thầy Nhi

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

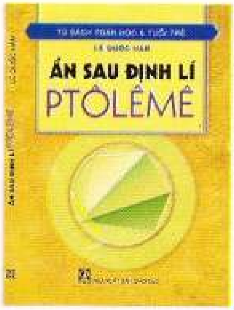
8 2006 Số 350

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Sáu thành viên Đoàn Việt Nam thi Toán Quốc tế đều đoạt Huy chương

SÁCH MỚI 2006

ẨN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ



Sách tập hợp các bài báo, bài toán đã đăng trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (1970 - 2005). Một nửa nội dung cuốn sách trình bày các vấn đề của toán sơ cấp, có ích cho các bạn trước các kì thi học sinh giỏi và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng. Có những phần kiến thức tác giả bổ sung một số vấn đề mà SGK chưa đề cập. Phần còn lại được viết ra nhằm giúp học sinh tập dượt tư duy sáng tạo, mở ra những triển vọng để độc giả có thể đi xa hơn trong công việc sáng tạo toán học, tạo được nguồn hứng khởi trong việc làm toán.

Các bạn học sinh yêu toán, các sinh viên khoa Toán của các trường Đại học và Cao đẳng và các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh đều có thể tìm thấy ở đây những điều bổ ích.

Sách dày 164 trang, khổ 17x24, giá bán 21.500 đồng, có mặt trên thị trường vào đầu năm học mới 2006 - 2007.

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí đang phát hành Quyển 2 cuốn Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ thuộc Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ. Từ các bài đã in trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ những năm gần đây, sách tập hợp lại các bài viết theo ba chuyên đề nhằm phục vụ độc giả làm tài liệu tham khảo bổ ích.

QUYỂN 2

Chuyên đề thứ nhất : **Toán THCS - Những tìm tòi sáng tạo**

Chuyên đề thứ hai : **Toán THCS - Những đề thi**

Chuyên đề thứ ba : **Những bài toán - Lời giải sao cho đúng?**

Sách dày 252 trang, khổ 19 x 26,5 cm, giá bán lẻ là 30000 đồng. Đề nghị các đơn vị mua nhiều gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về theo địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ : 187B Giảng Võ, Hà Nội

Địa chỉ liên hệ để biết các thông tin chi tiết:

ĐT/FAX: 04.5144272; Email: toanhoctt@yahoo.com

Bạn muốn có cuốn đóng tập cả năm 2006?

Đây là cách lưu giữ và sử dụng tạp chí THTT có hiệuquả. Các thầy cô giáo sẽ có tài liệu tham khảo sử dụng cho nhiều năm, tránh thất lạc. Các thư viện sẽ có tài liệu giúp các bạn đọc tra cứu và đọc THTT có hệ thống.

Cuốn đóng tập bao gồm cả 12 số tạp chí của năm 2006 có bìa cứng, giá bán 65000 đồng sẽ có mặt trên thị trường vào 1.2007. Tòa soạn cần biết sơ bộ số lượng các độc giả có nhu cầu để chuẩn bị. Bạn nên đăng kí ngay với tòa soạn nếu muốn có cuốn sách này. Chi tiết xin liên hệ:

HOÀNG TRỌNG HẢO - TẠP CHÍ THTT - 187B Giảng Võ, Hà Nội - ĐT, FAX: (04)5144272

Trân trọng cảm ơn!

TRUNG HỌC CƠ SỞ

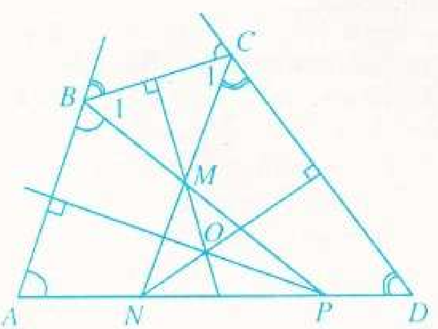
NẾU CHƯA BIẾT VỀ đường tròn ...

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Khi đã được học các kiến thức về đường tròn (góc nội tiếp; tam giác nội tiếp, ngoại tiếp; tứ giác nội tiếp, ngoại tiếp; ...) thì việc giải một lớp các bài toán trở nên dễ dàng. Còn nếu chưa học về đường tròn thì các bài toán như vậy có giải quyết được không? Chúng ta hãy xét điều đó qua các kết quả sau.

✪ **Bài toán 1.** *Chứng minh rằng một tứ giác lồi có hai góc đối bù nhau khi và chỉ khi tồn tại một điểm cách đều bốn đỉnh của tứ giác. (Đó chính là tứ giác nội tiếp).*

Chứng minh. a) Giả sử tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$. Không mất tính tổng quát giả sử $\widehat{B}\geq\widehat{A}$. Nếu $\widehat{B}>\widehat{A}$ thì $\widehat{C}>\widehat{D}$, ta lấy điểm M sao cho $\widehat{MBA}=\widehat{A}$, $\widehat{MCD}=\widehat{D}$, các tia BM và CM cắt AD lần lượt tại P và N, suy ra $\widehat{B}_1=\widehat{C}_1$ nên tam giác MBC cân tại M (h. 1).



Hình 1

Từ các tam giác cân BMC, ABP, CDN suy ra các trung trực của AB, BC, CD chính là các phân giác của tam giác MNP nên chúng đồng quy tại O và rõ ràng $OA=OB=OC=OD$. (Trường hợp điểm M trùng với N và P thì có $MA=MB=MC=MD$). Nếu $\widehat{B}=\widehat{A}$ thì $\widehat{C}=\widehat{D}$, tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, kết luận hiển nhiên đúng.

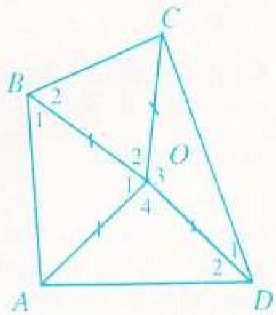
b) Ngược lại, Nếu tứ giác $ABCD$ có điểm O thỏa mãn $OA=OB=OC=OD$. Giả sử O nằm trong tứ giác (h. 2)(với các trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Khi đó ta có

$$\widehat{B_1}=90^\circ-\frac{\widehat{O_1}}{2};$$

$$\widehat{B_2}=90^\circ-\frac{\widehat{O_2}}{2};$$

$$\widehat{D_1}=90^\circ-\frac{\widehat{O_3}}{2};$$

$$\widehat{D_2}=90^\circ-\frac{\widehat{O_4}}{2}$$



Hình 2

nên $\widehat{B}+\widehat{D}=360^\circ-\frac{1}{2}(\widehat{O}_1+\widehat{O}_2+\widehat{O}_3+\widehat{O}_4)$

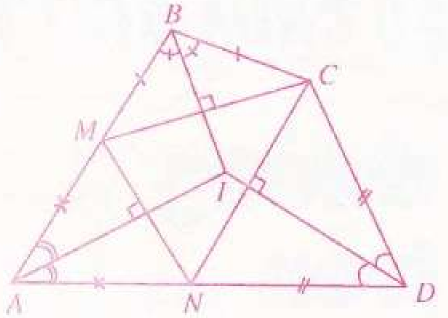
$$=360^\circ-180^\circ=180^\circ=\widehat{A}+\widehat{C}.\square$$

✪ **Bài toán 2.** *Chứng minh rằng một tứ giác lồi có tổng hai cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi tồn tại một điểm cách đều bốn cạnh của tứ giác. (Đó chính là tứ giác ngoại tiếp).*

Chứng minh. a) Giả sử tứ giác $ABCD$ có $AB+CD=AD+BC$ (h. 3).

Không mất tính tổng quát, giả sử $AB\geq BC$.

Nếu $AB>BC$ thì $AD>CD$, lấy M trên cạnh AB sao cho $BM=BC$, N thuộc cạnh AD sao



Hình 3

cho $DN = DC$, suy ra $AM = AN$. Từ các tam giác cân AMN, BMC, DCN suy ra phân giác của các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ là các trung trực của tam giác CMN nên chúng đồng quy tại I. Rõ ràng I cách đều bốn cạnh của tứ giác.

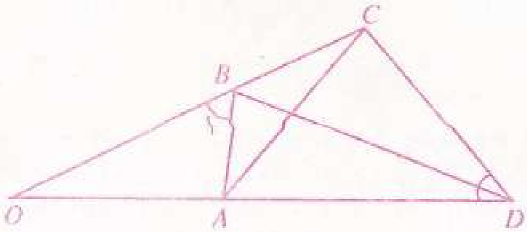
Trường hợp $AB = BC$, $AD = CD$ thì I là giao điểm của BD và phân giác góc $\widehat{A}$.

b) Ngược lại, nếu tứ giác $ABCD$ có điểm I cách đều bốn cạnh của tứ giác thì dễ thấy I là giao điểm bốn đường phân giác của các góc trong tứ giác. Do đó việc chứng minh $AB + CD = AD + BC$ hoàn toàn đơn giản. (các bạn tự vẽ hình và kiểm tra lại điều đó).❒

✪ **Bài toán 3.** *Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng tứ giác có hai góc đối bù nhau khi và chỉ khi* $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Chứng minh. Trường hợp $BC \parallel AD$ dễ thấy hai điều kiện trên đều tương đương với tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, nên điều cần chứng minh là hiển nhiên.

Giả sử hai đường thẳng BC và AD cắt nhau tại O sao cho B nằm giữa O và C (h. 4).



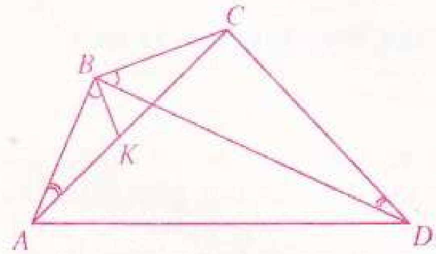
Hình 4

Ta có $\widehat{ABC}$ bù với $\widehat{ADC} \Leftrightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{ADC}$
$\Leftrightarrow \Delta OAB \backsim \Delta OCD$ (g.g.) $\Leftrightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$
$\Leftrightarrow \Delta OAC \backsim \Delta OBD \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. ❒

* *Chú ý.* Từ $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ ta dễ dàng suy ra được: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$.

✪ **Bài toán 4.** (Định lí Ptôlêmê) *Chứng minh rằng nếu tứ giác ABCD có hai góc đối bù nhau, thì AB.CD + AD.BC = AC.BD.*

Chứng minh. (h. 5)



Hình 5

Theo bài toán 3 ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, $\widehat{BCA} = \widehat{BDA}$.

Trên AC lấy K sao cho $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$

$\Rightarrow \Delta ABK \backsim \Delta DBC$ (g.g.) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AK}{CD}$

$\Rightarrow AB.CD = BD.AK$ (1)

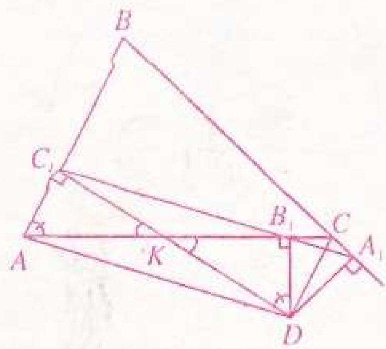
Cũng có $\Delta ABD \backsim \Delta KBC$ (g.g.)

$\Rightarrow AD.BC = BD.KC$ (2)

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta được điều phải chứng minh. ❒

✪ **Bài toán 5.** *Cho tứ giác ABCD có hai góc đối bù nhau. Hạ* DA_1, DB_1, DC_1 *theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba điểm* A_1, B_1, C_1 *thẳng hàng. (Đường thẳng Simson).*

Chứng minh. Nếu C_1 trùng với A và A_1 trùng với C thì kết luận là hiển nhiên. Nếu C_1 thuộc đoạn AB và các điểm được bố trí như hình 6



Hình 6

(Xem tiếp trang 11)

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

năm học 2006-2007 MÔN TOÁN NĂNG KHIẾU

(Dành cho các lớp Toán, Tin)
(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 1 \\ 2y^2 + xy = 1. \end{cases}$$

2) Giải bất phương trình

$$\sqrt{3x - 5x^2} \le 5x - 2.$$

3) Cho x, y là các số thực thoả mãn điều kiện $x + y = 2$. Chứng minh rằng $xy(x^2 + y^2) \le 2$.

Bài 2. Cho phương trình

$$(m+3)x^2 - 2(m^2 + 3m)x + m^3 + 12 = 0 \quad (1)$$

trong đó m là tham số.

1) Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

2) Kí hiệu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho $x_1^2 + x_2^2$ là một số nguyên.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC. P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ P đến các cạnh BC, CA, AB tương ứng.

1) Biết rằng $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Hãy tính diện tích tam giác ABC.

2) Tìm quỹ tích những điểm P trong tam giác sao cho $x + y = z$. Từ đó suy ra tập hợp những điểm P trong tam giác sao cho x, y, z lập thành ba cạnh của một tam giác.

Bài 4. Cho đường tròn (C) tâm O, AB là một dây cung của (C) không đi qua O và I là trung điểm của AB. Một đường thẳng thay đổi qua A cắt đường tròn (C_1) tâm O bán kính OI tại P và Q. Chứng minh rằng tích $AP.AQ$ không đổi và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ đi qua một điểm cố định khác B.

Bài 5. 1) Trong một giải bóng đá, có 4 đội thi đấu vòng tròn một lượt (trong một trận, đội thắng được 3 điểm, đội hoà được 1 điểm và đội thua được 0 điểm). Khi kết thúc giải, người ta thấy có 3 đội đạt được tổng số điểm lần lượt là 6 điểm, 5 điểm và 1 điểm. Hãy cho biết đội còn lại của giải có tổng số điểm là bao nhiêu và giải thích tại sao ?

2) Cho 13 số thực thoả mãn điều kiện: Tổng của 6 số bất kì trong chúng nhỏ hơn tổng của 7 số còn lại. Chứng minh rằng tất cả các số đã cho đều dương.

BÌNH LUẬN... *(tiếp trang 5)*

Lưu ý. Với phương pháp giải như trên, ta có bài toán khái quát hóa như sau:

Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} + |y - b|,$$

trong đó $a \ge 0$, $b \ge \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ là các hằng số.

Đáp số: $\min A = b + a\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}.$

BÌNH LUẬN về đề thi đại học

NGUYỄN ANH DŨNG - ĐẶNG THANH HẢI

LTS. Ở chuyên mục này chúng tôi giới thiệu bài viết của hai tác giả Nguyễn Anh Dũng, Đặng Thanh Hải với nội dung: Sử dụng phương pháp hàm số và phương pháp bất đẳng thức để giải một số bài toán trong kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng năm 2006 và những năm gần đây. Xin giới thiệu cùng bạn đọc.

I. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Trong phần này chúng tôi sử dụng phương pháp hàm số (HS) tức là sử dụng các tính chất của hàm số để khảo sát số nghiệm của phương trình (PT), hệ PT và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một hàm số. Hai dạng toán này đã xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học (TSĐH), Cao đẳng trong những năm gần đây.

Câu IV.2 ***(Khối D)*** *Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) & (1) \\ y - x = a & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x > -1$, $y > -1$.

Rút y từ PT (2) thay vào PT(1), ta được PT

$$f(x) = e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x) = 0$$

$$f'(x) = e^x.(e^a - 1) + \frac{a}{(1+x)(1+a+x)} > 0 \text{ khi } a > 0$$

và $x > -1$.

Vậy $f(x)$ là HS liên tục, đồng biến trong $(-1; +\infty)$. Mặt khác

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty \;;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

nên PT $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trong $(-1; +\infty)$.

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm duy nhất với mọi $a > 0$.

Lưu ý. Học sinh dễ mắc sai lầm khi thấy HS đồng biến đã kết luận PT $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất ! Ta chỉ có thể kết luận PT có nghiệm duy nhất khi HS đơn điệu, liên tục và trong tập giá trị của nó có cả các giá trị âm và dương.

Bài luyện tập 1. (Đề TSĐH khối D, 2004). Chứng minh rằng PT sau có đúng một nghiệm $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$.

Bài luyện tập 2. (Đề dự bị TSĐH 2004). Chứng minh PT $x^{x+1} = (x+1)^x$ có một nghiệm dương duy nhất.

Câu IV.2 ***(Khối B)*** *Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|.$$

Lời giải. Trên mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, xét các điểm $M(1-x;\, y)$, $N(1+x;\, y)$. Ta có $OM + ON \ge MN$, suy ra

$$\sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \ge \sqrt{4+4y^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Ta được $A \ge 2\sqrt{1+y^2} + |y-2|$.

Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + |y-2|$.

Với $y \ge 2$, có $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + y - 2$ là HS đồng biến. Với $y < 2$, có

$$f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y \;;\quad f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1.$$

Giải PT $f'(y) = 0$, ta được $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Từ bảng biến thiên hàm số, ta có

$\min A = 2+\sqrt{3}$ khi $(x; y) = \left(0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Lưu ý. Khi tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất mà biểu thức chỉ phụ thuộc một biến số thực, ta có thể sử dụng công cụ đạo hàm, khảo sát sự biến thiên để từ đó tìm ra tập giá trị và các giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số.

Bài luyện tập 3 (Đề dự bị TSĐH 2004). Cho hàm số $f(x)=e^x - \sin x + \dfrac{x^2}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số và chứng minh rằng phương trình $f(x) = 3$ có đúng hai nghiệm.

Bài luyện tập 4 (Đề dự bị TSĐH 2004). Gọi $(x ; y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - my = 2-4m \\ mx + y = 3m+1 \end{cases} \quad \text{(với } m \text{ là tham số).}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 - 2x$, khi m thay đổi.

II. PHƯƠNG PHÁP BẤT ĐẲNG THỨC

Bất đẳng thức (BĐT) có nhiều ứng dụng để giải các dạng bài tập khác nhau. Nội dung của phương pháp là đánh giá BĐT. Tìm điều kiện xảy ra dấu bằng, từ đó tìm được lời giải cho bài toán.

Câu II.2. (***Khối A***). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy} = 3 & (1) \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải. ĐK: $xy \ge 0$; $x+1 \ge 0$; $y+1 \ge 0$ $\Rightarrow xy \ge 0; x \ge -1; y \ge -1$.

Từ (1) có $x + y = 3 + \sqrt{xy} > 0$ suy ra $x \ge 0; y \ge 0$.

Từ (1) áp dụng BĐT Cauchy ta có

$x + y = 3+\sqrt{xy} \le 3+\dfrac{1}{2}(x+y) \Rightarrow x + y \le 6$ (3)

Từ (2) áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có

$4 = 1.\sqrt{x+1} + 1.\sqrt{y+1} \le \sqrt{1^2+1^2}\,.\,\sqrt{(x+1)+(y+1)}$

$\Rightarrow x + y \ge 6$ (4)

Từ (3) và (4) có $x + y = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{y+1} \\ x+y = 3+\sqrt{xy} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = 3$.

Lưu ý. Với phương pháp giải như trên, (Câu II.2) có thể khái quát theo các hướng sau:

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy} = a \\ \sqrt{x+b} + \sqrt{y+b} = c \end{cases}$$

trong đó $a \ge 0$; $c \ge 0$; $b = \dfrac{c^2}{4} - a$ là các hằng số.

2) Tìm nghiệm không âm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n - \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = a \\ \sqrt{x_1+b} + \sqrt{x_2+b} + \ldots + \sqrt{x_n+b} = c \end{cases} \quad (n \ge 2, n \in \mathbb{N}^*)$$

trong đó $a \ge 0$, $c \ge 0$, $b = \dfrac{c^2}{n^2} - \dfrac{a}{n-1}$ là các hằng số.

Câu IV.2. (***Khối B***). (Xem phần I)

Lời giải. Áp dụng BĐT Bunhiacovski

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1) + \frac{1}{2}y\right| \le \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \text{ và}$$

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x) + \frac{1}{2}y\right| \le \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\sqrt{(1-x)^2+y^2} = \sqrt{(1-x)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow A \ge \left|\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1) + \frac{1}{2}y\right| + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x) + \frac{1}{2}y\right| + |2-y|$$

$$\ge \left|\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1) + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x) + \frac{1}{2}y + 2 - y\right|$$

$$= 2+\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x; y) = \left(0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(Xem tiếp trang 3)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

VỀ SÁCH GIÁO KHOA HÌNH HỌC 10 nâng cao

VĂN NHƯ CƯƠNG
(*Chủ biên*)

❶ Nội dung chương trình Hình học lớp 10 nâng cao gồm có :

a) *Vectơ*

1. *Các định nghĩa.* - Định nghĩa vectơ - Độ dài vectơ - Các vectơ cùng phương, cùng hướng - Hai vectơ bằng nhau - Vectơ không.

2. *Tổng và hiệu hai vectơ*

Tổng hai vectơ, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, các tính chất - Vectơ đối - Hiệu hai vectơ.

3. *Tích vectơ với một số.* - Định nghĩa tích vectơ với một số - Các tính chất của tích vectơ với một số - Trung điểm của đoạn thẳng - Trọng tâm cuả tam giác - Điều kiện của hai vectơ cùng phương - Điều kiện để ba điểm thẳng hàng - Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

4. *Trục toạ độ.* - Định nghĩa trục toạ độ - Toạ độ của điểm trên trục toạ độ - Độ dài đại số của một vectơ trên một trục.

5. *Hệ trục toạ độ.* - Toạ độ của vectơ - Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ - Toạ độ của điểm - Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm tam giác.

b) *Tích vô hướng của hai vectơ và ứng dụng*

1. *Tích vô hướng của hai vectơ.* - Giá trị lượng giác của một góc bất kì - Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt - Góc giữa hai vectơ - Tích vô hướng của hai vectơ -Tính chất của tích vô hướng - Biểu thức toạ độ của tích vô hướng - Độ dài của vectơ và khoảng cách giữa hai điểm.

2. *Các hệ thức lượng trong tam giác.* - Định lí cosin. Định lí sin - Độ dài đường trung tuyến của tam giác - Diện tích tam giác - Giải tam giác.

c) *Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng*

1. *Phương trình đường thẳng.* - Vectơ pháp tuyến và phương trình tổng quát của đường thẳng - Vectơ chỉ phương và phương trình tham số của đường thẳng - Vị trí tương đối của hai đường thẳng - Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng - Góc giữa hai đường thẳng.

2. *Phương trình đường tròn.* - Phương trình đường tròn với tâm cho trước và bán kính cho biết - Nhận dạng phương trình đường tròn - Phương trình tiếp tuyến của đường tròn.

3. *Elip.*

- Định nghĩa elip - Phương trình chính tắc của elip - Hình dạng của elíp .

4. *Hypebol.*

- Định nghĩa hypebol - Phương trình chính tắc của hypebol - Hình dạng của hypebol.

5. *Parabol.* - Định nghĩa parabol - Phương trình chính tắc của parabol- Hình dạng của parabol.

6. *Đường chuẩn của ba đường conic.*

❷ Theo chương trình chính thức nêu trên ta có mấy nhận xét sau đây :

a) Tuy chương trình gồm ba phần (trong SGK chia thành ba chương) nhưng nội dung chỉ tập trung vào hai vấn đề : vectơ và phương pháp toạ độ trong mặt phẳng

b) Trong nội dung về vectơ có trình bày các phép toán trên vectơ kể cả tích vô hướng, và vận dụng tích vô hướng để chứng minh các hệ thức lượng trong tam giác. Việc giải tam giác không phải là một điểm nhấn lớn mà chỉ là một số ứng dụng của các hệ thức lượng trong tam giác. Các hệ thức lượng trong đường tròn không được đề cập trong lí thuyết.

Nhìn chung về phần vectơ so với chương trình cũ không khác biệt bao nhiêu, có giảm tải không đáng kể về mặt lí thuyết , tuy nhiên về bài tập thì mức độ khó được giảm đi khá nhiều

Về nội dung của phương pháp toạ độ thì có những thay đổi lớn. Phần này trước kia đặt ở chương trình *lớp 12*, nay được đưa vào *lớp 10* với một mức độ giảm nhẹ đi rất nhiều. Chương trình chủ yếu nói về phương trình đường thẳng và phương trình đường tròn. Về các đường elip, hypebol, parabol chương trình chỉ giới hạn trong các nội dung sau : định nghĩa hình học, phương trình chính tắc và mô tả hình dạng của các đường đó . Có đề cập đến tâm sai, đường chuẩn để đi đến định nghĩa tổng quát về đường conic. Như vậy một số nội dung khá hay như : tiếp tuyến của các đường conic, tính chất quang học của chúng ... đều không được đề cập đến.

c) Nội dung về các phép dời hình và các phép đồng dạng không còn nằm trong chương trình lớp 10 mà được chuyển vào chương 1 của lớp 11.

❸ Một vấn đề lớn trong việc thay đổi chương trình và viết lại SGK lần này là vấn đề về phương pháp giảng dạy. Truyền thống dạy và học theo kiểu "thầy giảng trò ghi, thầy đọc trò chép" đang bị phê phán nhiều. Phương pháp lạc hậu đó đẩy học sinh vào thế thụ động, làm cho họ có thói quen học vẹt, học tủ, học lệch, học để đi thi... Tinh thần của phương pháp giảng dạy mới là cố gắng phát huy tính tích cực, chủ động, sáng tạo của học sinh, chú ý đến sự hoạt động tích cực của học sinh trên lớp, học sinh được trực tiếp tham gia vào bài giảng của thầy, dưới sự hướng dẫn của thầy, họ có thể phát hiện ra vấn đề và suy nghĩ để tìm cách giải quyết vấn đề.

SGK có nhiệm vụ góp phần vào việc đổi mới phương pháp dạy của thầy và phương pháp học của trò.

SGK phải là một tài liệu dùng cho cả thầy và trò. Phải trình bày SGK như thế nào đó để nếu không có thầy, học sinh cũng có thể tự học được, cố nhiên là có khó khăn vất vả hơn. Ta lấy một ví dụ : Khái niệm "vectơ" là một khái niệm hình học rất mới đối với học sinh lớp 10 và ta có thể định nghĩa hoàn toàn ngắn gọn : "*Vectơ là một đoạn thẳng định hướng (tức là hai điểm mút của đoạn thẳng được sắp thứ tự : một là điểm đầu, một là điểm cuối)*". SGK cũ đã định nghĩa như vậy, còn khi giảng bài thầy giáo muốn giải thích hay minh hoạ gì là tuỳ khả năng của thầy và trình độ của trò. Thực ra thì trong thực tế, ngoài các đại lượng vô hướng, luôn luôn cần phải có đại lượng có hướng, chẳng hạn biết cơn bão di chuyển với tốc độ bao nhiêu kilômét một giờ chưa đủ mà ta còn cần phải biết nó di chuyển theo hướng nào. Như vậy trong Vật lí sẽ xuất hiện khái niệm "vectơ vận tốc". SGK cần phải có sự dẫn dắt một cách hợp lí để học sinh thấy rõ vấn đề.

Một điểm mới của SGK lần này là có đưa vào một hệ thống Câu hỏi và Hoạt động để buộc học sinh phải làm việc, tránh tình trạng họ chỉ ngồi nghe và chép. Các Câu hỏi nhằm làm cho học sinh nhớ lại một kiến thức nào đó, hoặc để gợi ý, hoặc để định hướng cho suy nghĩ của họ vào một khía cạnh của vấn đề ... Các Hoạt động đòi hỏi học sinh phải làm việc nhiều hơn, phải tính toán để đi đến một kết quả nào đó. Nhiều khi chỉ cần một vài Hoạt động của học sinh là có thể thay thế cho nhiều lời giảng của thầy giáo.

Xin nêu một ví dụ. SGK trước đây khi viết về định lí cosin đã trình bày một cách cổ điển và chính tắc như sau :

- Nêu định lí : Trong mọi tam giác ABC ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sin A$.
- Nêu chứng minh định lí.
- Nêu hệ quả và các ví dụ áp dụng.

Nếu các thầy giáo giảng đúng như SGK thì học sinh sẽ hoàn toàn thụ động. Mặc dầu họ hiểu rất rõ cách chứng minh định lí, nhưng họ không hiểu vì sao người ta lại có thể "nghĩ" ra định lí đó.

SGK lần này muốn đề nghị một phương pháp trình bày để thầy giáo tham khảo.

Thầy giáo chưa vội đưa ra định lí cosin, thay vào đó thầy nhắc lại định lí Pythagore mà các em đều biết : "*Nếu tam giác ABC vuông tại A thì* $a^2 = b^2 + c^2$ tức là $BC^2 = AC^2 + AB^2$ hay $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2$ ".

Sau đó thầy giáo đề nghị các em thực hiện Hoạt động: Hãy chứng minh định lí đó , tức là nếu tam giác ABC vuông tại A thì hãy chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2$.

(Xem tiếp trang 14)

Vận dụng các quan điểm biện chứng của tư duy toán học trong dạy - học Toán

ĐÀO TAM
(GV khoa Toán ĐH Vinh)

❶ Phần lớn các bạn học sinh khá, giỏi toán mong muốn đạt kết quả tốt trong học tập môn Toán đã cố gắng tự học, tự tìm tòi lời giải các bài toán qua các sách tham khảo bồi dưỡng môn Toán ở trong nước và trên thế giới. Đặc biệt các dạng toán trong báo *Toán học và tuổi trẻ*, những lời giải phong phú đa dạng của nó đã có sức cuốn hút đông đảo học sinh trong cả nước.

Tuy nhiên, theo chúng tôi, để việc tự học, tự tìm tòi và phát triển kiến thức như đã nêu trên tốt hơn, các bạn cần quan tâm đúng mức đến việc khai thác tiềm năng kiến thức và kĩ năng sách giáo khoa (SGK) toán ở trường THPT.

Từ tiềm năng SGK, nếu các bạn có cách nhìn nhận biện chứng của tư duy toán học thì các bạn sẽ tìm được các phương thức phát triển, mở rộng kiến thức SGK, tạo bước ngoặt cho việc tiếp cận với các dạng toán khó.

❷ Chúng ta quan tâm một số quy luật biện chứng của tư duy toán học dưới đây và việc vận dụng chúng vào việc phát triển kiến thức SGK toán.

a. *Xem xét các đối tượng toán học, các quan hệ giữa chúng trong các mối liên hệ giữa cái chung và cái riêng*

Mỗi cái riêng có thể được chứa đựng trong nhiều cái chung, cái bao trùm nó theo một số quan hệ nào đó khác nhau và ngược lại, nhiều cái riêng có thể chứa đựng trong cùng một cái chung theo một mối quan hệ nào đó giữa các đối tượng.

Thí dụ 1. Từ bài toán sau đây trong SGK Hình học 10 :"Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$" có thể phát triển theo hai hướng đến những cái chung, cái tổng quát khác nhau:

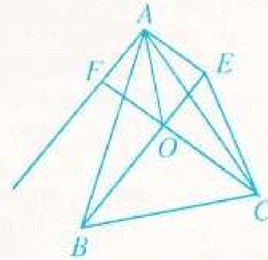
Hướng 1. Xem trọng tâm G của tam giác ABC theo quan điểm diện tích: $S_{GBC}=S_{GCA}=S_{GAB}=\frac{1}{3}S$, với S là diện tích của tam giác ABC.

Khi đó hệ thức cần chứng minh tương đương với hệ thức: $\frac{1}{3}S.\overrightarrow{GA}+\frac{1}{3}S.\overrightarrow{GB}+\frac{1}{3}S.\overrightarrow{GC}=\vec{O}$. Chú ý rằng tổng ba hệ số của biểu thức vectơ vế trái bằng S. Từ đó chúng ta có thể đề xuất bài toán tổng quát sau: "Gọi O là điểm bất kì trong tam giác ABC. Đặt $S_1=S_{OBC}$, $S_2=S_{OCA}$, $S_3=S_{OAB}$; Chứng minh rằng $S_1\overrightarrow{OA}+S_2\overrightarrow{OB}+S_3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$".

Hệ thức cần chứng minh tương đương với

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{S_2}{S_1}\overrightarrow{OB}-\frac{S_3}{S_1}\overrightarrow{OC} \qquad (1)$$

Để chứng minh (1) ta dựng hình bình hành nhận OA làm đường chéo $OEAF$; trong đó hai cạnh OE, OF lần lượt thuộc các đường thẳng BO, CO (h. 1).



Hình 1

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.

Từ đó $\overrightarrow{OA}=-\frac{OE}{OB}\overrightarrow{OB}-\frac{OF}{OC}\overrightarrow{OC}$

hay $\overrightarrow{OA}=-\frac{S_{COE}}{S_1}\overrightarrow{OB}-\frac{S_{BOE}}{S_1}\overrightarrow{OC}$.

Do $AE//OC$ và $AF//OB$ nên

$\overrightarrow{OA}=-\frac{S_2}{S_1}\overrightarrow{OB}-\frac{S_3}{S_1}\overrightarrow{OC}$. ❒

Nhận xét. 1. Nếu để ý $S_1+S_2+S_3=S$, khi đó có thể mở rộng cho trường hợp điểm O nằm ngoài tam giác ABC, thuộc miền góc tạo bởi hai tia CA, CB. Chúng ta có bài toán tổng quát khác sau:

"Gọi O là điểm nằm ngoài tam giác ABC, thuộc miền góc tạo bởi hai tia CA và CB; Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác OBC, OAC, OAB. Chứng minh rằng
$S_1\overrightarrow{OA} + S_2.\overrightarrow{OB} - S_3.\overrightarrow{OC} = \vec{O}$ "

Bạn đọc có thể tự chứng minh nhờ sử dụng hình bình hành $CMON$; trong đó M, N lần lượt thuộc các tia OA và OB.

2. Nếu để ý thêm $S_1 + S_2 - S_3 = S$ thì có thể tổng quát các trường hợp trên thành bài toán sau:

"Nếu O là điểm bất kì trong mặt phẳng (ABC), không thuộc đường thẳng chứa cạnh nào của tam giác ABC. Đặt $S_1 = S_{OBC}$, $S_2 = S_{OCA}$; $S_3 = S_{OAB}$ thì có thể chọn các dấu "+" hoặc "−" thích hợp sao cho đẳng thức $\pm S_1\overrightarrow{OA} \pm S_2\overrightarrow{OB} \pm S_3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ đúng".

Hướng 2. Có thể xem G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GK} = -\overrightarrow{GA}$, với M là trung điểm BC. Khi đó tương tự $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GB}$. Hay các vectơ $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ đôi một khác phương và tổng hai vectơ bất kì trong ba vectơ trên cộng tuyến với vectơ còn lại. Khi đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Từ nhận xét trên chúng ta có bài toán tổng quát sau "Cho n vectơ đôi một khác phương và tổng của $n - 1$ vectơ bất kì trong n vectơ trên cộng tuyến với vectơ còn lại. Chứng minh rằng tổng n vectơ cho ở trên bằng vectơ không". Bạn đọc có thể tự kiểm tra tính đúng đắn của bài toán tổng quát trên.

Thí dụ 2. Xem xét các đối tượng, các quan hệ, các tính chất từ nhiều trường hợp riêng của một cái chung; Từ đó sử dụng các thao tác tư duy: so sánh, phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, tổng quát hóa để đề xuất bài toán mới, bài toán tổng quát.

Chẳng hạn, chúng ta dễ dàng kiểm tra trong hình vuông hoặc hình thoi $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau tại O thỏa mãn:
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) \quad (2)$$
nhờ sử dụng định lí Pythagore và chỉ cần sử dụng hai đường chéo vuông góc với nhau.

Đối với hình chữ nhật hoặc hình bình hành $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau tại O cũng thỏa mãn đẳng thức (2). Trong trường hợp này khi chứng minh chỉ cần sử dụng O là trung điểm của một đường chéo và sử dụng công thức độ dài đường trung tuyến tính theo ba cạnh của tam giác.

Phân tích, so sánh cách sử dụng các giả thiết của các trường hợp chứng minh cụ thể có thể đề xuất bài toán tổng quát sau:
"Tứ giác $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau tại O, cần và đủ để $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2)$ là tứ giác đó có hai đường chéo vuông góc hoặc O là trung điểm của một trong hai đường chéo.

b. *Xem xét các đối tượng toán học, các quan hệ giữa chúng theo quan điểm vận động biến đổi*

Chúng ta cần đặc biệt quan tâm xem xét các đối tượng, các quan hệ trong bài toán theo quan điểm vận động từ cái riêng đến cái chung (thể hiện trong giả thiết của bài toán) để tổng quát hóa các bài toán, tìm tòi kiến thức mới.

Thí dụ 3. Các bạn học sinh đã được làm quen với bài toán sau trong SGK Hình học lớp 10: "Cho góc xOy và điểm A nằm trong góc đó. Dựng đường tròn qua A và tiếp xúc với hai cạnh Ox, Oy".

Bài toán trên được giải nhờ sử dụng phép vị tự, bằng cách xem đường tròn cần dựng là ảnh của đường tròn ($\mathscr{C}$) bán kính R được chọn tùy ý và tiếp xúc với hai cạnh Ox, Oy của góc qua phép vị tự V_O^k với $k = \dfrac{OA}{OA'}$, A' là giao điểm của OA với đường tròn ($\mathscr{C}$).

Từ đó nếu xét điểm là trường hợp đặc biệt của đường tròn khi bán kính bằng 0 thì có thể phát biểu bài toán mới, tổng quát sau: "Cho góc xOy và đường tròn (S) tâm I bán kính R nằm trong góc đó. Hãy dựng đường tròn ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với Ox, Oy và tiếp xúc với đường tròn (S)". Việc dựng đường tròn ($\mathscr{C}$) quy về dựng đường tròn tâm K đi qua I và tiếp xúc với $O'x'$ và $O'y'$, kí hiệu là (K). Trong đó $O'x'$ và $O'y'$ lần lượt song song với Ox, Oy và cách đều chúng một khoảng bằng R (đã xét ở bài toán ban đầu).

(Xem tiếp trang 14)

2-THTT

Kì thi OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 47 (IMO SLOVENIA 2006)

VŨ ĐÌNH HÒA - NGUYỄN ĐỨC HOÀNG

Kì thi Toán Quốc tế lần thứ 47 được tổ chức tại thủ đô Ljubljana, Slovenia, từ 6-7-2006 tới 18-7-2006. Lúc đầu có hơn 100 nước và vùng lãnh thổ đăng kí, nhưng cuối cùng chỉ có 90 nước và vùng lãnh thổ trên thế giới xin được visa nhập cảnh. Đoàn học sinh Việt Nam có các bạn:

1. *Đặng Bảo Đức*, lớp 12, Khối PTCT ĐHKHTN ĐHQG **Hà Nội**,
2. *Hoàng Mạnh Hùng*, lớp 12, Khối PTCT ĐHKHTN ĐHQG **Hà Nội**,
3. *Nguyễn Duy Mạnh*, lớp 12, THPT Chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**,
4. *Lê Hồng Quý*, lớp 12, THPT Chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**,
5. *Nguyễn Xuân Thọ*, lớp 12, THPT Chuyên **Vĩnh Phúc**,
6. *Lê Nam Trường*, lớp 12, THPT Chuyên **Hà Tĩnh**.

(Điều đặt biệt là cả **6** bạn đều là học sinh các tỉnh, không có bạn nào là học sinh Hà Nội).

Đoàn còn có GS. TSKH. Hà Huy Khoái (**Ban tư vấn IMOAB**), GS. TSKH. Phạm Thế Long, GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh, GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa, PGS. TS. Trần Văn Nghĩa, PGS. TSKH. Đặng Hùng Thắng, PGS. TS. Bùi Trung Thông, PGS. TS. Nguyễn Ngọc Hùng, PGS. TS. Phan Duy Ngà, Thầy giáo Nguyễn Khắc Minh, ThS. Tô Xuân Hải, PGS. TSKH. Vũ Đình Hòa (**Trưởng đoàn**) và TS. Nguyễn Đức Hoàng (**Phó đoàn**).

Sau đây là kết quả của đoàn Việt Nam:

STT	Họ và Tên	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5	Bài 6	Tổng điểm	Huy chương
VNM 3	Nguyễn Duy Mạnh	7	1	7	7	7	0	**29**	Vàng
VNM 2	Hoàng Mạnh Hùng	7	1	7	6	7	0	**28**	Vàng
VNM 5	Nguyễn Xuân Thọ	7	0	7	7	1	0	**22**	Bạc
VNM 6	Lê Nam Trường	7	4	1	7	0	0	**19**	Bạc
VNM 1	Đặng Bảo Đức	7	0	1	7	3	0	**18**	Đồng
VNM 4	Lê Hồng Quý	7	0	1	6	1	0	**15**	Đồng

Tuy là một đất nước rất nhỏ chỉ có hơn 2 triệu dân, nhưng các công dân Slovenia rất hiếu khách và niềm nở, tổ chức tốt kì thi Toán Quốc tế. Đặc điểm của Slovenia là đất nước du lịch có rất nhiều khách sạn và danh lam thắng cảnh. Đề thi được dư luận chung đánh giá là khó hơn đề thi trong nhiều năm gần đây (kể cả các bài trung bình).

Kì thi IMO chỉ là kì thi cá nhân, không trao giải đồng đội. Tuy vậy, nếu xét một cách không chính thức về số huy chương thì đoàn Việt Nam xếp hàng thứ bảy cùng với một số đoàn khác. Về tổng số điểm, đoàn Việt Nam có tổng số điểm là **131**, đứng sau các đoàn Trung Quốc (214), Nga (174), Hàn Quốc (170), Đức (157), Hoa Kỳ (154), Rumania (152), Nhật (146), Iran (145), Moldova (140), Đài Loan (136), Ba Lan (133), Italia (132). Có ba thí sinh đạt điểm tối đa 42/42 là *Zhiyu Liu* (Trung Quốc), *Iurie Boreico* (Moldova) và *Alexander Magazinov* (Nga).

Trong buổi lễ trao giải, GS. TSKH. *Hà Huy Khoái* đã trân trọng nhận lá cờ IMO trong tiếng vỗ tay vang dội của các đoàn dự thi Toán Quốc tế tại Slovenia. "*Tạm biệt Slovenia và hãy đến với Việt Nam*" là câu kết trong bài phát biểu ngắn của GS. *Hà Huy Khoái* tại buổi lễ bế mạc kì thi IMO 2006 này.

Sau đây là 6 bài thi.

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. (*Hàn Quốc*). *Cho tam giác ABC với tâm đường tròn nội tiếp là I. P là một điểm ở trong tam giác thỏa mãn*

$$\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}.$$

Chứng minh rằng $AP \geq AI$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P trùng I.

Bài 2. (*Serbia*). *Cho P là một đa giác đều 2006 cạnh. Một đường chéo của P được gọi là* **đoạn tốt** *nếu các đỉnh đầu và đỉnh cuối của nó chia chu vi của P thành hai phần, phần nào cũng có số lẻ cạnh. Các cạnh của P cũng được coi là đoạn tốt. Giả sử ta chia P thành các tam giác bởi 2003 đường chéo đôi một không có điểm chung thuộc miền trong của P. Hãy tính số lớn nhất các tam giác cân có hai cạnh là đoạn tốt có thể xuất hiện trong cách chia P như trên.*

Bài 3. (*Ireland*). *Xác định số thực nhỏ nhất M sao cho bất đẳng thức*

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right|$$
$$\leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

được thỏa mãn với tất cả các số thực a, b và c.

NGÀY THỨ HAI

Bài 4. (*Hoa Kỳ*). *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho* $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.

Bài 5. (*Rumania*). *Cho P(x) là một đa thức bậc $n > 1$ với hệ số nguyên và k là một số nguyên dương. Xét đa thức $Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, trong đó P xuất hiện k lần. Chứng minh rằng có không quá n số nguyên t thỏa mãn $Q(t) = t$.*

Bài 6. (*Serbia*). *Gán cho mỗi cạnh b của một đa giác lồi P với một tam giác có diện tích lớn nhất nằm trong P và nhận b làm cạnh. Chứng minh rằng tổng tất cả các diện tích được gán cho các cạnh của đa giác lồi P không nhỏ hơn hai lần diện tích P.*

NẾU CHƯA BIẾT VỀ... *(Tiếp trang 2)*

(với các trường hợp khác chứng minh hoàn toàn tương tự).

Từ hai tam giác vuông AC_1K và DB_1K suy ra $\widehat{C_1AK} = \widehat{B_1DK}$ nên theo bài toán 3 tứ giác AC_1B_1D có hai góc đối bù nhau hay

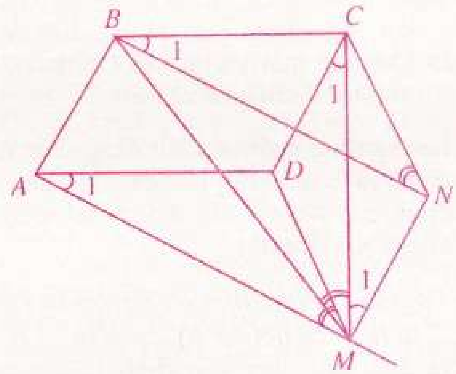
$$\widehat{BAD} + \widehat{C_1B_1D} = 180^\circ \qquad (3)$$

Từ giả thiết $\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^\circ$ suy ra $\widehat{BAD}=\widehat{DCA_1}$ (4). Mặt khác, tứ giác CA_1DB_1 có hai góc đối bù nhau (vì $\widehat{CB_1D}=\widehat{CA_1D}=90^\circ$) nên theo bài toán 3 ta có $\widehat{DB_1A_1}=\widehat{DCA_1}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{C_1B_1D}+\widehat{DB_1A_1}=180^\circ$ hay ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. ❐

✪ **Bài toán 6.** *Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm M ngoài hình bình hành nhưng trong góc ABC sao cho $\widehat{MAD}=\widehat{MCD}$. Chứng minh $\widehat{AMB}=\widehat{CMD}$.*

Chứng minh. (h. 7).



Hình 7

Vẽ hình bình hành $CDMN$ suy ra $ABNM$ cũng là hình bình hành và $\Delta BCN = \Delta ADM$ (c.c.c). Do đó $\widehat{B}_1=\widehat{A}_1$. Mà $\widehat{A}_1=\widehat{C}_1$ (gt) và $\widehat{C}_1=\widehat{M}_1$ (so le trong) nên $\widehat{B}_1=\widehat{M}_1$. Khi đó theo bài toán 3 ta có $\widehat{CNB}=\widehat{CMB}$, mà $\widehat{CNB}=\widehat{DMA}$ nên $\widehat{CMB}=\widehat{DMA}$ hay $\widehat{CMD}=\widehat{BMA}$. ❐

Còn rất nhiều bài tập về đường tròn mà chúng ta có thể giải chúng chưa cần đến kiến thức về đường tròn. Các bạn hãy suy nghĩ và thử tìm kiếm nhé. Chúc các bạn có nhiều sáng tạo trong khi học toán.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

KHAI THÁC SÂU THÊM MỘT BÀI TOÁN Bất đẳng thức

PHẠM KIM HÙNG
(SV K9, hệ CNTN ngành Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Trong tạp chí Toán học và Tuổi trẻ 4–2006 có bài toán bất đẳng thức T10/346 như sau.

✪ **Bài toán 1.** *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$ ta luôn có*

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq 8(a^2+b^2+c^2) \qquad (1)$$

Đây không phải là một bài toán bất đẳng thức khó và thực tế đã có rất nhiều lời giải của các bạn gửi đến tòa soạn. Tuy nhiên, bất đẳng thức trên khá đẹp mắt và tại sao chúng ta lại không thử tìm hiểu sâu hơn về nó?

Có hai hướng tổng quát hóa bất đẳng thức này là xét nhiều số hoặc nâng bậc các số hạng. Ý tưởng chính của tác giả khi đặt ra bài toán là dựa vào nhận xét sau đây.

Bổ đề. *Với hai số thực a, b không âm sao cho $a + b \leq 2$ ta luôn có $ab(a + b) \geq a^2b^2(a^2 + b^2)$.* Kiểm tra điều này dựa vào định lí dấu tam thức bậc hai bằng cách đặt $t = ab$, và để ý rằng $a + b \leq 2$. Từ đó ta có thể mở rộng bài toán 1 cho n số không âm.

✪ **Bài toán 2.** *Chứng minh rằng với các số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ có tổng bằng 1, ta luôn có*

$$\frac{\sum\limits_{i=1(i\neq j)}^{n} a_i a_j}{\sum\limits_{i=1(i\neq j)}^{n} a_i^2 a_j^2} \geq 8\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \qquad (2)$$

Lời giải bài toán 2 tương tự như lời giải bài T10/346 đăng trong số báo này.

Chúng ta sẽ quan tâm nhiều hơn đến bài toán mở rộng với $n = 3$. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là, liệu bất đẳng thức tương tự sau còn đúng hay không nếu a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1.

$$\frac{ab+bc+ca}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3} \geq 8^2(a^3+b^3+c^3) \ ?$$

Nhưng rất tiếc câu trả lời lại là phủ định. Câu trả lời sẽ được chứng minh ở phần cuối của bài viết bằng một bất đẳng thức thay thế rất thú vị. Như vậy 2 là hằng số tự nhiên tốt nhất để bất đẳng thức dạng ban đầu đúng (theo nghĩa là có đẳng thức khi $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$ hoặc các hoán vị). Một câu hỏi nữa là liệu có thể cộng thêm dưới mẫu $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ ở vế trái của (1) một đại lượng $kabc$ với k lớn nhất là bao nhiêu để bất đẳng thức (1) còn đúng? Câu trả lời là $k = 2$ và bạn đọc hãy tự chứng minh kết quả này. Sau đây là một mở rộng khác rất thú vị.

✪ **Bài toán 3.** *Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1, ta luôn có*

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2+16abc} \geq 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad (3)$$

Ngoài ra hãy chứng minh 16 là hằng số tốt nhất, theo nghĩa nếu thay bằng một số lớn hơn thì bất đẳng thức không còn đúng nữa.

Lời giải. Có thể coi đây là một bất đẳng thức khá khó và chặt, vì nó có liên quan đến hằng số tốt nhất. Để chứng minh bất đẳng thức trên, ta phải sử dụng các đa thức đối xứng. Đặt $x = 4(ab + bc + ca)$, $y = 8abc$, khi đó

$a^2+b^2+c^2=1-\dfrac{x}{2}$,

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y}{4}$.

Bất đẳng thức (3) được chuyển về dạng

$x \ge (2-x+4y)(x^2-4y)$

$\Leftrightarrow x(x-1)^2 \ge 4y((x-1)(x+2)-4y)$

$\Leftrightarrow x(x-1)^2+16y^2 \ge 4y(x-1)(x+2)$.

Ta có thể chứng minh $8(x-1) \le 9y$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức quen thuộc cho ba số không âm a, b, c:

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc$

$\Leftrightarrow (1-2a)(1-2b)(1-2c) \le abc$.

Ngoài ra từ giả thiết $a+b+c=1$ suy ra $x \le \dfrac{4}{3}$.

Đặt $f(y)=16y^2-4y(x-1)(x+2)+x(x-1)^2$.

Ta sẽ chứng minh $f(y)$ là một hàm đồng biến. Điều này hiển nhiên đúng nếu $0 \le x \le 1$ nên trong trường hợp này, bất đẳng thức (3) cũng hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp còn lại $1 \le x \le \dfrac{4}{3}$, khi đó

$$f'(y)=32y-4(x-1)(x+2)$$
$$\ge 32.\frac{8(x-1)}{9}-4(x-1)(x+2)$$
$$\ge \frac{256(x-1)}{9}-\frac{40(x-1)}{9} \ge 0.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng, nếu $1 \le x \le \dfrac{4}{3}$, thì

$$16.\left(\frac{8(x-1)}{9}\right)^2-4\left(\frac{8(x-1)}{9}\right)(x-1)(x+2)+x(x-1)^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1024}{81}-\frac{32}{9}(x+2)+x \ge 0.$$

Nhưng điều này hiển nhiên đúng, vì $x \le \dfrac{4}{3}$. Bất đẳng thức được chứng minh và đẳng thức xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}$, $c=0$ hoặc các hoán vị của a, b, c. ❐

✪ **Bài toán 4.** *Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+\frac{19}{8}abc} \le 8(a^2+b^2+c^2).$$

Hơn nữa, hãy chứng minh rằng ta không thể thay số $\frac{19}{8}$ bằng một số nhỏ hơn và điều kiện a, b, c là ba cạnh của một tam giác là không thể bỏ đi được.

Bạn đọc hãy tự chứng minh bất đẳng thức trên. Lưu ý rằng ngoài trường hợp xảy ra đẳng thức khi $a=b=\dfrac{1}{2}$, $c=0$ hoặc các hoán vị, ta còn có đẳng thức khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$, đây là một nhận xét rất quan trọng. Trong phần cuối của bài viết này, tác giả sẽ giới thiệu với các bạn một bất đẳng thức rất thú vị và có nhiều mở rộng khác nữa.

✪ **Bài toán 5.** *Chứng minh rằng với các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 3 thì*

$$\frac{ab+bc+ca}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3} \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{36}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$.

Đặt $f(a, b, c)=36(ab+bc+ca)-$
$-(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$.

Khi đó

$f(a, b+c, 0)=36a(b+c)-(a^3+(b+c)^3)a^3(b+c)^3$.

Ta sẽ chứng minh rằng $f(a, b, c) \ge f(a, b+c, 0)$. Thật vậy, chú ý rằng

$36(ab+bc+ca) \ge 36a(b+c)$ và

$(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$
$\le (a^3+(b+c)^3)\, a^3(b+c)^3$

vì ta có $a^3+b^3+c^3 \le a^3+(b+c)^3$ và $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \le a^3(b+c)^3$).

Vậy ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $c=0$, hay

$36ab \ge a^3b^3(a^3+b^3) \Leftrightarrow 36 \ge a^2b^2(a^3+b^3)$.

Đặt $t=ab$, bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng $t^2(27-9t) \le 36 \Leftrightarrow t^3+4 \ge 3t^2$.

Nhưng đây chính là bất đẳng thức $AM - GM$ của ba số $\frac{t^3}{2}, \frac{t^3}{2}, 4$. Đẳng thức xảy ra khi $c = 0$ và $a + b = 3$, $ab = 2$, hay $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ hoặc các hoán vị. ❐

Bất đẳng thức hoàn toàn đối xứng, nhưng lại có đẳng thức khi các biến lệch nhau ($a = 2$, $b = 1$, $c = 0$) là rất đặc biệt. Tiếp tục với mạch phát triển trên, ta có thể mở rộng thành bài toán tổng quát hơn sau đây.

Bài toán 6. *Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau với k là một hằng số thực dương cho trước*

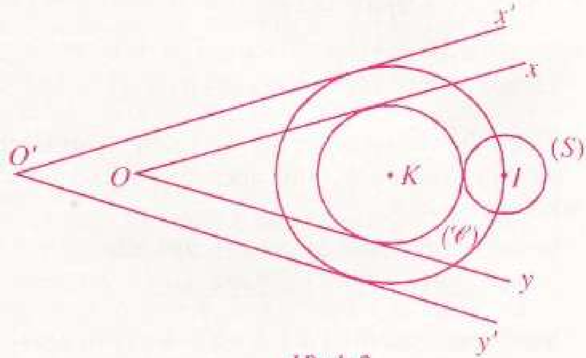
$$P = \frac{ab+bc+ca}{(a^kb^k+b^kc^k+c^ka^k)(a^k+b^k+c^k)}.$$

Thành thực mà nói, đây là bài toán rất khó. Nếu $k \geq 2$, bằng phương pháp tương tự ta có thể chuyển về trường hợp $abc = 0$, hay nói cách khác ta phải tìm giá trị lớn nhất của $Q = (ab)^{k-1}(a^k + b^k)$ với $a + b = 2$.

Tác giả dự đoán rằng $P \geq 2^{3k-3}$ với mọi $2 \geq k \geq 1$ và $P \geq 3^{3k-3}$ với mọi $\frac{1}{2} \leq k \leq 1$. Hi vọng sẽ nhận được ý kiến của bạn đọc về vấn đề này trong thời gian tới. Có một số hướng mở rộng khác nữa, chẳng hạn với 4 số hay n số, ta cũng thu được khá nhiều kết quả thú vị và điều này xin dành lại cho sự tìm tòi của bạn đọc.

VẬN DỤNG... *(Tiếp trang 9)*

Giả sử đường tròn (K) có bán kính d. Khi đó đường tròn cần dựng có tâm K bán kính bằng $d - R$ (xem hình 2).



Hình 2

Dưới đây là những bài tập dành cho các bạn:

Bài tập 1. Hãy trình bày các cách tổng quát hóa bài toán sau, đề xuất các bài toán mới: "Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Với a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC".

Bài tập 2. Tổng quát hóa bài toán sau: "Cho tam giác MNP. Qua các đỉnh M, N, P vẽ các đường thẳng a, b, c lần lượt song song với NP; MP; MN. Các đường thẳng a, b, c đôi một cắt nhau tại A, B, C. Chứng minh rằng các cạnh của tam giác ABC nhận M, N, P là các trung điểm.

VỀ SÁCH GIÁO KHOA... *(Tiếp trang 7)*

Chứng minh rất đơn giản : Từ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ta suy ra

$$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2.$$

Bây giờ thầy giáo đặt câu hỏi : *Trong chứng minh trên giả thiết góc A vuông được áp dụng như thế nào ?* (Trả lời : Vì góc A vuông nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$).

Cuối cùng, một cách tự nhiên, thầy đặt vấn đề "*Nếu góc A không vuông thì ta có kết quả như thế nào ?*" Bấy giờ chắc chắn học sinh "tự mình" tìm được định lí cosin.

Chúng ta đã có ba năm thí điểm chương trình và sách giáo khoa phân ban. Chúng ta đã lấy ý kiến rộng rãi của các nhà khoa học, các nhà sư phạm, các thầy cô giáo và học sinh để chỉnh sửa cho tốt hơn và phù hợp hơn. Cố nhiên việc thực hiện đại trà chương trình và SGK mới sẽ còn gặp rất nhiều khó khăn, nhưng chúng ta có quyền hy vọng rằng Chương trình mới và SGK mới sẽ tạo ra được một bước chuyển mới trong chất lượng dạy và học ở bậc phổ thông trung học.

Giải đáp

XẾP CHỮ MÙA WORLD CUP

Rất nhiều thư các bạn gửi về giải đáp ô xếp chữ này. Quy ước $X = \alpha$ nghĩa là chữ cái X được Nam kí hiệu mặt sau là số α. Do tên mỗi thành phố đều có *một* chữ A, đều có một chữ I

nên $\begin{cases} A = 1 \\ I = 4 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} A = 4 \\ I = 1 \end{cases}$ (do mỗi chữ này xuất hiện 3 lần).

Mỗi thành phố đều có chữ H, đều có chữ N

nên $\begin{cases} H = 3 \\ N = 5 \end{cases}$

hoặc

$\begin{cases} H = 5 \\ N = 3 \end{cases}$ (do mỗi chữ này xuất hiện hơn ba lần).

Do hai chữ cái cuối bảng là 53 nên $H = 3$, $N = 5$ cho phù hợp quy luật tạo từ tiếng Việt. Chữ cái thứ năm là A hoặc I, đứng trước H nên thành phố đầu tiên có 5 chữ cái 31564. Suy ra thành phố này là Hà Nội tức $A = 1$, $O = 6$, $I = 4$.

Ta có bảng sau.

H	A	N	O	I	H	A	I		H	O	N		N	A			I	N	H

Ta đoán được tên hai thành phố còn lại là HẢI PHÒNG và NAM ĐỊNH.

Thử lại thấy hoàn toàn phù hợp yêu cầu của câu đố. Vậy tên ba thành phố của Việt Nam lần đầu tổ chức Giải bóng đá Hòa Bình năm 1955 là: HÀ NỘI, HẢI PHÒNG, NAM ĐỊNH.

Thông tin thêm: Giải mang tên Hòa Bình với ý nghĩa mừng hòa bình đã lập lại và quyết tâm gìn giữ hòa bình. Giải gồm 2 hạng A và B. Hạng A có 6 đội: Thể công A, Công an Hà Nội, Thanh niên Hoàng Diệu, Trần Hưng Đạo, Hải Phòng, Nam Định. Các đội thi đấu vòng tròn một lượt, tổ chức trên sân Hàng Đẫy. Đội Thể công A vô địch giải này.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt và gửi về sớm được nhận quà tặng:
Hải Phòng: *Đoàn Minh Duyên*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Quảng Ninh:** *Nguyễn Thị Minh Hằng*, xóm 1, Đông Thắng, xã Đông Xá, huyện Vân Đồn; **Thanh Hóa:** *Lê Đức Phúc*, 9A, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn; **Hà Tĩnh:** *Lê Võ Châu Anh*, 11A, THPT Kỳ Anh; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Quốc Bình*, 62/7 Lê Văn Tám, Liên Nghĩa, Đức Trọng.

VŨ NAM TRỰC

Ghép được dòng chữ gì?

Ă N H C M À I

C H Ọ Ớ O M

Từ các chữ cái này khẩu hiệu gì có thể ghép được nhỉ? Nếu chỉ có chữ cái không thì cũng khó đấy. Nhưng đã cho thêm dấu thì cũng thường thường thôi. Nào các bạn ghép nhanh lên để gửi về Câu lạc bộ. Khẩu hiệu nào đúng và vẽ đẹp sẽ được chọn in trên tạp chí và tác giả được nhận quà. Chỉ có ba suất quà thôi.

VNTT

CÁC LỚP THCS

Bài T1/350. (Lớp 6) Chứng minh rằng

$$2005^{2007^{2006}} + 2006^{2005^{2007}} + 2007^{2006^{2005}}$$

chia hết cho 102.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T2/350. (Lớp 7) Xét tổng gồm n số hạng

$$S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+\ldots+n},$$

với $n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm số hữu tỉ a nhỏ nhất để $S_n < a, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

NGUYỄN TIẾN LÂM
(SV K50A1S, khoa Toán – Cơ – Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T3/350. Tìm các nghiệm tự nhiên (x, y) của phương trình

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49).$$

NGUYỄN VĂN TIẾN
(GV THCS Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T4/350. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x+z} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

NGUYỄN VĂN TIẾN
(Khoa Hóa Kĩ thuật – ĐH Bách Khoa, Đà Nẵng)

Bài T5/350. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1}$$

trong đó x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 4$.

PHẠM HOÀNG HÀ
(GV PT chuyên Ngoại ngữ, ĐHNN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T6/350. Giả sử M là một điểm nằm trong tam giác nhọn ABC thỏa mãn điều kiện $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$. Gọi K, L theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ M tới AB, AC. Chứng minh rằng hai điểm K, L cách đều trung điểm của cạnh BC và trung tuyến xuất phát từ M của tam giác MKL luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi bên trong tam giác ABC.

MAI QUANG THÀNH
(SV CLC K53, khoa Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T7/350. Cho tam giác ABC vuông ở A và đường cao AH. Một đường tròn đi qua B và C cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Vẽ hình chữ nhật $AMDC$. Chứng minh rằng HN vuông góc với HD.

PHẠM TUẤN KHẢI
(Số 11 Phù Đổng, Hồng Bàng, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/350. Cho a là một số tự nhiên lớn hơn 1. Xét tập hợp khác rỗng $A \subset \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: Nếu $k \in A$ thì $k + 2a \in A$ và $\left[\dfrac{k}{a}\right] \in A$ (kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của x). Chứng minh rằng $A = \mathbb{N}$.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)

Bài T9/350. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$9f(8x) - 9f(4x) + 2f(2x) = 100x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

NGUYỄN TÀI CHUNG
(GV THPT KBang, KBang, Gia Lai)

Bài T10/350. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1.

TRẦN TUẤN ANH
(Khoa Toán – Tin, ĐHKHTN, ĐHQG TP.HCM)

Bài T11/350. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I và trọng tâm là G. Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB. Gọi R'_1, R'_2, R'_3 tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB. Chứng minh rằng

$$R'_1 + R'_2 + R'_3 \geq R_1 + R_2 + R_3.$$

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T12/350. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $BC = a$; $DA = a_1$; $CA = b$; $DB = b_1$; $AB = c$, $DC = c_1$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện; A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là giao điểm của AG, BG, CG, DG với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện và R là bán kính mặt cầu đó. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{R} \leq \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} + \frac{1}{GD_1}$$

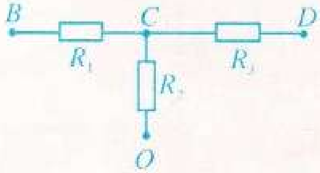
$$\leq \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1}\right).$$

NGUYỄN TRIỆU DŨNG

(Tập thể Z179, Thanh Trì, Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/350. Cho một sơ đồ mạch điện như hình bên. Đặt vào B và O một hiệu điện thế $U_{BO} = 3$V thì vôn kế mắc vào D và O chỉ giá trị $U_1 = 2$V. Nếu thay vôn kế bằng một ampe kế thì ampe kế chỉ $I_3 = 0{,}12$A. Nếu bỏ ampe kế đi, mà đặt vào D và O một hiệu điện thế $U_{DO} = 3$V, còn vôn kế mắc vào B và O thì vôn kế chỉ $U_2 = 2$V. Hãy xác định R_1, R_2, R_3. Cho biết vôn kế có điện trở rất lớn, ampe kế có điện trở nhỏ không đáng kể.



NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

Bài L2/350. Một người bắn cung chắc chắn bắn trúng đích (mục tiêu) cách xa 100m khi không có gió. Khi có gió thổi vuông góc với đường bay của mũi tên, người bắn cung phải nhắm vào một điểm mới, cách đích (mục tiêu) một đoạn nhỏ là D theo chiều ngược với chiều gió thổi.

Để đo lực của gió tác dụng vào mũi tên, người ấy treo mũi tên vào một thanh cứng. Bỏ qua khối lượng của thanh cứng và lực cản của gió vào thanh. Gió làm lệch thanh giữ mũi tên đi theo một góc nhỏ θ khỏi phương thẳng đứng (xem hình vẽ).

a) Lập một biểu thức cho độ lệch D theo thời gian bay t, góc lệch θ và gia tốc g.

b) Hãy tính D với $t = 2s$, $\theta = 0{,}05$ rad, $g = 9{,}8$m/s^2.

TÔ GIANG (sưu tầm)

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

T1/350. (for 6th grade) Prove that

$$2005^{2007^{2006}} + 2006^{2005^{2007}} + 2007^{2006^{2005}}$$

is divisible by 102.

T2/350. (for 7th grade)

Consider the sum of n terms

$$S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+\ldots+n}$$

for $n \in \mathbb{N}^*$.

Find the least rational number a such that $S_n < a$ for all $\in \mathbb{N}^*$.

T3/350. Find all solutions (x, y) of the equation

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49)$$

such that x, y are natural numbers.

T4/350. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x+z} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

T5/350. Find the greatest value and the least value of the expression

$$P = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1}$$

where x, y, z are arbitrary non negative real numbers satisfying the condition $x + y + z = 4$.

(Xem tiếp trang 31)

★Bài T1/346. **(Lớp 6)** *So sánh* $\frac{1}{1002}$ *với tổng A gồm 2006 số hạng sau:*

$$A=\frac{2}{2005+1}+\frac{2^2}{2005^2+1}+...+\frac{2^{n+1}}{2005^{2^n}+1}+...+\frac{2^{2006}}{2005^{2^{2005}}+1}.$$

Lời giải. Với các số tự nhiên m, k lớn hơn 1 ta có

$$\frac{m}{k-1}-\frac{m}{k+1}=\frac{mk+m-mk+m}{(k-1)(k+1)}=\frac{2m}{k^2-1}$$

hay $\frac{m}{k+1}=\frac{m}{k-1}-\frac{2m}{k^2-1}$ (*)

Trong đẳng thức (*) lần lượt cho k bằng 2005, 2005^2, 2005^{2^2}, ..., 2005^{2^n}, ..., $2005^{2^{2005}}$ và m tương ứng bằng 2, 2^2, 2^3, ..., 2^{n+1}, ..., 2^{2006} ta được

$$\frac{2}{2005+1}=\frac{2}{2005-1}-\frac{2^2}{2005^2-1}$$

$$\frac{2^2}{2005^2+1}=\frac{2^2}{2005^2-1}-\frac{2^3}{2005^{2^2}-1}$$

$$\frac{2^3}{2005^{2^2}+1}=\frac{2^3}{2005^{2^2}-1}-\frac{2^4}{2005^{2^3}-1}, ...$$

$$\frac{2^{2005}}{2005^{2^{2004}}+1}=\frac{2^{2005}}{2005^{2^{2004}}-1}-\frac{2^{2006}}{2005^{2^{2005}}-1}$$

$$\frac{2^{2006}}{2005^{2^{2005}}+1}=\frac{2^{2006}}{2005^{2^{2005}}-1}-\frac{2^{2007}}{2005^{2^{2006}}-1}.$$

Cộng theo từng vế của 2006 đẳng thức trên được $A=\frac{2}{2005-1}-\frac{2^{2007}}{2005^{2^{2006}}-1}$.

Hai phân số ở vế phải đẳng thức này đều dương và $\frac{2}{2005-1}=\frac{1}{1002}$ nên $A<\frac{1}{1002}$. ❐

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Đinh Văn Việt*, 6A2, THCS II TTr. Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tuấn Anh Quân*, 6A1, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Ngọc Thọ*, 6A, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** *Nguyễn Thị Hồng Ngọc*, *Đặng Thị Thu Hương*, *Vũ Thị Thảo*, 6A2, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Quảng Ninh:** *Đỗ Thái Chung*, 6A1, THCS Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Thanh Hóa:** *Cao Thanh Tùng*, 6A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Bình Định:** *Lê Thị Hoàng Nguyên*, 6A1, THCS Nhơn Lộc, An Nhơn; **An Giang:** *Phan Anh Khải*, 6A1, THCS Nguyễn Trãi, TX. Châu Đốc.

VIỆT HẢI

★Bài T2/346. **(Lớp 7)** *Cho ba số nguyên a, b,c đôi một khác nhau và khác không, thoả mãn $a+b+c=0$. Tính giá trị của biểu thức*

$$P=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right).$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{a-b}{c}$, $y=\frac{b-c}{a}$, $z=\frac{c-a}{b}$, khi đó

$$P=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}.$$

Ta có

$$y+z=\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}=\frac{(b-a)(b+a-c)}{ab}=\frac{2c(a-b)}{ab}$$

(vì $b+a=-c$) $\Rightarrow \frac{y+z}{x}=\frac{2c(a-b)}{ab}.\frac{c}{a-b}=\frac{2c^2}{ab}$.

Tương tự ta có $\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc}$, $\frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac}$.

Do đó

$$P=3+2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\right)=3+2\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right).$$

Vì $a+b+c=0$ nên $a+b=-c$

$\Rightarrow (a+b)^3+c^3=0$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)=0$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$.

Từ đó $P=3+2.\frac{3abc}{abc}=9$. Vậy $P=9$. ❐

Nhận xét. 1) Bài toán này có nhiều cách giải, tất cả các cách giải đều quy về việc chứng minh đẳng thức $a^3+b^3+c^3=3abc$, với điều kiện $a+b+c=0$.

Một số bạn nêu được nhận xét đúng là các số a, b, c là số thực không nhất thiết phải là số nguyên.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn đầy đủ hơn cả: **Vĩnh Phúc:** *Huỳnh Thu Trang*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Hường Nguyễn Quang Rực, Nguyễn Thùy Dương*, 7A, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Hà Tây:** *Hoàng Thị Thu Hường*, 6A1, THCS Nguyễn Trực, TTr. Kim Bài, Thanh Oai, *Nguyễn Khắc Quý*, 7A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Hải Dương:** *Phạm Thị Vân Nga*, 7C, THCS Chu Văn An, Chí Linh; **Nghệ An:** *Vũ Văn An*, 6C, THCS Quỳnh Hưng, Quỳnh Lưu; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thị Thu Huyền*, 7D, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*, 6M, THCS Nguyễn Huệ, TX. Đông Hà, *Trần Văn Thành*, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộ; **Quảng Ngãi:** *Trần Thị Thanh Thúy*, 7D, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Bùi Đình An*, xã Eakpam, CưMgar; **Bình Định:** *Lê Thị Hoàng Nguyên*, 6A1, THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, *Nguyễn An Kim Thịnh*, 7A1, THCS Bồng Sơn, TTr. Bồng Sơn, Hoài Nhơn; **Vĩnh Long:** *Phạm Hoàng Minh*, lớp 7, THCS TTr. Long Hồi; **Đồng Nai:** *Nguyễn Văn Quy*, 7B, THCS Nguyễn Hữu Cảnh, Cẩm Mỹ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/346. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc \le 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có

$$\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=3.\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}} \quad (1)$$

Lại có $abc \le 1 \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \le 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{2a}{c}+\frac{c}{b} \ge 3a$ (3)

Cũng tương tự, ta có

$\frac{2b}{a}+\frac{a}{c} \ge 3b$ (4) ; $\frac{2c}{b}+\frac{b}{a} \ge 3c$ (5)

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức (3), (4), (5), ta được

$$3.\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \ge 3\,(a+b+c).$$

Vậy $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge a+b+c.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{a}{c}=\frac{c}{b}=\frac{b}{a} \\ abc=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1. \square$$

Nhận xét. 1) Số đông các bạn đã giải bài toán theo cách trên. Một số bạn có cách trình bày khác, tuy nhiên cũng phải sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Rất nhiều bạn đã mắc sai lầm khi cho rằng từ giả thiết a, b, c là số dương và $abc \le 1$ có thể suy ra $0 \le a, b, c \le 1$? Lưu ý rằng, từ giả thiết của bài toán chỉ có thể suy ra ít nhất một trong ba số a, b, c thỏa mãn điều trên mà thôi!

2) Bạn *Trần Nhật Tân*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ, **Hà Tây** đã giải bài toán tổng quát:

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc \le 1$ và n là số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{b}\right)^n \ge a^n+b^n+c^n.$$

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Yên Bái: *Nguyễn Duy Cường*, 9A, THCS Tô Hiệu, Nghĩa Lộ; **Bắc Giang:** *Hà Khương Duy*, 9B, THCS Ttr. Bố Hạ, Yên Thế, *Nguyễn Thị Linh Chi*, 6A8, THCS Ngô Sĩ Liên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tú*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, *Nguyễn Hồng Vân*, 7D, THCS Tam Sơn, Từ Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Trần Bá Trung*, 9A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Nguyễn Minh Thành*, 8A, THCS Mê Linh, Mê Linh, *Nguyễn Thế Hưng*, 9A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Hà Tây:** Nguyễn Khắc Quý, 7A1, Đinh Duy Anh, 9A1, Đặng Dũng Hà, 9A3, THCS Tế Tiêu, Mĩ Đức; Trần Ngọc Anh, 9A3, THCS Ngô Sỹ Liên, Hà Đông ; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Hải Dương:** Phạm Ngọc Dương, 8B, THCS Liên Hoà, Kim Thành; **Thái Bình:** *Nguyễn Thanh Huyền*, 9C, THCS TTr. Tiền Hải; **Thanh Hoá:** *Lê Đức Anh*, 8D, *Nguyễn Khắc Tuyển*, 9B, *Lê Thị Huyền*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; *Đỗ Đức Hiếu*, 8C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, *Mai Trung Nghĩa*, 9B, Trịnh Quang Dũng, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Hoàng Ngọc Hưng*, 9B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Nghệ An:** *Trần Văn Phúc*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Vũ Thanh Thuỷ*, *Nguyễn Thị Hồng*, 9A, *Nguyễn Đức Công*, 9D, *Vũ Đình Long*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Luật*, 9B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Lương*, 9^3, *Võ Thị Huyền*, 8A, THCS Trần Hưng Đạo, TX. Đông Hà, *Võ Phi Long*, 9E, THCS TTr. Gio Linh; **Quảng Nam:** *Nguyễn Thị Anh*

Thư, 9/6, THCS Tam Anh, Núi Thành, *Phạm Minh Tuấn*, 8/10, Lê Quý Đôn, Hà Lam, Thăng Bình; **Đà Nẵng:** Lê Huỳnh Nam Huyền 8^2, THCS Nguyễn Khuyến, Ngũ Hành Sơn; **Gia Lai:** *Nguyễn Phú Đức*, 7/5, THCS Nguyễn Du, Pleiku; **Đắk Lắk:** *Nguyễn Hoàng Phương*, 9E, THCS Chu Văn An, Eakar; **Lâm Đồng:** *Đào Phúc Quang Trí*, 9A8, THCS Phan Chu Trinh, Đà Lạt.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T4/346. *Giải phương trình*

$$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}. \qquad (1)$$

Lời giải. Điều kiện $-2 \le x \le 2$. Với điều kiện này, hai vế của (1) luôn dương, bình phương hai vế ta có

$$4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2+16$$

$$\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16 = x^2+8x+16.$$

Cách 1. Từ đẳng thức trên ta có

$$(2\sqrt{2(4-x^2)}+4)^2 = (x+4)^2.$$

Vì $-2 \le x \le 2$ nên $x+4>0$, $2\sqrt{2(4-x)^2}+4>0$.

Do đó $2\sqrt{2(4-x^2)}+4 = x+4$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 8(4-x^2) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = \dfrac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

(thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Cách 2. Đặt $t = \sqrt{2(4-x^2)}$ $(t \ge 0)$, ta có

$$4t^2+16t-x^2-8x=0.$$

Giải phương trình ẩn t, ta tìm được $t_1 = \dfrac{x}{2}$ và $t_2 = -\dfrac{x}{2}-4$. Do $-2 \le x \le 2$ nên $t_2 < 0$ (loại).

Với $t = \dfrac{x}{2}$ thì $\sqrt{2(4-x^2)} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 8(4-x^2) = x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện). ❒

Nhận xét. 1) Các bạn sau có lời giải tốt:

Yên Bái: *Nguyễn Thu Thủy*, 9I, THCS Lê Hồng Phong, TP. Yên Bái; **Bắc Ninh:** *Ngô Văn Thịnh*, 9A, THCS Đồng Nguyên, Từ Sơn, *Nguyễn Hữu Tú*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 9C, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; *Tạ Quang Sơn*, 9A2, THCS Trưng Vương, Mê Linh, Vĩnh Phúc; *Vũ Thị Tuyết*, 7A, THCS Tự Lập, Mê Linh, *Nguyễn Thị Thi*, 9A, THCS Hồng Châu, Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Thái Bình:** *Nguyễn Quốc Trường*, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải; **Hải Dương:** *Phạm Tiến Đông*, 9A3, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Hà Tây:** *Trần Nhật Tân*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hòa Bình:** *Phạm Tiến Đạt*, 7A4, THCS Hữu Nghị, TX. Hòa Bình; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ; **Nghệ An:** *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Hồng Quân*, 7B, *Đinh Viết Quý*, 9A, THCS Diễn Kim, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Trần Trí Hiệp*, 9G, THCS Ttr. Kỳ Anh ; **Thanh Hóa:** *Lê Thành Trung*, *Nguyễn Thành Long*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Hoàng Ngọc Hưng*, 9B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Quảng Bình:** *Đinh Thanh Hà*, 9A, THCS Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch, *Nguyễn Phi Hùng*, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Ngãi:** *Ngô Văn Hưng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức, *Vũ Nguyễn Hoàng Yến*, 9A, THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9_4, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Đồng Nai:** *Nguyễn Văn Quy*, 7^3, Lam Sơn, Cẩm Mĩ;

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ Bài T5/346. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{x^4+2x^2+5}+(x-1)^2.$$

Lời giải. (Của đa số các bạn)

• Ta sẽ chứng minh

$$(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \ge x\sqrt{x^4+2x^2+5} \qquad (1)$$

Thật vậy: Nếu $x \le 0$ thì

$$x\sqrt{x^4+2x^2+5} \le 0 < (x^2+1)\sqrt{x^2+1}.$$

Vậy (1) đúng.

Nếu $x>0$ thì hai vế của (1) dương nên

$$(1) \Leftrightarrow (x^2+1)^3 \ge x^2(x^4+2x^2+5)$$

$$\Leftrightarrow x^6+3x^4+3x^2+1 \ge x^6+2x^4+5x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1 \ge 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2 \ge 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy (1) đúng. Dấu đẳng thức ở (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (khi xét $x > 0$).

• Trở lại bài toán, ta có

$$(x^2+1)\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x^4+2x^2+5} + (x-1)^2 \ge 0 \quad (2)$$

Dấu đẳng thức ở (2) xảy ra khi $x = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là 0, đạt được tại $x = 1$. ❐

Nhận xét. 1) Còn một số bạn nhầm lẫn khi tính toán. Có bạn mắc sai lầm: Bình phương hai vế của một bất phương trình khi chưa rõ dấu ở hai vế mà vẫn viết là bất phương trình tương đương.

2) Bạn *Hồ Hữu Quân* và bạn *Đậu Phi Lực*, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An** đã có mở rộng đúng bài toán trên: "Cho a là hằng số dương. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x^2+a)\sqrt{x^2+a} - x\sqrt{x^4+2ax^2+5a^2} + (x-\sqrt{a})^2$$

bằng 0 và đạt được khi $x = \sqrt{a}$".

3) Ngoài hai bạn ở trên, các bạn có lời giải tốt là: **Bắc Giang:** *Hà Trọng Sỹ*, 9A, THCS Tân Thanh, Lạng Giang; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 8A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hồng Vân*, 7D, THCS Tam Sơn, Từ Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Thị Thủy, Khổng Hoàng Thao*, 9A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Hà Tây:** *Trần Đức Minh*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Thanh Hóa:** *Trịnh Quang Thanh*, 9B, THCS Hàm Rồng, TP Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Tăng Văn Bình*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9_4, THCS Lê Quý Đôn, TP Rạch Giá.

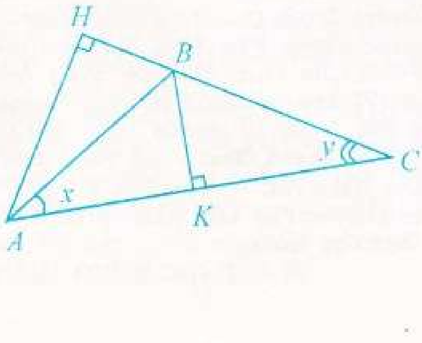
TRẦN HỮU NAM

★ Bài T6/346. *Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ABC}$ tù. Đặt $x=\widehat{BAC}$ và $y=\widehat{BCA}$. Chứng minh rằng*

$$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \sin y.\cos x.$$

Lời giải. Dựng $BK \perp AC$, $AH \perp BC$. Khi đó

$$\sin x = \frac{BK}{AB}; \quad \sin y = \frac{BK}{BC};$$



$$\cos x = \frac{AK}{AB}; \quad \cos y = \frac{KC}{BC}.$$

Từ đó, ta có

$\sin x.\cos y + \sin y.\cos x$

$$= \frac{BK(AK+KC)}{AB.BC} = \frac{BK.AC}{AB.BC} = \frac{2S_{ABC}}{AB.BC} \quad (1)$$

Mặt khác, do $\widehat{ABC}$ tù nên $\widehat{ABH} = x + y < 90^\circ$. Do đó

$$\sin(x+y) = \sin\widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \frac{2S_{ABC}}{AB.BC} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \sin y.\cos x$. ❐

Nhận xét. 1) Đề ra ngầm yêu cầu chứng minh hệ thức trên bằng kiến thức toán THCS. Tuy nhiên một số bạn sử dụng *định lí sin* và *côsin* trong tam giác để chứng minh hệ thức trên mà không chứng minh lại hai định lí này.

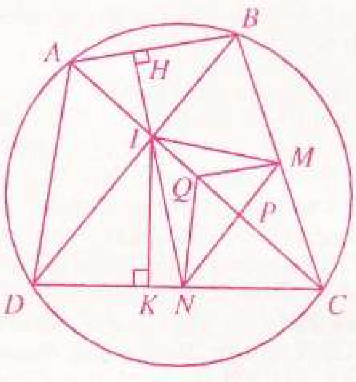
2) Có rất nhiều bạn gửi lời giải về Tòa soạn và đều giải đúng. Xin được nêu tên một số bạn tiêu biểu: **Hà Nội:** *Hoàng Trọng Tiến*, 7A11, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hải Phòng:** *Phạm Duy Hiệp*, 8B8, THCS Trần Phú; **Yên Bái:** *Hoàng Tuấn Anh*, 9H, THCS Lê Hồng Phong, TP Yên Bái; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Tú*, 9A, THCS Thuận Thành, Thuận Thành; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Thị Lan Anh*, 8A, *Đại Thị Ánh*, 9A1, THCS Yên Lạc, *Dương Thu Trang, Mạc Thế Trường*, 9A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, *Nguyễn Huy Hoàng*, 9C, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, *Vũ Thị Tuyết*, 7A, THCS Tự Lập, Mê Linh, *Nguyễn Thế Hưng*, 9A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ; **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành, *Lê Văn Huỳnh*, 9B, THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ, *Trần Chí Thanh*, 9A, THCS Nguyễn Lương Bằng, Thanh Miện; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Thái Bình:** *Phạm Mạnh Cường*, 9C, THCS TTr. Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Ninh Bình:** *Đinh Công Bằng*, 9C, THCS Trương Hán Siêu, TX. Ninh Bình; **Thanh Hóa:** *Trịnh Quang Thanh*, 9B, THCS Hàm Rồng, TP Thanh Hóa, *Hoàng Kiên An*, đường Lê Văn Hưu, thôn Hợp Thành, Bắc Sơn, TX. Sầm Sơn; **Nghệ An:** *Tăng Văn Bình, Nguyễn Mạnh Tuấn*, 8B, *Phan Sỹ Quang, Nguyễn Thị Hồng*, 9A, *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lưu Tuấn Anh*, 9A, THCS TTr. Quán Hành, Nghi Lộc; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Anh Điệp, Nguyễn Quốc Vinh*, 9G, THCS TTr. Kỳ Anh, Kỳ Anh; **Quảng Bình:** *Hoàng Thị Trường Giang*, 9^2, THCS Quảng Minh, Quảng Trạch; **Quảng**

Nam: *Nguyễn Minh Đức*, 9/4, THCS Nguyễn Du, TX. Tam Kỳ; **Đà Nẵng:** *Lê Huỳnh Nam Huyên*, 8^2, THCS Nguyễn Khuyến, Quận Hải Châu; **Bình Định:** *Nguyễn Thị Xuân Thảo*, 8A1, THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, *Đặng Trường Linh*, 9A1, THCS Hoài Tân, Hoài Nhơn; **Lâm Đồng:** *Đào Phúc Quang Trí*, 9A8, THCS Phan Chu Trinh, TP Đà Lạt.

HỒ QUANG VINH

★**Bài T7/346.** *Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O) có AB không song song với CD và hai đường chéo cắt nhau tại I. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Chứng minh rằng nếu NI vuông góc với AB thì MI vuông góc với AD.*

Lời giải. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của I trên AB, AC; P là trung điểm IC; Q là trung điểm AC. Dễ thấy M, N, P thẳng hàng.



Ta có $\widehat{HBI} = \widehat{KCI}$.

Suy ra $\widehat{KIC} = \widehat{HIB} = \widehat{DIN}$ (Do $NI \perp AB$) (1)

Mặt khác $NP \parallel DI$ nên $\widehat{INP} = \widehat{DIN}$ (2)

Đồng thời $PI = PK$ nên $\widehat{IKP} = \widehat{KIP}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{INP} = \widehat{IKP}$ nên bốn điểm I, K, N, P đồng viên. Do đó $\widehat{IPN} = 90°$.

Suy ra $IP \perp MN$ mà $MQ \parallel AB$ nên $MQ \perp IN$.

Do vậy $NQ \perp MI$. Do $NQ \parallel AD$ nên $MI \perp AD$. ❐

Nhận xét: 1) Bài toán còn có thể phát biểu dưới dạng cần và đủ nghĩa là NI vuông góc với AB khi và chỉ khi MI vuông góc với AD (với điều kiện tứ giác $ABCD$ không có hai cạnh đối nào song song).

2) Giải tốt bài này có các bạn:

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, $8A_1$, THCS LâmThao; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Thị Tuyết*, 7A, THCS Tự Lập, Mê Linh, *Đỗ Thị Thúy*, 9A, THCS Lập Thạch; **Hà Tây:** *Đặng Dũng Hà*, $9A_3$ THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hải Dương:** *Trần Thế Cường*, 9A, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Luật*, 9B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn; **Khánh Hòa:** *Lê Thanh Xuân*, 9_2, THCS Đào Duy Từ, Ninh Hoà; **Đắk Lăk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, KRông Buk.

VŨ KIM THỦY

★ **Bài T8/346.** *Cho sáu số nguyên dương a, b, c, d, e, f thoả mãn abc = def. Chứng minh rằng* $a(b^2+c^2)+d(e^2+f^2)$ *là hợp số.*

Lời giải. (Theo các bạn *Vũ Thị Thêu*, $10A_0$, THPT Yên Phong, **Bắc Ninh**, *Nguyễn Đình Tuấn*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**).

Trước hết ta chứng minh nhận xét sau: "Cho bốn số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn $xy = zt$. Khi đó $x + y + z + t$ là hợp số".

Thật vậy giả sử $(x, z) = d$ $(d > 1)$. Khi đó $x = dx_1$, $z = dz_1$ với $(x_1, z_1) = 1$. Từ giả thiết $xy = zt$ suy ra $x_1y = z_1t$. Vì $(x_1, z_1) = 1$ nên $t \,\vdots\, x_1$ hay $t = mx_1$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ do đó $y = mz_1$.

Vậy
$$x+y+z+t = dx_1+mz_1+dz_1+mx_1 = (x_1+z_1)(d+m).$$

Vì $x_1+y_1 \geq 2$, $d+m \geq 2$ nên $x+y+z+t$ là hợp số

Trở lại bài toán ta có $abc = def$

$\Rightarrow (abc)^2 = (def)^2 \Rightarrow (ab^2)(ac^2) = (de^2)(df^2)$.

Từ nhận xét trên ta có $ab^2 + ac^2 + de^2 + df^2 = a(b^2+c^2)+d(e^2+f^2)$ là hợp số. ❐

Nhận xét: Các bạn có lời giải tốt:

Bắc Giang: *Trịnh Quang Việt*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** *Đặng Anh Tuấn*, 11A1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Quảng Ninh:** *Nguyễn Đức Minh*, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Quảng Ninh; **Thanh Hóa:** *Trịnh Văn Vương*, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Công*, THCS Đô Lương, Nghệ An; **Phú Yên:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 11A, THPT Phan Chu Trinh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T9/346.** *Xét các tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (với a, b, c là các số nguyên và $a > 0$) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0\ ;\ 1)$. Trong các tam thức đó, hãy tìm tam thức có hệ số a nhỏ nhất.*

Lời giải. Giả sử a, b, c là các số nguyên, $a > 0$ và tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in (0; 1)$.

Ta có $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ và $f(0)$, $f(1)$ là các số nguyên (do a, b, c là các số nguyên).

Mặt khác

$f(0) = ax_1x_2 > 0, f(1) = a(1 - x_1)(1 - x_2) > 0.$

Do đó $f(0) \ge 1, f(1) \ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức $uv \le \frac{1}{4}(u+v)^2$, với mọi $u, v \in \mathbb{R}$ ta có

$$1 \le f(0).f(1) = a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$$
$$\le a^2.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{a^2}{16} \quad (1)$$

Lại do $x_1 \ne x_2$ và $x(1-x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ta suy ra $1 < \frac{a^2}{16}$ nên $a > 4$. Như vậy $a \ge 5$.

Nếu $a = 5$, theo (1) thì

$$1 \le f(0).f(1) < \frac{a^2}{16} = \frac{25}{16} < 2.$$

Kết hợp với $f(0)$, $f(1)$ là các số nguyên, suy ra $f(0) = f(1) = 1$.

Tức là $\begin{cases} c = 1 \\ 5 + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 1, b = -5.$

Thử lại: Tam thức bậc hai $5x^2 - 5x + 1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, $x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ thuộc khoảng $(0; 1)$.

Kết luận: $5x^2 - 5x + 1$ là tam thức cần tìm. ❒

Nhận xét: Đây là bài A3 trong Đề thi Putnam của Hoa Kỳ năm 1967, một bài toán rất hay về tam thức bậc hai. Các bạn THCS sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Hà Nội:** *Nguyễn Quý Tuấn*, 9A, THDL Lương Thế Vinh; **Hà Tây:** *Đinh Duy Anh*, $9A_1$, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức, *Đặng Dũng Hà*, *Trần Nhật Tân*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Dương*, 8B, THCS Liên Hòa, *Nguyễn Huy Hoàng*, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Quảng Ninh:** *Nguyễn Duy Hưng*, 9A8, THCS Trần Quốc Toản, Hạ Long; **Ninh Bình:** *Nguyễn Mạnh Dũng*, 9B, THCS TTr. Nho Quan; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Trang*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Mai Trung Nghĩa*, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Thái Bình:** *Phạm Mạnh Cường*, 9C, THCS TTr. Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, *Nguyễn Thanh Huyền*, 9C, THCS TTr. Tiền Hải; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/346.** *Chứng minh rằng*

$$ab + bc + ca \ge 8(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 1$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Đặt $ab + bc + ca = x$. Khi đó, từ giả thiết ta thu được $x \ge 0$ và

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2x \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = x^2 - 2abc \le x^2. \end{cases}$$

Suy ra

$$8(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \le 8x^2(1-2x) \quad (1)$$

Để ý rằng $x(4x-1)^2 \ge 0$ hay $8x^2(1-2x) \le x$ (2)

Từ (1) và (2), ta được đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \\ abc = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = \frac{1}{4} \\ abc = 0 \end{cases}$$

tức là $(a; b; c) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ và các hoán vị của nó. ❒

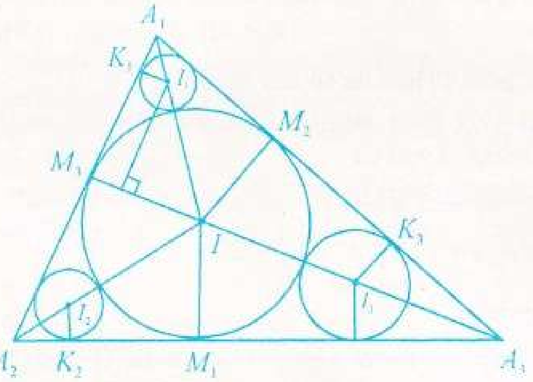
Nhận xét: Đa số các bạn đều giải đúng và tương tự cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T11/346. *Đường tròn (I) bán kính r nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ tiếp xúc với các cạnh A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 tại M_1, M_2, M_3 theo thứ tự. Vẽ các đường tròn (I_i) tiếp xúc với các cạnh A_iA_j, A_iA_k và tiếp xúc ngoài với đường tròn (I) (với i, j, k đôi một khác nhau nhận giá trị 1, 2, 3). Gọi K_1, K_2, K_3 theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (I_1) với A_1A_2, của đường tròn (I_2) với A_2A_3, của đường tròn (I_3) với A_3A_1. Đặt $A_iI_i = a_i$, $A_iK_i = b_i$ (i = 1, 2, 3). Chứng minh rằng* $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}(a_i+b_i) \geq 2+\sqrt{3}$. (*)

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (Dựa theo *Nguyễn Đình Quốc Bảo*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột, **Đắk Lắk**).



Đặt $\widehat{A_i} = 2\alpha_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$; r_i là bán kính đường tròn (I_i) với $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Thế thì $II_i = r + r_i$.

Dựng $I_1L \perp IM_3$ tại L, ta được (ΔII_1L vuông ở L): $\widehat{II_1L} = \widehat{IA_1M_3} = \alpha_1$, $II_1 = r + r_1$,

$IL = r - r_1$; suy ra $\sin\alpha_1 = \dfrac{r-r_1}{r+r_1}$.

Từ đó $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{1-\sin\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}$ (1)

Mặt khác, trong tam giác $I_1A_1K_1$ vuông ở K_1 ta có $I_1K_1 = r_1$ và $A_1I_1 + A_1K_1 = \left(\dfrac{1}{\sin\alpha_1} + \cot g\alpha_1\right)r_1$.

Do đó $\dfrac{1}{r}(a_1+b_1) = \dfrac{1+\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}.\dfrac{r_1}{r}$ (2)

Đối chiếu (1) và (2), sau đó sử dụng các công thức biến đổi $\sin\alpha_1$ và $\cos\alpha_1$ theo $t_1 = \mathrm{tg}\dfrac{\alpha_1}{2}$ (cụ thể là $\sin\alpha_1 = \dfrac{2t_1}{1+t_1^2}$, $\cos\alpha_1 = \dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2}$) ta thu được $\dfrac{1}{r}(a_1+b_1) = \left(\dfrac{1-t_1}{1+t_1}\right)^2.\dfrac{1}{t_1}$ (3)

hay là $\dfrac{1}{r}(a_1+b_1) = \mathrm{tg}^2\left(45^o - \dfrac{\alpha_1}{2}\right)\mathrm{cotg}\dfrac{\alpha_1}{2}$.

Chứng minh tương tự được

$$\frac{1}{r}(a_i+b_i) = \mathrm{tg}^2\left(45^o - \frac{\alpha_i}{2}\right).\mathrm{cotg}\frac{\alpha_i}{2}; \quad (4)$$

$(i \in \{1, 2, 3\})$.

Do đó

$$k = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{3}\mathrm{tg}^2\left(45^o - \frac{\alpha_i}{2}\right)\mathrm{cotg}\frac{\alpha_i}{2}$$

Bây giờ, ta đặt $\mathrm{tg}\left(45^o - \dfrac{\alpha_i}{2}\right) = x_i$ (5)

hay là $x_i = \dfrac{1-t_i}{1+t_i}$ ($t_i = \mathrm{tg}\dfrac{\alpha_i}{2}$, $i = 1, 2, 3$)

do đó $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha_i}{2} = \dfrac{1-x_i}{1+x_i}$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ (6)

Lại vì $\sum_{i=1}^{3}\left(45^o - \dfrac{\alpha_i}{2}\right) = 3.45^o - \dfrac{180^o}{4} = 90^o$, nên theo một công thức lượng giác quen thuộc trong tam giác, ta có hệ thức sau

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1 \quad (7)$$

Từ (7) suy ra: $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq \sqrt{3} \end{cases}$

Dấu "=" đạt được $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (8)

Từ (5) và (6) ta thu được

$$k = \frac{x_1^2(1+x_1)}{1-x_1} + \frac{x_2^2(1+x_2)}{1-x_2} + \frac{x_3^2(1+x_3)}{1-x_3}$$

hay là $k = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2(1+x_i)^2}{1-x_i^2}$, (9)

trong đó $0 < 1 - x_i^2 < 1$ (vì $\widehat{A_i} = 2\alpha_i < 180^\circ$ nên $\frac{\alpha_i}{2} < 45^\circ$, kéo theo $x_i < 1$).

Cuối cùng, áp dụng BĐT Bunhiacovski – Schwarz đối với hai bộ ba số dương

$\sqrt{1-x_1^2}$; $\sqrt{1-x_2^2}$; $\sqrt{1-x_3^2}$ và

$\frac{x_1(1+x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}}$; $\frac{x_2(1+x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}}$; $\frac{x_3(1+x_3)}{\sqrt{1-x_3^2}}$

ta thu được BĐT sau:

$$k \ge \frac{(x_1^2+x_1+x_2^2+x_2+x_3^2+x_3)^2}{3-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} \qquad (10)$$

Từ (10) và (8) suy ra

$$k \ge \frac{(1+\sqrt{3})^2}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} \text{ (đpcm).}$$

Dấu đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi

$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(vì $\frac{x_1^2+x_1}{1-x_1^2} = \frac{x_2^2+x_2}{1-x_2^2} = \frac{x_3^2+x_3}{1-x_3^2}$

$\Leftrightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_3}{1-x_3} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$)

và do đó, khi và chỉ khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, tức là khi và chỉ khi tam giác $A_1A_2A_3$ là đều. ❐

Nhận xét: 1) Trong các lời giải của bài toán trên đây gửi đến Tòa soạn thì lời giải ở trên là ngắn gọn hơn cả, trình bày mạch lạc và chỉ sử dụng tối thiểu công thức lượng giác và BĐT đại số cần thiết. Đáng tiếc, vẫn còn vài bạn giải sai.

2) Hầu hết các bạn đều tách riêng chứng minh hai BĐT $\sum_{i=1}^{3} a_i \ge 2r$ và $\sum_{i=1}^{3} b_i \ge r\sqrt{3}$. Ngoài ra, chứng minh nhiều ĐT và BĐT lượng giác nên lời giải quá dài. Hai bạn *Nguyễn Như Đức Trung*, 10A1 và *Nguyễn Như Quốc Trung*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** có nhận xét rằng: Hệ thức $\sum_{i=1}^{3} b_i \ge r\sqrt{3}$ đã được chứng minh trong bài toán T9/209 và đẳng thức $\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1} = r$ (**) đã được chứng minh trong số 213 THTT tháng 3 năm 1995. Một số bạn chứng minh lại hệ thức (**) này vì sử dụng nó để chứng minh BĐT $\sum_{i=1}^{3} a_i \ge 2r$.

3) Ngoài ba bạn đã được nêu tên ở trên, các bạn sau đây có lời giải tương đối gọn gàng:

Hà Nội: *Nguyễn Đức Bằng*, 11A1, THPT Nguyễn Tất Thành, *Đặng Anh Tuấn*, 11A2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Trần Tấn Phong*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Vũ Thị Thêu*, 10A0, THPT Yên Phong I, Bắc Ninh; **Hưng Yên:** *Hoàng Đức Tâm*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** *Nguyễn Ngọc Uyển*, 11A3, THPT Phúc Thành, Kinh Môn; **Hải Phòng:** *Trần Hoàng Bá*, 10 Toán, THPT NK Trần Phú; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Đại*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Nam Định; **Hà Tĩnh:** *Bùi Hồng Hạnh Lê*, THPT chuyên Hà Tĩnh, *Nguyễn Thanh Long*, 11A10, THPT Nguyễn Huệ, Kỳ Anh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đắk Lắk:** *Trần Anh Quang*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du; **Bến Tre:** *Trần Ngọc Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★Bài T12/346. *Cho mặt cầu tâm O và AB là một dây không đi qua O. Giả sử MM', NN', PP' là các dây khác AB và đi qua trung điểm I của AB. Gọi E, E' lần lượt là giao điểm của AB với các mặt phẳng (MNP) và (M'N'P'). Chứng minh rằng IE = IE'.*

Lời giải. (Dựa theo ý tưởng của các bạn *Trần Hoàng Đại*, 11B3, THPT Thiệu Sơn I, **Thanh Hóa**, *Lê Đức Quang*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắk Lắk**). Trước hết xin phát biểu không chứng minh hai nhận xét quen thuộc.

Nhận xét 1. Trong không gian cho ba điểm X, Y, Z không thẳng hàng và một điểm T. Khi đó $T \in mp(XYZ) \Leftrightarrow \exists\ \alpha, \beta, \gamma$ sao cho

$$\begin{cases} \Sigma\alpha = 1 \\ \Sigma\alpha\overrightarrow{TX} = \vec{0}. \end{cases}$$

Nhận xét 2. Trong không gian cho ba điểm X, Y, Z và điểm T thỏa mãn điều kiện $\Sigma\alpha\overrightarrow{TX}=\vec{0}$ (với $\sum\alpha=1$). Khi đó

$$\sum\alpha MX^2=\sum\alpha TX^2+MT^2\ (\forall M)$$

Trong hai nhận xét trên đã quy ước

$$\sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\sum\alpha\overrightarrow{TX}=\alpha\overrightarrow{TX}+\beta\overrightarrow{TY}+\gamma\overrightarrow{TZ}$$

$$\sum\alpha MX^2=\alpha MX^2+\beta MY^2+\gamma MZ^2$$

$$\sum\alpha TX^2=\alpha TX^2+\beta TY^2+\gamma TZ^2$$

Để cho gọn, cách viết tắt trên sẽ được sử dụng trong toàn bộ lời giải này.

Vì E là giao của AB và mp(MNP) nên $E\in$ mp$(MNP)\Rightarrow\exists\ \alpha,\beta,\gamma$ để $\sum\alpha=1$ và $\sum\alpha\,\overrightarrow{EM}=\vec{0}$ (theo nhận xét 1).

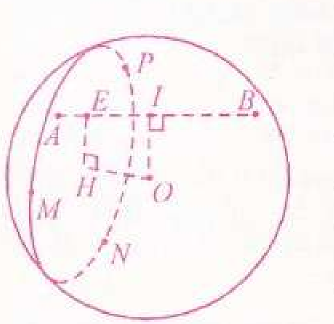
Từ đẳng thức $\sum\alpha\,\overrightarrow{EM}=\vec{0}$ có $\sum\alpha\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IE}\right)=\vec{0}$

$\Rightarrow\overrightarrow{IE}=\sum\alpha\overrightarrow{IM}$ (vì $\sum\alpha=1$)

$=\sum\alpha\dfrac{\overline{IM}}{\overline{IM'}}.\overrightarrow{IM'}=\sum\alpha\dfrac{IM^2}{\mathscr{P}I/(O)}\overrightarrow{IM'}$

(vì $\overline{IM}.\overline{IM'}=\overline{IN}.\overline{IN'}=\overline{IP}.\overline{IP'}=\mathscr{P}(I/(O))$.

Gọi F là điểm đối xứng của E qua I. Từ (1), ta có $\overrightarrow{IF}=\sum\dfrac{\alpha\,IM^2}{-\mathscr{P}I/(O)}\overrightarrow{IM'}$ (2)



Gọi H là hình chiếu của tâm O trên mp (MNP).

Ta thấy H là tâm đường tròn (ω), là giao của (O) với mp(MNP) (hình vẽ). Gọi r là bán kính của (ω).

Ta có

$\sum\alpha IM^2=\sum\alpha EM^2+IE^2$ (theo nhận xét 2)

$=\sum\alpha HM^2-HE^2+IE^2$ (theo nhận xét 2)

$=r^2-(OE^2-OH^2)+(OE^2-OI^2)$

(vì $\sum\alpha=1$; $HM=HN=HP=r$; $\widehat{OHE}=\widehat{OIE}=90^o$)

$=r^2+OH^2-OI^2$

$=R^2-OI^2$ (vì $OH\perp$ mp(MNP))

$=-\mathscr{P}I/(O)\Rightarrow\sum\dfrac{\alpha\,IM^2}{-\mathscr{P}I/(O)}=1.$ (3)

Từ (2), (3) suy ra

$$\left(\sum\frac{\alpha\,IM^2}{-\mathscr{P}I/(O)}\right)\overrightarrow{IF}=\sum\frac{\alpha\,IM^2}{-\mathscr{P}I/(O)}\overrightarrow{IM'}$$

$$\Rightarrow\sum\frac{\alpha\,IM^2}{-\mathscr{P}I/(O)}(\overrightarrow{IM'}-\overrightarrow{IF})=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\sum\frac{\alpha\,IM^2}{-\mathscr{P}I/(O)}\overrightarrow{FM'}=\vec{0}\qquad(4)$$

Từ (3), (4) theo nhận xét 1 ta có $F\in$ mp$(M'N'P')$ $\Rightarrow F$ là giao của AB với mp$(M'N'P')\Rightarrow F\equiv E'$. Điều đó có nghĩa là $IE=IE'$. ❐

Nhận xét: 1) Đây là bài toán hay nhưng không quá khó. Tuy nhiên số lời giải hoàn chỉnh không nhiều (không xem xét đủ các trường hợp).

2) Cách giải của hai bạn *Đại, Quang* không mắc phải sai lầm nói trên vì dùng phương pháp vectơ.

3) Có một lời giải khá hay, đậm chất hình học, thông qua phép đối xứng tâm I. Tuy nhiên do khuôn khổ của tờ báo nên không thể trình bày lời giải đó ở đây.

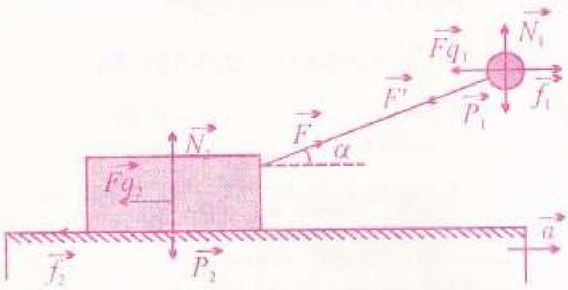
4) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt: **Vĩnh Phúc:** *Trần Tấn Phong*, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hà Nội:** *Đoàn Trí Dũng*, 11A1, *Đặng Anh Tuấn*, 11A2, khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** *Phan Tiến Dũng*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Trị:** *Võ Thị Chung*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Quốc Trung*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 10A1, THPT ChâuThành, TX. Bà Rịa; **Bạc Liêu:** *Trần Mĩ Linh*, 10T, THPT chuyên Bạc Liêu.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/346.** *Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với gia tốc a không đổi trên đoạn đường thẳng nằm ngang. Một người khối lượng m_1 đứng trên sàn ô tô muốn kéo một hòm khối lượng m_2 trên sàn ô tô. Hệ số ma sát* *giữa hòm và người với sàn đều bằng K. Bỏ qua lực cản của không khí. Hãy xác định lực kéo tối thiểu mà người đó phải tác dụng lên hòm.*

Lời giải. Xét trường hợp lực kéo hòm có thành phần theo phương ngang cùng chiều với gia tốc $\vec{a}$.

Xét hệ qui chiếu gắn với sàn ôtô (xem hình).



• Điều kiện để hòm chuyển động được:

$F\cos\alpha \geq Fq_2 + f_2 = m_2a + KN_2$ (f_2 là lực ma sát trượt).

Với $N_2 = P_2 - F\sin\alpha = m_2g - F\sin\alpha$

Từ đó: $F\cos\alpha \geq m_2a + K(m_2g - F\sin\alpha)$

$\Rightarrow KF\sin\alpha + F\cos\alpha \geq m_2a + Km_2g \qquad (1)$

• Điều kiện để người đứng yên được trên sàn: $f_1 = Fq_1 + F'\cos\alpha$ (với $F' = F$), f_1 là lực ma sát nghỉ.

Cho $f_1 \leq KN_1$, với $N_1 = m_1g + F'\sin\alpha$, ta có

$m_1a + F\cos\alpha \leq K(m_1g + F\sin\alpha)$

$\Rightarrow KF\sin\alpha - F\cos\alpha \geq m_1a - Km_1g \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} KF\sin\alpha + F\cos\alpha \geq m_2a + Km_2g \\ KF\sin\alpha - F\cos\alpha \geq m_1a - Km_1g. \end{cases}$$

Giải hệ này với ẩn $F\sin\alpha$ và $F\cos\alpha$ ta được:

$$F\sin\alpha \geq \frac{(m_1+m_2)a + K(m_2-m_1)g}{2K}$$

$$F\cos\alpha \geq \frac{(m_2-m_1)a + K(m_1+m_2)g}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$F^2 \geq \left[\frac{(m_1+m_2)a + K(m_2-m_1)g}{2K}\right]^2 + \left[\frac{(m_2-m_1)a + K(m_1+m_2)g}{2}\right]^2$$

Đặt $A = [(m_1+m_2)a + K(m_2-m_1)g]^2$

$B = [K(m_2-m_1)a + K^2(m_1+m_2)g]^2$

ta có $F^2 \geq \dfrac{A+B}{4K^2}$. Suy ra $F \geq \dfrac{1}{2K}\sqrt{A+B}$.

Vậy $F_{\min} = \dfrac{1}{2K}\sqrt{A+B}$.

Trong trường hợp lực kéo hòm có thành phần theo phương ngang ngược chiều với $\vec{a}$ ta thu được kết quả tương tự như trên, chỉ cần thay a bởi $-a$. ❐

Nhận xét: Các bạn có lời giải và đáp số đúng: **Hưng Yên:** *Phạm Đức Linh*, 10 Lí, *Nguyễn Hữu Thịnh*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Bình Định:** *Lý Viễn Trường*, 11A1, THPT Phù Cát I.

MAI ANH

★ **Bài L2/346.** *Một cái xà đồng chất khối lượng m, chiều dài AB = l có gắn đầu A vào tường AC nhờ một bản lề; AB có thể quay quanh trục cố định nằm ngang đi qua A vuông góc với mặt phẳng. Đầu B treo một vật khối lượng M. BC là một sợi dây khối lượng không đáng kể.*

a) Vẽ sơ đồ các lực đặt lên xà AB.

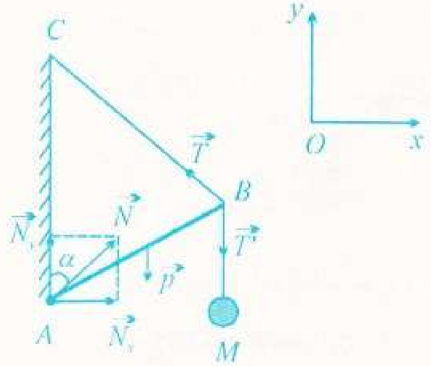
b) Xác định lực căng của sợi dây BC và các thành phần của phản lực của tường tác dụng lên đầu A của xà; tính góc α tạo bởi AC với phản lực của tường tác dụng lên đầu A của xà. (Tính theo các góc A, B, C và l, m, M).

c) Áp dụng bằng số: Cho $M = 20$ kg; $m = 10$ kg; $l = 4$ m; $\hat{A} = 53^o$; $\hat{C} = 60^o$; $g = 9{,}8$ m/s^2.

Lời giải. a) Sơ đồ các lực đặt lên xà AB như hình vẽ:

– Trọng lực $\vec{p}$ của xà;

– Lực căng dây BC là $\vec{T}$;



– Lực căng $\vec{T}'$ của dây treo vật khối lượng M. Độ lớn của lực căng này bằng trọng lượng của vật khối lượng M vì vật cân bằng, nghĩa là $T = P = Mg$;

– Phản lực $\vec{N}$ do tường tác dụng lên đầu A của xà.

b) Kí hiệu N_x và N_y là hình chiếu của $\vec{N}$ lên các trục toạ độ. Vì xà AB nằm cân bằng nên tổng các lực tác dụng lên xà phải bằng không và tổng momen của các lực tác dụng lên xà đối với một điểm bất kì cũng phải bằng không; ta chọn điểm đó là A. Như vậy ta phải có:

$$\vec{N}+\vec{p}+\vec{T}+\vec{T}'=\vec{0} \qquad (1)$$

$$\vec{M}_{N/A}+\vec{M}_{P/A}+\vec{M}_{T/A}+\vec{M}_{T'/A}=\vec{0} \qquad (2)$$

Chiếu phương trình (1) lên các trục Ox, Oy ta được:

$$N_x - T\sin C = 0 \qquad (3)$$

$$N_y + T\cos C - mg - Mg = 0 \qquad (4)$$

Từ phương trình (2) ta suy ra

$$\frac{1}{2}mgl\sin A + Mgl\sin A - Tl\sin B = 0 \qquad (5)$$

Chú ý rằng, trong các phương trình (4), (5) ta đã thay $T' = Mg$.

Giải hệ các phương trình (3), (4), (5) ta được

$$T=\frac{(m+2M)g\sin A}{2\sin B}$$

$$N_x=\frac{(m+2M)g\sin A\,\sin C}{2\sin B}$$

$$N_y=(m+M)g-\frac{(m+2M)g\sin A\,\cos C}{2\sin B}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{N_x}{N_y}=\frac{(m+2M)\sin A\sin C}{2(m+M)\sin B-(m+2M)\sin A\cos C}.$$

c) Thay số, ta tính được: ($\hat{B}=67^o$)

$T \approx 212,6$N; $N_x \approx 184,1$N; $N_y \approx 187,7$N;

$\alpha \approx 44,44^o$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải gọn và tốt: **Thái Bình**: *Nguyễn Khắc Đại*, 11A1, THPT Nam Tiền Hải; **Tiền Giang**: *Nguyễn Hữu Minh Tân*, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Bùi Thái Công*, 10A1, THPT Hoà Bình, Xuyên Mộc, *Thiềm Việt Phúc*, 11A1, THPT Võ Thị Sáu, Đất Đỏ; **Hưng Yên**: *Nguyễn Hữu Thịnh*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh**: *Kiều Đình Luân*, 11A1, THPT Hồng Lĩnh, TX. Hồng Lĩnh; **Quảng Nam**: *Nguyễn Đăng Thạch*, 10/2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Văn Cương*, 11A2, THPT Lương Đắc Bằng, *Mai Minh Tùng*, 11B2, THPT Triệu Sơn I, Triệu Sơn, *Hà Việt Anh*, 11F, *Trịnh Văn Vương*, 11T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An**: *Đậu Lệ Thuỷ*, 11A, THPT Quỳnh Lưu IV, *Hoàng Gia Thọ*, 10A6, THPT chuyên Đại học Vinh, *Lê Đình Khiết*, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bắc Giang**: *Nông Thanh Phương*, 9A, THCS Hoàng Hoa Thám, Yên Thế, *Tôn Văn Hiếu*, 11A1, THPT Tân Yên I; **Hải Dương**: *Đặng Đăng Tùng*, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Đồng Nai**: *Phạm Như Truyền*, 11A1, THPT Nguyễn Hữu Cảnh, Biên Hoà; **Hà Tây**: *Nguyễn Ngọc Đăng*, 10A1, THPT Phú Xuyên A; **Bình Định**: *Nguyễn Tấn Công*, 10A4, THPT An Nhơn I; **Bắc Ninh**: *Đào Quang Huy*, 11A1, THPT Quế Võ I, *Trần Việt Long*, 11 Lí, *Nguyễn Thành Linh*, 10 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc**: *Vũ Ngọc Quang*, 12A3, *Văn Đăng Sơn*, 10A3, *Tạ Đức Mạnh*, 10A3, *Phùng Đức Phúc*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Mạnh Cường*, 10A1, *Đỗ Duy Chủng*, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch.

NGUYỄN VĂN THUẬN

MỘT LỜI GIẢI CHO BÀI TOÁN SỐ BẬP BÊNH

NGUYỄN QUỐC KHÁNH
(SV K9, hệ CNTN ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Trên THTT số 341 tháng 11 năm 2005, thầy Phạm Văn Hùng (khối chuyên Toán Tin ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội) đã giới thiệu một loại số đặc biệt, đó là số bập bênh. Có một kí niệm là loại số này thầy đã giới thiệu với chúng tôi cách đây 3 năm, ngày chúng tôi học lớp10 ở khối chuyên. Thời đó chúng tôi cũng đã tìm tòi và vô tình tìm được kết quả đáng ngạc nhiên đến mức thú vị. Đây có lẽ là bài toán số học ấn tượng nhất đối với cá nhân tôi. Nhân dịp thầy giới thiệu bài toán với các bạn trẻ trên tạp chí, tôi cũng xin giới thiệu một cách chứng minh bài toán đó.

✪ **Bài toán 1.** (*Số bập bênh*). *Một số tự nhiên là bập bênh nếu khi đem nó nhân với 9 ta được chính số đó nhưng viết theo thứ tự ngược lại của các chữ số. Chẳng hạn số 1089 là một số bập bênh có 4 chữ số bởi vì 1089.9 = 9801. Hãy tìm tất cả các số bập bênh có n chữ số và tính số các số bập bênh có n chữ số.*

Lời giải. Xét dãy số *Fibonacci* $\{f_n\}$ xác định bởi công thức $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Gọi số các số bập bênh có n chữ số là S_n. Ta sẽ chứng minh số có 4 chữ số 1089 là số *bập bênh* nhỏ nhất và với số tự nhiên $n \geq 4$ thì $S_n = f_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}$ ($[a]$ là kí hiệu phần nguyên của số a).

Thật vậy, kết luận thứ nhất là dễ dàng thu được khi xét trực tiếp với $n = 1, 2, 3$. Xét $n \geq 4$. Giả sử $\overline{a_1a_2...a_n}$ là một số *bập bênh* có n chữ số, nghĩa là

$$9\left(\overline{a_1a_2...a_n}\right) = \overline{a_n...a_2a_1} \qquad (1)$$

Suy ra $a_1 = 1$, $a_n = 9$. Thay vào (1) thì

$$80 + 9\left(\overline{a_2a_3...a_n0}\right) = \overline{a_{n-1}...a_20} \Rightarrow a_2 < 2.$$

Vậy $a_2 = 0$ hoặc $a_2 = 1$.

1. Nếu $a_2 = 1$. Từ (1) lấy theo *mod* 100 suy ra $a_{n-1} = 7$, thay vào (1) được

$$9.(11.10^{n-2} + 79 + \overline{a_3...a_{n-2}00})$$
$$= 97.10^{n-2} + 1 + \overline{a_{n-2}...a_300}.$$

Ta thấy vế trái lớn hơn 99.10^{n-2} và như vậy lớn hơn vế phải. Loại.

2. Nếu $a_2 = 0$. Lấy (1) theo *mod* 100, suy ra $a_{n-1} = 8$. Thay vào (1) ta có

$$9\left(10^{n-1} + 89 + \overline{a_3...a_{n-2}00}\right)$$
$$= 98.10^{n-2} + 1 + \overline{a_{n-2}...a_300} \Rightarrow a_3 > 7.$$

Như vậy a_3 nhận 1 trong 2 giá trị 8 hoặc 9. Gọi số nghiệm trong hai trường hợp này lần lượt là K_n và T_n tương ứng. Khi đó $S_n = K_n + T_n$.

i) **Tính K_n.** Dễ thấy $K_5 = K_6 = 0$. Xét $n \geq 7$. Ta có

$$9\left(\overline{a_4...a_{n-3}}\right) = 8.10^{n-6} + \overline{a_{n-3}...a_4} \qquad (2)$$

Suy ra $a_4 \geq 8$. Xét trực tiếp thấy $a_4 \neq 8 \Rightarrow a_4 = 9$ $\Rightarrow K_7 = 0$, $K_8 = 1$ (số 108901089). Xét $n > 9$, khi đó $9\left(\overline{a_5...a_{n-4}}\right) = \overline{a_{n-4}...a_5}$. Đó là công thức xác định một số *bập bênh* có không quá $n-8$ chữ số (theo (1)) nên $K_n = \sum_{k=4}^{\left[\frac{n}{2}\right]} S_{n-2k}$.

ii) **Tính T_n.** Dễ thấy $T_5 = 1$ (số 10989). Xét $n \geq 6$, lấy (1) theo *mod* 1000 suy ra $a_{n-2} = 9$.

Thay vào (1)

$$9.(109.10^{n-3} + 989 + \overline{a_4...a_{n-3}00})$$
$$= 901 + 989.10^{n-3} + \overline{a_{n-3}...a_4 00}$$
$$\Rightarrow 9\left(\overline{a_4...a_{n-3}}\right) = 8.10^{n-6} - 8 + \overline{a_{n-3}...a_4} \qquad (3)$$

$T_6 = 1$ (số 109989). Xét $n \geq 7$, suy ra $a_4 \geq 8$, lại xét hai trường hợp. Nếu $a_4 = 8$, lấy (1) theo *mod* 1000 thu được $a_{n-3} = 0$, thay vào (1) có

$$9\left(\overline{a_5...a_{n-4}}\right) = 8.10^{n-8} - 8 + \overline{a_{n-4}...a_5}.$$

Theo (2) thì số nghiệm của phương trình này là K_{n-2}. Nếu $a_4 = 9$ thay vào (1) thì thấy

$$\left(\overline{a_5...a_{n-4}}\right) = 8.10^{n-8} - 8 + \overline{a_{n-4}...a_5}.$$

Theo (3) thì số nghiệm của phương trình này là T_{n-2}. Vậy $T_n = K_{n-2} + T_{n-2} = S_{n-2}$.

Tóm lại, ta đã chứng minh được công thức sau của dãy các số S_n

$$S_n = K_n + T_n = S_{n-2} + \sum_{k=4}^{\left[\frac{n}{2}\right]} S_{n-2k}.$$

Đặc biệt, với cách xác định như trên thì dãy các số Fibonacci cũng thỏa mãn công thức truy hồi $f_n = f_{n-2} + \sum_{k=4}^{\left[\frac{n}{2}\right]} f_{n-2k}$.

Phép chứng minh công thức này dành cho bạn đọc như một bài tập. Để ý rằng các giá trị ban đầu của hai dãy $\{S_n\}$ và $\left\{f_{\left[\frac{n}{2}\right]} - 1\right\}$ là hoàn toàn trùng nhau. Do đó ta có $S_n = f_{\left[\frac{n}{2}\right]} - 1$ với mọi số tự nhiên $n \geq 4$. Đây chính là điều cần chứng minh.

Xét dãy các *số bập bênh* dạng đặc biệt sau đây

$$\begin{cases} p_1 = 1089 \\ p_2 = 10989 \\ \dots\dots\dots \\ p_n = 10\underbrace{999...999}_{n-1 \text{ số } 9}89, \ n \text{ là số tự nhiên bất kì} \end{cases}$$

Với sơ đồ chứng minh như trên chúng ta thu được dạng tổng quát như sau của tất cả các số bập bênh $\overline{p_{m_1} p_{m_2} p_{m_n} \ p_{m_{n+1}} p_{m_n} ... p_{m_2} p_{m_1}}$.

Trong đó m_1, m_2, ..., m_n và m_{n+1} là các số tự nhiên tùy ý. ☐

Lời bình. Đây là một bài toán hay, vấn đề đặt ra là khảo sát một loại số đặc biệt. Có thể thấy rõ qua công thức tổng quát xác định một số bập bênh bất kì nêu trên, cấu trúc của các số có tính chất (1) có thể là nguồn gốc của tên gọi thú vị này. Một đặc điểm đặc biệt nữa là trong chứng minh trên chúng ta đã dựa vào (2), (3) để thu được công thức truy hồi đặc biệt của dãy $\{S_n\}$.

Để chính xác, ta có thể gọi các số bập bênh kiểu này là các số 9 – *bập bênh*. Một vấn đề nữa là có các số bập bênh kiểu khác hay không, tức là với số a như thế nào thì tồn tại số a – *bập bênh*, với giả thiết là số a – *bập bênh* là số mà khi đem nhân nó với a ta được chính số đó nhưng viết theo thứ tự ngược lại của các chữ số. Đây là một bài toán cũ nhưng cần phải xét tất cả các trường hợp a là các chữ số. Kết quả là a chỉ có thể là 1, 9 hoặc 4. Đặc biệt, nếu $a = 4$ thì kết quả là tương tự, sự khác biệt có chăng chỉ là ở cách xác định dãy $\{p_n\}$. Khi $a = 4$ vai trò của số 2178 sẽ thay thế vai trò của số 1089 (chú ý 2178.4 = 8712). Cụ thể hơn chúng ta có kết quả:

✪ **Bài toán 2.** *Nếu có bao nhiêu số 4 – bập bênh thì cũng có bấy nhiêu số 9 – bập bênh.*

Chứng minh trực tiếp kết quả này thực sự là một việc rất khó.

Trong số học còn nhiều loại số thú vị đáng chú ý khác. Dưới đây là một số bài toán về các loại số đặc biệt đã xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi.

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T6/350. Let M be a point inside an acute triangle ABC satisfying the condition $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$. Let K and L be the feet of the perpendiculars respectively to AB and AC passing through M. Prove that K and L are in equal distances from the midpoint of BC and the median issued from M of triangle MKL passes through a fixed point when M moves inside triangle ABC.

T7/350. Let be given a right-angled triangle ABC, right at A and AH be its altitude issued from A. A circle passing through B and C cuts AB and AC at M and N respectively. Consider the rectangle $AMDC$. Prove that HN is perpendicular to HD.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOS

T8/350. Let a be a natural number greater than 1. Consider a non empty subset A of $\mathbb{N}$ satysfying the condition: If $k \in A$ then $k + 2a \in A$ and $\left[\frac{k}{a}\right] \in A$ ($[x]$ denotes the integral part of x). Prove that $A = \mathbb{N}$.

T9/350. Find all continuous functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the condition

$$9f(8x) - 9f(4x) + 2f(2x) = 100x$$

for all $x \in \mathbb{R}$.

T10/350. Find the greatest value and the least value of the expression

$$P = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$$

where a, b, c are arbitrary non negative real numbers satisfying the condition $a + b + c = 1$.

T11/350. Let I and G be respectively the incenter and the centroid of a triangle ABC. Let R_1, R_2, R_3 be the circumradii respectively of the triangles IBC, ICA, IAB and let R'_1, R'_2, R'_3 be the circumradii respectively of the triangles GBC, GCA, GAB. Prove that

$$R'_1 + R'_2 + R'_3 \geq R_1 + R_2 + R_3.$$

T12/350. Let $ABCD$ be a tetrahedron, the measures of its sides are: $BC = a$, $DA = a_1$, $CA = b$, $DB = b_1$, $AB = c$, $DC = c_1$ and let G be its centroid. The sphere circumscribing $ABCD$ cuts AG, BG, CG, DG respectively at A_1, B_1, C_1, D_1; let R be its radius. Prove that

$$\frac{4}{R} \leq \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} + \frac{1}{GD_1}$$

$$\leq \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1}\right).$$

Bài toán 3. (*Số đung đưa*). *Một số nguyên dương được gọi là "đung đưa" nếu trong biểu diễn thập phân của nó, hai chữ số bất kì đứng cạnh nhau có một số bằng 0 và một số khác 0, chữ số hàng đơn vị khác 0. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n không có bội số nào là số "đung đưa".*

Bài toán 4. (*Số luân phiên*). *Một số nguyên dương được gọi là "luân phiên" nếu trong biểu diễn thập phân của nó, hai chữ số bất kì đứng cạnh nhau có một số chẵn và một số lẻ. Tìm tất cả các số nguyên dương sao cho nó không có bội số luân phiên nào cả.*

Bài toán 5. (*Số bướng bỉnh*). *Cho các số tự nhiên đôi một nguyên tố cùng nhau a, b, c. Một số tự nhiên gọi là "bướng bỉnh" nếu nó không biểu diễn được dưới dạng xab + ybc + zca với các số tự nhiên x, y, z. Hỏi có bao nhiêu số "bướng bỉnh"?*

Bài toán 6. (*Số kim cương*). *Một số nguyên dương được gọi là "kim cương 2005" nếu trong biểu diễn thập phân của nó có 2005 chữ số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp. Dãy $\{a_n\}$ là dãy tăng ngặt các số nguyên dương thỏa mãn $a_n < nC$ với hằng số thực dương C nào đó. Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ chứa vô hạn các số "kim cương 2005"?*

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 350 (8-2006)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Bìa 1: Đoàn Việt Nam tham dự IMO lần thứ 47 tại Slovenia, từ trái qua phải:

Hàng trước: Hoàng Mạnh Hùng, GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa, Nguyễn Xuân Thọ, Nguyễn Duy Mạnh, Lê Nam Trường, Đặng Bảo Đức, Lê Hồng Quý.

Hàng sau: GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh, thầy giáo Nguyễn Khắc Minh, GS. TSKH. Hà Huy Khoái, PGS. TSKH. Đặng Hùng Thắng, PGS. TSKH. Vũ Đình Hòa, GS. TSKH. Phạm Thế Long.

Bìa 3: **Giải trí toán học – Math Recreation**

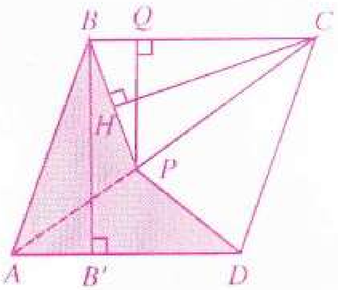
Bìa 4: Trường THPT chuyên Quảng Bình

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THƠ. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 đường Thích Quảng Đức, TX. Thủ Dầu Một, Bình Dương, Tel : 0650.858330

Giải trí toán học

Giải đáp bài Cánh diều viên gạch hoa và cấu trúc phân tử

(Đề đăng trên THTT số 348, tháng 6 năm 2006)



a) Ta có tam giác CBP cân tại C có $\widehat{BCP} = 36^\circ$ nên $\widehat{BPC} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BCP}}{2} = 72^\circ$.

Do A, P, C thẳng hàng nên $\widehat{APB} = 180^\circ - \widehat{BPC} = 180^\circ$.

Lại vì $\widehat{PBC} = 72^\circ$, suy ra $\widehat{ABP} = 180^\circ - \widehat{BAD} - \widehat{PBC} = 36^\circ$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C lên cạnh BP trong tam giác CBP, ta có $BP = 2BH = 2BC.\cos\widehat{PBC} = 2.\cos 72^\circ \approx 0{,}62$.

c) Giả sử Q là chân đường vuông góc kẻ từ P lên cạnh BC trong tam giác BPC thì $PQ = PB.\sin\widehat{PBC} = PB.\sin 72^\circ \approx 0{,}59$.
Suy ra $S_{BPDC} = 2S_{BPC} = BC.PQ \approx 0{,}59$ (đvdt).

Dựng $BB' \perp AD$, lúc đó $BB' = AB.\sin\widehat{BAD} \approx 0{,}95$. Từ đó $S_{ABPD} = S_{ABCD} - S_{BPDC} \approx 0{,}95 - 0{,}59 \approx 0{,}36$ (đvdt).

Vậy diện tích phần cánh diều xấp xỉ là 0,59 (đvdt), phần mũi tên xấp xỉ là 0,36 (đvdt).

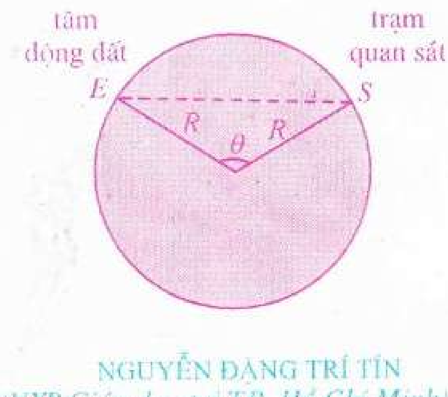
Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng và gọn hơn cả: *Nguyễn Hữu Thanh*, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Mạnh Hưng*, 11A1, THPT Lý Thái Tổ, Từ Sơn, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Tiến Liên*, 8A, THCS Yên Trường, Yên Định, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Anh Tú*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Trần Đức Khoa*, 11/1, THPT Sào Nam, Duy Xuyên, **Quảng Nam**.

NGUYỄN PHÚC

Tính thời gian dự báo động đất NHƯ THẾ NÀO?

Các nhà địa chấn nghiên cứu cấu trúc bên trong của Trái Đất bằng cách phân tích sóng địa chấn tạo ra khi động đất. Giả sử Trái Đất là một môi trường đồng nhất, thì những cơn sóng này sẽ lan truyền theo đường thẳng với vận tốc không đổi v. Ở hình bên thể hiện mặt cắt của Trái Đất với E là tâm động đất và S là trạm quan sát. Người ta tính ra thời gian t để sóng lan truyền xuyên qua đất từ E đến S được cho bởi công thức $t = \dfrac{R}{v}\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ với R là bán kính Trái Đất và θ là góc ở tâm như hình vẽ.

Các bạn hãy thử chứng minh công thức trên nhé!



NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN
(NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh)

TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUẢNG BÌNH

Hiệu trưởng
Trần Thị Minh Hoà

Trường THPT Chuyên Quảng Bình được thành lập ngày 11 tháng 7 năm 1996. Năm học đầu tiên trường có 12 lớp với 420 học sinh và 32 cán bộ, giáo viên, nhân viên. Đến nay trường đã có 26 lớp với 847 học sinh và 88 cán bộ, giáo viên, nhân viên. Qua 10 năm thành lập và trưởng thành, trường không ngừng lớn mạnh về nhiều mặt và đạt được những thành tích đáng kể:

* Trường liên tục nhiều năm đạt được danh hiệu tiên tiến xuất sắc, năm học 2004 - 2005 được Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen, năm học 2005 - 2006 trường đang làm thủ tục trình Bộ GD&ĐT và UBND tỉnh xét công nhận trường đạt chuẩn Quốc gia.

* Trong số 80 cán bộ, giáo viên của trường có 6 Thạc sĩ, 11 giáo viên đang theo học và 11 giáo viên đăng kí học Thạc sĩ vào năm học tới. Đến nay trường có 24 giáo viên đạt danh hiệu Giáo viên dạy giỏi cấp Tỉnh, 8 giáo viên được Bộ GD&ĐT tặng Bằng khen, 4 giáo viên được Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen, 1 giáo viên được Nhà nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba.

Tập thể giáo viên tổ Toán-Tin
trường THPT Chuyên Quảng Bình

* Mười năm qua nhà trường đã đào tạo được 8 khóa trong đó: thi tốt nghiệp hàng năm đỗ 100%, với trên 70% khá giỏi; thi đại học đỗ trên 70%, thi học sinh giỏi Quốc gia đoạt trên 180 giải, 16 em được tham gia vào đội dự tuyển Quốc tế, 1 em đã tham dự và đoạt giải khuyến khích HSG Vật lí Châu Á - Thái Bình Dương. Năm học 2005 - 2006 trường đoạt 41 giải Quốc gia và có 2 em tham gia đội dự tuyển Quốc tế. Năm học 2005 - 2006 cũng là năm đầu tiên trường tham gia kì thi Olympic 30/4 các tỉnh miền Nam và đoạt được 4 Huy chương Vàng, 2 Huy chương Bạc và 9 Huy chương Đồng. Riêng môn Toán có em Trần Đức Thuận, em Lê Đức Anh đã tham gia đội dự tuyển Quốc tế, em Trương Vĩnh Lân đoạt giải Nhì Quốc gia và nhiều em đoạt giải Quốc gia. Hằng năm, nhiều học sinh tham gia giải bài và giải các đề thi do tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tổ chức.

Công tác xã hội hóa giáo dục đã thu hút được đông đảo đối tượng trong và ngoài nước quan tâm. Đến nay, trường đã có phòng thí nghiệm thực hành, phòng dạy vi tính, phòng nghe nhìn, nhà thư viện, dãy phòng học ba tầng, nhà hiệu bộ... đáp ứng yêu cầu dạy - học trong giai đoạn hiện nay.

Trong giai đoạn mới, phát huy truyền thống của nhà trường và quê hương, THPT Chuyên Quảng Bình sẽ vươn lên tầm cao mới xứng đáng với niềm tin yêu của Đảng bộ và nhân dân địa phương.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT52M6

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2006

Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng