Huy Đa

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

11 2014
Số 449

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Chào mừng Ngày Nhà giáo Việt Nam 20-11

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA PHẦN NGUYÊN

VŨ HỒNG PHONG (*GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh*)

Khi gặp một phương trình có chứa phần nguyên chúng ta không chỉ thấy cái hay trong thuật toán giải phương trình mà còn thấy ở đó những tính chất thú vị của phần nguyên được sử dụng. Hi vọng bài viết này sẽ đem lại những điều mới lạ và bổ ích cho các bạn.

A. Một số tính chất của phần nguyên

Trước tiên xin nhắc lại một vài tính chất (TC) của phần nguyên: Với x, y, α là các số thực, m, n là số nguyên, $\mathbb{Z}$ là tập hợp số nguyên, ta kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, đọc là phần nguyên của x, phần lẻ của x là $\{x\} = x - [x]$. Khi đó ta có các tính chất sau

Tính chất

1. $x - 1 < [x] \le x$. Hệ quả: $0 \le \{x\} < 1$.

2. $[x] = n \Leftrightarrow n \le x < n+1$.

Đặc biệt $[x] = 0 \Leftrightarrow 0 \le x < 1$.

3. $[x+n] = [x] + n$.

4. Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $[-x] = -[x]$

Với $x \notin \mathbb{Z}$ thì $[-x] = -[x] - 1$.

5. Với $n \ge 1$ ta có

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

6. Với $x \ge y$ thì $[x] \ge [y]$.

7. Với $n \ge 1$ thì $0 \le [n\{x\}] \le n - 1$.

8. Với $n \ge 1$ ta có: $n[x] \le [nx] \le n[x] + n - 1$.

$+\ n[x] = [nx] \Leftrightarrow 0 \le \{x\} < \dfrac{1}{n}$.

$+\ [nx] = n[x] + n - 1 \Leftrightarrow \dfrac{n-1}{n} \le \{x\} < 1$.

9. Với $m \ge 1$, $n \ge 1$ ta có:

• $m[x] + n[y] \le [mx + ny] \le m[x] + n[y] + m + n - 1$.

• $m[x] - n[y] - n \le [mx - ny] \le m[x] - n[y] + m - 1$.

10. Với $x_i \in \mathbb{R}$ ta có :

$$[x_1] + [x_2] + \ldots + [x_n] \le [x_1 + x_2 + \ldots + x_n] \le [x_1] + [x_2] + \ldots + [x_n] + n - 1.$$

Đẳng thức xảy ra ở BĐT vế trái, vế phải lần lượt là: $[\{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_n\}] = 0$;

$$[\{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_n\}] = n - 1.$$

• *Hệ quả* (của tính chất 8, 9, 10): Biểu thức

$$P = [x_1 + x_2 + \ldots + x_m - y_1 - y_2 - \ldots - y_n] - [x_1] - [x_2] - \ldots - [x_m] + [y_1] + [y_2] + \ldots + [y_n]$$

nhận các giá trị nguyên $-n; -n+1; \ldots; m-1$.

11. a) Nếu $x \ge 0, y \ge 0$ thì $[xy] \ge [x][y]$

b) Nếu $x < 0, y < 0$ thì $[xy] \le [x][y]$

c) Nếu $x < 0 < y$ thì $[xy] \ge [x][y] + [x]$.

12. • Nếu $\alpha > 0$ và $\alpha[x] = [y]$ thì $-1 < \alpha x - y < \alpha$.

• Nếu $\alpha < 0$ và $\alpha[x] = [y]$ thì $\alpha - 1 < \alpha x - y \le 0$.

Tổng quát: Với $\alpha_i; \beta_j; \delta \in \mathbb{R}$; $\alpha_i > 0; \beta_j > 0$.

Nếu $\alpha_1[x_1] + \alpha_2[x_2] + \ldots + \alpha_m[x_m] = \beta_1[y_1] + \beta_2[y_2] + \ldots + \beta_n[y_n] + \delta$ thì

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - \ldots - \beta_n y_n \in (-\beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n + \delta; \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \delta).$$

Chứng minh

3. Giả sử $[x] = m$ thì theo TC2 ta có:

$$m \le x < m+1 \Rightarrow m + n \le x + n < m + n + 1$$
$$\Rightarrow [x+n] = m + n = [x] + n.$$

4. - Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $-x \in \mathbb{Z}$ nên $-x$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $-x$ và x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x nên

$[x] = x; [-x] = -x$, suy ra $[-x] = -x = -[x]$.

- Với $x \notin \mathbb{Z}$ thì theo TC1 ta có:

$$x - 1 < [x] < x \Rightarrow [x] < x < [x] + 1$$
$$\Rightarrow -[x] - 1 < -x < -[x] \Rightarrow [-x] = -[x] - 1.$$

6. Theo TC1 có $x < [x] + 1$ và $[y] \le y$.

Giả sử $[x]<[y]$ suy ra

$[x]+1\le[y]\Rightarrow x<[x]+1\le[y]\le y\Rightarrow x<y$

mâu thuẫn với giả thiết $x\ge y$.

7. Do $0\le\{x\}<1$ nên $0\le n\{x\}<n$

$$\Rightarrow 0\le[n\{x\}]\le n-1.$$

8. Do $n[x]\in\mathbb{Z}$ nên theo TC3 có

$[nx]=[n([x]+\{x\})]=n[x]+[n\{x\}]$. Mà theo TC7 có $0\le[n\{x\}]\le n-1$, suy ra

$$n[x]\le[nx]\le n[x]+n-1.\ \ n[x]=[nx]$$

$$\Leftrightarrow[n\{x\}]=0\Leftrightarrow 0\le n\{x\}<1\Leftrightarrow 0\le\{x\}<\frac{1}{n}.$$

$$[nx]=n[x]+n-1\Leftrightarrow[n\{x\}]=n-1$$

$$\Leftrightarrow n-1\le n\{x\}<n\Leftrightarrow\frac{n-1}{n}\le\{x\}<1.$$

9. $[mx+ny]=[m[x]+m\{x\}+n[y]+n\{y\}]$

$$=m[x]+n[y]+[m\{x\}+n\{y\}]$$

$[mx-ny]=[m[x]+m\{x\}-n[y]-n\{y\}]$

$$=m[x]-n[y]+[m\{x\}-n\{y\}].$$

Do $0\le\{x\};\{y\}<1$ nên

$0\le m\{x\}+n\{y\}<m+n$; $-n<m\{x\}-n\{y\}<m$.

Suy ra: $0\le[m\{x\}+n\{y\}]\le m+n-1$;

$$-n\le[m\{x\}-n\{y\}]\le m-1.$$

Do vậy $m[x]+n[y]\le[mx+ny]$

$$\le m[x]+n[y]+m+n-1.$$

$m[x]-n[y]-n\le[mx-ny]\le m[x]-n[y]+m-1.$

10. $[x_1+x_2+...+x_n]$

$=[[x_1]+\{x_1\}+[x_2]+\{x_2\}+...+[x_n]+\{x_n\}]$

$=[x_1]+[x_2]+...+[x_n]+[\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_n\}]$ (1)

Do $0\le\{x_i\}<1$ nên $0\le\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_n\}<n$

suy ra: $0\le[\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_n\}]\le n-1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Chứng minh hệ quả:

Biến đổi tương tự TC8, 9, 10 được:

$P=[\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_m\}-\{y_1\}-\{y_2\}-...-\{y_n\}]$
$\in\mathbb{Z}$ (1).

Ta có: $-n<\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_m\}$
$-\{y_1\}-\{y_2\}-...-\{y_n\}<m$ nên

$-n\le[\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_m\}-\{y_1\}-\{y_2\}-...-\{y_n\}]$
$\le m-1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra P nhận các giá trị nguyên $-n;-n+1;...;m-1$.

11. Do $[x][y]\in\mathbb{Z}$ nên

$[xy]=[([x]+\{x\})([y]+\{y\})]$

$=[x][y]+[[x]\{y\}+[y]\{x\}+\{x\}\{y\}]$

$+[[x]\{y\}+[y]\{x\}+\{x\}\{y\}]$

$=[x][y]+[[x]\{y\}+\{x\}([y]+\{y\})]$

$=[x][y]+[[x]\{y\}+\{x\}y]$.

a) Với $x,y\ge0$ thì $[x]\ge0$ mà $\{x\};\{y\}\ge0$ nên $[x]\{y\}\ge0$, $\{x\}y\ge0$, suy ra

$$[x]\{y\}+\{x\}y\ge0\Rightarrow[[x]\{y\}+\{x\}y]\ge0$$

do vậy $[xy]\ge[x][y]$.

b) Với $x,y<0$ thì $[x]<0$ mà $\{x\};\{y\}\ge0$ nên $[x]\{y\}\le0$, $\{x\}y\le0$, suy ra

$$[x]\{y\}+\{x\}y\le0\Rightarrow[[x]\{y\}+\{x\}y]\le0$$

do vậy $[xy]\le[x][y]$.

c) Với $x<0<y$ thì $[x]<0<y$ mà $0\le\{x\};\{y\}<1$, suy ra $[x]\{y\}>[x]$ và $\{x\}y\ge0$, suy ra

$$[x]\{y\}+\{x\}y>[x]$$

$\Rightarrow[[x]\{y\}+\{x\}y]\ge[[x]]=[x]$ (theo TC6)

do vậy $[xy]\ge[x][y]+[x]$.

12. Với $\alpha[x]=[y]$ thì

$\alpha x-y=\alpha([x]+\{x\})-([y]+\{y\})=\alpha\{x\}-\{y\}$

- khi $\alpha>0$ có

$-1<\alpha\{x\}-\{y\}<\alpha\Rightarrow-1<\alpha x-y<\alpha.$

- khi $\alpha<0$ có

$\alpha-1<\alpha\{x\}-\{y\}\le0\Rightarrow\alpha-1<\alpha x-y\le0.$

- Ta có

$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_mx_m-\beta_1y_1-\beta_2y_2-...-\beta_ny_n$

$=\alpha_1[x_1]+\alpha_2[x_2]+...+\alpha_m[x_m]$

$-\beta_1[y_1]-\beta_2[y_2]-...-\beta_n[y_n]+$

$+\alpha_1\{x_1\}+\alpha_2\{x_2\}+...+\alpha_m\{x_m\}$

$-\beta_1\{y_1\}-\beta_2\{y_2\}-...-\beta_n\{y_n\}$

$$=\delta+\alpha_1\{x_1\}+\alpha_2\{x_2\}+...+\alpha_m\{x_m\}$$
$$-\beta_1\{y_1\}-\beta_2\{y_2\}-...-\beta_n\{y_n\} \quad (1)$$

Do $0\le\{x_i\};\{y_j\}<1$ nên

$\delta+\alpha_1\{x_1\}+\alpha_2\{x_2\}+...+\alpha_m\{x_m\}-\beta_1\{y_1\}-\beta_2\{y_2\}-...-\beta_n\{y_n\}$ thuộc khoảng

$$(-\beta_1-\beta_2-...-\beta_n+\delta;\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m+\delta) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

(Bạn đọc tự chứng minh các tính chất còn lại).

B. Một số thí dụ

Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$\left[\frac{x+1}{16}\right]+\left[\frac{x+3}{16}\right]+...+\left[\frac{x+15}{16}\right]=\frac{22}{3}+\{x\} \quad (1)$$

Lời giải. Theo TC5 ta có:

$$\text{VT}(1)=\left[\frac{x+1}{16}\right]+\left[\frac{x+1}{16}+\frac{1}{8}\right]+...+\left[\frac{x+1}{16}+\frac{7}{8}\right]$$
$$=\left[8.\frac{x+1}{16}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right].$$

Do $0\le\{x\}<1$ nên $\frac{22}{3}\le\text{VP}(1)=\frac{22}{3}+\{x\}<\frac{25}{3}$.

Lại có $\text{VT}(1)\in\mathbb{Z}$ nên $\text{VT}(1)=\text{VP}(1)=8$.

$$\text{VT}(1)=8\Leftrightarrow\left[\frac{x+1}{2}\right]=8\Leftrightarrow 8\le\frac{x+1}{2}<9$$
$$\Leftrightarrow 15\le x<17\Leftrightarrow [x]=15 \text{ hoặc } [x]=16.$$

$\text{VP}(1)=8\Leftrightarrow\{x\}=\frac{2}{3}$. Mà $x=[x]+\{x\}$ nên PT(1) có 2 nghiệm $x=\frac{47}{3}$ và $x=\frac{50}{3}$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình*

$$3\left[\frac{11x-17}{9}\right]=\left[\frac{5x-2}{3}\right] \quad (*)$$

Lời giải. Theo TC12, từ PT(*) suy ra

$$-1<3.\frac{11x-17}{9}-\frac{5x-2}{3}<3\Leftrightarrow 2<x<4$$

$$\Rightarrow\frac{8}{3}<\frac{5x-2}{3}<6\Rightarrow 2\le\left[\frac{5x-2}{3}\right]=\text{VP}(*)\le 5.$$

Mà VT(*) là số nguyên chia hết cho 3 nên $\text{VT}(*)=\text{VP}(*)=3$, suy ra

$$\text{PT}(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\frac{11x-17}{9}\right]=1\\ \left[\frac{5x-2}{3}\right]=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le\frac{11x-17}{9}<2\\ 3\le\frac{5x-2}{3}<4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{26}{11}\le x<\frac{35}{11}\\ \frac{11}{5}\le x<\frac{14}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{26}{11}\le x<\frac{14}{5}.$$

Vậy tập nghiệm của PT(*) là $T=\left[\frac{26}{11};\frac{14}{5}\right)$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$[x^2[x^2]]+\{x^4-x^2\}=\frac{65x^2-81}{25} \quad (1)$$

Lời giải. Theo TC1 có $[x^2]>x^2-1$ nên

$$x^2[x^2]\ge x^2(x^2-1)=x^4-x^2.$$

Theo TC6 suy ra $[x^2[x^2]]\ge[x^4-x^2]$. Ta có

$$\text{VT}(1)\ge[x^4-x^2]+\{x^4-x^2\}=x^4-x^2 \quad (2)$$

Mà $\left(x^2-\frac{9}{5}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x^4-x^2\ge\frac{65x^2-81}{25}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\text{VT}(1)\ge\text{VP}(1)$. Vậy

$\text{VT}(1)=\text{VP}(1)\Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra tại (2) và (3).

$$\text{Vậy (1)}\Leftrightarrow\begin{cases}[x^2[x^2]]=[x^4-x^2]\\ \left(x^2-\frac{9}{5}\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{5}}.$$

PT(1) có 2 nghiệm $x=\sqrt{\frac{9}{5}};x=-\sqrt{\frac{9}{5}}$.

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$4\left[\frac{5x+1}{3}\right]-5\left[x+\frac{1}{6}\right]+\left\{\frac{10x+3}{6}\right\}$$
$$=\frac{25x^2-130x+229}{6} \quad (1)$$

Lời giải. Áp dụng TC9 ta có

$$\mathrm{VT}(1) \le \left[4.\frac{5x+1}{3} - 5.\left(x+\frac{1}{6}\right)\right] + 5 + \left\{\frac{10x+3}{6}\right\}$$

$$= \left[\frac{10x+3}{6}\right] + \left\{\frac{10x+3}{6}\right\} + 5$$

$$= \frac{10x+3}{6} + 5 = \frac{10x+33}{6} \quad (2)$$

Mà $(5x-14)^2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{10x+33}{6} \le \frac{25x^2-130x+229}{6} \quad (3)$$

nên từ (2) và (3) suy ra $\mathrm{VT}(1) \le \mathrm{VP}(1)$. Vậy

$\mathrm{VT}(1) = \mathrm{VP}(1) \Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra tại (2) và (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left[\frac{5x+1}{3}\right] - 5\left[x+\frac{1}{6}\right] = \left[\frac{10x+3}{6}\right] + 5 \\ (5x-14)^2 = 0 \end{cases}$$

Vậy PT(1) có nghiệm $x = 2{,}8$.

✪ Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$\frac{[2x^2]}{2} + \frac{[3x^2]}{3} + \frac{[4x^2]}{4} + \frac{[5x^2]}{5} = 6[x^2] + \frac{163}{60} (*)$$

Lời giải. Theo TC8 ta có

$$\frac{[2x^2]}{2} \le \frac{2[x^2]+1}{2} \ (1); \ \frac{[3x^2]}{3} \le \frac{3[x^2]+2}{3} \ (2)$$

$$\frac{[4x^2]}{4} \le \frac{4[x^2]+3}{4} \ (3); \ \frac{[5x^2]}{5} \le \frac{5[x^2]+4}{5} \ (4)$$

Cộng vế với vế (1),(2),(3),(4) ta được

$$\mathrm{VT}(*) \le 4[x^2] + \frac{163}{60} \quad (5)$$

Mà $x^2 \ge 0$ nên $[x^2] \ge 0$ suy ra

$$4[x^2] + \frac{163}{60} \le 6[x^2] + \frac{163}{60} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $\mathrm{VT}(*) \le \mathrm{VP}(*)$.

$\mathrm{VT}(*) = \mathrm{VP}(*) \Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra tại (1), (2), (3), (4), (5), (6). Do đó

$$\mathrm{PT}(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le \{x^2\} < 1 \\ \frac{2}{3} \le \{x^2\} < 1 \\ \frac{3}{4} \le \{x^2\} < 1 \\ \frac{4}{5} \le \{x^2\} < 1 \\ [x^2] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \le x^2 = \{x^2\} < 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{5}} \le x < 1 \\ -1 < x \le -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$. Vậy tập nghiệm của PT(*)

là $T = \left(-1; \frac{-2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right)$.

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1) $[x[x]] = \frac{2x+1}{3} + 3$

2) $[x][-x] + 5\{x^2\} + 4 = 0$

3) $\left[2x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{2x+1}{3}\right]$

4) $2\left[\frac{11x-23}{12}\right] + \left[\frac{5x+1}{6}\right] = 0$

5) $[x] + [10x] + \frac{1}{[x]} + \frac{1}{[10x]} = \frac{121}{10}$

6) $\frac{2[3\sqrt{x}] + [6\sqrt{x}]}{[\sqrt{x}] + [3\sqrt{x}] + 1} = \frac{7 - 4[\sqrt{x}][2-\sqrt{x}]}{[\sqrt{x}]^2 + 1}$

7) $\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{2^8} + \frac{1}{2}\right] = 9$

8) $\frac{3[x^2+0{,}8] + [3x+0{,}8]}{15x - \{3x^2+3x+0{,}2\} - 11{,}8} = 1$

9) $2[3\{x\}] = \frac{12[x^2]+12}{[3x^2]+1} + ([x]+2)^2$

10) $\frac{4x^6 - 13x^4 + 7x^2 + 25{,}25}{[x^2+0{,}5][3x^2+0{,}5] + \{3x^4 + 2x^2 - 0{,}75\}} = 1.$

11) $\frac{[7x^2]}{[x^2] + [2x^2] + [4x^2] + 2} = \left[x^2 + \frac{6}{7}\right].$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN, TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH NĂM HỌC 2014-2015

(Đề thi đăng trên TH&TT Số 448, tháng 10 năm 2014)

Câu 1. Vì $ac=-1<0$ nên PT luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Ta có $x_1^2-x_1-1=0$ $\Leftrightarrow x_1+1=x_1^2$ suy ra $x_1\geq -1$ và

$$33x_1+25=9(x_1+1)+24x_1+16=(3x_1+4)^2$$

$$\Rightarrow P(x_1)=3x_1-\sqrt{33x_1+25}=3x_1-(3x_1+4)=-4$$

(Do $3x_1+4>0$ với $x_1\geq -1$).

Tương tự $P(x_2)=-4$. Vậy $P(x_1)=P(x_2)$ (đpcm).

Câu 2. a) *Đáp số:* $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

b) Điều kiện: $xy\geq 0$.

Để hệ PT có nghiệm thì $x+y\geq 0$.

Từ PT thứ nhất của hệ ta có

$$x^2+y^2=-xy+6\sqrt{xy}+9 \qquad (1)$$

Từ PT thứ hai của hệ suy ra

$$64=(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{y^2+7})^2\leq 2(x^2+7+y^2+7)$$

Kết hợp (1) ta có $(\sqrt{xy}-3)^2\leq 0\Leftrightarrow\sqrt{xy}=3$

Từ đó $x+y=6$. *Đáp số:* $x=y=3$.

Câu 3. a) Từ hệ đã cho ta có

$$(x+y)^2=z^2+2(x+y-z)$$

$$\Leftrightarrow (x+y-z)(x+y+z-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=x+y\\ z=2-x-y\end{array}\right.$$

Thay vào PT ban đầu ta có kết quả:

$x=3, y=4, z=-5$ hoặc $x=4, y=3, z=-5$.

b) *Giá trị lớn nhất*

$$F^2=(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})^2\leq 6(a+b+c)=6$$

$\Rightarrow F\leq\sqrt{6}$. Đẳng thức có khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Giá trị nhỏ nhất

$$F^2=(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})^2=2(a+b+c)+$$
$$2\left(\sqrt{(a+b)(b+c)}+\sqrt{(b+c)(c+a)}+\sqrt{(a+c)(a+b)}\right)$$

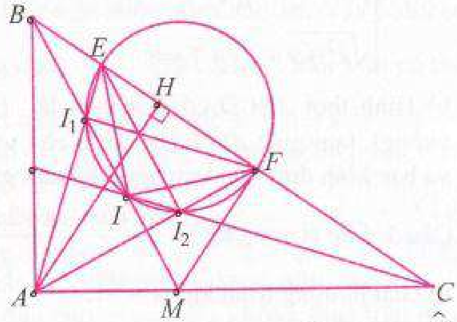
Ta có $(a+b)(b+c)=b^2+ab+bc+ca\geq b^2$.

Đẳng thức xảy ra khi $ab+bc+ca=0$.

Tương tự cho 2 BĐT khác ta có: $F^2\geq 4\Rightarrow F\geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi có một số bằng 1, hai số bằng 0.

Câu 4.



a) • Tam giác ACE cân tại C nên $\widehat{CAE}=90^o-\dfrac{\widehat{C}}{2}$

$\Rightarrow\widehat{BAE}=\dfrac{\widehat{C}}{2}\Rightarrow AE$ là phân giác của $\widehat{BAH}$.

Tương tự AF là phân giác của $\widehat{CAH}$. Suy ra A, I_1, E thẳng hàng (đpcm).

• Do CI phân giác của $\widehat{ACE}$, ΔACE cân tại E nên CI là trung trực của AE, do đó $IA=IE$. Tương tự $IA=IF$. Vậy $IE=IF$.

b) Kí hiệu (C) là đường tròn đường kính EF. Từ câu a) ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF suy ra $\widehat{EIF}=2\widehat{EAF}=90^o$, do đó $I\in(C)$.

Do CI là trung trực của AE nên tam giác I_2AE cân tại I_2 $\Rightarrow\widehat{I_2AE}=\widehat{AEI_2}=45^o$ suy ra $\widehat{EI_2F}=90^o$ hay $I_2\in(C)$. Tương tự $I_1\in(C)$.

Do đó (C) là đường tròn ngoại tiếp ΔI_1I_2I.

(Xem tiếp trang 13)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG PTNK, ĐHQG TP.HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2014-2015

VÒNG 1 (120 *phút*)

Câu 1. a) Giải phương trình

$$(3-x)\sqrt{(3+x)(9+x^2)}=4\sqrt{5(3-x)}.$$

b) Tính $\frac{x}{y}$ biết $x>1, y<0$ và

$$\frac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)^2}}{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)\left(x^2y^2+xy^3+y^4\right)}=-6.$$

Câu 2. a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x^2-y+2\right)\left(\sqrt{(x^2+9)(y+7)}-15\right)=0\\ \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y+7}=8\end{cases}$$

b) Hình thoi $ABCD$ có diện tích là $18\sqrt{3}$ (mét vuông), tam giác ABD đều. Tính chu vi hình thoi và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 3. Cho phương trình $\frac{mx^2+(m-3)x+2m-1}{x+3}=0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m=-1$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $21x_1+7m(2+x_2+x_2^2)=58$.

Câu 4. a) Gọi $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\sqrt{ab}$ lần lượt là trung bình cộng và trung bình nhân của 2 số dương a và b. Biết trung bình cộng của x và y bằng 100. Tính $S=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

b) Giả sử hai đại lượng x, y tỉ lệ nghịch (x, y luôn dương). Nếu x tăng $a\%$ thì y giảm $m\%$. Tính m theo a.

Câu 5. Hình vuông $ABCD$ có $AB=2a$, AC cắt BD tại I. Gọi $(\mathcal{T})$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác CID, BE tiếp xúc với $(\mathcal{T})$ tại E (E khác C), DE cắt AB tại F.

a) Chứng minh ΔABE cân. Tính AF theo a.

b) BE cắt AD tại P. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP tiếp xúc với CD. Tính $\frac{AP}{PD}$.

c) EA cắt $(\mathcal{T})$ tại M (M khác E). Tính AM theo a.

VÒNG 2 (150 *phút*)

Câu 1. Cho phương trình $(m^2+5)x^2-2mx-6m=0$ (1) (m là tham số).

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16$.

Câu 2.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\left(1+x\sqrt{y}\right)^2=9y\sqrt{x}\\ 2\left(1+y\sqrt{x}\right)^2=9x\sqrt{y}.\end{cases}$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}\geq 3+2\sqrt{2}$.

Câu 3. Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

a) Chứng minh rằng $a+b$ không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu $c>1$ thì $a+c$ và $b+c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu 4. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính $AB=2R$ ($C\neq A, C\neq B$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $AN=AC$, $BM=BC$.

b) Chứng minh 4 điểm M, N, J, I cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.

c) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R.

Câu 5. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kì trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

a) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

b) Tất cả các bộ gồm 5 số thoả mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (TP. Hồ Chí Minh) *giới thiệu*

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI TRỰC TÂM TAM GIÁC

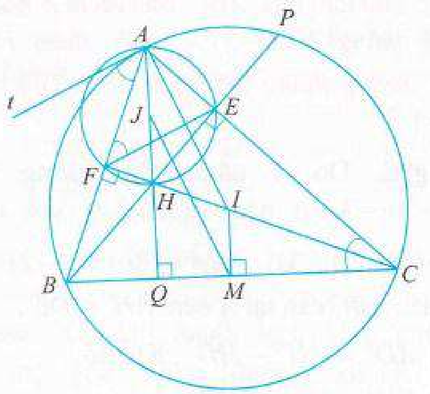
NGUYỄN TRƯỜNG SƠN
(GV THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng hiện nay, theo cấu trúc của Bộ GD&ĐT, các bài toán về tọa độ trong mặt phẳng thường xuyên xuất hiện. Để giải quyết các bài toán này các thí sinh cần nắm vững một tính chất hình học phẳng nào đó, điều đó làm cho các thí sinh cảm thấy lúng túng. Bài viết này mong muốn giúp một chút kiến thức nhỏ cho các thí sinh sắp bước vào kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I), H là trực tâm của tam giác. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C. M là trung điểm của cạnh BC (h.1).

Nhận xét 1. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{AJ}$ (trong đó J là trung điểm của đoạn AH).



Hình 1

Nhận xét 2. $IA \perp EF$.

Có nhiều cách chứng minh nhận xét này, có thể sử dụng nhận xét 1. Sau đây là một cách khác:

Ta có $\widehat{CFB} = \widehat{CEB} = 90^0$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn, do đó $\widehat{ACB} = \widehat{AFE}$.

Dựng At là tiếp tuyến của đường tròn (I). Khi đó $\widehat{ACB} = \widehat{BAt}$. Từ đó $\widehat{AFE} = \widehat{BAt}$ nên $At \parallel EF$. Suy ra $IA \perp EF$.

Nhận xét 3. Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng BH với đường tròn (I). Khi đó, P là điểm đối xứng của H qua đường thẳng AC.

Nhận xét 4. Gọi Q là chân đường cao hạ từ đỉnh A của ΔABC. Khi đó H là tâm nội tiếp của ΔEFQ.

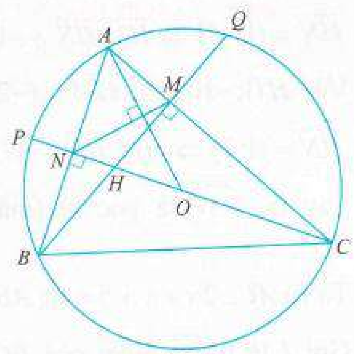
Chứng minh các nhận xét 1, 3, 4 là khá dễ dàng.

II. THÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 1. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn* $(C): x^2 + y^2 = 25$ *ngoại tiếp tam giác nhọn ABC có chân các đường cao hạ từ B, C lần lượt là M(–1; –3), N(2; –3). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng điểm A có tung độ âm.*

Lời giải (h.2)

Cách 1. Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 5$. Ta có: $\overrightarrow{MN} = (3;0)$.



Hình 2

Theo *nhận xét 2*, ta có $OA \perp MN$. Khi đó đường thẳng OA qua O, nhận $\overrightarrow{MN} = (3;0)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình: $x = 0$.

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$. Vì A có tung độ âm nên $A(0; -5)$.

Ta thấy $\overrightarrow{AM}=(-1;2), \overrightarrow{AN}=(2;2)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng AC, AB.

Phương trình đường thẳng AC: $2x+y+5=0$.

Phương trình đường thẳng AB: $x-y-5=0$.

Toạ độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y+5=0\\x^2+y^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0;y=-5\\x=-4;y=3\end{array}\right. \Rightarrow C(-4;3).$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-y-5=0\\x^2+y^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0;y=-5\\x=5;y=0\end{array}\right. \Rightarrow B(5;0).$$

Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}>0, \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}>0, \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}>0$, nên tam giác ABC nhọn. Vậy $A(0;-5)$, $B(5;0)$, $C(-4;3)$. ❒

Cách 2. Giả sử $H(a;b)$ là trực tâm ΔABC. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của đường thẳng CH, BH với đường tròn (C). Theo *nhận xét* 3, P, Q lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC. Vậy $P(4-a;-6-b), Q(-2-a;-6-b)$. Ta có hệ:

$$\begin{cases}(4-a)^2+(6+b)^2=25\\(2+a)^2+(6+b)^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1,b=-2\\a=1,b=-10\end{array}\right.$$

Với $H(1;-2)$ thì $\overrightarrow{HM}=(-2;-1)$,

$\overrightarrow{HN}=(1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN}=-1<0$.

Với $H(1;-10)$ thì $\overrightarrow{HM}=(-2;7)$,

$\overrightarrow{HN}=(1;7) \Rightarrow \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN}=47>0$.

Suy ra $\widehat{BAC}$ là góc tù (mâu thuẫn). Do đó $H(1;-2)$.

Ta có AC: $2x+y+5=0$; AB: $x-y-5=0$.

Gọi I là trung điểm của BC. Từ $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OI}$ suy ra $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. PT BC là: $x+3y-5=0$.

Từ đó suy ra các điểm $A(0;-5)$, $B(5;0)$, $C(-4;3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Lời bình: Rõ ràng khi làm theo cách 2 thì điều kiện tung độ điểm A âm là không cần thiết.

Thí dụ 2. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;-1)$, trực tâm $H(2;1)$, $BC=2\sqrt{5}$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Lập phương trình đường thẳng BC, biết trung điểm M của BC nằm trên đường thẳng $d: x-2y-1=0$ và M có tung độ dương.*

Lời giải. Do M thuộc đường thẳng d nên $M(2a+1;a)(a>0)$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{AH}=(4;2), AH=2\sqrt{5}$ và $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$, suy ra $I(2a-1;a-1), IM=\sqrt{5}$. Vì M là trung điểm BC nên $IM \perp BC$. Do đó:

$$IA^2=\left(\frac{BC}{2}\right)^2+IM^2=10 \Rightarrow (2a+1)^2+a^2=10$$

$$\Leftrightarrow 5a^2+4a-9=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ hoặc } a=-\frac{9}{5}.$$

Do $a>0$ nên $a=1 \Rightarrow M(3;1)$. Đường thẳng BC đi qua $M(3;1)$, nhận $\overrightarrow{AH}=(4;2)$ làm vectơ pháp tuyến có PT: $2x+y-7=0$.

Thí dụ 3. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, trực tâm $H(-3;2)$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Biết điểm A nằm trên đường thẳng $d: x-3y-3=0$, điểm $F(-2;3)$ thuộc đường thẳng DE và HD=2. Tìm tọa độ điểm A.*

Lời giải. Do A nằm trên đường thẳng $d: x-3y-3=0$ nên $A(3t+3;t)$ với $t\in\mathbb{R}$.

$\overrightarrow{FA}=(3t+5;t-3)$, $\overrightarrow{HA}=(3t+6;t-2)$. Do tam giác ABC cân tại A nên $AH \perp DE$.

Ta có $AD^2=AH^2-HD^2$. Khi đó:

$FA^2-FH^2=DA^2-DH^2$

$\Rightarrow FA^2-FH^2=AH^2-2HD^2$

$\Rightarrow (3t+5)^2+(t-3)^2-2=(3t+6)^2+(t-2)^2-8$

$\Rightarrow t=0$. Vậy $A(3;0)$. ❒

Lời bình: Một tính chất thú vị được sử dụng trong thí dụ 3, thường gặp đó là: *Cho 4 điểm A, B, C, D, nếu $AB \perp CD$ thì*

$$AC^2-AD^2=BC^2-BD^2.$$

Thí dụ 4. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H(2;2), biết HE=3. Tìm tọa độ đỉnh A của tam giác ABC biết đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x+y+12=0$ và khoảng cách từ A đến đường thẳng EF nhỏ nhất.*

Lời giải. Ta thấy rằng H không thuộc đường thẳng d. Do A nằm trên đường thẳng $d: x+y+12=0$ nên $A(t;-t-12)$ với $t\in\mathbb{R}$. $\overrightarrow{HA}=(t-2;-t-14)$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AH\perp FE$.

Xét tam giác vuông HAE ta có:

$$AE^2=AH^2-HE^2=(t-2)^2+(t+14)^2-9$$
$$=2t^2+24t+191$$

và
$$d(A,EF)=\frac{AE^2}{AH}=\frac{2t^2+24t+191}{\sqrt{2t^2+24t+200}}$$
$$=\sqrt{2t^2+24t+200}-\frac{9}{\sqrt{2t^2+24t+200}}$$
$$=\sqrt{2(t+6)^2+128}-\frac{9}{\sqrt{2(t+6)^2+128}}$$
$$\geq\frac{128-9}{8\sqrt{2}}=\frac{119\sqrt{2}}{16}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=-6$.

Khoảng cách từ A đến EF nhỏ nhất bằng $\frac{119\sqrt{2}}{16}$ khi $A(-6;-6)$. ❐

Thí dụ 5. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại đỉnh A. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng AB. Gọi $E(7;1), F\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C của tam giác ABC. Tìm tọa độ của đỉnh A biết rằng phương trình đường thẳng CN là $2x+y-13=0$.*

Lời giải. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Do ΔABC cân tại A nên AG chính là đường trung trực của đoạn thẳng EF. PT AG là $-3x+y+12=0$.

Tọa độ điểm G là nghiệm của hệ PT:

$$\begin{cases}2x+y-13=0\\-3x+y+12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}\Rightarrow G(5;3).$$

$A\in AG\Rightarrow A(a;3a-12), C\in CN\Rightarrow C(c;13-2c)$.

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên suy ra $B(15-a-c;8-3a+2c)$,

$\overrightarrow{CB}(15-a-2c;-5-3a+4c)$

$\overrightarrow{EB}(8-a-c;7-3a+2c), \overrightarrow{EC}(c-7;12-2c)$

Ta có $AG\perp BC; EB\perp EC$ nên

$$\begin{cases}15-a-2c+3(-5-3a+4c)=0\\(8-a-c)(c-7)+(7-3a+2c)(12-2c)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow a=c=7$.

Khi đó $A(7;9), B(1;1), C(7;-1)$. ❐

Thí dụ 6. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I(1;2), bán kính $R=5$. Chân đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC lần lượt là H(3;3), K(0;−1). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHK, biết rằng tung độ điểm A dương.*

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{KH}=(3;4)$.

Theo *nhận xét* 2, ta có $IA\perp HK$. Do đó đường thẳng IA có phương trình là: $\begin{cases}x=1+4t\\y=2-3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. A thuộc đường thẳng IA nên $A(1+4t;2-3t)$, với $t<\frac{2}{3}$.

Ta có $IA=5\Leftrightarrow 16t^2+9t^2=25\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

Vậy $A(-3;5)$.

Đường thẳng AB có phương trình: $2x+y+1=0$. Đường thẳng AC có phương trình: $x+3y-12=0$. Đường thẳng BH có phương trình: $3x-y-6=0$. Đường thẳng CK có phương trình: $x-2y-2=0$.

Khi đó dễ dàng suy ra $B(1;-3), C(6;2)$.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCHK$ thì J là trung điểm của BC. Khi đó $J\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCHK$ là: $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

Lời bình: Có rất nhiều cách xác định tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCHK$. Ta có thể xác định tọa độ tâm V đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK. Sau đó suy ra toạ độ tâm J bằng cách sử dụng *nhận xét* 1.

Thí dụ 7. *Viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC biết E(-1;-2), F(2,2), Q(-1,2) lần lượt là chân ba đường cao hạ từ A, B, C của tam giác ABC.*

Lời giải. Theo *nhận xét* 4, trực tâm H của tam giác ABC chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EFQ. Do đó, ta tìm tọa độ điểm H như sau:

Gọi U là giao điểm của AE với QF. Khi đó ta có:

$$\frac{UQ}{UF}=\frac{EQ}{EF}=\frac{4}{5}\Rightarrow\overrightarrow{UQ}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{UF}\Rightarrow U\left(\frac{1}{3};2\right)$$

$$\frac{HU}{HE}=\frac{FU}{FE}=\frac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{HU}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}\Rightarrow H(0;1).$$

Phương trình đường thẳng AB là $-x+y-3=0$.
Phương trình đường thẳng AC là $2x+y-6=0$.
Phương trình đường thẳng BC là $x+3y+7=0$.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $C(-3;0)$, đường thẳng đi qua chân đường cao hạ từ A, B có phương trình là $7x+y+5=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết rằng $M(4;1)$ thuộc đường tròn đó.

2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, gọi M và $K\left(\frac{6}{5};\frac{-3}{5}\right)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A và B của tam giác ABC. Điểm $E(-3;0)$ là điểm đối xứng của M qua trung điểm N của cạnh AB. Xác định tọa độ các đỉnh của $\Delta\ ABC$ biết M nằm trên đường thẳng $d{:}4x+y-2=0$.

3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, đường thẳng BC có phương trình $2x+y-2=0$, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. BE có phương trình $x+y+1=0$, điểm $M(1;1)$ thuộc đường thẳng CF. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có bán kính $R=\sqrt{10}$, $G\left(\frac{11}{3};\frac{7}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Các điểm $K(4;4), H(3;1)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ B, C xuống cạnh đối diện lần lượt là $K(-2;2)$, $E(2;2)$. Điểm $P\left(\frac{16}{5};\frac{-2}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của E xuống BC. Tìm tọa độ các đỉnh của $\Delta\,ABC$.

6. Cho tam giác nhọn ABC với AK, CD là hai đường cao và H là trực tâm $\Delta\ ABC$. Biết PT đường tròn ngoại tiếp tam giác DHK: $(x-2)^2+y^2=5$, trung điểm của AC là $P(7;5)$. Tìm toạ độ các điểm A, B, C biết rằng BC đi qua điểm $Q(1;4)$ và hoành độ điểm D lớn hơn 3.

7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ΔABC có $A(2\,;3)$, chân hai đường cao kẻ từ A và B lần lượt là $H\left(\frac{-7}{13};\frac{-17}{13}\right)$, $K\left(\frac{-1}{10};\frac{23}{10}\right)$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, E là một điểm thuộc cung nhỏ AB. Kẻ $EM\perp BC$, $EN\perp AC$. Tìm toạ độ điểm E để MN có độ dài lớn nhất.

8. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Gọi $E(7;1), F\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C của tam giác ABC. Tìm tọa độ của đỉnh A biết rằng phương trình đường thẳng BC là $2x+y-13=0$ và điểm B có tung độ dương.

9. Cho tam giác ABC có trực tâm H, đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC có phương trình : $x^2+y^2-x-5y+4=0$. H thuộc đường thẳng $\Delta{:}\,3x-y-4=0$, $M(2\,;3)$ là trung điểm AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 2

(*Thời gian làm bài:* 180 *phút*)

Câu 1 (*2 điểm*). Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ (m là tham số) có đồ thị (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) khi $m=0$.

b) Tìm m để tồn tại tiếp tuyến với đồ thị (C_m) đi qua điểm $A(3;0)$ và cắt đường tròn (S) có phương trình $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ theo một dây cung MN có độ dài nhỏ nhất.

Câu 2 (*1 điểm*). Giải phương trình

$$\frac{\cos 4x-\sqrt{3}\sin 2x+2}{\sin 4x-\sqrt{3}\cos 2x}=\sqrt{3}.$$

Câu 3 (*1 điểm*). Tính tích phân

$$I=\int_2^{1+\sqrt{2}}\frac{2x^2-4x+3}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}dx.$$

Câu 4 (*1 điểm*).

a) Giải phương trình

$$\log_{2015}\left(x^2-4\right)=\log_{2015}(x+2)^2+\frac{1}{4}\log_{2015}(x-3)^4$$

b) Cho số phức z thỏa mãn $z+(1-2i)\overline{z}=2(1-2i)$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức

$$\omega=z^2-3z.$$

Câu 5 (*1 điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-z=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-3}$, $\Delta_2: \frac{x-6}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{2}$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P), điểm N trên đường thẳng Δ_1 sao cho M và N đối xứng với nhau qua đường thẳng Δ_2. Viết phương đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với Δ_1 và tạo với mặt phẳng (P) một góc 30°.

Câu 6 (*1 điểm*). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$. Diện tích tam giác SBC bằng $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh SB và SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và CJ.

Câu 7 (*1 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2;1)$ và $AC=2BD$. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ điểm P biết rằng $\overrightarrow{BP}=5\overrightarrow{BI}$ và điểm B có tung độ dương.

Câu 8 (*1 điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt{y^4+5}=y\\ x^2+2x(y-2)+y^2-8y+4=0\end{cases}.$$

Câu 9 (*1 điểm*). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=\frac{1}{6}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^4(2b+1)(3c+1)}+\frac{1}{16b^4(3c+1)(a+1)}+\frac{1}{81c^4(a+1)(2b+1)}.$$

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Câu 1. b) Ta có $d: y=-x+m\ (m\neq 2)$ và $I(-1;1)$. PT hoành độ giao điểm của (H) và d là $\frac{x-1}{x+1}=-x+m \Leftrightarrow x^2+(2-m)x-(m+1)=0$ (1) (do $x=-1$ không thỏa mãn).

Ta có $\Delta=m^2+8>0;\forall m$ nên (H) và d luôn cắt nhau tại 2 điểm A,B với $A(x_1;-x_1+m)$; $B(x_2;-x_2+m)$ trong đó x_1,x_2 là 2 nghiệm của PT (1) thỏa mãn $x_1+x_2=m-2;\ x_1x_2=-m-1$.

Từ $S_{IAB}=2\sqrt{3} \Rightarrow d(I;d).AB=4\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}}\sqrt{2(x_1-x_2)^2}=4\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow m^2(m^2+8)=48 \Leftrightarrow m=-2$ (do $m\neq 2$).

Câu 2. ĐK: $\cos x.\cos\frac{x}{2}\neq 0$. PT đã cho tương đương với $\frac{\cos 2x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=2\sin x+1$

$\Leftrightarrow \cos 2x-\sin 2x=\cos x-\sin x$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Đáp số: $x=k2\pi; x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3. Ta có $\mathbb{L}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)+x(1-\sqrt{1-x})}{x^3+x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-x-3}{(x+1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+(1+x)\sqrt[3]{1+3x}+(1+x)^2)}+\frac{1}{(x+1)(1+\sqrt{1-x})}\right]=\frac{-1}{2}.$$

Câu 4. a) Gọi số cặp vợ chồng là $n\ (n\geq 2)$. Ta có số lượng cái bắt tay là $C_{2n}^2-n=2n(n-1)$ (do mỗi cách chọn 2 người trong $2n$ người thì có 1 cặp bắt tay và mỗi người không bắt tay vợ/chồng mình). Ta có $2n(n-1)=40 \Leftrightarrow n=5$.

b) Ta có $\mathbb{P}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}2^k x^{\frac{5n-11k}{2}}$. Theo bài ra $2C_n^1(-1)^{n-1}+4C_n^2(-1)^{n-2}=2^n$. Do $2^n>0$ và $4C_n^2>2C_n^1$ nên n chẵn. Khi đó $n=2k$ ($k\in\mathbb{N}^*$). Thay vào được $\frac{k(k-1)}{2}=2^{2k-4}$. Suy ra $k=2\Leftrightarrow n=4$. Hệ số của số hạng thứ 4 cần tìm là -32.

Câu 5. Ta có $C(0;0;c)$ với $c>0$. Do $BC=CA=AB$ nên $c^2+9=18\Leftrightarrow c=3$. Gọi G là tâm ΔABC ta có $G(1;1;1)$. PT đường thẳng Δ đi qua G và vuông góc với (ABC) là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$. Vì $S\in\Delta$ nên $S(s;s;s)$.

Ta có $\frac{1}{3}SG.S(ABC)=9\Leftrightarrow SG=2\sqrt{3}\Leftrightarrow s=3$ hoặc $s=-1$. Do vậy $S(3;3;3); S(-1;-1;-1)$.

Câu 6. Ta có $0<SB^2-SA^2=HB^2-HA^2<AB^2$ nên tam giác SAB vuông tại S. Đặt $HA=HO=x$ ta có $OB=2x$. Theo định lí côsin ta có $BH=x\sqrt{7}; BC=2x\sqrt{3}$. Ta có $SA^2+SB^2=AB^2\Leftrightarrow a^2+a^2-x^2+7x^2=12x^2$ $\Leftrightarrow x=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Khi đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a.\frac{\sqrt{3}}{4}.4a^2=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC thì I là trung điểm của AC. Do $HI \parallel OC$ nên $d_{(I;(SCO))}=d_{(I;(SCO))}=HL$ trong đó K,L lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng CO và SK. Ta có $HK=\frac{a}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{2}$;

$$d_{(I;(SCO))}=HL=\frac{HK.HS}{\sqrt{HK^2+HS^2}}=\frac{\sqrt{22}}{11}a.$$

Câu 7. Do tam giác ABC vuông tại A có $H \in (C)$ và CA là tiếp tuyến của (C) nên $B \in (C)$. Ta có $AC = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ nên $BH = \frac{BA^2}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \sqrt{3}$.

Giả sử $B(a;b)$ $(b>0)$. Khi đó $\begin{cases} BI = 1 \\ BH = \sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ (a-2)^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Câu 8. ĐK: $y \geq 1; x^3 - x^2 + 1 \geq 0$. PT thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x + \sqrt[3]{x})^2 + (y\sqrt{y-1})^2 = 2(x + \sqrt[3]{x})y\sqrt{y-1}$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt[3]{x} = \sqrt{(y-1)^3} + \sqrt{y-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = (y-1)^3. \end{cases}$$

PT thứ hai của hệ trở thành

$$x^4 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = x^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 - 1 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - x^3 + x^2 - 1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^3 - x^2 + 1} + x^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x^3 + x + 1) = 0 \\ \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = 1 - x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ (do } x \geq 0).$$

Đáp số: $(x;y) = (0;1); (x;y) = (1;2)$.

Câu 9. Ta có $\frac{a^2}{\frac{1}{2}} + \frac{b^2}{\frac{1}{3}} + \frac{c^2}{\frac{1}{6}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$

$$\Rightarrow a^2 + 3c^2 + 28 = 3a^2 + 2b^2 + 5c^2 \geq 2(a+b)(a+c).$$

Mặt khác $\frac{4a}{a^2 + bc + 7} = \frac{8a}{2a^2 + a^2 + (b+c)^2}$

$$\leq \frac{8a}{2a^2 + 2a(b+c)} = \frac{4}{a+b+c} \leq \frac{2}{\sqrt{a(b+c)}}.$$

Do vậy $\mathbb{P} \leq \frac{2}{a+b} - \frac{5}{(a+b)^2} + \frac{2}{\sqrt{a(b+c)}} - \frac{3}{a(b+c)}$

$$= \frac{1}{5} - 5\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} - 3\left(\frac{1}{\sqrt{a(b+c)}} - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{15}.$$

Khi $a = 3; b = 2; c = 1$ thì $\mathbb{P} = \frac{8}{15}$. Vậy $\max \mathbb{P} = \frac{8}{15}$.

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ …

(Tiếp theo trang 5)

Ta có $\Delta BAM = \Delta BFM$ (c.g.c)

nên $\widehat{BFM} = \widehat{BAM} = 90^o$ suy ra $EF \perp FM$ (đpcm).

Câu 5. Các số được viết trên bảng là 1, 5, 11, 23, 47, 71…

• Nhận xét rằng các số được viết trên bảng (trừ số 1) có tính chất chia 3 dư 2.

Thật vậy, các số đầu tiên trên bảng (trừ số 1) có dạng $(3k+2)$.

Nếu sử dụng số 1 để viết thì số mới có dạng: $(3k+2).1 + (3k+2) + 1 = 6k + 5$ chia 3 dư 2.

Nếu không sử dụng số 1 để viết thì số mới có dạng $(3k+2)(3m+2) + (3k+2) + (3m+2)$ chia 3 dư 2.

Ta thấy $2015^{2014} = (3.672 - 1)^{2014}$ chia 3 dư 1 nên không thể viết được số 2015^{2014}.

• Do $z = xy + x + y$ nên $z + 1 = (x+1)(y+1)$ (1)

Nếu cộng thêm 1 vào các số được viết trên bảng thì được dãy các số 2, 6, 12, 24, 48, 72,…

Các số đầu tiên có dạng $2^m.3^n$ nên từ (1) suy ra các số được viết thêm cộng với 1 cũng có dạng đó.

Mặt khác $2015 + 1 = 2016 = 256.63 = 2^4.3^2.7$ nên không thể viết được số 2015.

TỪ HỮU SƠN *(Sở GD-ĐT Hà Tĩnh) giới thiệu*

PHÉP CỘNG HAY PHÉP NHÂN

Nguyễn Đình Huy (*GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp*)

Bài toán Tổ hợp ngày càng xuất hiện nhiều hơn trong các đề thi HSG Quốc gia cũng như Quốc tế, nhằm giúp các em học sinh tiếp cận bài toán này một cách bài bản và chuyên sâu hơn, tôi xin giới thiệu đến các em một số vấn đề liên quan. Mở đầu là một kĩ năng gốc của bài toán đếm: cộng hay nhân?

Thí dụ 1. *Xác định số lớn nhất thu được khi xóa đi 100 chữ số trong số sau:*

$$12345678910111213\ldots99100,$$

với số trên được tạo thành từ các số nguyên từ 1 đến 100 xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

Lời giải. Ta bắt đầu với một vài phép đếm. Có 9 số có 1 chữ số. Từ 10 đến 99, có $99 - 10 + 1 = 90$ số có hai chữ số. Do đó, con số trên có $9 + 2.90 + 3 = 192$ chữ số. Sau khi xóa đi 100 chữ số, ta có được số gồm 92 chữ số. Với bất cứ hai số có cùng số chữ số, số có chữ số đầu lớn hơn sẽ lớn hơn. Do đó, số chúng ta cần tìm phải bắt đầu bằng càng nhiều số 9 càng tốt. Vì vậy, đầu tiên ta xóa 8 chữ số ngoài cùng bên trái. Sau đó, ta xóa chuỗi 101112…181 gồm tổng cộng $9 \times 2 + 1 = 19$ chữ số. Tương tự, ta xóa chuỗi 202122…282, 303132…383, 404142…484. Vậy ta đã xóa $8 + 19 \times 4 = 84$ chữ số, hiện ta thu được số sau:

$$9999950515253\ldots99100 \qquad (*)$$

Ta cần xóa 16 chữ số nữa. Không cần nghĩ nhiều, chỉ cần xóa chuỗi 505152…57 gồm 16 chữ số để thu được số:

$$9999958596061\ldots99100$$

Đừng quá nhanh, bạn ạ. Nếu chúng ta để 5 chữ số 9 đứng đầu, giá trị lớn nhất có thể có của chữ số tiếp theo là 7, thu được khi xóa chuỗi 505152…565 gồm 15 chữ số. Chữ số cuối cùng cần xóa là 5 trong 58. Do đó, câu trả lời là:

$$9999978596061\ldots99100.\ \square$$

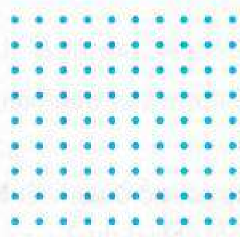
Thí dụ 2. *Giáo sư A, B, C và D đang cho sinh viên E thi vấn đáp về toán tổ hợp. Bốn giáo sư đang ngồi thành hàng. Vì là đồng chủ tịch của ủy ban kỳ thi, giáo sư A và D phải ngồi cạnh nhau. Vì là cố vấn cho sinh viên E, giáo sư C cần ngồi cạnh đồng chủ tịch của kỳ thi. Các giáo sư có thể ngồi theo bao nhiêu cách?*

Lời giải. Số vị trí mà giáo sư *C* có thể ngồi sẽ thay đổi khi vị trí ngồi của giáo sư *A* thay đổi. Điều này có thể làm chúng ta bối rối và đếm không có phương pháp. Mẹo của bài này không phải là xếp vị trí ngồi cụ thể cho một giáo sư bất kỳ trước tiên, mà ta phải xếp bốn giáo sư vào các vị trí ngồi có tương quan với nhau rồi sau đó mới xếp chỗ cho họ. Theo điều kiện đề bài, giáo sư *A*, *D* và *C* có thể ngồi theo một trong các cách sau: (*A*, *D*, *C*), (*C*, *A*, *D*), (*D*, *A*, *C*), (*C*, *D*, *A*). Với mỗi cách xếp chỗ trên, giáo sư B có thể ngồi ở ghế đầu hoặc cuối. Do đó, câu trả lời là

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8.\ \square$$

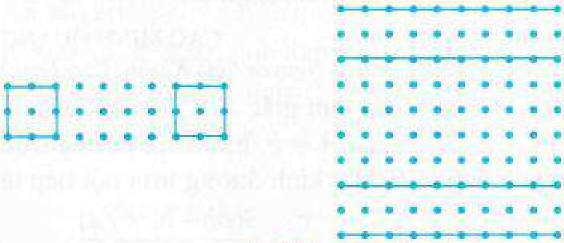
Quy tắc cộng. *Nếu sự kiện A có thể xảy ra theo a cách và sự kiện B có thể xảy ra theo b cách thì sự kiện hoặc A hoặc B có thể xảy ra theo a + b cách. Có thể dễ dàng áp dụng ý tưởng trên cho nhiều sự kiện. Ta có thể diễn đạt quy tắc cộng bằng ngôn ngữ tập hợp. Cho S là một tập hợp. Nếu* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *là một phân hoạch của S thì* $|S| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$ *trong đó* $|X|$ *là ký hiệu số lượng phần tử của tập hợp X.*

Thí dụ 3. *Xác định số lượng hình vuông vẽ được sao cho mọi đỉnh của hình vuông đều nằm trong mảng 10 × 10 tạo thành từ các dãy điểm như hình 1. (Các điểm cách đều nhau).*



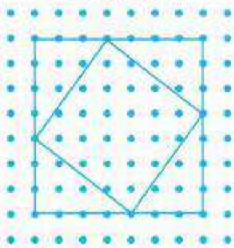
Hình 1

Lời giải. Ta gọi 4 điểm bất kỳ là một bộ tứ n × n nếu chúng là các đỉnh của một hình vuông mà các cạnh hình vuông song song với mép của mảng. Ta cũng gọi một hình vuông với các đỉnh hợp thành một bộ tứ là hình vuông bộ tứ. Có $9^2 = 81$ bộ tứ 1×1.



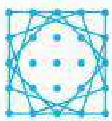
Hình 2.

Dễ thấy rằng có 8 bộ tứ 2×2 trong mảng 3×10 như hình 2. Không khó thấy rằng có 8 mảng 3×10 như vậy trong mảng 10×10 ở đề bài. Do đó, có 8^2 bộ tứ 2×2. Suy luận tương tự, ta có 7^2 bộ tứ 3×3 và cứ như thế. Với $1 \le k \le 9$, có $(10-k)^2$ bộ tứ $k \times k$. Nhưng điểm khó của bài này là có các hình vuông mà cạnh của chúng không song song với mép của mảng. Tuy nhiên, mỗi hình vuông như vậy đều nội tiếp với một hình vuông bộ tứ.



Hình 3.

Do đó, để đếm đủ thì phải đếm tất cả hình vuông bộ tứ và mọi hình vuông nội tiếp. Không khó thấy rằng trong một hình vuông bộ tứ $k \times k$, có k hình vuông nội tiếp, bao gồm chính hình vuông bộ tứ. Ví dụ, với $k = 4$, ta có hình 4.



Hình 4.

Tổng hợp lại, ta có được đáp án bài toán:

$$\sum_{k=1}^{9}(10-k)^2.k = \sum_{k=1}^{9}\left(100k - 20k^2 + k^3\right)$$

$$= 100\sum_{k=1}^{9}k - 20\sum_{k=1}^{9}k^2 + \sum_{k=1}^{9}k^3$$

$$= 100.\frac{9.10}{2} - 20.\frac{9.10.19}{6} + \left(\frac{9.10}{2}\right)^2$$

$$= 4500 - 5700 + 2025 = 825.$$

Thí dụ 4. *[Tài liệu Toán PEA, Richard Parris] Để có thể mở tủ đựng đồ của mình tại phòng tập thể hình, An phải nhớ mã số. Dãy mã số gồm 3 số và hai trong số đó là 17 và 24, nhưng anh lại quên mất số thứ ba và không biết thứ tự của các số này. Số thứ ba nhận một trong các giá trị từ 1 đến 40. Nếu mỗi lần thử nhập mất 10 giây thì nhiều nhất mất bao lâu để An thử hết tất cả các khả năng?*

Lời giải. Ta xem xét 6 tập hợp con. Đặt:

$$A_1 = \{(x, 17, 24) / 1 \le x \le 40\}$$

$$A_2 = \{(x, 24, 17) / 1 \le x \le 40\}$$

$$A_3 = \{(17, x, 24) / 1 \le x \le 40\}$$

$$A_4 = \{(24, x, 17) / 1 \le x \le 40\}$$

$$A_5 = \{(17, 24, x) / 1 \le x \le 40\}$$

$$A_6 = \{(24, 17, x) / 1 \le x \le 40\}$$

Không khó để thấy rằng mỗi tập con có 40 phần tử. Do đó, theo quy tắc cộng, có $40.6 = 240$ dãy số để thử và cần nhiều nhất là 40 phút. Vội quá rồi, bạn ạ! Một điều quan trọng nhưng dễ bị bỏ qua khi áp dụng quy tắc cộng là các tập hợp Ai phải là một phân hoạch thì quy tắc này mới đúng, tức là $Ai \cap Aj = \varnothing$ với $i \neq j$. Nhưng trong bài này, dãy số {17, 17, 24} thuộc về cả A_1 và A_3. Tương tự, mỗi dãy số {17, 24, 17}, {24, 17, 17}, {17, 24, 24}, {24, 17, 24}, {24, 24, 17} cũng thuộc về hai tập hợp nên chúng được đếm hai lần. Do đó, chỉ có $240 - 6 = 234$ dãy để thử, và câu trả lời đúng là 39 phút. ❐

Phép cộng và phép nhân có liên quan mật thiết với nhau. Phép nhân là cách viết ngắn gọn cho phép cộng lặp nhiều lần. Ví dụ, $3.5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 5 + 5$. Dùng phép nhân một cách hiệu quả có thể giúp hiểu thấu đáo để giải các bài toán đếm. Có người sẽ dễ dàng bỏ qua dãy số bị đếm hai lần trong bước cuối cùng khi giải *Thí dụ* 4. Có thể có người sẽ tự hỏi liệu còn dãy số nào bị đếm nhiều lần không. Nghĩ sâu hơn một chút, ta thấy rằng những dãy số bị đếm nhiều lần chỉ có thể là dãy gồm $\{a, a, b\}$ với $\{a, b\} = \{17, 24\}$. a và b có thể nhận hai giá trị là $(a, b) = (17, 24)$ và $(a, b) = (24,17)$. Có 3 cách sắp xếp các số a, a, b là (a, a, b), (a, b, a) và (b, a, a). Do đó, có chính xác 6 dãy số bị đếm 2 lần.

Ta cũng có thể giải *Thí dụ* 2 bằng phép nhân. Đầu tiên, ta sắp xếp vị trí tương đối cho giáo sư A và D. Có hai cách xếp là (A, D) và (D, A). Giáo sư C có hai cách để ngồi cạnh giáo sư A và D, đó là ngồi ở bên phải hoặc bên trái.

(Xem tiếp trang 27)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/449 (Lớp 6). Cho 5 số nguyên phân biệt sao cho tổng của 3 số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích 5 số nguyên đó.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/449 (Lớp 7). Cho tam giác *ABC* với *AB* > *AC*, *AB* > *BC*. Trên cạnh *AB* của tam giác *ABC* lấy các điểm *D* và *E* sao cho *BC* = *BD* và *AC* = *AE*. Qua *D* và *E* kẻ *DK* song song với *BC* và *EI* song song với *CA* ($K \in CA, I \in CB$). Chứng minh rằng *CK* = *CI*.

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Bài T3/449. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{x}}.$$

NGUYỄN TẤT THU
(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai)

Bài T4/449. Cho tam giác nhọn *ABC* với *H* là trực tâm. *M* là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBA}=\widehat{MCA}$. Gọi *E*, *F* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *M* trên các cạnh *AB*, *AC* và *I*, *J* tương ứng là trung điểm của *BC*, *MA*. Chứng minh rằng các đường thẳng *MH*, *EF* và *IJ* đồng quy.

LÊ VIẾT ÂN
(SV lớp Toán 4B, ĐH Sư phạm Huế)

Bài T5/449. Tìm tất cả các cặp số nguyên (*x*; *y*) thỏa mãn phương trình $x^4+y^3=xy^3+1$.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/449. Giải phương trình $8^x-9|x|=2-3^x$.

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T7/449. Cho tam giác *ABC* với ba cạnh là *AB* = *c*, *BC* = *a*, *CA* = *b*, bán kính đường tròn ngoại tiếp là *R*, bán kính đường tròn nội tiếp là *r*. Chứng minh rằng $\dfrac{r}{R}\le\dfrac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)^2}$.

ĐINH VĂN TÂM
(GV THPT Bình Minh, Kim Sơn, Ninh Bình)

Bài T8/449. Cho ba số thực dương *x*, *y*, *z* thỏa mãn $x\ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z}.$$

DƯƠNG VĂN SƠN
(GV THPT Hà Huy Tập, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/449. Tìm phần nguyên của biểu thức *B* với $B=\frac{1}{3}+\frac{5}{7}+\frac{9}{11}+\ldots+\frac{2013}{2015}$.

NGÔ QUANG HÙNG
(SV K54, lớp KTD, ĐH Nông Nghiệp Hà Nội)

Bài T10/449. Tìm tất cả các đa thức *f*(*x*) với hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên dương *n*, *f*(*n*) là ước của 3^n-1.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/449. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x_0=4, x_1=34 \\ x_{n+2}.x_n=x_{n+1}^2+18.10^{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

Đặt $S_n=\sum_{k=0}^{26}x_{n+k}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên lẻ *n*, ta luôn có $S_n \,\vdots\, 66$.

NGUYỄN VĂN THANH
(GV THPT Châu Thành A, Bến Tre)

Bài T12/449. Cho tam giác ABC cố định. Các điểm E, F lần lượt di chuyển trên các đoạn CA, AB sao cho $BF = CE$. BE cắt CF tại D. Gọi H, K thứ tự là trực tâm tam giác DEF, DBC. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi E, F di chuyển.

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/449. Một viên đạn khối lượng M được bắn lên với vận tốc $\overrightarrow{v_0}$ hợp với phương ngang góc α. Đến điểm cao nhất thì nó nổ, vỡ thành hai mảnh. Mảnh nhỏ có khối lượng m với vận tốc có môđun v, bật ra sau theo phương ngang so với mảnh lớn. Hỏi tầm xa của mảnh lớn tăng thêm bao nhiêu so với trường hợp đạn không nổ?

VŨ THANH KHIẾT
(Hà Nội)

Bài L2/449. Để đo chu kì T của một chất phóng xạ người ta dùng máy đếm xung. Biết rằng trong $t_1 = 45$ giờ đầu tiên máy đếm đọc n_1 xung ; trong $t_2 = 2t_1$ giờ tiếp theo máy đếm được $n_2 = \frac{9}{64}n_1$ xung. Xác định chu kì bán rã T.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/449 (For 6th grade). Find the minimum value of the products of 5 different integers among which the sum of any 3 arbitrary numbers is always greater than the sum of the remains.

Problem T2/449 (For 7th grade). Let ABC be a triangle with $AB > AC$ and $AB > BC$. On the side AB choose D and E such that $BC = BD$ and $AC = AE$. Choose K on CA and I on CB such that DK is parallel to BC and EI is parallel to CA. Prove that $CK = CI$.

Problem T3/449. Solve the following equation $\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{x}}$.

Problem T4/449. Given an acute triangle ABC with the orthocenter H. Let M be a point inside the triangle such that $\widehat{MBA}=\widehat{MCA}$. Let E and F respectively be the orthogonal projections of M on AB and AC. Let I and J respectively be the midpoints of BC and MA. Prove that 3 lines MH, EF and IJ are concurrent.

Problem T5/449. Find all pairs of integers $(x;y)$ satisfying $x^4+y^3=xy^3+1$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/449. Solve the following equation $8^x-9|x|=2-3^x$.

Problem T7/449. Given a triangle ABC with the sides $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Assume that the radius of the circumscribed circle is R and the radius of the inscribed circle is r. Show that $\frac{r}{R}\le\frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)^2}$.

Problem T8/449. Let x, y, z be 3 positive real numbers with $x \ge z$. Find the minimum value of the expression

$$P=\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z}.$$

(Xem tiếp trang 26)

Bài T1/445 (*Lớp 6*). *Chứng minh rằng:*

$$\underbrace{\overline{111...111}}_{2014\text{ chữ số }1}\underbrace{\overline{222...222}}_{2014\text{ chữ số }2}-\underbrace{\overline{333...333}}_{2014\text{ chữ số }3}$$

là một số chính phương.

Lời giải. Đặt $a = \overline{11...11}$ là số viết trong hệ thập phân có 2014 chữ số 1. Lúc đó số được viết bởi 2014 chữ số b là $\overline{bb...bb} = b.\overline{11...11} = b.a$ và $10^{2014} - 1 = \overline{99...99} = 9a$. Ta có

$C = \overline{111...111222...222} - \overline{333...333}$

$= \overline{111...111}.10^{2014} + \overline{222...222} - \overline{333...333}$

$= a.10^{2014} + 2a - 3a = a.10^{2014} - a$

$= a\,(10^{2014} - 1) = a.\,9a = (3a)^2 = (\overline{33...33}\,)^2$.

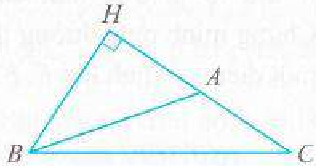
Vậy số C là số chính phương. ❒

➤ ***Nhận xét.*** Một số bạn biến đổi dài. Các bạn có lời giải đúng, gọn là: **Phú Thọ:** *Phạm Thu Thủy*, 6A, THCS Thị Trấn II, Yên Lập; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Nhật Loan, Đào Ngọc Hải Đăng, Trần Minh Huy, Trần Đan Trường, Tạ Thị Thu Hoài, Bùi Thu Hiền, Nguyễn Lệ Hoa*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; *Tạ Kim Thanh Hiền*, $6A_1$, *Nguyễn Diệu Linh, Lê Đức Thái, Nguyễn Thị Hương, Bùi Tuấn Anh, Nguyễn Ánh Linh*, $6A_2$; **Bắc Ninh:** *Tạ Việt Hoàn*, 6C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Hải Phòng:** *Mai Quang Vinh*, $6A_1$, THCS Hồng Bàng; **Hà Nam:** *Nhữ Thị Thương*, 6B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Nghệ An:** *Trần Ngọc Khánh*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Nguyễn Đình Tuấn, Thái Bá Bảo*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Tăng Trung Nghĩa*, 6A, THCS Hòa Hiếu II, TX. Thái Hòa; **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt*, 5B, TH số 1, Hành Phước, *Nguyễn Đức Hân*, 5B, TH Hành Trung, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

Bài T2/445 (*Lớp 7*). *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} > 90^\circ$ và độ dài ba cạnh là ba số chẵn liên tiếp. Tính độ dài ba cạnh của tam giác đó.*

Lời giải



Vẽ $BH \perp AC$ tại H. Vì $\widehat{BAC} > 90^\circ$ nên BC là cạnh lớn nhất của tam giác ABC và A nằm giữa H và C.

Tam giác HAB vuông tại H

$\Rightarrow AB^2 = BH^2 + AH^2$ (định lí Pythagore)

Tam giác HBC vuông tại H

$\Rightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2$ (định lí Pythagore).

Ta có $BC^2 = BH^2 + CH^2 = BH^2 + (AH + AC)^2$ $> BH^2 + AH^2 + AC^2$ hay $BC^2 > AB^2 + AC^2$ (*)

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là $n - 2$, n, $n + 2$ (n chẵn, $n > 2$). Vì BC là cạnh lớn nhất nên $BC = n + 2$.

Từ (*) ta có $(n + 2)^2 > (n - 2)^2 + n^2 \Rightarrow 8n > n^2$ $\Rightarrow n < 8$. Mà $(n - 2) + n > n + 2$ (BĐT tam giác) nên $n > 4$. Từ $4 < n < 8$, n chẵn $\Rightarrow n = 6$.

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác là 4; 6; 8. ❒

➤ ***Nhận xét***

1) Bài toán tuy đơn giản nhưng khá hay. Tất cả các bài gửi đều cho đáp số đúng. Nhiều bạn sử dụng kết quả $BC^2 > AB^2 + AC^2$ nhưng không chứng minh.

2) Nếu ta thay giả thiết "ba cạnh là ba số chẵn liên tiếp" bằng giả thiết "ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp" hoặc "ba cạnh là ba số lẻ liên tiếp" ta cũng được những kết quả thú vị!

3) Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Minh Đức*, $7A_3$, THCS Lâm Thao; *Tạ Kim Thanh Hiền*, $6A_1$, THCS Yên Lạc; **Thanh Hoá:** *Phùng Hà Nguyên*, 7D, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hoá; **Nghệ An:** *Nguyễn Thu Giang, Trần Lê Hiệp, Nguyễn Thị Như Quỳnh A, Nguyễn Như Quỳnh B*, 7A; *Hoàng Trần Đức*, 7D; *Nguyễn Thái Hiệp*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Trọng Bằng*, $7A_2$, THCS T.T. Quán Hành, Nghi Lộc; **Quảng Ngãi:** *Trương Quốc Bình*, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, *Đỗ Thị Mỹ Lan, Trương Thị Mai Trâm, Nguyễn Lê Hoàng Duyên, Võ Quang Phú Thời*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/445. *Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn a + b và ab là các số nguyên dương và $[a^2+ab]+[b^2+ab]$ là số chính phương, ở đó kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Chứng minh rằng a, b là các số nguyên dương.*

Lời giải. • Do $x-1<[x]\le x$ nên

$[a^2+ab]+[b^2+ab]\le a^2+ab+b^2+ab=(a+b)^2$ và $[a^2+ab]+[b^2+ab]>(a+b)^2-2$. Ta có: $(a+b)^2-2<[a^2+ab]+[b^2+ab]\le(a+b)^2$.

• Nếu $a+b=1$ thì $0<a<1$ và $0<b<1$, suy ra $ab<1$ trái với giả thiết.

• Nếu $a+b\ge 2$ thì giữa hai số $(a+b)^2$ và $(a+b)^2-2$ không tồn tại một số chính phương nào. Do đó

$[a^2+ab]+[b^2+ab]=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$

Mặt khác, do ab nguyên dương nên

$$[a^2+ab]+[b^2+ab]=[a^2]+[b^2]+2ab.$$

Suy ra $[a^2]+[b^2]=a^2+b^2$.

Ta có $[a^2]\le a^2; [b^2]\le b^2\Rightarrow[a^2]+[b^2]\le a^2+b^2$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $[a^2]=a^2; [b^2]=b^2$ $\Rightarrow a^2$ và b^2 là các số nguyên dương. (*)

• Mặt khác, $a+b$ nguyên dương và

$a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ hữu tỉ, suy ra a, b hữu tỉ. (**)

Từ (*) và (**) suy ra a, b nguyên dương. ❐

➢ ***Nhận xét***

1) Ta có thể dễ dàng chứng minh các tính chất sau: Nếu $a+b$ và $a-b$ hữu tỉ thì a, b hữu tỉ; Nếu a hữu tỉ dương và a^2 nguyên dương thì a cũng nguyên dương.

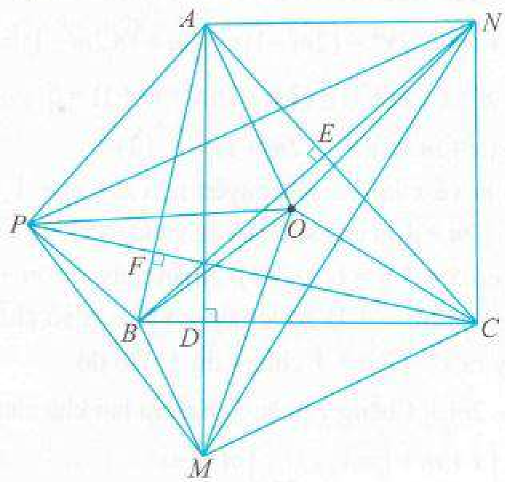
2) Các bạn có lời giải đúng là: **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Ninh, Tây Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Hiếu*, *Nguyễn Hữu Tùng*, *Nguyễn Kim Đức*, 8A5, *Nguyễn Hồng Anh*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, *Nguyễn Trọng Bằng*, 7A2, THCS Thị Trấn Quán Hành, Nghi Lộc, *Tăng Văn Minh Hùng*, *Nguyễn Văn Mạnh*, 7A, *Hoàng Trần Đức*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Đại Dương*, 8B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; **Hà Nội:** *Đặng Thanh Tùng*, 8B, *Nguyễn Thành Long*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/445. *Cho tam giác nhọn ABC với các đường cao AD, BE, CF. Trên tia đối của các tia DA, EB, FC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\widehat{BMC}=\widehat{CNA}=\widehat{APB}=90^o$.*

Chứng minh rằng các đường thẳng chứa các cạnh của lục giác APBMCN cùng tiếp xúc với một đường tròn.

Lời giải



Vì BE, CF là các đường cao trong tam giác ABC nên ta có $AE.AC=AF.AB$ (1)

Áp dụng hệ thức trong các tam giác vuông ANC và APB ta có $AE.AC=AN^2; AF.AB=AP^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AN=AP$. Tương tự ta nhận được $BP=BM$ và $CM=CN$.

Gọi O là giao điểm của các đường trung trực của MN, NP, PM. Do các tam giác PAN, PBM, MCN cân nên AO, BO, CO tương ứng là các đường phân giác của các góc $\widehat{PAN}$, $\widehat{PBM}$, $\widehat{MCN}$. Mặt khác, theo tính chất đối xứng ta có

$\widehat{OPA}=\widehat{ONA}$; $\widehat{ONC}=\widehat{OMC}$; $\widehat{OPB}=\widehat{OMB}$ (3)

Lại có, $\widehat{OPA}=\widehat{ONA}\Rightarrow\widehat{OPB}=\widehat{ONC}$.

Kết hợp với (3), suy ra $\widehat{OMB}=\widehat{OMC}$.

Tương tự ta có $\widehat{OPB}=\widehat{OPA}$; $\widehat{ONA}=\widehat{ONC}$.

Vậy các đường phân giác của các góc $\widehat{BMC}$, $\widehat{MCN}$, $\widehat{CNA}$, $\widehat{NAP}$, $\widehat{APB}$, $\widehat{PBM}$ đồng quy tại O. Do đó các cạnh của lục giác $APBMCN$ cùng tiếp xúc với một đường tròn. ❐

➤ ***Nhận xét.*** Các bạn dưới đây có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Phú Thọ:** *Trần Quốc Lập*, *Trần Mạnh Cường*, 8A3, *Đào Thanh Phúc*, 9A3, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/445. *Tìm số nguyên m để phương trình* $x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (2m^2 + m + 4) = 0$ *có nghiệm nguyên.*

Lời giải. *Cách 1.* Biến đổi PT (1) như sau

$$x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (m+1)(2m-1) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+m+1) - (2m-1)(x+m+1) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+m+1)(x^2-2m+1) = 5 \quad (2)$$

Do m và x là các số nguyên nên $x + m + 1$ và $x^2 - 2m + 1$ là các số nguyên và là ước của 5.

Ta có $5 = 1.5 = (-1).(-5)$. Nhận thấy $x + m + 1$ và $x^2 - 2m + 1$ là số lẻ nên x và m là số chẵn. Suy ra $x^2 - 2m + 1$ chia 4 dư 1. Do đó $x^2 - 2m + 1$ bằng 1 hoặc 5. Xảy ra hai khả năng

1) $\begin{cases} x+m+1=1 \\ x^2-2m+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-x \\ x^2+2x-4=0 \ (*) \end{cases}$

PT (*) có nghiệm $x = -1 \pm \sqrt{5}$ không nguyên nên loại.

2) $\begin{cases} x+m+1=5 \\ x^2-2m+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-x+4 \\ x^2+2x-8=0 \ (**) \end{cases}$

PT (**) có nghiệm $x = 2$ và $x = -4$ đều là số nguyên. Suy ra $m = 2$ và $m = 8$.

Cách 2. Biến đổi PT (1) thành

$$2m^2 - (x^2-2x-1)m - (x^3+x^2+x-4) = 0 \ (3)$$

Coi (3) là PT bậc hai ẩn m với

$$\Delta = (x^2-2x-1)^2 + 8(x^3+x^2+x-4)$$
$$= (x^2+2x+3)^2 - 40.$$

Để PT (1) có nghiệm nguyên thì PT (3) phải có nghiệm nguyên, suy ra Δ phải là số chính phương. Đặt $(x^2 + 2x + 3)^2 - 40 = k^2 \ (k \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 3 + k)(x^2 + 2x + 3 - k) = 40.$

Do $x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$,

$(x^2 + 2x + 3 + k) - (x^2 + 2x + 3 - k) = 2k$,

$x^2 + 2x + 3 + k > 0$ nên

$(x^2 + 2x + 3 + k) > (x^2 + 2x + 3 - k)$,

$x^2 + 2x + 3 + k$ và $x^2 + 2x + 3 - k$ cùng là số tự nhiên chẵn. Ta có $40 = 20.\ 2 = 10.\ 4$. Xảy ra hai khả năng sau:

1) $\begin{cases} x^2+2x+3+k=20 \\ x^2+2x+3-k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=9 \\ x^2+2x-8=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=9 \\ x=2; x=-4 \end{cases}$. Tìm được $m = 2$, $m = 8$.

2) $\begin{cases} x^2+2x+3+k=10 \\ x^2+2x+3-k=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \\ x^2+2x-4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \\ x=-1\pm\sqrt{5} \end{cases}$, không thỏa mãn x nguyên.

Vậy khi $m = 2$ hoặc $m = 8$ thì PT (1) có nghiệm nguyên. ❐

➤ ***Nhận xét.*** Có nhiều bạn tham gia giải bài này và làm theo hai cách trên. Một số bạn làm cách 1 do không đưa ra nhận xét về các nhân tử ở vế trái của PT (2) nên phải xét đến bốn khả năng; một số bạn làm cách 2 cho $k \in \mathbb{Z}$ nên phải xét nhiều khả năng hơn dẫn đến bài giải dài dòng. Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Nguyễn Thảo Chi*, *Trần Mạnh Cường*, *Trần Quốc Lập*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Xuân Toàn*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Bình**: *Phan Trần Hướng*, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Đại Dương*, 9B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Thanh*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/445. *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c lớn hơn 1 ta luôn có:*

$$(\log_b a + \log_c a - 1) \times (\log_c b + \log_a b - 1) \times$$
$$\times (\log_a c + \log_b c - 1) \le 1.$$

Lời giải. *(Theo số đông các bạn gửi bài về tòa soạn)*

Do $\log_a b.\log_b c.\log_c a = 1$ và a, b, c lớn hơn 1 nên tồn tại các số thực dương x, y, z thỏa mãn :

$$\log_a b = \frac{x}{y}; \ \log_b c = \frac{y}{z}; \ \log_c a = \frac{z}{x}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

với: $\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1\right)\left(\frac{z}{y}+\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right) \le 1$

$\Leftrightarrow (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \le xyz$ (1).

Nếu có hai trong ba thừa số trong vế trái của (1) âm, chẳng hạn $y+z-x<0,\ z+x-y<0$ $\Rightarrow 2z=(y+z-x)+(z+x-y)<0$. Điều này không xảy ra vì $z>0$.

Nếu có một trong ba thừa số $y+z-x, z+x-y, x+y-z$ âm và hai thừa số còn lại dương (hoặc bằng 0), thì bất đẳng thức (1) đúng.

Nếu cả ba thừa số $y+z-x, z+x-y, x+y-z$ dương (hoặc bằng 0), áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\sqrt{(y+z-x)(z+x-y)} \le z$;

$\sqrt{(x+y-z)(y+z-x)} \le y; \sqrt{(z+x-y)(x+y-z)} \le x.$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được (1).
Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

$$\Leftrightarrow a=b=c. \square$$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán khá cơ bản nên có nhiều bạn gửi bài giải về tòa soạn. Một số bạn đặt

$\log_a b = x; \log_b c = y; \log_c a = z \Rightarrow x,y,z>0; xyz=1$

việc trình bày lời giải phức tạp hơn.

Trong cách đặt $\log_a b = \frac{x}{y}; \log_b c = \frac{y}{z}; \log_c a = \frac{z}{x}$, ta có thể chọn x là số thực dương bất kì;

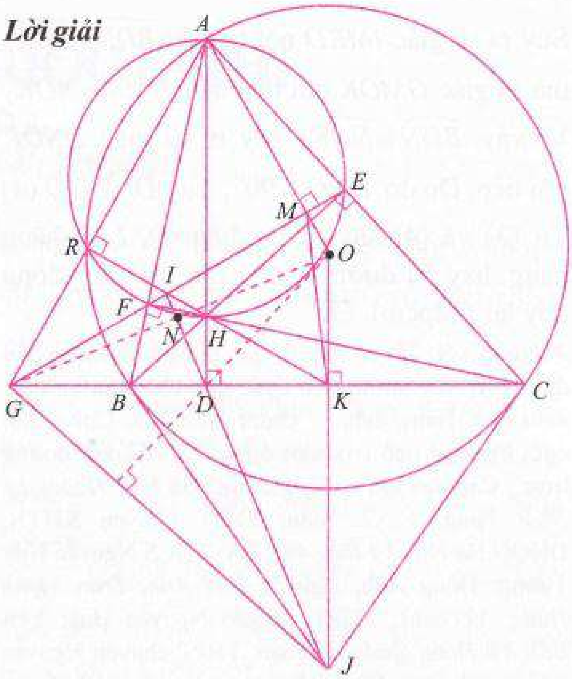
$y = x\log_b a; z = y\log_c b \Rightarrow \log_c a = \log_c b.\log_b a = \frac{z}{x}$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt : **Bắc Ninh**: *Lê Huy Cường*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nghệ An**: *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I, Đà Sơn, Đô Lương; **Hà Nội**: *Vũ Bá Sang*, 10 Toán 1, *Trần Mạnh Hùng*, 11 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ, *Kim Văn Hùng*, 12A1, THPT Mỹ Đức B, *Trần Phương Nam*, 12A3, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Tiền Giang**: *Nguyễn Minh Thông*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho; **Long An**: *Châu Hòa Nhân*, 12T2, THPT chuyên Long An; **Vũng Tàu**: *Lê Hoàng Tuấn*, 12A2, THPT Đinh Tiên Hoàng, TP Vũng Tàu.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/445. *Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm của BC. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại J. Chứng minh rằng HK, JD, EF đồng quy.*

Lời giải



Giả sử $EF \cap BC = G; HK \cap EF = I;$
$GA \cap (O) = R\ (R \ne A); OA \cap EF = M$. Ta có $\overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GR}.\overline{GA} = \overline{GF}.\overline{GE}$, suy ra R nằm trên đường tròn đường kính AH, hay $HR \perp AG$.

Áp dụng *định lí Brocard* cho tứ giác nội tiếp $BFEC$ với $BF \cap CE = A$; $EF \cap BC = G$ và chú ý rằng K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ ta được $HK \perp AG$. Từ đó ba điểm H, K, R thẳng hàng. Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O). Dễ thấy $(GDBC) = -1$, nên đường đối cực của D đi qua G (1)

Mặt khác, ta thấy đường đối cực của D đi qua J (do đường đối cực của J là BC đi qua điểm D) (theo *định lí La Hire*) (2)

Từ (1) và (2) suy ra GJ là đường đối cực của D đối với đường tròn (O). Theo tính chất của cực – đối cực ta thấy $OD \perp GJ$. Kết hợp với $GK \perp OJ$ suy ra D là trực tâm tam giác GOJ, do đó $JD \perp GO$ (3)

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $DI \perp GO$. Thật vậy, gọi $N = DI \cap GO$, dễ thấy $OA \perp EF$ tại M nên tứ giác $ARIM$ nội tiếp. Từ đó

$\overline{GI}.\overline{GM} = \overline{GR}.\overline{GA} = \overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GD}.\overline{GK}$

(do $(GDBC) = -1$, K là trung điểm BC nên theo *hệ thức Maclaurin* $\overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GD}.\overline{GK}$).

Suy ra tứ giác $IMKD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDN} = \widehat{IMK}$, mà tứ giác $GMOK$ nội tiếp nên, $\widehat{IMK} = \widehat{NOK}$. Vì vậy $\widehat{BDN} = \widehat{NOK}$, suy ra tứ giác $DNOK$ nội tiếp. Do đó $\widehat{DNO} = 90^{\circ}$, hay $DI \perp GO$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra ba điểm D, I, J thẳng hàng, hay ba đường thẳng HK, JD, EF đồng quy tại I (đpcm). ❐

➢ **Nhận xét.** Tất cả các lời giải gửi về Toà soạn đều đúng theo các hướng: Sử dụng tính chất của Tứ giác điều hoà, Hàng điểm – chùm điều hoà, Cực – đối cực, Phương tích của một điểm đối với một đường tròn... Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 12A2 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh, *Nguyễn Việt Anh, Trần Mạnh Hùng*, 11Toán1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hà Nam:** *Hoàng Đức Mạnh*, 11Toán, THPT chuyên Biên Hoà; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Hùng*, 11T1, THPT Đô Lương I, *Trần Quang Huy*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Phan Văn Khải*, 10A1, THPT Cửa Lò, TX Cửa Lò; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế, Lê Văn Trường Nhật, Nguyễn Như Hoàng*, 11Toán1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khiêm*, 10A1, THPT Quang Trung, Tây Sơn.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/445. *Tìm hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bị chặn trên một khoảng chứa điểm 0 và thỏa mãn*

$$2f(2x) = x + f(x), \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn bài toán. Chú ý $x = 2.\frac{2x}{3} - \frac{x}{3}$. Do đó

$$2f(2x) = x + f(x) \Leftrightarrow 2\left(f(2x) - \frac{2x}{3}\right) = f(x) - \frac{x}{3}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - \frac{x}{3}$. Ta suy ra

$$g(x) = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^2}g\left(\frac{x}{2^2}\right) = \ldots = \frac{1}{2^n}g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \ldots$$

Từ giả thiết ta có $\exists a \in \mathbb{R}^+, \exists M \in \mathbb{R}^+$ sao cho $|f(x)| \le M \;\forall x \in \mathbb{R}, |x| < a$. Bởi vậy $\forall x \in \mathbb{R}$, xét $n \in \mathbb{N}^*$ mà $\frac{|x|}{2^n} < a$, ta nhận được

$$|g(x)| = \frac{1}{2^n}\left|g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \le \frac{1}{2^n}\left(M + \frac{a}{3}\right) \to 0 \text{ khi } n \to +\infty.$$

Từ đó suy ra $g(x) = 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$, tức là $f(x) \equiv \frac{x}{3}$.

Các biến đổi trên là tương đương, do đó ta không phải thử lại. Vậy có duy nhất một hàm số thoả mãn bài toán là $f(x) = \frac{x}{3} \;\forall x \in \mathbb{R}$. ❐

➢ **Nhận xét.** Đây là bài toán tìm hàm số giải bằng phương pháp dãy số, loại bài toán đã xuất hiện nhiều trong các kì thi học sinh giỏi toán quốc gia, thi học sinh giỏi toán của các nước khác, thi IMO. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Hà Nội :** *Vũ Bá Sang*, 10T1 ; *Nguyễn Việt Anh, Trần Mạnh Hùng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ ; *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11T-A2, THPT chuyên KHTN ĐHQG Hà Nội ; **Nam Định:** *Ông Tùng Dương*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh :** *Võ Duy Khánh, Nguyễn Văn Thế*, 11T1, *Trần Hậu Mạnh Cường*, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/445. *Cho đa thức:*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 1964.$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên a sao cho $f(a)$ chia hết cho 3^{2014}.

Lời giải. (*Theo bạn Trần Hậu Mạnh Cường, 12T1, THPT chuyên **Hà Tĩnh***)

Ta có $f(x) = (x-1)^3 + 6(x-1) + 1971$

$$\Rightarrow f(9x+1) = (9x)^3 + 6.9x + 1971$$
$$= 27(27x^3 + 2x + 73).$$

Xét đa thức $g(x) = 27x^3 + 2x + 73$ và tập $A = \{g(i)\}_{i=1}^{3^n}$. Ta chứng minh A là một hệ đầy đủ mod 3^n. Thật vậy, giả sử trái lại A không là hệ đầy đủ mod 3^n. Khi đó tồn tại $1 \le i < j \le 3^n$ sao cho $g(i) \equiv g(j) \pmod{3^n}$

$$\Rightarrow 27i^3 + 2i + 73 \equiv 27j^3 + 2j + 73 \pmod{3^n}$$

$$\Rightarrow (i-j)\left[27(i^2 + j^2 + ij) + 2\right] \;\vdots\; 3^n.$$

Vì $27(i^2 + j^2 + ij) + 2 \not\vdots\; 3$ nên $j - i \;\vdots\; 3^n$ (vô lí).

Vậy A là hệ đầy đủ (mod 3^n). Do đó tồn tại $1 \le k_n \le 3^n$ sao cho $g(k_n) \,\vdots\, 3^n$.

Đặt $a_n = 9k_n + 1$ ta có $f(a_n) = 27g(k_n) \,\vdots\, 3^{n+3}$.

Với $n = 2011$ ta có $f(a_{2011}) \,\vdots\, 3^{2014}$. ❒

➢ **Nhận xét.** Có không nhiều bạn tham gia giải bài toán này với các cách giải khác nhau. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Trần Mạnh Hùng*, 11 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Hữu Hoàng Hải*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Trị:** *Trần Trọng Tiến*, 12Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật*, 12Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nam Định:** *Ông Tùng Dương*, 11Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/445. *Tồn tại hay không hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong các số $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x+2)$ luôn có hai số hữu tỉ và một số vô tỉ.*

Lời giải. Nhận xét: *Không thể tồn tại hàm liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi x, trong hai số $f(x), f(x+1)$, có một số vô tỷ và một số hữu tỷ.*

Chứng minh nhận xét: Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn nhận xét. Xét các hàm số

$h(x) = f(x) + f(x+1)$, $g(x) = f(x) - f(x+1)$.

Nếu $h(x)$ và $g(x)$ đều là hàm hằng thì

$f(x) = \dfrac{h(x) + g(x)}{2}$ cũng là hàm hằng. Trường hợp này bị loại vì không thỏa mãn điều kiện của nhận xét.

Nếu $h(x)$ và $g(x)$ không đồng thời là hàm hằng thì không mất tính tổng quát giả sử $h(x)$ không là hàm hằng. Suy ra tồn tại x_1, x_2 sao cho: $h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow$ tồn tại số hữu tỷ $q \in [h(x_1); h(x_2)]$ và vì $h(x)$ là hàm liên tục nên theo định lý giá trị trung gian, tồn tại $x_0 \in [x_1; x_2]$: $h(x_0) = q$. Do đó $f(x_0) + f(x_0 + 1) = q$. Nhưng vì q hữu tỷ nên $f(x_0)$, $f(x_0+1)$ đồng thời là số hữu tỷ hoặc đồng thời là số vô tỷ. Điều này trái với giả thiết. Nhận xét được chứng minh.

Quay lại bài toán đã cho, vì trong các số $f(x), f(x+1), f(x+2)$ luôn có hai số hữu tỷ và một số vô tỷ nên có 3 trường hợp xảy ra:

• $f(x)$ là số hữu tỷ, $f(x+1), f(x+2)$ là hai số vô tỷ.

• $f(x+1)$ là số hữu tỷ, $f(x)$ và $f(x+2)$ là hai số vô tỷ.

• $f(x+2)$ là số hữu tỷ, $f(x)$ và $f(x+1)$ là hai số vô tỷ.

Từ nhận xét trên ta thấy trong cả 3 trường hợp đều không tồn tại hàm f. ❒

➢ **Nhận xét**

1) Bằng chứng minh phản chứng và sử dụng định lý giá trị trung gian có thể chứng minh nhận xét sau (từ đó giải được bài toán đã cho).

Nếu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và chỉ nhận các giá trị vô tỷ trên $\mathbb{R}$ thì $f(x) \equiv C$, với C là hằng số vô tỷ nào đó.

2) Các bạn tham gia đều giải đúng bài này, tên của các bạn là: **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành. **Bình Định:** *Mai Tiến Luật*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn. **Long An:** *Châu Hòa Nhân*, 12T2, THPT chuyên Long An.

TRẦN HỮU NAM

Bài T11/445. *Cho dãy số $\{a_n\}_1^\infty$ được xác định bởi công thức: $a_1 = 1$, $a_2 = 2014$, $a_{n+1} = \dfrac{2013a_n}{n} + \left(1 + \dfrac{2013}{n-1}\right)a_{n-1}$ với mọi $n = 2, 3, \ldots$ Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)$.*

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*)

Cách 1. Ta có $a_{n+1} = \dfrac{2013a_n}{n} + \left(1 + \dfrac{2013}{n-1}\right)a_{n-1}$

$$= 2013\left(\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n-1}}{n-1}\right) + a_{n-1}$$

$$= 2013\left(\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n-1}}{n-1}\right) + 2013\left(\frac{a_{n-2}}{n-2} + \frac{a_{n-3}}{n-3}\right) + a_{n-3}$$

$$= 2013\left(\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n-1}}{n-1} + \frac{a_{n-2}}{n-2} + \frac{a_{n-3}}{n-3}\right) + a_{n-3}$$

$= \ldots = 2013\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right) + a_1$. Suy ra

$$a_{n+2} = 2013\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{a_i}{i}\right) + a_1 = \frac{2013a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1}.$$

Vậy nên $a_{n+1} = 2013\frac{a_n}{n} + a_n = a_n\left(\frac{2013}{n}+1\right), n = 1, 2, \ldots$

Do đó $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2013}{n}, n = 1, 2, \ldots$ và

$$a_n = \frac{(2013+1)(2013+2)\ldots(2013+n-1)}{(n-1)!}, n = 2, 3, \ldots$$

Suy ra $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$

$$= 1 + \frac{1}{2014} + \sum_{k=3}^{n}\frac{(k-1)!}{(2013+1)(2013+2)\ldots(2013+k-1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2012}\left(1 - \frac{2!}{2014}\right)$$

$$+\frac{1}{2012}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{(k-1)!}{(2013+1)(2013+2)\ldots(2013+k-2)} - \frac{k!}{(2013+1)(2013+2)\ldots(2013+k-1)}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2012} - \frac{n!}{2012\times 2014\times 2015\times(2013+n-1)}.$$

Để ý rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2012\times 2014\times 2015\times(2013+n-1)} = 0$$

nên $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{2013}{2012}$.

Cách 2. Dễ dàng chứng minh $a_n = C_{n+2012}^{2013}$, từ đó suy ra

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2013!}{2012}\left(\frac{1}{(n+2011)(n+2010)\ldots(n+1)n} - \frac{1}{(n+2012)(n+2011)\ldots(n+1)}\right).$$

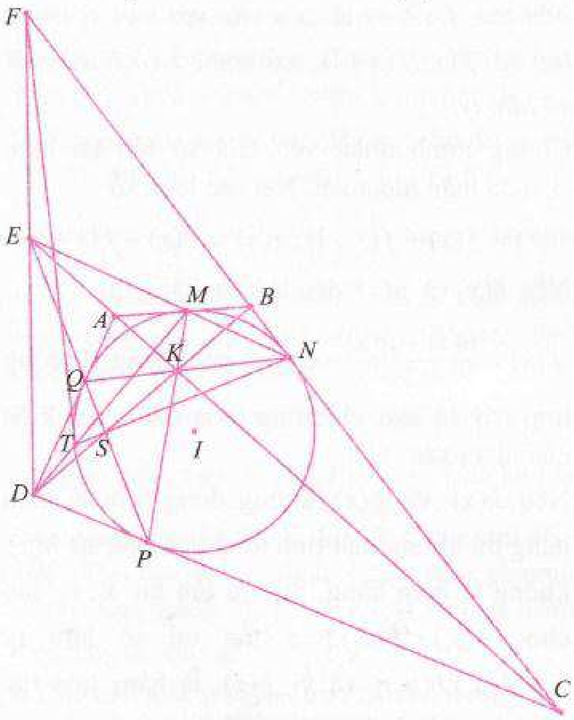
Từ đó ta có đpcm. ❑

➢ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** *Võ Duy Khánh, Nguyễn Văn Thế, Lê Văn Tường Nhật, Nguyễn Đình Nhật Nam*, 11T1; *Trần Hậu Mạnh Cường*, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Tiền Giang:** *Nguyễn Minh Thông*, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Hương*, 12A1, THPT chuyên Hưng Yên; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên NTT; **Hà Nội:** *Nguyễn Việt Anh*, 11T1; *Trần Mạnh Hùng*, 11TA, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Quảng Ngãi:** *Lê Thị Bích Nga, Bạch Thị Thiên Ngân*, 11T2, THPT Lê Khiết; **Nghệ An:** *Phan Như Trịnh*, 11A1, THPT Diễn Châu 3; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Trần Cao Nhiệm*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/445. *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). Các cạnh AB, BC tiếp xúc với (I) lần lượt tại M, N. Gọi E là giao điểm của AC và MN; F là giao điểm của BC và DE. DM cắt (I) tại điểm T khác M. Chứng minh rằng FT là tiếp tuyến của (I).*

Lời giải (*Theo bạn Phùng Đắc Vũ Anh, 12T1, THPT chuyên Amsterdam,* ***Hà Nội***).



Gọi P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của CD, DA và (I); S là giao điểm của TN và PQ (hình vẽ). Các kết quả sau là quen thuộc:

+ P, Q, E thẳng hàng.

+ AC, BD, MP, NQ đồng quy (tại K).

Vậy, áp dụng *định lí Pascal* cho sáu điểm $\begin{matrix} MNQ \\ QPT \end{matrix}$, chú ý rằng $QQ \cap MT = D$; $QP \cap NT = S; MP \cap NQ = K$, suy ra D, S, K thẳng hàng.

Xét cực và đối cực đối với (I). Ta có B là cực của MN, D là cực của PQ. Do đó E là cực của BD (vì $E = MN \cap PQ$). Suy ra E, S liên hợp (vì $S \in DK \equiv BD$). Điều đó có nghĩa là S là cực của DE (vì D, S liên hợp). Vậy S, F liên hợp (vì $F \in DE$). Do đó F là cực của SN (vì N, F liên hợp). Suy ra F, T liên hợp (vì $T \in SN$). Nói cách khác FT tiếp xúc với (I). ❒

➢ **Nhận xét**

1) Ngoài bạn *Vũ Anh*, có 8 bạn tham gia giải. Tuy nhiên vì không biết sử dụng cực và đối cực nên lời giải của 8 bạn đều dài.

2) Xin nêu tên cả 8 bạn: **Kon Tum:** *Nguyễn Hoàng Lan*, 11A1, THPT Nguyễn Tất Thành, TP Kon Tum; **Nghệ An**: *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương; **Thanh Hoá**: *Đặng Quang Ánh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Hà Nội**: *Trần Mạnh Hùng*, 11 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TX Hà Đông; **Hà Tĩnh**: *Lê Văn Trường Nhật, Nguyễn Như Hoàng, Nguyễn Văn Thế*, 11T1, *Trần Hậu Mạnh Cường*, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP Hà Tĩnh.

NGUYỄN MINH HÀ

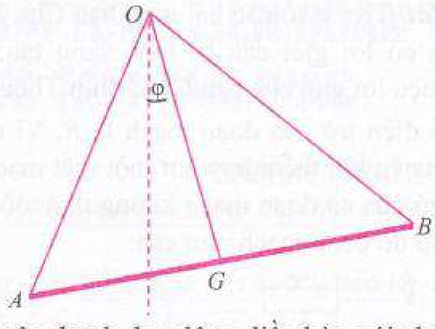
Bài L1/445. *Một thanh cứng đồng chất, tiết diện đều, chiều dài L được treo nằm ngang bởi hai sợi dây mảnh, không giãn cùng chiều dài l như hình vẽ. Kích thích cho thanh cứng dao động nhỏ trong mặt phẳng hai dây. Xác định chiều dài l theo L để chu kì dao động của thanh là nhỏ nhất và tính chu kì đó.*

Lời giải. Xét khi thanh lệch khỏi phương ngang một góc nhỏ φ (đường cao OG lệch khỏi phương thẳng đứng góc φ). Phương trình quay quanh O: $mgOG\sin\varphi = -I_O\varphi''$

$$\Leftrightarrow mg\sqrt{l^2 - \frac{L^2}{4}} = -m\left(\frac{L^2}{12} + l^2 - \frac{L^2}{4}\right)\varphi''.$$

Với góc φ nhỏ, biến đổi ta được:

$$\varphi'' + \frac{3\sqrt{4l^2 - L^2}}{6l^2 - L^2}\varphi = 0$$



Như vậy thanh dao động điều hòa với chu kỳ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}\frac{6l^2 - L}{\sqrt{4l^2 - L^2}}.$$

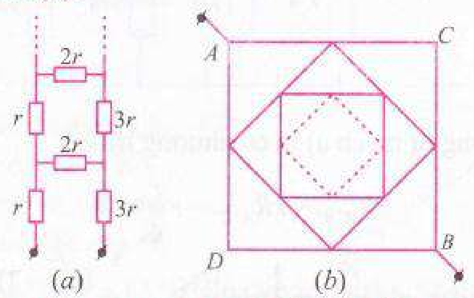
Để chu kỳ dao động nhỏ nhất ta có thể sử dụng đạo hàm hoặc bất đẳng thức Cauchy ta sẽ tìm được: $l = \frac{L}{\sqrt{3}}$ và chu kỳ nhỏ nhất khi ấy bằng:

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.\frac{L}{g}.$$

➢ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng: **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 10 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Phạm Quốc Vương*, 12A1, THPT Diễn Châu 3; **Bình Phước:** *Nguyễn Văn Hùng*, 11B, THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN XUÂN QUANG

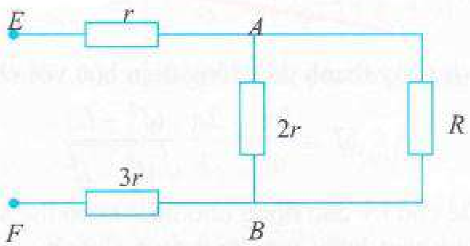
Bài L2/445. *Mạch điện vô hạn là mạch điện tạo thành từ vô số mắt mạch giống nhau, nối liên tiếp theo một quy luật nhất định, sao cho khi thêm vào (hay bớt đi) một mắt mạch thì điện trở của cả đoạn mạch vẫn không thay đổi. Cho mạch điện vô hạn biểu diễn trên các sơ đồ (a) và (b).*



Mạch (a) tạo thành từ vô số các mắt như nhau gồm có ba điện trở r, 2r, 3r; Mạch (b) tạo thành từ vô số các hình vuông, cấu tạo từ các dây dẫn đồng chất, nối nội tiếp trong hình vuông khác, mà điện trở của mỗi cạnh hình vuông là r. Xác định điện trở của mỗi đoạn mạch.

Lời giải. Trong số các bài giải, bạn Chu Minh Thông có lời giải câu b) hay, sáng tạo. Xin giới thiệu lời giải của bạn Chu Minh Thông.

a) Gọi điện trở của đoạn mạch là R. Vì mạch vô hạn nên khi thêm hay bớt một mắt mạch thì điện trở của cả đoạn mạch không thay đổi nên ta có sơ đồ đoạn mạch như sau:



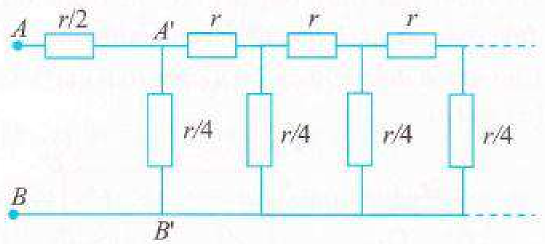
Điện trở của cả đoạn mạch:

$$R = \frac{2rR}{R+2r} + 4r \Leftrightarrow R^2 - 4rR - 8r^2 = 0.$$

Giải phương trình ta thu được: $R = 2r(1+\sqrt{3})$.

b) Do tính đối xứng nên những điểm có cùng điện thế có thể chập lại với nhau. Ta có mạch điện tương đương như sau:

Từ hình vẽ trên ta có thể vẽ lại mạch điện tương đương như sau:



Tương tự mạch a) ta có phương trình:

$$R^2_{A'B'} - rR_{A'B'} - r\frac{r}{4} = 0$$

Nghiệm của phương trình: $R_{A'B'} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)}{2}r$.

Từ đó tính được: $R_{AB} = \dfrac{r}{2} + \dfrac{\dfrac{r}{4}\cdot\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{2}r}{\dfrac{r}{4}+\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{2}r} = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 10 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Chu Minh Thông*, A3-K41, THPT chuyên Phan Bội Châu.

ĐẶNG THANH HẢI

PROBLEMS ...

(*Tiếp theo trang* 17)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/449. Find the integral part of the expression $B = \frac{1}{3} + \frac{5}{7} + \frac{9}{11} + \ldots + \frac{2013}{2015}$.

Problem T10/449. Find all polynomials $f(x)$ with integral coefficients such that $f(n)$ is a divisor of $3^n - 1$ for every positive integer n.

Problem T11/449. Let (x_n) be a sequence satisfying: $\begin{cases} x_0 = 4, x_1 = 34 \\ x_{n+2}.x_n = x_{n+1}^2 + 18.10^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Let $S_n = \sum_{k=0}^{26} x_{n+k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prove that, for every odd natural number n, $S_n \vdots 66$.

Problem T12/449. Given a triangle ABC. The points E and F respectively vary on the sides CA and AB such that $BF = CE$. Let D be the intersection of BE and CF. Let H and K respectively be the orthocenters of DEF and DBC. Prove that, when E and F change, the line HK always passes through a fixed point.

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trên Tạp chí số 448, trang 16, xin được đọc lại đề bài T5/448 như sau:

Cho a, b, c là các số thực *dương* thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)^3} + \frac{b^2+c^2}{bc(b+c)^3} + \frac{c^2+a^2}{ca(c+a)^3} \geq \frac{9}{4}.$$

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

PHÉP CỘNG... *(Tiếp theo trang 15)*

Cuối cùng, giáo sư B có hai cách ngồi, đó là ngồi ở bên phải hoặc bên trái. Do đó, đáp án là 2.2.2 = 8. Những suy luận này dẫn ta đến một quy tắc đếm quan trọng khác.

Quy tắc nhân. *Nếu sự kiện A_1 có thể xảy ra theo a_1 cách khác nhau và sự kiện A_2 có thể xảy ra theo a_2 cách khác nhau,... và sự kiện A_n có thể xảy ra theo a_n cách khác nhau thì tổng số cách để sự kiện A_1 xảy ra rồi đến sự kiện A_2 xảy ra,..., rồi đến sự kiện A_n xảy ra là $a_1a_2...a_n$.*

Ta cũng có thể diễn tả quy tắc nhân bằng ngôn ngữ tập hợp, tức là nếu

$$S=\{(s_1,s_2,...,s_n)/s_i\in S_i, 1\le i\le n\}$$

thì $|S|=|S_1|.|S_2|....|S_n|$.

Thí dụ 5. *Một biển số xe có 3 ký tự đầu là dãy gồm 3 chữ cái trong bảng chữ cái và 3 ký tự sau là dãy gồm 3 con số. Có thể làm ra bao nhiêu biển số xe khác nhau nếu không được dùng số 0 và chữ O trong cùng một biển số?*

Lời giải. Gọi S_1 là tập hợp các biển số xe không có số 0 và S_2 là tập hợp các biển số xe không có chữ O. Nếu $\alpha\beta\gamma-\theta\phi\psi$ là một biển số xe thuộc S_1 thì $\theta, \phi, \psi \neq 0$. Tiếp theo, không có yêu cầu gì đối với α, β, γ nên mỗi α, β, γ có thể nhận 26 giá trị, trong khi mỗi θ, ϕ, ψ nhận được 9 giá trị. Do đó, $|S_1|=26^3.9^3$. Suy luận tương tự, $|S_2|=25^3.10^3$ (vì vai trò của chữ và số được đổi với nhau). Dường như đáp án của bài toán là $|S_1|+|S_2|=26^3.9^3+25^3.10^3$. Tuy nhiên, đây không phải là đáp án chính xác. Nhưng mỗi bước làm dường như rất hợp lý. Vậy sai ở đâu? Câu hỏi mấu chốt hơn là: Làm sao ta biết có sai hay không?

Ta trả lời câu hỏi thứ hai trước. Gọi S là tập hợp mọi biển số xe tạo được theo như yêu cầu đề bài. Mỗi chữ trong dãy 3 chữ cái có 26 lựa chọn và mỗi con số trong dãy 3 con số có 10 lựa chọn. Theo quy tắc nhân, $|S|=26^3.10^3$. Không khó để kiểm tra được: $|S_1|+|S_2|=26^3.9^3+25^3.10^3>26^3.10^3=|S|$.

Rõ ràng $|S_1|+|S_2|$ không phải là câu trả lời ta muốn. Giờ ta phải sửa lỗi sai. Lưu ý rằng có vài chỗ trùng nhau giữa S_1 và S_2, đó là những biển số không có cả số 0 hoặc chữ O. Gọi S_3 là tập hợp các biển số như vậy. Suy ra $S_3=S_1\cap S_2$ Với mỗi chữ cái trong một biển số thuộc S_3, có 25 lựa chọn và với mỗi con số, có 9 lựa chọn. Do đó $|S_3|=25^3.9^3$. Vì mỗi biển số trong S_3 được đếm 2 lần trong S_1 và S_2 nên câu trả lời cuối cùng của bài toán là:

$$|S_1|+|S_2|-|S_3|=26^3.9^3+25^3.10^3-25^3.9^3$$
$$=17047279.$$

Kỹ thuật bao hàm những tập hợp chồng chéo lên nhau và loại trừ những phần được đếm hai lần gọi là **Quy tắc Bao hàm – Loại trừ.**

Thí dụ 6. *[AIME 1996] Trong một giải đấu có 5 đội tham gia, mỗi đội đấu một trận với từng đội còn lại. Mỗi đội có 50% cơ hội chiến thắng bất kỳ trận nào mà nó tham gia (không có trận hòa). Tính xác suất giải đấu không có hoặc một đội không thua trận nào hoặc một đội không thắng trận nào.*

Lời giải. Mỗi đội phải chơi 4 trận. Do đó, có 5.4 trận nếu mỗi trận được đếm hai lần. Vậy 5 đội sẽ chơi tổng cộng $\frac{5.4}{2}=10$ trận. Vì mỗi trận có thể có hai kết quả nên có 2^{10} kết quả cho giải đấu.

Có 5 cách để chọn một đội không thua trận nào. Giả sử đội A thắng tất cả 4 trận mà nó tham gia. Vậy mỗi trận trong 6 trận còn lại có thể có 2 kết quả trong tổng số $2^{10-4}=2^6$ kết quả. Vì chỉ có nhiều nhất một đội không thua trận nào nên có 5.2^6 giải đấu cho ra một đội không thua trận nào. Suy luận tương tự cho ta 5.2^6 trong 2^{10} giải đấu cho ra một đội không thắng trận nào.

Tuy nhiên, hai xác suất này không loại trừ lẫn nhau. Có thể có chính xác một đội không thua trận nào và chính xác một đội không thắng trận nào trong cùng một giải đấu. Có $A_5^2=20$ hoán vị hai đội như vậy. Giả sử đội A không thua trận nào và đội B không thắng trận nào. Có bảy (chứ không phải tám, vì A và B đấu với nhau!) trận trong đó hoặc đội A hoặc đội B hoặc cả hai đội tham gia. Kết quả của 7 trận này đã được xác định. Mỗi trận trong 3 trận còn lại có hai kết quả trong tổng số $2^{10-7}=2^3$ giải đấu. Nói cách khác, $20.2^3=5.2^5$ trong 2^{10} giải đấu có cả đội không thua trận nào và đội không thắng trận nào. Do đó, theo quy tắc Bao hàm – Loại trừ, có: $2^{10}-2.5.2^6+5.2^5=2^5(2^5-5.2^2+5)=2^5.17$ giải đấu không cho kết quả hoặc một đội không thắng trận nào hoặc một đội không thua trận nào. Mọi kết quả có xác suất giống nhau nên xác suất cần tìm là $\frac{17.2^5}{2^{10}}=\frac{17}{32}$.

Thí dụ 7. *Hoa có các hộp sơn gồm 8 màu khác nhau. Cô muốn sơn một bộ bốn hình vuông của một tấm bảng 2 x 2 sao cho các hình vuông cạnh nhau được sơn màu khác nhau. Tìm số phương án sơn màu khác nhau mà Hoa có thể tạo ra. Hai phương án sơn màu được xem là giống nhau nếu có thể thu được phương án này bằng cách xoay phương án kia.*

Lời giải. *Hoa* cần ít nhất 2 và nhiều nhất 4 màu. Có 3 trường hợp như Hình 5.

A	D
B	C

(i)

A	C
B	A

(ii)

A	B
B	A

(iii)

Hình 5.

Trong trường hợp (i), có A_8^4 cách để chọn màu A, B, C và D khác nhau. Mỗi cách sơn màu trong trường hợp này có thể được xoay 90 độ ngược chiều kim đồng hồ 3 lần để có 3 cách sơn màu khác nhau như trong hình 6. Nói cách khác, mỗi cách sơn màu trong trường hợp này bị đếm 4 lần, tính đến cả trường hợp xoay tròn. Vậy có $\frac{A_8^4}{4}=420$ cách sơn màu khác nhau.

A	D
B	C

D	C
A	B

C	B
D	A

B	A
C	D

Hình 6

Trong trường hợp (ii), có A_8^3 cách chọn màu khác nhau. Mỗi cách sơn màu trong trường hợp này có thể được xoay 90 độ ngược chiều kim đồng hồ 3 lần để có 3 cách sơn màu khác nhau như trong hình 7. Nói cách khác, mỗi cách sơn màu trong trường hợp này bị đếm 4 lần, tính đến cả trường hợp xoay tròn. Vậy có $\frac{A_8^3}{4}=84$ cách sơn màu khác nhau.

A	C
B	A

C	A
A	B

A	B
C	A

B	A
A	C

Hình 7

Trong trường hợp (iii), có A_8^2 cách chọn màu khác nhau A và B. Mỗi cách sơn màu trong trường hợp này có thể được xoay 90 độ ngược chiều kim đồng hồ 1 lần để thu được một cách sơn màu khác như trong hình 8. Mỗi cách sơn màu trong trường hợp này bị đếm 2 lần, tính đến cả trường hợp xoay tròn. Vậy có $\frac{A_8^2}{2}=28$ cách sơn màu khác nhau.

A	B
B	A

B	A
A	B

Hình 8

Cuối cùng, ta có 420 + 84 + 28 = 532 cách sơn màu khác nhau.

Ta đã xong chưa? Chưa đâu bạn ạ! Người đọc có thể đã tìm ra một câu trả lời khác. Nhưng trước khi chỉ ra lỗi sai của mình, chúng tôi muốn hỏi xem làm cách nào phát hiện ra lỗi sai có thể có trong khi đếm. Vâng, một cách hiệu quả là áp dụng phương pháp tương tự cho các giá trị ban đầu khác nhau. Trong thí dụ này, số lượng màu đã cho không đóng vai trò quan trọng trong bài giải của chúng tôi. Nếu ban đầu chúng tôi được cho 7 màu thì sao? Vâng, vậy ta sẽ có $\frac{A_7^3}{4}=\frac{105}{2}$ cách sơn màu khác nhau trong trường hợp (ii). Thật ra chúng ta không có 4 cách sơn màu khác nhau trong hình 9. Cách sơn thứ ba tính từ trái sang giống với cách sơn đầu tiên vì các cách phân bố màu B và C được đếm khi chọn màu có thứ tự $\left(A_8^3\right)$. Tương tự, cách sơn màu thứ ba và tư cũng giống nhau khi chọn màu có thứ tự. Vậy, có $\frac{A_8^3}{2}=168$ cách sơn màu khác nhau trong trường hợp (ii). Vậy đáp án chính xác cho *Thí dụ* 7 là 420 + 168 + 28 = 616.

BÀI TẬP

1. Tìm số lượng số nguyên dương có 2 chữ số chia hết cho cả hai chữ số của nó.

2. [AIME 2000] Có 2 hộp, mỗi hộp chứa cả bi đen và trắng, và tổng số bi trong hai hộp là 25. Lấy ngẫu nhiên một bi từ mỗi hộp. Xác suất để cả hai bi đều là bi đen là $\frac{27}{50}$. Xác suất để cả hai bi đều là bi trắng là bao nhiêu?

3. Có 10 nữ và 4 nam trong lớp tổ hợp của thầy *Dũng*. Có bao nhiêu cách để xếp những học sinh này ngồi quanh một bàn tròn sao cho không có học sinh nam nào ngồi cạnh nhau?

4. Cho n là một số nguyên lớn hơn 4, và cho $P_1P_2..P_n$ là các đa giác lồi n cạnh. *Bình* muốn vẽ $n-3$ đường chéo phân vùng không gian bên trong đa giác thành $n-2$ tam giác và các đường chéo chỉ giao nhau tại đỉnh của đa giác. Ngoài ra, anh muốn mỗi tam giác có ít nhất 1 cạnh chung với đa giác. *Bình* có thể chia như vậy theo bao nhiêu cách?

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2013-2014

LTS. Cuộc thi giải toán và vật lí năm học 2013-2014 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2013 đến tháng 8 năm 2014. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu toán và vật lí cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài rất sôi nổi. **Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Nghệ An, Hà Tĩnh, Thanh Hoá, Quảng Ngãi** là những tỉnh có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải cao hơn cả. Hai giải Xuất sắc về môn Toán thuộc về bạn *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10 Toán, PTNK-ĐHQG TP. **Hồ Chí Minh** và *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**. Giải Nhất môn Vật lí thuộc về bạn *Nguyễn Mạnh Dân*, 10A3 Lí, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2014-2015. Sau đây là danh sách **112** bạn đoạt giải Toán và **16** bạn đoạt giải Vật lí năm học 2013-2014.

MÔN TOÁN

☆ Giải Xuất sắc (2 giải)

1. *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10 Toán, PTNK - ĐHQG **TP. Hồ Chí Minh**.

2. *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Toán 1, THPT chuyên **Hưng Yên**.

☆ Giải Nhất (3 giải)

1. *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An, **Quảng Nam**.

2. *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.

3. *Nguyễn Văn Thể*, 10 Toán 1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**.

☆ Giải Nhì (19 giải)

1. *Trần Lê Hiệp*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

2. *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn, **Bình Định**.

3. *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

4. *Vũ Thi Thi*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

5. *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh, **Hà Nội**.

6. *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

7. *Nguyễn Hữu Huy*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

8. *Phạm Quang Toàn*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

9. *Hồ Xuân Hùng*, 10T1, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**.

10. *Trần Hậu Mạnh Cường*, 11T1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**.

11. *Nguyễn Long Duy*, 11 Toán 1, THPT chuyên **Hưng Yên**.

12. *Trần Bá Trung*, 11 Toán 1, THPT chuyên **Hưng Yên**.

13. *Lê Anh Tuấn*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hoà, TP. Hà Nam, **Hà Nam**.

14. *Vũ Tuấn Anh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

15. *Chu Thị Thu Hiền*, 12T THPT chuyên **Long An**.

16. *Lê Minh Phương*, 12 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**.

17. *Lê Thế Sơn*, 12A8, THPT Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**.

18. *Trần Nguyên Try*, 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Pleiku, **Gia Lai**.

19. *Lê Đức Việt*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**.

☆ Giải Ba (23 giải)

1. *Nguyễn Đình Tuấn*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

2. *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hóa**.

3. *Nguyễn Dương Hoàng Anh*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.

4. *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

5. *Nguyễn Lê Hoàng Duyên*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

6. *Nguyễn Phương Duyên*, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang, **Hà Tĩnh**.

7. *Phạm Thiên Trang*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

8. *Phạm Thị Vy Vy*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**.

9. *Nguyễn Thị Hằng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

10. *Nguyễn Hữu Hoàn*, 9B, THCS Trần Phú, TT. Nông Cống, **Thanh Hóa**.

11. *Nguyễn Thị Thêm*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**

12. *Lê Văn Trường Nhật*, 10T1, THPT chuyên **Hà Tĩnh.**

13. *Lê Hùng Cường*, 11A7, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

14. *Võ Thế Duy*, 11A1, THPT Số 1 TT. Phù Mỹ, **Bình Định**.

15. *Bạch Xuân Đạo*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**.

16. *Trần Mạnh Hùng*, 11TA, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**.

17. *Đặng Quang Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**.

18. *Mai Tiến Luật*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**.

19. *Trần Duy Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**

20. *Đoàn Phú Thiện*, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, **Phú Yên**.

21. *Nguyễn Minh Trí*, 11T1, THPT chuyên **Long An.**

22. *Trịnh Ngọc Tú*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam.**

23. *Vũ Văn Quý*, 12A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, TP. Pleiku, **Gia Lai.**

☆ Giải Khuyến khích (65 giải)

1. *Ngô Ngọc Huấn*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

2. *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.

3. *Ngô Thị Ngọc Ánh*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.

4. *Nguyễn Cao Bách*, 7B1, THCS Nguyễn Nghiêm, TP. Quảng Ngãi, **Quảng Ngãi**.

5. *Kiều Xuân Bách*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**.

6. *Trần Cả Bảo*, 7A1, THCS Phước Lộc, Tuy Phước, **Bình Định**.

7. *Nguyễn Thùy Dung*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

8. *Trần Minh Hiếu*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ.**

9. *Nguyễn Khải Hưng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

10. *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**.

11. *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

12. *Nguyễn Văn Mạnh*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

13. *Võ Phương Tâm*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An.**

14. *Nguyễn Văn Toàn*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

15. *Nguyễn Thành Vinh*, 7A1, THCS và THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, **Vĩnh Phúc.**

16. *Nguyễn Đại Dương*, 8B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

17. *Nguyễn Tiến Long*, 8A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ.**

18. *Dương Xuân Long*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

19. *Chu Mai Anh*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**

20. *Hoàng Thị Minh Anh*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

21. *Lê Phúc Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh, **Hà Nội.**

22. *Cao Hữu Đạt*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An.**

23. *Nguyễn Thị Thanh Hương*, 9A, THCS Yên Phong **Bắc Ninh**.

24. *Vũ Thuỳ Linh*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ.**

25. *Ngô Nhật Long*, 9A2, THCS Trần Phú, Phủ Lý, **Hà Nam**.

26. *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm, **Hà Nam**.

27. *Tô Minh Ngọc*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**

28. *Nguyễn Thuý Quỳnh*, 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ.**

29. *Hoàng Huy Thông*, 9G, THCS Phan Chu Trinh, TP. Buôn Ma Thuột, **Đăk Lăk**.

30. *Trần Thanh Bình*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình, **Quảng Bình**.

31. *Nguyễn Hồng Đăng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định, **Nam Định**.

32. *Nguyễn Doãn Hiếu*, 10T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương, **Nghệ An.**

33. *Lâm Bửu Hưng*, 10A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng**.

34. *Nguyễn Tuấn Hưng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định, **Nam Định**.

35. *Nguyễn Trần Lê Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Ninh Thuận**.

36. *Nguyễn Hồng Ngọc*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc.**

37. *Nguyễn Minh Ngọc*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình, **Quảng Bình**.

38. *Trương Minh Nhật Quang*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, **Bình Định.**

39. *Vũ Hồng Quân*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**.

40. *Vương Hoài Thanh*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng**.

41. *Nguyễn Thị Trang*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang, TP. Bắc Giang, **Bắc Giang**.

42. *Nguyễn Văn An*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.

43. *Nguyễn Văn Cao*, 11A1, THPT Sáng Sơn, Sông Lô, **Vĩnh Phúc**.

44. *Trương Hoàng Duy*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu, **Đồng Tháp**.

45. *Phạm Trung Dũng*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh, **Nghệ An.**

46. *Nguyễn Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

47. *Nguyễn Thị Việt Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

48. *Lê Văn Hải*, 11A7, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

49. *Nguyễn Văn Hải*, 11B, THPT Tây Sơn, **Bình Định.**

50. *Phạm Minh Hậu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Long An, TP. Long An, **Long An.**

51. *Tăng Trung Hiếu*, 11A1, THPT Thái Hoà, TX. Thái Hoà, **Nghệ An.**

52. *Nguyễn Thị Phương Hoài*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**.

53. *Nguyễn Hữu Khoẻ*, 11 Toán 2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Quận Hà Đông, **Hà Nội**.

54. *Nguyễn Duy Linh*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre.**

55. *Đinh Chung Mừng*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, TP.Hòa Bình, **Hòa Bình**.

56. *Từ Nhật Quang*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre.**

57. *Ngô Hoàng Thanh Quang*, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình, **Quảng Bình**.

58. *Đậu Hồng Quân*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**

59. *Nguyễn Minh Thành*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho, **Tiền Giang**.

60. *Trần Trọng Tiến*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị.**

61. *Trần Đức Anh*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị.**

62. *Phạm Tuấn Huy*, 12 Toán, PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, **TP. Hồ Chí Minh**.

63. *Lưu Giang Nam*, 12 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP. Cà Mau, **Cà Mau**.

64. *Nguyễn Như Thiệp*, 12A1, THPT Trần Quốc Toản, Eakar, **Đăk Lăk.**

65. *Nguyễn Văn Tuyến*, 12A11K25, THPT Đồng Hỷ, TP. Thái Nguyên, **Thái Nguyên**.

MÔN VẬT LÍ

☆ Giải Nhất (1 giải)

Nguyễn Mạnh Dân, 10 A3 Lý, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.

☆ Giải Nhì (6 giải)

1. *Nguyễn Mạnh Dũng*, 10 A3 Lý, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.

2. *Phan Quốc Vương*, 11A1, THPT Diễn Châu 3, **Nghệ An.**

3. *Bùi Vũ Hoàn*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi.**

4. *Vũ Văn Dũng*, 11 Toán 2, THPT chuyên **Thái Bình.**

5. *Nguyễn Văn Hùng*, 11B, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước.**

6. *Lê Xuân Bảo*, 12A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**

☆ Giải Ba (9 giải)

1. *Vũ Đức Thắng*, 10 A3 Lý, THPT chuyên **Vĩnh Phúc.**

2. *Nguyễn Viết Sang*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Du, **Đăk Lăk.**

3. *Tăng Trung Hiếu*, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, **Nghệ An**.

4. *Chu Minh Thông*, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**

5. *Nguyễn Thị Oanh*, 11C1, THPT Hoằng Hóa IV, **Thanh Hóa.**

6. *Nguyễn Viết Tuấn*, 12A5, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.

7. *Phạm Ngọc Bách*, 12A4, THPT Tĩnh Gia 2, **Thanh Hóa**.

8. *Nguyễn Hoài Nam*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên.**

9. *Phạm Thanh Bình*, 12A1, THPT Lương Phú, Phú Bình, **Thái Nguyên.**

Các bạn đoạt giải nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 449 (11.2014)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1. *Thầy giáo Nguyễn Văn Tín – Giáo viên Toán trường THCS Lương Yên, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội – nhiều năm liền là giáo viên dạy giỏi.*

Trưởng ban biên tập: ThS. NGUYỄN ANH QUÂN
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: KHÁNH LINH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI
THĂM VÀ TẶNG QUÀ CHO LÀNG TRẺ EM SOS ĐIỆN BIÊN PHỦ

Làng trẻ SOS Điện Biên Phủ có địa chỉ tại đội 19 xã Thanh Hưng, Huyện Điện Biên, tỉnh Điện Biên được khởi công xây dựng từ ngày 15.11.2008 và hoàn thành vào ngày 2.9.2009. Hiện làng SOS có 14 gia đình có khả năng chăm sóc và nuôi dưỡng 140 trẻ em mồ côi, không nơi nương tựa. Đến tháng 6.2014, tổng số trẻ trong làng đang được nuôi dưỡng là 134 trẻ. Ngày 2.10.2014, ông *Hoàng Lê Bách*, Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam kiêm Giám đốc NXBGD tại Hà Nội; ông *Đinh Khắc Cao*, giám đốc Công ty CP Sách và Thiết bị miền Bắc và lãnh đạo Công ty CP Sách và Thiết bị Trường học Điện Biên, đã đến thăm và tặng sách tham khảo, sách kỹ năng sống, vở viết, đồ dùng học tập cho các cháu làng trẻ SOS Điện Biên Phủ. Trị giá quà tặng mỗi đơn vị là 10 triệu đồng. Đây là một trong những truyền thống tốt đẹp của NXBGD tại Hà Nội và các đơn vị thành viên của NXBGD Việt Nam. Những món quà tuy chưa lớn về vật chất nhưng rất có ý nghĩa, thể hiện sự quan tâm tới các cháu mồ côi, giúp các cháu có thêm tài liệu học tập. Trong chuyến thăm, ông *Hoàng Lê Bách* và lãnh đạo hai đơn vị đã chia sẻ những khó khăn với tập thể cán bộ, nhân viên cùng các cháu làng trẻ SOS, mong muốn các cháu đoàn kết, yêu thương, giúp đỡ nhau, và học giỏi để xứng đáng là cháu ngoan Bác Hồ, những chủ nhân tương lai của đất nước.

Ông Hoàng Lê Bách – Phó Tổng giám đốc NXBGD Việt Nam kiêm Giám đốc NXBGD tại Hà Nội phát biểu tại chuyến thăm.

Tặng quà cho các cháu

GD DEIDCO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TI CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC ĐÀ NẴNG
DANANG EDUCATION INVESTMENT AND DEVELOPMENT JOINT - STOCK COMPANY
Địa chỉ : 145 Lê Lợi, Q. Hải Châu, TP. Đà Nẵng
Điện thoại : (0511) 3889952 - 3889954 - Fax : (0511) 3889953 - 3889957

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT11M4
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2014
Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng