TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
4 2008
Số 370

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

KẾT QUẢ KÌ THI KHU VỰC LẦN THỨ VIII GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY

NĂM HỌC 2007 - 2008

Kì thi Khu vực giải toán trên máy tính cầm tay lần thứ VIII do Bộ GD&ĐT tổ chức vào 2 ngày 14 & 15/3/2008 vừa qua tại 4 hội đồng thi khu vực gồm : Tuyên Quang, Hải Dương, Phú Yên và Tiền Giang với sự tài trợ chi phí tổ chức thi và giải thưởng của Công ti Cổ phần XNK Bình Tây (BITEX) đối với môn thi Toán và Công ti CP Điện tử Việt Nhật (VNC) đối với các môn thi Lí, Hóa, Sinh.

Kì thi năm nay có 62 Tỉnh, Thành phố tham gia, với 1.158 học sinh dự thi các môn : Toán, Lí, Hóa, Sinh thuộc cấp học: THCS, THPT, Bổ Túc THPT. Đây là lần đầu tiên tổ chức thi giải toán cho các môn học Lí, Hóa, Sinh bậc THPT, có 27 tỉnh thành tham gia với 376 học sinh dự thi. Máy tính sử dụng trong kì thi này là các loại máy được phép sử dụng trong các kì thi tốt nghiệp và đại học năm 2007 gồm: Casio *fx-500 MS,ES*; Casio *fx-570 MS, ES* và máy tính VINACAL *vn- 500MS,vn-570MS*.

Kết quả cụ thể như sau:

1. GIẢI TOÀN ĐOÀN

Gồm 4 giải Nhất, 4 giải Nhì, 4 giải Ba.

Khu vực Tuyên Quang: *Thái Nguyên* (giải Nhất), *Bắc Giang* (giải Nhì), *Phú Thọ* (giải Ba).

Khu vực Hải Dương: *Hải Phòng* (giải Nhất), *Thanh Hoá* (giải Nhì), *Hải Dương* (giải Ba).

Khu vực Phú Yên: *Thừa Thiên Huế* (giải Nhất), *Đà Nẵng* (giải Nhì), *Phú Yên* (giải Ba).

Khu vực Tiền Giang: *Đồng Nai* (giải Nhất), *Tiền Giang* (giải Nhì), *Cần Thơ* (giải Ba).

2. GIẢI CÁ NHÂN

Gồm 34 giải Nhất, 107 giải Nhì, 208 giải Ba, 235 giải Khuyến khích. Sau đây là danh sách các học sinh đoạt giải Nhất:

Tuyên Quang: *Đỗ Hoàng Việt*, THCS Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** *Hoàng Minh Thắng*, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Tất Ngọc*, THCS Lý Nhật Quang; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Văn Anh*, THPT Đại Từ, Hoàng Sơn, THPT chuyên Thái Nguyên; **Hà Nội:** *Đặng Thị Anh*, TTGDTX Việt Hưng; **Phú Thọ:** *Đặng Minh Trang*, THPT chuyên Hùng Vương, *Lê Anh Chiến*, THPT Hùng Vương; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** *Lê Viết Minh*, THCS Duy Tân; *Dương Văn An*, THPT Châu Thành; **Tiền Giang:** *Đoàn Bảo Phương*, THCS Lê Ngọc Hân; **TP. Cần Thơ:** *Đinh Hồ Thiện Tín*, THCS TTr Thốt Nốt, *Lê Phước Duy*, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** *Trần Minh Hoàng*, THPT chuyên Bến Tre; **Bình Thuận:** *Phạm Minh Luân*, THPT chuyên Trần Hưng Đạo; **Long An:** *Nguyễn Phúc Thuận*, THPT Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** *Phạm Đăng Khoa*, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Minh Tâm*, TTGDTX Thành Đoàn; **Thừa Thiên - Huế:** *Lê Quốc Khánh*, TTGDTX Huế, *Phan Thanh Dương*, THPT Quốc Học Huế, **Đà Nẵng:** *Phạm Đức Nam Trung*, *Nguyễn Thị Ngọc Linh*, *Nguyễn Sĩ Hiếu*, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đăk Lăk:** *Đỗ Thị Xuân Quỳnh*, THCS Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, THCS Nguyễn Tất Thành. **Hải Dương:** *Phạm Sĩ Khiêm*, THCS Lê Quý Đôn; *Lê Thị Hiền*, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Phạm Thái Ngọc*, *Nguyễn Thị Hồng Thịnh*, THPT Năng khiếu Trần Phú; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Duẩn*, TTGDTX Hải Cường; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Mạnh*, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** *Bùi Hồng Quân*, THCS TTr Đông Hưng; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Hà Phương*, THPT chuyên Hà Tĩnh.

Đặc biệt, em *Phạm Sĩ Khiêm*, THCS Lê Quý Đôn **Hải Dương**, còn nhận thêm một giải thưởng đoạt điểm tuyệt đối 50/50.

Ngoài giải thưởng bằng tiền mặt, các thí sinh đoạt giải trong kì thi còn được tặng Huy chương Vàng, Bạc, Đồng cho giải Nhất, Nhì, Ba và được Bộ GD&ĐT cấp giấy chứng nhận. Ngoài ra còn tặng thưởng cho giáo viên có học sinh đoạt giải Nhất các môn học và đối với học sinh đoạt giải Nhất kì thi nếu thi đậu đại học sẽ được nhà tài trợ cấp học bổng trị giá 2 triệu đồng. Nhà tài trợ còn trao tặng phẩm bằng hiện vật cho Ban tổ chức, các đoàn và toàn thể học sinh tham gia dự thi như: Huy chương, Cúp toàn đoàn, Cờ lưu niệm, Huy hiệu kì thi, máy tính, v.v...

PV

Thứ trưởng Bộ GD-ĐT Nguyễn Vinh Hiển và ông Nguyễn Xuân Dũng - Chủ tịch HĐQT kiêm TGĐ Công ti XNK Bình Tây (BITEX) trao giải toàn đoàn Nhất, Nhì, Ba cho các đội tại khu vực Hải Dương

MỘT HƯỚNG CHỨNG MINH bất đẳng thức có điều kiện

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Trong các đề thi chọn học sinh giỏi và các đề thi vào lớp 10 THPT chuyên, ta thường thấy xuất hiện các bài toán chứng minh bất đẳng thức có điều kiện. Đây là một dạng toán khó bởi lẽ nó còn rất "mới mẻ" với học sinh THCS và thường không có phương pháp chung để giải các bài toán dạng này.

Tuy nhiên, trong nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức có điều kiện, chúng ta có thể dựa vào điều kiện của biến để đặt ẩn phụ, đưa bài toán về dạng đơn giản hơn có thể đánh giá được trực tiếp mà không cần sử dụng các kiến thức cao. Dưới đây là một số thí dụ.

✪Thí dụ 1. *Cho $x + y = 2$. Chứng minh rằng*

$$x^5 + y^5 \geq 2.$$

Nhận xét. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$, dẫn đến cách đặt $x = 1 + a$, $y = 1 - a$, $a \in \mathbb{R}$ giúp cho lời giải bài toán đơn giản hơn.

Lời giải. Đặt $x = 1+a$ với $a \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết suy ra $y = 1 - a$.

Ta có $x^5 + y^5 = (1 + a)^5 + (1 - a)^5$

$$= 2 + 20a^2 + 10a^4 \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$, hay $x = y = 1$. □

✪Thí dụ 2. *Cho $x + y + z = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq 6.$$

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Đặt $x = 1 + a$; $y = 1 + b$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết suy ra $z = 1 - a - b$.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$

$$= (1 + a)^2 + (1 + b)^2 + (1 - a - b)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + b)(1 - a - b) + (1 - a - b)(1 + a)$$

$$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 6 \geq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + \dfrac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1. \square$$

✪Thí dụ 3. *Cho $a + b = c + d$. Chứng minh bất đẳng thức $c^2 + d^2 + cd \geq 3ab$.*

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d$.

Đặt $c = a + x$, với $x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết suy ra $d = b - x$. Ta có

$$c^2 + d^2 + cd$$
$$= (a + x)^2 + (b - x)^2 + (a + x)(b - x)$$
$$= \left(a - b + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} + 3ab \geq 3ab.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = 0 \\ a - b + \dfrac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d. \square$$

✪Thí dụ 4. *Cho $x \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2(2 - x)$.*

Lời giải. Dự đoán giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = 4$.

Đặt $x = 4 - t$, từ giả thiết suy ra $t \geq 0$.

Ta có

$$A = (4 - t)^2(2 - 4 + t) = t^3 - 10t^2 + 32t - 32$$
$$= t(t - 5)^2 + 7t - 32 \geq -32.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 0$ hay $x = 4$.

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -32 khi $x = 4$. □

✪Thí dụ 5. *Cho $x + y = 3$, $x \leq 1$. Chứng minh rằng $y^3 - x^3 - 6y^2 - x^2 + 9y \geq 0$.*

Lời giải. Đặt $x = 1 - a$, $a \geq 0$. Từ giả thiết suy ra $y = 2 + a$. Lúc này bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(2+a)^3 - (1-a)^3 - 6(2+a)^2 - (1-a)^2 + 9(2+a) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2 + a \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a(a-1)^2 \geq 0 \text{ (đúng vì } a \geq 0).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $a = 1$, tức là khi $x = 1$, $y = 2$ hoặc $x = 0$, $y = 3$. □

✪**Thí dụ 6.** *Cho $x \leq 1$; $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 3x^2 + y^2 + 3xy$.*

Lời giải. Đặt $x = 1 - a$ và $x + y = 3 + b$, từ giả thiết suy ra $a, b \geq 0$.

Ta có $y = 2 + a + b$. Từ đó

$$\begin{aligned} B &= 3x^2 + y^2 + 3xy \\ &= 3(1-a)^2 + (2+a+b)^2 + 3(1-a)(2+a+b) \\ &= a^2 + b^2 - 5a + 7b - ab + 13 \\ &= \left(a - \frac{b}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{9}{2}b + \frac{27}{4} \geq \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = 0 \end{cases}, \text{ tức là } x = -\frac{3}{2} \text{ và } y = \frac{9}{2}.$$

Vậy B đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{27}{2}$ khi $x = -\frac{3}{2}$ và $y = \frac{9}{2}$. □

✪**Thí dụ 7.** *Cho $a + b \geq 2$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4.$$

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$.

Đặt $a = 1 + x$; $b = 1 + y$, từ giả thiết suy ra $x + y \geq 0$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(1+x)^3 + (1+y)^3 \leq (1+x)^4 + (1+y)^4$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq x(1+x)^3 + y(1+y)^3$$
$$\Leftrightarrow x + y + 3(x+y)(x^2 - xy + y^2) + 3(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4) \geq 0 \text{ (đúng vì } x + y \geq 0).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$ hay $a = b = 1$. □

✪**Thí dụ 8.** *Cho $ab \geq 1$. Chứng minh rằng*

$$a^2 + b^2 \geq a + b.$$

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$.

Đặt $a = 1 + x$, $b = 1 + y$. Ta có

$ab \geq 1 \Leftrightarrow (1+x)(1+y) \geq 1 \Leftrightarrow x + y + xy \geq 0$.

Ta có

$$a^2 + b^2 \geq a + b$$
$$\Leftrightarrow (1+x)^2 + (1+y)^2 \geq 2 + x + y$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y \geq 0.$$

Lại có $x^2 + y^2 \geq 2xy$, với mọi x, y nên có

$$x^2 + y^2 + x + y \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy + x + y \geq 0$$

(đúng vì $x + y + xy \geq 0$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$ hay $a = b = 1$. □

Bài tập

1. Cho $a + b + c \geq 3$. Chứng minh rằng
$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

2. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y = 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{2}{xy} + \dfrac{3}{x^2 + y^2} \geq 14$.

3. Cho $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng
$$(a+c)(b+d) + 2ac + 2bd \leq \frac{1}{2}.$$

4. Cho $a + b > 8$ và $b \geq 3$. Chứng minh rằng $27a^2 + 10b^3 > 945$.

Nhắn tin

Tạp chí THTT vừa ra mắt cuốn *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ – Quyển 3*, trong đó thông tin về một số tác giả đã cũ:

Nguyễn Phú Chiến (Hà Nội), *Nguyễn Minh Thông* (Vĩnh Phúc), *Phan Nam Hùng* (Quảng Ngãi), *Nguyễn Ngọc Hương* (Tiền Giang), *Huỳnh Văn Trọng* (Bình Định), *Trần Văn Minh*, *Nguyễn Ngọc Bình Phương* (TP. Hồ Chí Minh).

Các tác giả hãy gửi địa chỉ mới để Tòa soạn gửi sách biếu. Xin cảm ơn.

THTT

ĐỀ THI VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN
NĂM HỌC 2007-2008

NGÀY THỨ 1
(*Thời gian làm bài:* 150 phút)

Câu 1. (2 *điểm*). Cho biểu thức

$$P = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = 3+2\sqrt{2}$.

Câu 2. (2 *điểm*). Cho phương trình (m là tham số) $2x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 - 1 > 0$.

Câu 3. (2 *điểm*). a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y = 7. \end{cases}$$

b) Cho x, y là các số dương thoả mãn $x + \frac{1}{y} \le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Câu 4. (2,5 *điểm*). Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 90^0$) có đường cao BD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, BM và BD. Tia NI cắt cạnh AC tại K. Chứng minh rằng

a) Các tứ giác $ABMD$, $ABNK$ nội tiếp.

b) $BC^2 = \frac{4}{3} AC.CK$.

Câu 5. (1,5 *điểm*). Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AC, N là điểm thuộc đoạn thẳng MC sao cho $MN = \frac{1}{2} NC$. Biết rằng $\widehat{MBN} = \widehat{CBN}$.

Chứng minh rằng $\widehat{ABN} = 90^0$.

NGÀY THỨ 2
(*Thời gian làm bài:* 150 phút)

Câu 6. (3 *điểm*).

a) Giải phương trình $1 + \sqrt{1+x} = x^2$.

b) Cho đa thức bậc bốn $P(x)$ với các hệ số nguyên thoả mãn $P(x)$ chia hết cho 7 với mọi số nguyên x. Chứng minh các hệ số của $P(x)$ chia hết cho 7.

Câu 7. (2,5 *điểm*).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1 + x^3y^3 - 19x^3 = 0 \\ y + xy^2 + 6x^2 = 0. \end{cases}$

b) Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 8. (1 *điểm*). Trong một hình chữ nhật có diện tích bằng 5 chứa chín hình chữ nhật nhỏ, mỗi hình chữ nhật nhỏ có diện tích bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại hai hình chữ nhật nhỏ có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

Câu 9. (2,5 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AN và CK. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt đường tròn (O) tại điểm M ($M \ne B$). Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AC.

a) Chứng minh EK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN.

b) Chứng minh EM vuông góc với MB.

Câu 10. (1 *điểm*). Biết rằng một tứ giác lồi có tổng hai cạnh đối và một đường chéo không lớn hơn $2\sqrt{2S}$ (S là diện tích tứ giác). Tính độ dài đường chéo còn lại theo S.

THÁI VIẾT THẢO
(*Sở GD&ĐT Nghệ An*)
Sưu tầm và giới thiệu

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10
Trường THPT chuyên Hà Tĩnh
NĂM HỌC 2007-2008

(Đề thi đã đăng trên THTT số 368, tháng 2 năm 2008)

VÒNG 1

Bài 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Điều kiện để PT có hai nghiệm phân biệt là

$$\begin{cases} m+1\neq 0 \\ (2m+3)^2-8(m+1)>0 \end{cases} \quad (*)$$

Với $x_2 = 4x_1$, áp dụng hệ thức Viète ta có $5x_1 = \dfrac{2m+3}{m+1}$ và $4x_1^2 = \dfrac{2}{m+1}$. Từ đó dẫn đến $4(2m+3)^2 = 50(m+1)$, tìm được $m = 1$ và $m = -\dfrac{7}{8}$ đều thoả mãn (*).

Bài 2. a) ĐS. PT có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b) Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ ta có $(x-y)(x+y+1) = 0 \Leftrightarrow x = y$ hoặc $x = -y-1$.

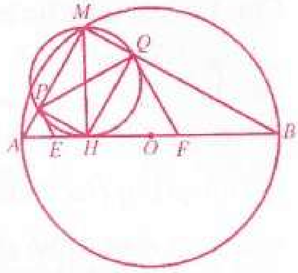
• Với $x = y$ tìm được $(x ; y) = (2 ; 2)$ và $(x ; y) = (-3 ; -3)$.

• Với $x = -y-1$ tìm được

$$(x ; y) = \left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \text{ và }$$
$$(x ; y) = \left(\frac{-3+\sqrt{29}}{2};\frac{1-\sqrt{29}}{2}\right).$$

Bài 3. Lần lượt nhân hai vế đẳng thức điều kiện với $\sqrt{y^2+4}+y$ và $\sqrt{x^2+4}+x$ ta được $x+y = \sqrt{x^2+4}-\sqrt{y^2+4}$, và $x+y = \sqrt{y^2+4}-\sqrt{x^2+4}$. Từ đó suy ra $x + y = 0$.

Bài 4. (h. 1)



Hình 1

a) Tứ giác $MPHQ$ có $\widehat{M} = \widehat{P} = \widehat{Q} = 90°$, suy ra $\widehat{PHQ} = 90°$.

Mặt khác, dễ thấy $\Delta MPQ \backsim \Delta MBA$, suy ra $MP.MA = MQ.MB$.

b) Tứ giác $EPQF$ là hình thang vuông.

c) Diện tích hình thang vuông $EPQF$ là

$$S = \frac{1}{2}PQ(PE+QF) = \frac{1}{2}MH\left(\frac{1}{2}AH+\frac{1}{2}BH\right) = \frac{1}{4}MH.AB.$$

Do AB không đổi nên S lớn nhất khi và chỉ khi MH lớn nhất hay M là điểm chính giữa cung $\widehat{AB}$.

Bài 5. Sử dụng BĐT $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ với $x, y > 0$ và BĐT Cauchy ta có

$$\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc} \geq \frac{4}{c(a+b)} \geq \frac{16}{(a+b+c)^2} = 16.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{4}$; $c = \dfrac{1}{2}$.

VÒNG 2

Bài 6. a) PT đã cho tương đương với

$$(x^2-x-1)(x^2-x+4) = 0.$$

Từ đó tìm được $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện $x \geq 0$. Ta có

$$y^2-3y\sqrt{x}+2x = 0 \Leftrightarrow \left(y-\sqrt{x}\right)\left(y-2\sqrt{x}\right) = 0.$$

• Với $y = \sqrt{x}$ thì $\sqrt{x} = x+1$ PT này vô nghiệm.

• Với $y = 2\sqrt{x}$ thì $2\sqrt{x} = x+1 \Leftrightarrow x = 1$, suy ra $y = 2$.

Vậy có một điểm $M(1 ; 2)$ thoả mãn bài toán.

Bài 7. Đặt $a = yz$, $b = zx$, $c = xy$. Theo giả thiết $a + b + c = 0$. Ta có

$$P = \frac{y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3}{x^2y^2z^2} = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)+3abc}{abc} = 3.$$

Bài 8. Ta có: $x^2 - xy + y^2 = 2x - 3y - 2$
$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9.$
Ta có $9 = 0 + 0 + 9 = 1 + 4 + 4$.

TH1. $(x-y)^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2 = 0 + 0 + 9$ vô nghiệm.

TH2. $(x-y)^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2 = 1 + 4 + 4$.

• Với $\begin{cases}(x-2)^2 = 4\\(y+3)^2 = 4\\(x-y)^2 = 1\end{cases}$ tìm được $\begin{cases}x = 0\\y = -1.\end{cases}$

• Với $\begin{cases}(x-2)^2 = 4\\(y+3)^2 = 1\\(x-y)^2 = 4\end{cases}$ tìm được $\begin{cases}x = 0\\y = 2.\end{cases}$

• Với $\begin{cases}(x-2)^2 = 1\\(y+3)^2 = 4\\(x-y)^2 = 4\end{cases}$ tìm được $\begin{cases}x = 1\\y = -1.\end{cases}$

Bài 9. Giả sử $x = \min\{x;\ y;\ z\}$. Nếu $x \le y \le z$ ta có $2x^{2008} = y^{2007} + z^{2006} \ge x^{2007} + y^{2006} = 2z^{2007}$.

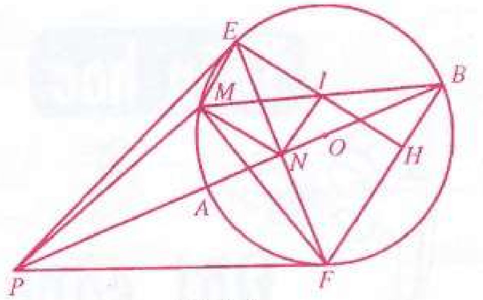
Suy ra $x^{2008} \ge z^{2008}$ hay $x \ge z$ (vì $x, z > 0$), do đó $x = z$. Từ đó suy ra $x = y = z$.

Tương tự nếu $x \le z \le y$ thì cũng có $x = y = z$.

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là
$$(x\,;\,y\,;\,z) = (1\,;\,1\,;\,1).$$

Bài 10. (h. 2). a) Do IN là đường trung bình của ΔEFH, suy ra $NI \perp EH$. Ta có $\widehat{MIN} = \widehat{MBF} = \widehat{MEF}$, suy ra tứ giác $MEIN$ nội tiếp. Do đó $\widehat{EMN} = 180° - \widehat{EIN} = 90°$.

b) Ta có $\widehat{FMN} + \widehat{EMN} = 180° - \widehat{EBF}$, hay
$$\widehat{FMN} = 90° - \widehat{EBF} \quad (1)$$



Hình 2

Mặt khác, $\widehat{PFE} = \widehat{EBF}$ (tính chất tiếp tuyến), suy ra $\widehat{NPF} = 90° - \widehat{PFE} = 90° - \widehat{EBF}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{FMN} = \widehat{FPN}$. Vậy tứ giác $PMNF$ nội tiếp đường tròn, suy ra
$$\widehat{MPN} = \widehat{MFN} \quad (3)$$
Lại có do PE là tiếp tuyến nên
$$\widehat{MFN} = \widehat{MEP} \quad (4)$$
Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MPN} = \widehat{MEP} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MP}$ (của đường tròn qua P, E, M). Do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn qua 3 điểm P, E, M.

Bài 11. Sử dụng BĐT Cauchy ta có
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + 3 =$$
$$\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{2}\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \ge \frac{9}{2}.$$
Suy ra $Q = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}$. Từ đó ta có
$P = (x+y+z)Q - (x+y+z) \ge \frac{1}{2}(x+y+z) \ge 2.$
(Do $x + y + z \ge 4$).

Vậy P đạt GTNN bằng 2 khi $x = y = z = \frac{4}{3}$.

HOÀNG NGỌC CẢNH
(*Hà Tĩnh*) giới thiệu

GIÁO SƯ NGUYỄN CẢNH TOÀN
ĐƯỢC BỔ NHIỆM LÀM TỔNG GIÁM ĐỐC DANH DỰ CỦA IBC

Nhân dịp kỉ niệm 40 năm ngày thành lập Trung tâm Tiểu sử Quốc tế, Cambridge, nước Anh (International Biographical Centre, viết tắt là IBC), vào ngày 21-1-2008 GS. Nguyễn Cảnh Toàn đã được bổ nhiệm làm Tổng Giám đốc danh dự của IBC.

Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin gửi lời chúc mừng tới Giáo sư và gia đình.

THTT

THI TRẮC NGHIỆM dưới góc nhìn xác suất

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

I. Đánh giá, xếp hạng chất lượng một kì thi theo tiêu chí nào?

Câu chuyện nên hay không nên thi trắc nghiệm (TN) đang là một đề tài "nóng" được tranh luận rất sôi nổi trong ngành giáo dục. Số người bảo "nên" khá nhiều và số người bảo "không nên" cũng không ít.

Phái ủng hộ thi TN lập luận rằng: Với thi TN ta có thể đánh giá một phạm vi kiến thức rộng trong một khoảng thời gian ngắn, ít gây may rủi do trúng tủ, trật tủ. Thi TN tỏ ra đặc biệt thích hợp cho kì thi có nhiều thí sinh tham gia và phải hoàn thành trong thời gian ngắn như thi tốt nghiệp và Tuyển sinh Đại học. Hơn nữa thi TN chấm điểm bằng máy tự động do đó đảm bảo tính khách quan, hạn chế tối đa tiêu cực ở khâu chấm thi.

Những người phản đối thi TN cho rằng: Nếu như với thi tự luận thì học sinh không học là không làm được bài nên chắc chắn bị điểm 0 thì với thi TN, học sinh không biết gì cứ " bôi đen" một cách hú hoạ thì may ra vẫn có cơ hội kiếm được một số điểm nào đó. Mặt khác, thi TN chủ yếu chỉ đánh giá khả năng ghi nhớ và năng lực tư duy ở cấp bậc thấp, nói chung không đo được khả năng diễn đạt và năng lực tư duy bậc cao của thí sinh. Thêm vào đó, thi TN còn buộc thí sinh phải trả lời theo khung định sẵn, không cho phép thể hiện năng lực sáng tạo tự do của mình...

Việc so sánh phương thức thi nào tốt hơn là một vấn đề gây tranh cãi. Mỗi phương thức thi đều có cái hay và cái dở. Tuy nhiên, ai nấy đều nhất trí rằng dù *thi theo phương thức nào, thì mục đích trên hết là nhằm đánh giá đúng đắn, công bằng và khách quan trình độ của thí sinh*. Một kì thi sẽ là lí tưởng và tuyệt vời nếu mỗi thí sinh đạt chuẩn kiến thức và kĩ năng THPT đều thi đỗ và bất kì thí sinh nào không đạt chuẩn kiến thức và kĩ năng THPT phải bị trượt. Nhưng tiếc thay, trên đời này không có cái gì là tuyệt đối hoàn hảo, chắc chắn 100% cả. Do những nguyên nhân khách quan và chủ quan, mọi kì thi đều tiềm ẩn khả năng mắc phải hai loại sai lầm sau:

1) *Loại sai lầm thứ nhất* : Thi sinh thi trượt nhưng trên thực tế, học vấn của thí sinh đạt chuẩn kiến thức và kĩ năng. Đây là loại sai lầm "đánh trượt oan".

2) *Loại sai lầm thứ hai* : Thí sinh thi đỗ nhưng trên thực tế, học vấn của thí sinh không đạt chuẩn. Đây là loại sai lầm: "cho đỗ nhầm". Cả hai sai lầm này ta đều không muốn có, trong đó loại sai lầm "đánh trượt oan" nên được coi là nghiêm trọng hơn loại sai lầm "cho đỗ nhầm".

Theo góc nhìn và tư duy xác suất, ta phải chấp nhận nguyên lí sau: *"Không thể triệt tiêu hoàn toàn hai loại sai lầm nói trên mà chỉ có thể giảm xác suất mắc hai sai lầm đó đến mức thấp nhất có thể"*.

Hai sai lầm này sẽ dẫn tới ở kết quả thi sẽ có học sinh đỗ nhầm và có học sinh trượt oan.

Thành thử một tiêu chí cần đưa vào khi đánh giá, xếp hạng các kì thi nên chăng là:

So sánh tỉ lệ đỗ nhầm và trượt oan của mỗi kì thi.

Bài toán sau đây cho thấy các xác suất sai lầm nói trên sẽ dẫn tới tỉ lệ học sinh đỗ nhầm và tỉ lệ học sinh trượt oan của kì thi như thế nào.

✪**Bài toán 1.** *Giả sử tỉ lệ học sinh lớp 12 ở một tỉnh H đạt chuẩn kiến thức và kĩ năng THPT là 80%. Trong kì thi tốt nghiệp, xác suất để một học sinh không đạt chuẩn mà đỗ tốt nghiệp (xác suất đỗ nhầm) là 0,05 và xác suất để một học sinh đạt chuẩn nhưng trượt tốt nghiệp (xác suất trượt oan) là 0,001.*

a) Tính tỉ lệ đỗ tốt nghiệp của tỉnh H.

b) Tính tỉ lệ học sinh đỗ nhầm của tỉnh H (tức là tỉ lệ học sinh không đạt chuẩn trong số các học sinh tốt nghiệp).

c) Tính tỉ lệ các học sinh trượt oan của tỉnh H (tức là tỉ lệ học sinh đạt chuẩn trong số các học sinh trượt tốt nghiệp của tỉnh H).

(Chú ý rằng với một kì thi lí tưởng tuyệt đối hoàn hảo thì đáp số của câu a), b) và c) tương ứng là 80%, 0% và 0%).

Lời giải. a) Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 12 của tỉnh H vừa tham gia kì thi. Ta cần tính xác suất để học sinh đó đỗ tốt nghiệp. Gọi A là biến cố "Học sinh đó đạt chuẩn". $\overline{A}$ là biến cố "Học sinh đó không đạt chuẩn" ; D là biến cố "Học sinh đó đỗ tốt nghiệp". Rõ ràng $D = AD \cup \overline{A}D$. Vì hai biến cố AD và $\overline{A}D$ xung khắc nên theo quy tắc cộng xác suất ta có

$$P(D) = P(AD) + P(\overline{A}D) \quad (1)$$

Để tính $P(AD)$ và $P(\overline{A}D)$, ta cần sử dụng quy tắc nhân mở rộng sau đây.

Với hai biến cố A, B bất kì (không nhất thiết độc lập) ta có

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

trong đó $P(B|A)$ là xác suất của biến cố B tính trong điều kiện A đã xảy ra (gọi tắt là xác suất của B với điều kiện A).

Do đó

$$P(AD) = P(A)P(D|A) \quad (2)$$
$$P(\overline{A}D) = P(\overline{A})P(D|\overline{A}) \quad (3)$$

Theo điều kiện đề bài, ta có $P(A) = 0,8$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,2$; $P(D|A) = 1 - 0,001 = 0,999$; $P(D|\overline{A}) = 0,05$. Thay vào (2) và (3) ta tìm được $P(AD) = (0,8).(0,999) = 0,7992$ (4)

$P(\overline{A}D) = (0,2)(0,05) = 0,01$ (5)

Thay (4), (5) vào (1) ta được

$$P(D) = 0,7992 + 0,01 = 0,8092.$$

Xác suất để một học sinh được chọn ngẫu nhiên đỗ tốt nghiệp là 0,8092. Vậy tỉ lệ học sinh đỗ tốt nghiệp của tỉnh H là 80,92%.

b) Theo công thức nhân xác suất mở rộng ta có $P(\overline{A}D) = P(D)P(\overline{A}|D)$. Suy ra

$$P(\overline{A}|D) = \frac{P(\overline{A}D)}{P(D)} = \frac{0,01}{0,8092} \approx 0,0124.$$

Vậy xác suất để một học sinh không đạt chuẩn nhưng vẫn đỗ tốt nghiệp là 0,0124. Nói cách khác: *Tỉ lệ học sinh đỗ nhầm là* 1,24%.

c) Gọi $\overline{D}$ là biến cố: " Học sinh đó trượt tốt nghiệp". Theo a) ta có

$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,8092 = 0,1908$ (6)

Theo công thức nhân xác suất mở rộng ta có

$$P(A\overline{D}) = P(A).P(\overline{D}|A) = (0,8).(0,001) = 0,0008 \quad (7)$$

Lại có $P(A\overline{D}) = P(\overline{D}).P(A|\overline{D})$. Từ (6) và (7) suy ra

$$P(A|\overline{D}) = \frac{P(A\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.0008}{0,1908} \approx 0,0041.$$

Vậy xác suất để một học sinh đạt chuẩn nhưng lại trượt tốt nghiệp là 0,0041. Nói cách khác: *Tỉ lệ học sinh trượt oan là* 0,41%. ❐

Ta có bảng tổng kết sau đây về kết quả thi của tỉnh H

Tỉ lệ đỗ tốt nghiệp	Tỉ lệ đỗ nhầm	Tỉ lệ trượt oan
80,92%	1,24%	0,41%

II. Phân tích định lượng kết quả thi trắc nghiệm của nhóm học sinh "ngồi nhầm lớp"

Một trong những lí lẽ của phe phản đối thi TN là với những thí sinh "ngồi nhầm lớp", không biết gì, để rồi làm bài thi bằng cách "đánh" hú họa, thì vẫn có thể kiếm được điểm nhờ may rủi. Tuy nhiên, đấy mới chỉ là những lập luận có tính chất định tính. Trong phần này, chúng ta sử dụng các kiến thức đơn giản của Xác suất trong chương trình phổ thông mới để xác định một cách định lượng kết quả thi TN của nhóm học sinh "ngồi nhầm lớp": Tỉ lệ học sinh kiếm được điểm do "đoán mò" là bao nhiêu? Số điểm trung bình của một học sinh "đoán mò" là bao nhiêu? Thấp hay cao? Có thể chấp nhận được không?

Gọi Δ là tập hợp các học sinh yếu kém thuộc dạng "ngồi nhầm lớp", làm bài thi TN bằng cách mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một ô để bôi đen.

✪**Bài toán 2.** *Giả sử đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu có 4 đáp án trả lời trong đó chỉ có một đáp án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm, mỗi câu trả lời sai được 0 điểm. Thí sinh sẽ đỗ nếu đạt ít nhất 25 điểm.*

a) Tính tỉ lệ học sinh của nhóm Δ bị điểm 0.

b) Tính điểm trung bình của các học sinh trong nhóm Δ.

c) Tính tỉ lệ học sinh của nhóm Δ thi đỗ.

Lời giải. Chọn một học sinh bất kì trong nhóm Δ. Giả sử học sinh được chọn có tên An.

a) Ta cần tính xác suất để An bị điểm 0. Với mỗi câu, xác suất trả lời đúng của An là 0,25 và trả lời sai là 0,75. An bị điểm 0 khi trả lời sai tất cả 10 câu. Theo quy tắc nhân xác suất, xác suất để An bị điểm 0 là $(0,75)^{10} \approx 0,0563$.

Như vậy *tỉ lệ học sinh của nhóm Δ bị điểm 0 là 5,63%.*

b) Gọi X là số điểm mà An đạt được. Ta cần tính kì vọng $E(X)$. Muốn vậy cần lập bảng phân bố xác suất của X.

Rõ ràng X là một biến ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể là $\{5k \mid k = 0, 1, 2, 3, ..., 10\}$. An nhận được số điểm là $5k$ khi và chỉ khi em đó trả lời đúng k câu và trả lời sai $10 - k$ câu. Gọi A là biến cố "An trả lời đúng k câu và trả lời sai $10 - k$ câu". Khi đó $P(X = 5k) = P(A)$.

Mỗi câu trả lời đúng được mã hoá bởi chữ số 1 và câu trả lời sai được mã hoá bởi chữ số 0. Khi đó kết quả của bài làm học sinh sẽ là một dãy 00101...10 gồm có 10 kí tự 0 và 1. Ta gọi đó là một dãy nhị phân độ dài 10. Một dãy nhị phân độ dài 10 gọi là dãy cấp k ($0 \le k \le 10$) nếu trong dãy đó có đúng k chữ số 1 và $10 - k$ chữ số 0. Vì với mỗi câu, xác suất để An trả lời đúng là 0,25 và trả lời sai là 0,75 nên xác suất để xuất hiện một dãy nhị phân cấp k là $(0,25)^k.(0,75)^{10-k}$.

Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi xuất hiện một dãy nhị phân cấp k nào đó. Rõ ràng có C_{10}^k dãy nhị phân cấp k, nên theo quy tắc cộng xác suất ta có

$$P(A) = C_{10}^k(0,25)^k.(0,75)^{10-k} \qquad (1)$$

Vậy $P(X = 5k) = C_{10}^k(0,25)^k.(0,75)^{10-k}$

Từ đó ta có được bảng phân bố xác suất của X như sau

X	0	5	10	15	20	25
P	0,0563	0,1877	0,2816	0,2503	0,1460	0,0584

X	30	35	40	45	50
P	0,0162	0,0031	0,0004	0,0000	0,0000

Bảng 1

Từ đó

$E(X)=0.(0,0563)+5.(0,1871)+\cdots+50.(0)=12,5.$

Vậy *điểm trung bình của các học sinh nhóm Δ là 12,5 điểm.*

c) An thi đỗ khi $X \ge 25$. Vậy xác suất để An thi đỗ là

$P(X\ge 25) = P(X = 25)+ P(X=30) + P(X=35)+ P(X= 40) + P(X= 45) + P(X=50) = 0,0781.$

Vậy *tỉ lệ học sinh của nhóm Δ thi đỗ là* 7,81% . ❒

(Kì sau đăng tiếp)

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Một số dạng toán SỬ DỤNG CÔNG THỨC TỔ HỢP VÀ NHỊ THỨC NEWTON

NGUYỄN ANH DŨNG
(*Hà Nội*)

Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị và nhị thức Newton khá phong phú, thường xuất hiện trong các kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông và tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng. Sau đây là một số kiến thức cơ bản và dạng toán thường gặp.

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Trong bài viết này ta quy ước n, k là các số tự nhiên với $n \geq 1$; $k \leq n$.

Cho một tập hợp A gồm n phần tử.

• Mỗi cách sắp xếp thứ tự n phần tử đó tạo thành một hoán vị. Số hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$.

• k phần tử sắp thứ tự của A tạo thành một chỉnh hợp chập k của n phần tử đó. Số chỉnh hợp là $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

• k phần tử không phân biệt thứ tự của A tạo thành một tổ hợp chập k của n phần tử đó. Số tổ hợp là $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

• Công thức khai triển nhị thức Newton
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

• Các công thức thường dùng: $C_n^k = C_n^{n-k}$ (1)

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \qquad (2)$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \qquad (3)$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \ldots + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$$
$$= C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} = 2^{n-1} \qquad (4)$$

Sử dụng (2), ta chứng minh được hai công thức
$$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$$
$$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}.$$

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. Bài toán tính tổng

★ ***Thí dụ 1.*** *Rút gọn biểu thức*
$$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k,$$
với $k \leq n$, $n > 1$.

Lời giải. Với $k < n$, áp dụng công thức (2) và lưu ý $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$, ta có
$$S_k = C_n^0 - \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1\right) + \left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2\right) - \left(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3\right) + \ldots + (-1)^k \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right)$$

Vậy $S_k = (-1)^k C_{n-1}^k$.

Nếu $k = n$ thì
$$S_n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0. \square$$

Lưu ý. Nhiều bạn đã mắc sai lầm khi viết
$$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0 \ (!)$$

Phải xét hai trường hợp đối với k như trong lời giải trên.

★ ***Thí dụ 2.*** *Tính tổng*
$$S = C_{4n}^1 + C_{4n}^3 + C_{4n}^5 + \ldots + C_{4n}^{2n-1}.$$

Lời giải. Áp dụng công thức (1), ta có
$$C_{4n}^1 = C_{4n}^{4n-1}, C_{4n}^3 = C_{4n}^{4n-3}, \ldots, C_{4n}^{2n-1} = C_{4n}^{2n+1}.$$

Do đó $S = C_{4n}^{4n-1} + C_{4n}^{4n-3} + \ldots + C_{4n}^{2n+1}$.

Ta được $2S = C_{4n}^1 + C_{4n}^3 + C_{4n}^5 + \ldots + C_{4n}^{4n-1} = 2^{4n-1}$ (xem công thức (4)). Vậy $S = 2^{4n-2}$. $\square$

★ ***Thí dụ 3.*** *(Sử dụng phép tính đạo hàm).*

Tính tổng $S = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n (n+1) C_n^n$.

Lời giải. Xét đa thức $p(x) = x(1+x)^n$, ta có $p(x) = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \ldots + C_n^n x^{n+1}$, nên

$p'(x) = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + ... + (n+1).C_n^n x^n$;
$p'(-1) = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - ... + (-1)^n (n+1) C_n^n = S$.
Mặt khác $p(x) = x(1+x)^n \Rightarrow p'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}$. Vậy $S = p'(-1) = 0$. □

Lưu ý. Để tính các tổng
$S_1 = C_n^0 + 2a.C_n^1 + 3a^2.C_n^2 + ... + (n+1)a^n C_n^n$
$S_2 = C_{2n}^0 + 3a^2.C_{2n}^2 + 5a^4.C_{2n}^4 ... + (2n+1)a^{2n} C_{2n}^{2n}$
$S_3 = 2aC_{2n}^1 + 4a^3.C_{2n}^3 + 6a^5.C_{2n}^5 ... + 2n.a^{2n-1} C_{2n}^{2n-1}$
ta xét đa thức $p(x) = x(1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S_1 = p'(a)$.
Xét đa thức $q(x) = x(1+x)^{2n}$ và chứng tỏ rằng
$2S_2 = q'(a) + q'(-a)$; $2S_3 = q'(a) - q'(-a)$.

★***Thí dụ 4.*** *(Sử dụng phép tính tích phân).*
Tính tổng $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$

Lời giải. Xét đa thức $p(x) = (1+x)^n$, ta có $p(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$. Suy ra
$$\int_0^1 p(x)dx = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = S.$$
Do đó $S = \int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Lưu ý. Để tính tổng
$S = (b-a)C_n^0 + \frac{b^2-a^2}{2}C_n^1 + \frac{b^3-a^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n$. Hãy chứng tỏ rằng $S = \int_a^b p(x)dx$ với $p(x) = (1+x)^n$.

Ta thường gặp bài toán với một trong hai cận của tích phân là 0 hoặc ± 1.

Trong một số trường hợp, ta phải xét đa thức $p(x) = x^k(1+x)^n$ với $k = 1, 2, ...$

2. Chứng minh hệ thức tổ hợp

★***Thí dụ 5.*** *Chứng minh rằng*
$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Lời giải. Ta có $(x+1)^n(1+x)^n = (x+1)^{2n}$. Vế trái của hệ thức trên chính là
$(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n)(C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n)$.
Dễ thấy hệ số của x^{2n} trong vế trái là $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2$;
hệ số của x^{2n} trong vế phải $((x+1)^{2n})$ là C_{2n}^n.

Do đó $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ (đpcm). □

Lưu ý. Xét đẳng thức $(x+1)^n(1+x)^m = (x+1)^{n+m}$. Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để viết cả hai vế thành đa thức đối với x, đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc trong hai vế, bạn có thể viết ra được nhiều hệ thức về tổ hợp.

3. Phương trình tổ hợp

Phương trình tổ hợp là PT có chứa ẩn số trong công thức tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị.

★***Thí dụ 6.*** *Giải phương trình*
$A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159$.

Lời giải. ĐK $x \ge 3, x \in \mathbb{N}$. PT đã cho có dạng
$$\frac{x!}{(x-3)!} + \frac{2(x+1)!}{2!(x-1)!} - \frac{3(x-1)!}{2!(x-3)!} = 3x^2 + 6! + 159$$
$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + x(x+1) - \frac{3}{2}(x-1)(x-2) = 3x^2 + 879$
$\Leftrightarrow (x-12)(2x^2 + 11x + 147) = 0$.

PT có nghiệm $x = 12$.

Lưu ý. Khi giải PT tổ hợp ta làm như sau: đặt điều kiện cho ẩn số; sử dụng các công thức về hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để biến đổi, rút gọn và giải PT; đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện của bài toán để kết luận.

★***Thí dụ 7.*** *(Bài toán lập phương trình tổ hợp). Hãy tìm ba số hạng liên tiếp lập thành một cấp số cộng trong dãy số sau* $C_{23}^0, C_{23}^1, C_{23}^2, ..., C_{23}^{23}$.

Lời giải. Ba số $C_{23}^n, C_{23}^{n+1}, C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi
$2C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+2}$
$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+1} + C_{23}^{n+1} + C_{23}^{n+2}$
$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{25}^{n+2}$
$\Leftrightarrow \frac{4.23!}{(n+1)!(22-n)!} = \frac{25!}{(n+2)!(23-n)!}$.

Suy ra $(n+2)(23-n)=150 \Leftrightarrow n=8; n=13$.
Ta được $\div C_{23}^{8}, C_{23}^{9}, C_{23}^{10}$ và $\div C_{23}^{13}, C_{23}^{14}, C_{23}^{15}$. □

Lưu ý. Một số tình huống thường gặp khi lập PT tổ hợp là:

Ba số *a, b, c* lập thành một cấp số cộng (hoặc cấp số nhân) khi và chỉ khi $2b=a+c$ (hoặc $b^2=ac$).

Cho tập hợp *A* có *n* phần tử, số tập con của *A* gồm *x* phần tử bằng *k* lần số tập con của *A* gồm *y* phần tử, tương ứng với PT $C_n^x = kC_n^y$ …

4. Tính hệ số của đa thức

★***Thí dụ 8***. *Tính số hạng không chứa x, khi khai triển* $P(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ *biết rằng n thoả mãn* $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8$.

Lời giải. Áp dụng công thức (2), ta có

$$C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9$$
$$=C_n^6+C_n^7+2\left(C_n^7+C_n^8\right)+C_n^8+C_n^9$$
$$=C_{n+1}^7+2C_{n+1}^8+C_{n+1}^9=C_{n+2}^8+C_{n+2}^9=C_{n+3}^9.$$

Giả thiết tương đương với

$$C_{n+3}^9=2C_{n+2}^8 \Leftrightarrow \frac{n+3}{9}=2 \Leftrightarrow n=15.$$

Khi đó $P(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15}$

$$=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{15-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k 2^k x^{\frac{30-5k}{6}}.$$

Số hạng không chứa x tương ứng với $\frac{30-5k}{6}=0 \Leftrightarrow k=6$.

Số hạng phải tìm là $C_{15}^6.2^6=320320$.

Lưu ý. Tính hệ số của số hạng x^α (α là một số hữu tỉ cho trước) trong khai triển nhị thức Newton của $p(x)=\left(f(x)\right)^n$, ta làm như sau:

Viết $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{g(k)}$; số hạng chứa x^α tương ứng với $g(k)=\alpha$; giải PT ta tìm được *k*. Nếu $k\in\mathbb{N}$, $k\le n$, hệ số phải tìm là a_k; nếu $k\notin\mathbb{N}$ hoặc $k>n$, thì trong khai triển không có số hạng chứa x^α, hệ số phải tìm bằng 0. □

★***Thí dụ 9***. *Hãy tìm hệ số có giá trị lớn nhất của đa thức*

$$P(x)=(2x+1)^{13}=a_0x^{13}+a_1x^{12}+\ldots+a_{13}.$$

Lời giải. Ta có

$$P(x)=(2x+1)^{13}=\sum_{n=0}^{13}C_{13}^n(2x)^{13-n}.$$

Vậy $a_n=C_{13}^n.2^{13-n} \Rightarrow a_{n-1}=C_{13}^{n-1}.2^{14-n}$ $(n=1,2,\ldots,13)$.

Xét BPT (với ẩn số *n*):

$$a_{n-1}\le a_n \Leftrightarrow C_{13}^{n-1}.2^{14-n}\le C_{13}^n.2^{13-n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2.13!}{(n-1)!(14-n)!}\le\frac{13!}{n!(13-n)!}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{14-n}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow n\le\frac{14}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Do đó BĐT $a_{n-1}\le a_n$ đúng với $n\in\{1,2,3,4\}$ và dấu đẳng thức không xảy ra.

Ta được $a_0<a_1<a_2<a_3<a_4$ và $a_4>a_5>\ldots>a_{13}$.

Vậy $\max(a_n)=a_4=C_{13}^4.2^9=366080$.

Lưu ý. Để tìm hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $(ax+b)^m$ thành một đa thức, ta làm như sau:

Tính hệ số của số hạng tổng quát; giải BPT $a_{n-1}\le a_n$ với ẩn số *n*; hệ số lớn nhất phải tìm tương ứng với số tự nhiên *n* lớn nhất thoả mãn BPT trên.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Tính các tổng: $S=1^2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+n^2C_n^n$;

$$P=\frac{1}{2}C_{2n}^0+\frac{1}{4}C_{2n}^2+\frac{1}{6}C_{2n}^4+\ldots+\frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}.$$

2. Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức $p(x)=\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\right)^{14}$.

3. Giải bất phương trình $\frac{1}{2}A_{2x}^2-A_x^2\le\frac{6}{x}C_x^3+10$.

4. Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển $p(x)=\left(1+x^2+\frac{1}{x^3}\right)^8$.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 180 phút)

I. PHẦN CHUNG

Câu 1. (*2 điểm*)

Cho hàm số

$$y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5 \qquad (C_m)$$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số khi $m = 1$.

2) Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều.

Câu 2. (*2 điểm*)

1) Giải phương trình

$$(1+\cos x)(1+\cos 2x)(1+\cos 3x) = \frac{1}{2}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4) = 1. \end{cases}$$

Câu 3. (*2 điểm*)

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$.

2) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq 1.$$

Câu 4. (*2 điểm*)

Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x + y + z - 1 = 0$ và đường thẳng (d) có phương trình $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$

1) Tìm tọa độ giao điểm A của (d) và (P). Tính số đo góc tạo bởi (d) và (P).

2) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, (Δ) nằm trong mặt phẳng (P) sao cho góc tạo bởi hai đường thẳng (Δ) và (d) bằng 45°.

II. PHẦN TỰ CHỌN

Câu 5a. (*2 điểm*)

(Theo chương trình THPT không phân ban)

1) Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(2\,;\,5)$, $B(4\,;\,1)$ và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình $3x - y + 9 = 0$.

2) Với n là số nguyên dương, chứng minh hệ thức $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \ldots + n(C_n^n)^2 = \frac{n}{2}C_{2n}^n$.

Câu 5b. (*2 điểm*)

(Theo chương trình THPT phân ban thí điểm)

1) Giải phương trình

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2 4x.$$

2) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao cũng bằng a. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.EBK$.

HUỲNH TẤN CHÂU

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

GIẢI ĐÁP THẮC MẮC

CÂU HỎI. (*Hoàng Vũ Diễm My*, 12A2, THPT Chu Văn An, Q. Tây Hồ, **Hà Nội**).

Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+3)x+m+3}{x-m}$ (C_m)

Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng toạ độ sao cho không có đồ thị nào của họ (C_m) đi qua.

TRẢ LỜI. Giả sử với mọi m, đồ thị (C_m) không đi qua điểm có toạ độ $(x;y)$, thế thì PT với ẩn số m sau đây vô nghiệm

$$y=\frac{x^2-(2m+3)x+m+3}{x-m} \qquad (1)$$

Với $m\neq x$, PT có thể viết thành

$$m(y-2x+1)-xy+x^2-3x+3=0 \qquad (2)$$

PT (1) vô nghiệm trong hai trường hợp sau:

1) PT (2) ẩn m vô nghiệm, khi đó

$$\begin{cases} y-2x+1=0 \\ -xy+x^2-3x+3\neq 0. \end{cases}$$

Giải ra, ta được $\begin{cases} y=2x-1 \\ x\neq -3,\ x\neq 1. \end{cases}$

2) PT (2) có nghiệm duy nhất $m=x$, khi đó

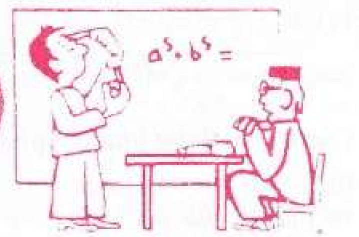
$$\begin{cases} y-2x+1\neq 0 \\ x(y-2x+1)-xy+x^2-3x+3=0. \end{cases}$$

Giải ra, ta được $\begin{cases} x=1 \\ y\neq 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-3 \\ y\neq -7. \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm $(x;y)$ mà đồ thị (C_m) không đi qua là tập hợp các điểm thuộc ba đường thẳng $y=2x-1$, $x=-3$, $x=1$ trừ hai giao điểm $(1;1)$ và $(-3;-7)$ của chúng.

NGỌC THẢO

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN



ÔN TẬP KIẾN THỨC thông qua việc giải một bài toán

NGUYỄN VĂN NHIỆM
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Việc ôn tập cho học sinh cuối bậc THPT thông qua cách tiếp cận lời giải của một bài toán bằng những tuyến kiến thức khác nhau sẽ giúp cho việc củng cố và nắm vững kiến thức một cách vững chắc. Sau đây là bài toán có nội dung như vậy.

BÀI TOÁN. *Cho $a>c$, $b>c>0$. Chứng minh rằng* $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}$ (*)

Cách 1. Dùng các phép biến đổi tương đương

$$(*)\Leftrightarrow c(a-c)+c(b-c)+2\sqrt{c(a-c)}\sqrt{c(b-c)}\leq ab$$

$$\Leftrightarrow \left(c-\sqrt{(a-c)(b-c)}\right)^2\geq 0.$$

Vậy BĐT (*) luôn đúng.

Cách 2. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

Lời giải 1. (Sử dụng bất đẳng thức (BĐT) giữa trung bình cộng và trung bình nhân).

Ta có $\sqrt{\dfrac{c}{b}.\dfrac{a-c}{a}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a-c}{a}\right)$

và $\sqrt{\dfrac{c}{a}.\dfrac{b-c}{b}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{b-c}{b}\right)$.

Cộng theo từng vế hai BĐT trên được BĐT (*).

Lời giải 2. (Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovski)

$$\left(\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\right)^2 \le (c+(b-c))(c+(a-c))=ab$$

$$\Rightarrow \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}\ .\ \square$$

Cách 3. Sử dụng phương pháp vectơ và tọa độ

Biểu thức ở vế trái của (*) có thể xem là tích vô hướng của hai vectơ, vì vậy có thể dùng phương pháp vectơ và tọa độ để giải bài toán này.

Lời giải 1. (Sử dụng vectơ và tọa độ trong mặt phẳng).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét $\vec{u}=(\sqrt{c};\sqrt{b-c})$, $\vec{v}=(\sqrt{a-c};\sqrt{c})$.

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}$; $|\vec{u}|.|\vec{v}|=ab$ mà $\vec{u}.\vec{v}\le|\vec{u}|.|\vec{v}|$ nên dẫn đến BĐT (*).

Lời giải 2. (Dùng tọa độ trong không gian).

Trong không gian $Oxyz$, xét $A(\sqrt{c};\sqrt{a-c};0)$, $B(-\sqrt{c};\sqrt{b-c};0)$ và $O(0;0;0)$. Ta có

$$\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}]\right| = S_{OAB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{ab}\sin\widehat{AOB}$$

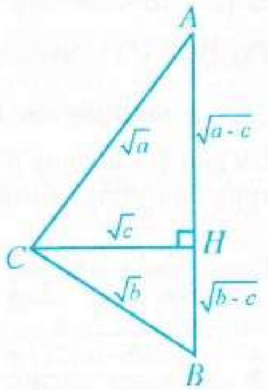
Do đó $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$

(vì $\sin\widehat{AOB}\le 1$). $\square$

Cách 4. Sử dụng phương pháp hình học

Lời giải 1. (h. 1).

Ta có thể xem $\sqrt{c},\sqrt{a-c},\sqrt{b-c}$ là độ dài những đoạn thẳng, do đó dựng hai tam giác vuông CHA và CHB có chung cạnh góc vuông $CH=\sqrt{c}$ và $HA=\sqrt{a-c}$, $HB=\sqrt{b-c}$.



Hình 1

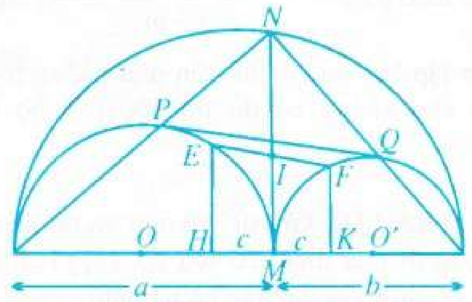
Ta có $S_{CHA}+S_{CHB}=S_{CAB}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}CH.HA+\frac{1}{2}CH.HB=\frac{1}{2}.CA.CB.\sin\widehat{ACB}$$

hay

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}=\sqrt{ab}.\sin\widehat{ACB}\le\sqrt{ab}\ .\square$$

Lời giải 2. Có thể xem $\sqrt{ab}, \sqrt{c(a-c)}, \sqrt{c(b-c)}$ là trung bình nhân của những đoạn thẳng (h. 2), $\sqrt{c(a-c)}=HE$, $\sqrt{c(b-c)}=KF$, $\sqrt{ab}=MN$.



Hình 2

Ta có $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}=HE+KF=2MI$.

Dễ thấy kết quả $2MI\le MN$, (với chú ý PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O')). Vậy $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$. $\square$

Cách 5. Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai

Đặt $y=\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}$. Ta xem c là biến số. Nếu y_0 là một giá trị của hàm số ứng với một giá trị nào đó của c ($c\in(0;\min(a,b))$ thì $y_0>0$ và ta có $y_0=\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}$.

Từ đó $y_0-\sqrt{c(a-c)}=\sqrt{c(b-c)}$

$$\Rightarrow y_0^2+c(a-b)=2y_0\sqrt{c(a-c)}$$

$$\Rightarrow ((a-b)^2+4y_0^2)c^2-2y_0^2(a+b)c+y_0^4=0\ (**)$$

Do phương trình (**) có nghiệm nên $\Delta'_c\ge 0$

$$\Rightarrow y_0^4(a+b)^2-y_0^4\left((a-b)^2+4y_0^2\right)\ge 0$$

$$\Rightarrow 4y_0^4(ab-y_0^2)\ge 0 \Rightarrow y_0^2\le ab \Rightarrow y_0\le\sqrt{ab}.\square$$

Cách 6. Dùng đạo hàm khảo sát hàm số

Lời giải 1. (Xem c là biến số).

Xét hàm số $f(c)=\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}$, với $c\in(0;\min(a,b))$. Ta có

$$f'(c)=\frac{(\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c})(\sqrt{(a-c)(b-c)}-c)}{2\sqrt{c(a-c)(b-c)}}=0$$

$$\Leftrightarrow c=\frac{ab}{a+b}.$$

$$f'(c)<0 \Leftrightarrow c>\frac{ab}{a+b}.$$

$f'(c)$ đổi dấu từ dương sang âm khi c đi qua điểm $c_0=\dfrac{ab}{a+b}$ từ trái sang phải, nên hàm số chỉ có một giá trị cực đại tại $c=\dfrac{ab}{a+b}$. Do đó hàm số $f(c)$ đạt giá trị lớn nhất:

$$\max_{(0;\min(a,b))} f(c)=f\left(\frac{ab}{a+b}\right)=\sqrt{ab}.\ \square$$

Lời giải 2. (Xem a (hoặc b) là biến số)

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{c(x-c)}-\sqrt{xb}+\sqrt{c(b-c)}$, với $x\in(c;+\infty)$ và $b>c$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{cb}(\sqrt{xc}-\sqrt{b(x-c)})}{2.\sqrt{bcx(x-c)}}=0\Leftrightarrow x=\frac{bc}{b-c};$$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{bc}{b-c}$ suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên $\left(c;\dfrac{bc}{b-c}\right)$ và nghịch biến trên $\left(\dfrac{bc}{b-c};+\infty\right)$. Lại có $f\left(\dfrac{bc}{b-c}\right)=0$ suy ra

$$f(a)=\sqrt{c(a-c)}-\sqrt{ab}+\sqrt{c(b-c)}\le 0,\ \forall a>c$$

$$\Rightarrow \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}.\ \square$$

Cách 7. Sử dụng phép thế lượng giác

Lời giải 1. Vì $0<\dfrac{c}{a}<1$ và $0<\dfrac{c}{b}<1$ nên tồn tại các số $\alpha,\beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\cos^2\alpha=\dfrac{c}{a}$ và $\cos^2\beta=\dfrac{c}{b}$. Khi đó

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}$$
$$=\sqrt{(a-a\cos^2\alpha)b\cos^2\beta}+\sqrt{(b-b\cos^2\beta)a\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{ab}\sin(\alpha+\beta)\le\sqrt{ab}.\ \square$$

Lời giải 2. Ta có

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}$$
$$=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(c-\frac{a}{2}\right)^2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-\left(c-\frac{b}{2}\right)^2}=y.$$

Đặt $c-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\cos\alpha$ và $c-\dfrac{b}{2}=\dfrac{b}{2}\cos\beta$, với $\alpha,\beta\in(0;\pi)$.

Ta được $y=\dfrac{a}{2}\sin\alpha+\dfrac{b}{2}\sin\beta$ và $\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}=\dfrac{b}{2}\cos\beta-\dfrac{a}{2}\cos\alpha$. Suy ra

$$y^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\sin\alpha+\frac{b}{2}\sin\beta\right)^2+\left(\frac{b}{2}\cos\beta-\frac{a}{2}\cos\alpha\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{2}\cos(\alpha+\beta),\text{ suy ra}$$

$$y^2=\frac{ab}{2}(1-\cos(\alpha+\beta)).\text{ Do đó}$$

$$y^2=ab\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le ab\Rightarrow y\le\sqrt{ab}.\ \square$$

Lời bình. Với việc giải bài toán trên, học sinh đã được ôn luyện kiến thức về phương trình, bất phương trình, khảo sát hàm số, phương pháp vectơ và toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian, hệ thức lượng trong tam giác vuông, các công thức biến đổi lượng giác,... Mời các bạn cùng ôn tập kiến thức thông qua việc giải hai bài toán sau đây bằng nhiều cách khác nhau nhé.

Bài 1. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác vuông, c là cạnh huyền; x, y là hai số thực thỏa mãn hệ thức $ax+by=c$. Chứng minh rằng $x^2+y^2\ge 1$.

Bài 2. Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

CÁC LỚP THCS

Bài T1/370. (Lớp 6) Chứng minh rằng

$$\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{11}{8}+\frac{15}{16}+\ldots+\frac{4n-1}{2^n}<7$$

với mọi số nguyên dương n.

BÙI PHI ANH
(SV KSCLC, K50, ĐH Bách Khoa Hà Nội)

Bài T2/370. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$cm, $IC = 6$cm với I là giao điểm của các đường phân giác trong. Tính độ dài cạnh BC.

HUỲNH THANH TÂM
(CB Bưu điện An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/370. Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương x, y, z thoả mãn điều kiện

$$5xyz = x + 5y + 7z + 10.$$

PHẠM HUY THÔNG
(49 Bạch Mai, Hà Nội)

Bài T4/370. Giải phương trình

$$x^4-2x^2-16x+1=0.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T5/370. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trực tâm của các tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$. Biết H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT Amsterdam, Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/370. Cho tam giác ABC có $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC}=140^o$. Gọi AN là phân giác trong và AH là đường cao của tam giác đó. Chứng minh rằng $2BH.CN = a^2$.

LÊ QUỐC HÁN
(GV khoa Toán, ĐHSP Vinh, Nghệ An)

Bài T7/370. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x)=(32x^5-40x^3+10x-1)^{2006}+(16x^3-12x+\sqrt{5}-1)^{2008}.$$

PHẠM ĐỨC HẠNH
(GV THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Bài T8/370. Chứng minh rằng phương trình $A.a^x + B.b^x = A + B$ (với $a > 1$, $0 < b < 1$, $A, B \in \mathbb{R}$) có nhiều nhất hai nghiệm.

NGUYỄN HỒNG SƠN
(GV khoa KHTN, trường Sĩ Quan Lục Quân I, Sơn Tây, Hà Tây)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/370. Cho $a_1=\frac{1}{2}$ và với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 1 ta đặt

$$a_n=\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_2+1}+\ldots+\frac{1}{d_k+1}$$

trong đó $d_1, d_2, \ldots, d_k$ là tất cả các ước số dương phân biệt của n. Chứng minh rằng

$$n-\ln n< a_1+a_2+\ldots+a_n<n.$$

PHAN THÀNH NAM
(SV khoa Toán- Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh)

Bài T10/370. Cho n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thuộc đoạn $[-1; 2]$ và có tổng bằng 0. Đặt $U_k=\frac{a_k\sqrt{4k-1}}{(4k-3)(4k+1)}$ với $k = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng $|U_1 + U_2 + \ldots + U_n| < \frac{\sqrt{n}}{2}$.

TRẦN HỒNG SƠN
(Sở Giáo dục và Đào tạo Thái Bình)

Bài T11/370. Xác định hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x+y)=x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)+y^2 f\left(\frac{1}{y}\right)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^*$.

VŨ ĐỨC VIỆT
(*SV CLC K56, ĐH Sư phạm Hà Nội*)

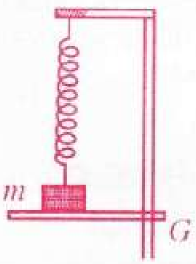
Bài T12/370. Lấy điểm P trên mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d theo thứ tự là trọng tâm các tứ diện $PBCD$, $PCDA$, $PDAB$, $PABC$. Chứng minh rằng các đường thẳng AG_a, BG_b, CG_c, DG_d đồng quy tại một điểm và tìm quỹ tích điểm đó khi P di chuyển trên mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

TRẦN QUANG HÙNG
(*SV K49A1T, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/370. Xe buýt và xe đạp chạy cùng chiều trên cùng một đường thẳng với vận tốc không đổi thứ tự là 63km/h và 33km/h. Một xe tải chạy trên đường thẳng khác với vận tốc không đổi là 52km/h. Khoảng cách từ xe tải đến xe buýt luôn luôn bằng khoảng cách từ xe tải đến xe đạp. Tìm vận tốc của xe tải đối với xe buýt.

TÔ GIANG
(*Hà Nội*) Sưu tầm



Bài L2/370. Trên một giá đỡ G có một vật khối lượng m = 0,1 kg gắn vào một lò xo có khối lượng không đáng kể và có độ cứng k = 20N/m (hình vẽ). Lúc đầu lò xo chưa biến dạng. Cho giá đỡ G rơi xuống từ nghỉ với gia tốc a = 2m/s^2. Lấy g = 10m/s^2 và bỏ qua lực cản của không khí.

1) Hỏi sau bao lâu giá đỡ rời khỏi vật?

2) Tính biên độ dao động của vật khi vật rời khỏi giá đỡ.

3) Tìm phương trình chuyển động của vật sau khi vật rời khỏi giá đỡ. Lấy gốc tính thời gian là lúc vật rời giá đỡ với chiều dương hướng xuống dưới.

NGUYỄN QUANG HẬU
(*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/370. (For 6th grade) Prove the inequality
$$\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{11}{8}+\frac{15}{16}+\ldots+\frac{4n-1}{2^n}<7$$
where n is an arbitrary positive integer.

T2/370. (For 7th grade) Let ABC be a right triangle with right angle at A. Suppose AB = 5cm, and IC = 6cm where I is the incenter of ABC. Determine the length of BC.

T3/370. Find all positive integers x, y, z such that the following equality holds
$$5xyz = x + 5y + 7z + 10.$$

T4/370. Solve for x:
$$x^4-2x^2-16x+1=0.$$

T5/370. Let ABC be an acute triangle whose altitudes AA', BB', CC' meet at H. Denote by A_1, B_1, and C_1 the othocenters of the triangles $AB'C'$, $BC'A'$, and $CA'B'$ respectively. Suppose that H is the incenter of the triangle $A_1B_1C_1$, prove that ABC is an equilateral triangle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOL

T6/370. Let ABC be an isosceles triangle with $AB = BC = a$ and $\widehat{ABC}=140^o$. Let AN and AH respectively be the angle-bisector and the altitude from A. Prove that $2BH.CN = a^2$.

T7/370. Find the minimum value of the function:
$$f(x)=(32x^5-40x^3+10x-1)^{2006}+(16x^3-12x+\sqrt{5}-1)^{2008}.$$

T8/370. Prove that the following equation: $A.a^x + B.b^x = A + B$ (where $a > 1$, $0 < b < 1$, $A, B \in \mathbb{R}$) has at most two solutions.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/370. Let $a_1=\frac{1}{2}$ and for each n greater than 1, let $a_n=\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_2+1}+\ldots+\frac{1}{d_k+1}$

(*Xem tiếp trang 30*)

★ Bài T1/366. *Cho dãy số (a_n), với $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 13$, $a_4 = 24$, $a_5 = 31$, $a_6 = 48$, ...,*

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 4n + 8, & khi\ \ n\ chẵn \\ a_n + 4n + 6, & khi\ \ n\ lẻ \end{cases}$$

a) Hỏi số 2007, số 2024 có thuộc dãy số trên không ?
b) Số thứ 2007 của dãy số trên là số nào?

Lời giải. Ta thấy

$$a_1 = 3 = 1.2 + 1,\quad a_2 = 8 = 2.4,$$
$$a_3 = 13 = 3.4 + 1,\quad a_4 = 24 = 4.6,$$
$$a_5 = 31 = 5.6 + 1,\quad a_6 = 48 = 6.8, \ldots$$

Từ đó ta dự đoán công thức a_n theo n như sau:

$$a_n = \begin{cases} n(n+2) & \text{khi } n \text{ chẵn} \\ n(n+1)+1 & \text{khi } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh công thức trên.

• Với n chẵn, theo đề bài có

$$a_4 = a_2 + 4.2 + 8$$
$$a_6 = a_4 + 4.4 + 8$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{2k-2} = a_{2k-4} + 4(2k-4) + 8$$
$$a_{2k} = a_{2k-2} + 4(2k-2) + 8.$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên được

$$a_{2k} = 8(1 + 2 + \ldots + (k-1)) + 8k$$
$$= 8.\frac{(k-1)k}{2} + 8k$$
$$= 4k^2 + 4k = 2k(2k+2).$$

Vậy công thức đúng với n chẵn.

• Với n lẻ, theo đề bài có

$$a_3 = a_1 + 4.1 + 6$$
$$a_5 = a_3 + 4.3 + 6$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{2k-1} = a_{2k-3} + 4(2k-3) + 6$$
$$a_{2k+1} = a_{2k-1} + 4(2k-1) + 6.$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên và chú ý rằng

$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-3) + (2k-1) = k^2$

(do $2S = (1 + (2k-1)) + (3 + (2k-3)) + \ldots + ((2k-3) + 3) + ((2k-1) + 1) = 2k.k = 2k^2$)

ta được

$$a_{2k+1} = 3 + 4(1+3+\ldots+(2k-3)+(2k-1)) + 6k$$
$$= 3 + 4k^2 + 6k = 4k^2 + 2k + 4k + 2 + 1$$
$$= 2k(2k+1) + 2(2k+1) + 1$$
$$= (2k+1)(2k+2) + 1.$$

Vậy công thức đúng với n lẻ.

Từ công thức trên ta thấy nếu a_n lẻ thì n lẻ và nếu a_n chẵn thì n chẵn.

a) • Nếu $a_n = 2007$ thì n lẻ và $2007 = n(n+1)+1$, nên $2006 = n(n+1)$, nhưng $43.44 < 2006 < 45.46$, do đó số 2007 không thuộc dãy số đang xét.

• Nếu $a_n = 2024$ thì n chẵn và $2024 = n(n+2)$ mà $2004 = 44.46$, do đó số 2024 là số thứ 44 trong dãy số đang xét.

b) Số thứ 2007 của dãy là

$$a_{2007} = 2007.2008 + 1 = 4030057.\ \square$$

Nhận xét. 1) Các bạn đều phát hiện được đề bài cũ in công thức a_n đã nhầm *n lẻ thành n chẵn và ngược lại*, nên lần này đề đã được sửa lại.

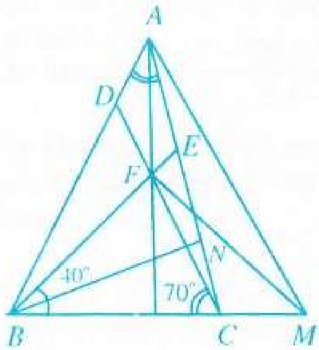
2) Ngoài cách giải trên có thể chứng minh công thức a_n theo n bằng phương pháp quy nạp.

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Hoàng Minh Phương*, 6A1, THCS Yên lạc; **Lạng Sơn:** *Vũ Ngọc Nhật Minh*, 6A, THCS Chu Văn An, TP. Lạng Sơn; **Hà Tây:** *Bùi Văn Hưởng*, 6A3, THCS Hương Sơn, Mỹ Đức; **Hà Nội:** *Hoàng Phương Linh*, 6B, THPT Hà Nội – Amsterdam; **Thanh Hóa:** *Mai Thu Phương*, 6A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung, *Hoàng Tiến Dũng*, 6A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Lê Đăng Nhàn*, 6A, THCS Quang Sơn, Đô Lương; **Bình Định:** *Trần Thị Lĩnh*, 6A1, THCS Cát Hiệp, Phù Cát.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/366.** *Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC}=40^\circ$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi D và E theo thứ tự là các điểm nằm trên cạnh AB và AC sao cho $\widehat{DCB}=70^\circ$ và $\widehat{EBC}=40^\circ$; F là giao điểm của DC và EB. Chứng minh rằng AF vuông góc với BC.*



Lời giải. Trên AC lấy điểm N sao cho $\widehat{ABN}=40^\circ$. Ta có $\widehat{ABN}=\widehat{BAN}=40^\circ$ nên ΔABN cân tại N, suy ra $\widehat{BNC}=80^\circ$ (tính chất góc ngoài của tam giác). Do đó $\widehat{BNC}=\widehat{BCN}=80^\circ$ suy ra ΔBCN cân tại $B \Rightarrow BN = BC$ (1). ΔBFC có $\widehat{FBC}=40^\circ$, $\widehat{FCB}=70^\circ$ nên $\widehat{BFC}=70^\circ$, vậy ΔBFC cân tại $B \Rightarrow BC = BF$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $BN = BF$ (3). Kéo dài BC lấy điểm M sao cho $BM = BA \Rightarrow \Delta ABM$ đều. Xét ΔABN và ΔMBF có $AB = MB$, $BN = BF$ (do (3)), $\widehat{ABN}=\widehat{FBM}=40^\circ$, do đó $\Delta ABN = \Delta MBF$ (c.g.c). Mà ΔABN cân tại N, suy ra ΔMBF cân tại F. Từ $AB = AM$ (do ΔABM đều), $FB = FM$, suy ra AF là đường trung trực của BM. Vậy AF vuông góc với BC. ❐

Nhận xét. 1) Bài toán này tương đối khó vì phải vẽ thêm nhiều đường phụ.

2) Ngoài cách giải trên đây, có thể dựng thêm tam giác đều BCK hoặc tam giác đều AFH, cũng đi đến kết luận của bài toán.

3) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt:

Hải Phòng: *Phạm Thu Hà*, 7A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo; **Hà Nội:** *Hoàng Anh Tú*, 7I, THCS Marie Curie; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Nghệ An:** *Trương Thị Cẩm Tú*, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Văn Bảo*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Võ Duy Văn*, *Hồ Khánh Duy*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Dũng*, 7B, THCS BC Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Diễm My*, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh*, 7/1, THCS Trần Huỳnh, Tx. Bạc Liêu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T3/366.** *Cho năm số dương x, y, z, t, u thoả mãn điều kiện x + y + z + t + u = 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{(x+y+z+t)(x+y+z)(x+y)}{xyztu}.$$

Lời giải. Áp dụng liên tiếp BĐT $(a+b)^2 \geq 4ab$ (dấu bằng xảy ra khi $a = b$). Ta có

$$4^2 = (x+y+z+t+u)^2 \geq 4(x+y+z+t)u \quad (1)$$

$$(x+y+z+t)^2 \geq 4(x+y+z)t \quad (2)$$

$$(x+y+z)^2 \geq 4(x+y)z \quad (3)$$

$$(x+y)^2 \geq 4xy \quad (4)$$

Do x, y, z, t, u là các số dương nên hai vế của các BĐT (1), (2), (3), (4) đều dương, nhân từng vế của chúng và rút gọn ta được

$$16(x+y+z+t)(x+y+z)(x+y) \geq 256xyztu$$

Suy ra

$$P=\frac{(x+y+z+t)(x+y+z)(x+y)}{xyztu} \geq 16.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+y+z+t+u=4 \\ x+y+z+t=u \\ x+y+z=t \\ x+y=z \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \\ t=1 \\ u=2 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 16 đạt được khi $x=y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{2}$, $t=1$, $u=2$. ❐

Nhận xét. 1) Các bạn tham gia đều cho kết quả đúng $P = 16$. Tuy nhiên một số bạn không chỉ ra $P = 16$ khi nào hoặc khi nhân (chia) hai vế của BĐT với một biểu thức lại không để ý đến biểu thức đó âm hay dương? Một số bạn đã đưa ra và giải đúng bài toán tổng quát:

"Cho n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn điều kiện

$$a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = k \ (k > 0).$$

Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(a_1+a_2+...+a_{n-1})(a_1+a_2+...+a_{n-2})...(a_1+a_2)}{a_1a_2...a_{n-1}a_n}$$

bằng $\frac{4^{n-1}}{k^2}$ tại $a_1=a_2=\frac{k}{2^{n-1}}$, $a_3=\frac{k}{2^{n-2}}$, ..., $a_{n-1}=\frac{k}{2^2}$, $a_n=\frac{k}{2}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Huy Thông*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Mẫn Văn Hùng, Ngô Quang Quân*, 8A, *Nguyễn Thế Nam Huy*, 9A, THCS Yên Phong; **Bắc Giang:** *Nguyễn Văn Thắng*, 9D, THCS TTr. Cao Thượng, Tân Yên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Hà Nội:** *Lê Minh Phúc, Phạm Huy Hoàng*, 7A5, THCS Giảng Võ, *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn; **Hà Tây:** *Nguyễn Quân Dương*, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai; **Hải Dương:** *Phạm Hải Thành*, 9C, THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Quý*, 9A, THCS Hải Hậu; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Vương Khôi*, 9A4, THCS Quang Trung, *Phạm Lê Hoàng Linh*, 9D, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** *Cao Xuân Bang*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Vũ Đình Long*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Định:** *Nguyễn Đồng Tiến*, 9A3, THCS Lương Thế Vinh, TP. Quy Nhơn; **Phú Yên:** *Huỳnh Thái Huy*, 8A, THCS Nguyễn Du, TP. Tuy Hòa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T4/366. *Giải phương trình*

$$2\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}=38+10x-2x^2-x^3.$$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 3$ (*)

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}$$
$$=(x+1)+(9-x^2)+(x+1)(9-x^2)+19$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2+(\sqrt{9-x^2}-3)^2+(\sqrt{(x+1)(9-x^2)}-3)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}=1\\ \sqrt{9-x^2}=3\\ \sqrt{(x+1)(9-x)^2}=3\end{cases} \Leftrightarrow x=0 \text{ (thỏa mãn (*))}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$. □

Nhận xét. 1) Ngoài cách giải trên, bài toán còn có thể giải bằng cách đặt ẩn phụ $a=\sqrt{x+1}$, $b=\sqrt{9-x^2}$. Từ đó tìm được $a=1$, $b=3$. Do đó tìm được nghiệm $x=0$.

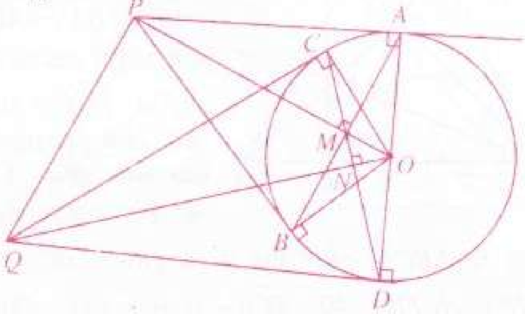
2) Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: *Lê Thị Tuyết Mai*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** *Mai Đức Huy*, 9C, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thị Thu Hiền*, 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đình Duy*, 9A, *Ngô Quang Quân*, 8A, *Nguyễn Hữu Trường*, 9A, THCS Yên Phong; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Quý*, 9A, THCS Hải Hậu; **Thái Bình:** *Đỗ Thị Thanh Hằng*, 9A, THCS TTr. Tiền Hải; **Thanh Hóa:** *Lê Tiến Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Cao Xuân Thắng*, 9A, THCS Phúc Thọ, Nghi Lộc; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Ánh*, 8I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; **Phú Yên:** *Phan Long Trí Yên*, 9I, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa; **Bình Định:** *Trần Quốc Thạch*, 9A6, THCS Phước Hưng, Tuy Phước.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/366. *Từ một điểm P ở ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến PA, PB của đường tròn với A, B là các tiếp điểm. Gọi M là giao điểm của OP và AB. Kẻ dây cung CD đi qua M (CD không đi qua O). Hai tiếp tuyến của đường tròn tại C và D cắt nhau tại Q. Tính độ lớn góc OPQ.*

Lời giải.



Giả sử N là giao điểm của CD và OQ thì CD và OQ vuông góc với nhau tại trung điểm N của CD. Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông OAP và OCQ ta thấy

$$OA^2=OM.OP, \quad OC^2=ON.OQ.$$

Vì $OA^2=OC^2$ nên $OM.OP=ON.OQ$. Từ đó $\dfrac{OM}{ON}=\dfrac{OQ}{OP}$, dẫn đến $\Delta MON \backsim \Delta QOP$.

Do đó $\widehat{MON}=\widehat{OPQ}=90^\circ$. □

Nhận xét. Bài T5/366 tương tự một bài chọn Đội tuyển thi IMO của Hồng Kông, lần 3, năm 1997. Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Các bạn sau có bài giải ngắn gọn hơn cả:

Hà Nội: *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy; **Hải Phòng:** *Lê Mạnh Thắng*, 9D9, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền; **Hà Tây:** *Nguyễn Quân Dương*, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai, *Nguyễn Thị Ngọc Anh*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mĩ Đức; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Long*, 9A, THCS Vũ Kiệt, Thuận Thành, *Nguyễn Hữu Trường*, 9A, THCS Yên Phong; **Bắc Giang:** *Ngô Văn Bắc*, 9D, THCS TTr. Cao Thượng, Tân Yên; **Vĩnh Phúc:** *Lê Thị Tuyết Mai*, *Phùng Ngọc Quý*, 9A1, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Mạnh Quân*, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Nam Định:** *Phan Quang Hưng*, 9A, *Bùi Văn Vượng*, 9B, THCS Hải Hậu; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Pha*, xóm 2, Trà Giang, Kiến Xương; **Thanh Hóa:** *Lê Thế Vinh*, *La Hồng Quân*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Đậu Thế*

Vũ, Vũ Thị Thu Hà, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Vũ Đình Long*, 9D, *Nguyễn Văn Thắng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Đinh Thị Quỳnh Trang*, 9B, THCS Bến Thủy, TP. Vinh; **Quảng Nam:** *Huỳnh Quốc Việt*, 9_4, THCS Lương Thế Vinh, Phú Ninh; **Đăk Lăk:** *Trương Thành Công*, 9A, THCS Nguyễn Khuyến, Eakar; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, *Nguyễn Phước Thịnh*, *Phan Long Trí Yên*, 9I, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 9^7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

HỒ QUANG VINH

★Bài T6/366. *Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$x^y + y = y^x + x.$$

Lời giải. Dễ thấy $(x\,;\,y) = (a\,;\,a)$ là nghiệm của phương trình đã cho với mọi $a \in \mathbb{N}^*$.

Với $x \neq y$, có thể giả sử $x > y$. Phương trình đã cho tương đương với $x^y - y^x = x - y$.

Ta tìm $x > y$ sao cho $x^y - y^x > 0$, ta có

$$x^y - y^x > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y} \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$ có $f'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$. Suy ra $f(t)$ là hàm tăng trên khoảng $(0\,;\,e)$ và giảm trên khoảng $(e\,;\,+\infty)$. Vì $2 < e < 3$ và $\dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln 4}{4} < \dfrac{\ln 3}{3}$ nên ta có các cặp $(x\,;\,y)$ nguyên dương với $x > y$ thỏa mãn (*) là $(3;\,2)$ và $(a\,;\,1)$ với $a > 1$.

Thử trực tiếp ta thấy $(x\,;\,1)$ với $x > 1$ và $(3\,;\,2)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Tóm lại, phương trình đã cho có các nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(a\,;\,a)$; $(1\,;\,b)$; $(c\,;\,1)$; $(2\,;\,3)$; $(3\,;\,2)$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương tùy ý. ❒

Nhận xét. 1) Bạn *Lê Văn Tấn Quyền*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** và bạn Lê Xuân Thăng, 11A1, THPT Triệu Sơn 3, **Thanh Hoá** đã nhận ra đây chính là câu 1b, kì thi năm 1981 trong dịp tổng kết 5 năm đoàn học sinh nước ta tham gia thi vô địch Toán Quốc tế.

2) Ngoài bạn *Quyền* và bạn *Thăng*, các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Lê Thị Tuyết Mai*, 9A1, THPT Yên Lạc, Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** *Phạm Lan Anh*, 11A1, *Nguyễn Văn Hùng*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam, Phủ Lý; **Hà Nội:** *Trần Thế Khải*, 10A1, *Lưu Văn Đan*, 10A1 Toán, *Trịnh Ngọc Dương*, 12A1 Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Trung Kiên*, 10 Toán 1, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Hà Tây:** *Lang Văn Thành*, 12A, BTVH Hữu Nghị Việt Lào, Hà Tây; **Thanh Hoá:** *Phạm Ngọc Tuấn*, 11A1, THPT IV Thọ Xuân; *Lê Minh Hiếu*, 10A, THPT Thiệu Hoá; **Hải Dương:** *Vũ Thanh Tú*, 11A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; *Doãn Thế Hà*, 10T1, THPT Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Tăng Văn Bình*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Ninh Bình:** *Lương Văn Thiện*, 10T, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Bắc Giang:** *Nguyễn Quang Chức*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Bình Phước:** *Cao Trọng Dũng*, *Nguyễn Xuân Đăng*, *Mã Xuân Tuấn*, 11T, THPT chuyên Quang Trung; **Nam Định:** *Phạm Văn Cảnh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Định:** *Nguyễn Phú*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T7/366. *Chứng minh rằng nếu phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1) có ba nghiệm thực phân biệt thì phương trình*

$$x^3 + ax^2 + (-a^2 + 4b)x - a^3 + 4ab - 8c = 0 \quad (2)$$

cũng có ba nghiệm thực phân biệt.

Lời giải. Giả sử phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt là x_1, x_2, x_3, theo định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 + x_3 = -a$;

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$; $x_1x_2x_3 = -c$.

Ta sẽ chứng minh rằng phương trình (2) có ba nghiệm là $x_1 + x_2 - x_3$, $x_1 - x_2 + x_3$, $-x_1 + x_2 + x_3$. Thật vậy,

$$(x_1 + x_2 - x_3) + (x_1 - x_2 + x_3) + (-x_1 + x_2 + x_3)$$
$$= x_1 + x_2 + x_3 = -a \qquad (3)$$

$$(x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + x_3) + (x_1 - x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)$$
$$+ (-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3) =$$
$$= -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$
$$= -(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$
$$= -a^2 + 4b \qquad (4)$$

$$(x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3 - 2x_3)(x_1 + x_2 + x_3 - 2x_2)(x_1 + x_2 + x_3 - 2x_1)$$
$$= (-a - 2x_3)(-a - 2x_2)(-a - 2x_1)$$
$$= -a^3 - 2a^2(x_1 + x_2 + x_3) - 4a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$
$$-8x_1x_2x_3 = a^3 - 4ab + 8c \qquad (5)$$

Từ các kết quả (3), (4) và (5), theo định lí Viète, ta có các số

$x_1 + x_2 - x_3$, $x_1 - x_2 + x_3$, $-x_1 + x_2 + x_3$

là nghiệm của phương trình (2).

Mặt khác vì ba số x_1, x_2, x_3 đôi một khác nhau nên ba số $x_1+x_2-x_3,\ x_1-x_2+x_3,\ -x_1+x_2+x_3$ cũng đôi một khác nhau. Vậy phương trình (2) có ba nghiệm thực phân biệt. ❒

Nhận xét. Bài ra T7/366 đã viết nhầm dấu của số hạng tự do trong phương trình. Các bạn sau đây đã tự sửa lại đầu bài đúng và có lời giải tốt:

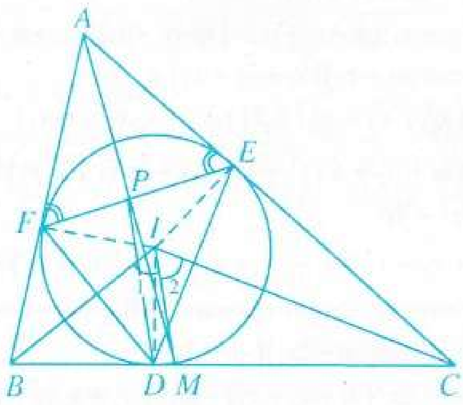
Phú Thọ: *Nguyễn Trường Giang*, 9A2, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh; **Bắc Ninh**: *Vũ Thị Thêu*, 12Ao, THPT Yên Phong 1; **Hà Nội**: *Đào Trọng Anh*, 10A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên, *Trịnh Ngọc Dương*, 12A1 Toán, *Nguyễn Khánh Việt*, 10A2 Toán, THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQGHN, *Phạm Đức Nam*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Q. Cầu Giấy; **Hà Tây**: *Nguyễn Sơn Tùng*, 11A2, THPT Ngô Quyền, *Hoàng Đình Linh*, 11A1, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, *Nguyễn Quân Dương*, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai; **Nam Định**: *Trần Thị Hồng Vân*, 11A, THPT Chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Cẩm Hồng*, 12 Toán, THPT Chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị**: *Nguyễn Đình Thành Công*, 7C, THCS Triệu Trạch, Triệu Phong.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T8/366. *Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của một tam giác nhọn ABC. Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng ở D, E, F. Phân giác trong của góc BIC cắt BC ở M và AM cắt EF ở P. Chứng minh bất đẳng thức:*

$$PD \geq \frac{1}{2}\sqrt{4DE.DF - EF^2} \qquad (*)$$

Lời giải. (Theo bạn *Trần Quang Sự*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).



• Áp dụng định lí sin vào hai tam giác APE và APF ta có

$$\frac{PE}{\sin\widehat{PAE}} = \frac{PA}{\sin\widehat{AEF}};\ \frac{PE}{\sin\widehat{PAF}} = \frac{PA}{\sin\widehat{AFE}}$$

Từ đó $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{\sin\widehat{PAE}}{\sin\widehat{PAF}}$ (1)

Áp dụng định lí sin vào hai tam giác AMC và AMB, ta được

$$\frac{MC}{MB} = \frac{\sin\widehat{MAC}}{\sin\widehat{MAB}}\cdot\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin\widehat{PAE}}{\sin\widehat{PAF}}\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

Suy ra $\dfrac{IC}{IB} = \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{\sin\widehat{PAE}}{\sin\widehat{PAF}}\cdot\dfrac{\sin B}{\sin C}$

Từ đó, theo định lí sin

$$\frac{\sin\widehat{PAE}}{\sin\widehat{PAF}} = \frac{IC\sin C}{IB\sin B} = \frac{DE}{DF} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{DE}{DF}$, do đó DP là phân giác của góc EDF.

• Áp dụng công thức đường phân giác vào ΔDEF, ta có đẳng thức

$$DP^2 = \frac{DE.DF}{(DE+DF)^2}(DE+DF+EF)(DE+DF-EF)$$
$$= \frac{DE.DF}{(DE+DF)^2}\left((DE+DF)^2 - EF^2\right)$$
$$= DE.DF - \frac{DE.DF}{(DE+DF)^2}.EF^2 \geq DE.DF - \frac{EF^2}{4} \quad (3)$$

Đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi $DE = DF$ và do đó $AB = AC$. Từ (3) ta thu được BĐT (*) cần tìm, và đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi ABC là một tam giác cân ở A. ❒

Nhận xét. 1) Về cơ bản, trong việc giải bài toán này chúng ta thực hiện hai bước. Trước hết, chỉ ra rằng DP là phân giác của góc EDF. Để thiết lập tính chất này chỉ cần sử dụng định lí sin và tính chất đường phân giác trong tam giác. Sau đó, áp dụng công thức tính đường phân giác và BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân.

2) Ngoài bạn *Sự*, các bạn sau đây có lời giải đúng và tương đối gọn. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Hải, Khổng Hoàng Thao*, 11A1, *Lê Sơn Hải*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Duy Liên*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Tạ Ngọc Cảnh*, 10A2, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** *Phạm Hồng Khang*, 10A1, THPT C Nghĩa Hưng; **Nghệ An:** *Trần Tuấn An, Đặng Cảnh Thiện*, 10A1, K36, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

★Bài T9/366. *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{2007}$ là những số nguyên phân biệt lớn hơn 1 và thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{2007} a_i = 2017035$. Hỏi số $\sum_{i=1}^{2007} a_i^{a_i^{n}}$ có thể là số chính phương không?*

Lời giải. (Theo bạn *Phạm Trọng Khôi*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**).

Ta có nhận xét sau (dễ chứng minh)

i) Nếu $n = 4k + 1$ thì $n^{2l+1} \equiv 1 \pmod 4$.

ii) Nếu $n = 4k + 3$ thì $n^{2l+1} \equiv 3 \pmod 4$.

iii) Một số chính phương thì chia 4 dư 0 hoặc 1.

Vì $a_1, a_2, ..., a_{2007}$ là những số nguyên phân biệt lớn hơn 1 nên $S = \sum_{i=1}^{2007} a_i \geq 2 + 3 + ... + 2008 = 2017035$. Đẳng thức xảy ra nên $a_1 = 2$, $a_2 = 3, ..., a_{2007} = 2008$.

Trong tập $\{2, 3, ..., 2008\}$ có 1004 số chẵn, 502 số chia 4 dư 3 và 501 số chia 4 dư 1. Thành thử theo nhận xét i) và ii)

$S \equiv 1004.0 + 502.3 + 501.1 \equiv 3 \pmod 4$.

Vậy cũng theo nhận xét iii) S không là số chính phương. ❐

Nhận xét. Bài này được khá nhiều bạn ở THCS, tham gia giải. Tất cả các lời giải đều đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Phạm Văn Thành, Khổng Hoàng Thao*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hòa Bình:** *Đỗ Thị Vân*, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Nam Định:** *Phạm Văn Cảnh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Ninh:** *Ngô Đức Long*, 10T, THPT chuyên Hạ Long; **Thanh Hóa:** *Lê Duy Toàn*, 12A11, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Dương Hoàng Hưng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Vũ Thị Hà*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Đà Nẵng:** *Lê Văn Tấn Quyền*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T10/366. *Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$ thoả mãn điều kiện*

$$P(P(x)+x) = P(x)P(x+1), \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải (của đa số các bạn).

Giả sử bậc của đa thức $P(x)$ là $\deg P(x) = n$. Nhận xét rằng hai vế của (1) đều là các đa thức. So sánh bậc lũy thừa của hai vế của (1), ta thu được $n^2 = 2n \Leftrightarrow n = 0$ hoặc $n = 2$.

i) Khi $n = 0$, ta được đa thức hằng $P(x) \equiv c$. Thế vào (1), thu được phương trình $c = c^2 \Leftrightarrow c = 0$ hoặc $c = 1$. Vậy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ là các đa thức hằng thỏa mãn bài ra.

ii) Xét $n = 2$. Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. So sánh hệ số cao nhất trong (1), thu được $a^3 = a^2 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $P(x) = x^2 + bx + c$ với $a, b \in \mathbb{R}$ (2)

Ta chứng minh mọi đa thức $P(x)$ dạng (2) đều thỏa mãn bài ra.

Thật vậy, ta có

$$P(x)P(x+1) = P(x)(x^2+bx+c+2x+b+1)$$
$$= P(x)((P(x)+2x+b+1) =$$
$$= (P(x))^2 + 2xP(x) + bP(x) + P(x)$$
$$= (P(x)+x)^2 + b(P(x)+x) + (P(x)-(x^2+bx))$$
$$= (P(x)+x)^2 + b(P(x)+x) + c = P(P(x)+x),$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$, đpcm.

Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$ và $P(x) = x^2 + bx + c$, với $a, b \in \mathbb{R}$. ❐

Nhận xét. Đây là một bài toán thuộc loại trung bình và thuộc dạng quen thuộc về đa thức nên có rất nhiều bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T11/366. *Cho các số thực không âm a_1, a_2, a_3, a_4 và a_5 có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$a_2a_3a_4a_5 + a_1a_3a_4a_5 + a_1a_2a_3a_5 + a_1a_2a_3a_4 \leq \frac{1}{256} + \frac{3275}{256}a_1a_2a_3a_4a_5.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Đặt $f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

$$= a_2a_3a_4a_5 + a_1a_3a_4a_5 + a_1a_2a_3a_5 + a_1a_2a_3a_4 - \frac{3275}{256}a_1a_2a_3a_4a_5.$$

Ta có $f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) =$

$$= a_3a_4a_5\left(a_2 + a_1 - \frac{3275}{256}a_1a_2\right) + a_1a_2a_3(a_5 + a_4).$$

Trước hết ta có nhận xét sau

Nếu $a_2+a_1-\frac{3275}{256}a_1a_2\le 0$ thì theo BĐT Cauchy cho bốn số không âm ta có

$$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\le a_1a_2a_3(a_4+a_5)$$
$$\le\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{4}\right)^4=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a_1=a_2=a_3=a_4+a_5=\frac{1}{4}\\ a_4a_5=0\end{cases}$$

tức là hoặc $a_1=a_2=a_3=a_4=\frac{1}{4}$, $a_5=0$ hoặc $a_1=a_2=a_3=a_5=\frac{1}{4}$, $a_4=0$.

Với trường hợp $a_2+a_1-\frac{3275}{256}a_1a_2>0$, đặt $c=\frac{a_4+a_5}{2}$. Dùng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\le$$
$$a_3\left(\frac{a_4+a_5}{2}\right)^2\left(a_2+a_1-\frac{3275}{256}a_1a_2\right)+a_1a_2a_3(a_5+a_4)$$
$$=f(a_1,a_2,a_3,c,c).$$

Tương tự như trên ta biểu diễn

$$f(a_1,a_2,a_3,c,c)$$
$$=(a_2+a_1)a_3.c^2+a_1a_2a_3\left(2c-\frac{3275}{256}c^2\right)$$

Nếu $2c-\frac{3275}{256}c^2\le 0$ thì

$$f(a_1,a_2,a_3,c,c)$$
$$\le(a_2+a_1)a_3.c^2\le\left(\frac{a_2+a_1+a_3+2c}{4}\right)^4=\frac{1}{256}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $a_1=a_3=c=\frac{1}{4}$, $a_2=0$ hoặc $a_2=a_3=c=\frac{1}{4}$, $a_1=0$.

Với trường hợp $2c-\frac{3275}{256}c^2>0$ $\left(\Leftrightarrow\frac{512}{3275}>c\right)$, đặt $a=\frac{a_2+a_1}{2}$. Ta có

$$f(a_1,a_2,a_3,c,c)$$
$$\le(a_2+a_1).a_3.c^2+\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2.a_3\left(2c-\frac{3275}{256}.c^2\right)$$
$$=f(a,a,a_3,c,c).$$

Lặp lại quá trình trên ta suy ra

$$f(a,a,a_3,c,c)$$
$$\le\max\left\{\frac{1}{256},f\left(\frac{a+c}{2},\frac{a+c}{2},a_3,\frac{a+c}{2},\frac{a+c}{2}\right)\right\}.$$

Kí hiệu $t=\frac{a+c}{2}$, $0\le t\le\frac{1}{4}$. Ta nhận thấy

$$f\left(\frac{a+c}{2},\frac{a+c}{2},a_3,\frac{a+c}{2},\frac{a+c}{2}\right)=f(t,t,a_3,t,t)$$
$$=4a_3t^3-\frac{3275}{256}a_3t^4=4(1-4t)t^3-\frac{3275}{256}(1-4t).t^4$$
$$=\frac{1}{256}-t^4-\frac{1}{256}(1-4t)(5t-1)^2(131t^2+14t+1)$$
$$<\frac{1}{256}.$$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có

$$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\le\frac{1}{256}.\ \square$$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán bất đẳng thức khá phức tạp, mặc dù phương pháp giải trên – giảm dần số tham số – khá quen thuộc với nhiều bạn đọc.

2) Tương tự với cách giải trên các bạn có thể chứng minh được kết quả mạnh hơn sau:

$$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)+a_1a_2a_4a_5\le\frac{1}{256}.$$

Số $\frac{3275}{256}$ chỉ có ý nghĩa trong trường hợp : đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc trong năm số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có một số bằng 0, bốn số còn lại bằng $\frac{1}{4}$ hoặc cả năm số bằng $\frac{1}{5}$.

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Quảng Ninh: *Ngô Đức Long*, 10T, THPT chuyên Hạ Long; **Hà Tây:** *Nguyễn Quân Dương*, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai; **Hà Nội:** *Trần Thế Khải*, 10A1, PTCTT, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn An*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; *Hồ Hữu Quân*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu I; **Bình Thuận:** *Phí Thái Thuận*, 10T, THPT Trần Hưng Đạo, TP. Phan Thiết.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T12/366.** *Giả sử $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp có các đường chéo cắt nhau tại P (góc giữa hai đường chéo AC và BD khác 60°). Chứng minh rằng các đường thẳng Euler của các tam giác PAB, PBC, PCD, PDA đồng quy tại một điểm. (Đường thẳng đi qua trọng tâm và trực tâm của tam giác gọi là đường thẳng Euler của tam giác đó).*

Lời giải. Để giải bài toán, ta cần có các bổ đề sau.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=\alpha<90°$. Đường thẳng Δ chứa phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$. O và H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác.*

a) Nếu $\alpha=60°$ thì H là ảnh của O qua phép đối xứng trục $Đ_\Delta$.

b) Nếu $\alpha\neq 60°$ thì H là ảnh của O qua phép đồng dạng nghịch $V_{(A,2\cos\alpha)}\circ Đ_\Delta$.

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=\alpha>90°$. Đường thẳng Δ chứa phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. O và H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác.*

a) Nếu $\alpha=120°$ thì H là ảnh của O qua phép đối xứng trục $Đ_\Delta$.

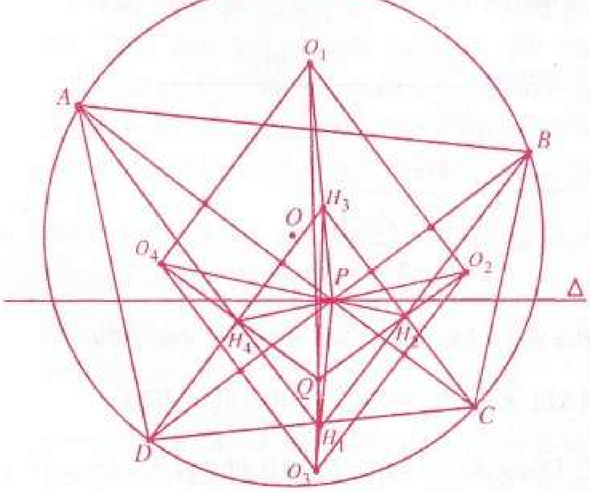
b) Nếu $\alpha\neq 120°$ thì H là ảnh của O qua phép đồng dạng nghịch $V_{(A,-2\cos\alpha)}\circ Đ_\Delta$.

Kí hiệu $V_{(O,k)}$ là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

Các bổ đề 1, 2 là các kết quả cơ bản đối với tam giác, bạn đọc tự chứng minh.

Bổ đề 3. *Mọi phép đồng dạng nghịch có tỉ số đồng dạng khác 1 đều được phân tích một cách duy nhất thành tích của một phép đối xứng trục và một phép vị tự có tâm nằm trên trục đối xứng và có tỉ số vị tự dương.*

Tỉ số của phép đồng dạng nghịch là một số dương, có thể bằng 1. Phép đồng dạng nghịch có tỉ số đồng dạng bằng 1 thực chất là phép dời hình nghịch.



Nhờ có bổ đề 3 mà phép đồng dạng nghịch có tỉ số đồng dạng khác 1 được gọi là *phép vị tự - đối xứng*.

Bổ đề 4. *Cho hai cặp điểm phân biệt A, B và A', B' thoả mãn điều kiện AB khác A'B'. Tồn tại duy nhất một phép vị tự – đối xứng biến A, B tương ứng thành A', B'.*

Các bổ đề 3, 4 là những kết quả cơ bản trong lí thuyết biến hình, xin không trình bày phép chứng minh chúng ở đây.

Trở lại việc giải *bài toán*. Gọi O_i, H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm các tam giác PAB, PBC, PCD và PAD.

Có hai trường hợp cần xem xét.

Trường hợp 1. Các đường thẳng AC, BD vuông góc với nhau.

Ta có H_1, H_2, H_3, H_4 trùng P. Do đó, các đường thẳng O_1H_1, O_2H_2, O_3H_3, O_4H_4 đồng quy (tại P).

Trường hợp 2. Các đường thẳng AC, BD không vuông góc với nhau. Đặt $\widehat{APD}=\widehat{BPC}=\alpha$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $\alpha<90°$.

Để đơn giản, ta chỉ giải bài toán trong trường hợp quan trọng nhất: O_1, H_3 không trùng nhau và O_3, H_1 không trùng nhau; các đường thẳng O_2H_2, O_4H_4 không trùng nhau và các đường thẳng O_1H_1, O_3H_3 không trùng nhau.

Gọi Δ là đường thẳng chứa các đường phân giác của các góc $\widehat{APD}$ và $\widehat{BPC}$.

Nhờ phần a) của các bổ đề 1, 2, ta thấy, H_1, H_2, H_3, H_4, theo thứ tự là ảnh của O_1, O_2, O_3, O_4 qua phép vị tự – đối xứng $V_{(P,2\cos\alpha)}\circ Đ_\Delta$ (chú ý $2\cos\alpha\neq 1$) (1)

Gọi I là giao điểm của H_1H_3 và H_2H_4 và chú ý rằng $H_1H_2H_3H_4$ là hình bình hành, ta thấy H_3, H_4, H_1, H_2 theo thứ tự là ảnh của H_1, H_2, H_3, H_4 qua phép đối xứng tâm $Đ_I$ (2)

Từ (1) và (2), ta thấy H_3, H_4, H_1, H_2 theo thứ tự là ảnh của O_1, O_2, O_3, O_4 qua phép vị tự – đối xứng $Đ_I\circ V_{(P,2\cos\alpha)}\circ Đ_\Delta$. (3)

Gọi Q là tâm của phép vị tự – đối xứng $Đ_I\circ V_{(P,2\cos\alpha)}\circ Đ_\Delta$ (4)

Từ (1) suy ra phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ biến đường thẳng PH_3 thành đường thẳng PO_3 (5)

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên các tam giác PAB, PDC đồng dạng nghịch. Suy ra phép vị tự – đối xứng $V_{\left(P, \frac{PD}{PA}\right)} \circ Đ_\Delta$ (chú ý $\frac{PD}{PA} \neq 1$) biến điểm O_1 thành điểm O_3. Do đó phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ cũng biến đường thẳng PO_1 thành đường thẳng PO_3 (6)

Từ (5) và (6) suy ra các đường thẳng PH_3, PO_1 trùng nhau. Nghĩa là P, O_1, H_3 thẳng hàng. Tương tự P, O_3, H_1 thẳng hàng (7)

Từ (7) với chú ý rằng các tam giác PO_1H_1, PO_3H_3 đồng dạng nghịch, ta có $(H_3O_1, H_3O_3) \equiv (H_3P, H_3O_3) \equiv (H_1O_1, H_1P) \equiv (H_1O_1, H_1O_3)$ (mod π). Do đó, bốn điểm O_1, H_1, O_3, H_3 cùng thuộc một đường tròn. (8)

Từ (8) với chú ý rằng $O_1O_3 \neq O_1O_3.2\cos\alpha = H_1H_3$, ta thấy các đường thẳng O_1H_1, O_3H_3 cắt nhau tại Q'. Chú ý tới (8), ta có các tam giác $Q'O_1O_3$, $Q'H_3H_1$ đồng dạng nghịch.

Suy ra Q' là tâm của phép vị tự - đối xứng biến các điểm O_1, O_3 theo thứ tự thành các điểm H_3, H_1 (9)

Từ (3), (4) và (9), theo các bổ đề 3, 4, ta có Q' trùng Q. Tương tự như trên, các đường thẳng O_2H_2, O_4H_4 cắt nhau tại Q''. Lại tương tự như trên, ta có Q'' trùng Q. Vậy Q' trùng Q''.

Suy ra, O_1H_1, O_2H_2, O_3H_3, O_4H_4 đồng quy và hơn thế, điểm đồng quy đó chính là tâm của phép vị tự - đối xứng theo thứ tự biến các điểm O_1, O_2, O_3, O_4 thành các điểm H_3, H_4, H_1, H_2. □

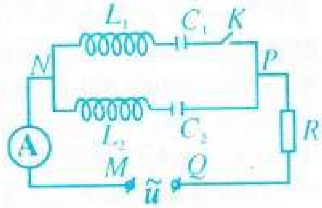
Nhận xét. 1) Nếu góc giữa hai đường thẳng AC, BD bằng 60° và các tam giác PAB, PBC, PCD, PDA không đều thì các đường thẳng Euler của chúng đôi một hoặc song song hoặc trùng nhau (bạn đọc tự kiểm tra). Do đó, *bài toán* cần có thêm giả thiết góc giữa hai đường thẳng AC, BD khác 60° như đã sửa ở đề bài.

2) Đây là *Bài toán* hay và khó, có ít bạn tham gia giải và tất cả các lời giải đều không chuẩn. Có lẽ cũng cần phải giới thiệu với bạn đọc một nguyên tắc logic đơn giản nhưng quan trọng sau: *lời giải "đúng" của những bài toán không chuẩn là lời giải không chuẩn.*

3) *Bài toán* được đặt ra vào năm 2006 và tác giả của nó là kiến trúc sư người Hy Lạp có tên là Kostas Vittasko.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/366. *Cho mạch điện như hình vẽ bên. Các cuộn dây thuần cảm có hệ số tự cảm $L_1 = \frac{1}{2\pi}$ (H) và $L_2 = \frac{1}{\pi}$ (H). Tụ điện $C_2 = \frac{10^{-4}}{0,5\pi}$ (F) và $u = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V).*



Bỏ qua điện trở của ampe kế A và của các dây nối.

1) Khoá K ngắt, hãy tính R khi công suất tiêu thụ của đoạn mạch trên cực đại.

2) Đóng khoá K, biết rằng ampe kế A chỉ số 0. Tính C_1 và viết biểu thức của các dòng điện i_1 qua L_1 và i_2 qua L_2.

Lời giải.

$$Z_{L_1} = L_1\omega = \left(\frac{1}{2\pi}\right).100\pi = 50\Omega;$$

$$Z_{L_2} = L_2\omega = \left(\frac{1}{\pi}\right).100\pi = 100\Omega;$$

$$Z_{C_2} = \frac{1}{C_2\omega} = \frac{0,5\pi}{10^{-4}.100\pi} = 50\Omega.$$

1) Khi K ngắt, đoạn mạch MQ gồm RL_2C_2 mắc nối tiếp nên $Z = \sqrt{R^2 + (Z_{L_2} - Z_{C_2})^2}$. Công suất

$$P = RI^2 = \frac{RU^2}{Z^2} = \frac{RU^2}{R^2 + \left(Z_{L_2} - Z_{C_2}\right)^2}$$

$$= \frac{U^2}{R + \frac{\left(Z_{L_2} - Z_{C_2}\right)^2}{R}}.$$

$P = P_{\max}$ khi $R + \frac{\left(Z_{L_2} - Z_{C_2}\right)^2}{R}$ cực tiểu, tức là khi $R = |Z_{L_2} - Z_{C_2}| = 100 - 50 = 50\Omega$.

2) Đóng K: $I_R = I_A = I_{\min} = 0$ nhưng $i_A = i_1 + i_2 = 0$ nên $i_1 = -i_2$ hay i_1 và i_2 ngược pha nhau và $I_1 = I_2$.

Nhưng $I_1 = \dfrac{U_{NP}}{Z_1}$ và $I_2 = \dfrac{U_{NP}}{Z_2}$ $\Rightarrow Z_1 = Z_2$
$\Rightarrow |Z_{L_1} - Z_{C_1}| = |Z_{L_2} - Z_{C_2}|$.

Do i_1 và i_2 ngược pha nhau nên $\tan\varphi_1 = -\tan\varphi_2$
$\Rightarrow Z_{L_1} - Z_{C_1} = -(Z_{L_2} - Z_{C_2})$, suy ra

$$Z_{C_1} = Z_{L_1} + Z_{L_2} - Z_{C_2} = 50\Omega + 100\Omega - 50\Omega$$

$= 100\Omega$ và $C_1 = \dfrac{1}{Z_{C_1}\omega} = \dfrac{10^{-4}}{\pi}\mathrm{F}$.

Vì $I_R = 0$ nên $u_{PQ} = 0$

$\Rightarrow u_{NP} = u_{NQ} = u = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$.

Ta có $Z_1 = Z_2 = Z_{L_2} - Z_{C_2} = 50\Omega$, nên

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{100}{50} = 2(\mathrm{A}).$$

Mạch L_1C_1 có $Z_{C_1} > Z_{L_1}$ suy ra mạch có tính dung kháng, i_1 sớm pha hơn u_{NP}, hơn nữa $R_1 = 0$ nên i_1 vuông pha với u_{NP}. Vậy

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{A}).$$

Lập luận tương tự trên thì

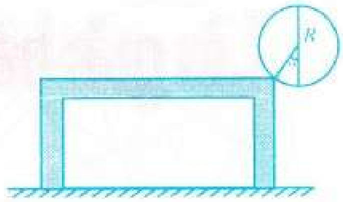
$$i_2 = 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{A}). \square$$

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết cho kết quả đúng. Xin nêu tên một số bạn có lời giải ngắn gọn:

Sơn La: *Lê Vũ Hải*, 12 Lí, THPT chuyên Sơn La; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Tiến Hùng*, 12A11, THPT Đại Từ; **Hà Nội:** *Nguyễn Anh Khoa*, 11A1, THPT Ngọc Hồi; **Hà Tây:** *Nguyễn Thị Tuyến*, Khu TT73 Trường SQLQ 1; **Thái Bình:** *Vũ Quang Hiệu*, 12A4, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Duy Hùng*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, *Nguyễn Thanh Tùng*, 12A11, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Trần Thế Minh*, K33A1, THPT Nguyễn Huệ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Minh Diễm*, 12A2, THPT số I Sơn Tịnh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/366. *Một quả cầu đặc đồng chất có bán kính R được đặt trên mặt bàn nằm ngang. Sau khi đẩy nhẹ quả cầu lăn không trượt tới mép bàn.*



1) Xác định độ lớn góc α hợp giữa đường nối mép bàn và tâm quả cầu với phương thẳng đứng ở thời điểm quả cầu rời khỏi bàn (hình vẽ).

2) Xác định vận tốc của quả cầu ở thời điểm đó.

Lời giải. 1) Gọi m là khối lượng quả cầu, ω là vận tốc góc của quả cầu khi vừa rời khỏi bàn. Chọn gốc thế năng ở vị trí trên mặt bàn, áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có

$$mgR(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

trong đó I là mômen quán tính của quả cầu đối với điểm tiếp xúc.

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 \quad (2)$$

Gọi N là phản lực của bàn lên quả cầu, ta có

$$mg\cos\alpha - N = mR\omega^2.$$

Khi quả cầu rời khỏi bàn (mất tiếp xúc) thì $N = 0$, do đó

$$mg\cos\alpha = mR\omega^2 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta tính được $\cos\alpha = \dfrac{10}{17}$ (4)

Suy ra $\alpha \approx 54^o$.

2) Từ (3) và (4) ta có $\omega = \sqrt{\dfrac{10g}{17R}}$.

Vận tốc của quả cầu khi vừa rời khỏi bàn $v = R\omega = \sqrt{\dfrac{10}{17}gR}$. $\square$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: *Nguyễn Tiến Hùng*, 12A11, THPT Đại Từ. **Bắc Ninh**: *Nguyễn Văn Bảo*, *Nguyễn Thành Linh*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội**: *Nguyễn Khắc Quyền*, 12B, chuyên Lí, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên**: *Phạm Đức Linh*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Duy Hùng*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An**: *Nguyễn Công Khoái*, 12Đ, THPT Nam Đàn I, *Nguyễn Văn Chương*, A3K35, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Đắk Lắk**: *Nguyễn Hải Đông*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Lời giải bài thi TOÁN QUỐC TẾ lần thứ 48

VŨ ĐÌNH HÒA
(*Trưởng đoàn Việt Nam thi Toán Quốc tế lần thứ 48*)

Bài 1. *Cho trước các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Với mỗi i $(1 \le i \le n)$ đặt*

$$d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\}$$

và đặt $d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}$.

a) Chứng minh rằng, với các số thực $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ tùy ý, ta có

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2} \qquad (*)$$

b) Hãy chỉ ra rằng tồn tại các số thực $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ sao cho bất đẳng thức (*) trở thành đẳng thức.

Lời giải. Với mỗi i $(1 \le i \le n)$ ta kí hiệu

$M_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\}$ và

$m_i = \min\{a_j : i \le j \le n\}$.

a) Giả sử $d = d_q$ với $1 \le q \le n$ và giả sử $d_q = a_p - a_r$ với $1 \le p \le q \le r \le n$. Khi đó với mọi dãy $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ ta có

$|x_p - a_p| + |x_r - a_r| \ge (a_p - x_p) + (x_r - a_r)$

$= (x_r - x_p) + (a_p - a_r) \ge a_p - a_r = d$, suy ra

$|x_p - a_p| \ge \dfrac{d}{2}$ hoặc $|x_r - a_r| \ge \dfrac{d}{2}$. Vậy

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}.$$

b) Xét dãy (x_i) với $x_i := \dfrac{M_i + m_i}{2}$.

Vì $M_i \le M_{i+1}$ và $m_i \le m_{i+1}$ nên (x_i) là dãy không giảm. Do $m_i \le a_i \le M_i$ nên

$$-\frac{d}{2} \le -\frac{d_i}{2} \le -\frac{M_i - m_i}{2} = x_i - M_i$$

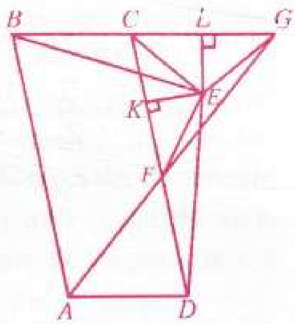
$$\le x_i - a_i \le x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2} \le \frac{d}{2},$$

do đó $\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \le \dfrac{d}{2}$.

Kết hợp với a), ta có đẳng thức

$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} = \dfrac{d}{2}$ phải xảy ra. (đpcm). ❐

Bài 2. *Xét năm điểm A, B, C, D và E sao cho ABCD là một hình bình hành và BCED là một tứ giác nội tiếp. Cho λ là một đường thẳng đi qua A cắt đoạn thẳng DC tại F và cắt đường thẳng BC tại G. Giả sử rằng EF = EG = EC. Chứng minh rằng λ là phân giác của góc DAB.*



Lời giải. Ta cần chứng minh $CF = CG$ thì λ là phân giác của góc BAD. Thật vậy, giả sử $CF > CG$ (trường hợp $CF < CG$ chứng minh tương tự). Do $EF = EG = EC$ nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CFG. Từ $CF > CG$ ta có $EK < EL$, ở đó K và L theo thứ tự là trung điểm CF và CG. Do tứ giác $BCED$ nội tiếp nên $\widehat{LBE} = \widehat{KDE}$, suy ra hai tam giác vuông LBE và KDE đồng dạng với nhau, do đó $DK < BL$. Do $FK > CL$ và $DK > BL$ nên $DK - FK = BL - CL$ tức là $DF < BC$. Vì $AD = BC$, nên trong tam giác ADF có $AD > DF$ điều này vô lí, vì tam giác ADF đồng dạng với tam giác GCF với cạnh $CF > CG$. (đpcm). ❐

Bài 3. *Trong một kì thi học sinh giỏi toán có một số thí sinh là bạn bè của nhau. Quan hệ bạn bè luôn là quan hệ hai chiều. Gọi một nhóm các thí sinh là **nhóm bạn bè** nếu như hai người bất kì trong nhóm này là bạn bè của nhau. (Một nhóm tùy ý ít hơn hai thí sinh cũng vẫn được coi là một nhóm bạn bè). Số lượng các thí sinh của một nhóm bạn bè được gọi là cỡ của nó.*

Cho biết rằng, trong kì thi này, cỡ của một nhóm bạn bè có nhiều người nhất là một số chẵn. Chứng minh rằng có thể xếp tất cả các thí sinh vào hai phòng sao cho cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng này cũng bằng cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng kia.

Lời giải. Ta gọi *cỡ* của một tập hợp A, kí hiệu là $c(A)$, là cỡ của nhóm bạn bè đông người nhất trong A. Gọi M là nhóm bạn bè đông người nhất trong tập hợp G tất cả các thí sinh, như vậy $c(M) = c(G) = 2m$ là số chẵn.

Ta chỉ ra một cách phân hoạch G thành hai tập hợp có cùng cỡ như sau.

Trước hết A là một tập hợp m thí sinh của M và $B = G - A$. Như vậy $c(B) \geq m \geq c(A)$. Chừng nào $c(B) \geq c(A) + 2$ ta chuyển một thí sinh của M từ B sang A. Mỗi lần như vậy cỡ của B giảm không quá 1 và cỡ của A tăng đúng 1. Do đó, ta có thể thực hiện được việc điều chỉnh này cho tới khi $c(B) = c(A)$ hoặc $c(B) = c(A) + 1$. Trong trường hợp $c(B) = c(A) + 1$ ta thực hiện tiếp việc điều chỉnh mới bằng cách xét tất cả nhóm bạn bè $B_1, B_2, ..., B_s$ gồm $c(B)$ người trong B. Nếu tồn tại B_i và $m \in M{-}A$ sao cho $m \notin B_i$ thì tập hợp $A \cup \{m\}$ và $B - \{m\}$ là hai tập hợp có cùng cỡ $c(A) + 1$. Nếu $m \in B_i$ với mọi B_i và $m \in M - A$ thì $B_i - (M{-}A)$ luôn khác tập rỗng vì B_i có ít nhất $m + 1$ phần tử còn $M - A$ chỉ có nhiều nhất m phần tử. Xuất phát từ $C = \varnothing$ ta chọn một phần tử của $B_i - (M - A)$ vào C, với B_i là nhóm bạn bè nào đó có $c(B)$ người trong tập hợp $B - C$. Quá trình kết thúc khi thu được một tập hợp C sao cho $c(B - C) = c(B) - 1 = c(A)$. Ta chứng minh $c(A \cup C) = c(A)$. Thật vậy, xét một nhóm bạn bè Q tùy ý trong $A \cup C$. Do mỗi phần tử của C là bạn bè của mọi phần tử $M{-}A$, cho nên $Q \cup (M - A)$ là một nhóm bạn bè trong G và do đó $c(G) = 2m \geq |Q \cup (M{-}A)| = |Q| + (2m - |A|) \Rightarrow |A| \geq |Q|$. Vậy $B - C$ và $A \cup C$ là phân hoạch của G thành hai tập hợp có cùng cỡ. (đpcm). ☐

✪Bài 4. *Trong tam giác ABC, đường phân giác của góc BCA cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác tại R, cắt đường trung trực của BC tại P, và cắt đường trung trực của AC tại Q. Trung điểm của BC là S và trung điểm của AC là T. Chứng minh rằng tam giác RPS và tam giác RQT có diện tích bằng nhau.*

Lời giải. (*Bạn đọc tự vẽ hình*). Do góc ACR bằng góc BCR cho nên hai tam giác vuông CTQ và CSP đồng dạng với nhau. Do đó ta có $\dfrac{TQ}{CQ} = \dfrac{SP}{CP}$ và $\widehat{TQC} = \widehat{SPC} \Rightarrow TQ.QR = SP.PR$ và $\widehat{TQR} = \widehat{SPR}$, suy ra $S_{SPR} = S_{QTR}$. (đpcm). ☐

✪Bài 5. *Cho trước a và b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu số $(4ab-1)$ là ước số của $(4a^2-1)^2$ thì $a = b$.*

Lời giải. *Phản chứng*. Giả sử tồn tại cặp hai số nguyên dương (a, b) sao cho $(4ab - 1)$ là ước số của $(4a^2-1)^2$ và $a \neq b$ thì ta sẽ gọi các cặp số như vậy là *cặp xấu* và giả sử (a, b) là cặp xấu có tổng $2a + b$ nhỏ nhất.

Do $(4b^2 - 1)^2 \equiv (4b^2 - (4ab)^2)^2 \equiv 16b^4(4a^2 - 1)^2 \equiv 0 \pmod{4ab - 1}$ nên (b, a) cũng là cặp xấu, vậy $2a + b \leq 2b + a$ suy ra $a < b$ (do $a \neq b$). Do $(4a^2-1)^2$ chia $4a$ dư 1, còn $(4ab - 1)$ chia $4a$ dư 3, nên số $\dfrac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$ là số chia $4a$ dư 3, do đó tồn tại số nguyên dương c sao cho $4ac - 1 = \dfrac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$. Vậy (a, c) cũng là cặp xấu. Từ $a < b$ và $4ac - 1 = \dfrac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$ ta có $c < b$, khi đó $2a+c < 2a+b$ mâu thuẫn với giả thiết (a,b) là cặp xấu có tổng $2a+b$ nhỏ nhất. (đpcm). ☐

✪Bài 6. *Cho n là một số nguyên dương. Xét $S = \{(x,y,z) : x, y, z \in \{0,1,..., n\}, x+y+z>0\}$ như là một tập hợp gồm $(n+1)^3 - 1$ điểm trong không gian 3–chiều. Hãy xác định số nhỏ nhất có thể các mặt phẳng mà hợp của chúng chứa tất cả các điểm của S nhưng không chứa điểm (0, 0, 0).*

Lời giải. Ta thấy $3n$ mặt phẳng $x = i$, $y = i$ và $z = i$ chứa tất cả các điểm của S và không chứa điểm $(0, 0, 0)$. Như vậy số mặt phẳng cần tìm không vượt quá $3n$.

Để chứng tỏ số mặt phẳng cần tìm đúng bằng $3n$, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. *Xét đa thức k biến $P(x_1, x_2, ..., x_k)$. Nếu P triệt tiêu tại các điểm của tập hợp*
$S = \{(a_1, a_2, ..., a_k) : a_i \in \{0, 1, ..., n\}, a_1 + a_2 + ... + a_k > 0\}$
và không triệt tiêu tại điểm $(0, 0, ..., 0)$ thì P có bậc không nhỏ hơn kn.

Chứng minh. Ta chứng minh kết quả bổ đề bằng quy nạp theo k. Dễ thấy kết luận của bổ đề đúng với $k = 0$. Giả sử kết luận bổ đề đúng cho $k - 1$, ta chứng minh kết luận của bổ đề cũng đúng cho k.

Thực vậy, nếu đa thức k biến $P(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x)$ thỏa mãn điều kiện của bổ đề (trong đó x là biến thứ k), thì ta thực hiện phép chia $P(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x)$ cho đa thức $x(x-1)...(x-n)$ để được thương là $Q(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x)$ và đa thức dư $R(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x)$. Viết lại $R(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x)$ dạng chính tắc theo lũy thừa của x ta có

$$R(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x)$$
$$= R_n(x_1, x_2, ..., x_{k-1})x^n + ... + R_0(x_1, x_2, ..., x_{k-1}) \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh $R_n(x_1, x_2, ..., x_{k-1})$ là đa thức $k-1$ biến thỏa mãn điều kiện của bổ đề.

a) $T(x) = R(0, 0, ..., 0, x)$ là đa thức của x với bậc không vượt quá n và triệt tiêu tại các điểm $x = 1, 2, ..., n$. Do $T(0) = R(0, 0, ..., 0, 0) \neq 0$, cho nên $T(0)$ là đa thức bậc n của x, suy ra hệ số của bậc cao nhất x^n trong khai triển $(*)$ là $R_n(0, 0, ..., 0) \neq 0$.

b) Với một bộ $(a_1, a_2, ..., a_{k-1})$ thỏa $a_i \in \{0, 1, ..., n\}$, $a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} > 0$ ta có $R(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x)$ triệt tiêu tại $n+1$ điểm $x = 0, 1, 2, ..., n$. Vì bậc của $R(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x)$ không vượt quá n, cho nên $R(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x)$ là đa thức đồng nhất 0, do đó tất cả hệ số của nó trong khai triển $(*)$ bằng 0, và đặc biệt là $R_n(a_1, a_2, ..., a_{k-1}) = 0$.

Như vậy $R_n(x_1, x_2, ..., x_{k-1})$ là đa thức có bậc không nhỏ hơn $(k-1)n$ theo giả thiết quy nạp, cho nên $R(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x)$ là đa thức có bậc không nhỏ hơn kn. Do đó $\deg P \geq \deg R(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x) \geq kn$. Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ giả sử N mặt phẳng $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ chứa tất cả các điểm của S nhưng không chứa điểm $(0, 0, ..., 0)$. Khi đó xét

$$P(x, y, z) = \prod_{i=1}^{N}(a_i x + b_i y + c_i z + d_i).$$

Đa thức này có bậc là N, và $P(x, y, z)$ thỏa mãn các giả thiết của bổ đề, nên ta có $N = \deg P \geq 3n$ là điều phải chứng minh. ❐

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

where $d_1, d_2, ..., d_k$ is the collection of all distinct positive divisors of n. Prove the inequality

$$n - \ln n < a_1 + a_2 + ... + a_n < n.$$

T10/370. Given n numbers $a_1, a_2, ..., a_n$ in $[-1; 2]$ such that their total sum is 0. Let $U_k = \dfrac{a_k\sqrt{4k-1}}{(4k-3)(4k+1)}$ for $k = 1, 2, ..., n$. Prove that $|U_1 + U_2 + ... + U_n| < \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

T11/370. Find all functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(x+y) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 f\left(\frac{1}{y}\right)$ for all $x, y \in \mathbb{R}^*$.

T12/370. Let P be a point on the insphere of a tetrahedron $ABCD$ and let G_a, G_b, G_c, G_d be the centroids of the tetrahedra $PBCD$, $PCDA$, $PDAB$, $PABC$, respectively. Prove that AG_a, BG_b, CG_c, and DG_d pass through a common point; and find the orbit of this common point when P moves on the insphere of the given tetrahedron $ABCD$.

Translated by LE MINH HA

Giải thưởng LÊ VĂN THIÊM năm 2007

HÀ HUY KHOÁI
(*Viện Toán học Việt Nam*)

Giáo sư *Lê Văn Thiêm* (1918-1991) là Chủ tịch đầu tiên của Hội Toán học Việt Nam. Ông là nhà toán học nổi tiếng, đã có những đóng góp lớn trong nghiên cứu và ứng dụng toán học. Ông cũng là một trong những người đặt nền móng cho nền giáo dục đại học ở nước ta, là người thầy của nhiều thế hệ các nhà toán học Việt Nam. GS *Lê Văn Thiêm* luôn giành sự quan tâm đặc biệt đến việc giảng dạy toán học ở các trường phổ thông. Ông là một trong những người sáng lập *Hệ phổ thông chuyên toán* và báo *Toán học và Tuổi trẻ*. Ông đã được Nhà nước tặng Huân chương Độc Lập hạng Nhất và Giải thưởng Hồ Chí Minh. Giải thưởng *Lê Văn Thiêm* do Hội Toán học Việt Nam đặt ra nhằm góp phần ghi nhận những thành tích xuất sắc của những thầy giáo và học sinh phổ thông đã khắc phục khó khăn để dạy toán và học toán giỏi, động viên học sinh đi sâu vào môn học có vai trò đặc biệt quan trọng trong sự phát triển lâu dài của nền khoa học nước nhà. *Giải thưởng Lê Văn Thiêm* cũng là sự ghi nhận công lao của GS *Lê Văn Thiêm*, một nhà toán học lớn, một người thầy đã hết lòng vì sự nghiệp giáo dục.

Người được giải thưởng sẽ được Hội Toán học Việt Nam cấp một giấy chứng nhận, một Huy chương và một khoản tiền thưởng. Một phần tiền trong Quỹ ban đầu để thành lập Giải thưởng là do Phu nhân của cố GS *Lê Văn Thiêm* tặng, trích từ tiền thưởng Giải thưởng Hồ Chí Minh của cố Giáo sư. Ngoài ra, tiền giành cho Giải thưởng có được nhờ sự ủng hộ tự nguyện của các nhà toán học và một số tập thể, cơ quan nhiệt tình với việc khuyến khích thầy và trò phổ thông dạy và học tốt môn Toán.

Giải thưởng được trao hàng năm cho một hoặc hai giáo viên toán và từ 2 đến 4 học sinh bậc Trung học.

Các giáo viên được giải là những người có thành tích đặc biệt xuất sắc trong giảng dạy môn Toán. Chú trọng những giáo viên lâu năm trong nghề, những giáo viên công tác ở các vùng khó khăn, vùng sâu, vùng xa.

Một đến hai giải dành cho học sinh được tặng cho học sinh có thành tích đặc biệt xuất sắc trong các Kì thi toán Quốc gia và Quốc tế. Một đến hai giải khác được trao cho học sinh đã khắc phục nhiều khó khăn trong học tập và đạt thành tích xuất sắc trong môn Toán.

Ngày 28.3.2008 vừa qua, tại hội trường Viện Toán học Việt Nam, Hội Toán học Việt Nam đã long trọng tổ chức lễ kỉ niệm 90 năm ngày sinh của GS *Lê Văn Thiêm*. Nhân dịp này, Hội đồng Giải thưởng Lê Văn Thiêm đã quyết định trao giải năm 2007 cho các giáo viên và học sinh sau đây.

***Giáo viên.** Bà *Lê Ngọc Trường*, sinh năm 1960, Phó Hiệu trưởng Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.

Thành tích. Từ 1982 đến nay dạy Toán tại các trường THPT Lưu Văn Liệt, THPT Nguyễn Thông và THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, tỉnh **Vĩnh Long**; liên tục từ 1995 đến nay là giáo viên dạy giỏi cấp Tỉnh, danh hiệu Viên phấn vàng 1999; từ 1995 đến 2006 có học sinh đoạt giải trong các Kì thi học sinh giỏi toán Quốc gia. Từ tháng 3/2005 được bổ nhiệm làm Phó Hiệu trưởng trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.

***Học sinh**

1. *Phạm Thành Thái*, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương.** Hiện đang học tại lớp CNTN, Khoa Toán, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**.

Thành tích. Giải Ba Kì thi học sinh giỏi Quốc gia năm 2006, Huy chương Vàng Olympic Toán Quốc tế 2007.

2. *Phạm Duy Tùng*, Khối chuyên Toán-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**.

Thành tích. Giải Nhì Kì thi học sinh giỏi Quốc gia 2007; Huy chương Vàng Kì thi Olympic Toán Quốc tế 2007; Huy hiệu Tuổi trẻ sáng tạo 2007; Gương mặt trẻ tiêu biểu ĐHQG **Hà Nội**.

3. *Hoàng Thị Thu Hồng*, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

Gia đình còn nhiều khó khăn (bố là giáo viên THCS, mẹ làm ruộng). Từ năm học 1998-1999 đến nay liên tục đoạt giải trong các Kì thi học sinh giỏi các cấp. Hai năm học liền (2006-2007, 2007-2008) lọt vào Vòng 2 Kì thi chọn đội tuyển Việt Nam đi dự Kì thi Olympic Toán Quốc tế.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 370(4.2008)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.5121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.
Trị sự, phát hành : HOÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

Câu lạc bộ

NĂM 2008 Kỉ niệm một số nhà toán học

Một bạn trẻ yêu toán sưu tầm được vài tư liệu về một số nhà toán học tròn chục năm sinh vào năm nay và ghi vào bốn mục sau:

a) Họ và tên

b) Năm sinh và năm mất

c) Nơi sinh

d) Công trình quen biết về toán sơ cấp.

Đáng tiếc là thứ tự sắp xếp ở mục này và mục khác lại không tương thích. Bạn hãy sắp xếp lại các tư liệu này tương ứng với mỗi nhà toán học.

a) 1) Ceva Giovanni

2) Khayyam Omar

3) Bramagupta

4) Mersenne Marin

5) Torricelli Evangelista

b) 1) (598-660)

2) (1048-1131)

3) (1588-1648)

4) (1608-1647)

5) (1648-1734)

c) 1) Faenza, Italia

2) Milan, Italia

3) Sarthe, Pháp

4) Nichapur, Ba Tư

5) Multan, Pakistan

d) 1) Số dạng $2^p - 1$ với p là số nguyên tố.

2) Sử dụng số 0, số âm đầu tiên. Giải một số phương trình nghiệm nguyên hai ẩn.

3) Cách giải phương trình bậc hai và một số phương trình bậc ba, bậc bốn.

4) Điều kiện để ba đường thẳng qua ba đỉnh của một tam giác đồng quy.

5) Định lí: Dựng ba tam giác đều ABC', BCA', CAB' về phía ngoài tam giác ABC thì ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Tin tức: Thi tài mừng Tết Mậu Tý

(Đề đăng trên THTT số 368 tháng 2.2008)

Mới một tháng tiếp theo Tết Mậu Tý mà Toán Tuổi trẻ mải miết tiếp thư từ thi thơ, truyện toàn từ M, T từ mọi miền. Mòng mỏi trò trẻ trung, toán tốt, thơ tài tiến tới một mùa thi toàn thắng. Trong mấy trăm thư tìm thấy mươi tờ thích thú, mà tích tụ trên một trang thì thiếu, mong thể tất. Tiếp tục trổ tài thì một mai may mắn thấy tên mình trên trang Toán Tuổi trẻ.

TRƯỜNG TỒN

Tháng Mười tôi thích Toán
Tháng Tám tôi thích Thơ
Tuổi trẻ thường mộng mơ
Tháng Tư tôi mê truyện
Mười mùa Thu trìu mến
Tôi tràn trề tứ thơ
Thoải mái thả tâm tư
Trong mưa thu tầm tã
Thu tàn mây tơi tả
Tôi tìm Toán muộn màng
Thổn thức mấy tuần trăng
Trong mây tan mưa tạnh
Tôi mở trang tiểu thuyết
Thử tài trí thông minh
Trong mảng thơ trữ tình
Thấy một trời Toán tử
Trăng tàn trong trăn trở
Mây tan trong mộng mơ
Thu tàn trong trang thơ
Toán trường tồn muôn thuở.

Phạm Công Phiệt *(Nghi Trung, Nghi Lộc, Nghệ An)*

Thầy trò thi tài

Mừng Tết Mậu Tý, trổ tài
Thầy trò thỏa thích miệt mài thi thơ
Trò toan tạo truyện mộng mơ,
Thầy thời mê mải tìm thơ trữ tình.
Trò thêm trí tuệ thông minh,
Thầy thường thổn thức tâm tình, tương tư,
Trò tìm từng tiếng, từng từ,
Thầy thì thấp thỏm, mệt thừ toàn thân.
Trò tăng tri thức tối tân,
Thầy tin trang toán mỗi tuần mới thêm,
Trò thi, mong mỏi thấy tên
Thầy mừng tuổi trẻ tiến thêm thành tài.

Trương Quốc Thanh
(11 Tin, THPT chuyên Hà Tĩnh)

Ngoài hai bạn trên, các bạn sau có bài hay được nhận tặng phẩm: *Lê Trung Văn*, 12C1, THPT Vạn Tường, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Thanh Tùng*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**; *Võ Quang Dũng*, 11A1, Khối THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Đình Thi*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa, **Phú Yên**.

VÂN KHANH

ISSN :0866-8035 Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
Chỉ số : 12884 In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội Giá: 5000 đồng
Mã số : 8BT04M8 In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2008 Năm nghìn đồng