O') có vị trí tương đối như thế nào đối với nhau ?

b) Vẽ đường tròn (O' ; 1cm) rồi kẻ tiếp tuyến OA với đường tròn đó (A là tiếp điểm). Tia O'A cắt đường tròn (O' ; 3cm) ở B. Kẻ bán kính OC của đường tròn (O) song song với O'B, B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O ; 2cm) và (O' ; 3cm).

c) Tính độ dài BC.

d) Gọi I là giao điểm của BC và OO'. Tính độ dài IO.

79. Cho đường tròn (O ; R), điểm A nằm bên ngoài đường tròn ($R < OA < 3R$). Vẽ đường tròn (A ; 2R).

a) Hai đường tròn (O) và (A) có vị trí tương đối như thế nào đối với nhau ?

b) Gọi B là một giao điểm của hai đường tròn trên. Vẽ đường kính BOC của đường tròn (O). Gọi D là giao điểm (khác C) của AC và đường tròn (O). Chứng minh rằng AD = DC.

80. Cho đường tròn (O ; 2cm) tiếp xúc với đường thẳng d. Dựng đường tròn (O' ; 1cm) tiếp xúc với đường thẳng d và tiếp xúc ngoài với đường tròn (O).

Bài tập bổ sung

8.1. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r). Điền vào chỗ trống của bảng sau :

R	r	OO'	Hệ thức giữa OO', R, r	Vị trí tương đối của (O) và (O')
3	1	...	OO' = R − r	...
3	1	...	...	Tiếp xúc ngoài
3	1	3,5	...	...
3	1	5	...	...
3	1	1	...	...

8.2. Cho hai đường tròn (O ; 3cm) và (O' ; 4cm) có OO' = 5cm.

a) Hai đường tròn (O) và (O') có vị trí tương đối nào ?

b) Tính độ dài dây chung của hai đường tròn.

8.3. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định trên đường tròn. Điểm B chuyển động trên đường tròn.

a) Chứng minh rằng trung điểm M của AB chuyển động trên một đường tròn (O').

b) Đường tròn (O') có vị trí tương đối nào đối với đường tròn (O) ?

Ôn tập chương II

81. Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D. DA, DB cắt các nửa đường tròn có đường kính AC, CB theo thứ tự tại M, N.

a) Tứ giác DMCN là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh hệ thức DM.DA = DN.DB.

c) Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn có đường kính AC và CB.

d*) Điểm C ở vị trí nào trên AB thì MN có độ dài lớn nhất ?

82. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài DE, D $\in$ (O), E $\in$ (O'). Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A, cắt DE ở I. Gọi M là giao điểm của OI và AD, N là giao điểm của O'I và AE.

a) Tứ giác AMIN là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh hệ thức IM.IO = IN.IO'.

c) Chứng minh rằng OO' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là DE.

d) Tính độ dài DE biết rằng OA = 5cm, O'A = 3,2cm.

83*. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, OO' = 3cm. Qua A kẻ một đường thẳng cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại E và F (A nằm giữa E và F). Tính xem đoạn thẳng EF có độ dài lớn nhất bằng bao nhiêu ?

84. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O) có đường kính BC. Kẻ dây AD vuông góc với BC. Gọi E là giao điểm của DB và CA. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt BC ở H, cắt AB ở F. Chứng minh rằng :

a) Tam giác EBF là tam giác cân ;

b) Tam giác HAF là tam giác cân ;

c) HA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

85. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm M thuộc đường tròn. Vẽ điểm N đối xứng với A qua M. BN cắt đường tròn ở C. Gọi E là giao điểm của AC và BM.

a) Chứng minh rằng NE $\perp$ AB.

b) Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh rằng FA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Chứng minh rằng FN là tiếp tuyến của đường tròn (B ; BA).

86. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm C nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn (O') có đường kính CB.

a) Hai đường tròn (O) và (O') có vị trí tương đối như thế nào đối với nhau ?

b) Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác ADCE là hình gì ? Vì sao ?

c) Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (O'). Chứng minh rằng ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn (O').

87. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') tiếp xúc ngoài tại A (R > R'). Vẽ các đường kính AOB, AO'C. Dây DE của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác BDCE là hình thoi.

b) Gọi I là giao điểm của EC và đường tròn (O'). Chứng minh rằng ba điểm D, A, I thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng KI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

88. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Gọi M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB. Vẽ đường tròn (M ; MH). Kẻ các tiếp tuyến AC, BD với đường tròn tâm M (C và D là các tiếp điểm khác H).

a) Chứng minh rằng ba điểm C, M, D thẳng hàng và CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (O) thì tổng AC + BD không đổi.

c) Giả sử CD và AB cắt nhau tại I. Chứng minh rằng tích OH.OI không đổi.

Bài tập bổ sung

II.1. Tỉ số bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp một tam giác đều bằng

(A) $\frac{1}{3}$; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (D) 2.

Hãy chọn phương án đúng.

II.2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ các tia tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Gọi M là điểm thuộc nửa đường tròn, D là giao điểm của AM và By, C là giao điểm của BM và Ax, E là trung điểm của BD. Chứng minh rằng :

a) $AC.BD = AB^2$;

b) ME là tiếp tuyến của nửa đường tròn.

II.3. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định trên đường tròn. Gọi xy là tiếp tuyến với đường tròn tại A. Từ một điểm M nằm trên xy, vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB.

a) Chứng minh rằng ba điểm M, H, O thẳng hàng.

b) Tứ giác AOBH là hình gì ?

c) Khi M di chuyển trên xy thì H di chuyển trên đường nào ?

B. LỜI GIẢI – CHỈ DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

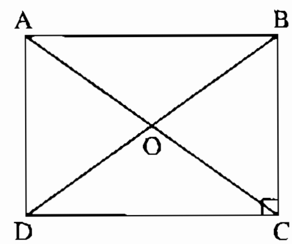
1. (h.79)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Ta có OA = OB = OC = OD nên bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn (tâm O, bán kính OA).

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256$$
$$= 400 = 20^2.$$
$$AC = 20\text{cm}.$$

Bán kính của đường tròn bằng 10cm.



Hình 79

2. (h.80)

Gọi R là bán kính của đường tròn.

$OA^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow OA = \sqrt{2} < 2 = R.$

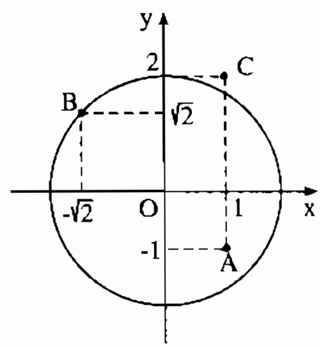
Vậy A nằm trong (O).

$OB^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow OB = 2 = R.$

Vậy B nằm trên (O).

$OC^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow OC = \sqrt{5} > 2 = R.$

Vậy C nằm ngoài (O).



Hình 80

3. Nối các ô :

(1) và (6) ;

(2) và (5) ;

(3) và (4).

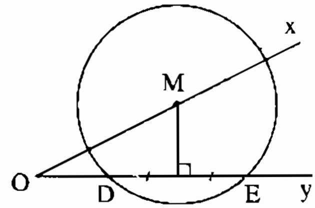
4. (h.81)

Cách dựng :

– Dựng đường trung trực của DE, cắt Ox ở M.

– Dựng đường tròn tâm M, bán kính MD.

Học sinh tự chứng minh.



Hình 81

5. Câu a) đúng.

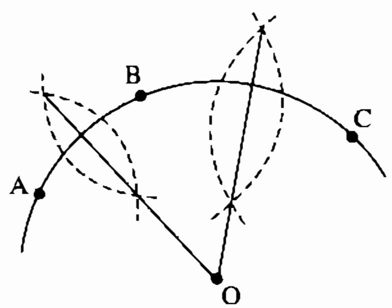
Câu b) sai : Nếu hai đường tròn có ba điểm chung phân biệt thì chúng trùng nhau.

Câu c) sai : Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác tù nằm ngoài tam giác. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.

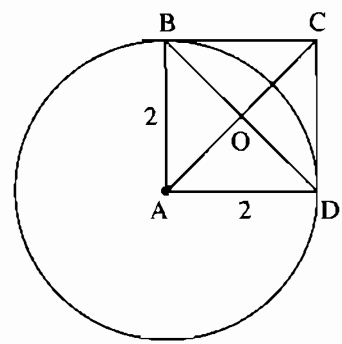
6. a) Học sinh tự vẽ.

b) Học sinh tự vẽ. Các cung tròn tâm B, C, D, A có bán kính theo thứ tự bằng 1, 2, 3, 4 đơn vị dài.

7. Lấy ba điểm A, B, C bất kì trên đường viền. Kẻ các đường trung trực của AB và của BC, chúng cắt nhau tại O (h.82). Độ dài OA cho ta bán kính của đường viền.



Hình 82



Hình 83

8. (h.83)

$OA = \sqrt{2} < 2 \Rightarrow$ O và A nằm trong đường tròn.

$AB = AD = 2 \Rightarrow$ B và D nằm trên đường tròn.

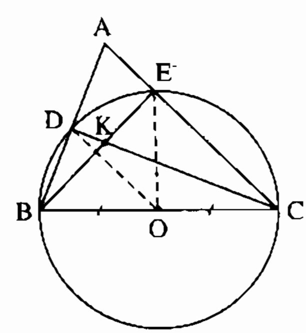
$AC = 2\sqrt{2} > 2 \Rightarrow$ C nằm ngoài đường tròn.

9. (h.84)

a) Các tam giác DBC, EBC nội tiếp đường tròn đường kính BC nên là các tam giác vuông. Do đó

$$CD \perp AB,\ BE \perp AC.$$

b) K là trực tâm của tam giác ABC nên $AK \perp BC$.



Hình 84

10. (h.85) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tâm O là giao điểm của các đường phân giác, trung tuyến, đường cao, trung trực nên O nằm trên đường cao AH,

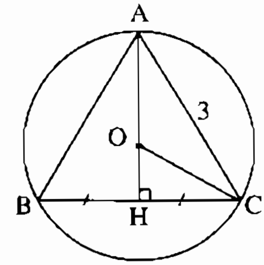
$HC = \frac{BC}{2} = \frac{3}{2}$ (cm), $OA = 2OH$, $\widehat{OCH} = 30^o$.

Xét tam giác OHC vuông tại H :

$OH = HC \cdot tg30^o = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (cm).

$OA = 2OH = \sqrt{3}$ cm.

Vậy đáp số (C) là đúng.



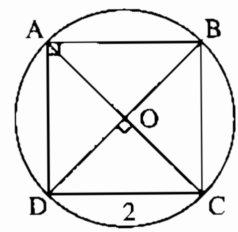
Hình 85

11. (h.86)

a) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Ta có OA = OB = OC = OD nên các đỉnh của hình vuông ABCD cùng nằm trên đường tròn (O ; OA).

b) *Đáp số :* Bán kính của đường tròn bằng $\sqrt{2}$ dm.



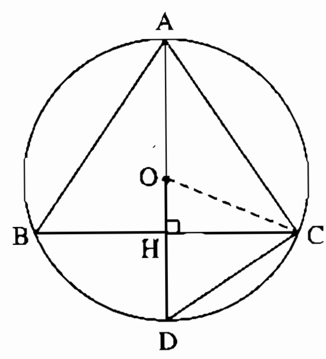
Hình 86

12. (h.87)

a) Tam giác ABC cân tại A nên AH là đường trung trực của BC. Do đó AD là đường trung trực của BC. Vì O nằm trên đường trung trực của BC nên O nằm trên AD. Vậy AD là đường kính của đường tròn (O).

b) Tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $\widehat{ACD} = 90^o$.

c) Ta có $BH = HC = \frac{BC}{2} = 12$ (cm).



Hình 87

Tam giác AHC vuông tại H nên

$AH^2 = AC^2 - HC^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow AH = 16$ (cm).

$$AC^2 = AD.AH$$

$$\Rightarrow \quad AD = \frac{AC^2}{AH} = \frac{20.20}{16} = 25 \text{ (cm)}.$$

Bán kính đường tròn (O) bằng 12,5cm.

13. (h.88)

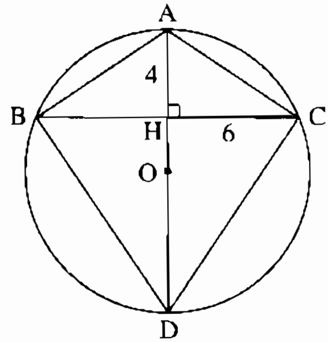
AH cắt đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $\widehat{ACD} = 90^\circ$, do đó

$CH^2 = HA.HD$

$$\Rightarrow HD = \frac{CH^2}{HA} = \frac{6.6}{4} = 9(cm).$$

Do đó AD = 13cm.

Bán kính của đường tròn (O) bằng 6,5cm.



Hình 88

14(*)**.** (h.89)

Phân tích

Giả sử đã dựng được đường kính COD sao cho AC = BD.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. Ta có ACA'D là hình bình hành nên A'D = AC, do đó A'D = BD. Điểm D thoả mãn hai điều kiện :

– D thuộc đường trung trực d của A'B.

– D thuộc đường tròn (O).

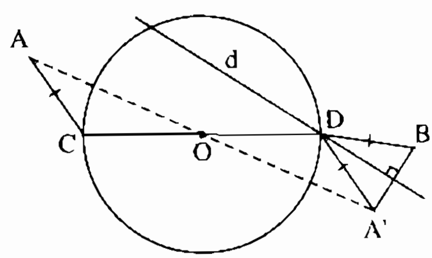
Cách dựng

– Dựng A' đối xứng với A qua O.

– Dựng đường trung trực d của A'B.

– Gọi D là giao điểm của d và đường tròn (O).

– Dựng đường kính COD.



Hình 89

Chứng minh

D thuộc đường trung trực của A'B nên DA' = DB.

ACA'D là hình bình hành nên DA' = CA.

Vậy CA = DB.

(*) Trong một số bài toán dựng hình ở cuốn sách này, chúng tôi có giới thiệu thêm bước *Phân tích* và *Biện luận* để học sinh tham khảo.

Biện luận

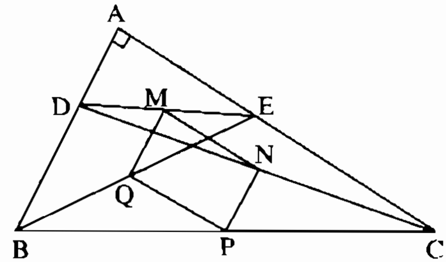
Tuỳ theo số giao điểm của d và đường tròn (O) là 2, 1, 0 mà bài toán có 2, 1, 0 nghiệm hình.

(Trên hình 89, bài toán có hai nghiệm hình).

Bài tập bổ sung

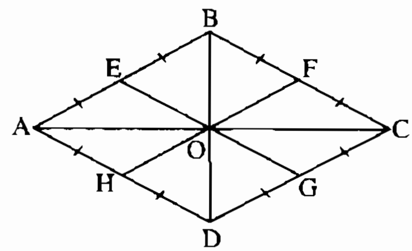
1.1. a) Đúng ; b) Đúng ; c) Sai.

1.2. (h.bs.24). Hãy chứng minh rằng MNPQ là hình chữ nhật.



Hình bs. 24

1.3. (h.bs.25). Đặt OB = OD = a. Hãy chứng minh OE = a. Tương tự, OF = OG = OH = a. Từ đó suy ra sáu điểm E, B, F, G, D, H cùng thuộc đường tròn (O ; a).



Hình bs. 25

§2. Đường kính và dây của đường tròn

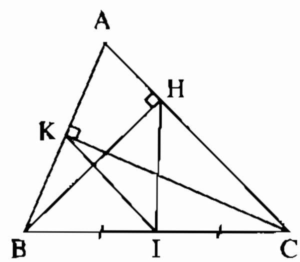
15. (h.90)

a) Gọi I là trung điểm của BC.

Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền đối với tam giác vuông BKC, BHC ta được :

$$KI = \frac{1}{2}BC,\ HI = \frac{1}{2}BC.$$

Suy ra IB = IK = IH = IC. Vậy bốn điểm B, K, H, C cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính IB.



Hình 90

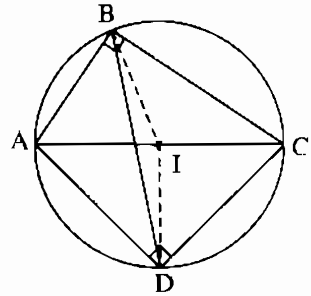
b) Trong đường tròn (I) nói trên, HK là dây, BC là đường kính nên HK < BC (chú ý : không xảy ra HK = BC).

16. (h.91)

a) Gọi I là trung điểm của AC. Ta có BI, DI lần lượt là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ABC, ADC nên BI = AI = CI = DI, chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (I ; IA).

b) BD là dây của đường tròn (I), còn AC là đường kính nên $AC \geq BD$.

AC = BD khi và chỉ khi BD cũng là đường kính, khi đó ABCD là hình chữ nhật.



Hình 91

17. (h.92)

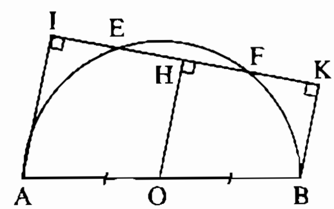
Kẻ $OH \perp EF$. Hình thang AIKB có AO = OB và OH // AI // BK nên

$$HI = HK. \quad (1)$$

OH là phần đường kính vuông góc với dây EF nên

$$HE = HF. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra IE = KF.



Hình 92

18. (h.93)

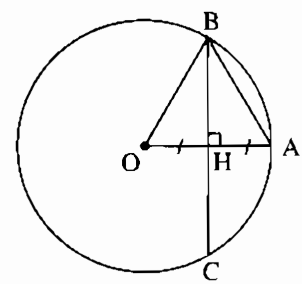
Gọi trung điểm của OA là H. Vì OH = HA và $BH \perp OA$ nên AB = OB. Ta có

AB = OB = OA nên tam giác AOB là tam giác đều.

Vậy $\widehat{O} = 60^{\circ}$.

$BH = BO.\sin 60^{\circ} = 3.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$BC = 2BH = 3\sqrt{3}$ (cm).

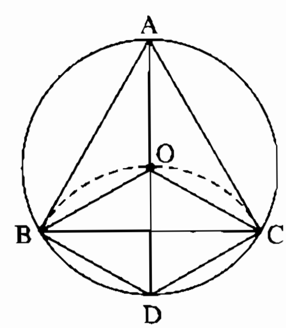


Hình 93

19. (h.94)

a) Tứ giác OBDC có bốn cạnh đều bằng R nên là hình thoi.

b) Tam giác OBD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{OBD} = 60^{\circ}$.



Hình 94

BC là đường chéo của hình thoi nên là đường phân giác của góc OBD, suy ra

$$\widehat{CBD} = \widehat{CBO} = 30^o.$$

Tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $\widehat{ABD} = 90^o$, suy ra

$$\widehat{OBA} = 30^o.$$

c) Tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 60^o$, tương tự $\widehat{ACB} = 60^o$ nên là tam giác đều.

20. a) (h.95a)

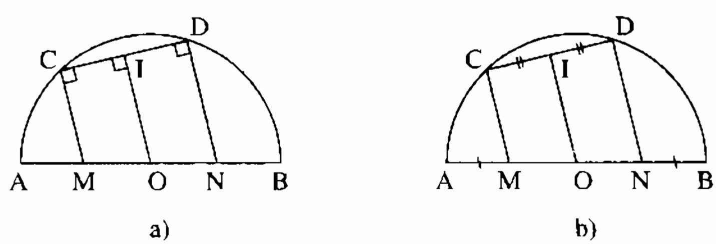
Kẻ OI $\perp$ CD. Ta có IC = ID.

Hình thang CDNM có CI = ID, IO // CM // DN nên OM = ON. Suy ra AM = BN.

b) (h.95b) Gọi I là trung điểm của CD.

Hình thang MCDN có OI là đường trung bình nên OI // MC // ND.

Ta lại có OI $\perp$ CD nên MC $\perp$ CD, ND $\perp$ CD.



Hình 95

21. (h.96)

Kẻ OM $\perp$ CD, OM cắt AK tại N. Theo tính chất đường kính vuông góc với dây, ta có

MC = MD. (1)

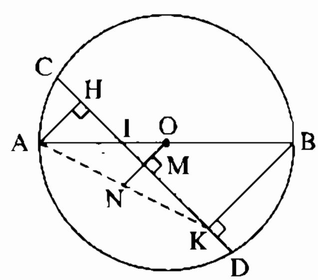
Tam giác AKB có AO = OB, ON // BK nên AN = NK.

Tam giác AHK có AN = NK, NM // AH nên

MH = MK. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

MC – MH = MD – MK, tức là CH = DK.



Hình 96

22. (h.97)

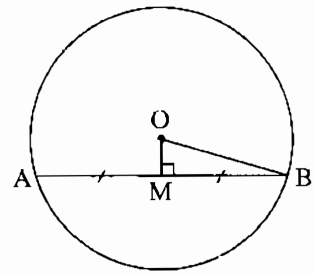
a) Dựng dây AB vuông góc với OM tại M.

b) Trong tam giác OMB vuông tại M :

$MB^2 = OB^2 - OM^2 = 5^2 - 1,4^2 = 23,04$

$\Rightarrow MB = 4,8$ (cm).

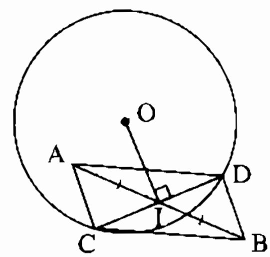
Do đó AB = 9,6cm.



Hình 97

23. (h.98)

Tứ giác ACBD có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.



Hình 98

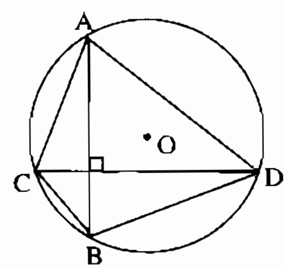
Bài tập bổ sung

2.1. Chọn (C).

2.2. (h.bs.26). Ta có AB ≤ 4cm, CD ≤ 4 cm. Do AB ⊥ CD nên

$$S_{ACBD} = \frac{1}{2}AB.CD \le \frac{1}{2}.4.4 = 8\,(cm^2).$$

Giá trị lớn nhất của S_{ACBD} bằng 8 cm^2 khi AB và CD đều là đường kính của đường tròn.

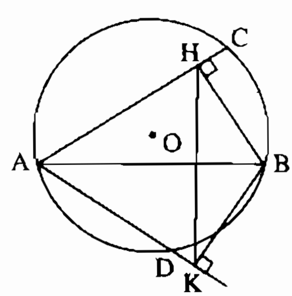


Hình bs. 26

2.3. (h.bs.27)

a) Bốn điểm A, H, B, K cùng thuộc đường tròn đường kính AB.

b) Ta có HK ≤ AB < 2R.



Hình bs. 27

§3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

24. (h.99)

a) MN = PQ ⇒ OE = OF.

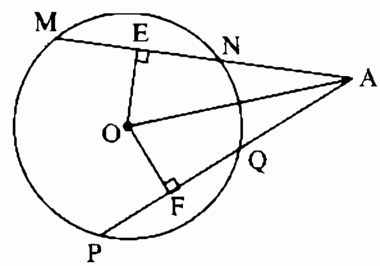
ΔOEA = ΔOFA (cạnh huyền – cạnh góc vuông) suy ra AE = AF. (1)

b) MN = PQ ⇒ EN = FQ. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

AE – EN = AF – FQ,

tức là AN = AQ.



Hình 99

25. (h.100)

Kẻ OH ⊥ CD, OK ⊥ EF.

CD = CI + ID = 2 + 14 = 16 (cm).

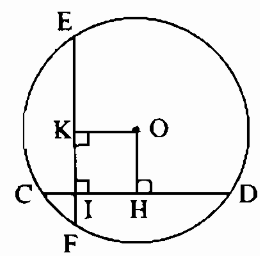
$CH = \frac{1}{2}CD = 8(cm)$.

IH = CH – CI = 8 – 2 = 6 (cm).

Do CD = EF nên OH = OK.

Tứ giác OHIK là hình chữ nhật, lại có OH = OK nên là hình vuông.

Do đó OH = OK = IH = 6(cm).



Hình 100

26. (h.101)

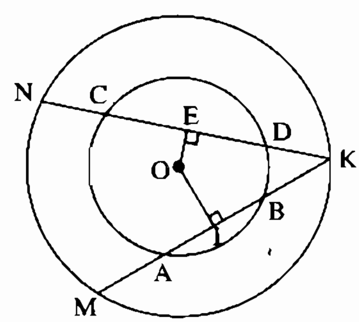
Kẻ OI ⊥ AB, OE ⊥ CD.

Trong đường tròn nhỏ :

AB < CD ⇒ OI > OE.

Trong đường tròn lớn :

OI > OE ⇒ KM < KN.



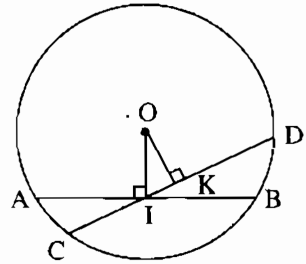
Hình 101

27. (h.102)

Gọi CD là dây bất kì (khác AB) đi qua I. Kẻ OK ⊥ CD.

Tam giác OKI vuông tại K nên OI > OK.

Ta có OI > OK nên AB < CD (liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây).



Hình 102

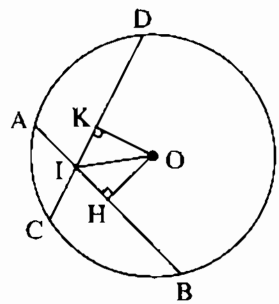
28. Ta có $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ nên BC > AC > AB. Do đó OH < OI < OK.

29. (h.103)

a) Kẻ OH ⊥ AB, OK ⊥ CD. Ta có AB = CD nên OH = OK. Do đó IO là tia phân giác của góc BID.

b) ΔIOH = ΔIOK (cạnh huyền – góc nhọn hoặc cạnh huyền – cạnh góc vuông) suy ra IH = IK.

Từ đó IB = ID và IA = IC.



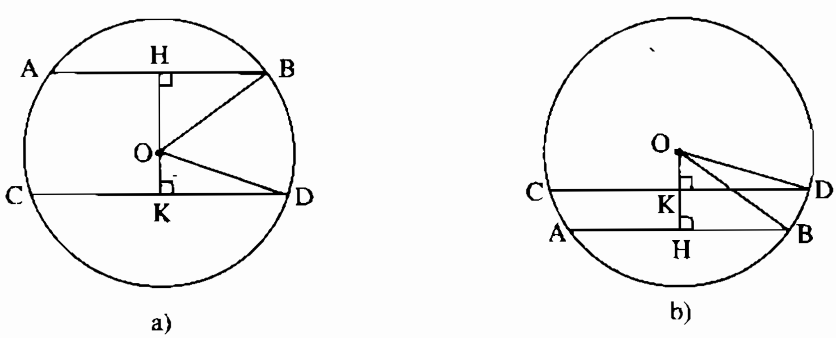
Hình 103

30. (h.104)

Kẻ OH ⊥ AB, OK ⊥ CD. Rõ ràng H, O, K thẳng hàng. Ta có :

$$OH^2 = OB^2 - HB^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \Rightarrow OH = 15\text{cm}.$$

$$OK^2 = OD^2 - KD^2 = 25^2 - 24^2 = 49 \Rightarrow OK = 7\text{cm}.$$



Hình 104

Có hai trường hợp :

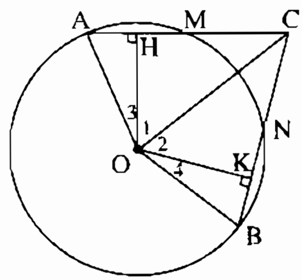
– Nếu O nằm trong dải song song tạo bởi AB và CD (h.104a) thì

$$HK = OH + OK = 15 + 7 = 22 \text{ (cm)}.$$

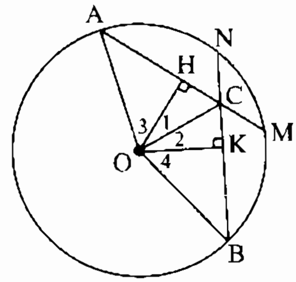
– Nếu O nằm ngoài dải song song tạo bởi AB và CD (h.104b) thì

$$HK = OH - OK = 15 - 7 = 8 \text{ (cm)}.$$

31. (h.105)



a)



b)

Hình 105

a) Kẻ $OH \perp AC$, $OK \perp CB$. Ta có $AM = BN$ nên $OH = OK$. Do đó :

$\Delta OHC = \Delta OKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

$\Delta OHA = \Delta OKB$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$.

Suy ra $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_4$, nên OC là tia phân giác của góc AOB.

b) Tam giác AOB cân tại O có OC là tia phân giác của góc O nên $OC \perp AB$.

32. a) Dây ngắn nhất đi qua M là dây vuông góc với OM tại M (xem bài 27). Ta tính được độ dài của dây đó là 8dm.

b) Dây dài nhất đi qua M là đường kính, độ dài 10dm.

33. (h.106) MOH và MOK là các tam giác vuông.

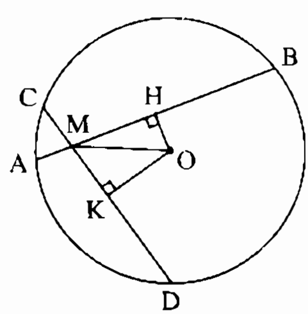
Ta có :

$MH^2 + OH^2 = MK^2 + OK^2$ $(= OM^2)$.

Ta có :

$AB > CD \Rightarrow OH < OK \Rightarrow OH^2 < OK^2$

$\Rightarrow MH^2 > MK^2 \Rightarrow MH > MK.$



Hình 106

34. (h.107)

Cách dựng

– Dựng trung điểm I của AB.

– Qua A, dựng dây CD song song với IO.

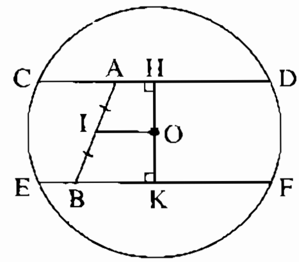
– Qua B, dựng dây EF song song với IO.

Chứng minh

Học sinh tự giải.

Biện luận

Bài toán có một nghiệm hình.

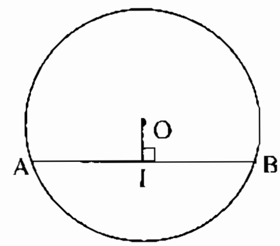


Hình 107

Bài tập bổ sung

3.1. Chọn (D).

3.2. (h.bs.28). Dây AB phải dựng vuông góc với OI tại I.



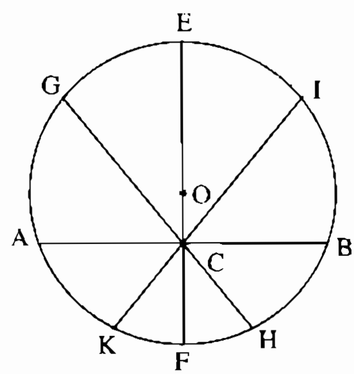
Hình bs. 28

3.3. (h.bs.29)

Dây lớn nhất đi qua C là đường kính EF = 50cm. Dây nhỏ nhất đi qua C là dây AB vuông góc với OC tại C, AB = 48cm.

Có hai dây đi qua C có độ dài 49cm (là dây GH và IK đối xứng nhau qua EF).

Có tất cả 4 dây đi qua C có độ dài là một số nguyên xentimét.



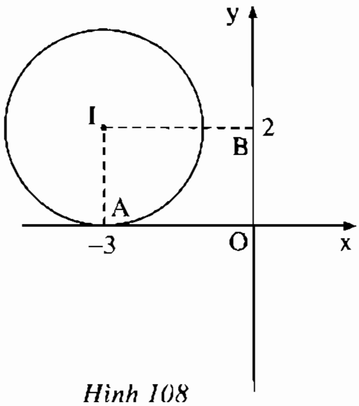
Hình bs. 29

§4. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

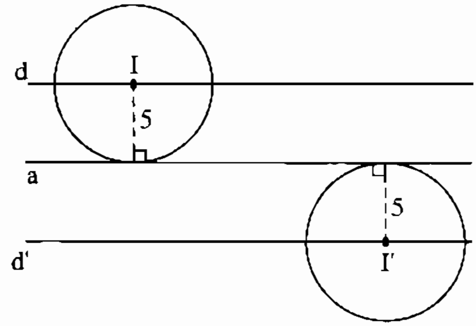
35. (h.108)

Kẻ IA ⊥ Ox. Do IA = 2 = R nên đường tròn (I) tiếp xúc với trục hoành.

Kẻ IB ⊥ Oy. Do IB = 3 > R nên đường tròn (I) và trục tung không giao nhau.



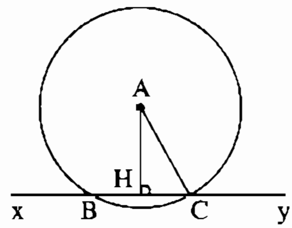
Hình 108



Hình 109

36. (h.109)

Tâm I của các đường tròn có bán kính 5cm và tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên hai đường thẳng d và d' song song với a và cách a là 5cm.

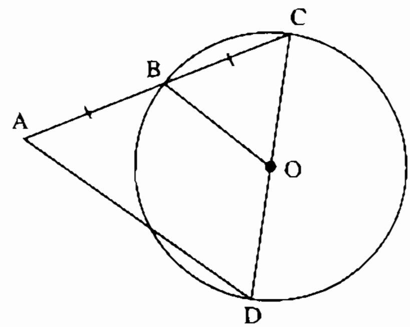


Hình 110

37. (h.110)

a) Kẻ AH ⊥ xy. Ta có AH < AC, tức là d < R nên đường tròn (A) và đường thẳng xy cắt nhau. Do đó (A) có hai giao điểm với xy.

b) Ta tính được HC = 5cm nên BC = 10cm.



Hình 111

38. (h.111)

BO là đường trung bình của tam giác ACD nên BO = $\frac{1}{2}$AD.

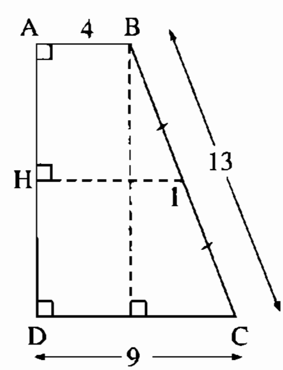
Do BO = 2cm nên AD = 4cm.

39. (h.112)

a) AD = 12cm.

b) Gọi I là trung điểm của BC.

Đường tròn (I) đường kính BC có bán kính R = $\frac{BC}{2}$ = 6,5cm.



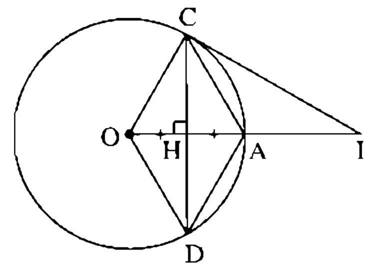
Hình 112

Kẻ $IH \perp AD$. Khoảng cách d từ I đến AD bằng IH, ta có

$$d = IH = \frac{AB + CD}{2} = \frac{4 + 9}{2} = 6,5(cm).$$

Do d = R nên đường tròn (I) tiếp xúc với AD.

40. (h.113)



Hình 113

a) Gọi H là giao điểm của CD và OA. Ta có $OA \perp CD$ nên CH = HD.

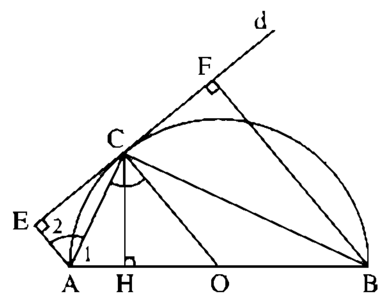
Tứ giác OCAD có OH = HA, CH = HD nên là hình bình hành, lại có $OA \perp CD$ nên là hình thoi.

b) Tam giác AOC đều nên $\widehat{AOC} = 60^\circ$.

Trong tam giác OCI vuông tại C :

$$CI = OC.tg60^\circ = R.\sqrt{3}.$$

41. (h.114)



Hình 114

a) Hình thang ABFE có

OA = OB, OC // AE // BF nên CE = CF.

b) Tam giác OAC cân tại O nên

$$\widehat{A}_1 = \widehat{OCA}.$$

AE // OC nên $\widehat{A}_2 = \widehat{OCA}$ (so le trong).

Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, do đó AC là tia phân giác của góc BAE.

c) $\Delta CAE = \Delta CAH$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow$ AE = AH.

Tương tự BF = BH.

Tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính AB nên ABC là tam giác vuông tại C.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có :

$$CH^2 = HA. HB.$$

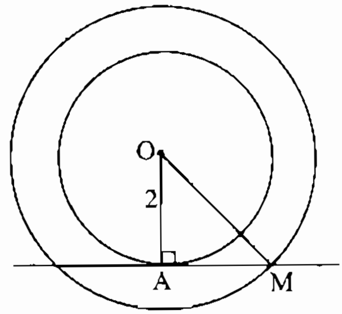
Suy ra $\quad CH^2 = AE.BF.$

Bài tập bổ sung

4.1. Chọn (C).

4.2. (h.bs.30) OM = $2\sqrt{2}$.

Điểm M chuyển động trên đường tròn (O ; $2\sqrt{2}$ cm).



Hình bs. 30

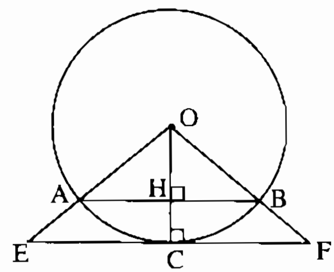
4.3. (h.bs.31). Gọi C là tiếp điểm của EF với đường tròn (O), H là giao điểm của OC và AB. Ta có OC ⊥ EF và AB // EF nên OC ⊥ AB.

Ta tính được HB = 12 cm nên OH = 9 cm.

$\Delta OAB \backsim \Delta OEF$ nên $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{AB}{EF}$,

tức là $\dfrac{9}{15} = \dfrac{24}{EF}$.

Ta tính được EF = 40 cm.



Hình bs. 31

§5. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

42. (h.115)

Cách dựng

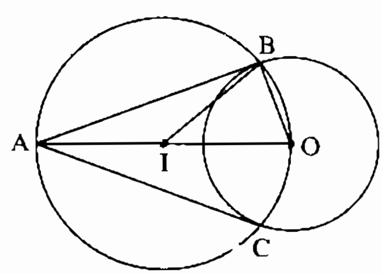
– Dựng I là trung điểm của AO.

– Dựng đường tròn (I ; IO), đường tròn (I) cắt đường tròn (O) tại B và C.

– Kẻ các đoạn thẳng AB, AC.

Chứng minh

Tam giác ABO nội tiếp đường tròn đường kính nên $\widehat{ABO} = 90^{\circ}$.



Hình 115

AB vuông góc với OB tại B nên AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Tương tự, AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

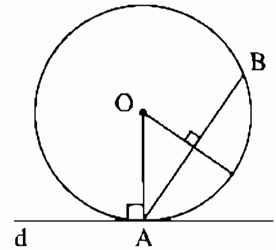
43. (h.116)

Phân tích. Giả sử đã dựng được đường tròn (O) đi qua A, B và tiếp xúc với d. Khi đó (O) phải tiếp xúc với d tại A.

(O) đi qua A và B nên O nằm trên đường trung trực của AB.

(O) tiếp xúc với d tại A nên O nằm trên đường vuông góc với d tại A.

Học sinh tự trình bày phần *Cách dựng* và *Chứng minh*.



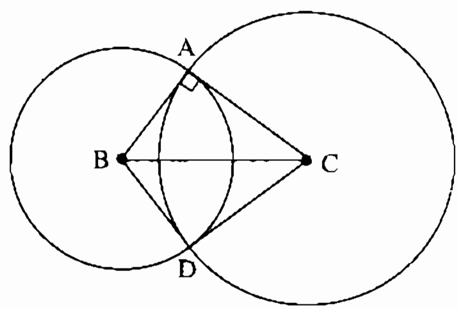
Hình 116

44. (h.117)

$\Delta ABC = \Delta DBC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{D}$.

Do $\widehat{A} = 90^\circ$ nên $\widehat{D} = 90^\circ$.

CD vuông góc với bán kính BD tại D nên CD là tiếp tuyến của đường tròn (B).



Hình 117

45. (h.118)

a) OE = OA = OH nên E nằm trên đường tròn (O) có đường kính AH.

b) Tam giác BEC vuông có ED là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền, nên ED = DB, suy ra

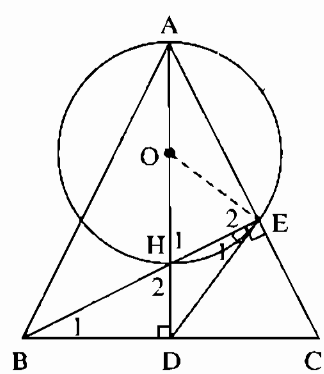
$$\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1. \qquad (1)$$

Ta lại có $\widehat{E}_2 = \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$. $\qquad$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{B}_1 + \widehat{H}_2 = 90^\circ.$$

DE vuông góc với bán kính OE tại E nên DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Hình 118

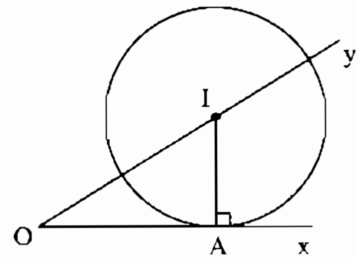
46. (h.119)

Cách dựng

– Dựng đường vuông góc với Ox tại A, cắt tia Oy ở I.

– Dựng đường tròn (I ; IA).

Học sinh tự chứng minh.



Hình 119

47. (h.120)

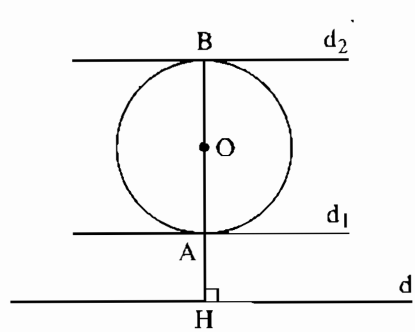
Cách dựng

– Dựng OH ⊥ d, cắt (O) tại A và B.

– Dựng d_1 đi qua A và vuông góc với OA.

Dựng d_2 đi qua B và vuông góc với OB.

Ta có d_1 và d_2 là các tiếp tuyến phải dựng. Học sinh tự chứng minh.



Hình 120

Bài tập bổ sung

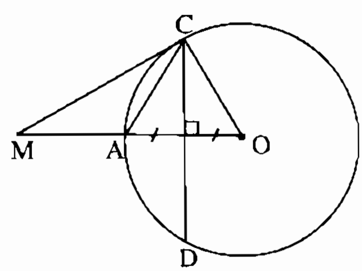
5.1. a) Đúng ; b) Sai.

5.2. (h.bs.32) CD là đường trung trực của OA nên CA = CO.

Suy ra CA = CO = AO = AM.

Do đó $\widehat{MCO} = 90^o$.

Vậy MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).



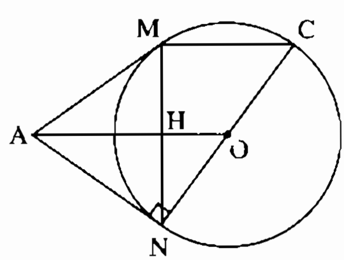
Hình bs. 32

§6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

48. (h.121)

a) AM = AN, AO là tia phân giác của góc A (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại A).

Tam giác AMN cân tại A, AO là tia phân giác của góc A nên AO ⊥ MN.



Hình 121

b) Gọi H là giao điểm của MN và AO. Ta có MH = HN, CO = ON nên HO là đường trung bình của tam giác MNC. Suy ra HO // MC, do đó MC // AO.

c) $AN^2 = AO^2 - ON^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AN = 4(cm)$.

Ta có : AO.HN = AN.NO

$\Rightarrow 5.HN = 4.3 \Rightarrow HN = 2,4$ (cm).

Do đó MN = 4,8cm.

Vậy AM = AN = 4cm ; MN = 4,8cm.

49. (h.122)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau,

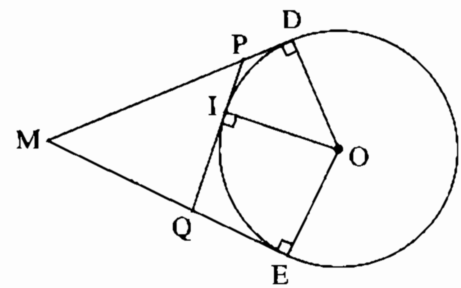
PI = PD và QI = QE.

Chu vi tam giác MPQ bằng :

MP + PQ + MQ = MP + PI + IQ + MQ

= MP + PD + QE + MQ

= MD + ME = 8(cm).



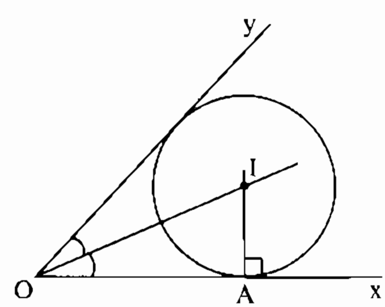
Hình 122

50. (h.123)

Phân tích. Giả sử đã dựng được đường tròn (I) đi qua A và tiếp xúc với Ox, Oy.

Đường tròn (I) tiếp xúc với Ox, Oy nên I nằm trên tia phân giác của góc xOy.

Đường tròn (I) tiếp xúc với Ox tại A nên I nằm trên đường thẳng vuông góc với Ox tại A.



Hình 123

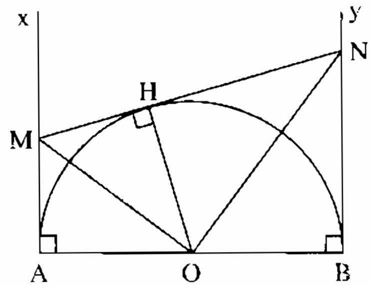
Giao điểm của hai đường trên cho ta điểm I.

Học sinh tự trình bày phần *Cách dựng* và *Chứng minh*.

51. (h.124)

a) Gọi H là tiếp điểm của MN với nửa đường tròn. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

OM là tia phân giác của góc AOH, ON là tia phân giác của góc BOH, hai góc đó kề bù nên $\widehat{MON} = 90^o$.



Hình 124

b) Cũng theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

$$AM = HM,\ BN = HN \qquad (1)$$

nên $MN = HM + HN = AM + BN$.

c) Từ (1) suy ra AM.BN = HM.HN.

Ta lại có $HM.HN = OH^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác MON vuông tại O). Do đó $AM.BN = R^2$.

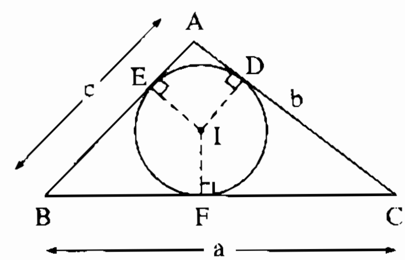
52. (h.125)

Gọi F là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau : AD = AE, BE = BF, CF = CD.

Ta có :

$$AD + AE = AC + AB - (BE + CD)$$
$$= AC + AB - (BF + CF)$$
$$= AC + AB - BC$$
$$= b + c - a.$$

Suy ra $AD = AE = \dfrac{b + c - a}{2}$.



Hình 125

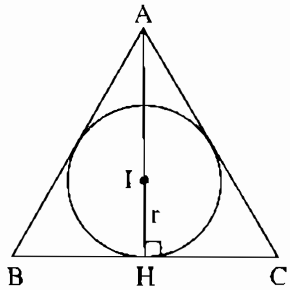
53. (h.126)

Gọi H là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC. Đường phân giác AI cũng là đường cao nên A, I, H thẳng hàng, HB = HC,

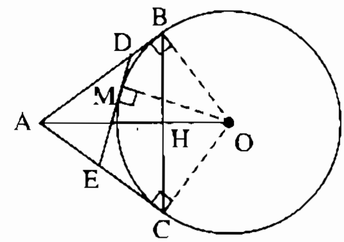
$$\widehat{HAC} = 30^o,\ AH = 3.IH = 3r.$$

$$HC = AH.\ tg30^o = 3r.\frac{1}{\sqrt{3}} = r.\sqrt{3}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = HC.AH = r\sqrt{3}.3r = 3\sqrt{3}\,r^2.$$



Hình 126



Hình 127

54. (h.127)

a) Tam giác ABC cân tại A có AO là tia phân giác của góc A nên $AO \perp BC$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO :

$$OB^2 = OA.OH$$

$$\Rightarrow \quad 3^2 = 5.OH$$

$$\Rightarrow \quad OH = 1,8 \text{ (cm)}.$$

b) *Đáp số :* Chu vi tam giác ADE bằng 2AB = 8(cm).

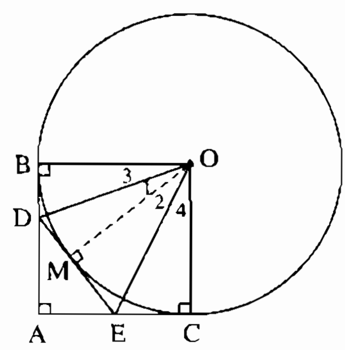
55. (h.128)

a) Tứ giác ABOC có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, lại có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.

b) Chu vi tam giác ADE bằng

AB + AC = 4cm.

Chú ý : Có thể sử dụng kết quả của câu b) bài 54.



Hình 128

c) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3 = \frac{1}{2}\widehat{MOB}.$$

$$\widehat{O}_2 = \widehat{O}_4 = \frac{1}{2}\widehat{MOC} \text{ nên } \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 45^o.$$

Vậy $\widehat{DOE} = 45^o$.

56. (h.129)

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

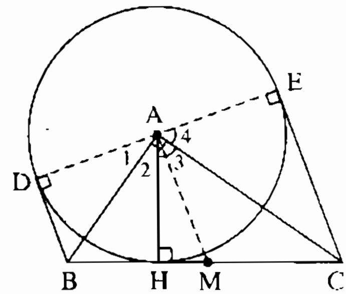
$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$ nên

$\widehat{DAH} + \widehat{HAE} = 2(\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3) = 180^\circ$.

Vậy D, A, E thẳng hàng.

b) Gọi M là trung điểm của BC.

MA là đường trung bình của hình thang BDEC nên MA // BD. Do đó MA ⊥ DE.

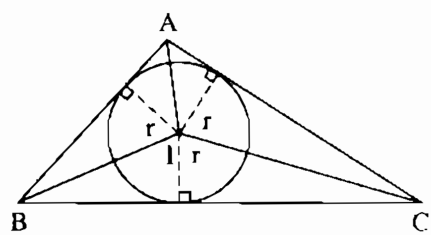


Hình 129

Ta lại có MA = MB = MC nên MA là bán kính của đường tròn có đường kính BC (tâm M). Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC.

57. (h.130)

Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có



Hình 130

$$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA}$$
$$= \frac{AB.r}{2} + \frac{BC.r}{2} + \frac{CA.r}{2}$$
$$= \left(\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{CA}{2}\right).r$$
$$= pr.$$

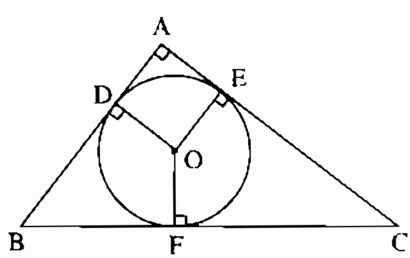
58. (h.131)

a) Tứ giác ADOE là hình vuông.

b) Theo bài 52 ta có

$$AD = AE = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

Gọi r là bán kính đường tròn (O). Do ADOE là hình vuông nên AD = AE = r. Ta tính được BC = 5cm. Do đó



Hình 131

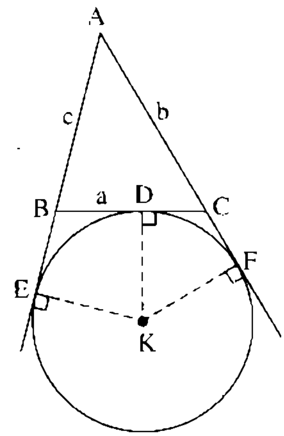
$$r = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1\,(cm).$$

59. (Vẫn dùng hình 131)

Ta có BC = 2R, AD = AE = r, nên

$$\begin{aligned}2R + 2r &= BC + (AE + AD)\\ &= (BF + FC) + (AE + AD)\\ &= (DB + EC) + (AE + AD)\\ &= (AD + DB) + (AE + EC)\\ &= AB + AC.\end{aligned}$$

60. (h.132)



Hình 132

a) Gọi D là tiếp điểm của đường tròn (K) trên BC. Ta có BD = BE, CD = CF nên

$$AE = AB + BE = c + BD$$
$$AF = AC + CF = b + CD.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}AE + AF &= b + c + (BD + CD)\\ &= a + b + c.\end{aligned}$$

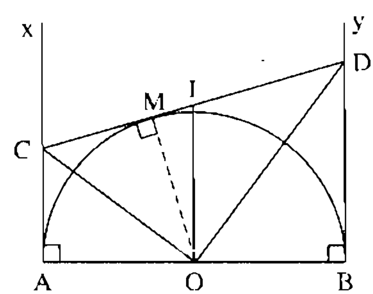
Ta lại có AE = AF (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại A) nên

$$AE = AF = \frac{a+b+c}{2}.$$

b) $BE = AE - AB = \dfrac{a+b+c}{2} - c = \dfrac{a+b-c}{2}$.

c) $CF = AF - AC = \dfrac{a+b+c}{2} - b = \dfrac{a+c-b}{2}$.

61. (h.133)



Hình 133

a) Ta có OC, OD là các tia phân giác của hai góc kề bù nên $\widehat{COD} = 90^\circ$. Gọi I là trung điểm của CD thì

$$IC = ID = IO$$

nên I là tâm và IO là bán kính của đường tròn có đường kính CD.

Hãy chứng minh tiếp AB vuông góc với IO tại O.

b) Chu vi hình thang ABDC bằng :

$$AB + AC + BD + CD.$$

Dễ dàng chứng minh được

$$AC + BD = CM + MD = CD$$

nên chu vi ABDC bằng AB + 2CD.

Ta có AB không đổi nên chu vi ABDC nhỏ nhất khi và chỉ khi CD nhỏ nhất.

CD nhỏ nhất $\Leftrightarrow CD = AB \Leftrightarrow CD \parallel AB \Leftrightarrow OM \perp AB$.

Vậy khi $OM \perp AB$ thì chu vi hình thang ABDC nhỏ nhất và bằng 3AB.

c) Đặt AC = x, BD = y. Chu vi ABDC bằng

$$AB + 2CD = 4 + 2(x + y).$$

Do chu vi ABDC bằng 14 nên

$$4 + 2(x + y) = 14$$

hay

$$x + y = 5. \qquad (1)$$

Ta lại có

$$xy = MC.MD$$

$$= OM^2 \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông COD)}$$

nên $$xy = 2^2 = 4. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$x + \frac{4}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 4.$$

Như vậy, nếu điểm C (thuộc tia Ax) cách điểm A là 1cm hoặc 4cm thì chu vi hình thang ABDC bằng 14cm.

62. (h.134)

a) Ta có Ax // By nên theo định lí Ta-lét :

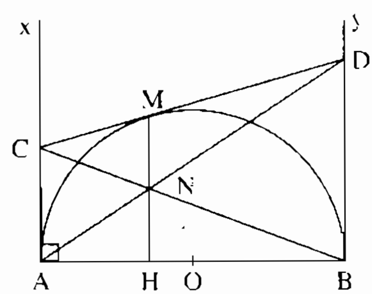
$$\frac{ND}{NA} = \frac{DB}{AC}. \qquad (1)$$

Ta lại có DB = MD, AC = MC. (2)

Từ (1) và (2) ta có

$\dfrac{ND}{NA} = \dfrac{MD}{MC}$, suy ra MN // AC (định lí Ta-lét đảo).

Do $AC \perp AB$ nên $MN \perp AB$.



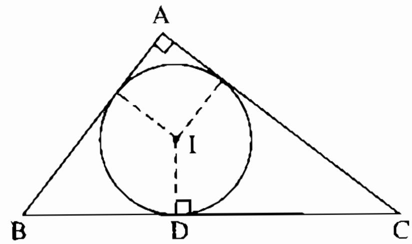
Hình 134

b) Theo định lí Ta-lét :

$$\frac{MN}{BD} = \frac{CN}{CB} = \frac{AN}{AD} = \frac{NH}{BD}.$$

Suy ra MN = NH.

63. (h.135)



Hình 135

Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Ta có :

$$BD = \frac{a+c-b}{2}$$

$$DC = \frac{a+b-c}{2} \text{ (xem bài 52).}$$

Do đó (giả sử $b \geq c$) :

$$BD.\,DC = \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \frac{a-(b-c)}{2} \cdot \frac{a+(b-c)}{2}$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{4} = \frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{4}$$

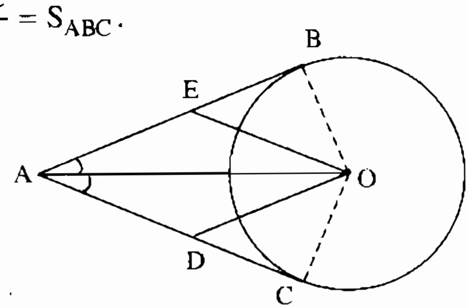
$$= \frac{a^2-(b^2+c^2)+2bc}{4}.$$

Do $a^2 = b^2 + c^2$ nên $BD.DC = \frac{2bc}{4} = \frac{bc}{2} = S_{ABC}$.

Bài tập bổ sung

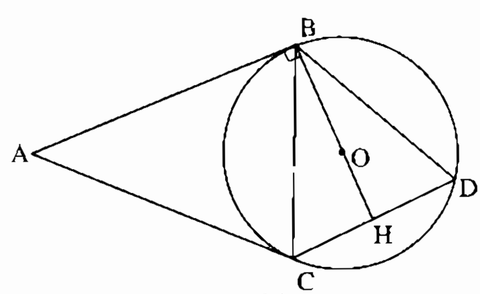
6.1. Chọn (B).

6.2. (h.bs.33) ADOE là hình bình hành, lại có AO là đường phân giác của góc A nên là hình thoi.



Hình bs. 33

6.3. (h.bs.34). Ta có OB ⊥ AB và AB // CD nên OB ⊥ CD. Gọi H là giao điểm của BO và CD thì BH ⊥ CD, suy ra HC = HD. Do đó BC = BD.



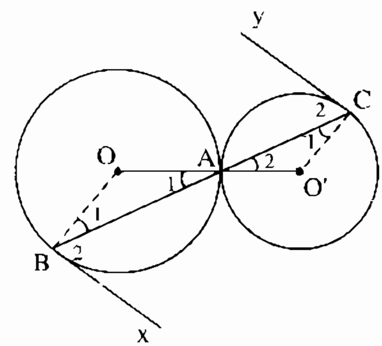
Hình bs. 34

§7. Vị trí tương đối của hai đường tròn

64. (h.136)

Ta có O, A, O' thẳng hàng và B, A, C thẳng hàng nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (đối đỉnh). Do $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$. Do đó $\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$.

Hai góc so le trong $\widehat{B_2}, \widehat{C_2}$ bằng nhau nên Bx // Cy.



Hình 136

65. (h.137)

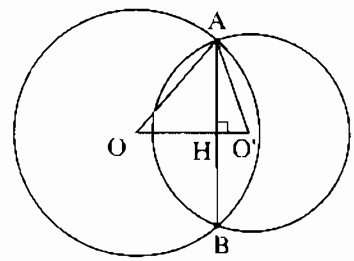
Gọi H là giao điểm của OO' và AB. Ta có OO' là đường trung trực của AB nên các tam giác AHO, AHO' vuông và

$$AH = HB = \frac{24}{2} = 12 \text{ (cm)}.$$

Theo định lí Py-ta-go :

$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 15^2 - 12^2 = 81$

$\Rightarrow OH = 9(\text{cm})$.

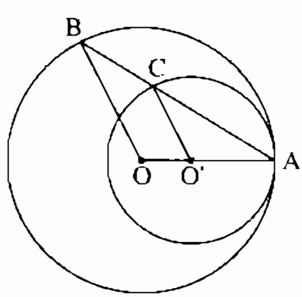


Hình 137

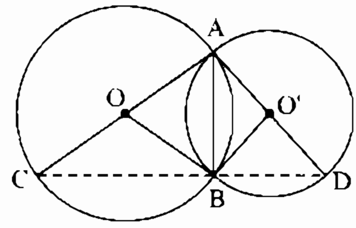
$O'H^2 = O'A^2 - AH^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow O'H = 5(\text{cm})$.

Vậy $\quad OO' = 9 + 5 = 14$ (cm).

66. (h.138) Hãy chứng minh rằng $\widehat{OBA} = \widehat{O'CA}$.



Hình 138



Hình 139

67. (h.139)

Tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính AC nên $\widehat{ABC} = 90^0$.

Tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $\widehat{ABD} = 90^o$.

Suy ra C và D cùng thuộc đường vuông góc với AB tại B.

Do đó C, B, D thẳng hàng và $AB \perp CD$.

68. (h.140)

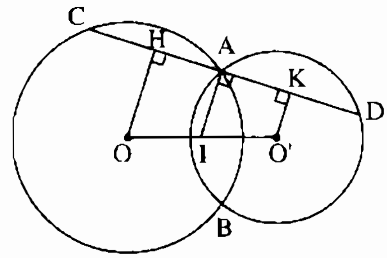
Kẻ OH và O'K vuông góc với CD. Hình thang OO'KH có

$$OI = IO', IA \parallel OH \parallel O'K$$

nên AH = AK.

Ta lại có $AH = \dfrac{AC}{2}$, $AK = \dfrac{AD}{2}$

nên suy ra AC = AD.



Hình 140

69. (h.141)

a) Tam giác CAO' nội tiếp đường tròn đường kính CO' nên $\widehat{CAO'} = 90^o$.

Do đó CA là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Tương tự CB là tiếp tuyến của đường tròn (O').

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

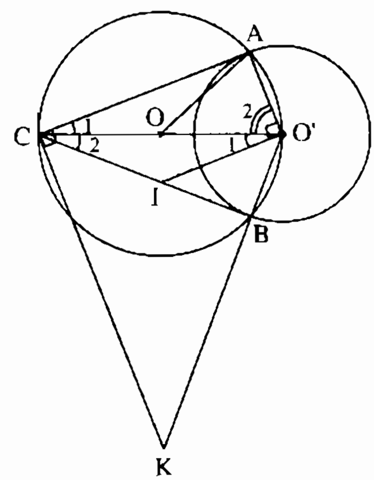
$$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2.$$

Ta có CA // IO' (cùng vuông góc với AO') nên $\widehat{C}_1 = \widehat{O'}_1$.

Suy ra $\widehat{C}_2 = \widehat{O'}_1$.

Do đó

$$IC = IO'. \qquad (1)$$



Hình 141

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau : $\widehat{O'}_2 = \widehat{CO'B}$.

Ta có CK // AO' (cùng vuông góc với AC) nên $\widehat{O'_2} = \widehat{O'CK}$.

Suy ra $\widehat{CO'B} = \widehat{O'CK}$.

Do đó KC = KO'. (2)

Ta lại có OC = OO'. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra O, I, K thẳng hàng (cùng nằm trên đường trung trực của CO').

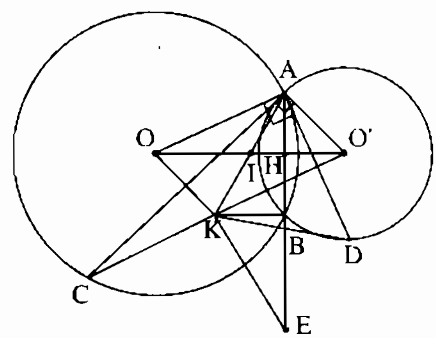
70. (h.142)

a) Gọi H là giao điểm của AB và OO'. Ta có AI = IK, AH = HB nên IH là đường trung bình của tam giác AKB, do đó

IH // KB.

Ta lại có OO' ⊥ AB nên IH ⊥ AB.

Suy ra KB ⊥ AB.



Hình 142

b) KB ⊥ AB, AB = BE nên

KA = KE. (1)

Tứ giác OAO'K có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành, suy ra OK // O'A. Ta lại có CA ⊥ O'A (vì CA là tiếp tuyến của (O')). Suy ra OK ⊥ CA.

Đường kính chứa OK vuông góc với dây CA nên OK là đường trung trực của AC, do đó

KA = KC. (2)

Chứng minh tương tự KA = KD. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

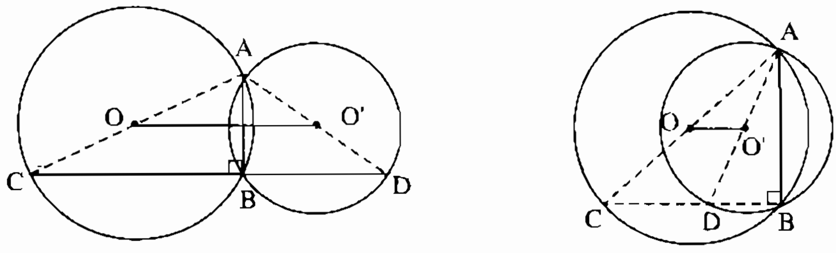
KE = KA = KC = KD,

tức là bốn điểm E, A, C, D cùng thuộc một đường tròn có tâm K.

Bài tập bổ sung

7.1. Chọn (A).

7.2. (h.bs.35)



a) *Hình bs. 35* b)

$\widehat{ABC} = 90^{\circ}$ nên A, O, C thẳng hàng.

$\widehat{ABD} = 90^{\circ}$ nên A, O', D thẳng hàng.

OO' là đường trung bình của ΔACD nên $OO' = \frac{1}{2}CD$.

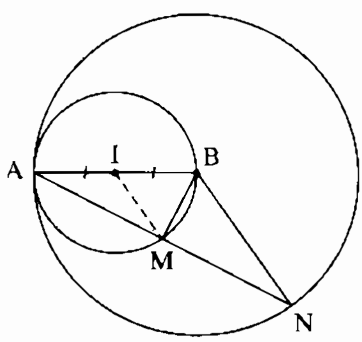
§8. Vị trí tương đối của hai đường tròn (tiếp theo)

71. (h.143)

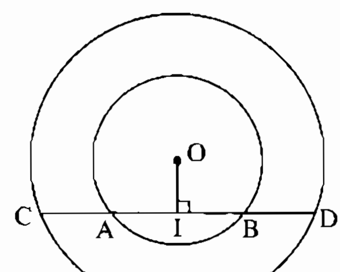
a) IB = BA − IA nên đường tròn (I) tiếp xúc trong với đường tròn (B).

b) Tam giác AMB có đường trung tuyến MI ứng với cạnh AB bằng nửa cạnh AB nên $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$.

Tam giác ABN cân tại B, có BM là đường cao nên cũng là đường trung tuyến. Vậy AM = MN.



Hình 143



Hình 144

72. (h.144)

Kẻ $OI \perp AB$. Theo tính chất về đường kính vuông góc với dây ta có

$$IC = ID,\ IA = IB.$$

Suy ra IC − IA = ID − IB tức là AC = BD.

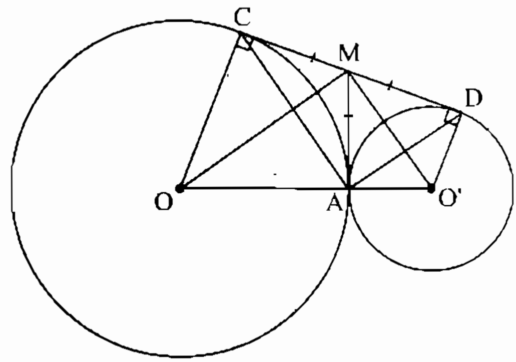
73. (h.145)

a) Kẻ tiếp tuyến chung tại A, cắt CD ở M. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

MA = MC, MA = MD.

Tam giác ACD có đường trung tuyến AM ứng với cạnh CD bằng nửa cạnh CD nên $\widehat{CAD} = 90^o$.

b) MO và MO' là các tia phân giác của hai góc kề bù AMC, AMD nên $\widehat{OMO'} = 90^o$.



Hình 145

Tam giác OMO' vuông tại M, MA là đường cao nên

$MA^2 = OA.O'A = 4{,}5.\ 2 = 9$, do đó MA = 3cm,

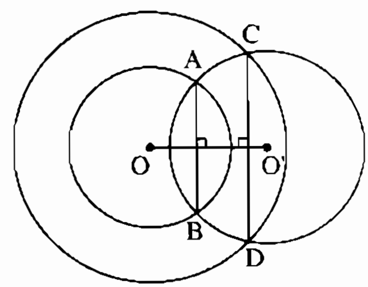
CD = 2MA = 6(cm).

74. (h.146)

Đường tròn (O') cắt đường tròn (O ; OA) tại A và B nên OO' ⊥ AB.

Đường tròn (O') cắt đường tròn (O ; OC) tại C và D nên OO' ⊥ CD.

Suy ra AB // CD.



Hình 146

75. (h.147)

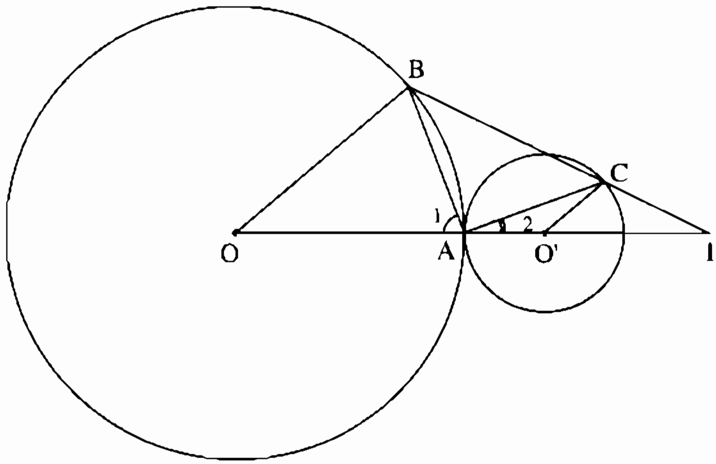
a) OB // O'C $\Rightarrow$ $\widehat{AOB} + \widehat{AO'C} = 180^o$.

Mặt khác, tam giác AOB cân tại O, tam giác AO'C cân tại O' nên

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \frac{180^o - \widehat{AOB}}{2} + \frac{180^o - \widehat{AO'C}}{2} = \frac{360^o - (\widehat{AOB} + \widehat{AO'C})}{2}$$

$$= \frac{180^o}{2} = 90^o.$$

Vậy $\widehat{BAC} = 90^o$.



Hình 147

b) Xét tam giác IOB với O'C // OB. Theo định lí Ta-lét :

$$\frac{O'I}{OI} = \frac{O'C}{OB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OI - O'I}{OI} = \frac{3-1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{OO'}{OI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{OI} = \frac{2}{3}.$$

Vậy OI = 6cm.

76. (h.148)

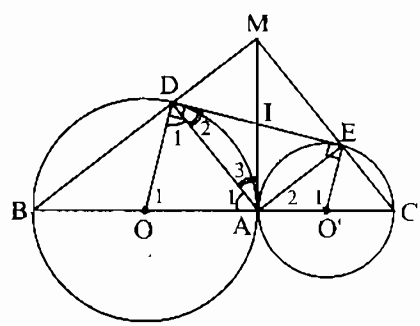
a) Vì OD // EO' $\Rightarrow \widehat{O}_1 + \widehat{O'}_1 = 180^\circ$.

Tam giác AOD cân tại O, tam giác AO'E cân tại O' nên

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \frac{180^\circ - \widehat{O}_1}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{O'}_1}{2}$$

$$= \frac{360^\circ - (\widehat{O}_1 + \widehat{O'}_1)}{2}$$

$$= \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$



Hình 148

Suy ra $\widehat{DAE} = 90^\circ$.

b) Tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$.

Tương tự $\widehat{AEC} = 90^\circ$.

Tứ giác ADME có $\widehat{DAE} = 90^\circ$, $\widehat{ADM} = 90^\circ$, $\widehat{AEM} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

c) Tam giác AOD cân tại O nên $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1$.

Gọi I là giao điểm các đường chéo của hình chữ nhật ADME, ta có $\widehat{A}_3 = \widehat{D}_2$.

Suy ra $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 90^\circ$.

MA vuông góc với AB tại A nên MA là tiếp tuyến của đường tròn (O), và cũng là tiếp tuyến của đường tròn (O').

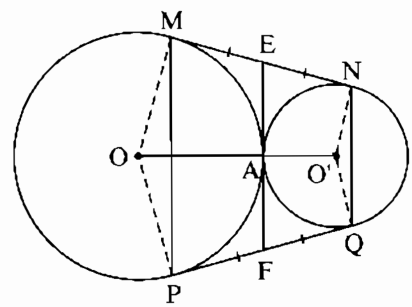
77. (h.149)

a) Học sinh tự chứng minh.

b) OO' là đường trung trực của MP nên OP = OM, do đó P thuộc đường tròn (O).

Ta có $\widehat{OMP} = \widehat{OPM}$. (1)

Ta có MNQP là hình thang cân nên $\widehat{NMP} = \widehat{QPM}$. (2)



Hình 149

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OMN} = \widehat{OPQ}$.

Do $\widehat{OMN} = 90^\circ$ nên $\widehat{OPQ} = 90^\circ$. Vậy PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tương tự, PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O').

c) Kẻ tiếp tuyến chung tại A, cắt MN và PQ theo thứ tự ở E và F. Ta có EM = EA = EN, FP = FA = FQ.

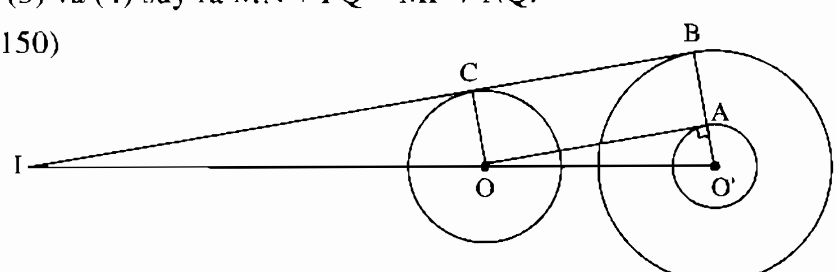
Do đó $\quad MN + PQ = 2EF.$ (3)

EF là đường trung bình của hình thang MNQP nên

$$MP + NQ = 2EF. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra MN + PQ = MP + NQ.

78. (h.150)



Hình 150

a) OO' = 6 > 2 + 3 nên hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau.

b) Tứ giác ABCO có AB // CO, AB = CO nên là hình bình hành, lại có $\widehat{A} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^0$. Do đó BC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O ; 2cm) và (O' ; 3cm).

c) Tính OA trong tam giác OO'A vuông tại A, được OA = $\sqrt{35}$, do đó

$$BC = \sqrt{35}\,(cm).$$

d) OC // O'B nên theo định lí Ta-lét :

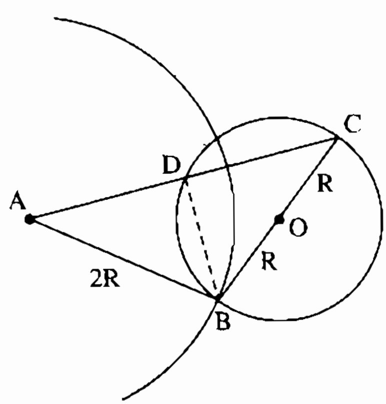
$$\frac{IO}{IO'} = \frac{OC}{O'B} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{IO}{IO' - IO} = \frac{2}{3-2}$$

$$\Rightarrow \frac{IO}{OO'} = \frac{2}{1} \Rightarrow IO = 2.OO' = 12(cm).$$

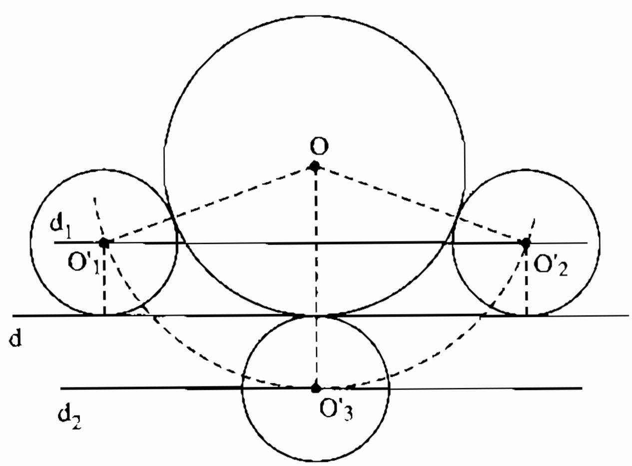
79. (h.151)

a) Vì đường tròn tâm O có bán kính bằng R, đường tròn tâm A có bán kính bằng 2R và theo giả thiết ta có 2R − R < OA < 2R + R, nên hai đường tròn (A) và (O) cắt nhau.

b) Tam giác ABC có AB = BC nên là tam giác cân. Ta lại chứng minh được BD ⊥ AC nên AD = DC.



Hình 151



Hình 152

80. (h.152)

Phân tích. Giả sử đã dựng được đường tròn (O' ; 1cm) tiếp xúc với đường thẳng d và tiếp xúc ngoài với đường tròn (O ; 2cm).

(O') tiếp xúc với d nên O' thuộc hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với d và cách d là 1cm.

(O') tiếp xúc ngoài với (O) nên O' thuộc đường tròn tâm O bán kính 2 + 1 = 3 (cm).

Bài toán có ba nghiệm hình (xem hình 152).

Học sinh tự trình bày phần *Cách dựng* và *Chứng minh*.

Bài tập bổ sung

8.1.

R	r	OO'	Hệ thức giữa OO', R, r	Vị trí tương đối của (O) và (O')
3	1	2	OO' = R − r	Tiếp xúc trong
3	1	4	OO' = R + r	Tiếp xúc ngoài
3	1	3,5	R − r < OO' < R + r	Cắt nhau
3	1	5	OO' > R + r	Ở ngoài nhau
3	1	1	OO' < R − r	(O) đựng (O')

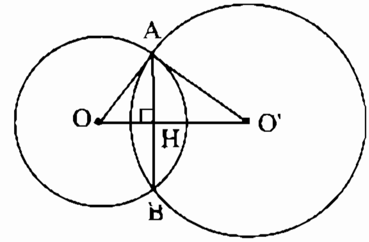
8.2. (h.bs.36)

a) (O) và (O') cắt nhau.

b) Gọi A và B là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'), H là giao điểm của AB và OO'.

Tam giác AOO' vuông tại A, AH ⊥ OO' và AB = 2AH.

Ta tính được AH = 2,4cm nên AB = 4,8cm.

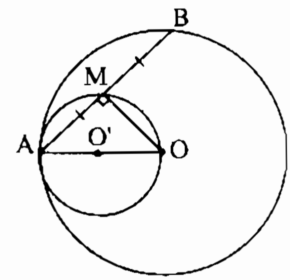


Hình bs. 36

8.3. (h.bs.37)

a) $\widehat{AMO} = 90^o$. Điểm M chuyển động trên đường tròn (O') đường kính AO.

b) Đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O).



Hình bs. 37

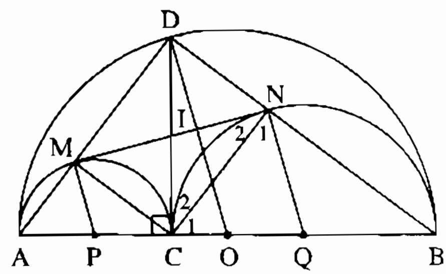
Ôn tập chương II

81. (h.153)

a) Gọi P, Q, O theo thứ tự là trung điểm của AC, CB, AB ; đó là tâm của các đường tròn có đường kính là AC, CB, AB.

Tam giác AMC nội tiếp đường tròn đường kính AC nên

$$\widehat{AMC} = 90^o.$$



Hình 153

Tương tự, $\widehat{CNB} = 90^o$, $\widehat{ADB} = 90^o$. Tứ giác DMCN có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

b) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ACD :

$$DM.DA = DC^2. \quad (1)$$

Tương tự $$DN.DB = DC^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$DM.DA = DN.DB.$$

c) Tam giác QCN cân tại Q nên

$$\widehat{C}_1 = \widehat{N}_1$$

Tam giác ICN cân tại I nên

$$\widehat{C}_2 = \widehat{N}_2.$$

Suy ra $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2$, tức là $\widehat{ICQ} = \widehat{INQ}$.

Do $\widehat{ICQ} = 90^o$ nên $\widehat{INQ} = 90^o$, do đó MN là tiếp tuyến của đường tròn (Q).

Tương tự, MN là tiếp tuyến của đường tròn (P).

d) Ta có MN = DC (đường chéo của hình chữ nhật DMCN)

mà DC ≤ OD nên MN ≤ OD (OD không đổi).

MN = OD khi và chỉ khi C trùng O.

Vậy khi C là trung điểm của AB thì MN có độ dài lớn nhất.

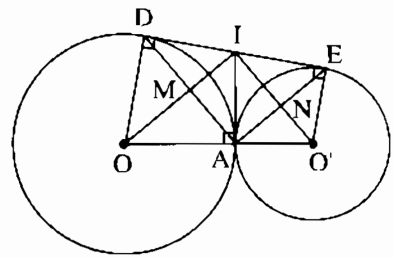
82. (h.154)

a) IO, IO' là tia phân giác của hai góc kề bù AID và AIE nên $\widehat{OIO'} = 90^0$.

Tam giác AID cân tại I, IM là tia phân giác của góc AID nên IM ⊥ AD.

Tương tự IN ⊥ AE.

Tứ giác AMIN có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.



Hình 154

b) Chứng minh rằng IM.IO và IN.IO' cùng bằng IA^2.

c) IA là bán kính của đường tròn tâm I có đường kính DE. Do OO' vuông góc với IA tại A nên OO' là tiếp tuyến của đường tròn (I).

d) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OIO' :

$$IA^2 = OA.O'A = 5.\ 3{,}2 = 16 \Rightarrow IA = 4(cm).$$

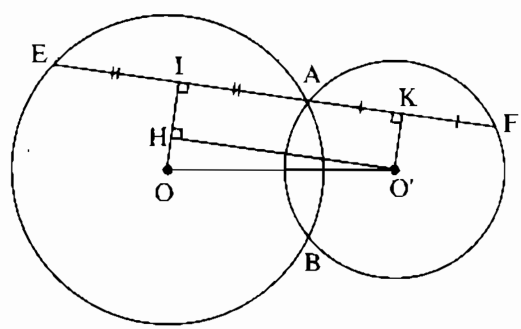
Do đó DE = 2.IA = 8(cm).

83. (h.155)

Kẻ OI và O'K vuông góc với EF. Ta có

$$AI = IE = \frac{AE}{2},$$

$$AK = KF = \frac{AF}{2},$$



Hình 155

nên

$$EF = AE + AF = 2(AI + AK) = 2IK. \qquad (1)$$

Kẻ O'H ⊥ OI, ta có

$$IK = O'H \le OO' = 3cm. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EF \le 6cm$.

EF = 6cm khi và chỉ khi H trùng O, tức là EF // OO'.

Vậy EF có độ dài lớn nhất bằng 6cm khi và chỉ khi EF // OO'.

84. (h.156)

a) OB ⊥ AD (tại I) nên AI = ID.

Suy ra tam giác BAD cân, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, do đó $\widehat{B}_3 = \widehat{B}_4$.

Tam giác EBF có đường cao cũng là đường phân giác nên là tam giác cân.

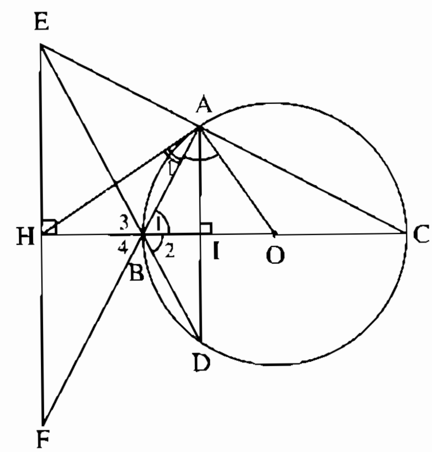
b) Tam giác EBF cân nên

$$EH = HF.$$

Tam giác AEF vuông tại A có AH là đường trung tuyến nên

$$AH = HE = HF.$$

Do đó tam giác HAF cân tại H.



Hình 156

c) Tam giác HAF cân tại H nên

$$\widehat{A}_1 = \widehat{F}. \qquad (1)$$

Tam giác OAB cân tại O nên

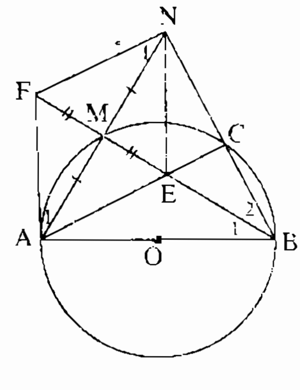
$$\widehat{OAB} = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_4. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{OAH} = \widehat{A}_1 + \widehat{OAB} = \widehat{F} + \widehat{B}_4 = 90^o.$$

Suy ra HA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

85. (h.157)



Hình 157

a) Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$, $\widehat{ACB} = 90^{\circ}$ nên E là trực tâm của tam giác NAB, do đó $NE \perp AB$.

b) Tứ giác AFNE có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành (tứ giác này còn là hình thoi). Do đó FA // NE. Do $NE \perp AB$ nên $FA \perp AB$.

Suy ra FA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Tam giác ABN có đường cao BM cũng là đường trung tuyến nên là tam giác cân. Suy ra BN = BA. Do đó BN là bán kính của đường tròn (B ; BA).

Tam giác ABN cân tại B nên $\widehat{BNA} = \widehat{BAN}$. (1)

Tam giác AFN có đường cao FM là đường trung tuyến nên là tam giác cân, suy ra

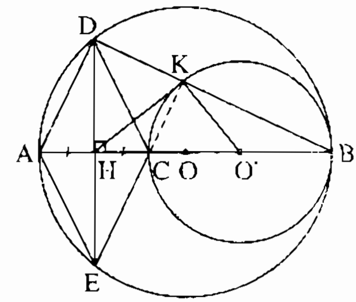
$$\widehat{N}_1 = \widehat{A}_1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BNA} + \widehat{N}_1 = \widehat{BAN} + \widehat{A}_1$ tức là $\widehat{FNB} = \widehat{FAB}$.

Ta lại có $\widehat{FAB} = 90^{\circ}$ (câu b)), nên $\widehat{FNB} = 90^{\circ}$.

Do đó FN là tiếp tuyến của đường tròn (B).

86. (h.158)



Hình 158

a) Đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) vì OO' = OB – O'B.

b) Tứ giác ADCE có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành, lại có $AC \perp DE$ nên là hình thoi.

c) Chứng minh CK và AD cùng vuông góc với BD, từ đó suy ra CK // AD.

Mặt khác, ta có CE // AD vì là các cạnh đối của hình thoi.

Qua C ta có CK // AD và CE // AD nên các đường thẳng CK, CE trùng nhau (theo tiên đề Ơ-clit). Do đó ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Tam giác DKE vuông có KH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên KH = HE = HD, do đó tam giác KHE cân tại H, suy ra

$$\widehat{HKC} = \widehat{HEC}. \quad (1)$$

Tam giác O'KC cân tại O' nên

$$\widehat{O'KC} = \widehat{OCK} = \widehat{ECH}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{HKC} + \widehat{O'KC} = \widehat{HEC} + \widehat{ECH} = 90^o.$$

Vậy $\widehat{HKO'} = \widehat{HKC} + \widehat{O'KC} = 90^o$. Do đó HK là tiếp tuyến của đường tròn (O').

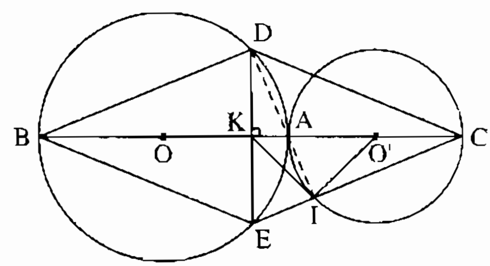
87. (h.159)

a) Tứ giác BDCE có

BK = KC, DK = KE

nên là hình bình hành, lại có

BC ⊥ DE nên là hình thoi.



Hình 159

b) Chứng minh AD ⊥ BD, AI ⊥ IC (tức là AI ⊥ EC).

Mặt khác, ta có BD // EC vì là các cạnh đối của hình thoi.

Các đường thẳng AD, AI cùng đi qua A và vuông góc với hai đường thẳng song song (BD, EC) nên A, D và I thẳng hàng.

c) Tam giác DIE vuông có IK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên

$$IK = KD = KE,$$

do đó $\widehat{KIA} = \widehat{KDA}$. (1)

Tam giác O'IA cân tại O' nên $\widehat{O'IA} = \widehat{O'AI} = \widehat{DAK}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{KIA} + \widehat{O'IA} = \widehat{KDA} + \widehat{DAK} = 90^o.$$

Do đó $\widehat{KIO'} = \widehat{KIA} + \widehat{O'IA} = 90^o$. Vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

88. (h.160)

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có :

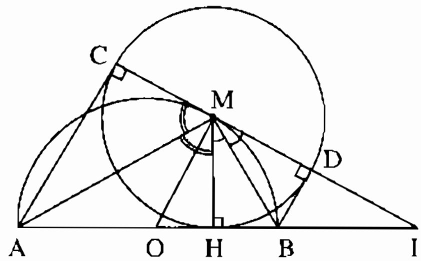
$$\overparen{HMD} = 2\overparen{HMB},$$

$$\overparen{HMC} = 2\overparen{HMA}.$$

Suy ra

$$\overparen{HMD} + \overparen{HMC} = 2(\overparen{HMB} + \overparen{HMA})$$

$$= 2\overparen{AMB} = 2.90^\circ = 180^\circ.$$



Hình 160

Do đó C, M, D thẳng hàng.

Hình thang ABDC có O là trung điểm của AB, M là trung điểm của CD nên OM là đường trung bình, suy ra OM // AC.

Ta lại có AC ⊥ CD nên OM ⊥ CD. Vậy CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) AC + BD = AH + BH = AB không đổi.

c) OM là đường trung bình của hình thang ACDB nên OM // BD, suy ra OM ⊥ CD.

Theo hệ thức lượng trong tam giác MOI vuông tại M :

$OH.OI = OM^2$ không đổi (vì OM bằng bán kính của đường tròn tâm O).

Bài tập bổ sung

II.1. Chọn (B).

II.2. (h. bs. 38)

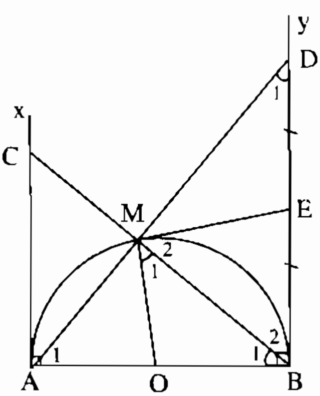
a) $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_1}$).

$\Delta ABC \backsim \Delta BDA$ (g.g) suy ra

$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{AB}$, do đó $AC.BD = AB^2$.

b) Tam giác EBM cân nên $\widehat{M_2} = \widehat{B_2}$.

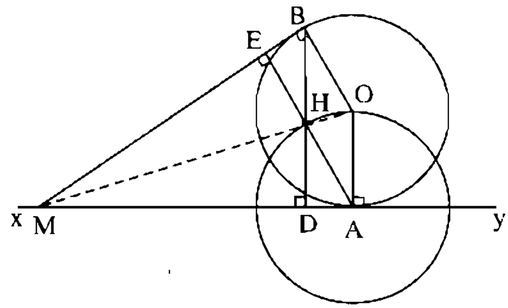
Suy ra $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ$, tức là ME ⊥ OM tại M. Vậy ME là tiếp tuyến của nửa đường tròn.



Hình bs. 38

II.3. (h.bs.39)

a) Gọi BD, AE là các đường cao của ΔMAB. Ta có $\Delta MAE = \Delta MBD$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $ME = MD$, $\Delta MHE = \Delta MHD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) nên $\widehat{EMH} = \widehat{DMH}$. MH và MO đều là tia phân giác của góc AMB nên M, H, O thẳng hàng.



Hình bs. 39

b) Tứ giác AOBH có BH // OA, AH // OB và OA = OB nên là hình thoi.

c) H cách A cố định một khoảng bằng OA không đổi nên H di chuyển trên đường tròn (A ; AO).

MỤC LỤC

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. **Hệ thức lượng trong tam giác vuông**

Chương II. **Đường tròn**

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **NGUYỄN KIM THƯ – NGUYỄN THỊ THANH XUÂN**
Biên tập tái bản : **NGUYỄN THỊ THANH**
Biên tập kĩ thuật : **ĐINH XUÂN DUNG – TRẦN THANH HẰNG**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **NGUYỄN THỊ THANH**
Chế bản : **CÔNG TY CP THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

BÀI TẬP TOÁN 9 – TẬP MỘT

Mã số : 2B903T1

In 90.000 cuốn (ST) khổ 17 x 24cm.
In tại Công ty TNHH MTV In Quân đội 1 - Hà Nội
Số in: 0565. Số xuất bản: 01-2011/CXB/776-1235/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2011.

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH BÀI TẬP LỚP 9

1. Bài tập Ngữ văn 9 (tập một, tập hai)
2. Bài tập Toán 9 (tập một, tập hai)
3. Bài tập Vật lí 9
4. Bài tập Hoá học 9
5. Bài tập Tiếng Anh 9
6. Bài tập Tiếng Pháp 9
7. Bài tập Tiếng Nga 9

8 934994 023115

Giá: **13.900đ**