NGUYỄN NGỌC KHOA

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

LỚP 11

CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN NGỌC KHOA
(Giáo viên THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT – QUẢNG NGÃI)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

LỚP 11

CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Từ năm học 06 – 07 Bộ Giáo dục đã thực hiện giảng dạy theo chương trình SGK mới. Song song với chương trình mới là phương pháp kiểm tra đánh giá mới, đặc biệt là phương pháp trắc nghiệm khách quan. Theo dự định, năm học này, trong kì thi các cấp môn toán sẽ được thi trắc nghiệm khách quan trên toàn quốc.

Để giúp các học sinh giải tốt các câu hỏi trắc nghiệm, tác giả biên soạn cuốn ***"Phương pháp giải bài tập trắc nghiệm Đại số và Giải tích lớp 11"***.

Tương tự như SGK đại số và giải tích lớp 11, cuốn sách này được chia thành 5 chương.

Chương I : Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác.

Chương II : Tổ hợp và xác suất.

Chương III : Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân.

Chương IV : Giới hạn.

Chương V : Đạo hàm.

Mỗi chương được chia thành nhiều phần tương ứng với các tiết học trong SGK, mỗi phần có nhiều câu trắc nghiệm theo phân bố từ dễ đến khó, cuối mỗi phần có phần hướng dẫn giải và đáp số. Trong phần hướng dẫn giải, sau mỗi bài giải có nêu phương pháp cụ thể để học sinh củng cố kiến thức và nâng cao kĩ năng giải toán.

Dù đã rất cố gắng nhưng không thể tránh khỏi thiếu sót, rất mong bạn đọc gần xa góp ý để cuốn sách ngày càng hoàn thiện, tác giả vô cùng biết ơn.

TÁC GIẢ

SƠ LƯỢC VỀ KIỂM TRA VÀ ĐÁNH GIÁ BẰNG TRẮC NGHIỆM

I. Phân loại các phương pháp trắc nghiệm

Trắc nghiệm theo nghĩa rộng là một phép đánh giá cụ thể mức độ, khả năng trong một lĩnh vực cụ thể. Trắc nghiệm viết được chia thành hai loại chính:

- Các câu hỏi tự luận: Các câu hỏi trả lời theo dạng mở, thí sinh phải trả lời các câu hỏi nêu ra trong một bài viết (trước năm 2006 ta thi dưới dạng này).
- Các câu hỏi trắc nghiệm khách quan: Một bài thi thường gồm nhiều câu hỏi, thí sinh trả lời câu hỏi rất ngắn gọn (thông thường là gạch chéo, hoặc bôi đen câu chọn đúng).

Vì thói quen ta gọi tắt trắc nghiệm khách quan là trắc nghiệm.

II. Loại câu trắc nghiệm khách quan

Trong bộ môn toán ta gặp các câu dạng sau:

1. *Câu ghép đôi:* Thí sinh phải ghép từng cặp hai nhóm từ ở hai cột khác nhau để được một câu phù hợp với yêu cầu của câu hỏi nêu ra

Ví dụ: Gieo một đồng tiền hai lần. Xét các biến cố:

A: "Kết quả của hai lần gieo là như nhau"

B: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp"

C: "Lần gieo thứ hai mới xuất hiện mặt sấp".

Hãy ghép mỗi thành phần của cột trái với một thành phần thích hợp ở cột phải để được một khẳng định đúng:

1. P(A) = 2. P(B) = 3. P(C) =	a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

Hướng dẫn

Không gian mẫu $\Omega = \{SS; NN; SN; NS\}$; $A = \{SS; NN\}$;

$$B = \{SN; NS; SS\}; C = \{NS\};$$

$\Rightarrow N(\Omega) = 4;$ $\quad N(A) = 2; N(B) = 3N(C) = 1$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{4}; \quad P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

Vậy 1. $\rightarrow$ b); 2. $\rightarrow$ d); 3. $\rightarrow$ a).

Chú ý rằng hình thức trắc nghiệm này chỉ sử dụng kiểm tra tại lớp.

2. ***Câu đúng sai:*** Đưa ra một khẳng định mà thí sinh phải lựa chọn một trong hai phương án: đúng, sai.

Ví dụ: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Hàm số y = tanx có chu kì T = π đúng ☐; sai ☐

b) Hàm số y = cos2x là hàm số lẻ đúng ☐; sai ☐

c) Phương trình sinx = 2 có nghiệm đúng ☐; sai ☐.

Hướng dẫn

a) Câu a ta tréo vào ô đúng.

b) Câu b ta tréo vào ô sai.

c) Câu c ta tréo vào ô sai.

Hình thức trắc nghiệm này cũng chỉ được sử dụng kiểm tra tại lớp.

3. ***Câu điền khuyết:*** Nêu một mệnh đề có khuyết một bộ phận, thí sinh phải điền vào để được một mệnh đề đúng.

Trong bộ môn toán, hình thức trắc nghiệm này ít khi được sử dụng.

4. ***Câu trả lời ngắn:*** Là câu trắc nghiệm mà thí sinh phải trả lời ngắn gọn.

Trong bộ môn toán hình thức trắc nghiệm này ít khi được sử dụng.

5. ***Câu nhiều lựa chọn:*** Đưa ra một phương án và một số câu trả lời (thường là 3 hoặc 4), thí sinh chọn một phương án đúng.

Cấu trúc câu trắc nghiệm nhiều lựa chọn có hai phần:

- Phần đầu được gọi là phần dẫn: Phần này nêu ra vấn đề, cung cấp thông tin, hoặc nêu một câu hỏi.
- Phần sau nêu các phương án trả lời được đánh dấu bằng các chữ cái a, b, c... hoặc các chữ số 1, 2, 3,... Trong các phương án trên chỉ có một phương án đúng.

Ví dụ: Biểu diễn cung $x = \frac{k2\pi}{5}$ với mọi số nguyên k trên đường tròn lượng giác ta có bao nhiêu điểm phân biệt?

a) 5 điểm b) 8 điểm c) 10 điểm d) 6 điểm.

Trong các kiểu câu trắc nghiệm đã nêu, câu nhiều lựa chọn được sử dụng phổ biến, vì chúng có cấu trúc thích hợp trong việc chấm bằng máy.

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 1: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Hàm số y = sinx có tập xác định là R ☐ đúng, ☐ sai

b) Hàm số y = cosx có tập xác định là $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, \forall k \in Z\}$

☐ đúng, ☐ sai

c) Hàm số y = tanx có tập xác định là $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, \forall k \in Z\}$

☐ đúng, ☐ sai

d) Hàm số y = cotx có tập xác định là $R \setminus \{k\pi \,/\, \forall k \in Z\}$

☐ đúng, ☐ sai.

Câu 2: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được một khẳng định đúng.

1. Hàm số y = sin2x có tập xác định là	a) $R \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \,/\, \forall k \in Z\}$
2. Hàm số y = tan2x có tập xác định là	b) R
3. Hàm số y = cot2x có tập xác định là	c) $\{k\frac{\pi}{2} \,/\, \forall k \in Z\}$
	d) $R \setminus \{k\frac{\pi}{2} \,/\, \forall k \in Z\}$.

Câu 3: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được một khẳng định đúng.

1. Hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ có tập xác định là	a) $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, \forall k \in Z\}$
2. Hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ có tập xác định là	b) $R \setminus \{k\pi \,/\, \forall k \in Z\}$
3. Hàm số y = tanx + cotx có tập xác định là	c) $R \setminus \{k2\pi \,/\, \forall k \in Z\}$
	d) $R \setminus \{k\frac{\pi}{2} \,/\, \forall k \in Z\}$.

Câu 4: Chọn khẳng định đúng:

a) Hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ có tập xác định là các đoạn

$[-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi]$.

b) Hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ có tập xác định là các đoạn $[k2\pi; \pi + k2\pi]$.

c) Hàm số $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ có tập xác định là các đoạn

$[k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi]$.

c) Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ có tập xác định là $(k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$.

Câu 5: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Hàm số y = sinx là hàm số chẵn ☐ đúng, ☐ sai

b) Hàm số y = cosx là hàm số chẵn ☐ đúng, ☐ sai

c) Hàm số y = tanx là hàm số lẻ ☐ đúng, ☐ sai

d) Hàm số y = cotx là hàm số lẻ ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 6: Chọn khẳng định đúng:

a) Hàm số y = cos2x là hàm số lẻ

b) Hàm số $y = \sin^2 x$ là hàm số lẻ

c) Hàm số y = tan2x là hàm số lẻ

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 7: Chọn khẳng định đúng:

a) Hàm số $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ là hàm số chẵn

b) Hàm số $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ là hàm số chẵn

c) Hàm số $y = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ là hàm số lẻ

d) Cả ba khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 8: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Hàm số $y = \sin x$ có chu kì $T = \pi$ ☐ đúng, ☐ sai

b) Hàm số $y = \cos x$ có chu kì $T = 2\pi$ ☐ đúng, ☐ sai

c) Hàm số $y = \tan x$ có chu kì $T = \pi$ ☐ đúng, ☐ sai

d) Hàm số $y = \cot x$ có chu kì $T = 2\pi$ ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 9: Hàm số $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ có chu kì bằng:

a) π b) 2π c) 0 d) 3π.

Câu 10: Hàm số $y = \sin 4x$ có chu kì bằng:

a) 0 b) 2π c) π d) $\frac{\pi}{2}$.

Câu 11: Hàm số $y = \tan 2x$ có chu kì bằng:

a) 2π b) π c) 3π d) $\frac{\pi}{2}$.

Câu 12: Chọn khẳng định đúng:

a) Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kì $T = \frac{\pi}{2}$

b) Hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$ có chu kì $T = 2\pi$

c) Hàm số $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ có chu kì $T = \pi$

d) Hàm số $y = \sin 3x$ có chu kì $T = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 13: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là đoạn $[-1; 1]$ ☐ đúng, ☐ sai

b) Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là R ☐ đúng, ☐ sai

c) Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là R ☐ đúng, ☐ sai

d) Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là đoạn $[-1; 1]$ ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 14: Cho hàm số $y = 2 + 3\sin x$. Giá trị nhỏ nhất m, giá trị lớn nhất M của hàm số bằng bao nhiêu?

a) $m = 1, M = 5$ b) $m = -1, M = 5$

c) $m = -5, M = 1$ d) $m = -5, M = -1$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \tan^2 x - 4\tan x + 2$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng:

a) -2 b) 2 c) -1 d) 1.

Câu 16: Cho hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 2$. Giá trị nhỏ nhất m, giá trị lớn nhất M bằng:

a) $m = 1, M = 7$ b) $m = -1, M = 7$

c) $m = -7, M = 1$ d) $m = -7, M = -1$.

Câu 17: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Với mọi số thực x, y, ta có $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

☐ đúng, ☐ sai

b) Với mọi số thực x, y, ta có $\sin x + \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

☐ đúng, ☐ sai

c) Với mọi số thực x, y, ta có $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

☐ đúng, ☐ sai

d) Với mọi số thực x, y, ta có $\sin x - \sin y = -2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

☐ đúng, ☐ sai.

Câu 18: Với mọi số thực x, hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được các khẳng định đúng.

1. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x =$	a) $\sin 3x(2\cos x + 1)$
2. $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x =$	b) $-\sin 2x(-2\sin x + 1)$
3. $\cos x - \sin 2x - \cos 3x =$	c) $\sin 3x(2\sin x + 1)$
	d) $\sin 2x(2\cos x + 1)$

Câu 19: Với mọi số thực x, giá trị của biểu thức

$A = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ bằng giá trị biểu thức nào dưới đây:

a) $4\sin x.\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}$ b) $4\cos x.\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}$

c) $4\cos x.\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$ d) $4\cos x.\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}$.

Câu 20: Với mọi số thực x thuộc tập xác định, giá trị biểu thức

$A = \dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$ bằng:

a) cot2x b) tanx c) cotx d) tan2x.

Câu 21: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Với mọi số thực x, y, ta có: $\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

☐ đúng, ☐ sai

b) Với mọi số thực x, y, ta có: $\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$

☐ đúng, ☐ sai

c) Với mọi số thực x, y, ta có: $\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$

☐ đúng, ☐ sai.

Câu 22: Với mọi tam giác ABC, giá trị của biểu thức

$S = \sin A + \sin B + \sin C$ bằng giá trị của biểu thức nào dưới đây:

a) $4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$ b) $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

c) $4\sin A\sin B\sin C$ d) $4\cos A\cos B\cos C$.

Câu 23: Với mọi tam giác ABC, giá trị biểu thức

$S = \cos A + \cos B + \cos C$ bằng giá trị biểu thức nào dưới đây:

a) $1 + 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$ b) $1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

c) $1 - 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$ d) $1 - 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

Câu 24: Với mọi tam giác ABC, giá trị biểu thức

$S = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ bằng giá trị biểu thức nào dưới đây:

a) $4\sin A\sin B\sin C$ b) $4\cos A\cos B\cos C$

c) $1 + 4\sin A\sin B\sin C$ d) $1 + 4\cos A\cos B\cos C$.

Câu 25: Với mọi tam giác không vuông ABC, giá trị biểu thức

$S = \tan A + \tan B + \tan C$ bằng giá trị nào dưới đây:

a) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

b) $\tan A\tan B + \tan A\tan C + \tan B\tan C$

c) $\tan A\tan B\tan C$

d) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

Câu 26: Với mọi tam giác ABC, giá trị của biểu thức

$S = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ bằng giá trị biểu thức nào dưới đây:

a) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ b) $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}$

c) 2 d) 1.

Câu 27: Tam giác ABC có 3 góc A, B, C thỏa mãn:

$2\sin A\sin B(1 - \cos C) = 1$. Giá trị góc A bằng bao nhiêu?

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$.

Câu 28: Cho tam giác ABC có 3 góc A, B, C thỏa mãn:

$\sin A = \frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C}$. Giá trị của góc A bằng bao nhiêu?

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{6}$.

Câu 29: Với mọi tam giác ABC không vuông thỏa mãn:

$\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$. Chọn khẳng định đúng:

a) Tam giác ABC cân tại A b) Tam giác ABC cân tại B

c) Nếu $A = 30^0$ thì $C = 30^0$ d) Tam giác ABC cân tại C.

Câu 30: Chọn khẳng định đúng:

a) $\sin x + \sin y \geq 2\cos\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y $\in (0; \pi)$

b) $\sin x + \sin y \leq 2\cos\frac{x+y}{2}$ với mọi số thực x, y

c) $\sin x + \sin y \leq 2\sin\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y $\in (0; \pi)$

d) $\sin x + \text{sinn}y \leq 2\cos\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y $\in (0; \pi)$.

Câu 31: Chọn khẳng định đúng:

a) $\cos x + \cos y \leq 2\cos\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y thỏa mãn $x + y \in (0; \pi)$

b) $\cos x + \cos y \geq 2\cos\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y thỏa mãn $x + y \in (0; \pi)$

c) $\cos x + \cos y \leq 2\cos\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y

d) $\cos x + \cos y \geq 2\cos\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y.

Câu 32: Chọn khẳng định đúng:

a) $\sin x + \sin 2y \geq 2\sin(x + y)$ với mọi x, y $\in (0; \pi)$

b) $\sin 2x + \sin 2y \leq 2\sin(x + y)$ với mọi x, y $\in (0; \pi)$

c) $\sin 2x + \sin 2y \leq 2\cos(x + y)$ với mọi x, y

d) $\sin 2x + \sin 2y \leq 2\sin(x + y)$ với mọi $x + y \in (0; \pi)$.

Câu 33: Chọn khẳng định đúng:

a) $\tan x + \tan y \geq 2\tan\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y $\in (0; \frac{\pi}{2})$

b) $\tan x + \tan y \leq 2\tan\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y $\in (0; \frac{\pi}{2})$

c) $\tan x + \tan y > 2\tan\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y $\in (0; \pi)$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 34: Cho tam giác ABC thỏa mãn: $\cos A + \cos B = 2\sin\frac{C}{2}$. Chọn khẳng định đúng:

a) Tam giác ABC vuông tại A b) Tam giác ABC vuông tại B

c) $C = A = 30^0$ d) Tam giác ABC cân tại C.

Câu 35: Với mọi tam giác ABC, giá trị lớn nhất của biểu thức

$S = \cos A + \cos B + 2\cos C$ là:

a) 2 b) $\frac{9}{4}$ c) 3 d) $\frac{5}{2}$.

Câu 36: Với mọi tam giác ABC, biểu thức

$S = \sin 2A + \sin 2B + \cos 2C$ đạt giá trị lớn nhất khi:

a) $A = 30^0$ b) $A = 45^0$ c) $A = 60^0$ d) $A = 75^0$.

Câu 37: Với mọi tam giác nhọn ABC. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$S = \tan A + \tan B + 6\tan\frac{C}{2}$ là:

a) 3 b) $4\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{3}$ d) 5.

Hướng dẫn

Câu 1: a) Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là R. **ĐS:** đúng.

b) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là R. **ĐS:** sai.

c) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / \forall k \in Z\}$.

ĐS: đúng.

d) Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $R \setminus \{k\pi / \forall k \in Z\}$.

ĐS: đúng.

Câu 2: 1. Hàm số $y = \sin 2x$ có tập xác định R.

Vậy 1. $\leftrightarrow$ b).

2. Hàm số $y = \tan 2x$ xác định $\Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Vậy 2. $\leftrightarrow$ a).

Chú ý: Hàm số $y = \tan u$ xác định $\Leftrightarrow u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, với $\forall k \in Z$.

3. Hàm số $y = \cot 2x$ xác định $\Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy 3. $\leftrightarrow$ d).

Chú ý: Hàm số $y = \cot u$ xác định $\Leftrightarrow u \neq k\pi$, với $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3: Để giải bài toán này ta sử dụng đường tròn lượng giác.

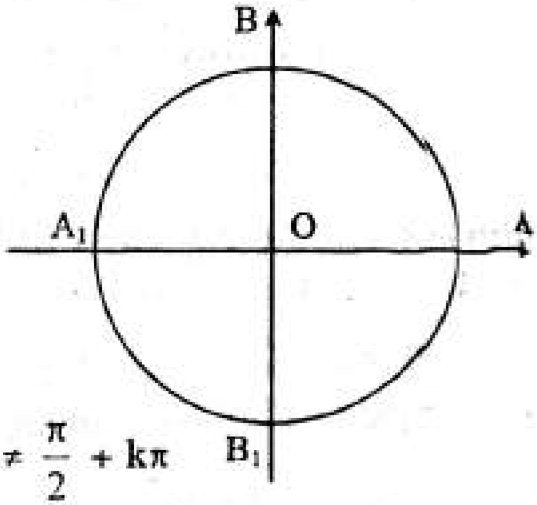
1. Hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ xác định

$\Leftrightarrow \sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq k\pi$.

(Điểm biểu diễn cung x khác với A, A_1)

Vậy 1. $\leftrightarrow$ b).



2. Hàm số $y = \dfrac{1}{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

(Điểm biểu diễn cung x khác B, B_1).

Vậy 2. $\leftrightarrow$ a).

3. Hàm số $y = \tan x + \cot x$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq l\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

(Điểm biểu diễn của cung x khác các điểm A, A_1, B, B_1).

Vậy 3. $\leftrightarrow$ d).

Câu 4: a) $y = \sqrt{\sin x}$ xác định $\Leftrightarrow \sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [k2\pi; \pi + k2\pi]$.

(Điểm biểu diễn cung x nằm phía trên trục cos).

Câu a sai.

b) $y = \sqrt{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi]$

(Điểm biểu diễn cung x nằm phía tay phải trục sin).

Câu b sai.

c) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi]$.

(Điểm biểu diễn cung x thuộc góc phần tư thứ nhất).

ĐS: Câu c.

Câu 5: a) Hàm số y = sinx là hàm số lẻ. **ĐS:** sai.

b) Hàm số y = cosx là hàm số chẵn. **ĐS:** đúng.

c) Hàm số y = tanx là hàm số lẻ. **ĐS:** đúng.

d) Hàm số y = cotx là hàm số lẻ. **ĐS:** đúng.

Câu 6: a) $y = \cos 2x$.

- Tập xác định D = R.
- Với $\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$

$$f(-x) = \cos[2(-x)] = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x).$$

Vậy $y = \cos 2x$ là hàm số chẵn.

b) $y = \sin^2 x$.

- Tập xác định D = R.
- Với $\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$

$$f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x).$$

Vậy $y = \sin^2 x$ là hàm số chẵn.

c) $y = \tan 2x$.

- Tập xác định $D = R \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} / \forall k \in Z\}$.
- Với $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = \tan[2(-x)] = \tan(-2x) = -\tan 2x = -f(x).$$

Vậy $y = \tan 2x$ là hàm số lẻ.

ĐS: Câu c.

Câu 7: a) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$.

Với $x = \frac{\pi}{6}$:

$$f(-\frac{\pi}{6}) = \cos(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$f(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vì $f(-\frac{\pi}{6}) \neq f(\frac{\pi}{6})$; nên f(x) không phải là hàm số chẵn.

b) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$.

Với $x = \frac{\pi}{6}$:

$$f(-\frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$$

$$f(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Vì $f(-\frac{\pi}{6}) \neq f(\frac{\pi}{6})$: nên f(x) không phải là hàm số chẵn.

c) $y = \tan(x - \frac{\pi}{3})$.

$y = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ xác định $\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi$.

Tập xác định $D = R \setminus \{\frac{5\pi}{6} + k\pi \ / \ \forall k \in Z\}$.

Nhận xét rằng: $x = -\frac{5\pi}{6} \in D$ nhưng $-x = \frac{5\pi}{6} \notin D$.

Vậy f(x) không là hàm số lẻ. **ĐS:** Câu d.

Câu 8: a) Hàm số $y = \sin x$ có chu kì $T = 2\pi$. **ĐS:** sai.

b) Hàm số $y = \cos x$ có chu kì $T = 2\pi$. **ĐS:** đúng.

c) Hàm số $y = \tan x$ có chu kì $T = \pi$. **ĐS:** đúng.

d) Hàm số $y = \cot x$ có chu kì $T = 2\pi$. **ĐS:** sai.

Câu 9: **ĐS:** Câu b.

Câu 10: $y = \sin 4x$.

- Chu kì của hàm số nếu có phải là số dương, câu a sai. Ta kiểm tra đẳng thức: $f(x + T) = f(x)$ theo giá trị dương T từ nhỏ đến lớn $(\frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi)$ giá trị nào thỏa mãn ta nhận (không thử tiếp).

- Với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = \sin[4(x + \frac{\pi}{2})] = \sin(4x + 2\pi) = \sin 4x.$$

Câu d đúng. **ĐS:** Câu d.

Chú ý: Ta có kết quả tổng quát sau: cho $a \neq 0$, hàm số $y = \sin ax$ có chu kì $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

Câu 11: Chu kì của hàm số nếu có phải là số dương, câu a sai. Ta kiểm tra đẳng thức $f(x + T) = f(x)$ theo giá trị dương T từ nhỏ đến lớn ($\dfrac{\pi}{2}$, π, 2π, 3π) giá trị nào thỏa mãn ta nhận (không thử tiếp).

Với mọi $x \in R$: $f(x + \dfrac{\pi}{2}) = \tan[2(x + \dfrac{\pi}{2})] = \tan(2x + \pi) = \tan 2x$.

ĐS: Câu d.

Câu 12: a) $y = \sin 2x$.

Vì $f(\dfrac{\pi}{4}) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$,

$$f(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \sin[2(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})] = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \neq f(\frac{\pi}{4}).$$

Vậy hàm số $y = \sin 2x$ không thể có chu kì bằng $\dfrac{\pi}{2}$.

b) $y = \cos\dfrac{x}{2}$.

$$f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = \cos(\frac{\pi}{4} + \pi) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq f(\frac{\pi}{2})$$

Vậy hàm số $y = \cos\dfrac{x}{2}$ không thể có chu kì bằng 2π.

c) $y = \sin(x + \dfrac{\pi}{3})$ có chu kì 2π. **ĐS:** Câu d.

(trên đây ta dùng kiểu suy luận loại trừ).

Câu 13: a) Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là đoạn $[-1; 1]$. **ĐS:** đúng.

b) Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là đoạn $[-1; 1]$. **ĐS:** sai.

c) Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là R. **ĐS:** đúng.

d) Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là R. **ĐS:** sai.

Câu 14: Vì $-1 \le \sin x \le 1$, nên: $-1 \le 2 + 3\sin x \le 5$ hay $-1 \le y \le 5$.

- $y = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

- $y = 5 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. **ĐS:** Câu b.

Câu 15: Đặt $t = \tan x$, $t \in R$. Bài toán qui về tìm GTNN, GTLN của hàm $y = t^2 - 4t + 2$ trên R.

Hàm số $y = t^2 - 4t + 2$ là hàm bậc hai có $-\dfrac{b}{2a} = 2$, vì vậy y đạ

GTNN bằng $y(2) = -2$. **ĐS:** Câu a.

Câu 16: $y = \sin^2 x - 4\sin x + 2$.

Đặt $t = \sin x$, điều kiện: $-1 \le t \le 1$. Bài toán qui về tìm GTNN, GTLN của hàm số

$$y = t^2 - 4t + 2 \text{ trên } [-1; 1].$$

Vì hàm số $y = t^2 - 4t + 2$ là hàm bậc hai có $-\dfrac{b}{2a} = 2 \notin [-1; 1]$,

$y(-1) = 7$, $y(1) = -1$

Vậy GTNN của y bằng -1, GTLN của y bằng 7 **ĐS:** Câu b.

Câu 17:

a) Với mọi số thực x, y, ta có $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

ĐS: đúng.

b) Với mọi số thực x, y, ta có $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

ĐS: sai.

c) Với mọi số thực x, y, ta có $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

ĐS: đúng.

d) Với mọi số thực x, y, ta có $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

ĐS: sai.

Câu 18: 1. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x$

$= 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1) = 2\sin x\cos x(2\cos x + 1)$

Vậy 1. → d).

2. $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = (\sin 4x + \sin 2x) + \sin 3x$

$= 2\sin 3x\cos x + \sin 3x$

$= \sin 3x(2\cos x + 1)$.

Vậy 2. → a).

3. $\cos x - \sin 2x - \cos 3x = (\cos x - \cos 3x) - \sin 2x$

$= 2\sin 2x\sin x - \sin 2x = -\sin 2x(-2\sin x + 1)$.

Vậy 3. → b).

Câu 19: $A = (\sin 3x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 2x) = 2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x$

$= 2\cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 4\cos x.\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 20: Ta có: $A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \frac{(\sin 3x + \sin x) + \sin 2x}{(\cos 3x + \cos x) + \cos 2x}$

$= \frac{2\sin 2x.\cos x + \sin 2x}{2\cos 2x\cos x + \cos 2x} = \frac{\sin 2x(2\cos x + 1)}{\cos 2x(2\cos x + 1)}$

$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$. **ĐS:** Câu d.

Câu 21: a) Với mọi số thực x, y, ta có: $\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

ĐS: đúng.

b) Với mọi số thực x, y, ta có: $\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

ĐS: sai.

c) Với mọi số thực x, y, ta có: $\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$

ĐS: đúng.

Câu 22: $S = (\sin A + \sin B) + \sin C$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2})$

$= 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}) = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$.

ĐS: Câu b.

Câu 23: $S = (\cos A + \cos B) + \cos C$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}) + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}) + 1$$

$$= 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1.$$

ĐS: Câu b.

Câu 24: $S = (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + \sin 2C$

$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C = 2\sin C[\cos(A-B) + \cos C]$

$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 4\sin A\sin B\sin C.$

ĐS: Câu a.

Câu 25: Ta có: $\tan C = -\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\tan A\tan B - 1}$

$\Rightarrow \quad \tan C(\tan A\tan B - 1) = \tan A + \tan B$

$\Leftrightarrow \quad \tan A\tan B\tan C - \tan C = \tan A + \tan B$

$\Leftrightarrow \quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C.$

ĐS: Câu c.

Câu 26: Ta có: $\tan\dfrac{C}{2} = \cot(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}) = \dfrac{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}$

$\Rightarrow \quad \tan\dfrac{C}{2}(\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}) = 1 - \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{B}{2} = 1 - \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} = 1.$

ĐS: Câu d.

Câu 27: $2\sin A\sin B(1 - \cos C) = 1 \Leftrightarrow [\cos(A-B) - \cos(A+B)](1 - \cos C) = 1$

$\Leftrightarrow \quad [\cos(A-B) + \cos C](1 - \cos C) = 1$

$\Leftrightarrow \quad \cos(A-B)(1 - \cos C) + \cos C - \cos^2 C - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad [1 - \cos(A-B)](1 - \cos C) + \cos^2 C = 0 \qquad (*)$

Do $1 - \cos(A - B) \ge 0$; $1 - \cos C > 0$; $\cos^2 C \ge 0$, nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(A - B) = 1 \\ \cos C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \dfrac{\pi}{2} \\ A = B = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

ĐS: Câu c.

Câu 28: Ta có: $\sin A = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

$$\frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} = \frac{2\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B+C}{2}} = \frac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}$$

Vì vậy $\sin A = \dfrac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}.$$

ĐS: Câu b.

Câu 29: Ta có: $\tan A + \tan B = 2\cot\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = 2.\dfrac{\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin C}{\cos A\cos B} = 2\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}} \Leftrightarrow \frac{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos A\cos B} = 2\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{C}{2} = 2\cos A\cos B \Leftrightarrow 1 - \cos C = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos C = -\cos C + \cos(A - B) \Leftrightarrow \cos(A - B) = 1$$

$$\Leftrightarrow A = B.$$

Vậy ABC là tam giác cân tại C. **ĐS:** Câu d.

Câu 30: Ta chứng minh câu c đúng: $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Với mọi x, y $\in (0; \pi) \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in (0; \pi) \Rightarrow \sin\frac{x+y}{2} > 0$.

Lại do $\cos\frac{x-y}{2} \le 1$, vì vậy từ (*) ta có

$\sin x + \sin y \le 2\sin\frac{x+y}{2}$ với mọi x, y $\in (0; \pi)$. **ĐS:** Câu c.

> ***Chú ý:*** **Ta có thể chọn câu trả lời theo phương pháp loại trừ:**
>
> • Cho $x = y = \frac{\pi}{6}$: $\sin x + \sin y = 1$; $2\cos\frac{x+y}{2} = \sqrt{3}$
>
> Vậy khẳng định ở câu a sai.
>
> • Cho $x = y = \frac{\pi}{2}$: $\sin x + \sin y = 2$; $2\cos\frac{x+y}{2} = 0$
>
> Vậy khẳng định ở câu b, câu d sai.
>
> Vậy khẳng định ở câu c đúng.

Câu 31: Ta chứng minh khẳng định ở câu a đúng:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad (*)$$

Với mọi $x + y \in (0; \pi) \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos\frac{x+y}{2} > 0$.

Lại do $\cos\frac{x-y}{2} \le 1$, nên từ (*) ta có:

$\cos x + \cos y \le 2\cos\frac{x+y}{2}$. **ĐS:** Câu a.

Ta cũng có thể dùng phương pháp loại trừ để trả lời câu hỏi này.

Câu 32: Chọn khẳng định đúng:

Ta có thể chứng minh câu d đúng. Ta có.

$$\sin 2x + \sin 2y = 2\sin(x+y)\cos(x-y) \qquad (*)$$

Với mọi $x + y \in (0; \pi)$ ta có $\sin(x + y) > 0$. Lại do $\cos(x - y) \le 1$, vì vậy từ (*) ta có:

$\sin 2x + \sin 2y \le 2\sin(x + y)$. **ĐS:** Câu d.

Câu 33: Ta chứng minh khẳng định ở câu a đúng.

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]}$$

$$= \frac{4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} \geq \frac{4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{1+\cos(x-y)}$$

$$= \frac{4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\cos^2\frac{x+y}{2}} = 2\tan\frac{x+y}{2}$$ **ĐS:** Câu a.

Câu 34: Ta chứng minh $\cos A + \cos B \leq 2\sin\frac{C}{2}$, dấu "=" $\Leftrightarrow A = B$.

Ta có: $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ (*)

Vì $\sin\frac{C}{2} > 0$ và $\cos\frac{A-B}{2} \leq 1$, nên từ (*) ta có

$\cos A + \cos B \leq 2\sin\frac{C}{2}$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow \cos\frac{A+B}{2} = 1 \Leftrightarrow A = B$. **ĐS:** Câu d.

Câu 35: Theo câu 34 ta có $\cos A + \cos B \leq 2\sin\frac{C}{2}$, dấu "=" $\Leftrightarrow A = B$

$$\Rightarrow S \leq 2\sin\frac{C}{2} + 2\cos C = 2\sin\frac{C}{2} + 2 - 4\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= -4\sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2} + 2$$

Đặt $t = \sin\frac{C}{2}$, điều kiện $0 < t < 1$. Bài toán qui về tính GTLN của hàm $f(t) = -4t^2 + 2t + 2$ với $0 < t < 1$.

$f(t)$ là hàm bậc hai có hệ số $a = -4 < 0$, $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4} \in (0; 1)$.

Vậy trên $(0; 1)$, $f(t)$ đạt GTLN bằng $f(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 2 = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow S \le \dfrac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$, hệ này luôn có nghiệm.

Vậy GTLN của S bằng $\dfrac{9}{4}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 36: Theo câu 14, ta có: $\sin 2A + \sin 2B \le 2\sin C$, dấu "=" $\Leftrightarrow A = B$

$\Rightarrow \quad S \le 2\sin C + (1 - 2\sin^2 C) = -2\sin^2 C + 2\sin C + 1$.

Đặt $t = \sin C$, điều kiện $0 < t < 1$.

Bài toán qui về tính GTLN của hàm $f(t) = -2t^2 + 2t + 1$ với $0 < t < 1$

$f(t)$ là tam thức bậc hai có hệ số $a = -2 < 0$, $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2} \in (0;\ 1)$

Vì vậy GTLN của $f(t)$ trên $(0;\ 1)$ bằng $f(\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{2} + 2.\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad S \le \dfrac{3}{2}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \sin C = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C = 30^0,\ A = B = 75^0$.

ĐS: Câu d.

Câu 37: Theo câu 15 ta có: $\tan A + \tan B \ge 2\cot\dfrac{C}{2}$, dấu "=" $\Leftrightarrow A = B$

$\Rightarrow \quad S \ge 2\cot\dfrac{C}{2} + 6\tan\dfrac{C}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $2\cot\dfrac{C}{2}$ và $6\tan\dfrac{C}{2}$, ta có:

$$2\cot\frac{C}{2} + 6\tan\frac{C}{2} \ge 2\sqrt{12\cot\frac{C}{2}\tan\frac{C}{2}} = 4\sqrt{3}.$$

Đẳng thức $\Leftrightarrow 2\cot\dfrac{C}{2} = 6\tan\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \tan^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow \quad S \ge 4\sqrt{3}$. Đẳng thức $\Leftrightarrow A = B = C$. **ĐS:** Câu c.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Câu 1: Biểu diễn cung $x = \frac{k2\pi}{5}$ với mọi số nguyên k trên đường tròn lượng giác, ta có bao nhiêu điểm phân biệt?

a) 5 điểm b) 8 điểm c) 10 điểm d) 6 điểm.

Câu 2: Biểu diễn cung $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{5}$ với mọi số nguyên k trên đường tròn lượng giác ta có bao nhiêu điểm phân biệt?

a) 5 điểm b) 8 điểm c) 10 điểm d) 12 điểm.

Câu 3: $\sin\frac{k\pi}{3}$ với mọi số nguyên k nhận bao nhiêu giá trị khác nhau?

a) 3 giá trị b) 4 giá trị c) 5 giá trị d) 6 giá trị.

Câu 4: $\tan\frac{k2\pi}{5}$ với mọi số nguyên k nhận bao nhiêu giá trị khác nhau?

a) 3 giá trị b) 4 giá trị c) 5 giá trị d) 6 giá trị.

Câu 5: $\cos\frac{k2\pi}{5}$ với mọi số nguyên k nhận bao nhiêu giá trị khác nhau?

a) 3 giá trị b) 4 giá trị c) 5 giá trị d) 6 giá trị.

Câu 6: Cho a là số thực bất kì. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Với mọi số thực a, phương trình $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = \pm a + k2\pi$, với mọi số nguyên k ☐ đúng, ☐ sai

b) Với mọi số thực a, phương trình $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + k2\pi$, với mọi số nguyên k ☐ đúng ☐ sai

c) Với mọi $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$, với mọi số nguyên k ☐ đúng ☐ sai

d) Với mọi $a \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, phương trình $\cot x = \cot a \Leftrightarrow x = a + k2\pi$, với mọi số nguyên k ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 7: Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là nghiệm của phương trình $\cot(2x - 10^0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$?

a) $x = 125^0$ b) $x = -55^0$

c) $x = 215^0$ d) Các giá trị trên đều là nghiệm.

Câu 8: Cho phương trình $\cos 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (1), và số nguyên bất kì k

Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là nghiệm của (1):

a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ b) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$

c) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}$ d) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 9: Phương trình $\sin x = \sin 2x$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0; 2\pi]$?

a) 2 nghiệm b) 3 nghiệm c) 4 nghiệm d) 5 nghiệm.

Câu 10: Phương trình $\cos 3x = \cos x$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0; 3\pi)$?

a) 4 nghiệm b) 5 nghiệm c) 6 nghiệm d) 7 nghiệm.

Câu 11: Phương trình $\cos 3x = \sin x$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0; 3\pi]$

a) 8 nghiệm b) 9 nghiệm c) 10 nghiệm d) 7 nghiệm.

Câu 12: Tổng các nghiệm của phương trình: $\tan 2x = \tan x$ trên đoạn $(0; 6\pi)$ bằng:

a) 6π b) 5π c) 16π d) 15π.

Câu 13: Phương trình $\tan x.\tan 2x = 1$ có tập nghiệm là:

a) $\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} / k \in Z\}$ b) $\{\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} / k \in Z\}$

c) $\{\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{6} / k \in Z\}$ d) $\{\frac{\pi}{6} + k\pi / k \in Z\}$.

Câu 14: Phương trình $\cot 2x = \cot x$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0; 6\pi]$?

a) Vô nghiệm b) Có 2 nghiệm

c) Có 4 nghiệm d) Có nhiều hơn 4 nghiệm.

Câu 15: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác nghiệm của phương trình $\tan 5x + \cot(\frac{\pi}{2} + x) = 0$ ta có bao nhiêu điểm phân biệt?

a) 4 điểm b) 6 điểm c) 8 điểm d) 10 điểm

Câu 16: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$\tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x\cos x)$ là:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{3}$.

Câu 17: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình:

$\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$ là:

a) $-\frac{4\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{10}$ d) $-\frac{\pi}{20}$.

Câu 18: Phương trình $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$ có họ nghiệm là:

a) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

c) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ d) Cả 3 câu a) b) c) đều đúng.

Câu 19: Phương trình: $\cos 2x - \cos 4x = 0$ là phương trình hệ quả của phương trình:

a) $\sin x = 1$ b) $\sin x = 0$

c) $\cos x = 0$ d) Cả 3 khẳng định trên đều sai.

Câu 20: Phương trình: $1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$ là phương trình hệ quả của phương trình:

a) $\cos^2 x = 1$ b) $\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

c) $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0$ d) Cả ba câu trên đều sai.

Câu 21: Phương trình $5\cos x - 2\sin 2x = 0$ có tập nghiệm là:

a) $\{k\frac{\pi}{4} / k \in Z\}$ b) $\{k\frac{\pi}{2} / k \in Z\}$

c) $\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\}$ d) $\{\frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in Z\}$.

Câu 22: Phương trình $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$ có tập nghiệm là:

a) $\{\frac{\pi}{2}(3 + 4k) / k \in Z\}$ b) $\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\}$

c) $\{\frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in Z\}$ d) $\{k\frac{\pi}{2} / k \in Z\}$.

Câu 23: Phương trình $\sin 2x = -\sin 4x$ là phương trình tương đương của phương trình:

a) $\sin x\cos x = 0$ b) $(4\sin^2 x - 3)\sin x = 0$

c) $\sin 2x(4\cos^2 x - 3) = 0$ d) $(4\sin^2 x - 3)\sin 2x = 0$.

Câu 24: Cho 3 phương trình:

$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$ có tập nghiệm S_1

$\sin 3x = 0$ có nghiệm S_2

$2.\cos 2x + 1 = 0$ có nghiệm S_3.

Chọn khẳng định đúng:

a) $S_1 \setminus S_2 \neq \varnothing$ b) $S_3 = S_1$ c) $S_1 = S_2$ d) $S_3 = S_2$.

Hướng dẫn

Câu 1: Để biểu diễn cung $x = f(k)$ với $k \in Z$ trên đường tròn lượng giác ta cho k các giá trị 0, 1, 2,... và vẽ các điểm biểu diễn tương ứng M_0, M_1, M_2... cho đến khi ta được điểm M_n trùng với điểm M_i ($i < n$) nào trước đó. Ta kết luận có n điểm biểu diễn.

$$x = \frac{k2\pi}{5}$$

$k = 0$ thì $x = 0$: ta có điểm biểu diễn tương ứng M_0.

$k = 1$ thì $x = \frac{2\pi}{5}$: ta có điểm biểu diễn tương ứng M_1.

$k = 2$ thì $x = \frac{4\pi}{5}$: ta có điểm biểu diễn tương ứng M_2.

$k = 3$ thì $x = \frac{6\pi}{5}$: ta có điểm biểu diễn tương ứng M_3.

$k = 4$ thì $x = \frac{8\pi}{5}$: ta có điểm biểu diễn tương ứng M_4.

$k = 5$ thì $x = 2\pi$: ta có điểm biểu diễn tương ứng $M_5 \equiv M_0$.

Vậy cung x có 5 điểm biểu diễn. **ĐS:** Câu a.

Câu 2: Tương tự như câu 1 ta có 10 điểm biểu diễn. **ĐS:** Câu c.

Chú ý kết quả sau: Cung $x = k\frac{p\pi}{q}$ với p, q là 2 số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và p là số lẻ, có 2q điểm biểu diễn.

Cung $x = k\frac{p\pi}{q}$ với p, q là 2 số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và p là số chẵn, có q điểm biểu diễn.

Câu 3: Biểu diễn cung $\frac{k\pi}{3}$, $k \in Z$ trên đường tròn lượng giác ta có 6 điểm ứng với các cung có số đo 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$ (*). Nhận xét rằng: $\sin 0 = \sin\pi$; $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$; $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\frac{5\pi}{3}$.

Vậy $\sin\frac{k\pi}{3}$ có 3 giá trị khác nhau. **ĐS:** Câu a.

Chú ý rằng ta có thể dùng MTBT để tính sin các cung ở (*) để kết luận.

Câu 4: Biểu diễn cung $x = \frac{k2\pi}{5}$ trên đường tròn lượng giác ta có 5 điểm ứng với năm cung: 0; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{4\pi}{5}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{8\pi}{5}$.

Kiểm tra bằng MTBT ta có tan của 5 giá trị trên khác nhau từng đôi. **ĐS:** Câu c.

Câu 5: Biểu diễn cung $x = \frac{k2\pi}{5}$ trên đường tròn lượng giác ta có 5 điểm ứng với năm cung: 0; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{4\pi}{5}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{8\pi}{5}$.

Lại do $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{8\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5}$.

Vậy $\cos\frac{k2\pi}{5}$ nhận 3 giá trị khác nhau. **ĐS:** Câu a.

Câu 6: a) Với mọi số thực a, phương trình sinx = sina

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi \end{array}\right.$, với mọi số nguyên k. **ĐS:** sai.

b) Với mọi số thực a, phương trình cosx = cosa $\Leftrightarrow$ $x = \pm a + k2\pi$, với mọi số nguyên k. **ĐS:** đúng.

c) Với mọi $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, phương trình $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$, với mọi số nguyên k. **ĐS**: đúng.

d) Với mọi $a \neq \pi + k\pi, k \in Z$, phương trình $\cot x = \cot a \Leftrightarrow x = a + k\pi$, với mọi số nguyên k. **ĐS**: sai.

Câu 7: Đây là dạng trắc nghiệm tính toán, thế trực tiếp các giá trị đã cho vào phương trình để kiểm tra **ĐS**: Câu d.

Có thể giải như sau: $\cot(2x - 10^0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \quad \cot(2x - 10^0) = \cot 60^0 \Leftrightarrow 2x - 10^0 = 60^0 + k180^0$

$\Leftrightarrow x = 35^0 + k90^0, k \in Z.$

Câu 8: Thế vào phương trình và kiểm tra trực tiếp.

Có thể giải như sau: $\cos 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 3x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}$ **ĐS**: Câu c.

Câu 9: $\sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

Với công thức $x = k2\pi$ ta chỉ nhận $x = 2\pi$.

Với công thức $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ ta nhận $x = \frac{\pi}{3}, x = \pi, x = \frac{5\pi}{3}$.

Vậy trên đoạn $(0; 2\pi]$ phương trình đã cho có 4 nghiệm.

ĐS: Câu c.

Chú ý: Phương trình dạng $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$ với $\forall k \in Z$.

Câu 10: $\cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi \\ 3x = -x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2}$ với $\forall k \in Z$.

Trên $[0; 3\pi)$ phương trình có các nghiệm $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi$; $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = 2\pi$; $x = \frac{5\pi}{2}$. **ĐS**: Câu c.

Chú ý: Phương trình dạng cosu = cosv $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right.$ với $\forall k \in Z$

Câu 11: Ta biến đổi về phương trình cơ bản cosu = cosv bằng cách sử dụng cung phụ $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

Phương trình đã cho tương đương với $\cos 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 3x = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \text{ với } \forall k \in Z.$$

Trên $[0; 3\pi]$ phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{8}$; $x = \frac{5\pi}{8}$; $x = \frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{9\pi}{8}$; $x = \frac{7\pi}{4}$; $x = \frac{13\pi}{8}$, $x = \frac{17\pi}{8}$; $x = \frac{11\pi}{4}$; $x = \frac{21\pi}{8}$.

Phương trình đã cho có 9 nghiệm. **ĐS:** Câu b.

Câu 12:

Chú ý: Phương trình dạng tanu = tanv $\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k\pi \\ u \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}$ với $\forall k, l \in Z$

$$\tan 2x = \tan x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi, \text{ với } \forall k \in Z.$$

Chú ý rằng $k\pi = \frac{\pi}{2}(2k)$ (số chẵn lần $\frac{\pi}{2}$).

$\frac{\pi}{2} + l\pi = \frac{\pi}{2}(2l + 1)$ (số lẻ lần $\frac{\pi}{2}$).

Vậy $k\pi \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$ với mọi số nguyên k, l.

Trên $(0; 6\pi)$ phương trình đã cho có các nghiệm $x = \pi$; $x = 2\pi$; $x = 3\pi$; $x = 4\pi$; $x = 5\pi$.

Vậy tổng các nghiệm bằng 15π. **ĐS:** Câu d.

Câu 13: *Cách 1:* Thử trực tiếp và kết luận.

Cách 2: **ĐK:** $\cos x.\cos 2x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin 2x.\sin x = \cos 2x.\cos x \Leftrightarrow \cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(2x + x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

Cách 3: Phương trình đã cho tương đương với

$$\tan 2x = \cot x \qquad \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} - x + k\pi \\ \dfrac{\pi}{2} - x \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3} \\ x \neq m\pi \end{array}\right.$$

Xét phương trình: $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} = m\pi \Leftrightarrow 1 + 2k = 6m$ không có nghiệm nguyên k, m.

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 14:

Chú ý: Phương trình dạng $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k\pi \\ u \neq l\pi \end{cases}$ với $\forall k, l \in \mathbb{Z}$.

$$\cot 2x = \cot x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k\pi \\ x \neq l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x \neq l\pi \end{cases}$$

với $\forall k, l \in \mathbb{Z}$, phương trình vô nghiệm câu a đúng.

Câu 15: **Biến đổi phương trình đã** cho về dạng $\tan u = \tan v$, dựa vào công thức $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan 5x$.

Phương trình đã cho tương đương với $\tan 5x = \tan x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\dfrac{\pi}{4} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}$$

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác cung $x = k\frac{\pi}{4}$ ta có 8 điểm bỏ đi 2 điểm biểu diễn của cung $\frac{\pi}{2} + l\pi$, còn lại 6 điểm.

ĐS: Câu b.

Câu 16: *Đây là câu trắc nghiệm kiểm tra khả năng tính toán và sử dụng MTBT.*

Ta chỉ cần thử trực tiếp các giá trị đã cho từ nhỏ tới lớn ($\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$), giá trị nào là nghiệm, ta nhận (không thử tiếp).

ĐS: Câu d.

Câu 17: *Đây là câu trắc nghiệm kiểm tra khả năng tính toán và sử dụng MTBT, thử trực tiếp các giá trị từ lớn đến nhỏ, giá trị nào là nghiệm ta nhận (không thử tiếp).* **ĐS:** Câu c.

Câu 18: Câu hỏi này thuộc dạng tính toán. Ta thử trực tiếp:

- Với $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, ta có:

$$\sin^2 2x = \sin^2(\pm 2\frac{\pi}{6} + k2\pi) = \sin^2(\pm\frac{\pi}{3}) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$$ thỏa mãn.

- Với $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, ta có:

$$\sin^2 2x = \sin^2(\frac{2\pi}{3} + k2\pi) = \sin^2\frac{2\pi}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

Vì có hai câu đúng, nên câu d đúng (có thể giải phương trình để suy ra kết quả này). **ĐS:** Câu d.

Câu 19:

Nhắc lại:	Phương trình f(x) = 0 (1) là phương trình hệ quả của phương trình g(x) = 0 (2), nếu tập nghiệm của phương trình (1) chứa tập nghiệm của phương trình (2)

Để giải bài này ta tìm nghiệm của từng phương trình ở câu a, b, c, d rồi thay vào phương trình đã cho ở đầu bài.

• $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$: $\cos 2x - \cos 4x = \cos(\pi + 2k\pi) - \cos(2\pi + 4k\pi)$

$$= \cos\pi - \cos 2\pi = -2$$

Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của phương trình $\cos 2x - \cos 4x = 0$ hay phương trình $\cos 2x - \cos 4x = 0$ không là phương trình hệ quả của phương trình $\sin x = 1$.

• $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Với $x = k\pi$: $\cos 2x - \cos 4x = \cos 2k\pi - \cos 4k\pi = 0 - 0 = 0$.

Vậy $x = k\pi$ là nghiệm của phương trình $\cos 2x - \cos 4x = 0$. hay phương trình $\cos 2x - \cos 4x = 0$ là phương trình hệ quả của phương trình $\sin x = 0$. **ĐS:** Câu b.

Câu 20: *Cách 1:* Giải như câu 15.

Cách 2: Ta có: $1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})\cos x$ (bạn đọc hãy chứng minh chi tiết đẳng thức này)

$$1 + \sin 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0\end{array}\right.$$

Vậy phương trình: $1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$ là phương trình hệ quả của các phương trình

$\cos x = 0$, $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0$. **ĐS:** Câu c.

Câu 21: $5\cos x - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 5\cos x - 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(5 - 4\sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 5 - 4\sin x = 0\end{array}\right.$$

• $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

• $5 - 4\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{5}{4}$, phương trình vô nghiệm **ĐS:** Câu c.

Câu 22: ĐK: $\sin x \neq 1 \quad \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ (*)

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0 \quad \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (**)$$

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác, ta có họ nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in Z$ (***)

Có thể suy ra (***) như sau:

Viết lại (*): $\quad x \neq \dfrac{\pi}{2}(1 + 4k),\ k \in Z$

Viết lại (**): $\quad x = \dfrac{\pi}{2}(1 + 2m),\ m \in Z$

$\Rightarrow \quad m = 2k + 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2}(3 + 4k)$. **ĐS:** Câu a.

Câu 23:

> ***Nhắc lại:*** 2 phương trình được gọi là 2 phương trình tương đương nếu tập nghiệm của chúng bằng nhau.
>
> Như vậy để chứng minh 2 phương trình tương đương, ta có hai cách chứng minh sau:
>
> - Chứng minh 2 phương trình có cùng tập nghiệm.
> - Biến đổi tương đương phương trình này thành phương trình kia.

Cách 1: $\sin 4x = -\sin 2x = \sin(-2x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = -2x + k2\pi \\ 4x = \pi + 2x + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \qquad (I)$$

$$(\sin^2 x - \frac{3}{4})\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x - \dfrac{3}{4} = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \qquad \text{(II)}$$

Biểu (I) và (II) trên đường tròn lượng giác ta thấy tập nghiệm (I và (II) bằng nhau. **ĐS:** Câu d

Cách 2: $\sin 4x = -\sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x + \sin 4x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(1 + 2\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x[1 + 2(1 - 2\sin^2 x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(3 - 4\sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(4\sin^2 x - 3) = 0$$

ĐS: Câu d

Câu 24: $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = (\sin 5x + \sin x) + \sin 3x$

$$= 2\sin 3x\cos 2x + \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x(2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = k\pi \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = k\pi \\ \cos 2x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3} \\ 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}.$$

ĐS: Câu c

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

Câu 1: Phương trình $\sin^2x - 3\sin x + 2 = 0$ có tập nghiệm là:

a) $\{k\frac{\pi}{2} / k \in Z\}$ b) $\{\frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in Z\}$

c) $\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\}$ d) $\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in Z\}$.

Câu 2: Phương trình: $2\sin^2x - (2 + \sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên nửa khoảng $[0; 2\pi)$?

a) 2 nghiệm b) 3 nghiệm c) 4 nghiệm d) 5 nghiệm.

Câu 3: Cho 2 phương trình: $2\cos^2x - 3\cos x + 1 = 0$ (1)

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$ (2)

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng:

a) (1) và (2) là hai phương trình tương đương

b) (1) là phương trình hệ quả của (2)

c) (2) là phương trình hệ quả của (1)

d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 4: Trên đoạn $[0; 3\pi]$ phương trình: $\cos^2x - 2\sin x + 2 = 0$ có:

a) 3 nghiệm b) 2 nghiệm c) 4 nghiệm d) 6 nghiệm.

Câu 5: Cho phương trình: $2\sin^2x - 5\sin x - 3 = 0$ có tập nghiệm là S. Ký hiệu:

$S_1 = \{-30^0 + k360^0 / \forall k \in Z\}$; $S_2 = \{210^0 + k360^0 / \forall k \in Z\}$

Chọn khẳng định đúng:

a) $(S_1 \cup S_2) \subset S$ và $(S_1 \cup S_2) \neq S$ b) $S \subset (S_1 \cup S_2)$ và $(S_1 \cup S_2) \neq S$

c) $S = (S_1 \cup S_2)$ d) $S = S_1$

Câu 6: Cho phương trình: $6\sin^2x - 5\sin x + 1 = 0$ có tập nghiệm S.

$S_1 = \{\frac{\pi}{6} + k2\pi / \forall k \in Z\}$; $S_2 = \{\frac{5\pi}{6} + k2\pi / \forall k \in Z\}$

Chọn khẳng định đúng:

a) $(S_1 \cup S_2) \subset S$ và $(S_1 \cup S_2) \neq S$ b) $S \subset (S_1 \cup S_2)$ và $(S_1 \cup S_2) \neq S$

c) $S = S_1 \cup S_2$ d) $S = S_1 \cap S_2$.

Câu 7: Tổng các nghiệm của phương trình: $\tan^2 2x - (1 + \sqrt{3})\tan 2x + \sqrt{3} = 0$ trên $[0, \pi]$ bằng:

a) $\frac{7}{4}\pi$ b) $\frac{3}{2}\pi$ c) $\frac{17}{12}\pi$ d) $\frac{19}{12}\pi$.

Câu 8: Tích các nghiệm của phương trình:

$\cot^2 3x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\cot 3x + 1 = 0$ trên $[0; \pi]$ là:

a) $\frac{7}{6564}.\pi^4$ b) $\frac{7}{6562}.\pi^4$ c) $\frac{7}{6560}.\pi^4$ d) $\frac{7}{6561}.\pi^4$.

Câu 9: Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $2\tan x + \cot x - 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được bao nhiêu điểm phân biệt?

a) 2 điểm b) 6 điểm c) 3 điểm d) 4 điểm.

Câu 10: Phương trình $\sin^4 x + 2\text{cox}^2 x - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0; 3\pi]$?

a) 2 nghiệm b) 3 nghiệm c) 1 nghiệm d) Vô nghiệm.

Câu 11: Phương trình $\tan^2 x - 2m\tan x + 2m^2 - 4 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi:

a) $m \in [-2; 2]$ b) $m \in [-1; 1]$

c) $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ d) $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Câu 12: Phương trình $\tan^2 x - \frac{2m}{\cot x} + 2m^2 - 4 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi:

a) $m \in [-2; 2]$ b) $m \in [-1; 1]$

c) $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ d) $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Câu 13: Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác:

$3\sin^2 x - 4\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được bao nhiêu điểm phân biệt?

a) 2 điểm b) 4 điểm c) 6 điểm d) 8 điểm.

Câu 14: Phương trình $\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x + 2\cos^2 x - 3 = 0$ có phương trình hệ quả là phương trình:

a) $(\sin x - \cos x)\sin x = 0$

b) $(2\sin x - \cos x)\sin 2x = 0$

c) $(\sin x - \cos x)(2\sin x - \cos x)\sin 2x = 0$

d) Cả 3 câu trên đều sai.

Câu 15: Phương trình: $\sin^3x - 6\sin^2x\cos x + 11\sin x\cos^2x - 6\cos^3x = 0$ là phương trình hệ quả của phương trình:

a) $\cos x = \sin x$ b) $\sin x = 2\cos x$

c) $\sin x = 3\cos x$ d) Cả 3 câu trên đều đúng.

Câu 16: Phương trình: $\sin^3x - 7\sin^2x\cos x + 11\sin x\cos^2x - 7\cos^3x + \cos x = 0$ tương đương với phương trình:

a) $(\cos x - \sin x)(\sin x - 2\cos x)(\sin x - 3\cos x) = 0$

b) $(\cos x + \sin x)(\sin x + 2\cos x)(\sin x + 3\cos x) = 0$

c) $(\cos x - \sin x)(\sin x + 2\cos x)(\sin x + 3\cos x) = 0$

) Cả ba câu trên đều sai.

Câu 17: Phương trình: $\cos^3x + \cos x.\sin^2x + \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $[-2\pi; 2\pi]$?

a) 2 nghiệm b) 4 nghiệm c) 6 nghiệm d) 8 nghiệm.

Câu 18: Tập nghiệm của phương trình: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$ là:

a) $S = \{k\frac{\pi}{3} / \forall k \in Z\}$ b) $S = \{\frac{\pi}{3} + k2\pi / \forall k \in Z\}$

c) $S = \{\frac{\pi}{3} + k\pi / \forall k \in Z\}$ d) Cả 3 câu a, b, c đều sai.

Câu 19: Phương trình $3\sin x - 4\cos x = 5$ tương đương với phương trình

a) $\sin x = 2\cos x$ b) $\sin\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}$

c) $\sin x = 3\cos x$ d) $\sin\frac{x}{2} = 3\cos\frac{x}{2}$.

Câu 20: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng thích hợp ở cột phải để được một khẳng định đúng:

1. Phương trình: $3\sin x + 4\cos x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi	a) $m \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$
	b) $m \in [-4; 0]$
2. Phương trình: $m.\sin x + (m + 1)\cos x = m - 1$ có nghiệm khi và chỉ khi	c) $m \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$
	d) $m \in [-5; 5]$.

Câu 21: Phương trình $(m^2 + 2)\sin^2x + 4m\sin x.\cos x = m^2 + 3$ có nghiệm khi và chỉ khi:

a) $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ b) $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

c) $m \in [-1; 1]$ d) $m \in [-2; 2]$.

Câu 22: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin x + 4\cos x$ là:

a) -5 b) -6 c) 5 d) 6.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x$ là:

a) 4 b) $\sqrt{14}$ c) 3 d) $\sqrt{13}$.

Câu 24: Hàm số $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 2$ đạt giá trị lớn nhất tại:

a) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ d) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 25: Hàm số $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x bằng bao nhiêu?

a) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 26: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin x + 2}$ là:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ d) Cả ba giá trị trên đều sai.

Câu 27: Tổng GTLN và GTNN của hàm số $y = \frac{2\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 1}{4\cos^2 x + 1}$ bằng:

a) $\frac{3}{5}$ b) 1 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{6}{5}$.

Câu 28: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng thích hợp ở cột phải để được một khẳng định đúng:

1. Phương trình: $3\sin x - 2\cos x = 4$ có tập nghiệm là	a) $S = \{\frac{5\pi}{6} + k2\pi \,/\, \forall k \in \mathbb{Z}\}$
2. Phương trình: $-\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$ có tập nghiệm là	b) $S = \varnothing$
3. Phương trình: $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ có tập nghiệm là	c) $S = \{\frac{3\pi}{4} + k2\pi \,/\, \forall k \in \mathbb{Z}\}$
	d) $S = \{\frac{\pi}{4} + k2\pi \,/\, \forall k \in \mathbb{Z}\}$

Câu 29: Trên tập $[0; \pi)$ phương trình: $\sin x - 3\cos x = 2$ có:

a) 1 nghiệm   b) 2 nghiệm   c) 3 nghiệm   d) 4 nghiệm.

Câu 30: Phương trình $-(\sin x + \cos x) + \sin 2x = \sqrt{2} + 1$ có nghiệm α thỏa mãn:

a) $\tan\alpha > 0$ b) $\tan\alpha < 0$

c) $\cos\alpha > 0$ d) Cả 3 câu trên đều sai.

Câu 31: Phương trình: $\sin x + \cos x - 4\sin x.\cos x = -1$ là phương trình tương đương của phương trình:

a) $\sin x + \cos x + 1 = 0$ b) $\sin x + \cos x - 1 = 0$

c) $\sin x(\sin x + \cos x - 1) = 0$ d) Cả 3 câu trên đều sai.

Câu 32: Phương trình: $\sin x - \cos x + \sin 2x = -1$ có phương trình hệ quả là phương trình:

a) $2\cos x\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\sin^2 x - \sin x - \cos x + 1 = 0$

b) $2\sin x\cos x - \cos x - 2\sin x + 1 = 0$

c) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

d) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

Câu 33: Tập giá trị của hàm số $y = 2(\sin x + \cos x) - 6\sin x\cos x$ là:

a) $[2\sqrt{2} - 3; \frac{10}{3}]$ b) $[-2\sqrt{2} - 3; \frac{10}{3}]$

c) $[-2\sqrt{2} - 3; 2\sqrt{2} - 3]$ d) $[-2\sqrt{2} + 3; \frac{10}{3}]$.

Câu 34: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2(\sin x - \cos x) - 4\sin x\cos x$ là:

a) -3 b) $\frac{5}{[illegible]}$ c) $-\frac{12}{5}$ d) $-3,1$.

Câu 35: Phương trình sin9x.sin[illegible] = sin7x.sin5x có tập nghiệm là:

a) $\{k\frac{\pi}{2} / k \in Z\}$ b) $\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\}$

c) $\{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in Z\}$ d) $\{k\frac{\pi}{4} / k \in Z\}$.

Câu 36: Trên $[-\pi; 2\pi]$, phương trình: $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$ có:

a) 3 nghiệm   b) 4 nghiệm   c) 2 nghiệm   d) 5 nghiệm.

Câu 37: Phương trình: $\sin 3x + \sin x - 2\cos^2 x = 0$ tương đương với phương trình:

a) $2\sin^2 x - \sin x = 0$ b) $\sin 2x - \cos x = 0$

c) $2\sin^2 x + \sin x = 0$ d) $2\cos^2 x\sin x + \cos^2 x = 0$.

Câu 38: Trên $[-2\pi; 2\pi]$ phương trình: $(2\cos x - 1)^2 + (3\tan x - \sqrt{3})^2 = 0$ có:

a) 2 nghiệm b) 4 nghiệm c) 6 nghiệm d) vô nghiệm.

Câu 39: Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm khác nhau của phương trình:

$$(\cos x\frac{1}{2})^2 + (\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 0.$$

Biết trong khẳng định sau có một khẳng định đúng, tìm khẳng định đúng này.

a) $|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{2}$ b) $|x_1 - x_2| = \pi$

c) $|x_1 - x_2| = 2\pi$ d) $|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{6}$.

Câu 40: Chọn khẳng định đúng

a) Phương trình $\sin x.\cos x = 1$ có vô số nghiệm

b) Phương trình $\sin x + \cos x = 2$ có vô số nghiệm

c) Phương trình $\sin x.\cos x = 1$ vô nghiệm

d) Cả 3 câu trên đều sai.

Câu 41: Chọn khẳng định đúng:

a) Phương trình: $\sin x.\sin 5x = -1$ vô nghiệm

b) Phương trình: $\sin x.\sin 5x = -1$ có vô số nghiệm

c) Phương trình: $\sin x.\sin 5x = -1$ là phương trình hệ quả của phương trình $\sin x + \sin 5x = 0$

d) Các khẳng định ở câu a, b, c đều sai.

Hướng dẫn

Câu 1: Đặt $t = \sin x$, với $-1 \le t \le 1$, ta có:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1 \text{ (nghiệm } t = 2 \text{ bị loại)}$$

$t = 1$: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ **ĐS:** Câu b.

Lưu ý: Đây là phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác. Cách giải: đặt hàm số lượng giác này là t, ta biến đổi về phương trình bậc hai đối với t. Chú ý điều kiện của t.

Nếu đặt $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$ thì $-1 \le t \le 1$.

Nếu đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$ thì $t \in R$.

Câu 2: Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$, ta có phương trình:

$$2t^2 - (2 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

- $t = 1$: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$
- $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$

Vậy trên $[0; 2\pi)$ phương trình có ba nghiệm $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 3: Đặt $t = \cos x$, với $-1 \le t \le 1$, ta có:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- $t = 1$: $\cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$
- $t = \dfrac{1}{2}$: $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0$

Vậy (2) là phương trình hệ quả của (1). **ĐS:** Câu c.

Câu 4: $\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - 2\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0.$

Đặt $t = \sin x$, điều kiện: $-1 \le t \le 1$. Ta có:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1 \text{ (giá trị } t = -3 \text{ loại)}$$

$t = 1$: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Vậy trên $[0; 3\pi]$ phương trình có 2 nghiệm. **ĐS:** Câu b.

Câu 5: Đặt t = sinx, điều kiện $t \in [-1; 1]$.

Ta có phương trình: $2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{2} \\ t = 3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$ (nghiệm t = 3 loại)

$t = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin(-30^0)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -30^0 + k360^0 \\ x = 210^0 + k360^0 \end{array}\right.$ **ĐS:** Câu c.

Câu 6: $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

Đặt t = sinx, điều kiện $t \in [-1; 1]$.

Ta có phương trình: $6t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

• $t = \dfrac{1}{2}$: $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

ĐS: Câu a.

Câu 7: Đặt t = tan2x, ta có: $t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \sqrt{3} \end{array}\right.$

• $t = 1$: $\tan 2x = 1 = \tan\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$

• $t = \sqrt{3}$: $\tan 2x = \sqrt{3} = \tan\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$

Trên $[0; \pi]$ phương trình có các nghiệm $\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{5\pi}{8}; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{2\pi}{3}$.

Tổng các nghiệm này là: $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{5\pi}{8} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{19}{12}\pi$. **ĐS:** Câu d.

Câu 8: Đặt $t = \cot 3x$, ta có phương trình $t^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

- $t = \sqrt{3}$: $\cot 3x = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$
- $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\cot 3x = \cot\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$

Trên $[0; \frac{\pi}{2}]$, phương trình có các nghiệm $\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}$

Tích các nghiệm này là $\frac{7}{6561}.\pi^4$. **ĐS:** Câu d.

Câu 9: Điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

$$2\tan x + \cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\tan x + \frac{1}{\tan x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \tan x$ ta có: $2t^2 - 3t + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

- $t = 1$: $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$: biểu diễn trên đường tròn lượng giác, ta có 2 điểm.
- $t = \frac{1}{2}$: tương tự ta có 2 điểm biểu diễn khác với hai điểm ở trường hợp 1.

Vậy tổng cộng có 4 điểm. **ĐS:** Câu d.

Câu 10: $\sin^4 x + 2\cos^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin^4 x + 2(1 - \sin^2 x) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x - 2\sin^2 x - 1 = 0.$$

Đặt: $t = \sin^2 x$, điều kiện $t \in [0; 1]$. Ta có phương trình:

$$t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 - \sqrt{2} \text{ (loại)}, t = 1 + \sqrt{2} \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm. **ĐS:** Câu d.

Có thể giải bằng cách "Đánh giá cận" như sau:

Vì $\sin^4x \le 1$ và $2\cos^2x \le 2$

$\Rightarrow \quad \sin^4x + 2\cos^2x - 3 \le 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2x + \cos^2x = 2$. Phương trình vô nghiệm.

Câu 11: Đặt $t = \tan x$, điều kiện $t \in R$. Ta có phương trình

$$t^2 - 2mt + 2m^2 - 4 = 0.$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - (2m^2 - 4) = 4 - m^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow -2 \le m \le 2$. **ĐS:** Câu a.

Câu 12: Chú ý rằng: Với điều kiện $x \ne k\dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{1}{\cot x} = \tan x$.

Điều kiện $x \ne k\dfrac{\pi}{2}$

$$\tan^2x - \frac{2m}{\cot x} + 2m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \tan^2x - 2m\tan x + 2m^2 - 4 = 0.$$

Đặt $t = \tan x$, điều kiện $t \ne 0$. Ta có phương trình:

$t^2 - 2mt + 2m^2 - 4 = 0 \qquad (*)$

$\Delta' = 4 - m^2$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm khác 0.

TH1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Phương trình có nghiệm kép $t = m \ne 0$ (nhận).

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt, nên có một nghiệm khác 0

Kết hợp hai trường hợp ta có: $m \in [-2; 2]$. **ĐS:** Câu a.

Câu 13: Phương trình có dạng vế trái đẳng cấp bậc hai đối với sinx, cosx:

$$a.\sin^2x + b.\sin x\cos x + c.\cos^2x = d.$$

Cách giải: Thử xem $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ có phải là nghiệm của phương trình không?

Nếu $\cos x \ne 0$: chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x$ ta có phương trình: $a.\tan^2x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2x)$.

Nếu $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$: không thỏa mãn phương trình

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta có:

$$3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$$

Đặt $t = \tan x$, ta có: $3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

- $t = \sqrt{3}$: $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$
- $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$: $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Trên đường tròn lượng giác, cung $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ có 2 điểm biểu diễn; cung $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ có hai điểm biểu diễn, vậy có 4 điểm biểu diễn.

ĐS: Câu b.

Câu 14: Nhận xét rằng $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta có phương trình

$$\tan^2 x + 3\tan x + 2 - 3(1 + \tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow -2\tan^2 x + 3\tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1, \tan x = \frac{1}{2}.$$

Phương trình $\tan x = 1$ và phương trình $\sin x - \cos x = 0$ có cùng tập nghiệm (tương đương). Phương trình $\tan x = \dfrac{1}{2}$ và phương trình $2\sin x - \cos x = 0$ có cùng tập nghiệm. Vậy phương trình ở câu c là phương trình hệ quả của phương trình đã cho. **ĐS:** Câu c.

Câu 15: $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta có: $\tan^3 x - 6\tan^2 x + 11\tan x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan x - 2)(\tan x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 2 \\ \tan x = 3 \end{array}\right.$$

Chú ý rằng phương trình $\tan x = 1$ có cùng tập nghiệm với phương trình $\sin x = \cos x$.

Phương trình tanx = 2 có cùng tập nghiệm với phương trình sinx = 2cosx.

Phương trình tanx = 3 có cùng tập nghiệm với phương trình sinx = 3 cosx.

ĐS: Câu d.

> *Chú ý:* Đây là phương trình đẳng cấp bậc ba đối với sinx, cosx dạng
> $$a.\sin^3x + b.\sin^2x.\cos x + c.\sin x.\cos^2x + d\cos^3x = 0.$$
> Để giải phương trình dạng này ta thực hiện các bước sau:
> - Thử cosx = 0: Có thỏa mãn phương trình không?
> - Nếu cosx ≠ 0: Chia hai vế của phương trình cho $\cos^3x$ ta được phương trình bậc ba theo tanx.

Câu 16: cosx = 0 không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế cho $\cos^3x$ ta có: $\tan^3x - 7\tan^2x + 11\tan x - 7 + \dfrac{1}{\cos^2x} = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3x - 7\tan^2x + 11\tan x - 7 + 1 + \tan^2x = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3x - 6\tan^2x + 11\tan x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan x - 2)(\tan x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 2 \\ \tan x = 3 \end{array}\right.$

ĐS: Câu a.

> *Chú ý:* 1. Để giải phương trình dạng:
> $$a.\sin^3x + b.\sin^2x.\cos x + c.\sin x.\cos^2x + d.\cos^3x + e.\cos x = 0.$$
> Ta tiến hành các bước sau:
> - Thử cosx = 0 có thỏa mãn phương trình không?
> - Nếu cosx ≠ 0: Chia hai vế của phương trình cho $\cos^3x$ ta được phương trình bậc ba theo tanx.
>
> 2. Để giải phương trình dạng:
> $$a.\sin^3x + b.\sin^2x.\cos x + c.\sin x.\cos^2x + d.\cos^3x + e.\cos x = 0$$
> Ta tiến hành các bước sau:
> - Thử sinx = 0: Có thỏa mãn phương trình không?
> - Nếu sinx ≠ 0: Chia hai vế của phương trình cho $\sin^3x$ ta được phương trình bậc ba theo cotx.

Câu 17: sinx = 0 không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\sin^3x$ ta có:

$$\cot^3x + \cot x + \frac{1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cot^3x + \cot^2x + \cot x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cot^2x + 1)(\cot x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cot x = -1 = \cot(-\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy trên $[-2\pi; 2\pi]$ phương trình có các nghiệm

$-\frac{\pi}{4} - \pi; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} + \pi; -\frac{\pi}{4} + 2\pi$ **ĐS:** Câu b.

Câu 18: Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ ta có:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow = \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$$

ĐS: Câu d.

Câu 19: • $x = \pi + k2\pi$ không phải là nghiệm.

• $x \neq \pi + k2\pi$: Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, ta có phương trình:

$$3\frac{2t}{1+t^2} - 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = 5 \Leftrightarrow 6t - 4(1 - t^2) = 5(1 + t^2)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 3\cos\frac{x}{2}.$$

ĐS: Câu d.

Câu 20: • $3\sin x + 4\cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3^2 + 4^2 \geq m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 25$

$$\Leftrightarrow m \in [-5; 5].$$

• $m.\sin x + (m+1)\cos x = m - 1$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + (m + 1)^2 \geq (m - 1)^2$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$$

Vậy 1. → d) ; 2. → c).

Chú ý: Phương trình asinx + bcosx + c = 0 có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$.

Câu 21: Biến đổi về phương trình bậc nhất đối với sin2x, cos2x

$$(m^2 + 2)\sin^2x + 4m\sin x.\cos x = m^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 2)\frac{1 - \cos 2x}{2} + 4m\frac{\sin 2x}{2} = m^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow 4m\sin 2x - (m^2 + 2)\cos 2x = m^2 + 4.$$

Phương trình trên có nghiệm $\Leftrightarrow (4m)^2 + (m^2 + 2)^2 \geq (m^2 + 4)^2$

$$\Leftrightarrow 16m^2 + m^4 + 4m^2 + 4 \geq m^4 + 8m^2 + 16 \Leftrightarrow m^2 \geq 1$$

$\Leftrightarrow m \leq -1$ hoặc $m \geq 1$. **ĐS:** Câu b.

Câu 22: $y = 3\sin x + 4\cos x \Leftrightarrow 3\sin x + 4\cos x = y$.

Xem y là tham số, x là ẩn số

Phương trình trên có nghiệm x $\Leftrightarrow 3^2 + 4^2 \geq y^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 5$

Vậy miny = –5. **ĐS:** Câu a.

Chú ý: Trên đây ta dùng phương pháp **"Miền giá trị"** để tìm GTNN, GTLN. Nội dung phương pháp như sau:

Để tìm GTN, GTLN của hàm số y = f(x) (*) trên tập xác định D, ta xem (*) là phương trình ẩn x, còn y là tham số. Ta tìm y để phương trình (*) có nghiệm x. Trong tập giá trị của y ở trên ta định ra GTNN, GTLN.

Ta còn có thể suy luận "mang tính trắc nghiệm" như sau: thử trực tiếp các giá trị từ nhỏ đến lớn.

- Với y = –6: ta có: 3sinx + 4cosx = –6: phương trình không có nghiệm x.
- Với y = –5: ta có: 3sinx + 4cosx = –5: phương trình có nghiệm x.

Vậy miny = –5.

Câu 23: Ta sử dụng cách giải trong câu 10.

$$y = 3\sin^2x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2x$$

$$= 3\frac{1 - \cos 2x}{2} + 2\sin 2x - 3\frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= 2\sin 2x - 3\cos 2x$$

Ta có: $y = 2\sin 2x - 3\cos 2x \Leftrightarrow 2\sin 2x - 3\cos 2x = y$

Phương trình trên có nghiệm x $\Leftrightarrow 2^2 + (-3)^2 \geq y^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 13$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{13} \leq y \leq \sqrt{13}$$

Vậy maxy = $\sqrt{13}$.

Có thể thử giá trị của y từ lớn đến nhỏ. **ĐS:** Câu d.

Câu 24: $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 2$

$$y = 2(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) + 2 = 2(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x) + 2$$

$$= 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) + 2$$

Vì: $\sin(x + \frac{\pi}{3}) \le 1 \Rightarrow y \le 4$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$. **ĐS:** Câu c.

Có thể suy luận "mang tính trắc nghiệm" như sau:

Dụng MTBT tính giá trị y tương ứng tại các điểm $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Giá trị nào nhỏ nhất, ta nhận giá trị x tương ứng.

Câu 25: $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x - 3 = 2\sin(x - \frac{\pi}{3}) - 3$

Vì $\sin(x - \frac{\pi}{3}) \ge -1$ nên $y \ge -5$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{3}) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

ĐS: Câu c.

Câu 26: Ta sử dụng phương pháp **"Miền giá trị"**.

Tập xác định của hàm số: D = R.

$$y = \frac{\cos x}{\sin x + 2} \Leftrightarrow y(\sin x + 2) = \cos x \Leftrightarrow y\sin x - \cos x = -2y.$$

Phương trình trên có nghiệm x $\Leftrightarrow y^2 + (-1)^2 \ge (-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 \le \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \le y \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy $\max y = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 27: Tập xác định D = R.

$$y = \frac{2\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 1}{4\cos^2 x + 1} = \frac{(1-\cos 2x) - \sin 2x - 1}{2(1+\cos 2x)+1}$$

$$= \frac{-\sin 2x - \cos 2x}{2\cos 2x + 3}$$

$\Leftrightarrow y(2\cos 2x + 3) = -\sin 2x - \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x + (2y+1)\cos 2x = -3y$

Phương trình trên có nghiệm x $\Leftrightarrow 1^2 + (2y+1)^2 \geq (-3y)^2$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 4y - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{14}}{5} \leq y \leq \frac{2+\sqrt{14}}{5}$

Vậy tổng GTNN và GTLN của hàm số bằng $\frac{4}{5}$. **ĐS:** Câu c.

> ***Chú ý:*** Để tìm GTNN và GTLN của các hàm số dạng
>
> $$y = \frac{a.\sin x + b.\cos x + c}{a'\sin x + b'\cos x + c'};$$
>
> $$y = \frac{a.\sin^2 x + b.\sin x\cos x + c.\cos^2 x + d}{a'\sin^2 x + b'\sin x\cos x + c'.\cos^2 x + d'}$$ trên tập xác định R, dùng phương pháp "miền giá trị" như lời giải ở câu 24, 25, lời giải sẽ gọn nhẹ.

Câu 28: 1. Phương trình: $3\sin x - 2\cos x = 4$ có $a^2 + b^2 = 13 < 16 = c^2$ nên vô nghiệm.

2. $-\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1$

(chia hai vế cho $\sqrt{a^2+b^2} = 2$)

$\Leftrightarrow -\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad\quad \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

3. Phương trình: $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $\qquad\qquad$ $\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

Vậy 1. → b); $\qquad$ 2. → a); $\qquad$ 3. → c).

Có thể thử trực tiếp để kết luận.

Câu 29: $\sin x - 3\cos x = 2$

$x = \pi + k2\pi$ không phải là nghiệm.

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$; thế $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ vào phương trình đã cho ta có: $\frac{2t}{1+t^2} - 3\frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \Leftrightarrow 2t - 3(1-t^2) = 2(1+t^2)$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 - \sqrt{6} < 0,$$

$$t = -1 + \sqrt{6} > 0.$$

Đặt $-1 - \sqrt{6} = \tan\alpha$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$; $-1 + \sqrt{6} = \tan\beta$ với $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

- $\tan\frac{x}{2} = \tan\alpha \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \alpha + k\pi \quad \Leftrightarrow x = 2\alpha + k2\pi$
- $\tan\frac{x}{2} = \tan\beta \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \beta + k\pi \quad \Leftrightarrow x = 2\beta + k2\pi$.

Vậy trên $[0; \pi)$ phương trình có 1 nghiệm. **ĐS:** Câu a.

Câu 30: Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, đk: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

$$\Rightarrow t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1.$$

Ta có phương trình: $-t + t^2 - 1 = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 - \sqrt{2} = 0$

$$\Delta = 1 + 4(2 + \sqrt{2}) = 9 + 4\sqrt{2} = (1 + 2\sqrt{2})^2$$

$$t_1 = \frac{1 + 1 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \text{ (loại)};$$

$$t_2 = -\sqrt{2}\ t = -\sqrt{2}: \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \quad \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad \Rightarrow \tan x > 0.$ **ĐS:** Câu a.

Chú ý: Để giải phương trình dạng: a(sinx + cosx) + bsinxcosx = c, ta đặt

$t = \sin x + \cos x$, điều kiện $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$, khi đó $\sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$.

Câu 31: Đặt $t = \sin x + \cos x$, $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$; $\sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$. Ta có

phương trình $t - 2(t^2 - 1) = -1 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow t = 1$ (giá trị $t = \dfrac{3}{2} > 1$ loại)

- $t = -1$: $\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 1 = 0$. **ĐS:** Câu a.

Câu 32: Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \dfrac{\pi}{4})$; $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

$\sin 2x = 1 - t^2$.

Ta có: $t + (1 - t^2) = -1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1, t = 2$ (loại)

$t = -1$: $\sqrt{2}\sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin(-\dfrac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \pi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Thế trực tiếp $x = k2\pi$ và $x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi$ vào từng phương trình ở câu a, b, c, d ta thấy phương trình ở câu a nhận các giá trị này là nghiệm.

Chú ý: Để giải phương trình a(sinx – cosx) + bsinxcosx = c, ta đặt

$t = \sin x - \cos x$, điều kiện $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$, khi đó $\sin x\cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$.

ĐS: Câu a.

Câu 33: Đặt $t = \sin x + \cos x$, điều kiện $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow 2\sin x\cos x = t^2 - 1$.

$y = 2(\sin x + \cos x) - 6\sin x\cos x = 2t - 3(t^2 - 1) = -3t^2 + 2t + 3$

Bài toán qui về tìm tập giá trị của hàm số

$y = -3t^2 + 2t + 3$ với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Hàm y là hàm bậc hai theo t, có $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$;

$y(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 3 = \frac{10}{3}$; $y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} - 3$; $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3$

Vậy miền giá trị của hàm số y là đoạn $[-2\sqrt{2} - 3; \frac{10}{3}]$.

ĐS: Câu b.

Câu 34: Đặt $t = \sin x - \cos x$ với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; $2\sin x\cos x = 1 - t^2$

$y = 2(\sin x - \cos x) - 4\sin x\cos x = 2t - 2(1 - t^2) = 2t^2 + 2t - 2$.

Bài toán qui về tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2t^2 + 2t - 2$ với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Vậy GTNN của hàm số y bằng $y(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 1 - 2 = -\frac{5}{2}$.

ĐS: Câu b.

Câu 35: Phương trình đã cho tương đương với $\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 12x) = \frac{1}{2}$

$(\cos 2x - \cos 12x) \Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = 2x + k2\pi \\ 6x = -2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = k2\pi \\ 8x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

Trong họ nghiệm $x = k\frac{\pi}{4}$, cho $x = 2m$ ta có $x = m\frac{\pi}{2}$.

Nên tập nghiệm $x = k\frac{\pi}{2}$ là tập con của tập nghiệm $x = k\frac{\pi}{4}$.

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = k\frac{\pi}{4}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 36: Biến đổi về phương trình dạng tích

$\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow$ $(\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) = \sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow$ $(\cos x - \sin x)(2 + \sin x\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

Vậy trên $[-\pi; 2\pi]$ phương trình có 3 nghiệm $-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

ĐS: Câu a.

Câu 37: Biến đổi về phương trình dạng tích

$\sin3x + \sin x - 2\cos^2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin2x.\cos x - 2\cos^2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin x\cos^2x - 2\cos^2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin2x - \cos x = 0.$ **ĐS:** Câu b.

Câu 38: Ta sử dụng phương pháp "**Đánh giá cận**".

Vì $(2\cos x - 1)^2 \geq 0$, $(3\tan x - \sqrt{3})^2 \geq 0$ nên:

$$(2\cos x - 1)^2 + (3\tan x - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x = 1 \\ 3\tan x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \quad (I)$$

Để tìm số nghiệm của (I), biểu diễn các cung $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ trên đường tròn lượng giác, ta có 2 điểm M_0 và M_1, biểu diễn cung $x = \frac{\pi}{6} + l\pi$ ta có 2 điểm N_0 và N_1.

Vì các điểm M_0, M_1 không trùng với N_0, N_1 nên phương trình vô nghiệm. **ĐS:** Câu d.

Câu 39: $(\cos x - \frac{1}{2})^2 + (\sin2x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + l2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + l2\pi \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + l\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + l\pi \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + l\pi \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Bạn đọc hãy dùng đường tròn lượng giác để chứng minh (I) vô nghiệm, (II) $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **ĐS:** Câu c.

> *Chú ý:* Phương trình $f(x) = g(x)$ với điều kiện $f(x) \le m$ và $g(x) \ge m$
>
> tương đương với $\begin{cases} f(x) = m \\ g(x) = m \end{cases}$
>
> Ta thường gặp các mệnh đề đơn giản:
>
> $A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow A = B = C = 0$
>
> $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0 \Leftrightarrow A = B = C = 0.$

Câu 40: $\sin x\cos x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 2$: phương trình vô nghiệm. **ĐS:** Câu c.

Câu 41: Vì $|\sin x| \le 1$ và $|\sin 5x| \le 1$, nên

$$\sin x.\sin 5x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases} \text{(I) hoặc} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \text{(II)}$$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 5x = -\dfrac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{10} + l\dfrac{2\pi}{5} \end{cases} \text{mọi } k, l \in Z$$

Xét phương trình: $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi = -\dfrac{\pi}{10} + l\dfrac{2\pi}{5} \Leftrightarrow 5 + 20k = -1 + 4l$

$\Leftrightarrow 6 = 4l - 20k$ vô nghiệm (vì VT không chia hết cho 4, VP chia hết cho 4).

Tương tự (II) vô nghiệm. **ĐS:** Câu a.

TỔ HỢP

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Số các hoán vị của n phần tử bằng P_n ☐ đúng, ☐ sai

b) Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \le k \le n)$ là C_n^k

☐ đúng, ☐ sai

c) Số các tổ hợp chập k của n phần tử là A_n^k ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 2: Trong các công thức sau, công thức nào đúng, công thức nào sai

a) $P_n = n!$ ☐ đúng, ☐ sai

b) $A_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ☐ đúng, ☐ sai

c) $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 3: Một tổ có sáu nam và bốn nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người trong đó có 3 nam và hai nữ. Có bao nhiêu cách lập?

a) 120 b) 26 c) 14 d) 140.

Câu 4: Trong giờ học thể dục, một tổ 10 học sinh được xếp thành hàng dọc. Có bao nhiêu cách sắp xếp?

a) 3628000 b) 3628800 c) 362880 d) 39916800.

Câu 5: Có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh đứng thành một vòng tròn?

a) P_8 b) P_9 c) P_{10} d) P_{11}.

Câu 6: Trong mặt phẳng chỗ điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của chúng thuộc tập điểm đã cho?

a) 20 b) 120 c) 40 d) 15.

Câu 7: Cho bát giác (đa giác tám cạnh). Hỏi có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của bát giác đã cho?

a) 28 b) 56 c) 64 d) 65.

Câu 8: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5 ta viết được m_1 số gồm 2 chữ số, m_2 số gồm 2 chữ số khác nhau từng đôi một. Chọn khẳng định đúng:

a) $m_1 = 16, m_2 = 20$ b) $m_1 = 25, m_2 = 20$

c) $m_1 = 20, m_2 = 25$ d) $m_1 = 25, m_2 = 16$.

Câu 9: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 ta viết được m_1 số gồm 2 chữ số, m_2 số gồm 2 chữ số khác nhau từng đôi một. Chọn khẳng định đúng:

a) $m_1 = 30, m_2 = 25$ b) $m_1 = 25, m_2 = 30$

c) $m_1 = 36, m_2 = 25$ d) $m_1 = 30, m_2 = 36$.

Câu 10: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta viết được m_1 số gồm 3 chữ số, m_2 số gồm 3 chữ số khác nhau từng đôi một. Chọn khẳng định đúng:

a) $m_1 = 120, m_2 = 216$ b) $m_1 = 216, m_2 = 120$

c) $m_1 = 216, m_2 = 20$ d) $m_1 = 20, m_2 = 216$.

Câu 11: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 ta viết được m_1 số gồm 3 chữ số, m_2 số gồm 3 chữ số khác nhau từng đôi một. Chọn khẳng định đúng:

a) $m_1 = 100, m_2 = 180$ b) $m_1 = 125, m_2 = 100$

c) $m_1 = 125, m_2 = 50$ d) $m_1 = 180, m_2 = 100$.

Câu 12: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 ta viết được bao nhiêu số không quá 3 chữ số?

a) 399 b) 259 c) 392 d) 402.

Câu 13: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 ta viết được bao nhiêu số không quá 3 chữ số khác nhau từng đôi?

a) 63 b) 259 c) 210 d) 399.

Câu 14: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta viết được bao nhiêu số chẵn gồm 3 chữ số?

a) 108 b) 60 c) 100 d) 30.

Câu 15: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta viết được bao nhiêu số chẵn gồm 3 chữ số khác nhau từng đôi?

a) 30 b) 108 c) 60 d) 100.

Câu 16: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4 có thể viết được bao nhiêu số chẵn gồm 3 chữ số khác nhau từng đôi?

a) 30 số b) 36 số c) 18 số d) 12 số.

Câu 17: Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi?

a) 2520 b) 2296 số c) 1792 số d) 980 số.

Câu 18: Từ các chữ số 1; 2; 3; ...; 9 viết được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5 gồm 3 chữ số?

a) 81 b) 72 c) 90 d) 56.

Câu 19: Từ các chữ số 1; 2; 3; ...; 9 viết được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ khác nhau từng đôi và chia hết cho 5?

a) 72 b) 90 c) 81 d) 56.

Câu 20: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5 gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi?

a) 1008 b) 448 c) 952 d) 1456.

Câu 21: Từ các chữ số 1; 2; 3; ...; 9 có thể viết được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi, trong đó có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ?

a) 1440 số b) 480 c) 11520 d) 240.

Câu 22: Có thể viết được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi trong đó có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ?

a) 9600 b) 2160 số c) 6120 d) 9120.

Câu 23: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 lập các số gồm 6 chữ số khác nhau từng đôi. Có bao nhiêu số nhỏ hơn 432000?

a) 720 b) 360 c) 414 d) 408.

Câu 24: Từ các chữ số 1; 2; 3; ...; 9 lập được bao nhiêu số gồm 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ, trong đó 2 chữ số chẵn đứng kề nhau?

a) 720 b) 2880 c) 360 d) 1440.

Câu 25: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể viết được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau từng đôi và luôn có mặt 3 chữ số 1; 2; 3?

a) 1800 số b) 150 số c) 900 số d) 3600 số.

Câu 26: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể viết được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi và luôn có mặt 2 chữ số 0; 1?

a) 90 b) 180 c) 60 d) 360.

Câu 27: Từ các chữ số 0;1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể viết được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi và luôn có mặt 2 chữ số 1; 2?

a) 240 số b) 60 số c) 216 số d) 48 số.

Câu 28: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng:

1. Số cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 khách vào 10 ghế là	a) A_{10}^{5}
2. Số cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 khách vào 10 ghế là	b) A_{10}^{5}
3. Số cách chọn 5 khách trong 10 khách để dự tiệc là	c) P_{10}
	d) P_5

Câu 29: Cho các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 (*)

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng:

1. Chọn năm chữ số khác nhau trong (*), số cách chọn là	a) 9^5
2. Từ (*) ta viết các số tự nhiên gồm 5 chữ số	b) A_9^5
3. Từ (*) ta viết các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau từng đôi, số các số là	c) C_9^5
	d) P_9

Câu 30: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3 ;4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể viết được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau từng đôi?

a) 720 b) 324 c) 72 d) 648.

Câu 31: Một lớp có 20 học sinh, trong đó có 10 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được hai khẳng định đúng:

1. Sắp xếp 20 học sinh trên thành một hàng dọc, số cách sắp xếp là	a) $2P_{10}$
	b) $(P_{10})^2$
2. Sắp xếp 20 học sinh trên thành một hàng dọc sao cho nam nữ đúng xen kẽ, số cách sắp xếp là	c) P_{20}
	d) $2(P_{10})^2$

Câu 32: Một tổ học sinh có 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ.

Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Phân công ba bạn làm trực nhật, số cách phân công là A_3^9

☐ đúng, ☐ sai

b) Phân công 3 bạn làm trực nhật, trong đó có đúng hai bạn nam, số cách phân công là $4A_2^5$ ☐ đúng, ☐ sai

c) Phân công 3 bạn làm trực nhật, trong đó có ít nhất có hai bạn nam, số cách phân công là $4C_5^2 + C_5^3$ ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 33: Một nhóm học sinh gồm 4 nam và 5 nữ. Thầy giáo muốn chọn ra 5 học sinh để làm công tác xã hội. Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được hai khẳng định đúng:

1. Nếu chọn tùy ý, số cách chọn là	a) 60
2. Nếu phải có đúng 2 học sinh nữ, số cách chọn là	b) 40
	c) 45
	d) 126

Câu 34: Một nhóm học sinh gồm 4 nam và 5 nữ. Thầy giáo muốn chọn ra 5 học sinh để làm công tác xã hội. Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được hai khẳng định đúng:

1. Nếu phải có đúng 3 học sinh nữ, số cách chọn là	a) 60
2. Nếu phải có ít nhất 3 học sinh nam, số cách chọn là	b) 40
	c) 45
	d) 126

Câu 35: Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có 2 học sinh giỏi lý, 3 học sinh giỏi toán, 5 học sinh giỏi hoá (không có học sinh nào giỏi quá một bộ môn). Số cách sắp xếp 10 học sinh trên đứng thành một hàng dọc sao cho học sinh giỏi cùng bộ môn đứng kề nhau là bao nhiêu?

a) 8640 b) 4320 c) 1440 d) 17280.

Câu 36: Một lớp học có 40 học sinh, cần phân công 10 học sinh của lớp đi lao động trong đó 5 bạn quét sân, 2 bạn lau phòng, 3 bạn trồng cây. Có bao nhiêu cách phân công?

a) $A_{40}^5 A_{35}^2 A_{33}^3$ cách phân công b) $C_{40}^5 C_{35}^2 C_{33}^3$ cách phân công

c) $P_5P_2P_3$ cách phân công d) $C_{40}^5 + C_{35}^2 + C_{33}^3$ cách phân công.

Câu 37: Cho tập $A = \{a_1; a_2; ...; a_{10}\}$.

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được hai khẳng định đúng:

1 Số tập con gồm 5 phần tử của A sao cho mỗi tập con đó chứa a_1 và a_2 là 2 Số tập con gồm 5 phần tử của A sao cho mỗi tập con đó chứa a_1 và không chứa a_2 là	a) C_{10}^3 b) A_{10}^3 c) C_8^4 d) C_8^3 e) A_8^4 f) A_8^3

Câu 38: Hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 4 ghế được xếp 2 bên một chiếc bàn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 4 bạn lớp A và 4 bạn lớp B sao cho không có 2 bạn nào cùng lớp ngồi đối diện nhau?

a) 9216 cách b) 1152 cách c) 4608 cách d) 144 cách.

Câu 39: Hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 4 ghế được xếp 2 bên một chiếc bàn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 4 bạn lớp A và 4 bạn lớp B sao cho không có 2 bạn nào cùng lớp ngồi đối diện nhau hoặc cạnh nhau?

a) 576 cách b) 1152 cách

c) 2304 cách d) 4608 cách.

Câu 40: Trong một hộp đựng 10 viên bi đỏ khác nhau từng đôi và 10 viên bi xanh giống hoàn toàn như nhau, có bao nhiêu cách khác nhau lấy ra 10 viên bi?

a) 1022 b) 1023 c) 1024 d) 1025.

Câu 41: Có bao nhiêu cách phân phối 7 đồ vật khác nhau cho 3 người sao cho một người nhận một đồ vật, còn hai người kia mỗi người nhận ba đồ vật?

a) 140 cách b) 5040 c) 280 cách d) 420 cách.

Câu 42: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể viết được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi, trong đó có hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

a) 216 b) 864 c) 6480 d) 2160.

Câu 43: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 có thể viết được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau từng đôi trong đó có 2 chữ số chẵn và một chữ số lẻ, biết rằng 2 chữ số chẵn đứng kề nhau?

a) 192 số b) 48 cách c) 192 cách d) 96 số.

Câu 44: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể viết được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi trong đó có 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ biết rằng 2 chữ số chẵn đứng kề nhau?

a) 198 số b) 216 số c) 99 số d) 108 số.

Câu 45: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể viết được bao nhiêu số gồm bốn chữ số khác nhau từng đôi trong đó chữ số 1 đứng ở hàng đơn vị?

a) 20 b) 120 c) 60 d) 30.

Câu 46: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể viết được bao nhiêu số gồm bốn chữ số khác nhau từng đôi trong đó luôn có mặt chữ số 1?

a) 40 b) 240 c) 60 d) 360.

Câu 47: Trong các công thức sau, công thức nào đúng, công thức nào sai?

a) $(a + 2b)^5 = a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$

☐ đúng, ☐ sai

b) $(a - \sqrt{2})^6 = a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 40a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8$

☐ đúng, ☐ sai

c) $(x - \frac{1}{x})^5 = x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}$ ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 48: Khai triển $(1 - 2x)^{21}$, hệ số của số hạng chứa x^{16} là:

a) $-2^{16}C_{21}^5$ b) $2^{16}C_{21}^5$ c) $2^{16}C_{21}^6$ d) $-2^{16}C_{21}^6$.

Câu 49: Số hạng không chứa x trong khai triển $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x})^6$ là:

a) C_6^2 b) C_6^3

c) C_6^1 d) Các giá trị ở a, b, c đều sai.

Câu 50: Số hạng không chứa x trong khai triển $(x^3 - \frac{2}{x})^8$ là:

a) 1792 b) 1120

c) 1024 d) Các giá trị ở a, b, c đều sai.

Câu 51: Khai triển $(1 + x)^{10}$ thành đa thức, tổng các hệ số của đa thức bằng bao nhiêu?

a) 512 b) 1024 c) 2048 d) 4096.

Câu 52: Khai triển $(3x - 4)^{17}$ thành đa thức, tổng các hệ số của đa thức này bằng bao nhiêu?

a) 1 b) 2 c) – 2 d) –1.

Hướng dẫn

Câu 1: a) Số các hoán vị của n phần tử bằng P_n **ĐS:** đúng.

b) Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \le k \le n)$ là A_n^k.

ĐS: sai.

c) Số các tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k. **ĐS:** sai.

Câu 2: a) $P_n = n!$ **ĐS:** đúng.

b) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ **ĐS:** sai.

c) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ **ĐS:** sai.

Câu 3: Chọn 3 nam từ 6 nam, có C_6^3 cách chọn.

Chọn 2 nữ từ bốn nữ, có C_4^2 cách chọn.

Theo qui tắc nhân, có $C_6^3 C_4^2 = 120$ cách lập đoàn. **ĐS:** Câu a.

Câu 4: Mỗi cách xếp là một hoán vị của 10 và ngược lại. Vậy có $P_{10} = 3628800$ cách xếp. **ĐS:** Câu b.

Câu 5: Vì xếp thành vòng tròn, nên hai cách xếp chỉ khác nhau khi tính thứ tự khác nhau.

Vậy có P_9 sắp xếp. **ĐS:** Câu b.

Câu 6: Trong 6 điểm đã cho, cứ ba điểm ta có một tam giác, vì vậy mỗi tam giác là một tổ hợp chập 3 của 6. Vậy có $C_6^3 = 20$ tam giác.

ĐS: Câu a.

Câu 7: Cứ hai đỉnh của bát giác xác định được hai vectơ, nên mỗi vectơ là một chỉnh hợp chập 2 của 8.

Vậy có $A_8^2 = 56$ vectơ. **ĐS:** Câu b.

Câu 8: • Tính m_1.

Gọi A là tập các số tự nhiên $\overline{ab}$ cần tìm. Có 5 cách chọn a, 5 cách chọn b. Theo qui tắc nhân:

$$m_1 = N(A) = 5.5 = 25.$$

• Tính m_2.

Gọi B là tập các số tự nhiên $\overline{cd}$ cần tìm. Có 5 cách chọn c. Sau khi chọn c, còn 4 chữ số, vì vậy có 4 cách chọn d. Theo qui tắc nhân:

$$m_2 = N(B) = 5.4 = 20.$$

Có thể lí luận gọn hơn như sau: Mỗi số $\overline{cd}$ là một chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử. Vậy:

$$m_2 = A_5^2 = 20.$$ **ĐS:** Câu b.

Câu 9: • Tính m_1.

Gọi A là tập các số tự nhiên $\overline{ab}$ cần tìm. Có 5 cách chọn a (vì $a > 0$). Có 6 cách chọn b. Theo qui tắc nhân: $m_1 = N(A) = 5.6 = 30$.

• Tính m_2.

Gọi B là tập các số tự niên $\overline{cd}$ cần tìm. Có 5 cách chọn c (vì $c > 0$). Sau khi chọn c, còn 5 chữ số, vì vậy có 5 cách chọn d. Theo qui tắc nhân: $m_2 = N(B) = 5.5 = 25$. **ĐS:** Câu a.

Câu 10: • Tính m_1.

Gọi A là tập các số tự nhiên $\overline{abc}$ cần tìm. Mỗi chữ số có 6 cách chọn. Theo qui tắc nhân: $m_1 = N(A) = 6^3 = 216$.

• Tính m_2.

Gọi B là tập các số tự nhiên $\overline{cde}$ cần tìm. Có 6 cách chọn c. Sau khi chọn c, còn 5 chữ số, vì vậy có 5 cách chọn d, tương tự có 4 cách chọn e. Theo qui tắc nhân:

$$m_2 = N(B) = 6.5.4 = 120.$$

Có thể lí luận gọn hơn như sau: Mỗi số $\overline{cde}$ là một chỉnh hợp chập 3 của 6. Vậy có $m_2 = A_6^3 = 120$. **ĐS:** Câu b.

Câu 11: • Tính m_1.

Gọi A là tập các số tự nhiên $\overline{abc}$ cần tìm. Có 5 cách chọn a (do a > 0), mỗi chữ số còn lại có 6 cách chọn. Theo qui tắc nhân:

$$m_1 = N(A) = 5.6^2 = 180.$$

• Tính m_2.

Gọi B là tập các số tự nhiên $\overline{cde}$ cần tìm. Có 5 cách chọn c. Sau khi chọn c, còn 5 chữ số, vì vậy có 5 cách chọn d, tương tự có 4 cách chọn e. Theo qui tắc nhân: $m_2 = N(B) = 5.5.4 = 100$.

Có thể lí luận gọn hơn như sau: Có 5 cách chọn c. Còn 5 chữ số, vì vậy có A_5^2 cách viết 5 chữ số còn lại vào 2 vị trí cd. Theo qui tắc nhân $m_2 = 5\,A_5^2 = 100$. **ĐS:** Câu d.

Câu 12: • Số các số gồm 1 chữ số: 7.

• Số các số gồm 2 chữ số: 7^2.

• Số các số gồm 3 chữ số: 7^3.

Theo qui tắc cộng có: $7 + 7^2 + 7^3 = 399$ số. **ĐS:** Câu a.

Câu 13: • Số các số gồm 1 chữ số: 7.

• Số các số gồm 2 chữ số khác nhau từng đôi: A_7^2.

• Số các số gồm 3 chữ số khác nhau từng đôi: A_7^3.

Theo qui tắc cộng có $7 + A_7^2 + A_7^3 = 259$ số. **ĐS:** Câu b.

Câu 14: Gọi $x = \overline{abc}$.

x chẵn nên $c \in \{2; 4; 6\}$, vậy có 3 cách chọn c. Mỗi chữ số a, b có 6 cách chọn. Theo qui tắc nhân có:

$m_1 = 3.6.6 = 108$ số. **ĐS:** Câu a.

Câu 15: Gọi $x = \overline{abc}$.

x chẵn nên $c \in \{2; 4; 6\}$, vậy có 3 cách chọn c. Còn 5 chữ số, vì vậy có A_5^2 cách viết 5 chữ số còn lại vào 2 vị trí ab. Theo qui tắc nhân:

$m_2 = 3.\,A_5^2 = 60$. **ĐS:** Câu c.

Câu 16: Gọi $x = \overline{abc}$.

Vì x chẵn nên $c \in \{0; 2; 4\}$.

• Nếu c = 0.

Có A_4^2 cách viết 4 chữ số còn lại vào 2 vị trí ab, vậy có A_4^2 số.

• $c \in \{2; 4\}$.

Có 2 cách chọn c. Sau khi chọn c, còn 4 chữ số trong đó có chữ số 0, vì vậy có 3 cách chọn a, còn lại có 3 cách chọn b. Theo qui tắc nhân có: 2.3.3 = 18 số.

Theo qui tắc cộng có $A_4^2 + 18 = 30$ số. **ĐS:** Câu a.

Câu 17: Gọi các số phải tìm là $x = \overline{abcd}$.

Vì x là số tự nhiên chẵn nên $d \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

• Nếu d = 0: Có A_9^3 số.

• Nếu $d \in \{2; 4; 6; 8\}$.

Có 4 cách chọn d. Còn 9 chữ số trong đó có chữ số 0, nên có 8 cách chọn a. Còn 8 chữ số và 2 vị trí (bc) nên có A_8^2 cách viết. Theo qui tắc nhân có: $4.8.A_8^2$ số.

Theo qui tắc cộng có: $A_9^3 + 32A_8^2 = 2296$ số. **ĐS:** Câu b.

Câu 18: $x = \overline{abc}$.

x chia hết cho 5 $\Leftrightarrow$ c = 5.

Mỗi chữ số a, b có 9 cách chọn, có 9.9 = 81 số. **ĐS:** Câu a.

Câu 19: $x = \overline{abc}$.

x chia hết cho 5 $\Leftrightarrow$ c = 5.

Còn 8 chữ số, nên có A_8^2 cách viết 8 chữ số còn lại vào 2 vị trí ab

Vậy $m_2 = A_8^2 = 56$ số. **ĐS:** Câu d.

Câu 20: $x = \overline{abcd}$.

x chia hết cho 5 $\Leftrightarrow d \in \{0; 5\}$.

• Nếu d = 0: Có A_9^3 số.

• Nếu d = 5:

Có 8 cách chọn a, A_8^2 cách viết 8 chữ số còn lại vào 2 vị trí bc. Theo qui tắc nhân có:

$8.A_8^2$ số.

Theo qui tắc cộng có $A_9^3 + 8A_8^2 = 952$ số. **ĐS:** Câu c.

Câu 21: $x = \overline{abcd}$.

Có C_4^2 cách chọn 2 chữ số chẵn.

Có C_5^2 cách chọn 2 chữ số lẻ.

Có P_4 cách viết 4 chữ số đã chọn trên vào 4 vị trí abcd.

Theo qui tắc nhân có $C_4^2 C_5^2 P_4 = 1440$ số. **ĐS:** Câu a.

Câu 22: Xét số $x = \overline{abcd}$.

- Xét số x kể cả a = 0: Giải tương tự như câu 12 ta có $C^2 C_5^2 P_4$ số.
- Xét a = 0

Có 4 cách chọn một chữ số chẵn

Có C_5^2 cách chọn 2 chữ số lẻ

Có P_3 cách viết 3 chữ số đã chọn trên vào 3 vị trí bcd.

Theo qui tắc nhân có $4C_5^2 P_3$ số x với a = 0.

Vậy có $C_5^2 C_5^2 P_4 - 4C_5^2 P_3 = 2160$ số. **ĐS:** Câu b.

Câu 23: Gọi các số phải tìm là $x = \overline{abcdfg}$.

- Nếu chữ số đầu tiên a là 1; 2; 3 (3 cách chọn a) thì 5 chữ số còn lại có thể chọn tùy ý sao cho chúng khác nhau và khác với a nên có P_5 cách viết. Theo qui tắc nhân có $3P_5$ số.
- Nếu chữ số đầu tiên a là 4 (1 cách chọn a), chữ số thứ hai b là 1 hoặc 2 (2 cách chọn b) thì có P_4 cách viết các chữ số còn lại, theo qui tắc nhân có $2P_4$ số.
- Nếu chữ số đầu tiên a là 4, chữ số thứ hai b là 3, chữ số thứ ba c chỉ có thể là 1 thì có P_3 cách chọn 3 chữ số còn lại.

Theo qui tắc cộng có $3P_5 + 2P_4 + P_3 = 414$ số. **ĐS:** Câu c.

Câu 24: Có C_4^2 cách chọn 2 chữ số số chẵn.

Có C_5^2 cách chọn 2 chữ số lẻ.

Có 6 cách viết (ab, bc, cd) 2 chữ số chẵn đã chọn.

Có 2 cách viết 2 chữ số lẻ đã chọn.

Theo qui tắc nhân có: $12C_4^2 C_5^2 = 720$ số. **ĐS:** Câu a.

Câu 25: Gọi số cần viết là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

Để đảm bảo luôn có mặt 3 chữ số 1; 2; 3 trước tiên ta viết 3 chữ số 1, 2, 3 vào 5 vị trí $a_1a_2a_3a_4a_5$: số cách viết là A_5^3.

Còn lại 6 chữ số và 2 vị trí, số cách viết A_6^2.

Theo qui tắc nhân có $A_5^3 A_6^2 = 1800$ số. **ĐS:** Câu a.

Câu 26: Gọi các số phải tìm là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.

Để luôn có mặt chữ số 0, ta viết chữ số 0 vào 3 vị trí $(a_2a_3a_4)$: có 3 cách viết.

Còn 3 vị trí, nên có 3 cách viết chữ số 1.

Còn 2 vị trí và 5 chữ số nên có A_5^2 cách viết.

Theo qui tắc nhân có $9A_5^2 = 180$ số. **ĐS:** Câu b.

Câu 27: Gọi các số phải tìm $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.

- **Xét số x kể cả $a_1 = 0$.**

  Có A_4^2 cách viết 2 chữ số 1, 2 vào 4 vị trí $a_1a_2a_3a_4$.

  Còn 2 vị trí và 5 chữ số nên có A_5^2 cách viết.

Theo qui tắc nhân có: $A_4^2 A_5^2$ số x kể cả $a_1 = 0$.

- **Xét số x với $a_1 = 0$.**

  Có A_3^2 cách viết 2 chữ số 1, 2 vào 3 vị trí $a_2a_3a_4$.

  Còn 1 vị trí và 4 chữ số nên có 4 cách viết.

Theo qui tắc nhân có $4A_3^2$ số x với $a_1 = 0$.

Vậy có $A_4^2 A_5^2 - 4A_3^2 = 216$ số. **ĐS:** Câu c.

Câu 28: 1. Mỗi cách sắp xếp 10 khách vào 10 chỗ ngồi là một hoán vị của 10. Vậy có P_{10} cách sắp xếp. 1. → c).

2. Mỗi cách sắp xếp 5 khách vào 10 chỗ ngồi là một chỉnh hợp chập 5 của 10. Vậy có A_{10}^5 cách sắp xếp 2. → a).

3. Số cách chọn là C_{10}^5. 3. → b).

Câu 29: 1. Chọn 5 chữ số khác nhau trong (*), số cách chọn là C_9^5.

Vậy 1. → c).

2. Từ (*) ta viết các số tự nhiên gồm 5 chữ số, số các số là 9^5.

Vậy 2. → a).

3. Từ (*) ta viết các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau từng đôi, số các số là A_9^5.

Vậy 3. → b).

Câu 30: Gọi các số phải tìm $x = \overline{abc}$.

Vì $a > 0$ nên có 9 cách chọn a. Còn 9 chữ số, nên có A_9^2 cách viết 9 chữ số trên vào 2 vị trí bc.

Vậy có $9A_9^2 = 6648$ số. **ĐS:** Câu d.

Câu 31: 1. Mỗi cách sắp xếp 20 học sinh thành một hàng dọc là một hoán vị của 20. Số cách sắp xếp là P_{20}.

Vậy 1. → c).

2. Đánh số hàng dọc theo thứ tự 1; 2; 3;...

Để sắp xếp theo đúng yêu cầu câu hỏi ta thực hiện như sau:

Số học sinh nam đứng ở vị trí lẻ và số học sinh nữ đứng ở vị trí chẵn có $P_{10}P_{10}$ cách.

Số học sinh nữ đứng ở vị trí chẵn và số học sinh nam đứng ở vị trí lẻ có $P_{10}P_{10}$ cách.

Theo qui tắc cộng có $2(P_{10})^2$.

Vậy 2. → d).

Câu 32: a) Có tất cả là 9 bạn, chọn 3 bạn để trực nhật, mỗi cách chọn là một tổ hợp chập 3 của 9. Vậy có C_9^3 cách phân công. Câu a sai.

b) Số cách chọn hai bạn nam là C_5^2, số cách chọn 1 bạn nữ là 4. Theo qui tắc nhân có $4C_5^2$ cách. Câu b sai.

c) Các trường hợp xảy ra:

TH1: 2 bạn nam và 1 bạn nữ: số cách chọn là $4C_5^2$ (theo câu b).

TH2: 3 bạn nam: số cách chọn là C_5^3.

Theo qui tắc cộng có: $4C_5^2 + C_5^3$. Vậy câu c đúng.

Câu 33:

1. Nếu chọn tùy ý, số cách chọn là C_9^5.

   Vậy 1. → d).

2. Số cách chọn 2 học sinh nữ là C_5^2. Số cách chọn 3 học sinh nam là C_4^3.

Theo qui tắc nhân có $C_5^2 C_4^3 = 40$ cách chọn.

Vậy 2. → b).

Câu 34: 1. Số cách chọn 3 học sinh nữ là C_5^3, số cách chọn 2 học sinh nam là C_4^2.

Theo qui tắc nhân có $C_5^3 C_4^2$ cách chọn.

Vậy 1. → a).

2. **TH1:** 2 học sinh nữ và 3 học sinh nam: $C_5^2 C_4^3$ cách chọn.

   TH2: 4 học sinh nam và 1 nữ: 5 cách.

Theo qui tắc cộng có: $C_5^2 C_4^3 + 5 = 45$.

Vậy 2. → c).

Câu 35: Chia hàng dọc thành 3 phần để xếp ba loại học sinh: có P_3 cách Trong mỗi phần đã chia có P_2 cách xếp 2 học sinh giỏi Lý; P_3 cách xếp 3 học sinh giỏi Toán, P_5 cách xếp học sinh giỏi Hóa.

Theo qui tắc nhân có $P_3P_2P_3P_5 = 8640$ cách. **ĐS:** Câu a.

Câu 36: Có C_{40}^5 cách phân công 5 bạn quét sân.

Có C_{35}^2 cách phân công 2 bạn lau phòng.

Có C_{33}^3 cách phân công 3 bạn trồng cây.

Theo qui tắc nhân có $C_{40}^5 C_{35}^2 C_{33}^3$ cách phân công. **ĐS:** Câu b.

Câu 37: 1. Để có một tập con gồm 5 phần tử của A luôn chứa a_1 và a_2, ta chọn 3 phần tử bất kì trong 8 phần tử còn lại của A (trừ đi a_1 và a_2), vậy mỗi tập con như thế là một tổ hợp chập 3 của 8. Vậy có C_8^3 tập con gồm 5 phần tử của A luôn có mặt a_1, a_2.

Vậy 1. → d).

2. Để có một tập con chứa 5 phần tử của A luôn chứa a_1 và không chứa a_2 ta chọn 4 phần tử trong 8 phần tử của A. Vậy có C_8^4 tập con.

Vậy 2. → c).

Câu 38: Để sắp xếp thỏa mãn không có hai bạn nào cùng lớp ngồi đối diện nhau ta sắp xếp như sau:

* Xếp 4 bạn lớp A ngồi vào dãy thứ nhất và 4 bạn lớp B ngồi vào dãy thứ hai.
* Đổi chỗ 2 bạn ngồi đối diện cho nhau:
  - Có P_4 cách xếp 4 bạn lớp A ngồi vào dãy thứ nhất.
  - Có P_4 cách xếp 4 bạn lớp B ngồi vào dãy thứ hai.
  - Mỗi cặp học sinh ngồi đối diện có 2 chỗ, vì vậy có 2^4 cách đôi chỗ 2 bạn ngồi đối diện.

Theo qui tắc nhân có $16(P_4)^2 = 9216$ cách. **ĐS:** Câu a.

Câu 39: Để xếp thỏa mãn không có hai bạn cùng lớp ngồi đối diện nhau hoặc cạnh nhau ta xếp 4 bạn cùng lớp vào mỗi dãy.

Có P_4 cách xếp 4 bạn lớp A vào dãy thứ nhất.

Có P_4 cách xếp 4 bạn lớp B vào dãy thứ hai.

Theo qui tắc nhân có $(P_4)^2$ cách.

Tương tự xếp 4 bạn lớp A vào dãy thứ hai và 4 bạn lớp B vào dãy thứ nhất ta có $(P_4)^2$ cách.

Theo qui tắc cộng có $2(P_4)^2 = 1152$ cách. **ĐS:** Câu b.

Câu 40: Các khả năng xảy ra:

- Lấy ra 0 bi đỏ và 10 bi xanh: số cách: C_{10}^0.
- Lấy ra 1 bi đỏ và 9 bi xanh:

Có C_{10}^1 cách lấy ra 1 bi đỏ và 1 cách lấy ra 9 bi xanh, vì vậy trong trường hợp này có C_{10}^1 cách.

- Lấy ra 2 bi đỏ và 8 bi xanh: Có C_{10}^2 cách.

...

- Lấy ra 10 bi đỏ và 0 bi xanh: Có C_{10}^{10} cách.

Theo qui tắc cộng có: $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$ cách.

ĐS: Câu c.

Câu 41: Người thứ nhất nhận một đồ vật: số cách nhận C_7^1.

Người thứ hai nhận 3 đồ vật trong 6 đồ vật còn lại: số cách nhận C_6^3.

Người thứ ba nhận 3 đồ vật còn lại: số cách nhận C_3^3.

Theo qui tắc nhân có $C_7^1 C_6^3 C_3^3$ cách phân phối.

Người thứ hai và người thứ ba cũng có thể nhận một đồ vật như người thứ nhất

Theo qui tắc cộng có 3 $C_7^1\,C_6^3\,C_3^3$ cách phân phối. **ĐS:** Câu d.

Câu 42: Có 3 chữ số chẵn nên có C_3^2 cách chọn 2 chữ số chẵn.

Có chữ số lẻ nên có C_3^2 cách chọn 2 chữ số lẻ.

Có P_4 cách viết 4 chữ số đã chọn vào 4 vị trí để tạo thành một số.

Theo qui tắc nhân có $C_3^2\,C_3^2\,P_4 = 216$ số. **ĐS:** Câu a.

Câu 43: Có C_4^2 cách chọn 2 chữ số chẵn.

Có 4 cách viết 2 chữ số chẵn đứng kề nhau.

Có 4 cách viết 4 chữ số lẻ vào một vị trí còn lại.

Theo qui tắc nhân có $16C_4^2 = 96$ số. **ĐS:** Câu d.

Câu 44: Gọi các số phải tìm $x = \overline{abcd}$.

- **Xét số x kể cả a = 0.**

Có C_4^2 cách chọn 2 chữ số chẵn.

Có 6 cách viết 2 chữ số đã chọn trên đứng kề nhau.

Có A_3^2 cách viết ba chữ số lẻ vào 2 vị trí còn lại.

Theo qui tắc nhân có $6C_4^2\,A_3^2$ số x kể cả a = 0.

- **Xét số x với a = 0.**

b phải là chữ số chẵn, nên có 3 cách chọn b.

Có A_3^2 cách viết 3 chữ số lẻ vào 2 vị trí còn lại.

Theo qui tắc nhân có $3A_3^2$ số x với a = 0.

Vậy có $6C_4^2\,A_3^2 - 3A_3^2 = 198$ số. **ĐS:** Câu a.

Câu 45: Gọi $x = \overline{ab1}$.

Chữ số 1 được viết vào hàng đơn vị, còn 5 chữ số, nên có $A_5^2 = 20$ số.

ĐS: Câu a.

Câu 46: Gọi $x = \overline{abcd}$.

Có 4 cách viết chữ số 1 vào 4 vị trí abcd.

Còn 3 vị trí và 5 chữ số, nên có A_5^3 cách viết 5 chữ số vào 3 vị trí còn lại này.

Theo qui tắc nhân có $4A_5^3 = 240$ số. **ĐS:** Câu b.

Câu 47: a) $(a + 2b)^5 = a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$.

ĐS: đúng.

b) $(a - \sqrt{2})^6 = a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8$.

ĐS: sai.

c) $(x - \frac{1}{x})^5 = x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}$. **ĐS:** đúng.

Câu 48: Số hạng thứ k + 1 trong khai triển $(1 - 2x)^{21}$ là $C_{21}^k(-2x)^{21-k}$

Giải phương trình $21 - k = 16$ ta có $k = 5$.

Vậy hệ số của số hạng cần tìm là $2^{16}C_{21}^5$. **ĐS:** Câu b.

Câu 49: Số hạng thứ k + 1 trong khai triển $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x})^6$ là:

$C_6^k(\sqrt[3]{x})^{6-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$ với k là số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng 6.

Để có số hạng không chứa x ta phải có:

$$\frac{6-k}{3} - k = 0 \Leftrightarrow 6 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}.$$

Vậy không có số hạng không chứa x. **ĐS:** Câu d.

Câu 50: Số hạng thứ k + 1 trong khai triển $(x^3 - \frac{2}{x})^8$ là:

$$C_8^k(x^3)^{8-k}(-\frac{2}{x})^k = C_8^k(-2)^kx^{24-3k-k} = C_8^k(-2)^kx^{24-4k},\ 0 \le k \le 8,\ k \in \mathbb{N}.$$

Để có số hạng không chứa x ta phải có:

$$24 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

Vậy số hạng không chứa x là $C_8^6 2^6 = 1792$. **ĐS:** Câu a.

Câu 51: Khai triển:

$$(1 + x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{10}x^{10}.$$

Cho $x = 1$ ta có

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 2^{10} = 1024.$$ **ĐS:** Câu b.

Câu 52: $(3x - 4)^{17} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{17}x^{17}$.

Cho $x = 1$ ta có

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{17} = (-1)^{17} = -1.$$ **ĐS:** Câu d.

XÁC SUẤT VÀ BIẾN CỐ

Câu 1: Gieo một con súc sắc 4 lần, không gian mẫu gồm:

a) 6^4 phần tử b) 4^6 phần tử

c) C_8^4 phần tử d) A_8^4 phần tử.

Câu 2: Gieo 1 đồng tiền hai lần, không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

a) 4 b) 2 c) 8 d) 6.

Câu 3: Có 5 miếng bìa được ghi các số từ 1 đến 5. Lấy ngẫu nhiên 2 miếng và xếp theo thứ tự từ trái qua phải và xét các số tạo thành. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

a) 32 b) 20 c) 10 d) 25.

Câu 4: Một hộp chứa 7 quả cầu được đánh số từ 1 đến 7. Lấy ngẫu nhiên 3 quả và xét tổng các số trên quả cầu. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

a) 210 b) 35 c) 343 d) 2187.

Câu 5: Một hộp chứa 9 quả cầu được đánh số từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên theo thứ tự ba quả không hoàn lại và xét các số tạo thành. Không gian mẫu gồm bao nhiêu phần tử?

a) 504 b) 84 c) 729 d) 27.

Câu 6: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "xuất hiện mặt chẵn", B là biến cố "xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3".

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được các khẳng định đúng:

1. P(A) = 2. P(B) =	a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$

Câu 7: Gieo một đồng tiền hai lần. Xét các biến cố:

A: "Kết quả của hai lần gieo là như nhau".

B: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp".

C: "Lần gieo thứ hai mới xuất hiện mặt sấp".

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được các khẳng định đúng:

1. P(A) = 2. P(B) = 3. P(C) =	a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

Câu 8: Gieo đồng thời hai con súc sắc, một con màu đỏ một con màu vàng. Kí hiệu biến cố H: "Con màu đỏ xuất hiện mặt sáu chấm".

Xác suất của biến cố H là:

a) $\frac{11}{36}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3}$

Câu 9: Gieo đồng thời hai con súc sắc, một con màu đỏ một con màu vàng. Kí hiệu biến cố H: "Có ít nhất một con xuất hiện mặt sáu chấm".

Xác suất của biến cố H là:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{25}{36}$

c) $\frac{11}{36}$ d) Các kết quả ở a, b, c đều sai.

Câu 10: Gieo đồng thời hai con súc sắc, một con màu đỏ một con màu vàng. Kí hiệu biến cố H: "Không có con nào xuất hiện mặt sáu chấm".

Xác suất của biến cố H là:

a) $\frac{10}{36}$ b) $\frac{25}{36}$

c) $\frac{10}{25}$ d) Các kết quả ở a, b, c đều sai.

Câu 11: Gieo đồng thời hai con súc sắc, một con màu đỏ một con màu vàng. Kí hiệu biến cố H: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con bằng 8".

Xác suất của biến cố H là:

a) $\frac{11}{36}$ b) $\frac{25}{36}$

c) $\frac{7}{36}$ d) Các kết quả ở a, b, c đều sai.

Câu 12: Gieo một con súc sắc hai lần và chú ý đến số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo. Xét biến cố A: "Số chấm ở hai mặt bằng nhau". Xác suất của biến cố A là:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{36}$.

Câu 13: Gieo một con súc sắc hai lần và chú ý đến số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo. Xét biến cố A: "Số chấm ở hai mặt khác nhau". Xác suất của biến cố A là:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{36}$.

Câu 14: Mở ngẫu nhiên một khóa số có 4 chữ số trong hệ thập phân. Tính xác suất mở được khóa:

a) $\frac{1}{10000}$ b) $\frac{1}{2500}$ c) $\frac{1}{40}$ d) $\frac{9999}{10000}$.

Câu 15: Mở ngẫu nhiên một khóa số có 4 chữ số trong hệ thập phân. Tính xác suất không mở được khóa.

a) $\frac{1}{10000}$ b) $\frac{1}{2500}$ c) $\frac{1}{40}$ d) $\frac{9999}{10000}$.

Câu 16: Có 5 tấm bìa như nhau được đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên lần lượt 3 tấm và xếp theo thứ tự từ trái qua phải. Tính xác suất của biến cố A: "Tổng các số trên ba tấm bìa là 10".

a) $\frac{11}{125}$ b) $\frac{11}{60}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{114}{125}$.

Câu 17: Có 5 tấm bìa như nhau được đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên lần lượt 3 tấm và xếp theo thứ tự từ trái qua phải. Tính xác suất của biến cố A: "Tổng các số trên ba tấm bìa là khác 8".

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{5}$.

Câu 18: Gieo một con súc sắc hai lần và chú ý đến số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo. Kí hiệu các biến cố:

A: "Số chấm ở hai mặt bằng nhau".

B: "Tổng số chấm không nhỏ hơn 10".

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

a) $P(A) < P(B)$ b) $P(A) = \frac{7}{36}$

c) $P(A) = P(B)$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 19: Gieo một con súc sắc hai lần và chú ý đến số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo. Kí hiệu các biến cố:

A: "Mặt 4 chấm chỉ xuất hiện trong lần gieo đầu".

B: "Mặt 4 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được các khẳng định đúng:

1. $P(A) =$ 2. $P(B) =$	a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{5}{36}$

Câu 20: Trong một cái bình có 3 quả cầu màu đen khác nhau và 4 quả cầu màu đỏ khác nhau. Ta lấy ra 2 quả cầu. Tính xác suất để 2 quả cầu lấy ra đều màu đen.

a) $\frac{1}{70}$ b) $\frac{1}{14}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{3}{35}$.

Câu 21: Trong một cái bình có 3 quả cầu màu đen khác nhau và 4 quả cầu màu đỏ khác nhau. Ta lấy ra 2 quả cầu. Tính xác suất để 2 quả cầu lấy ra cùng màu.

a) $\frac{1}{35}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{2}{7}$.

Câu 22: Trong một cái bình có 3 quả cầu màu đen khác nhau và 4 quả cầu màu đỏ khác nhau. Ta lấy ra 2 quả cầu. Tính xác suất để 2 quả cầu lấy ra khác màu.

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{9}{35}$. c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{12}{35}$.

Câu 23: Chọn ngẫu nhiên 2 bạn từ một tổ học sinh có 3 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Xác suất để trong 2 bạn được chọn có ít nhất một bạn nam:

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{6}{7}$ d) $\frac{5}{7}$.

Câu 24: Chọn ngẫu nhiên 2 bạn từ một tổ học sinh có 3 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Xác suất để 2 bạn được chọn cùng giới tính:

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{6}{7}$ d) $\frac{2}{7}$.

Câu 25: Có 6 người trong đó có 2 bạn a, b. Sắp 6 người đứng thành một hàng dọc đã đánh số. Gọi A là biến cố "Hai bạn a, b đứng cạnh nhau", B là biến cố "Hai bạn a, b không đứng cạnh nhau". Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được khẳng định đúng:

1. P(A) = 2. P(B) =	a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{6}$

Câu 26: Có 5 người trong đó a, b được xếp ngẫu nhiên vào 5 ghế xếp thành hàng ngang. Xác suất để a, b ngồi cách nhau 1 ghế là:

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{1}{20}$ d) $\frac{7}{10}$.

Câu 27: Một đợt xổ số phát hành 10000 vé trong đó có 1 giải nhất, 50 giải nhì, 100 giải ba và 1000 giải khuyến khích. Xác suất để một người mua 2 vé trúng một giải nhất và một giải khuyến khích:

a) $\frac{1}{99990}$ b) $\frac{2}{49995}$ c) $\frac{3}{49995}$ d) $\frac{1}{49995}$.

Câu 28: Hộp thứ nhất chứa 4 bi đỏ và 2 bi xanh. Hộp thứ 2 chứa 3 bi đỏ và 2 bi xanh. Từ mỗi hộp lấy ra 1 viên bi. Xác suất để hai bi cùng màu là:

a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{7}{15}$.

Câu 29: Hộp thứ nhất chứa 4 bi đỏ và 2 bi xanh. Hộp thứ 2 chứa 3 bi đỏ và 2 bi xanh. Từ mỗi hộp lấy ra 1 viên bi. Xác suất để hai bi khác màu là:

a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{7}{15}$.

Câu 30: Một hộp chứa 15 quả cầu đánh số từ 1 đến 15. Lấy ngẫu nhiên 3 quả. Gọi A là biến cố "Nhận được 3 số chẵn"; C là biến cố "Nhận được 3 số đều chia hết cho 3". Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A) = \frac{2}{91}$ b) $P(A \cap C) = \frac{1}{91}$

c) $P(A \cup C) = \frac{8}{91}$ d) $P(A \cup C) = \frac{9}{91}$.

Câu 31: Một hộp chứa 10 quả cầu đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 2 quả. Xác suất nhận được hai số lẻ hoặc hai số đều chia hết cho 3 bằng bao nhiêu?

a) $\frac{4}{35}$ b) $\frac{2}{21}$ c) $\frac{1}{35}$ d) $\frac{1}{105}$.

Câu 32: Có 3 hộp, mỗi hộp chứa 1 quả cầu đỏ, 1 quả cầu xanh, 1 quả cầu đen. Từ mỗi hộp lấy ra một quả cầu. Gọi A là biến cố: "Cả 3 quả cùng màu", B là biến cố "Quả đầu màu đỏ". Giá trị $P(A \cup B)$ bằng:

a) $\frac{11}{27}$ b) $\frac{1}{27}$ c) $\frac{16}{27}$ d) $\frac{1}{3}$.

Câu 33: Gieo một lần 2 con súc sắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm là 9", B là biến cố "Tổng số chấm là 10"

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được khẳng định đúng:

1. $P(A) =$ 2. $P(A \cup B) =$	a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{7}{36}$

Câu 34: Gieo một lần 2 con súc sắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm là 9", B là biến cố "Hiệu số chấm trên hai mặt là 3". Giá trị của $P(A \cup B)$ bằng:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{3}$

Câu 35: Gieo 2 con súc sắc đối xứng và đồng chất. Xác suất của biến cố: "Tổng số chấm là số lẻ" là:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{4}$.

Câu 36: Gieo 3 con súc sắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố: "Cả 3 con súc sắc đều không xuất hiện mặt sáu chấm". Xác suất của biến cố A bằng bao nhiêu?

a) $\frac{125}{216}$ b) $\frac{91}{216}$

c) $\frac{1}{216}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 37: Gieo 3 con súc sắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố: "Ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt sáu chấm". Xác suất của biến cố A bằng bao nhiêu?

a) $\frac{125}{216}$ b) $\frac{1}{216}$

c) $\frac{91}{216}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 38: Một lớp học có 40 học sinh trong đó có 10 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lí, 4 học sinh vừa giỏi Lí vừa giỏi Toán. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Gọi H là biến cố:

"Học sinh được chọn là học sinh giỏi Toán hoặc giỏi Lí". Xác suất của biến cố H là:

a) $\frac{11}{40}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{8}$.

Câu 39: Trong một cái hộp có 5 quả cầu đỏ và 4 quả cầu vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 quả. Xác suất để có ít nhất một quả cầu vàng là:

a) $\frac{5}{42}$ b) $\frac{37}{42}$ c) $\frac{37}{504}$ d) $\frac{467}{504}$.

Câu 40: Trong 7 học sinh có 3 học sinh A, B, C. Xếp 7 học sinh này thành một hàng dài một cách ngẫu nhiên. Xác suất để A, B, C đứng cạnh nhau là:

a) $\frac{1}{42}$ b) $\frac{41}{42}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{1}{6}$.

Câu 41: Trong 8 sản phẩm có 4 sản phẩm loại 1, 3 sản phẩm loại 2, 1 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Xác suất để sản phẩm lấy ra không phải là phế phẩm là:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{4}{8}$ d) $\frac{7}{8}$.

Câu 42: Gieo một con súc sắc 3 lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm bằng bao nhiêu?

a) $\frac{127}{216}$ b) $\frac{91}{216}$

c) $\frac{1}{216}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 43: Gieo một cặp súc sắc 3 lần. Xác suất sao cho có ít nhất một lần cặp súc sắc đều xuất hiện mặt 6 chấm bằng bao nhiêu?

a) $\frac{1}{46656}$ b) $\frac{35}{46656}$

c) $\frac{3781}{46656}$ c) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 44: Có hai hộp, mỗi hộp chứa một quả cầu đỏ, một quả cầu xanh, một quả cầu vàng. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra mỗi hộp mỗi quả. Kí hiệu các biến cố sau:

A: "Cả hai quả cùng màu"

B: "Quả thứ hai không vàng".

Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A) = P(B)$ b) $P(A) > P(B)$

c) $P(B) = \frac{1}{3}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 45: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 3 lần. Kí hiệu A là biến cố "Tổng số chấm của ba lần gieo là 9".

Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A) = \dfrac{27}{216}$ b) $P(A) = \dfrac{26}{216}$

c) $P(A) = \dfrac{25}{216}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 46: Một cái hộp đựng 6 quả cầu được đánh số từ 1 đến 6. Lấy ngẫu nhiên một lần ra bốn quả. Kí hiệu A là biến cố: "Tổng các số ghi trên các quả cầu lấy ra bằng 12".

Giá trị của P(A) bằng bao nhiêu:

a) $\dfrac{1}{15}$ b) $\dfrac{2}{15}$ c) $\dfrac{3}{15}$ d) $\dfrac{4}{15}$.

Câu 47: Một cái hộp đựng 6 quả cầu được đánh số từ 1 đến 6. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từng quả cho đến khi được bốn quả và đọc số ghi trên từng quả. Kí hiệu A là biến cố:

"Tổng các số ghi trên các quả cầu lấy ra bằng 12".

Giá trị của P(A) bằng bao nhiêu:

a) $\dfrac{1}{15}$ b) $\dfrac{2}{15}$ c) $\dfrac{3}{15}$ d) $\dfrac{4}{15}$.

Câu 48: Một vận động viên bắn trúng vòng 10 với xác suất 0,9, bắn trúng vòng 9 với xác suất 0,01. Xác suất để vận động viên trên không bắn trúng vòng 9 trở lên là:

a) 0,09 b) 0,91 c) 0,1 d) 0,89.

Hướng dẫn

Câu 1: Mỗi con súc sắc có 6 mặt, vì vậy không gian mẫu có 6^4 số.

ĐS: Câu a.

Câu 2: Đồng tiền có hai mặt (sấp, ngửa), vì vậy không gian mẫu có $2^2 = 4$ phần tử. **ĐS:** Câu a.

Câu 3: Không gian mẫu gồm những số có hai chữ số khác nhau được thành lập từ 5 số 1, 2, 3, 4, 5.

Vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = A_5^2 = 20$. **ĐS:** Câu b.

Câu 4: Có 7 quả cầu lấy 3 quả, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_7^3 = 35$.

ĐS: Câu b.

Câu 5: Không gian mẫu gồm các số có 3 chữ số khác nhau từng đôi được thành lập từ các chữ số từ 1 đến 9.

Vậy không gian mẫu có số phần tử $A_9^3 = 504$. **ĐS:** Câu a.

Câu 6: Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, nên $N(\Omega) = 6$.

$$A = \{2, 4, 6\}, N(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{3, 6\}, N(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Vậy 1. → c); 2. → a).

Câu 7: Không gian mẫu Ω = {SS; NN; SN; NS}; A= {SS; NN}; B = {SN; NS; SS}; C = {NS};

$\Rightarrow$ $N(\Omega) = 4$; $N(A) = 2$; $N(B) = 3$; $N(C) = 1$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{4}; \quad P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$

Vậy 1. → b); 2. → d); 3. → a).

Câu 8: Mỗi con súc sắc có sáu mặt mang từ 1 chấm đến 6 chấm, vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6^2 = 36$.

Gọi A là biến cố " con đỏ xuất hiện mặt sáu chấm".

$$N(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

ĐS: Câu c.

Câu 9: Mỗi con súc sắc có sáu mặt mang từ 1 chấm đến 6 chấm, vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6^2 = 36$.

Gọi A là biến cố "Con đỏ xuất hiện mặt sáu chấm".

$$N(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Gọi D là biến cố con súc sắc vàng xuất hiện mặt sáu chấm.

$$N(D) = 6 \Rightarrow P(D) = \frac{1}{6}.$$

$A \cap D$ là biến cố cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt sáu chấm

$\Rightarrow \quad N(A \cap D) = 1 \Rightarrow P(A \cap D) = \dfrac{1}{36}$

Rõ ràng $H = A \cup D$

$$\Rightarrow \quad P(H) = P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{11}{36}$$ **ĐS:** Câu c.

(Câu này tính $P(\overline{H})$ lời giải gọn hơn).

Câu 10: Rõ ràng $\overline{H}$ là biến cố: "Ít nhất một con xuất hiện mặt sáu chấm".

Tính toán như câu 9 ta có $P(\overline{H}) = \dfrac{11}{36}$

$\Rightarrow \quad P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - \dfrac{11}{36} = \dfrac{25}{36}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 11: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 36$.

$H = \{(2; 6); (6; 2); (3; 5); (5; 3); (4; 4)\}$, $N(H) = 5$

$\Rightarrow \quad P(H) = \dfrac{5}{36}$ **ĐS:** Câu d.

Câu 12: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6^2 = 36$.

$A = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5); (6; 6)\}$

$\Rightarrow \quad N(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ **ĐS:** Câu a.

Câu 13: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6^2 = 36$.

Rõ ràng $\overline{A}$ là biến cố "Số chấm ở hai mặt bằng nhau".

Theo câu 12 ta có $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{5}{6}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 14: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 10^4$. Biến cố A: "Mở được khóa" có $N(A) = 1$

Xác suất mở được khóa $P(A) = \dfrac{1}{10^4}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 15: Gọi A là biến cố "Không mở được khóa"

$\Rightarrow$ $\overline{A}$ là biến cố "Mở được khóa".

Theo câu 14: $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{10000}$

$\Rightarrow$ $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{9999}{10000}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 16: Một tập con của không gian mẫu là một chỉnh hợp chập 3 của 5. Vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = A_5^3$

$A = \{(1; 4; 5); (1; 5; 4); (2; 3; 5); (2; 5; 3); (3; 2; 5); (3; 5; 2); (4; 1; 5); (4; 5; 1); (5; 1; 4); (5; 2; 3); (5; 3; 2); (5; 4; 1)\}$

$\Rightarrow$ $N(A) = 12 \Rightarrow P(A) = \dfrac{12}{A_5^3} = \dfrac{1}{5}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 17: Một phần tử của không gian mẫu là một chỉnh hợp chập 3 của 5. Vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = A_5^3$.

Rõ ràng $\overline{A}$ là biến cố "Tổng các số trên 3 tấm bìa là 8"

$\Rightarrow$ $\overline{A} = \{(1; 2; 5); (1; 3; 4); (1; 4; 3); (1; 5; 2); (2; 1; 5); (2; 5; 1); (3; 1; 4); (3; 4; 1); (4; 1; 3); (4; 3; 1); (5; 1; 2); (5; 2; 1)\}$

$\Rightarrow$ $P(\overline{A}) = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow$ $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{4}{5}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 18: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.6 = 36$

$A = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5); (6; 6)\}$, $N(A) = 6$

$\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$B = \{(4; 6); (5; 5); (5; 6); (6; 4); (6; 5); (6; 6)\}$, $N(B) = 6$

$\Rightarrow$ $P(B) = \dfrac{1}{6}$.

Câu 19: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 36$.

$A = \{(4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 5); (4; 6)\}$; $N(A) = 5$

$\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{5}{36}$.

$B = \{(4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 5); (4; 6); (4; 4)\}$, $N(B) = 6$

$\Rightarrow \quad P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Vậy 1. → c); 2. → a).

Câu 20: Có tất cả 7 quả cầu, lấy ra 3 quả, vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_7^2$.

Gọi A là biến cố "Lấy ra 2 quả cầu màu đen".

Có 3 quả cầu màu đen, nên $N(A) = C_3^2$

$\Rightarrow \quad P(A) = \dfrac{C_3^2}{C_7^2} = \dfrac{1}{7}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 21: Có tất cả 7 quả cầu, lấy ra 3 quả, vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_7^2$.

Gọi A là biến cố "Lấy ra 2 quả cầu màu đen".

Theo câu 20: $P(A) = \dfrac{C_3^2}{C_7^2} = \dfrac{1}{7}$

Gọi B là biến cố "Lấy ra 2 quả cầu màu đỏ".

Tính toán tương tự như câu 20 ta có: $P(B) = \dfrac{C_4^2}{C_7^2} = \dfrac{2}{7}$.

Vì A, B là hai biến cố xung khắc nên:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{7}.$$ **ĐS:** Câu b.

Câu 22: Gọi A là biến cố hai quả cầu lấy ra cùng màu. Tính toán tương tự như câu 21 ta có

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

Vì $\overline{A}$ là biến cố hai quả cầu lấy ra khác màu, nên:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{4}{7}.$$ **ĐS:** Câu c.

Câu 23: Có tất cả 7 học sinh, chọn ra 2 học sinh, vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_7^2$.

Gọi A là biến cố: "2 bạn được chọn có ít nhất một bạn là nam". B là biến cố: "1 bạn nam và 1 bạn nữ". C là biến cố: "Có đúng 2 bạn nam".

Rõ ràng N(B) = 3.4 = 12. N(C) = $C_3^2 = 3$

$\Rightarrow$ N(A) = N(B) + N(C) = 12 + 3 = 15

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{15}{C_7^2} = \frac{5}{7}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 24: Có tất cả 7 học sinh, chọn ra 2 học sinh, vậy không gian mẫu Ω có N(Ω) = $C_7^2 = 21$.

Gọi A là biến cố "Hai bạn được chọn là nam"; B là biến cố "Hai bạn được chon là nữ".

Dễ thấy N(A) = $C_3^2 = 3$, nên $P(A) = \frac{1}{7}$

Tương tự N(B) = $C_4^2 = 6$, nên $P(B) = \frac{2}{7}$.

Vì A, B độc lập nên

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{7}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 25: Không gian mẫu Ω có N(Ω) = P_6.

Đặt tạm a ở ngoài, sắp 5 người vào hàng: có P_5 cách. Sau đó xếp a ngồi cạnh b có 2 cách.

Theo qui tắc nhân có N(A) = $2P_5$

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{2P_5}{P_6} = \frac{1}{3}$

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2P_5}{P_6} = \frac{2}{3}$.

Vậy 1. → a); 2. → c).

Câu 26: Có 5 người được xếp thành hàng ngang, vậy không gian mẫu N(Ω) = P_5.

Gọi A là biến cố a, b ngồi cách nhau một ghế.

Có 2.3 = 6 cách xếp a, b cách nhau một ghế. Có P_3 cách xếp 3 người còn lại vào 3 vị trí còn lại. Theo qui tắc nhân có N(A) = $6.P_3$

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{6P_3}{P_5} = \frac{3}{10}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 27: Mua 2 vé trong 10000 vé, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_{10000}^2$.

Gọi A là biến cố "Trúng một giải nhất và 1 giải khuyến khích" ta có:

$N(A) = 1.1000 = 1000$

$\Rightarrow \quad P(A) = \dfrac{1000}{C_{10000}^2}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 28: Hộp thứ nhất chứa 6 viên bi, hộp thứ hai chứa 5 bi. Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.5 = 30$.

- Gọi A là biến cố 2 hộp cùng lấy được bi đỏ:

$N(A) = 4.3 = 12 \Rightarrow P(A) = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$.

- Gọi B là biến cố 2 hộp cùng lấy được bi xanh:

$N(B) = 2.2 = 4 \Rightarrow P(B) = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}$.

Rõ ràng A và B là hai biến cố xung khắc, nên:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{8}{15}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 29: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.5 = 30$.

Gọi A là biến cố "Hộp thứ nhất lấy được bi đỏ, hộp thứ hai lấy được bi xanh".

B là biến cố "Hộp thứ nhất lấy được bi xanh, hộp thứ hai lấy được bi đỏ".

$N(A) = 4.2 = 8 \Rightarrow P(A) = \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$.

$N(B) = 2.3 = 6 \Rightarrow P(B) = \dfrac{6}{30} = \dfrac{3}{15}$.

Vì A, B độc lập nên xác suất để hai bi khác màu là:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{3}{15} = \dfrac{7}{15}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 30: 15 quả cầu, lấy ra 3 quả cầu, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_{15}^3 = 455$.

Có 7 quả cầu đánh số chẵn,vậy biến cố A có $N(A) = C_7^3 = 35$.

Có 5 quả cầu được đánh số chia hết cho 3, vậy $N(C) = C_5^3 = 10$.

$\Rightarrow \quad P(A) = \dfrac{C_7^3}{C_{15}^3} = \dfrac{1}{13}$, $P(C) = \dfrac{C_5^3}{C_{15}^3} = \dfrac{2}{91}$

$A \cap C$ là biến cố "Nhận được 3 số chẵn và chia hết cho 3"

$\Rightarrow \quad N(A \cap C) = 0$

$\Rightarrow \quad P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \dfrac{1}{13} + \dfrac{2}{91} = \dfrac{9}{91}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 31: Gọi A là biến cố "Nhận được 2 số lẻ"; B là biến cố "Nhận được 2 số đều chia hết cho 3".

Ta cần tính $P(A \cup B)$

Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_{15}^2 = 105$

$N(A) = C_5^2 = 10 \qquad \Rightarrow P(A) = \dfrac{2}{21}$

$N(B) = C_3^2 = 3 \qquad \Rightarrow P(B) = \dfrac{1}{35}$

$N(A \cap B) = 1 \qquad \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{105}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{4}{35}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 32: Mỗi hộp đựng 3 quả cầu, vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 3.3.3 = 27$.

Có 3 cách lấy ra quả cầu thứ nhất, 1 cách lấy ra quả cầu thứ hai cùng màu với quả thứ nhất và 1 cách lấy ra quả cầu thứ ba cùng màu với quả cầu thứ nhất, theo qui tắc nhân: $N(A) = 3.1.1 = 3$. Vậy $P(A) = \dfrac{3}{27} = \dfrac{1}{9}$.

Có 1 cách lấy ra quả đầu màu đỏ, 3 cách chọn quả cầu thứ 2 và thứ 3, theo qui tắc nhân

$N(B) = 1.3.3 = 9$. Vậy $P(B) = \dfrac{1}{3}$.

Biến cố $A \cap B$: "Cả 3 quả cầu màu đỏ". Dễ thấy $N(A \cap B) = 1$. Vậy $P(A \cap B) = \dfrac{1}{27}$

$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{27} = \dfrac{11}{27}$

ĐS: Câu a.

Câu 33: Không gian mẫu Ω là tập hợp các bộ 2 số $(i; j)$ với $i, j = 1; 2; 3; 4; 5; 6$. Vậy $N(\Omega) = 6.6 = 36$.

Ta có các phân tích:

$$9 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3$$

$$10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$$

$\Rightarrow$ $N(A) = 4$, $N(B) = 3$

$\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{1}{9}$; $P(B) = \dfrac{1}{12}$

Rõ ràng $A \cap B = \varnothing$

$\Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{7}{36}$

Vậy 1. $\rightarrow$ b); 2. $\rightarrow$ d).

Câu 34: Không gian mẫu Ω là tập hợp các bộ 2 số $(i; j)$ với $i, j = 1; 2; 3; 4; 5; 6$. Vậy $N(\Omega) = 6.6 = 36$.

Ta có các phân tích:

$$9 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3$$

$$3 = 4 - 1 = 5 - 2 = 6 - 3$$

$\Rightarrow$ $N(A) = 4$, $N(B) = 6$

$\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{1}{9}$; $P(B) = \dfrac{1}{6}$

$N(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{18}$

$\Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{2}{9}$.

ĐS: Câu c.

Câu 35: Gọi A là biến cố: "Tổng số chấm là số lẻ" và B là biến cố: "Tổng số chấm là số chẵn".

Dễ thấy rằng $A = \overline{B}$ và $P(A) = P(B)$

$\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{1}{2}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 36: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6^3 = 216$.

$N(A) = 5^3 = 125$

$\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{125}{216}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 37: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6^3 = 216$.

Gọi B là biến cố: "Cả 3 con súc sắc đều không xuất hiện có mặt sáu chấm".

Rõ ràng $A = \overline{B}$

$$N(B) = 5^3 = 125$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = \frac{125}{216}.$$

Vì vậy $P(A) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 38: Có 40 học sinh chọn 1, vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 40$.

Gọi A là biến cố "Học sinh được chọn là học sinh giỏi Toán", B là biến cố "Học sinh được chọn là học sinh giỏi Lí", $A \cap B$ là biến cố "Học sinh được chọn vừa giỏi Toán vừa giỏi Lí"

Ta cần tính $P(A \cup B)$.

$$P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4},\ P(B) = \frac{1}{8},\ P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{11}{40}.$$

ĐS: Câu a.

Câu 39: Có tất cả 9 quả cầu, lấy ra 3 quả, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_9^3 = 84$.

Gọi A là biến cố: "Có ít nhất 1 quả cầu vàng", B là biến cố: "Cả 3 quả cầu đều màu đỏ". Rõ ràng $A = \overline{B}$.

Có 5 quả cầu đỏ, vậy $N(B) = C_5^3 = 10$

$$\Rightarrow \quad P(B) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

$\Rightarrow \quad P(A) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{5}{42} = \dfrac{37}{42}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 40: 7 học sinh xếp thành một hàng dài, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = P_7$.

Để xếp A, B, C đứng cạnh nhau, ta thực hiện như sau:

Xếp 5 học sinh thành một hàng dọc (trong đó có A): có P_5 cách.

Xếp B, C đứng cạnh A: có P_3 cách.

Theo qui tắc nhân có P_5P_3 cách.

Vậy xác suất để A, B, C đứng cạnh nhau là: $\dfrac{P_5P_3}{P_7} = \dfrac{1}{7}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 41: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 8$

Gọi A là biến cố: "Sản phẩm lấy ra không phải là phế phẩm". B là biến cố: "Sản phẩm lấy ra là sản phẩm loại 1". C là biến cố: "Sản phẩm lấy ra là sản phẩm loại 2".

Rõ ràng $A = B \cup C$ và B và C là hai biến cố xung khắc.

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}.$$ **ĐS:** Câu d.

Câu 42: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6^3 = 216$.

Gọi A là biến cố ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm,

$\overline{A}$ là biến cố không có lần nào xuất hiện mặt sáu chấm, mỗi lần gieo có 5 khả năng xảy ra (xuất hiện mặt 1 chấm, mặt 2 chấm, mặt 3 chấm, mặt 4 chấm, mặt 5 chấm), theo qui tắc nhân $N(\overline{A}) = 5^3 = 125$.

$$P(\overline{A}) = \frac{125}{216} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$ **ĐS:** Câu b.

Câu 43: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 36^3$.

Gọi A là biến cố ít nhất một lần cặp súc sắc xuất hiện mặt sáu chấm

$\overline{A}$ là biến cố không có lần gieo nào cả hai mặt đều xuất hiện mặt sáu chấm. Hai trường hợp xảy ra:

TH1: Gọi B là biến cố cả hai mặt của cặp súc sắc đều không có mặt sáu chấm trong một lần gieo.

$N(B) = 5.5 = 25$.

TH2: Gọi C là biến cố trong hai mặt của cặp súc sắc có đúng một mặt sáu chấm trong một lần gieo.

$N(C) = 2.5 = 10$.

$$\Rightarrow \quad N(\overline{A}) = [N(B) + N(C)]^3 = 35^3, P(\overline{A}) = \frac{35^3}{36^3}.$$

Vì vậy: $P(A) = 1 - \frac{35^3}{36^3} = \frac{3781}{46656}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 44: Mỗi hộp có 3 quả cầu, vậy không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 3.3 = 9$.

Viết tắt quả cầu vàng là V, quả cầu xanh là X, quả cầu đỏ là Đ.

A = {(Đ, Đ); (X, X); (V, V)}, $N(A) = 3$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Ta tính N(B).

Có 3 cách chọn quả cầu thứ thứ nhất, 2 cách chọn quả cầu thứ hai. **Theo qui tắc nhân:**

$$N(B) = 3.2 = 6$$

$\Rightarrow$ $P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 45: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.6.6 = 216$.

Để tính N(A) ta phân tích:

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3.$$

Vậy $N(A) = 3! + 3! + 3 + 3 + 3! + 1 = 25$

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{25}{216}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 46: Có 6 quả cầu lấy ra bốn quả, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_6^4 = 15$.

Để tính N(A) ta phân tích

$$12 = 1 + 2 + 3 + 6 = 1 + 2 + 4 + 5.$$

Vậy $N(A) = 2$

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{15}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 47: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = A_6^4 = 360$.

Tương tự câu 46 ta có phân tích:

$$12 = 1 + 2 + 3 + 6 = 1 + 2 + 4 + 5$$

$\Rightarrow$ $N(A) = 4! + 4! = 48$.

Vậy $P(A) = \frac{48}{360} = \frac{2}{15}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 48: Gọi A là biến cố bắn trúng vòng 10, B là biến cố bắn trúng vòng 9, C là biến cố bắn trúng vòng 9 trở lên.

Ta có: $C = A \cup B$.

Rõ ràng A, B là hai biến cố xung khắc:

$$P(C) = P(A) + P(B) = 0,9 + 0,01 = 0,91.$$

Vậy xác suất để vận động viên trên không bắn trúng vòng 9 trở lên là:

$P(\bar{C}) = 1 - 0,91 = 0,09$. **ĐS:** Câu a.

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Câu 1: Trong trò chơi hái lộc đầu xuân, trên cây hoa có 10 bông hoa có thưởng, và 20 bông hoa không có thưởng. Bạn Điểm hái hai bông hoa, mỗi lần một bông. Xác suất sao cho bông hoa hái lần thứ hai có thưởng, nếu bông hoa hái lần đầu không có thưởng là:

a) $\frac{10}{29}$ b) $\frac{20}{87}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{29}$.

Câu 2: Trong trò chơi hái lộc đầu xuân, trên cây hoa có 10 bông hoa có thưởng, và 20 bông hoa không có thưởng. Bạn Điểm hái hai bông hoa, mỗi lần một bông. Xác suất sao cho bông hoa hái lần thứ hai có thưởng, nếu bông hoa hái lần đầu có thưởng là:

a) $\frac{10}{29}$ b) $\frac{9}{29}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{29}$.

Câu 3: Hai bạn Điểm và Liêm chơi trò gieo súc sắc. Điểm gieo trước, Liêm gieo sau. Giả sử Điểm gieo được mặt 3 chấm. Xác suất sao cho Liêm gieo được mặt có số chấm lớn hơn 3 là:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{4}$

Câu 4: Một con súc sắc cân đối và đồng chất được gieo 2 lần. Gọi A là biến cố "Hai lần gieo đều xuất hiện mặt sáu chấm", B: "Lần đầu xuất hiện mặt sáu chấm". Giá trị P(A/B) bằng bao nhiêu?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{36}$.

Câu 5: Một con súc sắc cân đối và đồng chất được gieo 2 lần. Gọi A là biến cố "Hai lần gieo đều xuất hiện mặt sáu chấm", C: "Ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm", D: "Lần thứ hai không xuất hiện mặt sáu chấm"

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được khẳng định đúng:

1. P(A/C) = 2. P(A/D) =	a) 0 b) $\frac{1}{35}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{6}$

Câu 6: Một con súc sắc cân đối và đồng chất được gieo 2 lần. Gọi A là biến cố tổng số chấm trong 2 lần gieo không nhỏ hơn 11, B là biến cố số 5 xuất hiện đúng một lần gieo. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A/B) = \frac{2}{3}$ b) $P(A/B) = \frac{1}{18}$

c) $P(A/B) = \frac{1}{5}$ d) $P(A/B) = \frac{1}{4}$.

Câu 7: Một con súc sắc cân đối và đồng chất được gieo 2 lần. Gọi A là biến cố tổng số chấm trong 2 lần gieo không nhỏ hơn 11, C là biến cố số 5 xuất hiện ít nhất trong một lần gieo. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A/C) = \frac{2}{11}$ b) $P(A/C) = \frac{1}{18}$

c) $P(A/C) = \frac{11}{36}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 8: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất một lần. Gọi A là biến cố: "Xuất hiện mặt 1, 2, 3, hoặc 4 chấm"; B là biến cố "Xuất hiện mặt 3, 4 hoặc 5 chấm", C là biến cố "Xuất hiện mặt 5 hoặc 6 chấm". Chọn khẳng định đúng:

a) A và B là hai biến cố độc lập.

b) B và C là hai biến cố độc lập.

c) A và C là hai biến cố không độc lập.

d) Cả 3 khẳng định trên đều đúng.

Câu 9: Một cái hộp đựng 4 quả cầu đỏ và 3 quả cầu vàng. Lần lượt lấy ra 2 quả cầu không hoàn lại. Xác suất để được hai quả cầu vàng là:

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{4}{7}$.

Câu 10: Hai vận động viên độc lập cùng bắn vào bia. Xác suất bắn trượt của vận động viên thứ nhất (bởi một viên đạn) là $P_1 = \frac{2}{5}$, của vận động viên thứ hai là $P_2 = \frac{1}{4}$. Gọi A là biến cố có ít nhất một vận động viên bắn trượt. Giá trị P(A) bằng bao nhiêu?

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{11}{20}$ d) $\frac{1}{4}$.

Câu 11: Hai vận động viên độc lập cùng bắn vào bia. Xác suất bắn trúng của vận động viên thứ nhất (bởi một viên đạn) là $P = \frac{1}{3}$, của vận động viên thứ hai là $P_2 = \frac{1}{4}$. Kí hiệu các biến cố:

A: "Vận động viên I bắn trượt"

B: "Có ít nhất một vận động viên bắn trượt".

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được hai khẳng định đúng:

1. P(A) = 2. P(B) =	a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{11}{12}$

Câu 12: Một đồng tiền cân đối và đồng chất được gieo ba lần. Kí hiệu các biến cố:

A: "Ba lần đều xuất hiện mặt sấp"

B: "Lần thứ ba xuất hiện mặt sấp".

Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A/B) = \frac{1}{8}$ b) $P(A/B) = \frac{1}{2}$

c) $P(A/B) = \frac{1}{4}$ d) $P(A/B) = \frac{1}{16}$.

Câu 13: Có hai hộp, hộp thứ nhất đựng 3 bi trắng và 2 bi đen, hộp thứ hai đựng 4 bi trắng và 1 bi đen. Lấy từ hộp thứ nhất 1 viên bi, xem màu của nó rồi bỏ vào hộp thứ hai. Sau đó lấy từ hộp thứ hai một viên bi. Xác suất để cả hai bi đều màu trắng là:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{6}$.

Câu 14: Có hai hộp, hộp thứ nhất đựng 3 bi trắng và 2 bi đen, hộp thứ hai đựng 4 bi trắng và 1 bi đen. Lấy từ hộp thứ nhất 1 viên bi, xem màu của nó rồi bỏ vào hộp thứ hai. Sau đó lấy từ hộp thứ hai một viên bi. Xác suất để bi lấy từ hộp thứ hai có màu trắng là:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{23}{30}$ d) $\frac{13}{30}$.

Câu 15: Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất 2 lần. Xét các biến cố

A: "Lần đầu xuất hiện mặt ngửa"

B: "Lần thứ hai xuất hiện mặt sấp".

Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A) \neq P(B)$ b) $P(A) = \frac{1}{3}$

c) A, B là hai biến cố độc lập d) Các khẳng định trên đều sai.

Câu 16: Một hộp chứa 2 bi đỏ được đánh số 0, 2, một bi xanh được đánh số 4, và 2 bi trắng được đánh số 5, 6. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Xét các biến cố:

A: "Lấy được 2 bi đỏ"

B: "Lấy được 2 bi đánh số chẵn".

Chọn khẳng định đúng:

a) A, B là hai biến cố xung khắc b) A, B là hai biến cố độc lập

c) $P(A \cap B) > P(B)$ d) $P(A \cap B) = P(A)$.

Câu 17: Một hộp chứa 2 bi đỏ được đánh số 1, 2, một bi xanh được đánh số 3, và 3 bi trắng được đánh số 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên một viên bi. Xét các biến cố:

A: "Lấy được bi đỏ"

B: "Lấy được bi đánh số chẵn",

Chọn khẳng định đúng:

a) A, B là hai biến cố độc lập

b) $P(A/B) = P(A)$

c) $P(B/A) = P(B)$

d) Cả 3 khẳng định trên đều đúng.

Câu 18: Cho A, B là hai biến cố với $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A/B) = \frac{2}{5}$, $P(B/A) = \frac{2}{3}$ b) $P(A/B) = \frac{2}{5}$; $P(B/A) = \frac{1}{3}$

c) $P(A/B) = \frac{2}{3}$; $P(B/A) = \frac{2}{5}$ d) $P(A/B) = \frac{2}{3}$; $P(B/A) = \frac{1}{3}$.

Câu 19: Cho A, B là hai biến cố với $P(A \cup B) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$, $P(A/B) = \frac{2}{11}$. Giá trị của P(A) bằng:

a) $\frac{1}{11}$ b) $\frac{21}{121}$ c) $\frac{6}{11}$ d) $\frac{5}{11}$.

Câu 20: Cho hai biến cố A, B với $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{6}{11}$, $P(A / B) = \frac{3}{11}$. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A) = \frac{2}{165}$; $P(B) = \frac{11}{15}$ b) $P(A) = \frac{11}{15}$; $P(B) = \frac{2}{165}$

c) $P(A) = \frac{41}{55}$; $P(B) = \frac{6}{11}$ d) $P(A) = \frac{6}{11}$; $P(B) = \frac{41}{55}$.

Câu 21: Từ một hộp chứa 2 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh, lấy ra từng quả không hoàn lại. Gọi H là biến cố hai quả cầu đỏ được lấy ra ở lần thứ nhất và lần thứ hai, chọn khẳng định đúng:

a) $P(H) = \frac{1}{6}$ b) $P(H) = \frac{1}{3}$ c) $P(H) = \frac{1}{2}$ d) $P(H) = \frac{2}{3}$.

Câu 22: Từ một hộp chứa 2 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh, lấy ra từng quả không hoàn lại. Gọi A là biến cố lần thứ hai và lần thứ ba đều lấy được quả cầu đỏ. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A) = \frac{1}{2}$ b) $P(A) = \frac{2}{3}$ c) $P(A) = \frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn

Câu 1: Gọi các biến cố:

A: "Bông hái lần đầu không có thưởng"

B: "Bông hái lần thứ hai có thưởng".

Ta cần tính P(B/A).

• Tính P(A).

Từ 30 bông hoa, hái một bông, không gian mẫu Ω gồm 30 bông hoa, vậy $N(\Omega) = 30$

$$N(A) = 20 \Rightarrow P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

• Tính $P(A \cap B)$.

Từ 30 bông hoa hái hai bông theo thứ tự hai lần, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = A_{30}^2$

$$N(A \cap B) = 20.10 = 200 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{200}{A_{30}^2} = \frac{20}{87}$$

Vậy $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{10}{29}$. **ĐS:** Câu a.

Có thể tính trực tiếp như sau:

Nếu bông hái lần đầu không có thưởng, trên cây còn 29 bông trong đó có 10 bông có thưởng. Vậy:

$$P(B/A) = \frac{10}{29}.$$

Câu 2: Gọi các biến cố:

A: "Bông hái lần đầu có thưởng"

B: "Bông hái lần thứ hai có thưởng".

Ta cần tính P(B/A).

• Tính P(A).

Từ 30 bông hoa, hái một bông, không gian mẫu Ω gồm 30 bông hoa, vậy $N(\Omega) = 30$

$$N(A) = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

• Tính $P(A \cap B)$.

Từ 30 bông hoa hái hai bông theo thứ tự hai lần, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = A_{30}^2$

$$N(A \cap B) = 10.9 = 90 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{90}{A_{30}^2} = \frac{3}{29}.$$

Vậy $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{9}{29}$. **ĐS:** Câu b.

Chú ý: Có thể tính trực tiếp như câu 1

Câu 3: Gọi các biến cố:

A: "Điểm gieo được mặt 3 chấm"

B: "Liêm gieo được mặt có số chấm lớn hơn 3".

Ta cần tính P(B/A).

Nếu A đã xảy ra, thì B chỉ xảy ra khi Liêm gieo được mặt 4, 5, 6 chấm

$\Rightarrow P(B/A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. **ĐS:** Câu b.

Có thể tính cách khác như sau:

Kí hiệu (i; j) là kết quả "Điểm gieo được mặt i chấm, Liêm gieo được mặt j chấm"

Như vậy không gian mẫu $\Omega = \{(i; j)/ 1 \le i, j \le 6\}$, vậy $N(\Omega) = 36$

$A \cap B = \{(3; 4); (3; 5); (3; 6)\} \Rightarrow N(A \cap B) = 3$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{12} \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Câu 4: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.6 = 36$.

Rõ ràng $A \cap B = \{(6; 6)\} \Rightarrow N(A \cap B) = 1$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Ta có $N(B) = 6$ $\Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6}.$$ **ĐS** Câu a.

Câu 5: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.6 = 36$.

- Ta có: $N(A \cap C) = 1 \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{36}$

$$P(C) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

$$\Rightarrow \quad P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{35}$$

- Vì $A \cap D = \varnothing \Rightarrow P(A/D) = 0$.

Vậy 1. → b); 2. → a).

Câu 6: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 36$.

$A = \{(5; 6); (6; 5); (6; 6)\} \Rightarrow N(A) = 3$

$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{12}$

$N(B) = 10$

$\Rightarrow P(B) = \frac{10}{36}$

$A \cap B = \{(5; 6); (6; 5)\} \Rightarrow N(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{18}$

$\Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{5}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 7: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 36$.

$A = \{(5; 6); (6; 5); (6; 6)\} \Rightarrow N(A) = 3$

$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{12}$

$N(C) = 11$

$\Rightarrow P(C) = \frac{11}{36}$

$A \cap C = \{(5; 6); (6; 5)\} \Rightarrow N(A \cap C) = 2 \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{18}$

$\Rightarrow P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{11}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 8: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6$

$N(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$

$N(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B$ là biến cố xuất hiện mặt 3 hoặc 4 chấm $\Rightarrow N(A \cap B) = 2$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow$ A, B là hai biến cố độc lập

$N(C) = 2 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$.

$B \cap C$ là biến cố xuất hiện mặt 5 chấm $\Rightarrow N(B \cap C) = 1$

$$\Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{6}$$

$P(B \cap C) = P(B)P(C) \Rightarrow B, C$ là hai biến cố độc lập. **ĐS:** Câu d.

Câu 9: Xin nêu ra 2 cách tính như sau:

Cách 1:

Có 7 quả cầu, lần lượt lấy ra 2 quả cầu, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_7^2 = 21$.

Gọi A là biến cố lấy ra 2 quả cầu vàng. Có 3 quả cầu vàng, nên $N(A) = C_3^2 = 3$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{7}.$$

Cách 2:

Có tất cả 7 quả cầu, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 7$.

Gọi A_1 là biến cổ lần thứ nhất lấy ra quả cầu vàng.

A_2 là biến cố lần thứ hai lấy ra quả cầu vàng. A là biến cố lấy ra 2 quả cầu vàng.

Ta có $A = A_1 \cap A_2$

$$\Rightarrow \quad P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2/A_1) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6} = \frac{1}{7}.$$

ĐS: Câu a.

Câu 10: Gọi B là biến cố vận động viên I bắn trượt, C là biến cố vận động II bắn trượt.

Rõ ràng $A = B \cup C$.

Vì B, C độc lập nên $P(B \cap C) = P(B)P(C) = P_1P_2 = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{11}{20}.$$

ĐS: Câu c.

Câu 11: $P(A) = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Gọi C là biến cố vận động viên II bắn trượt. Ta có:

$$P(C) = 1 - P_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Rõ ràng $B = A \cup C$ và A, C độc lập nhau, vì vậy $P(A \cap C) = P(A)P(C)$

$$\Rightarrow \quad P(B) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

$$= P(A) + P(C) - P(A)P(C) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}.\frac{3}{4}$$

$$= \frac{11}{12}$$

Vậy 1. → b); 2. → d).

Câu 12: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 2^3 = 8$

$$A \cap B = \{SSS\} \Rightarrow N(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$N(B) = 2^2 = 4 \quad \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4}.$$ **ĐS:** Câu c.

Câu 13: Kí hiệu

A: "Bi được lấy ra từ hộp thứ nhất màu trắng".

B: "Bi lấy ra từ hộp thứ hai màu trắng".

Ta cần tính $P(A \cap B)$. Ta có:

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

Sau khi bỏ viên bi trắng được lấy từ hộp thứ nhất vào hộp thứ hai, trong hộp thứ hai có 6 viên bi trong đó có 5 bi trắng, vậy

$$P(B/A) = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{5}.\frac{5}{6} = \frac{1}{2}.$$ **ĐS:** Câu a.

Câu 14: Gọi A là biến cố: "Bi lấy được từ hộp thứ nhất có màu trắng"

B: "Bi lấy từ hộp thứ hai có màu trắng".

Ta cần tính P(B).

Dễ thấy: $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ và $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$

Vì vậy:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P(B/A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A})$$

$$= \frac{3}{5}.\frac{5}{6} + \frac{2}{5}.\frac{4}{6} = \frac{23}{30}.$$ **ĐS:** Câu c.

Câu 15: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 4$

$$N(A) = N(B) = 2 \Rightarrow P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$N(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Vì $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ nên hai biến cố A, B độc lập. **ĐS:** Câu c.

Câu 16: Có 5 viên bi, lấy ra 2 viên bi, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_5^2 = 10$.

Có hai bi đỏ vậy $N(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{10}$.

Có 4 bi đánh số chẵn, nên $N(B) = C_4^2 = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$N(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 17: Có tất cả 6 bi, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6$.

Có tất cả 2 bi đỏ, vậy $N(A) = 2$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Có 3 bi đánh số chẵn, nên $N(B) = 3$

$$\Rightarrow \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$A \cap B$ là biến cố "Lấy được bi đỏ được ghi số chẵn", vậy $N(A \cap B) = 1$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

ĐS: Câu d.

Câu 18: Ta cần tính $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{5}.$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}.$$

ĐS: Câu a.

Câu 19: Đặt P(A) = x, điều kiện $0 \le x \le 1$.

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = x + \frac{5}{11} - \frac{6}{11} = x - \frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow \quad x \ge \frac{1}{11}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{11} = \frac{x - \frac{1}{11}}{\frac{5}{11}} \Leftrightarrow \frac{2}{11} = \frac{11x - 1}{5} \Leftrightarrow 121x - 11 = 10 \Leftrightarrow x = \frac{21}{121}.$$

ĐS: Câu b.

Câu 20: Đặt P(A) = a, P(B) = b với $0 \le a, b \le 1$.

Vì $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, nên $\frac{6}{11} = a + b - \frac{1}{5}$

$$\Leftrightarrow \quad a + b = \frac{41}{55} \ (*)$$

Lại do $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, nên $\frac{3}{11} = \frac{\frac{1}{5}}{b} \Rightarrow b = \frac{11}{15}$.

Thế vào (*) $a = \frac{41}{55} - \frac{11}{15} = \frac{2}{165}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 21: Gọi A là biến cố lần thứ nhất lấy ra quả cầu đỏ, B là biến cố lần thứ hai lấy ra quả cầu đỏ.

Ta cần tính $P(A \cap B)$.

Ta có: $P(A) = \frac{2}{4}$; $P(B/A) = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{6}.$$

ĐS: Câu a.

Câu 22: Để đơn giản ta kí hiệu A_i là biến cố lần thứ i lấy được quả cầu đỏ

Ta cần phải tính $P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$.

Ta có:

$$P(\overline{A_1}) = \frac{2}{4}; P(A_2/\overline{A_1}) = \frac{2}{3}; P(A_3/\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) = P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1})\,P(A_3/\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{1}{6}.$$

ĐS: Câu c.

BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Câu 1: Một hộp chứa 2 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên từng quả cho đến khi được quả trắng. Kích thước của không gian mẫu bằng bao nhiêu?

a) 3 b) 4

c) 5 d) Các giá trị ở a, b, c đều sai.

Câu 2: Một đồng tiền được gieo liên tiếp cho đến khi mặt sấp xuất hiện hoặc ba lần xuất hiện mặt ngửa thì dừng lại. Kích thước của không gian mẫu bằng

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5.

Câu 3: Từ một hộp chứa 3 quả cầu được đánh số 1; 2; 3 ta lấy ngẫu nhiên lần lượt từng quả. Kích thước của không gian mẫu bằng:

a) 6 b) 3 c) 4 d) 5.

Câu 4: Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất hai lần. Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt sấp trong 2 lần gieo. X có thể nhận giá trị nào?

a) 1; 2; 3 b) 0; 1; 2 c) 1; 2 d) 2; 3.

Câu 5: Một hộp chứa 2 bi xanh và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từng viên bi cho đến khi gặp bi đỏ thì dừng lại. Gọi X là số viên bi được lấy ra. X nhận giá trị nào?

a) 0, 1, 2 b) 0, 1, 2, 3 c) 1, 2, 3 d) 1, 2, 3, 4.

Câu 6: Một hộp đựng 3 quả cầu được đánh số 1; 2; 3. Lấy ngẫu nhiên 2 quả. Gọi X là tổng các số trên 2 quả và Y là số lớn nhất trong hai số ghi trên hai quả đã được lấy. Kí hiệu X(Ω) là tập giá trị của X, Y(Ω) là tập giá trị của Y. Chọn khẳng định đúng:

a) X(Ω) = {2; 3; 4; 5; 6}; Y(Ω) = {1; 2; 3}

b) X(Ω) = {3; 4; 5}; Y(Ω) = {2; 3}

c) X(Ω) = {3; 4; 5}; Y(Ω) = {1; 2; 3}

d) X(Ω) = {3; 4; 5; 6}; Y(Ω) = {2; 3}.

Câu 7: Từ một hộp chứa 3 quả cầu được đánh số 1; 2; 3 lấy ngẫu nhiên lần lượt từng quả. Gọi X là số lần lấy được quả cầu có số ghi trùng với số thứ tự của số lần lấy. Kí hiệu X(Ω) là tập giá trị của X. Chọn khẳng định đúng:

a) X(Ω) = {1; 2; 3} b) X(Ω) = {0; 2; 3}

c) X(Ω) = {0; 1; 3} d) X(Ω) = {0; 1; 2}.

Câu 8: Từ một hộp chứa 4 quả cầu được đánh số từ 1 đến 4. Lấy ngẫu nhiên lần lượt ba quả. Gọi X là số lần lấy được quả cầu có số ghi trùng với số thứ tự của số lần lấy. Kí hiệu $X(\Omega)$ là tập giá trị của X. Chọn khẳng định đúng:

a) $X(\Omega) = \{0; 1; 3\}$ b) $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$

c) $X(\Omega) = \{0; 2; 3\}$ d) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

Câu 9: Gieo một con súc sắc đồng chất và cân đối hai lần. Kí hiệu X là tổng số chấm trong hai lần gieo. Chọn khẳng định đúng:

a) $X = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

b) $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

c) $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 10: Gieo một con súc sắc đồng chất và cân đối hai lần. Kí hiệu Y là số lớn nhất trong hai số gieo được. Chọn khẳng định đúng:

a) $Y = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ b) $Y = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

c) $Y = \{1; 3; 4; 5; 6\}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 11: Từ một hộp chứa 6 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên ra 5 quả. Gọi X là số quả cầu trắng trong 5 quả cầu lấy ra. Chọn khẳng định đúng:

a) $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$ b) $X(\Omega) = \{2; 3; 4; 5\}$

c) $X(\Omega) = \{3; 4; 5; 6\}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 12: Từ một hộp chứa 2 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh, rút ra lần lượt từng quả không hoàn lại. Kí hiệu X là số lần rút sao cho cả hai quả cầu đỏ đều được rút. Chọn khẳng định đúng:

a) $X(\Omega) = \{2; 3\}$ b) $X(\Omega) = \{3; 4\}$

c) $X(\Omega) = \{2; 3; 4\}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 13: An và Bình chơi trò súc sắc lấy kẹo. An có con súc sắc đỏ, Bình có con súc sắc xanh. Mỗi người đều gieo súc sắc của mình, bạn nào nhận được số chấm cao hơn thì thắng và nhận được số kẹo từ bạn thua bằng trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai con súc sắc. Kí hiệu X là số kẹo mà An nhận được. Chọn khẳng định đúng:

a) $N(\Omega) = 36; N(X(\Omega)) = 11$ b) $N(\Omega) = 12; N(X(\Omega)) = 11$

c) $N(\Omega) = 36; N(X(\Omega)) = 12$ d) $N(\Omega) = 12; N(X(\Omega)) = 12$.

Câu 14: Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất cho đến khi xuất hiện mặt sấp thì dừng lại. Kí hiệu X là số lần gieo. P(X = 2) bằng bao nhiêu?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$.

Câu 15: Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất hai lần. Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt sấp trong hai lần gieo đó. Kí hiệu $X(\Omega)$ là tập giá trị của X ; A là biến cố "X nhận giá trị 1". Chọn khẳng định đúng

a) $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$; $P(A) = \frac{1}{2}$ b) $X(\Omega) = \{1; 2\}$; $P(A) = \frac{1}{2}$

c) $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$; $P(A) = \frac{1}{3}$ d) $X(\Omega) = \{1; 2\}$; $P(A) = \frac{1}{3}$.

Câu 16: Gieo ba đồng tiền cân đối và đồng chất một lần. Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt sấp trong lần gieo đó. Kí hiệu $X(\Omega)$ là tập giá trị của X ; A là biến cố "X nhận giá trị 3". Chọn khẳng định đúng:

a) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$; $P(A) = \frac{1}{4}$ b) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$; $P(A) = \frac{1}{8}$

c) $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$; $P(A) = \frac{1}{8}$ d) $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$; $P(A) = \frac{1}{4}$.

Câu 17: Một hộp chứa 2 quả cầu đỏ và 3 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên từng quả cho đến khi lấy được quả đỏ thì dừng lại. Kí hiệu X là số quả được lấy ra. P(X = 2) bằng:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{1}{2}$.

Câu 18: Từ một hộp chứa 3 bi đỏ và 2 bi xanh, ta lấy ngẫu nhiên hai bi. Gọi X là số bi xanh được lấy ra. P(X = 1) bằng bao nhiêu?

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{2}{5}$.

Câu 19: Một đồng tiền được gieo liên tiếp cho đến khi mặt sấp xuất hiện hoặc ba lần xuất hiện mặt ngửa thì dừng lại. Kí hiệu X là số lần gieo. Chọn khẳng định đúng:

a) P(X = 1) = P(X = 2) b) P(X = 2) = P(X = 3)

c) P(X = 2) < P(X = 3) d) P(X = 1) < P(X = 2).

Câu 20: Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất cho đến khi xuất hiện mặt ngửa thì dừng lại. Kí hiệu X là số lần gieo.

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được các khẳng định đúng:

1. $P(X = 1) =$	a) $\frac{1}{3}$
2. $P(X = 2) =$	b) $\frac{1}{2}$
3. $P(X = 3) =$	c) $\frac{1}{4}$
	d) $\frac{1}{8}$

Câu 21: Từ một hộp chứa 4 bi đỏ và 3 bi xanh, lấy ngẫu nhiên ba bi. Gọi X là số bi xanh trong ba bi được lấy ra. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(X = 1) = \frac{18}{35}$

b) $P(X = 2) = \frac{12}{35}$

c) $P(X = 3) = \frac{1}{35}$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều đúng.

Câu 22: Gieo một con súc sắc đồng chất và cân đối hai lần. Kí hiệu X là tổng số chấm trong hai lần gieo. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(X = 4) = \frac{1}{9}$ b) $P(X = 8) = \frac{5}{36}$

c) $P(X = 9) = \frac{5}{36}$ d) $P(X = 10) = \frac{5}{36}$.

Câu 23: Gieo hai con súc sắc đồng chất và cân đối. Kí hiệu X là trị tuyệt đối hiệu hai số chấm của 2 con súc sắc xuất hiện trong lần gieo.

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được các khẳng định đúng:

1. $P(X = 0) =$ 2. $P(X = 1) =$ 3. $P(X = 2) =$	a) $\frac{5}{18}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{3}$

Câu 24: Gieo một con súc sắc đồng chất và cân đối hai lần. Kí hiệu X là số lớn nhất trong hai số gieo được. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(X = 2) = \frac{1}{12}$ b) $P(X = 2) = \frac{1}{36}$

c) $P(X = 2) = \frac{1}{10}$ d) $P(X = 2) = \frac{5}{36}$.

Câu 25: Gieo 3 con súc sắc một lần. Kí hiệu X là số nhỏ nhất trong 3 số gieo được. $P(X = 5)$ có giá trị bằng bao nhiêu?

a) $\frac{5}{216}$ b) $\frac{6}{216}$ c) $\frac{7}{216}$ d) $\frac{4}{216}$.

Câu 26: Từ một hộp chứa 4 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên ra 3 quả. Gọi X là số quả cầu trắng trong 3 quả cầu lấy ra. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(X = 2) = \frac{1}{5}$ b) $P(X = 2) = \frac{1}{10}$

c) $P(X = 2) = \frac{3}{5}$ d) $P(X = 2) = \frac{1}{30}$.

Câu 27: Từ một hộp chứa 4 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên từng quả, xem màu rồi bỏ vào hộp. Gọi X là số quả cầu trắng trong 3 quả cầu lấy ra. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(X = 2) = \frac{4}{27}$ b) $P(X = 2) = \frac{1}{10}$

c) $P(X = 2) = \frac{3}{5}$ d) $P(X = 2) = \frac{1}{27}$.

Câu 28: Từ một cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân, rút ngẫu nhiên hoàn lại lần lượt hai lần, mỗi lần một quân. Kí hiệu X là số lần rút được quân Át.

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được các khẳng định đúng:

1. $P(X = 0) =$ 2. $P(X = 1) =$ 3. $P(X = 2) =$	a) $\frac{144}{169}$ b) $\frac{1}{169}$ c) $\frac{2}{169}$ d) $\frac{24}{169}$

Câu 29: Từ một cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân, rút ngẫu nhiên không hoàn lại lần lượt hai lần, mỗi lần một quân. Kí hiệu X là số lần rút được quân Át. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(X = 0) = \frac{188}{221}$; $P(X = 2) = \frac{1}{221}$

b) $P(X = 0) = \frac{1}{221}$; $P(X = 2) = \frac{188}{221}$

c) $P(X = 0) = \frac{94}{221}$; $P(X = 2) = \frac{1}{442}$

d) $P(X = 0) = \frac{1}{442}$; $P(X = 2) = \frac{94}{221}$.

Câu 30: Hai xạ thủ độc lập bắn vào một cái bia, mỗi người bắn một viên. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ I là 0,6, của xạ thủ II là 0,8. Gọi X là số viên đạn bắn trúng bia của cả hai xạ thủ. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(X = 0) = 0{,}08$

b) $P(X = 0) = 0{,}2$

c) $P(X = 0) = 0{,}6$

d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 31: Hai xạ thủ độc lập bắn vào một cái bia, mỗi người bắn một viên. Xác suất bắn trúng của xạ thủ I là 0,6 của xạ thủ II là 0,8. Gọi X là số viên đạn bắn trúng bia của cả hai xạ thủ. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(X = 2) = 0{,}2$

b) $P(X = 2) = 0{,}48$

c) $P(X = 2) = \frac{3}{4}$

d) $P(X = 2) = 0{,}28$.

Câu 32: Từ một hộp chứa 2 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh, rút ra lần lượt từng quả không hoàn lại. Gọi A_i là biến cố: "Lần thứ i rút được quả cầu đỏ". Chọn khẳng định đúng:

a) $P(A_1A_2) = P(\overline{A_1}A_2A_3)$ b) $P(A_1A_2) < P(\overline{A_1}A_2A_3)$

c) $P(A_1A_2) = \dfrac{1}{5}$ d) $P(\overline{A_1}A_2A_3) = \dfrac{1}{7}$.

Câu 33: Từ một hộp đựng 6 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên từng quả, mỗi lần lấy phải hoàn lại trong hộp, cho đến khi lấy được ba quả. Gọi X là số quả trắng trong số 3 quả đã lấy ra. Chọn khẳng định đúng:

a) $P(X = 2) = \dfrac{4}{27}$ b) $P(X = 2) = \dfrac{4}{9}$

c) $P(X = 2) = \dfrac{4}{81}$ d) Các khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 34: Chọn 3 bạn từ một nhóm học sinh gồm 5 nam và 2 nữ. Gọi X là số nam trong 3 bạn được chọn.

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng:

1. $P(X = 1) =$	a) $\dfrac{2}{7}$
2. $P(X = 2) =$	b) $\dfrac{1}{7}$
3. $P(X = 3) =$	c) $\dfrac{3}{7}$
	d) $\dfrac{4}{7}$

Câu 35: Có hai cỗ bài tú lơ khơ 52 quân. Từ mỗi cỗ lấy ngẫu nhiên một quân. Kí hiệu X là số quân Át trong 2 quân được lấy ra. Giá trị E(X) bằng bao nhiêu?

a) $\dfrac{1}{13}$ b) $\dfrac{2}{13}$ c) $\dfrac{3}{13}$ d) $\dfrac{4}{13}$.

Câu 36: Chọn 3 bạn trong một tổ gồm 8 nam và 2 nữ. Gọi X là số nam trong 3 bạn được chọn. Chọn khẳng định đúng:

a) E(X) = 2,4 b) E(X) = 2,3 c) E(X) = 2,2 d) E(X) = 2,1.

Câu 37: Trong một cái hộp đựng 10 viên ngọc, trong đó có 2 viên mỗi viên nặng 50gram, có 3 viên mỗi viên nặng 40gram, 5 viên mỗi viên nặng 30gram. Kí hiệu X là trọng lượng mỗi viên ngọc được lấy ra. Chọn khẳng định đúng:

a) E(X) = 36 b) E(X) = 37 c) E(X) = 38 d) E(X) = 39.

Câu 38: Hai xạ thủ độc lập cùng bắn vào một bia, mỗi người bắn một viên. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ I bằng 0,6 của xạ thủ II là 0,8. Kí hiệu X là số viên đạn bắn trúng bia. Chọn khẳng định đúng:

a) V(X) = 1,4 b) V(X) = 0,5 c) V(X) = 0,4 d) V(X) = 1,5.

Câu 39: Hai bạn An và Bình chơi trò gieo một con súc sắc lấy kẹo theo luật sau: Nếu xuất hiện mặt 2, 3, 4, 5 thì B cho A 9 cái kẹo. Nếu xuất hiện mặt 1 chấm hoặc 6 chấm thì A cho B số kẹo bằng sáu lần số chấm xuất hiện trên con súc sắc. Chọn khẳng định đúng:

a) Trung bình mỗi ván B nhận được một viên kẹo

b) Trung bình mỗi ván B mất một viên kẹo

c) Trung bình mỗi ván B mất hai viên kẹo

d) Trung bình mỗi ván B nhận được hai viên kẹo.

Câu 40: An và Bình chơi trò súc sắc lấy kẹo. An có con súc sắc đỏ, Bình có con súc sắc xanh. Mỗi người đều gieo súc sắc của mình, bạn nào nhận được số chấm cao hơn thì thắng và nhận được số kẹo từ bạn thua bằng trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai con súc sắc. Kí hiệu X là số kẹo mà An nhận được.

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được các khẳng định đúng:

1. P(X = −5) = 2. P(X = −4) = 3. P(X = −3) =	a) $\frac{3}{36}$ b) $\frac{2}{36}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{4}{36}$

Câu 41:: Gieo hai con súc sắc cân đối và đồng chất một lần. Kí hiệu X là tổng số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc. Chọn khẳng định đúng:

a) E(X) = 7 b) E(X) = 14 c) E(X) = 3,5 d) E(X) = 28.

Câu 42: Cho ba biến ngẫu nhiên X, Y, Z lần lượt có bảng phân phối xác suất như sau:

X	-5	$\frac{10}{3}$
P	0,4	0,6

Y	0
P	1

Z	-100	100
P	0,5	0,5

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được các khẳng định đúng:

1. $\sigma(X) =$	a) $\sqrt{\frac{50}{3}}$
2. $\sigma(Y) =$	b) 100
3. $\sigma(Z) =$	c) 0
	d) 10

Hướng dẫn

Câu 1: Không gian mẫu Ω có dạng:

$\Omega = \{T, DT, DDT, DDDT\}$.

Vậy kích thước của không gian mẫu bằng 4. **ĐS:** Câu b.

Câu 2: Không gian mẫu $\Omega = \{S; NS; NNS; NNN\}$.

Vậy $N(\Omega) = 4$. **ĐS:** Câu c.

Câu 3: Không gian mẫu Ω là các hoán vị của 1; 2; 3 nên:

$N(\Omega) = P_3 = 6$. **ĐS:** Câu a.

Câu 4: Không gian mẫu $\Omega = \{NN, SN, NS, SS\}$.

Nếu xảy ra NN thì X nhận giá trị 0. Nếu xảy ra SN hoặc NS thì X nhận giá trị 1 và nếu xảy ra SS thì X nhận giá trị 2.

Vậy $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 5: Không gian mẫu Ω có dạng:

$\Omega = \{Đ, XĐ, XXĐ\}$.

Vậy X nhận 3 giá trị 1, 2, 3. **ĐS:** Câu c.

Câu 6: Tổng các số trên hai quả lấy ra là:

$1 + 2 = 3;\ 1 + 3 = 4;\ 2 + 3 = 5.$

Vậy $X(\Omega) = \{3; 4; 5\}$.

Số lớn nhất trên hai quả là 2 hoặc 3.

Vậy $Y(\Omega) = \{2; 3\}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 7: Không gian mẫu Ω là các hoán vị của 1; 2; 3:

$\Omega = \{123; 132; 213; 231; 312; 321\}$.

Từ đó ta thấy rằng số lần lấy được quả cầu có số ghi trùng với số thứ tự của số lần lấy là 3; 0; 1.

Vậy $X(\Omega) = \{0; 1; 3\}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 8: Không gian mẫu Ω là các chỉnh hợp chập 3 của 4 số 1, 2, 3, 4:

$\Omega = \{123; 132; 124; 142; 134; 143; 213; 231; 214; 241; 234; 243; 312; 321; 314; 341; 324; 342; 412; 421; 413; 431; 423; 432\}$.

Từ đó ta thấy rằng số lần lấy được quả cầu có số ghi trùng với số thứ tự của số lần lấy là 3; 1; 2; 0.

Vậy $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 9: **ĐS:** Câu a.

Câu 10: **ĐS:** Câu a.

Câu 11: Vì có 3 quả cầu đen, vì vậy trong 5 quả cầu lấy ra có các khả năng xảy ra sau: có 2 quả cầu trắng, 3 quả cầu trắng, 4 và 5 quả cầu trắng.

Vậy $X(\Omega) = \{2; 3; 4; 5\}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 12: **ĐS:** Câu c.

Câu 13: Kí hiệu (i; j) là kết quả "An gieo được mặt i chấm, Bình gieo được mặt j chấm".

Không gian mẫu $\Omega = \{(i; j) / 1 \le i, j \le 6\} \Rightarrow N(\Omega) = 6.6 = 36$.

Vì $X(i; j) = i - j$, nên

$X(\Omega) = \{\pm 5; \pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$

Vậy $X(\Omega)$ nhận 11 giá trị. **ĐS:** Câu a.

Câu 14: $(X = 2) = \{NS\} \Rightarrow N(X = 2) = 1$.

Vậy $P(X = 2) = \dfrac{1}{4}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 15: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 4$.

Chỉ có các khả năng: Không xuất hiện mặt sấp; xuất hiện 1 mặt sấp; xuất hiện hai mặt sấp. Vậy $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

Biến cố X nhận giá trị 1 nghĩa là có đúng một lần xuất hiện mặt sấp.

Vậy $A = \{SN, NS\} \Rightarrow N(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 16: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 8$.

Các khả năng xảy ra: Không có mặt sấp, có 1 mặt sấp, ... có 3 mặt sấp. Vậy $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

Rõ ràng $A = \{SSS\} \Rightarrow N(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{8}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 17: Kí hiệu đ là quả cầu đen, Đ là quả cầu đỏ không gian mẫu Ω có dạng $\Omega = \{$Đ, đĐ, đđĐ, đđđĐ$\}$

$\Rightarrow$ (X = 2) = {đĐ}

P(X = 2) = P(đĐ) = P(đ).P(Đ/đ) = $\dfrac{3}{5}.\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$. **ĐS:** Câu c.

Có thể tính P(X = 2) cách khác như sau:

Vì (X = 2) = {đĐ}.

Có 3 cách chọn 1 quả cầu đen.

Có 2 cách chọn một quả cầu đỏ.

Theo qui tắc nhân $N(X = 2) = 3.\ 2 = 6$.

Có $A_5^2 = 20$ cách chọn 2 quả cầu theo thứ tự trong 5 quả cầu.

Vậy $P(X = 2) = \dfrac{6}{20}$.

Câu 18: Có 5 bi, lấy ra 2 bi, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_5^2 = 10$.

Rõ ràng X nhận các giá trị 0, 1, 2.

(X = 1) là biến cố lấy ra 1 bi đỏ và 1 bi xanh, vậy

$N(X = 1) = 3.2 = 6$

$\Rightarrow P(X = 1) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$. **ĐS:** Câu a

Câu 19: $(X = 1) = \{S\} \Rightarrow P(X = 1) = \frac{1}{2}$

$(X = 2) = \{NS\} \Rightarrow P(X = 2) = \frac{1}{4}$

$(X = 3) = \{NNS; NNN\} \Rightarrow P(X = 3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 20: Gọi A_i là biến cố lần gieo thứ i xuất hiện mặt ngửa.

$P(X = 1) = P(A_1) = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = P(A_2) = \frac{1}{4}$

$P(X = 3) = P(A_3) = \frac{1}{8}$

Vậy 1. → b); 2. → c); 3. → d).

Câu 21: Không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 7, nên $N(\Omega) = C_7^3 = 35$.

Rõ ràng $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

Vì $(X = k)$ là biến cố lấy k bi xanh và 3 – k bi đỏ, nên $N(X = k) = C_3^k C_4^{3-k}$

$\Rightarrow P(X = k) = \frac{C_3^k C_4^{3-k}}{C_7^3}$. Vậy:

$P(X = 1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}$

$P(X = 2) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35}$

$P(X = 3) = \frac{C_3^3 C_4^0}{C_7^3} = \frac{1}{35}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 22: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.6 = 36$.

$(X = 4) = \{(1; 3); (2; 2); (3; 1)\} \Rightarrow N(X = 4) = 3$

$\Rightarrow P(X = 4) = \frac{3}{36}$

$(X = 8) = \{(2; 6); (3; 5); (4; 4); (5; 3); (6; 2)\} \Rightarrow N(X = 8) = 5$

$$\Rightarrow \quad P(X = 8) = \frac{5}{36}$$

$(X = 9) = \{(3; 6); (4; 5); (5; 4); (6; 3)\} \Rightarrow N(X = 9) = 4$

$$\Rightarrow \quad P(X = 9) = \frac{4}{36}$$

$(X = 10) = \{(4; 6); (5; 5); (6; 4)\}$

$$\Rightarrow \quad P(X = 10) = \frac{3}{36}.$$

ĐS: Câu b

Câu 23: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.6 = 36$.

$(X = 0) = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5); (6; 6)\} \Rightarrow N(X = 0) = 6$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$(X = 1) = \{(1; 2); (2; 1); (2; 3); (3; 2); (3; 4); (4; 3); (4; 5); (5; 4);$
$(5; 6); (6; 5)\}$

$$\Rightarrow \quad N(X = 1) = 10 \Rightarrow P(X = 1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$(X = 2) = \{(1; 3); (3; 1); (2; 4); (4; 2); (5; 3); (3; 5); (4; 6); (6; 4)\}$

$$\Rightarrow \quad P(X = 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Vậy 1. $\rightarrow$ b); 2. $\rightarrow$ a); 3. $\rightarrow$ c).

Câu 24: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.6 = 36$.

$(X = 2) = \{(1; 2); (2; 2) ((2; 1)\}$

$$\Rightarrow N(X = 2) = 3 \Rightarrow P(X = 2) = \frac{3}{36}.$$

ĐS: Câu a

Câu 25: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.6.6 = 216$.

$(X = 5) = \{555, 556, 565, 566, 655, 656, 665\}$

$$\Rightarrow \quad N(X = 5) = 7 \Rightarrow P(X = 5) = \frac{7}{216}.$$

ĐS: Câu c

Câu 26: Không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 3 của 6, vậy $N(\Omega) = C_6^3 = 20$

$(X = 2)$ là biến cố lấy ra 2 quả cầu trắng và 1 quả cầu đen

$$\Rightarrow \quad N(X = 2) = C_4^2 C_2^1 = 12$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}.$$

ĐS: Câu c

Câu 27: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 6.6.6 = 216$.

$(X = 2)$ là biến cố lấy được 1 quả cầu đen và 2 quả cầu trắng, vì vậy $N(X = 2) = 4.4.2 = 32$

$\Rightarrow \quad P(X = 2) = \dfrac{32}{216} = \dfrac{4}{27}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 28: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 52^2$.

$(X = 0)$ là biến cố trong hai lần không rút được con Át, vì có 48 con bài không phải là con Át nên $N(X = 0) = 48^2$.

$$P(X = 0) = \frac{48^2}{52^2} = \frac{144}{169}$$

Ta có $N(X = 1) = 2.4.48$, nên

$$P(X = 1) = \frac{2.4.48}{52^2} = \frac{24}{169}$$

Dễ thấy $N(X = 2) = 4.4 = 16$, nên

$$P(X = 2) = \frac{16}{52^2} = \frac{1}{169}$$

Vậy 1. $\rightarrow$ a); 2. $\rightarrow$ d); 3. $\rightarrow$ b).

Câu 29: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_{52}^2$

$(X = 0)$ là biến cố trong hai lần không rút được con Át, vì có 48 con bài không phải là con Át nên $N(X = 0) = C_{48}^2$.

$$P(X = 0) = \frac{C_{48}^2}{C_{52}^2} = \frac{188}{221}$$

Dễ thấy $N(X = 2) = C_4^2 = 6$, nên

$P(X = 2) = \dfrac{1}{221}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 30: Gọi A là biến cố xạ thủ I bắn trúng, B là biến cố xạ thủ II bắn trúng.

Vì $(X = 0)$ là biến cố xạ thủ I không bắn trúng và xạ thủ II không bắn trúng

$\Rightarrow \quad P(X = 0) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,4.0,2 = 0,08.$ **ĐS:** Câu a.

Câu 31: Gọi A là biến cố xạ thủ I bắn trúng, B là biến cố xạ thủ II bắn trúng.

Rõ ràng $(X = 2) = A \cap B$.

Lại do A, B độc lập nên

$P(X = 2) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,48.$ **ĐS:** Câu b.

Câu 32: Gọi A_i là biến cố: "Lần thứ i rút được quả cầu đỏ".

- Ta tính $P(A_1A_2)$

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{2}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

- Ta tính $P(\overline{A}_1A_2A_3)$

$$P(\overline{A}_1A_2A_3) = P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1)P(A_3/\overline{A}_1A_2)$$

$$= \frac{2}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

ĐS: Câu a.

Câu 33: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 9^3$.

(X = 2) là biến cố trong ba quả cầu lấy ra có 2 quả cầu trắng và 1 quả cầu đen

$\Rightarrow \quad N(X = 2) = 6.6.3.3$

$\Rightarrow \quad P(X = 2) = \dfrac{6.6.3.3}{9.9.9} = \dfrac{4}{9}.$

ĐS: Câu b.

Câu 34: Chọn 3 bạn trong 7 bạn. không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_7^3$.

(X = 1) là biến cố chọn 1 nam và 2 nữ, vậy $N(X = 1) = C_5^1C_2^2$

$\Rightarrow \quad P(X = 1) = \dfrac{C_5^1C_2^2}{C_7^3} = \dfrac{1}{7}.$

(X = 2) là biến cố chọn 2 nam và 1 nữ, vậy $N(X = 2) = C_5^2C_2^1$

$\Rightarrow \quad P(X = 2) = \dfrac{C_5^2C_2^1}{C_7^3} = \dfrac{4}{7}.$

(X = 3) là biến cố chọn 3 nam, vậy $N(X = 3) = C_5^3$

$\Rightarrow \quad P(X = 3) = \dfrac{C_5^3}{C_7^3} = \dfrac{2}{7}.$

Vậy 1. → b); 2. → d); 3. → a).

Câu 35: Không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = 52^2$.

Rõ ràng X nhận các giá trị 0, 1, 2.

Ta có bảng phân phối xác suất

X	0	1	2
P	$(\frac{48}{52})^2$	$2.\frac{4.48}{52^2}$	$(\frac{4}{52})^2$

Vậy $E(X) = \dfrac{2}{13}$

Câu 36: Có 10 bạn chọn 3, không gian mẫu Ω có $N(\Omega) = C_{10}^3$.

Vì chỉ có 2 nữ, nên X nhận các giá trị 1, 2, 3.

Ta có $P(X = 1) = \dfrac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{15}$

$P(X = 2) = \dfrac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3} = \dfrac{7}{15}$

$P(X = 3) = \dfrac{C_8^3C_2^0}{C_{10}^3} = \dfrac{7}{15}$

Ta có bảng phân phối xác suất:

X	1	2	3
P	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{7}{15}$

Vậy $E(X) = 2,4$ **ĐS:** Câu a.

Câu 37: X nhận các giá trị 30, 40, 50. Ta có:

$P(X = 30) = \dfrac{5}{10}$; $P(X = 40) = \dfrac{3}{10}$; $P(X = 50) = \dfrac{2}{10}$.

Ta có bảng phân phối xác suất:

X	30	40	50
P	0,5	0,3	0,2

$\Rightarrow E(X) = 37.$ **ĐS:** Câu b.

Câu 38: Vì mỗi người bắn mỗi viên nên X nhận các giá trị 0, 1, 2.

Gọi A là biến cố "Người thứ nhất bắn trúng"; B là biến cố "Người thứ hai bắn trúng".

Chú ý rằng vì A, B độc lập nên $\overline{A}$, $\overline{B}$ độc lập.

Vì $(X = 0) = \overline{A} \cap \overline{B}$, nên

$P(X = 0) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,4.0,2 = 0,08$

Tương tự do $(X = 2) = A \cap B$

$P(X = 2) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,6.08 = 0,048$

$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 1 - 0,08 - 0,048 = 0,44$

Ta có bảng phân phối xác suất

X	0	1	2
P	0,08	0,44	0,48

Vậy V(X) = 0,4. **ĐS:** Câu c.

Câu 39: Kí hiệu X là số kẹo mà A nhận được sau một ván.

Ta cần tính E(X).

Rõ ràng X nhận các giá trị –36, –6, 9.

Ta có bảng phân phối xác suất

X	–36	–6	9
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

Kì vọng nhận được là:

$$E(X) = (-36)\frac{1}{6} + (-6)\frac{1}{6} + 9\frac{2}{3} = -1.$$

Vậy trung bình sau mỗi ván A mất một cái kẹo và do đó B nhận được một cái kẹo. **ĐS:** Câu a.

Câu 40: Kí hiệu (i; j) là kết quả "An gieo được mặt i chấm, Bình gieo được mặt j chấm".

Rõ ràng không gian mẫu Ω có N(Ω) = 6.6 = 36.

$$X(i; j) = i - j \Rightarrow X(\Omega) = \{\pm5; \pm4; \pm3; \pm2; \pm1; 0\}$$

$(X = -5) = \{(1; 6)\} \Rightarrow N(X = -5) = 1$

$\Rightarrow P(X = -5) = \frac{1}{36}$

$(X = -4) = \{(1; 5); (2; 6)\} \Rightarrow N(X = -4) = 2$

$\Rightarrow P(X = -4) = \frac{2}{36}$

$(X = -3) = \{(1; 4); (2; 5); (3; 6)\} \Rightarrow N(X = -3) = 3$

$\Rightarrow P(X = -3) = \frac{3}{36}$

Vậy 1. → c); 2. → b); 3. → a).

Câu 41: Sử dụng công thức $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Kí hiệu A, B là số chấm xuất hiện trên mỗi con súc sắc.

Rõ ràng A, B nhận các giá trị từ 1 đến 6 và $X = A + B$.

A, B có bảng phân phối như nhau:

A	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Nên $E(A) = E(B) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5$

$\Rightarrow\ E(X) = E(A) + E(B) = 7.$

Câu 42: $V(X) = (-5 - 0)^2.0{,}4 + (\frac{10}{3} - 0)^2.\ 0{,}6 = \frac{50}{3} \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{\frac{50}{3}}$

$V(Y) = (0 - 0)^2.1 = 0 \Rightarrow \sigma(Y) = 0$

$V(Z) = (-100 - 0)^2.0{,}5 + (100 - 0)^2.0{,}5 = 10000 \Rightarrow \sigma(Z) = 100.$

DÃY SỐ

Câu 1: Dãy số (u_n) cho bởi công thức $u_n = 2n - 2$ với mọi số nguyên dương n. Năm số hạng đầu tiên của dãy là:

a) $u_1 = 0; u_2 = 2; u_3 = 4; u_4 = 8; u_5 = 10$

b) $u_1 = 0; u_2 = 2; u_3 = 4; u_4 = 6; u_5 = 8$

c) $u_1 = -2; u_2 = 0; u_3 = 2; u_4 = 4; u_5 = 6$

d) $u_1 = 2; u_2 = 4; u_3 = 6; u_4 = 8; u_5 = 10$.

Câu 2: Cho dãy (u_n) được cho bởi công thức $u_n = n^2 + n$. Chọn khẳng định đúng:

a) $u_{n+1} = n^2 + n + 1$ b) $u_{n+2} = n^2 + 5n + 6$

c) $u_{n+3} = n^2 + n + 6$ d) $u_{n+4} = n^2 + 9n$.

Câu 3: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu $u_{n+1} \geq u_n$ với $\forall n \in N^*$

☐ đúng, ☐ sai

b) Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu $u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in N^*$

☐ đúng, ☐ sai

c) Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in N^*$

☐ đúng, ☐ sai.

Câu 4: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_n = 3n + 2$ là dãy

a) Tăng b) Giảm

c) Không tăng, không giảm.

Câu 5: Dãy số (u_n) cho bởi công thức $u_n = n^2 - 1$ là dãy:

a) Giảm b) Tăng

c) Không giảm, không tăng.

Câu 6: Dãy số (u_n) cho bởi công thức $u_n = n^2 - 12n$ là dãy:

a) Giảm b) Tăng

c) Không tăng, không giảm.

Câu 7: Dãy số (u_n): $u_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$; (v_n): $v_n = n + \sin^2 n$

Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) là dãy giảm, (v_n) là dãy giảm

b) (u_n) là dãy giảm, (v_n) là dãy tăng

c) (u_n) là dãy tăng, (v_n) là dãy tăng

d) (u_n) là dãy tăng, (v_n) là dãy giảm.

Câu 8: Cho dãy số (s_n): $s_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}}$.

Chọn khẳng định đúng:

a) (s_n) là dãy giảm　　　　b) (s_n) là dãy tăng

c) (s_n) là dãy không đơn điệu.

Câu 9: Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai

a) Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \le M$ với $\forall n \in N^*$ ☐ đúng, ☐ sai

b) Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại m sao cho $u_n > m$ với $\forall n \in N^*$ ☐ đúng, ☐ sai

c) Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó bị chặn dưới hoặc bị chặn trên ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 10: Dãy số (u_n) cho bởi công thức $u_n = n^2 - 4n + 1$ là dãy

a) Bị chặn

b) Bị chặn trên và không bị chặn dưới

c) Bị chặn dưới và không bị chặn trên.

Câu 11: Dãy số (u_n) cho bởi công thức $u_n = -n^2 - 4n + 1$ là dãy:

a) Bị chặn

b) Bị chặn trên và không bị chặn dưới

c) Bị chặn dưới và không bị chặn trên.

Câu 12: Cho 2 dãy (u_n), (v_n) với:

$$u_n = \sin n + \cos n;\ v_n = \frac{3n^2-2}{n^2+1}$$

Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) bị chặn và (v_n) không bị chặn

b) (u_n) bị chặn và (v_n) bị chặn

c) (u_n) không bị chặn và (v_n) không bị chặn

d) (u_n) không bị chặn và (v_n) bị chặn.

Câu 13: Cho 2 dãy (s_n), (t_n) với:

$$s_n = \frac{(n+1)!}{2^n};\ t_n = n + \sin^2 n.$$

Chọn khẳng định đúng:

a) (s_n) không đơn điệu và (t_n) không bị chặn

b) (s_n) đơn điệu và (t_n) không bị chặn

c) (s_n) không đơn điệu và (t_n) bị chặn

d) (s_n) đơn điệu và (t_n) bị chặn.

Câu 14: Dãy số (u_n) cho bởi công thức $u_n = \dfrac{2n^2 - 12n + 21}{n^2 - 6n + 10}$ là dãy:

a) Bị chặn

b) Bị chặn trên và không bị chặn dưới

c) Bị chặn dưới và không bị chặn trên.

Câu 15: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_1 = 2$; $u_{n+1} = 2u_n + 2$.

a) (u_n) là dãy tăng b) (u_n) là dãy giảm

c) (u_n) là dãy không tăng, không giảm.

Câu 16: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_1 = 2$; $2u_{n+1} = u_n - 1$.

a) (u_n) là dãy tăng b) (u_n) là dãy giảm

c) (u_n) là dãy không tăng, không giảm.

Câu 17: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_1 = -1$; $2u_{n+1} = u_n - 1$

a) (u_n) là dãy tăng b) (u_n) là dãy giảm

c) (u_n) là dãy không tăng không giảm.

Câu 18: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_1 = 2$; $3u_{n+1} = u_n - 6$.

Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) là dãy tăng

b) (u_n) là dãy không bị chặn trên

c) (u_n) là dãy không bị chặn dưới

d) (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 19: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_1 = 2$; $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Số hạng u_{100} bằng:

a) 3^{100} b) 3^{99} c) $1 + 3^{99}$ d) $1 + 3^{100}$.

Câu 20: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_1 = 1$; $u_{n+1} = -2u_n + 2$. Số hạng u_{21} bằng:

a) 1048576 b) 1048574 c) 1048580 d) 1048578.

Câu 21: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_1 = 3$; $u_{n+1} = 2u_n + a$. (u_n) là dãy tăng khi và chỉ khi:

a) $a < -3$ b) $a = -3$ c) $a > -3$ d) $a > 3$.

Câu 22: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_1 = 3$; $u_{n+1} = -5u_n + a$. Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) là dãy tăng khi và chỉ khi $a > -3$

b) (u_n) là dãy giảm khi và chỉ khi $a > -3$

c) (u_n) là dãy đơn điệu khi và chỉ khi $a < -4$

d) Các khẳng định ở câu a, b, c đều sai.

Câu 23: Dãy số (u_n) cho bởi công thức: $u_1 = 3$; $u_{n+1} = au_n + a - 1$. Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) là dãy tăng khi và chỉ khi $a > -3$

b) (u_n) là dãy giảm khi và chỉ khi $a > 1$

c) (u_n) là dãy giảm khi và chỉ khi $a < -3$

d) Các khẳng định ở câu a, b, c đều sai.

Hướng dẫn

Câu 1: $u_1 = 2.1 - 2 = 0$; $u_2 = 2.2 - 2 = 2$; $u_3 = 2.3 - 2 = 4$; $u_4 = 2.4 - 2 = 6$; $u_5 = 2.5 - 2 = 8$. **ĐS:** Câu b.

Câu 2: $u_{n+1} = (n + 1)^2 + (n + 1) = n^2 + 3n + 2$

$u_{n+2} = (n + 2)^2 + (n + 2) = n^2 + 5n + 6$. **ĐS:** Câu b.

Câu 3: Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với $\forall n \in N^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in N^*$.

ĐS: a, b sai; c đúng.

Câu 4: Ta có $u_{n+1} = 3(n + 1) + 2 = 3n + 5$

$$u_{n+1} - u_n = (3n + 5) - (3n + 2) = 3.$$

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng. **ĐS:** Câu a.

Chú ý: Ta có kết quả tổng quát sau: Dãy (u_n) cho bởi công thức $u_n = an + b$.

(u_n) là dãy tăng $\Leftrightarrow a > 0$

(u_n) là dãy giảm $\Leftrightarrow a < 0$

Câu 5: $u_{n+1} = (n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n$

$\Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2n) - (n^2 - 1) = 2n + 1 > 0$

Vậy (u_n) là dãy tăng. **ĐS:** Câu b.

Câu 6: $u_{n+1} = (n + 1)^2 - 12(n + 1) = n^2 - 10n - 11$

$\Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n = (n^2 - 10n - 11) - (n^2 - 12n) = 2n - 11$

$\Rightarrow \quad u_1 > u_2$ và $u_6 < u_7$

Vậy dãy (u_n) không đơn điệu. **ĐS:** Câu c.

Câu 7: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{(n+2)!}{2^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)!}{2^n}} = \dfrac{n+2}{2} > 1$ (do $n > 0$) $\Rightarrow u_{n+1} > u_n$: (u_n) là dãy tăng

$$v_{n+1} - v_n = [n + 1 + \sin^2(n + 1)] - (n + \sin^2 n)$$
$$= 1 + \sin^2(n + 1) - \sin^2 n > 0$$

$\Rightarrow$ (v_n) là dãy tăng. **ĐS:** Câu c.

Câu 8: Viết lại $s_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

$$\Rightarrow \quad s_{n+1} - s_n = \left(\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Vì: $\dfrac{2}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0$ và $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$

$\Rightarrow \quad s_{n+1} - s_n < 0 \Rightarrow (s_n)$ là dãy giảm. **ĐS:** Câu a.

Câu 9:

a) Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \le M$ với $\forall n \in N^*$. **ĐS:** đúng.

b) Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại m sao cho $u_n > m$ với $\forall n \in N^*$. **ĐS:** đúng.

c) Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn dưới vừa bị chặn trên. **ĐS:** sai.

Câu 10: $u_n = n^2 - 4n + 1 = (n - 2)^2 - 3 \ge -3$

Vậy (u_n) bị chặn dưới.

Dễ thấy rằng (u_n) không bị chặn trên. **ĐS:** Câu c.

Câu 11: $u_n = -n^2 - 4n + 1 = -(n + 2)^2 + 5 \le 5$

Vậy (u_n) bị chặn trên. **ĐS:** Câu b.

Câu 12: Vì: $-\sqrt{2} \le u_n \le \sqrt{2}$: (u_n) là dãy bị chặn

$$v_n = \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 1} = 3 - \frac{5}{n^2 + 1}$$

$\Rightarrow \quad 0 < v_n < 3$

Vậy (v_n) bị chặn. **ĐS:** Câu b.

Câu 13: Ta có: $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} = \dfrac{\dfrac{(n+2)!}{2^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)!}{2^n}} = \dfrac{n+2}{2} > 1$

Vậy (s_n) là dãy tăng.

Rõ ràng (t_n) không bị chặn trên, vì vậy (t_n) không bị chặn.

ĐS: Câu b.

Câu 14: Ta có: $u_n = \dfrac{2n^2 - 12n + 21}{n^2 - 6n + 10} = 2 + \dfrac{1}{n^2 - 6n + 10}$

Lại do $n^2 - 6n + 10 = (n - 3)^2 + 1 \ge 1$

$\Rightarrow \quad 0 < u_n \le 3$

Vậy (u_n) là dãy bị chặn. **ĐS:** Câu a.

Câu 15: Ta chứng minh bằng qui nạp (u_n) là dãy tăng.

$u_1 = 2; u_3 = 2.2 + 2 = 6$ (đúng)

Giả sử $u_{k+1} > u_k$

Ta chứng minh $u_{k+2} > u_{k+1}$

$u_{k+2} - u_{k+1} = (2u_{k+1} + 2) - (2u_k + 2) = 2(u_{k+1} - u_k) > 0.$

Vậy (u_n) là dãy tăng.

Có thể giải cách khác như sau:

$u_{n+1} = 2u_n + 2 \Leftrightarrow u_{n+1} + 2 = 2(u_n + 2)$

Đặt $v_n = u_n + 2$, ta có $v_1 = 4$; $v_{n+1} = 2v_n > v_n$

Vậy v_n là dãy tăng, nên (u_n) là dãy tăng. **ĐS:** Câu a.

Câu 16: $u_1 = 2$; $2u_{n+1} = u_n - 1$.

Cách 1: Phương pháp qui nạp

Cách 2: $2u_{n+1} = u_n - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + 1 = \dfrac{1}{2}(u_n + 1)$ (*)

Đặt $v_n = u_n + 1$. Ta có $v_1 = 3$; $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n < v_n$

(v_n) dãy giảm, nên (u_n) là dãy giảm. **ĐS:** Câu b.

Chú ý: Để tìm được dạng (*) ta dùng phương pháp hệ số bất định như sau:

Ta viết lại: $2u_{n+1} = u_n - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}$ (1)

Ta phân tích (1): $u_{n+1} + a = b(u_n + a) \Leftrightarrow u_{n+1} = bu_n + ba - a$ (2)

So sánh (1) và (2).

Ta đi đến giải hệ: $\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ ba - a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$

Ta có lời giải đã trình bày trên.

Câu 17: Tính toán một vài số hạng $u_1 = -1$; $u_2 = -1$

Vậy (u_n) là dãy không tăng, không giảm. **ĐS:** Câu c.

Câu 18: Sử dụng cách giải của bài toán 16.

Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

Ta phân tích: $u_{n+1} + a = \frac{1}{3}(u_n + a) \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}a$.

Chọn $\frac{2}{3}a = 2 \Leftrightarrow a = 3$

Ta có: $u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}(u_n + 3)$

Đặt $v_n = u_n + 3$. Ta có: $v_1 = 5$; $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n < v_n$

Vậy (v_n) là dãy giảm, nên (u_n) là dãy giảm

Dễ thấy: $0 < v_n \le v_1 = 5$.

Vậy (v_n) là dãy bị chặn. **ĐS:** Câu d.

Câu 19: Sử dụng phương pháp hệ số bất định, ta có:

$u_{n+1} - 1 = 3(u_n - 1)$

Đặt $v_n = u_n - 1$. Ta có $v_1 = 1$; $v_{n+1} = 3v_n$

Dễ dàng thấy rằng $v_n = 3^{n-1} \Rightarrow u_n = 1 + 3^{n-1}$. **ĐS:** Câu c.

Thật ra, ta có thể suy luận gọn hơn như sau:

Theo các câu trắc nghiệm đưa ra, ta dự đoán công thức tổng quát u_n bằng 3^m hoặc $1 + 3^m$

Lại vì $u_1 = 1$ nên ta dự đoán $u_n = 1 + 3^{n-1}$, và vì vậy $u_{100} = 1 + 3^{99}$.

Câu 20: $u_1 = 1$; $u_{n+1} = -2u_n + 2$.

Sử dụng phương pháp hệ số bất định

$$u_{n+1} = -2u_n + 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - 2 = -2(u_n - 2)$$

Đặt $v_n = u_n - 2$. Ta có: $v_1 = 1$; $v_{n+1} = -2v_n$

$\Rightarrow \quad v_n = (-1)^{n+1}2^{n-1} \Rightarrow u_n = 2 + (-1)^{n+1}2^{n-1}$ **ĐS:** Câu d.

Câu 21: $u_{n+1} = 2u_n + a \Leftrightarrow u_{n+1} + a = 2(u_n + a)$.

Đặt $v_n = u_n + a$. Ta có: $v_1 = 3 + a$; $v_{n+1} = 2v_n$

- $v_1 = 3 + a < 0 \Leftrightarrow a < -3$: (v_n) là dãy đan dấu: nên (v_n) không đơn điệu , vì vậy (v_n) không đơn điệu.
- $v_1 = 3 + a = 0 \Leftrightarrow a = -3$: $v_n = 0$ với mọi $n > 1$: (v_n) không đơn điệu, nên (u_n) không đơn điệu.
- $v_1 = 3 + a > 0 \Leftrightarrow a = -3$: Vì $v_n > 0$ nên: $v_{n+1} = 2v_n > v_n$

Vậy (v_n) là dãy tăng, nên (u_n) là dãy tăng. **ĐS:** Câu c.

Câu 22: $u_{n+1} = -5u_n + a \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{a}{6} = -5(u_n - \frac{a}{6})$

Đặt $v_n = u_n - \frac{a}{6}$. Ta có: $v_1 = 3 - \frac{a}{6}$; $v_{n+1} = -5v_n$.

Nhận xét rằng: Nếu $v_1 \neq 0$ thì (v_n) là dãy đan dấu nên không đơn điệu, vì vậy (u_n) không đơn điệu. Nếu $v_1 = 0$ thì $v_n = 0$ với mọi $n > 1$ $\Rightarrow (v_n)$ là dãy không đơn điệu, vì vậy (u_n) không đơn điệu.

ĐS: Câu d.

Câu 23: TH1: $a = 0$: $u_n = -1$ với $n > 1$: (u_n) không đơn điệu.

TH2: $a \neq 0$

$$u_{n+1} = au_n + a - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + 1 = a(u_n + 1)$$

Đặt $v_n = u_n + 1$. Ta có: $v_1 = 4$; $v_{n+1} = av_n$

- Nếu $a < 0$: (v_n) là dãy đan dấu nên không đơn điệu, vì vậy (v_n) không đơn điệu.
- Nếu $0 < a < 1$: $v_{n+1} = av_n < v_n$: (v_n) là dãy giảm nên (u_n) là dãy giảm.
- Nếu $a = 1$: $v_{n+1} = v_n$: (v_n) là dãy hằng nên không đơn điệu vì vậy (u_n) không đơn điệu.
- Nếu $a > 1$: $v_{n+1} = av_n > v_n$: (v_n) là dãy tăng nên (u_n) là dãy tăng. **ĐS:** Câu b.

CẤP SỐ CỘNG

Câu 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = 8$, $u_7 = 14$. Cấp số cộng trên có:

a) $u_5 + u_7 = 26$ b) $u_6 = 3u_2$

c) $2u_3 + 4u_5 = 33$ d) $3u_5 + u_2 = 41$.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -3$ và tổng 9 số hạng đầu tên là $S_9 = 45$. Cấp số cộng trên có:

a) $S_{10} = 92$ b) $S_{20} = 980$ c) $S_3 = -56$ d) $S_{16} = 526$.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n), S_n là tổng n số hạng đầu tiên của (u_n), biết $S_5 = 25$, $S_{16} = 160$. (u_n) có:

a) $d = 1$ b) $u_1 = 3$ c) $d = \frac{10}{11}$ d) $u_1 = \frac{34}{11}$.

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) có 9 số hạng, biết tổng của 3 số hạng đầu tiên bằng 15, tổng 4 số hạng cuối cùng bằng 86. Cấp số cộng này có:

a) $d = 2$ b) $u_1 = 3$ c) $d = 3$ d) $u_1 = 4$.

Câu 5: Cho cấp số cộng (u_n) có $2u_4 - 3u_5 = 5$ và tổng của 3 số hạng đầu tiên bằng 15. Cấp số cộng này có u_8 bằng bao nhiêu ?

a) -7 b) 7 c) -9 d) 9.

Câu 6: Cho các dãy (u_n), (s_n): $u_n = 1 - 3n$; $s_n = 2^n$.

Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) và (s_n) là hai cấp số cộng

b) (u_n) là cấp số cộng và (s_n) không phải là cấp số cộng

c) (u_n) không là cấp số cộng và (s_n) là cấp số cộng

d) (u_n) không là cấp số cộng và (s_n) không là cấp số cộng.

Câu 7: Cho các dãy (v_n), (t_n):

$v_n = 2n - 1$; $t_n = n^2$.

Chọn khẳng định đúng:

a) (v_n) và (t_n) là hai cấp số cộng

b) (v_n) là cấp số cộng và (t_n) không phải là cấp số cộng

c) (v_n) không là cấp số cộng và (t_n) là cấp số cộng

d) (v_n) không là cấp số cộng và (t_n) không là cấp số cộng.

Câu 8: Cho cấp số cộng (u_n) tăng có 2 số hạng là -3 và 37, biết giữa hai số trên có 9 số hạng. Chọn khẳng định đúng:

a) Trong 9 số hạng nói ở đề bài có số 16

b) Tổng của 11 số hạng trên bằng 186

c) Trong 9 số hạng trên có số 29

d) Các khẳng định ở câu a, b, c đều sai.

Câu 9: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là 2 và số hạng cuối 65. Chọn khẳng định đúng:

a) Tổng của các số hạng của cấp số cộng bằng 255

b) Công sai của cấp số cộng bằng 1,4

c) Tổng của các số hạng của cấp số cộng bằng 671

d) Các khẳng định ở câu a, b, c đều sai.

Câu 10: Cho cấp số cộng hữu hạn (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$. Chọn khẳng định đúng:

a) Nếu công sai $d = 4$ thì tổng các số hạng của cấp số cộng $S = 78$

b) Nếu công sai $d = 2$ thì tổng các số hạng bằng 18

c) Nếu công sai $d = 6$ thì tổng các số hạng bằng 10

d) Các khẳng định ở câu a, b, c đều sai.

Câu 11: Cho cấp số cộng hữu hạn (u_n) tăng có số hạng đầu $u_1 = -3$. Chọn khẳng định đúng:

a) Có một số hạng bằng 34 thì công sai $d = 4$

b) Có một số hạng bằng 31 thì công sai $d = 4$

c) Có hai số hạng liên tiếp là 3 và 6

d) Các khẳng định ở câu a, b, c đều sai.

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 3$ và $u_7 = 15$. Chọn khẳng định đúng:

a) Cấp số cộng trên có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = -3$

b) $u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 50$

c) $u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 40$

d) Các khẳng định ở câu a, b, c đều sai.

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n) số hạng đầu bằng 2, và số hạng cuối bằng 37. Biết cấp số cộng trên có công sai d là số nguyên dương. Có bao nhiêu cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn khẳng định đúng:

a) Có 4 cấp số cộng

b) Có 3 cấp số cộng

c) Có 2 cấp số cộng

d) Có 5 cấp số cộng.

Câu 14: Cho các dãy (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là S_n, (v_n) có tổng n số hạng đầu tiên là U_n:

$S_n = 2n + 1$; $U_n = 2^n$.

Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) là cấp số cộng và (v_n) là cấp số cộng

b) (u_n) là cấp số cộng và (v_n) không phải là cấp số cộng

c) (u_n) không phải là cấp số cộng và (v_n) là cấp số cộng

d) (u_n) không phải là cấp số cộng và (v_n) không phải là cấp số cộng.

Câu 15: Cho các dãy (s_n) có tổng n số hạng đầu tiên là P_n, (t_n) có tổng n số hạng đầu tiên là Q_n với: $P_n = 2n^3$; $Q_n = 2n^2 + 3n$

Chọn khẳng định đúng:

a) (s_n) là cấp số cộng và (t_n) là cấp số cộng

b) (s_n) là cấp số cộng và (t_n) không phải là cấp số cộng

c) (s_n) không phải là cấp số cộng và (t_n) là cấp số cộng

d) (s_n) không phải là cấp số cộng và (t_n) không phải là cấp số cộng.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên S_n được tính bởi công thức $S_n = 3n + a$. Chọn khẳng định đúng:

a) Với mọi giá trị của a thì (u_n) là cấp số cộng

b) (u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi $a \geq 0$

c) (u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi $a \leq 0$

d) (u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi $a = 0$.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên xác định bởi công thức: $S_n = n^2 + 2n + a$. (u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi:

a) a nhận mọi giá trị thực b) $a \geq 0$

c) $a \leq 0$ d) $a = 0$.

Câu 18: Cho cấp số cộng hữu hạn (u_n) có tổng 4 số hạng đầu tiên bằng 40, $u_5 + u_6 + u_8 = 100$, tổng tất cả các số hạng bằng $\frac{6500}{23}$.

Chọn khẳng định đúng:

a) Cấp số cộng trên có công sai $d = 6$

b) Cấp số cộng trên có số hạng đầu $u_1 = -\frac{20}{23}$

c) Cấp số cộng trên có số số hạng bằng 10

d) Cả 3 khẳng định ở a, b, c đều sai.

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n) có tổng 4 số hạng đầu tiên bằng 40, tổng 4 số hạng cuối cùng bằng 104, tổng của tất cả các số hạng bằng 216. Cấp số cộng trên có số số hạng bằng:

a) n = 9 b) n = 10 c) n = 11 d) n = 12.

Câu 20: Cho (u_n) và (v_n) là hai cấp số cộng vô hạn bất kì.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Dãy $(u_n + v_n)$ là một cấp số cộng ☐ đúng, ☐ sai

b) Dãy $(u_n - v_n)$ không là cấp số cộng ☐ đúng, ☐ sai

c) Dãy (u_nv_n) là một cấp số cộng ☐ đúng, ☐ sai.

Hướng dẫn

Câu 1: Ta cần xác định số hạng đầu u_1 và công sai d dựa vào công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Ta có: $u_4 = 8,\ u_7 = 14 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 8 \\ u_1 + 6d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 2 \end{cases}$

- $u_5 + u_7 = (u_1 + 4d) + (u_1 + 6d) = 2u_1 + 10d = 24$
- $u_6 - 3u_2 = (u_1 + 5d) - 3(u_1 + d) = -2u_1 + 2d = 0$. **ĐS:** Câu b.

Câu 2: Ta cần xác định số hạng đầu u_1 và công sai d dựa vào công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d$ và $S_n = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} u_1 + 3d = -3 \\ \dfrac{9[2u_1 + 8d]}{2} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -3 \\ u_1 + 4d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -27 \\ d = 8 \end{cases}$

- $S_{10} = 90$ (loại câu a)
- $S_{20} = 980$ đúng. **ĐS:** Câu b.

Câu 3: Ta tìm u_1 và d dựa vào công thức $S_n = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} \dfrac{5(2u_1 + 4d)}{2} = 25 \\ \dfrac{16(2u_1 + 15d)}{2} = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4d = 10 \\ 2u_1 + 15d = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{35}{11} \\ d = \dfrac{10}{11} \end{cases}$

ĐS: Câu c.

Câu 4: Theo giả thiết ta có: $S_3 = 15$ và $u_6 + u_7 + u_8 + u_9 = 86$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(2u_1 + 2d)}{2} = 15 \\ 4u_1 + 26d = 86 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 13d = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 3 \end{cases}$$ **ĐS:** Câu c.

Câu 5: Theo giả thiết $\begin{cases} 2u_4 - 3u_5 = 5 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 15 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u_1 + 3d) - 3(u_1 + 4d) = 5 \\ u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -u_1 - 6d = 5 \\ 3u_1 + 3d = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = -5 \\ u_1 + d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ u_1 = 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow u_8 = u_1 + 7d = 7 - 14 = -7.$ **ĐS:** Câu a.

Câu 6: $u_{n+1} - u_n = [1 - 3(n + 1)] - (1 - 3n) = -3.$

Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -3$, số hạng đầu $u_1 = -2$.

Tính $s_1 = 2$, $s_2 = 4$, $s_3 = 8$. Vì $s_2 - s_1 \neq s_3 - s_2$.

Nên (s_n) không phải là cấp số cộng. **ĐS:** Câu b.

Câu 7: $v_{n+1} - v_n = [2(n + 1) - 1] - (2n - 1) = 2$

Vậy (v_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$, số hạng đầu $v_1 = 1$.

Tính $t_1 = 1$, $t_2 = 4$, $t_3 = 9$. Vì $t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$.

Nên (t_n) không phải là cấp số cộng. **ĐS:** Câu b.

Chú ý: Để chứng minh dãy (u_n) là CSC ta có thể sử dụng 2 cách cơ bản sau:

Cách 1: Chứng minh $u_{n+1} - u_n = d$ = hằng số

Cách 2: Chứng minh $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$ với mọi $n > 1$.

(Ta thường sử dụng cách 2 đối với bài toán có tham số.

Bạn đọc hãy sử dụng cách 1 để chứng minh bài toán tổng quát sau:

Bài toán: Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_n = an + b$ với a, b là hai số thực cho trước. Chứng minh rằng (u_n) là cấp số cộng.

Câu 8: Đặt $u_1 = -3$ và $u_{11} = 37$. Ta xác định công sai d của cấp số cộng trên.

Ta có: $u_{11} = u_1 + 10d \Leftrightarrow 37 = -3 + 10d \Leftrightarrow d = 4$.

Giả sử $u_k = 16$ với k là số nguyên dương thỏa mãn $1 < k < 11$.

Ta có $u_{11} - u_k = (11 - k)4 \Leftrightarrow 37 - 16 = 44 - 4k \Leftrightarrow k = \dfrac{23}{4} \notin \mathbb{N}^*$.

Vậy 16 không phải là số hạng của dãy (loại câu a)

$$S_{11} = \frac{(u_1 + u_{11})11}{2} = 187 \text{ (loại câu b)}$$

Giả sử $u_k = 29$ với k là số nguyên dương thỏa mãn $1 < k < 11$.

Giải phương trình: $u_{11} - 29 = (11 - k)4 \Leftrightarrow 37 - 29 = (11 - k)4 \Leftrightarrow k = 9$

Vậy 29 là số hạng thứ 9. **ĐS:** Câu c.

Chú ý công thức: $u_m = u_n + (m - n)d$

Câu 9: • Tổng của các số hạng của cấp số cộng bằng:

$$S = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{(2 + 65)n}{2} = \frac{67}{2}n$$

Với S = 255, ta có: $\dfrac{67}{2}n = 255 \Leftrightarrow n = \dfrac{510}{67} \notin \mathbb{N}^*$ (loại câu a).

• Sử dụng công thức: $u_n = u_1 + (n - 1)d$. Ta có:

$$65 = 2 + (n - 1)1,4 \Leftrightarrow 65 = 2 + 1,4n - 1,4 \Leftrightarrow 1,4n = 64,4$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{64,4}{1,4} = 46.$$ **ĐS:** Câu b.

Câu 10: Sử dụng công thức: $S = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$, ta có:

a) $78 = \dfrac{n\left[2(-3) + (n-1)4\right]}{2} \Leftrightarrow 78 = n(2n - 5) \Leftrightarrow 2n^2 - 5n - 78 = 0$.

Kiểm tra ta thấy phương trình trên không có nghiệm nguyên dương, câu a sai.

b) $18 = \dfrac{n[2(-3) + (n-1)2]}{2} \Leftrightarrow 18 = n(-4 + n) \Leftrightarrow n^2 - 4n - 18 = 0.$

Phương trình không có nghiệm nguyên dương n, câu b sai.

c) $10 = \dfrac{n[2(-3) + (n-1)6]}{2} \Leftrightarrow 10 = n(-6 + 3n) \Leftrightarrow 3n^2 - 6n - 10 = 0.$

Phương trình trên không có nghiệm nguyên, câu c sai.

ĐS: Câu d.

Câu 11: Sử dụng công thức $u_n - u_m = (n - m)d$

a) Giả sử $u_k = 34$, ta có: $u_k - u_1 = (k - 1)d \Leftrightarrow 34 - (-3) = (k - 1)4$

$\Leftrightarrow 4k = 41 \Leftrightarrow k = \dfrac{41}{4} \notin N^*.$ Câu a sai.

b) Giả sử $u_k = 31$, ta có: $u_k - u_1 = (k - 1)d \Leftrightarrow 31 - (-3) = (k - 1)4$

$\Leftrightarrow 4k = 38 \Leftrightarrow k = \dfrac{38}{4} \notin N^*$ Câu b sai.

c) Vì hai số hạng liên tiếp là 3 và 6 và cấp số cộng tăng nên công sai d = 3.

Gọi $u_k = 3$ ta có $u_k - u_1 = (k - 1)d \Leftrightarrow 6 = (k - 1)3 \Rightarrow k = 3 \in N^*$

ĐS: Câu c.

Câu 12: Ta lập hệ phương trình 2 ẩn là u_1 và d bằng cách sử dụng công thức $u_m = u_n + (m - n)d$

Ta có: $u_3 = 3$ và $u_7 = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 3 \\ u_1 + 6d = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 \\ d = 3 \end{cases}$ (loại câu a)

Sử dụng công thức: $u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n = \dfrac{(u_m + u_n)(n - m + 1)}{2}$

(bạn đọc tự chứng minh công thức trên)

Ta có: $u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = \dfrac{(u_3 + u_7)(7 - 3 + 1)}{2} = 45.$ **ĐS**: Câu d.

Câu 13: Ta có $u_1 = 2$, $u_n = 37$ (với n > 1), vì vậy:

$u_n - u_1 = (n - 1)d \Leftrightarrow 35 = (n - 1)d.$

Vì (n − 1) và d là các số nguyên dương nên các khả năng xảy ra:

- $\begin{cases} n - 1 = 1 \\ d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ d = 35 \end{cases}$

• $\begin{cases} n-1=5 \\ d=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=6 \\ d=7 \end{cases}$

• $\begin{cases} n-1=7 \\ d=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ d=5 \end{cases}$

• $\begin{cases} n-1=35 \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=36 \\ d=1 \end{cases}$

Có 4 cấp số cộng thỏa mãn bài toán. **ĐS:** Câu a.

Câu 14: Xét từng dãy số:

• (u_n)

$u_1 = S_1 = 3$

$u_n = S_n - S_{n-1} = (2n + 1) - [2(n - 1) + 1] = 2$ với mọi $n > 1$.

Vậy (u_n) không phải là cấp số cộng.

• (v_n)

$v_1 = 2$

$v_2 = U_2 - U_1 = 2^2 - 2 = 2$

$v_3 = U_3 - U_2 = 2^3 - 2^2 = 4$

Vì $v_2 - v_1 \neq v_3 - v_2$ nên (v_n) không phải là CSC. **ĐS:** Câu d.

> *Chú ý:* Cho dãy (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên S_n $(n \geq 1)$. Ta có:
>
> $u_1 = S_1$; $u_n = S_n - S_{n-1}$ với mọi $n > 1$.

Câu 15: • (s_n)

$s_1 = 2$

$s_2 = P_2 - P_1 = 16 - 2 = 14$

$s_3 = P_3 - P_2 = 54 - 16 = 38$

Vì $s_2 - s_1 \neq s_3 - s_2$ nên (s_n) không phải là cấp số cộng.

• (t_n)

$t_1 = Q_1 = 5$

$t_n = Q_n - Q_{n-1} = (2n^2 + 3n) - [2(n-1)^2 + 3(n-1)] = 4n + 1$ với $n > 1$

Ta có: $t_2 - t_1 = 9 - 5 = 4$

$t_{n+1} - t_n = [4(n + 1) + 1] - (4n + 1) = 4$ với $n > 1$

Vậy (t_n) là cấp số cộng. **ĐS:** Câu c.

Câu 16: $u_1 = S_1 = 3 + a$

$$u_n = S_n - S_{n-1} = (3n + a) - [3(n - 1) + a] = 3 \text{ với mọi } n > 1$$

Vậy (u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi $u_1 = 3 \Leftrightarrow a = 0$.

Khi đó (u_n) là cấp số cộng với mọi số hạng bằng nhau và bằng 3.

ĐS: Câu d.

Câu 17: Ta có: $u_1 = S_1 = 3 + a$

$$u_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 2n + a) - [(n - 1)^2 + 2(n - 1) + a]$$

$$= 2n + 1 \text{ với mọi } n > 1$$

$$u_2 - u_1 = 5 - (3 + a) = 2 - a$$

$$u_{n+1} - u_n = [2(n + 1) + 1] - (2n + 1) = 2 \text{ với mọi } n > 1.$$

(u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi $u_2 - u_1 = 2 \Leftrightarrow a = 0$. **ĐS:** Câu d.

Qua câu 8 và câu 9 bạn đọc hãy chứng minh bài toán tổng quát sau:

Bài toán: Cho dãy (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên được tính bởi công thức $S_n = an^2 + bn$.

Chứng minh (u_n) là cấp số cộng.

Câu 18: Bài toán cần xác định số hạng đầu u_1, công sai d, và số số hạng n.

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 40 \\ u_5 + u_6 + u_8 = 100 \\ S_n = \dfrac{6500}{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 40 \\ 3u_1 + 16d = 100 \\ \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = \dfrac{6500}{23} \end{cases}$$

Giải hệ gồm 2 phương trình đầu tiên của hệ ta có: $u_1 = \dfrac{20}{23}$, $d = \dfrac{140}{23}$

Thế vào phương trình cuối của hệ ta có:

$$n[2.\frac{20}{23} + (n - 1)\frac{140}{23}] = \frac{13000}{23} \Leftrightarrow n(140n - 100) = 13000$$

$$\Leftrightarrow 140n^2 - 100n - 13000 = 0$$

$\Leftrightarrow n = 10$ (nhận), $n = -\dfrac{65}{7}$ (loại). **ĐS:** Câu c.

Câu 19: Cần xác định u_1, d, và số số hạng n.

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 40 \\ u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = 104 \\ \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 40 \\ 4u_1 + (4n-10)d = 104 \\ n[2u_1 + (n-1)d] = 432 \end{cases}$$

Tính u_1 và d theo n từ 2 phương trình đầu ta có

$$u_1 = 10 - \frac{24}{n-4},\ d = \frac{16}{n-4}.$$

Thế u_1 và d vào phương trình thứ 3 của hệ ta tính được n = 12.

ĐS: Câu d.

Câu 20: Giả sử (u_n) có công sai d_u, v_n có công sai là d_v

a) Đặt $t_n = u_n + v_n$. Ta có:

$$t_{n+1} - t_n = (u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n)$$
$$= d_u + d_v \text{ không đổi}$$

Vậy $(u_n + v_n)$ là một cấp số cộng. Câu a đúng.

b) Đặt $s_n = u_n - v_n$

Chứng minh tương tự như câu a ta có $s_{n+1} - s_n = d_u - d_v$

Nên $(u_n - v_n)$ là một cấp số cộng. Câu b sai.

c) (u_nv_n) không phải là cấp số cộng.

Ví dụ $u_n = n$; $v_n = n + 1$

$\Rightarrow \quad u_nv_n = n^2 + n$

Đặt $h_n = u_nv_n$, ta có $h_1 = 2$, $h_2 = 6$, $h_3 = 12$.

Vì $h_2 - h_1 \neq h_3 - h_2$ nên (u_nv_n) không phải là cấp số cộng.

Câu c sai.

CẤP SỐ NHÂN

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) 1; 4; 16; 64; 256 là cấp số nhân ☐ đúng, ☐ sai

b) 2; –2; 3; –3 là cấp số nhân ☐ đúng, ☐ sai

c) 1; –3; 9; –27 là cấp số nhân có công bội bằng 3

☐ đúng, ☐ sai.

Câu 2: Cho cấp số nhân có số hạng đầu bằng 2, số hạng thứ hai là 1. Ba số hạng tiếp theo là:

a) 3; 9; 27 b) $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}$ c) $\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

Câu 3: Cho cấp số nhân đơn điệu có 7 số hạng với số hạng đầu là 3, số hạng cuối là 192. Số hạng thứ tư của cấp số nhân này là bao nhiêu?

a) –24 b) 24 c) 48 d) 96.

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$; $u_4 = 24$. Chọn khẳng định đúng:

a) $u_2 = 6, u_3 = 8$ b) $u_2 = 4, u_3 = 16$

c) $u_2 = 6, u_3 = 12$ d) $u_1 = 12, u_3 = 20$.

Câu 5: Cho cấp số nhân (u_n).

1. Nếu $u_1 = 3$ và $u_4 = 81$ thì	a) $u_5 = 48$
2. Nếu $u_3 = 3$ và $u_6 = 192$ thì	b) $u_6 = 3^6$
3. Nếu $u_4 = 3$ và công bội $q = -3$ thì	c) $u_8 = 234$
	d) $u_8 = 243$

Câu 6: Cho cấp số nhân (u_n) có 10 số hạng, biết $u_2 = 1$ và $u_3 = 3$. Năm số hạng cuối cùng của cấp số nhân trên là:

a) 729; 2187; 6561; 19683; 59049

b) 27; 81; 243; 729; 2187

b) 81; 243; 729; 2187; 6561

d) 243; 729; 2187; 6561; 19683.

Câu 7: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $u_4 - u_2 = 25$, $u_3 - u_1 = 50$. Cấp số nhân trên có:

a) $u_1 = \frac{200}{3}$ b) $u_2 = -\frac{100}{3}$ c) $q = -\frac{1}{2}$ d) $u_2 = \frac{100}{3}$.

Câu 8: Cho cấp số nhân (u_n) tăng, có $u_1 + u_4 = 27$, $u_2u_3 = 72$. Cấp số nhân này có u_7 bằng:

a) 129 b) 192 c) 291 d) 191.

Câu 9: Cho cấp số nhân: u_1, u_2, u_3, biết $u_1u_2u_3 = 8000$. Giá trị u_2 bằng:

a) 10 b) 30 c) 20 d) 40.

Câu 10: Cho cấp số nhân x, y, z, biết tổng $x + y + z = 26$, $x^2 + y^2 + z^2 = 364$. y bằng:

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13.

Câu 11: Cho cấp số nhân (u_n) có 10 số hạng khác nhau. Biết rằng tổng tất cả các số hạng gấp 3 lần tổng các số hạng có thứ tự lẻ. Công bội cấp số nhân này bằng:

a) $q = 4$ b) $q = 2$ c) $q = 3$ d) $q = 6$.

Câu 12: Cho dãy (u_n) xác định bởi: $u_n = 2.3^n$. Giá trị của u_{20} bằng:

a) 2.3^{19} b) 2.3^{20} c) 3^{20} d) 2.3^{21}.

Câu 13: Cho 2 dãy số (u_n), (v_n):

$u_n = 4.5^{n-1}$, $v_n = n^2$ với mọi số nguyên dương n.

Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) và (v_n) là hai cấp số nhân

b) (u_n) là cấp số nhân và (v_n) không phải là cấp số nhân

c) (u_n) không là cấp số nhân và (v_n) là cấp số nhân

d) (u_n) không là cấp số nhân và (v_n) không là cấp số nhân.

Câu 14: Cho 2 dãy số (s_n), (t_n):

$s_n = \frac{1}{n^2 + 1}$, $t_n = 4.3^{n+1}$ với mọi số nguyên dương n.

Chọn khẳng định đúng:

a) (s_n) và (t_n) là hai cấp số nhân

b) (s_n) là cấp số nhân và (t_n) không là cấp số nhân

c) (s_n) không là cấp số nhân và (t_n) là cấp số nhân

d) (s_n) không là cấp số nhân và (v_n) không là cấp số nhân.

Câu 15: Cho dãy (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên tính ở công thức $S_n = 3^n - 1$. Chọn khẳng định đúng:

a) $u_6 = 2.3^6$ b) $u_7 = 2.3^8$ c) $u_{10} = 2.3^9$ d) $u_{11} = 2.3^{12}$.

Câu 16: Cho các dãy (u_n), (v_n), được xác định bởi:

$u_n = 2.3^n + 1$, $v_n = n^2$.

Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) và (v_n) là hai cấp số nhân

b) (u_n) là cấp số nhân và (v_n) không phải là cấp số nhân

c) (u_n) không là cấp số nhân và (v_n) không là cấp số nhân

d) (u_n) không là cấp số nhân và (v_n) là cấp số cộng.

Câu 17: Dãy (t_n) có tổng n số hạng đầu tiên S_n được tính theo công thức: $S_n = 2^n - 1$.

Dãy (h_n) được xác định bởi $h_n = 2^n - 1$.

Chọn khẳng định đúng:

a) (t_n) và (h_n) là hai cấp số nhân

b) (t_n) là cấp số nhân và (h_n) không phải là cấp số nhân

c) (t_n) không phải là cấp số nhân và (h_n) là cấp số nhân

d) (t_n) không phải là cấp số nhân và (h_n) không phải là cấp số nhân.

Câu 18: Cho dãy (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên tính bởi công thức: $S_n = 4^n + m$ với mọi số nguyên dương n. Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) là cấp số nhân với mọi m

b) (u_n) là cấp số nhân khi và chỉ khi $m > 0$

c) (u_n) là cấp số nhân khi và chỉ khi $m < 0$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 19: Cho dãy (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 5$ với mọi số nguyên dương n. Giá trị của u_{20} bằng:

a) $2^{20} - 5$ b) $3.2^{19} - 5$ c) $3.2^{20} - 5$ d) $2^{22} - 5$.

Câu 20: Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 3u_n + m$ với mọi số nguyên dương n. Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) là cấp số nhân với mọi m

b) (u_n) là cấp số nhân khi và chỉ khi $m = 0$

c) (u_n) là cấp số nhân khi và chỉ khi $m \neq 0$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 21: Cho các dãy (u_n), (v_n), (t_n), (s_n) xác định bởi:

$u_n = 2n + 3$, $v_n = 4.3^{n+1}$, $t_{n+1} = 3t_n$, $s_n = n^2 - 2$ với mọi số nguyên dương n. Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) là cấp số nhân

b) (v_n) không là cấp số nhân

c) (t_n) không là cấp số nhân

d) (s_n) không là cấp số nhân.

Câu 22: Cho cấp số nhân tăng (u_n) gồm bảy số hạng, biết tổng 3 số hạng đầu tiên bằng 7, tổng 3 số hạng cuối cùng bằng 112. Chọn khẳng định đúng:

a) (u_n) có công bội bằng 3

b) (u_n) có số hạng đầu bằng 2

c) (u_n) có $u_3 = 10$

d) (u_n) có tổng các số hạng bằng 127.

Câu 23: Cho cấp số nhân vô hạn (u_n) có $u_1 = 5$, công bội q là số nguyên dương. Số 45 là một số hạng của dãy. Chọn khẳng định đúng:

a) 45 là số hạng thứ 4 của dãy

b) $u_2 = 20$

c) Công bội của cấp số nhân bằng 3

d) Công bội của cấp số nhân bằng 4.

Câu 24: Cho hai cấp số nhân bất kì (u_n) và (v_n).

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) $(u_n + v_n)$ là một cấp số nhân ☐ đúng, ☐ sai

b) $(u_n v_n)$ là một cấp số nhân ☐ đúng, ☐ sai

c) Giả sử $v_n \neq 0$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ là cấp số nhân ☐ đúng, ☐ sai.

Hướng dẫn

Câu 1: a) Số hạng sau bằng số hạng đứng kề trước nhân với 4, vậy dãy này là cấp số nhân có công bội bằng 4. **ĐS:** đúng.

b) Vì $\dfrac{-2}{2} \neq \dfrac{3}{-2}$ nên dãy này không phải là cấp số nhân.

ĐS: sai.

c) Dãy này là cấp số nhân có công bội bằng –3. **ĐS:** sai.

Câu 2: Ta có $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ nên $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow u_3 = u_2q = \frac{1}{2}$, $u_4 = u_3q = \frac{1}{4}$, $u_5 = u_4q = \frac{1}{8}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 3: Theo giả thiết $u_1 = 3$, $u_7 = 192$.

$u_7 = u_1q^6 \Leftrightarrow 192 = 3q^6 \Leftrightarrow q^6 = 64 \Rightarrow q = 2$ (do (u_n) đơn điệu)

$\Rightarrow u_4 = u_1q^3 = 3.2^3 = 24$. **ĐS:** Câu b.

Câu 4: Ta có: $u_4 = u_1q^3 \Leftrightarrow 24 = 3q^3 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$

$\Rightarrow u_2 = u_1q = 3.2 = 6$; $u_3 = u_2q = 12$. **ĐS:** Câu c.

Câu 5: Sử dụng công thức $u_m = u_nq^{m-n}$

- Nếu $u_1 = 3$ và $u_4 = 81$

  Ta có: $u_4 = u_1q^3 \Leftrightarrow 81 = 3q^3 \Leftrightarrow q = 3$

  Vậy $u_6 = u_1q^5 = 3.3^5 = 3^6$

  Vậy 1. $\rightarrow$ b).

- Nếu $u_3 = 3$ và $u_6 = 192$

  Ta có $u_6 = u_3q^3 \Leftrightarrow 192 = 3q^3 \Leftrightarrow q = 4$

  Vậy $u_5 = u_3q^2 = 3.4^2 = 48$

  Vậy 2. $\rightarrow$ a).

- Nếu $u_4 = 3$ và $q = -3$ thì $u_8 = u_4q^4 = 3(-3)^4 = 243$

  Vậy 3. $\rightarrow$ d).

Câu 6: Ta cần xác định u_1 và q. Ta có:

$u_2 = u_1q \Leftrightarrow 3 = q$

$\Rightarrow u_6 = u_1q^5 = 3^5 = 243$.

Vậy 5 số hạng cuối cùng là 243; 729; 2187; 6561; 19683

ĐS: Câu d.

Câu 7: Cho cấp số nhân gồm 5 số hạng thỏa mãn: $u_4 - u_2 = 25$, $u_3 - u_1 = 50$.

Ta cần xác định u_1 và công bội q. Sử dụng công thức $u_n = u_mq^{n-m}$ ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 25 \\ u_1q^2 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^2 - 1) = 25 \\ u_1(q^2 - 1) = 50 \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ nhất chia cho phương trình thứ hai vế theo vế ta có:

$q = \frac{1}{2}$, thế vào phương trình thứ hai của hệ ta có: $u_1 = -\frac{200}{3}$

$\Rightarrow u_2 = u_1q = -\frac{100}{3}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 8: Cần xác định u_1, q. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_4 = 27 \\ u_2u_3 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^3 = 27 \\ u_1qu_1q^2 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^3) = 27 & (1) \\ u_1^2q^3 = 72 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có $q^3 = \frac{72}{u_1^2}$, thế vào (1):

$$u_1(1 + \frac{72}{u_1^2}) = 27 \Leftrightarrow u_1 + \frac{72}{u_1} = 27 \Leftrightarrow u_1^2 - 27u_1 + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 3,\ u_1 =$$

- Với $u_1 = 3$ thì $q = 2 \Rightarrow u_7 = u_1q^6 = 3.2^6 = 192$.
- Với $u_1 = 24$ thì $q = \frac{1}{2}$ (loại do (u_n) giảm). **ĐS:** Câu b.

Câu 9: u_1, u_2, u_3 là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_2^2 = u_1u_3$. Kết hợp với giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_2^2 = u_1u_3 & (1) \\ u_1u_2u_3 = 8000 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2 ta có: $u_2^3 = 8000 \Leftrightarrow u_2 = 20$. **ĐS:** Câu c.

Câu 10: x y, z là cấp số nhân $\Leftrightarrow y^2 = xz$. Kết hợp với giả thiết ta có:

$$\begin{cases} y^2 = xz & (1) \\ x + y + z = 26 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 364 & (3) \end{cases}$$

Vì $\quad x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2y(x + z) - 2xz$

Vì vậy (3) $\Rightarrow 26^2 - 2y(26 - y) - 2y^2 = 364 \Leftrightarrow 52y = 312 \Leftrightarrow y = 6$.

ĐS: Câu d.

Câu 11: Gọi q là công bội của cấp số nhân. Theo giả thiết tổng

$$S_{10} = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q}$$

Các số hạng ở thứ tự lẻ là: $u_1; u_3; u_5; \ldots u_9$ là cấp số nhân có công bội q^2, vì vậy có tổng

$$S'_5 = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q^2}$$

Theo giả thiết ta có:

$$S_{10} = 3S'_5 \Leftrightarrow \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = 3\frac{u_1(1-q^{10})}{1-q^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{3}{1-q^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1+q} = 1 \Leftrightarrow q = 2$$

ĐS: Câu b.

Câu 12: Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2.3^{n+1}}{2.3^n} = 3$.

Vậy (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 6$, công bội $q = 3$.

Vậy $u_{20} = 6.3^{19} = 2.3^{20}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 13: • $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4.5^n}{4.5^{n-1}} = 5$: hằng số, vậy (u_n) là cấp số nhân.

• $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $v_3 = 9$. Vì $v_1v_3 \neq v_2^2$. Vậy (v_n) không phải là cấp số nhân. **ĐS:** Câu b.

Câu 14: • $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{5}$, $s_3 = \frac{1}{10}$. Vì $s_1s_3 \neq s_2^2$. Vậy (s_n) không phải là cấp số nhân.

• $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{4.3^{n+2}}{4.3^{n+1}} = 3$ không đổi, vậy (t_n) là cấp số nhân.

ĐS: Câu c.

Câu 15: Chú ý các kết quả sau:

$u_1 = S_1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ với mọi $n > 1$

Ta có: $u_1 = 2$, $u_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1} = 2.3^{n-1}$

ĐS: Câu c.

Câu 16: • $u_1 = 7$, $u_2 = 19$, $u_3 = 55$. Vì $u_2^2 \neq u_1u_2$ nên (u_n) không là cấp số nhân.

• $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $v_3 = 9$.

Vì $v_2^2 \neq v_1v_2$ nên (v_n) không là cấp số nhân.

Vì $v_1 + v_3 \neq 2v_2$ nên (v_n) không phải là cấp số cộng. **ĐS:** Câu c.

Câu 17: • Xét dãy (t_n):

$t_1 = 1$

$t_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ với mọi $n > 1$

$\Rightarrow \quad t_2 = 2 \Rightarrow \dfrac{t_2}{t_1} = 2$

Với nọi số nguyên dương $n > 1$ ta có: $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{2^n}{2^{n-1}} = 2$.

Vì $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 2$ với mọi số nguyên dương n, nên (t_n) là cấp số nhân.

• Xét dãy (h_n):

$h_1 = 1, h_2 = 3, h_3 = 7$

Vì $h_2^2 \neq h_1h_3$ nên (h_n) không phải là cấp số nhân. **ĐS:** Câu b.

Câu 18: $u_1 = S_1 = 4 + m$

$u_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1}$ với mọi $n > 1 \Rightarrow u_2 = 12$

$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{12}{4+m}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4^{n+1} - 4^n}{4^n - 4^{n-1}} = 4$ với mọi số nguyên dương n

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \dfrac{12}{4+m} = 4 \Leftrightarrow m = -1$. **ĐS:** Câu d.

Câu 19: Ta có: $u_{n+1} = 2u_n + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5)$.

Đặt $v_n = u_n + 5$. Ta có: $v_1 = 6$, $v_{n+1} = 2v_n$.

Vậy v_n là cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = 6$, công bội $q = 2 \Rightarrow v_n = 6.2^{n-1}$.

$\Rightarrow \quad v_{20} = 6.2^{19} = 3.2^{20} \Rightarrow u_{20} = 3.2^{20} - 5$. **ĐS:** Câu c.

Câu 20: Ta có: $u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = 3u_1 + m = 3 + m$, $u_3 = 3u_2 + m$

$= 3(3 + m) + m = 9 + 4m$

(u_n) là cấp số nhân $\Rightarrow u_2^2 = u_1u_3 \Leftrightarrow (3 + m)^2 = 9 + 4m \Leftrightarrow m^2 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right.$

Thử lại ta nhận 2 giá trị này. **ĐS:** Câu d.

Câu 21: • $u_1 = 5$, $u_2 = 7$, $u_3 = 9$. Vì $u_2^2 \neq u_1u_3$, vậy (u_n) không phải là cấp số nhân.

- $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{4.3^{n+2}}{4.3^{n+1}} = 3$. Vậy (v_n) là cấp số nhân.
- (t_n) là cấp số nhân.
- $s_1 = -1$, $s_2 = 7$, $s_3 = 26$. Vì $s_2^2 \neq s_1s_3$, vậy (s_n) không phải là cấp số nhân. **ĐS:** Câu d.

Câu 22: Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_5 + u_6 + u_7 = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 7 \\ u_1q^4 + u_1q^5 + u_1q^6 = 112 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 7 \\ u_1q^4(1 + q + q^2) = 112 \end{cases}$$

Chia phương trình thứ hai cho phương trình đầu của hệ vế theo vế: $q^4 = 16 \Rightarrow q = 2$ (do (u_n) tăng), thế vào phương trình đầu của hệ ta có $u_1 = 1$

$\Rightarrow \quad S = \dfrac{u_1(q^7 - 1)}{q - 1} = 2^7 - 1 = 127$. **ĐS:** Câu d.

Câu 23: Giả sử $u_n = 45$. Ta có:

$u_n = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow 45 = 5.q^{n-1} \Leftrightarrow q^{n-1} = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 3, n = 3 \\ q = 9, n = 2 \end{array}\right.$, khẳng định a sai.

Trong cả hai trường hợp $q = 3$, $q = 9$, số hạng $u_2 \neq 20$, câu b sai.

ĐS: Câu c.

Câu 24: Giả sử (u_n) có công bội q_u, (v_n) có công bội q_v.

a) Khẳng định sai.

Ví dụ: $u_n = 1$; $h_n = 2^n$

Đặt $t_n = u_n + v_n \Rightarrow t_n = 2^n + 1$

$t_1 = 3$, $t_2 = 5$, $t_3 = 9$

Vì $t_2^2 \neq t_1t_3$, nên $(u_n + v_n)$ không là cấp số nhân.

b) Đặt $s_n = u_nv_n$.

Vì (u_n) và (v_n) là hai cấp số nhân nên $u_{n+1} = u_nq_u$; $v_{n+1} = v_nq_v$

$\Rightarrow \quad s_{n+1} = u_{n+1}v_{n+1} = u_nq_uv_nq_v = (u_nv_n)q_uq_v = s_nq_uq_v$

Vậy (u_nv_n) là cấp số nhân

Khẳng định đúng.

c) Khẳng định đúng.

GIỚI HẠN CỦA DÃY

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2 + n + 1}{3n^2 + 2} = \dfrac{3}{2}$ ☐ đúng, ☐ sai

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2 + n + 1}{3n^3 + 2} = 0$ ☐ đúng, ☐ sai

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^3 + n + 1}{3n^2 + 2} = 0$ ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3^n + 5.7^n - 4^n}{7^n + 2^n} = 5$ ☐ đúng, ☐ sai

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3^n + 5.2^n - 4^n}{7^n + 2^n} = 0$ ☐ đúng, ☐ sai

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3^n + 5.7^n - 4^n}{3^n + 2^n} = 0$ ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 3: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2 + n + 1}{5n^2 + 2} =$ 2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3^n + 5.2^n - 4^n}{4^n + 2^n} =$	a) 0 b) -1 c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{3}{5}$

Câu 4: Số 3 là giá trị của giới hạn nào dưới đây:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2 + 2n}}{n + 1}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2 + 2n} + n}{n + 1}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2 + 2n}}{n^2 + 1}$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4n^4 + 2n}}{n + 1}$.

Câu 5: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+2n}}{n+2} =$	a) 0
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+2n}}{n^2+2} =$	b) 3
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+n\sqrt{n}+1}{n^2+2} =$	c) 4
	d) 2

Câu 6: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-\dfrac{1}{n})(\dfrac{1-4n}{2n^2}) =$	a) 0
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2n}{2n^3-1} =$	b) -2
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4+2n}{2n^3-1} =$	c) 2
	d) $+\infty$

Câu 7: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+5.2^{n+1}-4.7^n}{5^n-3.7^{n-1}} =$	a) $\dfrac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt[3]{8n^6+n}}{\sqrt{4n^4-2}} =$	b) $\dfrac{28}{3}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt[3]{8n^6+n}}{\sqrt{4n^2-2}} =$	c) $+\infty$
	d) 1

Câu 8: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = -1$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-2n}{n+1}$;

Câu 9: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}=5$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}=0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}=3$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}=4$.

Câu 10: Chọn khẳng định đúng:

a) Giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ không tồn tại

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ tồn tại và có giá trị khác 0

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}=0$

d) Các khẳng định ở các câu a, b, c đều sai.

Câu 11: Chọn khẳng định đúng:

a) Giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n.n+2}{n+1}$ không tồn tại

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n.n+2}{n+1}=-1$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n.n+2}{n+1}=1$

d) Các khẳng định ở các câu a, b, c đều sai.

Câu 12: Giá trị của $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2n+3\sin n}{n^2}$ bằng:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6.

Câu 13: Số 0 là giá trị của giới hạn nào dưới đây:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^2+n+1}{n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\dfrac{n^3+n+1}{n+1}\right)$.

Câu 14: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-2n-1)=-\infty$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-2n-1)=1$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n^2-2n-1)=-\infty$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n^2-2n-1)=-1$.

Câu 15: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2n^2+n}-n)=\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt[3]{8n^3+n^2-1})=+\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=2.$

Câu 16: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+1}-n)=3$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+1}-n)=4$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+1}-n)=+\infty$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+1}-n)=0.$

Câu 17: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[4]{n^2+n}-\sqrt{2n+1})=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[4]{2n^2+n}-\sqrt{n+1})=-\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n+1})=+\infty$

d) Các khẳng định ở ba câu trên đều đúng.

Câu 18: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-n)=1$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=1$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt{n^2+n})=-\dfrac{1}{2}$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 19: Giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1}-n^2)$ bằng:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $-\dfrac{1}{3}$.

Câu :0: Chọn khẳng định đúng:

a $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}\sqrt[3]{n^3+1}-n^2)=-\infty$

b $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}\sqrt[3]{n^3+n}-n^2)=\dfrac{5}{6}$

c $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+n}-n^2)=+\infty$.

d Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu :1: Cho cấp số nhân lùi vô hạn có tổng tất cả các số hạng bằng S = 12 và công bội q = 0,5. Chọn khẳng định đúng:

a $u_4=\dfrac{3}{2}$ b) $u_6=\dfrac{3}{16}$ c) $u_2=4$ d) $u_9=\dfrac{3}{32}$.

Câu :2: Cho cấp số nhân lùi vô hạn, có tổng các số hạng S = 10, số hạng đầu $u_1 = 2$. Công bội của cấp số nhân là:

a 0,2 b) 0,3 c) $\dfrac{4}{5}$ d) 0,4.

Câu :3: Cho dãy vô hạn (u_n) với $u_n = 0,22...2$ (n chữ số 2 sau dấu phẩy). $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ bằng

a 0,23 b) 0,24 c) $\dfrac{2}{9}$ d) $\dfrac{3}{11}$.

Câu :4: Cho dãy vô hạn (u_n) với $u_n = 0,0...02$ (n − 1 chữ số 0 sau dấu phẩy). Tổng của tất cả các số hạng của dãy bằng:

a $S=\dfrac{2}{9}$ b) $S=\dfrac{1}{5}$ c) $S=\dfrac{1}{4}$ d) $S=\dfrac{2}{11}$.

Câu :5: Cho dãy vô hạn (u_n) với $u_1 = 2$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n$. Tổng của tất cả các số hạng của dãy bằng bao nhiêu?

a 3 b) 4 c) 5 d) 6.

Câu :6: Cho dãy vô hạn (u_n) với $u_1 = 1$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_1+u_2+...+u_n-n)$ bằng:

a 3 b) 4 c) 5 d) 6.

Hướng dẫn

Câu 1: a) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2+2}$.

Chia biểu thức dưới dấu lim cho n^2 ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n+1}{3n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}$$ **ĐS:** sai.

b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n+1}{3n^3+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3n+\dfrac{2}{n^2}} = 0$$ **ĐS:** đúng.

c) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+n+1}{3n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n^2}} = +\infty$$ **ĐS:** sai.

Câu 2:

a) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+5.7^n-4^n}{7^n+2^n}$.

Chia tử và mẫu của biểu thức dưới dấu lim cho 7^n, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+5.7^n-4^n}{7^n+2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{3}{7})^n+5-(\frac{4}{7})^n}{1+(\frac{2}{7})^n} = \frac{5}{1} = 5.$$

ĐS: đúng.

b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+5.2^n-4^n}{7^n+2^n}$.

Chia tử và mẫu cho 7^n:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+5.2^n-4^n}{7^n+2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{3}{7})^n+5(\frac{2}{7})^n-(\frac{4}{7})^n}{1+(\frac{2}{7})^n} = \frac{0}{1} = 0.$$

ĐS: đúng.

c) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + 5.7^n - 4^n}{3^n + 2^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + 5.7^n - 4^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{3}{7})^n + 5 - (\frac{4}{7})^n}{(\frac{3}{7})^n + (\frac{2}{7})^n} = +\infty \quad \textbf{ĐS: } \text{sai.}$$

Câu 3: Các giới hạn trong bài này đều có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$.

- Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2 + n + 1}{5n^2 + 2}$.

  Chia tử và mẫu cho n^2 ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 + n + 1}{5n^2 + 2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}} = \frac{3}{5}$$

  Vậy 1. <-> d).

- Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + 5.2^n - 4^n}{4^n + 2^n}$.

  Chia tử và mẫu cho 4^n ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + 5.2^n - 4^n}{4^n + 2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{3}{4})^n + 5.(\frac{1}{2})^n - 1}{1 + (\frac{1}{2})^n} = -1$$

  Vậy 2. <-> b).

> *Chú ý:* • Để tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, trong đó P(n), Q(n) là các đa thức theo n, ta chia tử và mẫu cho n với lũy thừa là bậc của P hoặc Q.
>
> • $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Câu 4: a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2 + 2n}}{n + 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sqrt{4 + \frac{2}{n}}}{n(1 + \frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4 + \frac{2}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = 2.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+2n}+n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{n}}+1\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{2}{n}}+1}{1+\dfrac{1}{n}} = 3$

ĐS: Câu b.

Chú ý bạn đọc có thể chứng minh kết quả sau:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n^2+1} = 0;\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n^4+2n}}{n+1} = +\infty.$$

Câu 5: Các giới hạn trong bài này đều có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

- Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+2n}}{n+2}$.

  Chia tử và mẫu cho n, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4+\dfrac{2}{n}}}{1+\dfrac{2}{n}} = 2$$

  Vậy 1. ↔ d).

- Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+2n}}{n^2+2}$

  Chia tử và mẫu cho n^2 ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}}{1+\dfrac{2}{n^2}} = 0$$

  Vậy 2. ↔ a).

- Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+n\sqrt{n}+1}{n^2+2}$.

  Chia tử và mẫu cho n^2:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n\sqrt{n}+1}{n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n^2}} = 3$$

  Vậy 3. ↔ b).

Câu 6: • Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(n - \frac{1}{n})(\frac{1-4n}{2n^2})$

Giới hạn có dạng vô định $\infty.0$. Ta biến đổi về dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, bằng cách qui đồng biểu thức dưới dấu lim:

$$\lim_{n\to+\infty}(n - \frac{1}{n})(\frac{1-4n}{2n^2}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2-1)(1-4n)}{2n^3}$$

Chia tử và mẫu cho n^3, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2-1)(1-4n)}{2n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(1-\frac{1}{n^2})(\frac{1}{n}-4)}{2} = -2.$$

Vậy 1. ↔ b).

• Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n}{2n^3-1}$.

Chia tử và mẫu cho n^3:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{2-\frac{1}{n^3}} = 0$$

Vậy 2. ↔ a).

• Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^4+2n}{2n^3-1}$.

Chia tử và mẫu cho n^3 ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+2n}{2n^3-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+\frac{2}{n^2}}{2-\frac{1}{n^3}} = +\infty$$

Vậy 3. ↔ d).

> ***Chú ý kết quả tổng quát sau:*** Cho $P(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_0$ là đa thức bậc k, $Q(n) = b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \ldots + b_0$ là đa thức bậc l, ta có:
>
> $$\lim_{n\to+\infty}\frac{P(n)}{Q(n)} = 0 \text{ nếu } k < l$$
>
> $$\lim_{n\to+\infty}\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k}{b_k} \text{ nếu } k = l$$
>
> $$\lim_{n\to+\infty}\frac{P(n)}{Q(n)} = \infty \text{ nếu } k > l$$

Câu 7: Các giới hạn trong bài này đều có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

• Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+5.2^{n+1}-4.7^n}{5^n-3.7^{n-1}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+5.2^{n+1}-4.7^n}{5^n-3.7^{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+10.2^n-4.7^n}{5^n-\frac{3}{7}.7^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\frac{3}{7})^n+10.(\frac{2}{7})^n-4}{(\frac{5}{7})^n-\frac{3}{7}}$$

$$=\frac{28}{3}$$

Vậy 1. ↔ b).

• Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt[3]{8n^6+n}}{\sqrt{4n^4-2}}$

Chia tử và mẫu cho n^2:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt[3]{8n^6+n}}{\sqrt{4n^4-2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^5}}}{\sqrt{4-\frac{2}{n^2}}}=\frac{3}{2}$$

Vậy 2. ↔ a).

• Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt[3]{8n^6+n}}{\sqrt{4n^2-2}}$

Chia tử và mẫu cho n:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt[3]{8n^6+n}}{\sqrt{4n^2-2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{8n^3+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{4-\frac{2}{n^2}}}=+\infty$$

Vậy 3. ↔ c).

Câu 8: Ta chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos n}{n}$

Rõ ràng $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$

Để tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos n}{n}$ ta sử dụng định lí sau:

Nếu 3 dãy (u_n), (v_n), (b_n) thỏa mãn 2 điều kiện:

* $u_n \le b_n \le v_n$ với mọi số nguyên dương $n > n_0$
* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = a$

Thì $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$.

Ta có $\frac{-1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$ và $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Vậy $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$. **ĐS:** Câu a.

Câu 9: Sử dụng bất đẳng thức: $-\sqrt{a^2+b^2} \le a.\sin x + b.\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$, ta có:

$$-\frac{5}{n+1} \le \frac{3\sin n + 4\cos n}{n+1} \le \frac{5}{n+1}$$

Lại do: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n+1} = 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3\sin n + 4\cos n}{n+1} = 0$$

Dễ thấy rằng $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$. **ĐS:** Câu b.

Câu 10: Ta có: $\frac{-1}{n+1} \le \frac{(-1)^n}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$

Lại do: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$ **ĐS:** Câu c.

Câu 11: • Nếu n chẵn đặt n = 2m. Khi $n \to +\infty$ thì $m \to +\infty$. Khi đó:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n.n+2}{n+1} = \lim_{m\to+\infty} \frac{(-1)^{2m}.2m+2}{2m+1} = \lim_{m\to+\infty} \frac{2m+2}{2m+1} = 1$$

• Nếu n lẻ đặt n = 2m + 1. Khi $n \to +\infty$ thì $m \to +\infty$. Khi đó:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n.n+2}{n+1} = \lim_{m\to+\infty} \frac{(-1)^{2m+1}.(2m+1)+2}{2m+2} = \lim_{m\to+\infty} \frac{-2m+1}{2m+1} = -1$$

Vì $\lim_{m\to+\infty} \frac{(-1)^{2m}.2m+2}{2m+1} \ne \lim_{m\to+\infty} \frac{(-1)^{2m+1}.(2m+1)+2}{2m+2}$

Nên không tồn tại $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n.n+2}{n+1}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 12: Ta biến đổi như sau:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+3\sin n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3\sin n}{n^2}\right)$$

$$= 1 + \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n} + \lim_{n\to+\infty}\frac{3\sin n}{n^2}$$

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = 0$

Mặt khác: $-\frac{3}{n^2} \le \frac{3\sin n}{n^2} \le \frac{3}{n^2}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3}{n^2} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\sin n}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+3\sin n}{n^2} = 1.$ **ĐS:** Câu a.

Câu 13: • Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+n+1}{n}\right)$

Giới hạn có dạng vô định $\infty - \infty$. Ta khử dạng vô định này bằng cách qui đồng, thực hiện phép tính, biến đổi qua dạng vô định trung gian $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+n+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-(n+1)(n^2+n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{-2n^2-2n-1}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{-2-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = -2$$

• Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\frac{n^2+n+1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{n+1} = 0.$ **ĐS:** Câu b.

Bạn đọc hãy chứng minh:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-\frac{n^2+n+1}{n+1}\right) = +\infty;\ \lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{n^3+n+1}{n+1}\right) = -\infty.$$

Câu 14: **ĐS:** Câu c.

Câu 15: Các giới hạn ở đây có dạng vô định $\infty - \infty$.

a) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2n^2+n}-n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[n(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-1)\right] = +\infty$

b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt[3]{8n^3+n^2-1})$

$$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left[n(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt[3]{8+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}})\right] = -\infty$$

c) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

Nếu giải như câu a ta sẽ gặp dạng vô định $\infty.0$. Ta khử dạng vô định $\infty - \infty$ này bằng cách nhân chia biểu thức dưới dấu lim cho lượng liên hợp:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

ĐS: Câu c.

Câu 16: Giới hạn có dạng vô định $\infty - \infty$.

Nhân và chia biểu thức dưới dấu lim cho lượng liên hợp:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+1}-n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{n^3+1}-n)(\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2)}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}$$

$$= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+n\sqrt[3]{n^2+1}+n^2} = 0$$

ĐS: Câu d.

Câu 17: Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[4]{n^2+n}-\sqrt{2n+1}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}}) = -\infty$

$$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[4]{2n^2+n}-\sqrt{n+1}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}) = +\infty$$

$$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n+1})$$

$$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt[4]{n^3}(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}})\right] = +\infty$$ **ĐS:** Câu d.

Câu 18: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\sqrt[3]{n^3+n}-n)(\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2)}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n+\dfrac{1}{n}}+\sqrt[3]{n^3+n}+n}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to+\infty}\left[(\sqrt[3]{n^3+n}-n)-(\sqrt{n^2+n}-n)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-n)-\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

ĐS: Câu c.

Câu 19: Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1}-n^2)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[(\sqrt{n^2+1}-n)\sqrt[3]{n^3+1}+n(\sqrt[3]{n^3+1}-n)\right]$$

Ta tính: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt[3]{n^3+1}(\sqrt{n^2+1}-n)\right]$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}}{n(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

ĐS: Câu a.

Câu 20: • $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}\sqrt[3]{n^3+1}-n^2)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[(\sqrt{n^2+n}-n)\sqrt[3]{n^3+1}+n(\sqrt[3]{n^3+1}-n)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)\sqrt[3]{n^3+1}+\lim_{n\to+\infty}n(\sqrt[3]{n^3+1}-n)$$

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)\sqrt[3]{n^3+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt[3]{n^3+1}}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = +\infty$$

Lại có $n(\sqrt[3]{n^3+1}-n) > 0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[3]{n^3+1}-n) \leq 0$.

Nên $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}\sqrt[3]{n^3+1}-n^2) = +\infty$

- Tính toán tương tự: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}\sqrt[3]{n^3+n}-n^2) = +\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+n}-n^2)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[(\sqrt[3]{n^3+n}-n)\sqrt{n^2+1}+n(\sqrt{n^2+1}-n)\right]$$

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-n)\sqrt{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-n)\sqrt{n^2+1}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+n}-n^2) = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 21: Ta có: $S = \dfrac{u_1}{1-q} \Rightarrow 12 = \dfrac{u_1}{1-0,5} = \dfrac{u_1}{0,5} \Rightarrow u_1 = 6$

$$u_4 = u_1q^3 = 6.(0,5)^3 = \frac{3}{4};\ u_6 = u_1q^5 = 6.(0,5)^5 = \frac{3}{16}$$

ĐS: Câu b.

Câu 22: Ta có: $S = \frac{u_1}{1-q} \Rightarrow 10 = \frac{2}{1-q} \Rightarrow 1 - q = \frac{1}{5} \Rightarrow q = \frac{4}{5}$.

ĐS: Câu c.

Câu 23: Ta có: $u_n = 0{,}22...2 = \frac{2}{9}.0{,}99...9 = \frac{2}{9}(1 - 0{,}00...1) = \frac{2}{9}(1 - \frac{1}{10^n})$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 24: Nhận xét rằng $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q = \frac{1}{10}$, số hạng đầu $u_1 = 0{,}2$. Vì vậy tổng của dãy số này là:

$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{0{,}2}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{9}$. **ĐS:** Câu a.

Câu 25: Theo định nghĩa thì (u_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q = \frac{1}{2}$, số hạng đầu $u_1 = 2$, vậy tổng của tất cả các số hạng của dãy bằng:

$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$. **ĐS:** Câu b.

Câu 26: Dùng phương pháp hệ số bất định ta phân tích:

$$u_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(u_n + 1)$$

Đặt $u_n + 1 = v_n$. Ta có $v_1 = 2$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

Ta có (v_n) là CSN lùi vô hạn có số hạng đầu $v_1 = 2$, công bội $q = \frac{1}{2}$, vì vậy:

$$\lim_{n \to +\infty}(u_1 + u_2 + ... + u_n - n) = \lim_{n \to +\infty}(v_1 + v_2 + ... + v_n) = \frac{v_1}{1-q}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$ **ĐS:** Câu b.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Nếu hàm số f(x) liên tục tại x = a thì $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

☐ đúng, ☐ sai

b) Nếu hàm số f(x) xác định tại x = a thì $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

☐ đúng, ☐ sai.

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3}{x + 1} = 3$ ☐ đúng, ☐ sai

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ không tồn tại ☐ đúng, ☐ sai

c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x - 2} = 0$ ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 3: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} =$	a) $\dfrac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 3} =$	b) 2
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} =$	c) $\dfrac{1}{4}$
	d) 1

Câu 4: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + x} =$	a) $\dfrac{5}{3}$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^2 - 1} =$	b) $-\dfrac{5}{3}$
3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^3 + 1} =$	c) $-\dfrac{5}{2}$
	d) -5

Câu 5: Số 2 là giá trị của giới hạn nào dưới đây:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x}$.

Câu 6: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được bốn khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=$	a) $\dfrac{1}{4}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}=$	b) $\dfrac{1}{48}$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-2}=$	c) $\dfrac{1}{12}$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-2}=$	d) $\dfrac{1}{16}$

Câu 7: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ bằng:

a) $\dfrac{3}{2}$ b) 2 c) $-\dfrac{3}{2}$ d) 2.

Câu 8: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{4x+1}}{x}=-1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x}=2$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều đúng.

Câu 9: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x}$ bằng:

a) -2 b) 2 c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$.

Câu 10: Giá trị của $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{3x+1} - 1}{x}$ bằng:

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{2}$ d) -1.

Câu 11: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} =$ 2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1} =$ 3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1} =$	a) -1 b) 1 c) 0 d) $\dfrac{1}{6}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{1}{3}$

Câu 12: Giá trị của $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}\sqrt[3]{3x-2} - 1}{x-1}$ bằng:

a) 2 b) 1 c) -1 d) -2.

Câu 13: Giá trị của $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{9x+1} - 1}$ bằng bao nhiêu?

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $-\dfrac{1}{3}$ c) 3 d) -3.

Câu 14: Giá trị của $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{9x+1}}{\sqrt{4x+1} - 1}$ bằng bao nhiêu?

a) -1 b) 1 c) 2 d) -2.

Câu 15: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4x+1} - 1}{x} = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}\sqrt{4x+1} - 1}{x} = 3$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 16: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-3}=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-3}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x^2+x+1}=0$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều đúng.

Câu 17: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x}}=1$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-1}}{x}=2$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-1}}{x^2}=1$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 18: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+1}$ bằng:

a) 2 b) 0 c) -2 d) -1

Câu 19: Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x+2}\right)$ bằng

a) 2 b) 1 c) 3 d) 4.

Câu 20: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-2x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+1}-x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 21: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=$	a) $-\infty$
	b) 0
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+2x)=$	c) 3
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=$	d) $+\infty$

Câu 22: Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$ bằng:

a) $-\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) 1 d) -1.

Câu 23: Giá trị của $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^2 + 1})$ bằng:

a) 0 b) 1 c) $-\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{1}{3}$.

Câu 24: Giá trị của $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{x + 1}{x^2 + 2}\right)$ bằng:

a) 1 b) −1 c) 0 d) 2.

Câu 25: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x(\sqrt[3]{x^3 + x} - x)\right] = \dfrac{1}{3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x(\sqrt[3]{x^3 - x} - x)\right] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x(\sqrt[3]{x^3 + x} - x)\right] = 1$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x(\sqrt[3]{x^3 + x} - x)\right] = 2$.

Câu 26: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2 - x\sqrt[3]{x^3 + 1}} - x^2) = 1$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2 - x\sqrt[3]{x^3 + 1}} - x^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2 - x\sqrt[3]{x^3 + 1}} - x^2) = 2$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2 - x\sqrt[3]{x^3 + 1}} - x^2) = +\infty$.

Câu 27: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2 - x} - x) = \dfrac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt[3]{x^3 + 1} - x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 1} - x) = -\infty$ d) Cả 3 khẳng định trên đều sai.

Câu 28: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được bốn khẳng định đúng:

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 2x}{x} =$	a) $+\infty$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2}{x} =$	b) $-\infty$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 2}{x} =$	c) 2
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 2x}{x} =$	d) −2
	e) 1

Câu 29: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x - 1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1 + x}{1 - x} = -\infty$ d) Cả 3 câu trên đều sai.

Câu 30: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

c) Không tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

d) Các khẳng định của 3 câu trên đều sai.

Câu 31: Giá trị của $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \sin x - 2x \cos x}{x^2 + 1}$ bằng:

a) 1 b) –1 c) 2 d) 0.

Câu 32: Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x = 1$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x = -1$

c) Không tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Giá trị của $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$:

a) bằng 1 b) bằng –1

c) bằng 0 d) không tồn tại.

Câu 34: Cho các hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ x + 1 & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ x + 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ x + 2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ b) Không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$ d) Cả 3 câu trên đều sai.

Câu 35: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ 2+x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ b) Không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$ d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} & \text{nếu } x > 1 \\ x+m & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

Hàm số f(x) có giới hạn khi x dần tới 1 khi và chỉ khi:

a) $m = \dfrac{3}{4}$ b) $m = -\dfrac{3}{4}$ c) $m = \dfrac{1}{4}$ d) $m = -\dfrac{1}{4}$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ h(x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Biết hàm số f(x) có giới hạn khi x dần tới 0.

Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được ba khẳng định đúng.

1. Nếu $h(x) = x + m$ thì	a) $m = 0$
2. Nếu $h(x) = m(x^2 + x + 3) + 1$ thì	b) $m = 1$
3. Nếu $h(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x} + m$ thì	c) $m = -3$
	d) $m = -1$

Hướng dẫn

Câu 1: a) **ĐS:** đúng. b) **ĐS:** sai.

Câu 2:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+3}{x+1} = \dfrac{1^2+3}{1+1} = 2$ **ĐS:** sai.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$ **ĐS:** sai.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x-2}$ không tồn tại **ĐS:** sai.

Câu 3: Các giới hạn trong câu hỏi này đều có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

   Vậy 1. → b).

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{x+3} = \frac{1}{4}$

   Vậy 2. → c).

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$

   Vậy 3. → a).

> *Chú ý:* Cho P(x) và Q(x) là các đa thức và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$.
>
> Ta khử dạng vô định này như sau:
>
> $$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)P'(x)}{(x-x_0)Q'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

Câu 4: Các giới hạn trong câu hỏi này đều có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+2x+3}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+3)}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+3}{x} = -5$

   Vậy 1. → d).

2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+2x+3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+3)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+3}{x-1} = -\frac{5}{2}$

   Vậy 2. → c).

3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+2x+3}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+3)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+3}{x^2-x+1} = \frac{5}{3}$

   Vậy 3. → a).

Câu 5: Các giới hạn trong câu trắc nghiệm này có dạng vô định $\frac{0}{0}$,

ta khử dạng vô định bằng cách sử dụng lượng liên hợp.

Ta tính giới hạn ở câu d:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4x+1}-1)(\sqrt{4x+1}+1)}{x(\sqrt{4x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(\sqrt{4x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1} = 2$$

ĐS: Câu d.

Câu 6: Các giới hạn trong câu hỏi này đều có dạng vo định $\frac{0}{0}$. Ta khử dạng vô định này bằng cách nhân, chia biểu thức dưới dấu lim cho lượng liên hợp.

1. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}$$

Vậy 1. → a).

2. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{x+6}-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}{(x-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}$$

$$= \frac{1}{12}$$

Vậy 2. → c).

3. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{16}$$

Vậy 3. → d).

4. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{x+6}-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)} = \frac{1}{48}$$

Vậy 4. → b).

Câu 7: Giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$, ta khử dạng vô định này bằng cách nhân chia biểu thức dưới dấu lim cho tích 2 lượng liên hợp của tử và mẫu.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{(\sqrt[3]{x+1}-1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{3}{2}$$

ĐS: Câu a.

Câu 8: Các giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4x+1}-1)(\sqrt{4x+1}+1)}{x(\sqrt{4x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1} = 2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{4x+1}}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x+1}-1)-(\sqrt{4x+1}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x}$$

$$=1-2=-1.$$ **ĐS:** Câu d.

Câu 9: Các giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Ta có: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)-(\sqrt[3]{3x+1}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}+1}=1$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}.$$ **ĐS:** Câu c.

Chú ý: Ta có kết quả sau: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{ax+1}-1}{x}=\frac{a}{n}$ $(a\neq 0)$

CM: Đặt $t=\sqrt[n]{ax+1}\Rightarrow x=\frac{t^n-1}{a}$

Khi $x\to 0$ thì $t\to 1$. Vì vậy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{ax+1}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\frac{t^n-1}{a}}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{a(t-1)}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+1)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+1}=\frac{a}{n}$$

Câu 10: Các giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{3x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)\sqrt[3]{3x+1}+(\sqrt[3]{3x+1}-1)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)\sqrt[3]{3x+1}}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)\sqrt[3]{3x+1}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{3x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{3x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}.$$

ĐS: Câu c.

Câu 11: Các giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x-1}-1)(\sqrt{2x-1}+1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} = 1$$

Vậy 1. $\to$ b).

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{3x-2}-1)(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{3x-2}+1}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1} = -1$$

Vậy 2. $\to$ a).

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{2x-1}-1)-(\sqrt[3]{3x-2}-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=0$$

Vậy 3. $\to$ c).

Câu 12: Giới hạn có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x-1}-1)\sqrt[3]{3x-2}+(\sqrt[3]{3x-2}-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x-1}-1)\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}$$

Theo câu 8 ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x-1}-1)\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=1;\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=1$$

$\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=2.$ **ĐS:** Câu a.

Câu 13: Sử dụng kết quả trong câu 9 phần này.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{9x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x}}{\dfrac{\sqrt{9x+1}-1}{x}}$$

$=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{4}{2}}{\frac{9}{2}}=-\dfrac{1}{3}$ **ĐS:** Câu b.

Câu 14: Sử dụng kết quả trong bài toán 9, ta biến đổi như sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{9x+1}}{\sqrt{4x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{9x+1}-1}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x}}$$

$=\dfrac{\frac{2}{2}-\frac{9}{3}}{\frac{4}{2}}=-1$ **ĐS:** Câu a.

Câu 15: Theo câu 9:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x}=2$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=1$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}\sqrt{4x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}(\sqrt{4x+1}-1)+(\sqrt{2x+1}-1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}(\sqrt{4x+1}-1)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$

$=1.\dfrac{4}{2}+\dfrac{2}{2}=3.$ **ĐS:** Câu c.

Câu 16: Các giới hạn trong câu hỏi này đều có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{1-\frac{3}{x}}=+\infty$$

ĐS: Câu d.

Bằng phương pháp tương tự ta dễ dàng chứng minh được kết quả tổng quát sau:

Cho 2 đa thức P(x) và Q(x)

- Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x) thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$
- Nếu bậc của P(x) bằng bậc của Q(x), giả sử hạng tử có bậc cao nhất của P(x) là ax^k của Q(x) là bx^k thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a}{b}$
- Nếu bậc của P(x) lớn hơn bậc của Q(x), giả sử hạng tử có bậc cao nhất của P(x) là ax^k của Q(x) là bx^m thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=+\infty$ nếu a, b cùng dấu và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=-\infty$ nếu a, b trái dấu.

Câu 17: Các giới hạn trong câu hỏi này đều có dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}})}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}})}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}) = 2$$

ĐS: Câu b.

> *Chú ý:* Bạn đọc hãy chứng minh $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-1}}{x^2} = 0$.

Câu 18: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{1+\frac{1}{x}} = -2$$

ĐS: Câu c.

Câu 19: Giới hạn có dạng vô định $\infty - \infty$, ta biến đổi về dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ (đã biết cách giải) như sau:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2}{x+2}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x+2)-x^2(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})} = 1.$$

ĐS: Câu b.

Câu 20: Các giới hạn trong câu này đều có dạng vô định $\infty - \infty$.

Ta có:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2)\right] = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-1)\right] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ **ĐS:** Câu d.

Câu 21: Các giới hạn trong câu này đều có dạng vô định $\infty - \infty$.

Ta có:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)\right] = +\infty$

Vậy 1. → d).

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+2x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+2x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2)\right]$

$= -\infty$

Vậy 2.→ a).

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = 0$

Vậy 3. → b).

Câu 22: Giới hạn có dạng vô định $\infty - \infty$. Ta khử dạng vô định này bằng cách nhân chia biểu thức dưới dấu lim cho lượng liên hợp.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{3}$$

ĐS: Câu b.

Câu 23: Giới hạn có dạng vô định $\infty - \infty$. Ta khử dạng vô định này như sau:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)-(\sqrt{x^2+1}-x)\right]$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x) = \dfrac{1}{3}$ (xem câu 22)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{3}.$$

ĐS: Câu d.

Câu 24: Giới hạn có dạng vô định $0.\infty$. Ta biến đổi về dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$ (đã biết cách giải) như sau:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{x+1}{x^2+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+2)-(x+1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = 0$$

ĐS: Câu c.

Câu 25: Giới hạn có dạng vô định $0.\infty$. Ta khử dạng vô định này bằng cách nhân cho lượng liên hợp.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x(\sqrt[3]{x^3+x}-x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x^2})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{3}.$$

ĐS: Câu a.

Câu 26: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}\sqrt[3]{x^3+1}-x^2)$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2-x}-x)\sqrt[3]{x^3+1}+x(\sqrt[3]{x^3+1}-x)\right]$$

Lại do: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)\sqrt[3]{x^3+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}\right)\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1} = -\infty$

$$\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{x^3+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}$$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x^3})(x^3+1)}+\sqrt[3]{x^3+1}+x} = 0$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}\sqrt[3]{x^3+1}-x^2) = -\infty.$ **ĐS:** Câu b

Câu 27: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{2x^3+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{2x^3+1}+x^2}$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{(2+\frac{1}{x^3})^2}+\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^3}}+1} = +\infty$$

ĐS: Câu d.

Câu 28: 1. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x+2)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}(x+2) = 2$

Vậy 1. → c)

2. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x+2}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(1+\frac{2}{x})}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}(1+\dfrac{2}{x}) = -\infty$

Vậy 2. → b).

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(1-\frac{2}{x})}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1-\dfrac{2}{x}) = +\infty$

Vậy 3. → a)

4. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x-2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-2) = -2$

Vậy 4. → d).

Câu 29: a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1+x}{1-x} = +\infty.$ **ĐS:** Câu d.

Câu 30: Ta sử dụng định lí sau đây: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và ba hàm số f(x), g(x), h(x) thỏa mãn:

$f(x) \le g(x) \le h(x)$ với mọi $x \in K \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$

thì $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.

Ta có: $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$ với mọi $x > 0$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0.$ **ĐS:** Câu b.

Câu 31: Ta có: $-\dfrac{\sqrt{x^2+4x^2}}{x^2+1} \le \dfrac{x\sin x - 2x\cos x}{x^2+1} \le \dfrac{\sqrt{x^2+4x^2}}{x^2+1}$ với mọi $x > 0$

$\Leftrightarrow \quad -\dfrac{\sqrt{5}x}{x^2+1} \le \dfrac{x\sin x - 2x\cos x}{x^2+1} \le \dfrac{\sqrt{5}x}{x^2+1}$

Lại do: $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\dfrac{\sqrt{5}x}{x^2+1}) = \lim\limits_{x\to +\infty}(-\dfrac{\sqrt{5}}{x+\frac{1}{x}}) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5}x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5}}{x+\frac{1}{x}} = 0$$

$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x - 2x\cos x}{x^2+1} = 0.$ **ĐS:** Câu d.

Câu 32: Chọn dãy (x_n): $x_n = 2n\pi$ với mọi $n \in N$. Khi $x_n \le +\infty \Rightarrow n \le +\infty$

$$\lim_{x_n\to+\infty} \cos x_n = \lim_{n\to+\infty} \cos(2\pi n) = 1.$$

Chọn dãy (x_n): $x_n = (2n+1)\pi$ với mọi $n \in N$. Khi $x_n \le +\infty \Rightarrow n \le +\infty$

$$\lim_{x_n\to+\infty} \cos x_n = \lim_{n\to+\infty} \cos(2n+1)\pi = -1$$

Vậy không tồn tại $\lim_{x\to+\infty} \cos x$. **ĐS:** Câu c.

Câu 33: Ta mở dấu giá trị tuyệt đối

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Vì vậy $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$; $\lim_{x\to0^-} f(x) = -1$

Do $\lim_{x\to0^+} f(x) \ne \lim_{x\to0^-} f(x)$

Nên $\lim_{x\to0} f(x)$ không tồn tại. **ĐS:** Câu d.

> Qua 2 câu 32 và câu 33, ta có 2 phương pháp chính chứng minh không tồn tại $\lim_{x\to a} f(x)$.
>
> • *Cách 1:* Chọn 2 dãy: (u_n) và (v_n) cùng hội tụ về a nhưng
>
> $$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \ne \lim_{n\to+\infty} f(v_n)$$
>
> • *Cách 2:* Chứng minh $\lim_{x\to a^+} f(x) \ne \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Câu 34: • $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (x+1) = 1$$

$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to0} f(x) = 1$

• Tương tự $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+2) = 2$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$, nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. **ĐS:** Câu d.

Câu 35: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\sqrt{4x+1}-1)(\sqrt{4x+1}+1)}{x(\sqrt{4x+1}+1)}$

$$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{4x+1}-1)(\sqrt{4x+1}+1)}{x(\sqrt{4x+1}+1)}$$

$$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4x}{x(\sqrt{4x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4}{\sqrt{4x+1}+1} = 2$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(2-x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2.$ **ĐS:** Câu d.

Câu 36: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$

$$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{3}{4}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+m) = 1+m.$

Hàm số f(x) có giới hạn khi x dần tới 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow 1 + m = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$ **ĐS:** Câu d.

Câu 37: Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{x}$

$$= \lim\limits_{x\to 0+} \frac{(\sqrt[3]{3x+1}-1)(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}+1)}{x(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3x}{x(\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} h(x)$$

1. Nếu $h(x) = x + m$ thì $\lim_{x \to 0^-} h(x) = m$

   Hàm f(x) có giới hạn khi x dần tới $0 \Leftrightarrow m = 1$.

   Vậy 1. $\leftrightarrow$ b).

2. Nếu $h(x) = m(x^2 + x + 3) + 1$ thì $\lim_{x \to 0^-} h(x) = 3m + 1$

   Hàm f(x) có giới hạn khi x dần tới $0 \Leftrightarrow 3m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

   Vậy 2. $\leftrightarrow$ a).

3. Nếu $h(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1} - 1}{x} + m$ thì

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\sqrt{4x+1} - 1}{x} + m\right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{x} + m$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{(\sqrt{4x+1} - 1)(\sqrt{4x+1} + 1)}{x(\sqrt{4x+1} + 1)} + m$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{4x}{x(\sqrt{4x+1} + 1)} + m = \lim_{x \to 0^-} \frac{4}{\sqrt{4x+1} + 1} + m$$

$$= 2 + m.$$

   Hàm f(x) có giới hạn khi x dần tới $0 \Leftrightarrow 2 + m = 1 \Leftrightarrow m = -1$

   Vậy 3. $\leftrightarrow$ d).

LIÊN TỤC

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai:

a) Nếu hàm f(x) liên tục trên 2 khoảng (a; b) và (b; c) thì f(x) liên tục trên (a; c) ☐ đúng, ☐ sai

b) Nếu hàm f(x) liên tục trên khoảng (a; b) và nửa khoảng [b; c) thì f(x) liên tục trên (a; c) ☐ đúng, ☐ sai

c) Nếu hàm f(x) liên tục trên nửa khoảng (a; b] và khoảng (b; c) thì f(x) liên tục trên (a; c) ☐ đúng, ☐ sai

d) Nếu hàm f(x) liên tục trên hai nửa khoảng (a; b] và [b; c) thì f(x) liên tục trên (a; c) ☐ đúng, ☐ sai.

Câu 2: Chọn khẳng định đúng:

a) Hàm $f(x) = \sqrt{x-1}$ liên tục trên R

b) Hàm $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ không liên tục trên R

c) Hàm $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ liên tục tại $x = -1$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 3: Chọn khẳng định đúng:

a) Hàm $f(x) = \sin x + \tan x$ liên tục trên R

b) Hàm $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$ liên tục trên R

c) Hàm $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x^2-3x+2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$

d) Hàm $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x^2-3x+2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.

Câu 4: Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng:

a) f(x) liên tục tại x = 1

b) f(x) liên tục trên R

c) f(x) không liên tục tại x = 1

d) Các khẳng định ở ba câu trên đều sai.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \text{[illegible]}}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$.

Biết f(x) liên tục tại x = 2. Giá trị của m là:

a) 8 b) 6 c) 10 d) 7.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} & \text{nếu } x < 1 \\ mx + 1 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$.

Biết hàm f(x) liên tục tại x = 1. Giá trị của m là:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) –1.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{nếu } x > 1 \\ mx + 1 & \text{nếu } x < 1 \\ n & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$.

Biết hàm số f(x) liên tục trên R. Giá trị của m, n là:

a) n = 1, m = 0 b) n = 0, m = 1

c) n = m = 1 d) n = –1, m = 0.

Câu 8: Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng:

a) f(x) không liên tục tại x = 1

b) f(x) liên tục trên R

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq \dfrac{1}{2}$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì f(x) liên tục trên R?

a) $m = \dfrac{1}{3}$ b) $m = -\dfrac{1}{3}$ c) m = 3 d) m = –3

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1} & \text{nếu } x < 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \\ ax + b & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$.

Với giá trị nào của a, b thì f(x) liên tục tại x = 1?

a) $a = 0, b = \dfrac{1}{4}$ b) $a = b = \dfrac{1}{4}$

c) $a = \dfrac{1}{4}, b = 0$ d) $a = b = 0$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2x}{x-1} & \text{nếu } x < 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \\ ax + b & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$.

Với giá trị nào của a, b thì f(x) liên tục trên R?

a) $a = -\dfrac{7}{4}, b = 0$ b) $a = 0, b = -\dfrac{7}{4}$

c) $a = \dfrac{7}{4}, b = 0$ d) $a = b = -\dfrac{7}{4}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sin x} & \text{nếu } x \in (-\dfrac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \dfrac{\pi}{2}) \\ m & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$.

Với giá trị nào của m thì hàm số f(x) liên tục trên $(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$?

a) m = 1 b) m = 0 c) m = −1 d) m = 2.

Hướng dẫn

Câu 1: a) Khẳng định sai, xét ví dụ sau:

Cho hàm $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng f(x) liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Ta chứng minh f(x) không liên tục tại x = 0.

Ta có $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$

Vì $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, nên f(x) không liên tục tại x = 0 và vì vậy f(x) không liên tục trên R.

b) Khẳng định sai, xét ví dụ sau:

Cho hàm $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng f(x) liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $[0; +\infty)$. Ta chứng minh f(x) không liên tục tại x = 0.

Ta có $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$

Vì $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, nên f(x) không liên tục tại x = 0 và vì vậy f(x) không liên tục trên R.

c) Khẳng định sai.

d) Khẳng định đúng:

Ta chỉ cần chứng minh f(x) liên tục tại x = b.

Vì f(x) liên tục trên (a; b] nên $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Vì f(x) liên tục trên [b; c) nên $\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$

$\Rightarrow \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$. Vậy f(x) liên tục tại x = b, do đó f(x) liên tục trên (a; c).

Câu 2: a) Hàm $f(x) = \sqrt{x - 1}$ không xác định trên $(-\infty; 1)$ nên không liên tục trên $(-\infty; 1)$ và vì vậy không liên tục trên R.

b) Hàm $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ xác định trên R nên liên tục trên R.

c) Hàm $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ không xác định tại x = −1 nên không liên tục tại x = −1. **ĐS:** Câu d.

Câu 3: a) Vì hàm f(x) không xác định tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ với mọi $k \in Z$, nên hàm số không liên tục tại các điểm này.

b) Hàm f(x) không xác định tại x = 1, nên f(x) không liên tục tại x = 1.

d) Hàm $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$ không xác định tại $x = 1$, $x = 2$, nên f(x) liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.

ĐS: Câu d.

Câu 4: $f(1) = 2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 3$$

Vì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 1$. **ĐS:** Câu c.

Câu 5: $f(2) = m$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} x(x+2) = 8$$

Hàm số f(x) liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m = 8$.

ĐS: Câu a.

Câu 6: $f(1) = m + 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (mx + 1) = m + 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Hàm số f(x) liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow m + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

ĐS: Câu b.

Câu 7: $f(1) = n$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (mx + 1) = m + 1.$$

Hàm số f(x) liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow 1 = m + 1 = n \Leftrightarrow n = 1$ và $m = 0$. **ĐS:** Câu a.

Câu 8: $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2}$$

Hàm f(x) liên tục trên R. **ĐS:** Câu b.

Câu 9: $f(0) = m$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Vậy f(x) liên tục $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$. **ĐS:** Câu b.

Câu 10: $f(1) = a$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{(\sqrt[3]{3x+5}-2)(\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4)}{(x-1)(\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{3}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(ax+b) = a+b$$

f(x) liên tục tại x = 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = a + b = a \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}, b = 0.$ **ĐS:** Câu c.

Câu 11: $f(1) = a$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2x}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt[3]{3x+5} - 2) - 2(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x-1} - \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4} \text{ (xem câu 10)}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax+b) = a+b$$

$f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{7}{4} = a + b = a \Leftrightarrow a = -\frac{7}{4}, b = 0$ **ĐS:** Câu a.

Câu 12: Ta có: $f(0) = m$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = 0$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = 0.$

Vậy $m = 0$. **ĐS:** Câu b.

ĐẠO HÀM

Câu 1: Cho hàm $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Khi đó $f'(1)$ bằng:

a) $-\dfrac{3}{4}$ b) 2 c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{4}{3}$.

Câu 2: Cho hàm $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x+2}$. Khi đó $f'(2)$ bằng:

a) $\dfrac{27}{16}$ b) $-\dfrac{27}{16}$ c) $\dfrac{29}{16}$ d) $-\dfrac{29}{16}$.

Câu 3: Cho hàm $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+x+1}$. Khi đó $f'(1)$ bằng:

a) $-\dfrac{1}{3}$ b) 3 c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{2}{3}$.

Câu 4: Cho hàm $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Phương trình $f'(x) = 2$ trên R có tập nghiệm là:

a) $\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ b) $\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

c) $-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ d) $\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 5: Cho hàm số $g(x) = (1+\sqrt{2})x - \dfrac{1}{2}\sin 2x - (2+\sqrt{2})\cos x$. Phương trình $g'(x) = 0$ có tập nghiệm là:

a) $S = \{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \,/\, \forall k \in Z\}$

b) $S = \{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{4} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \,/\, \forall k \in Z\}$

c) $S = \{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi; -\dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \,/\, \forall k \in Z\}$

d) $S = \{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \,/\, \forall k \in Z\}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + 3\cos^2 x$. Tập giá trị của hàm $f'(x)$ trên tập R là:

a) $[-4; 4]$ b) $[-2; 2]$ c) $[-1; 1]$ d) $[-3; 3]$.

Câu 7: Cho hàm $f(x) = \cos x.\sin^2 2x - \tan x$. Giá trị $f'(\frac{\pi}{4})$ là:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 2$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \sin 2x$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của $f'(x)$ trên tập R:

a) $m = -\sqrt{2}$, $M = \sqrt{2}$ b) $m = -1$, $M = 1$

c) $m = -2$, $M = 2$ d) $m = -\sqrt{5}$, $M = \sqrt{5}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = 2\frac{\cos^3 x}{3} + \sin^3 x - 2\cos x - 3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x) = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

a) 1 điểm b) 2 điểm c) 4 điểm d) 6 điểm.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = -\cos x + \sin x - \cos 2x$. Phương trình $f'(x) = 1$ tương đương với với phương trình nào sau đây:

a) $\sin x = 0$ b) $\sin x - 1 = 0$

c) $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$ d) $\cos x = 0$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là:

a) $S = \{\frac{2\pi}{3} + k2\pi \,/\, \forall k \in Z\}$

b) $S = \{-\frac{2\pi}{3} + k2\pi \,/\, \forall k \in Z\}$

c) $S = \{k\frac{\pi}{3} \,/\, \forall k \in Z\}$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 12: Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một cột ở vế phải để được ba khẳng định đúng:

1. $(\sin x.\sin 2x)' =$	a) $2x\sin x.\sin 2x + x^2\cos x\sin 2x + 2x^2\sin x\cos 2x$
2. $(x.\sin x.\sin 2x)' =$	b) $\cos x.\sin 2x + 2\cos 2x.\sin x$
3. $(x^2\sin x.\sin 2x)' =$	c) $x\cos x.\sin 2x + 2x\cos 2x.\sin x$
	d) $\sin x.\sin 2x + x\cos x.\sin 2x + 2x\cos 2x.\sin x$

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = |x - 1|$. Chọn khẳng định đúng:

a) $f'(0) = 1$

b) Không tồn tại $f'(1)$

c) Không tồn tại $f'(0)$

d) Các khẳng định ở ba câu trên đều sai.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 1|$. Chọn khẳng định đúng:

a) Không tồn tại đạo hàm tại $x = -1$

b) $f'(2) = 4$

c) $f'(\frac{1}{2}) = -1$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều đúng.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1} & \text{nếu } x > 0 \\ x + 1 & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng:

a) Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$

b) $f'(-1) = -1$

c) $f'(0) = 1$

d) Cả 3 khẳng định trên đều sai.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{4x+28} + x & \text{nếu } x \ne 1 \\ 7 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[5]{31x+1} - 3}{x} & \text{nếu } x \ne 1 \\ 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

Chọn khẳng định đúng:

a) $f'(1) = 0$

b) $f'(1) = 1$

c) $g'(1) = 0$

d) Hàm $g(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{6x+1} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ x + 3 & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}$.

Chọn khẳng định đúng:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

b) Hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi x dần tới 0

c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{6x+1}-1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ x+3 & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}$.

Chọn khẳng định đúng:

a) Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$

b) Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ và $f'(0) = 1$

c) Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ và $f'(0) = 3$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1} & \text{nếu } x \ne 1 \\ m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$.

Chọn khẳng định đúng:

a) $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ khi $m = \dfrac{3}{5}$

b) $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ khi $m = \dfrac{7}{10}$

c) $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ khi $m = \dfrac{7}{11}$

d) Các khẳng định ở các câu trên đều sai.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{6x-2}-2 & \text{nếu } x \ne 1 \\ m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$.

Với giá trị nào của m thì $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$?

a) $m = 1$ b) $m = 0$

c) $m = -1$ d) Không có giá trị nào của m.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{nếu } x > 0 \\ x + m & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng:

a) $f(x)$ có đạo hàm khi $m = 0$

b) $f(x)$ có đạo hàm khi $m = -1$

c) $f(x)$ có đạo hàm khi $m = 1$

d) Các khẳng định ở ba câu trên đều sai.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 - x$ có đồ thị (C). Điểm nào sau đây thuộc (C)?

a) M(1; 2) b) N(1; 0) c) P(2, 2) d) Q(3; 3).

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - x$ có đồ thị (C). Hệ số góc tiếp tuyến với (C) tại điểm N(2; 6) thuộc (C) là:

a) 11 b) 10 c) 9 d) 8.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 + x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k = 5. Cặp giá trị nào sau đây là toạ độ của M:

a) (1; 2) và $(-\frac{5}{3}; -\frac{50}{27})$ b) (1; 2) và $(\frac{5}{3}; \frac{50}{27})$

c) (1; –2) và $(\frac{5}{3}; -\frac{50}{27})$ d) (1; 2) và $(\frac{5}{3}; -\frac{50}{27})$.

Câu 25: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(-1; -2) \in (C)$ có phương trình là:

a) $y = 7x - 5$ b) $y = -7x + 5$ c) $y = 7x + 5$ d) $y = -7x - 5$.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với (C) tại điểm M có hoành độ bằng 1, có phương trình là:

a) $y = x - 1$ b) $y = 1$ c) $y = -1$ d) $y = x + 1$.

Câu 27: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và trục tung có phương trình:

a) $y = -3x + 1$ b) $y = -3x - 1$ c) $y = 3x - 1$ d) $y = 3x + 1$.

Câu 28: Cho hàm số $y = x^5 - 32$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình:

a) $y = 80x - 160$ b) $y = 80x + 160$

c) $y = -80x + 160$ d) $y = -80x - 160$.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị là (P). Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = 2x$ và là tiếp tuyến của (P). Phương trình của d là:

a) $y = 2x + 4$ b) $y = -2x + 4$ c) $y = -2x - 4$ d) $y = 2x - 4$

Câu 30: Cho hàm số $y = x^4 - 2x$ có đồ thị (C). Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{30}x$ và tiếp xúc với (C). Phương trình của d là:

a) $y = -30x - 48$ b) $y = 30x - 48$

c) $y = 30x + 48$ d) $y = -30x + 48$.

Câu 31: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{7x+1}-1}{x}$ bằng bao nhiêu?

a) -1 b) 1 c) 2 d) 0.

Câu 32: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}\sqrt[3]{7x+1}-4}{x-1}$ bằng bao nhiêu?

a) 2 b) $\dfrac{13}{6}$ c) $\dfrac{7}{3}$ d) $\dfrac{13}{5}$.

Câu 33: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}\sqrt[3]{7x+1}-4}{\sqrt{2x-1}-1}$ bằng bao nhiêu?

a) $-\dfrac{13}{6}$ b) $\dfrac{13}{6}$ c) 2 d) -2.

Hướng dẫn

Câu 1: Đạo hàm có dạng $\dfrac{u}{v}$.

$$f'(x) = \frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3}{(x+1)^2}$$

$\Rightarrow f'(1) = \dfrac{3}{4}$. **ĐS:** Câu c.

> *Chú ý:* Bạn đọc hãy chứng minh công thức tổng quát sau:
>
> $$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Câu 2: Đạo hàm có dạng $\dfrac{u}{v}$.

$$f'(x) = \frac{(2x^2+x-1)'(x+2)-(2x^2+x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(4x+1)'(x+2)-(2x^2+x-1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+8x+3}{(x+2)^2}$$

$\Rightarrow f'(2) = \dfrac{27}{16}$. **ĐS:** Câu a.

Chú ý: Bạn đọc hãy chứng minh công thức tổng quát sau:

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$$

Câu 3: Đạo hàm có dạng $\frac{u}{v}$

$$f'(x) = \frac{(2x^2-3x+1)'(x^2+x+1)-(2x^2-3x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{(4x-3)(x^2+x+1)-(2x^2-3x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{5x^2+2x-4}{(x^2+x+1)^2}$$

$\Rightarrow \quad f'(1) = \frac{1}{3}$. **ĐS:** Câu c.

Chú ý: Bạn đọc hãy chứng minh công thức tổng quát sau:

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{(dx^2+ex+f)^2}$$

Câu 4: $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1$$

$\Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. **ĐS:** Câu c.

Câu 5: $g'(x) = 1 + \sqrt{2} - \frac{1}{2}.2.\cos 2x + (2 + \sqrt{2})\sin x$

$$= 1 + \sqrt{2} - \cos 2x + (2+\sqrt{2})\sin x$$

$$= 1 + \sqrt{2} - (1 - 2\sin^2 x) + (2+\sqrt{2})\sin x$$

$$= 2\sin^2 x + (2+\sqrt{2})\sin x + \sqrt{2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + (2+\sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0.$$

Đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \le 1$. Ta có phương trình:

$$2t^2 + (2 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0$$

$$\Delta = (2 + \sqrt{2})^2 - 4.2.\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^2$$

$$t_1 = \frac{-2 - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}}{4} = -1;\ t_2 = \frac{-2 - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

• $t = -1$: $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

• $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$ **ĐS:** Câu a.

Câu 6: $f'(x) = 2.\sin x.\cos x - 6\cos x.\sin x = -4\sin x\cos x = -2\sin 2x$.

Vì: $-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow -2 \le f'(x) \le 2$

Tập giá trị của $f'(x)$ là đoạn $[-2; 2]$. **ĐS:** Câu b.

Câu 7: $f'(x) = (\cos x)'\sin^2 2x + \cos x(\sin^2 2x)' - \frac{1}{\cos^2 x}$

$$= -\sin x \sin^2 2x + 4\cos x\sin 2x\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4}\sin^2\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2$$

ĐS: Câu d.

Câu 8: $f'(x) = 2\sin x\cos x + 2\cos 2x = \sin 2x + 2\cos 2x$.

Đặt: $\sin 2x + 2\cos 2x = t$.

Xem x là ẩn số, t là tham số.

Phương trình trên có nghiệm $x \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 \ge t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \le t \le \sqrt{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f'(x)$ là $-\sqrt{5}$, giá trị lớn nhất là $\sqrt{5}$.

ĐS: Câu d.

Câu 9: $f'(x) = -2\cos^2 x.\sin x + 3\sin^2 x.\cos x + 2\sin x - 3\cos x$

$$= 2\sin x(1 - \cos^2 x) - 3\cos x(1 - \sin^2 x)$$

$$= 2\sin^3 x - 3\cos^3 x$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^3x - 3\cos^3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^3x = 3\cos^3x \Leftrightarrow \tan^3x = \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

Vậy biểu diễn cung nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác ta được hai điểm. **ĐS:** Câu b.

Câu 10: $f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x - 1 = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Ta có phương trình:

$$t + 2(t^2 - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow t = 1$ (nghiệm $t = -\dfrac{3}{2}$ bị loại)

$t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 1$

$\Leftrightarrow \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

ĐS: Câu c.

Câu 11: $f'(x) = -\sin 2x - \sin 3x - \sin 4x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 4x + \sin 2x) + \sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = k\pi \\ \cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}$. **ĐS:** Câu c.

Câu 12: Các đạo hàm ở câu hỏi này có hai dạng sau:

$(u.v)' = u'v + uv'$

$(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$

1. $(\sin x.\sin 2x)' = (\sin x)'\sin 2x + \sin x(\sin 2x)'$

$= \cos x.\sin 2x + 2\sin x.\cos 2x$

2. $(x.\sin x.\sin 2x)' = (x)'.\sin x.\sin 2x + x.(\sin x)'.\sin 2x + x.\sin x.(\sin 2x)'$

$= \sin x.\sin 2x + x.\cos x\ .\sin 2x + 2x.\sin x.\cos 2x$

3. $(x^2\sin x.\sin 2x)' = (x^2)'\sin x.\sin 2x + x^2(\sin x)'.\sin 2x + x^2\sin x.(\sin 2x)'$

$= 2x.\sin x.\sin 2x + x^2\cos x.\sin 2x + 2x^2\sin x.\cos 2x$

Vậy 1. → a); 2. → d); 3. → a).

Câu 13: 1. Trong lân cận $x = 0$ (và tại $x = 0$), $x - 1 < 0$, nên

$f(x) = 1 - x \Rightarrow f'(x) = -1 \Rightarrow f'(0) = -1.$

2. Cho $x = 1$ số gia Δx, $f(x)$ có số gia tương ứng là

$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = |\Delta x|$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Vì vậy không tồn tại đạo hàm tại $x = 1$. **ĐS:** Câu b.

Câu 14: 1. Cho $x = -1$, số gia Δx, $f(x)$ có số gia tương ứng là

$$\Delta y = f(-1 + \Delta x) - f(-1) = |(-1 + \Delta x)^2 - 1| = |(\Delta x)^2 - 2\Delta x|$$

$$= |\Delta x||\Delta x - 2|$$

$$= |\Delta x|(2 - \Delta x) \text{ (lấy } \Delta x \in (-1\ ;\ 1))$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|(2 - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x(2 - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} (\Delta x - 2) = -2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|(2 - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x(2 - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} (2 - \Delta x) = 2.$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.

2. Trong lân cận của $x = 2$, $x^2 - 1 > 0$, nên

$f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$

3. Trong lân cận của $x = \frac{1}{2}$, $x^2 - 1 < 0$, nên

$f(x) = 1 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = -1.$ **ĐS:** Câu d.

Câu 15: Ta có f(0) = 1.

Cho **x = 0**, số gia Δx, số gia tương ứng của hàm số là Δy

$\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - 1$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2\Delta x + 1} - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\sqrt{2\Delta x + 1} - 1)(\sqrt{2\Delta x + 1} + 1)}{\Delta x(\sqrt{2\Delta x + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2\Delta x + 1} + 1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{\sqrt{2\Delta x + 1} + 1} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x + 1 - 1}{\Delta x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1.$$ **ĐS:** Câu c.

Câu 16: 1. Ta có: f(1) = 7

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (\sqrt[5]{4x + 28} + x) = 3$

$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1) \Rightarrow$ **f(x) không liên tục tại x = 1, vì vậy f(x) không có đạo hàm tại x = 1.**

2. Ta có: g(1) = 1

$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[5]{31x + 1} - 3}{x} = -1$

$\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1) \Rightarrow$ g(x) không liên tục tại x = 1, vì vậy g(x) không có đạo hàm tại x = 1. **ĐS:** Câu d.

Câu 17: 1. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{6x + 1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\sqrt{6x + 1} - 1)(\sqrt{6x + 1} + 1)}{x(\sqrt{6x + 1} + 1)}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{6x}{x(\sqrt{6x + 1} + 1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{6}{\sqrt{6x + 1} + 1} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+3) = 3$$

Vì $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 3$

2. Vì f(0) = 3

Nên $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Vì vậy f(x) liên tục tại x = 0

ĐS: Câu c.

Câu 18: Cho x = 0, số gia Δx, số gia tương ứng của hàm số là Δy, ta có:

$$\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - 3$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{6\Delta x+1}-1}{\Delta x}-3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{6\Delta x+1}-(1+3\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\left[\sqrt{6\Delta x+1}-(1+3\Delta x)\right]\left[\sqrt{6\Delta x+1}+(1+3\Delta x)\right]}{(\Delta x)^2\left[\sqrt{6\Delta x+1}+(1+\Delta x)\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{9(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2\left[\sqrt{6\Delta x+1}+(1+\Delta x)\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{9}{\left[\sqrt{6\Delta x+1}+(1+\Delta x)\right]} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x+3-3}{\Delta x} = 1$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại x = 0. **ĐS:** Câu a.

Câu 19: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{7x+1}-2)(\sqrt[3]{(7x+1)^2}+2\sqrt[3]{7x+1}+4)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7x+1)^2}+2\sqrt[3]{7x+1}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{7(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7x+1)^2}+2\sqrt[3]{7x+1}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{7}{\sqrt[3]{(7x+1)^2}+2\sqrt[3]{7x+1}+4} = \frac{7}{12}$$

Hàm số f(x) có đạo hàm tại x = 1 $\Rightarrow$ f(x) liên tục tại x = 1

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = \frac{7}{12}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 20: Điều kiện cần: f(1) = m

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(\sqrt{6x-2} - 2) = 0$$

f(x) có đạo hàm tại x = 0 $\Rightarrow$ f(x) liên tục tại x = 0

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = 0$$

Điều kiện đủ:

Với m = 0

Cho x = 1, số gia Δx, số gia tương ứng của hàm số là Δy:

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = \sqrt{6\Delta x + 4} - 2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{6\Delta x+4}-2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{6\Delta x+4}-2)(\sqrt{6\Delta x+4}+2)}{\Delta x(\sqrt{\Delta x+4}+2)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{6\Delta x}{\Delta x(\sqrt{\Delta x+4}+2)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{6}{\sqrt{\Delta x+4}+2} = \frac{3}{2}$$

Vậy hàm số có đạo hàm tại x = 1 khi m = 0. **ĐS:** Câu b.

> ***Chú ý:*** Để giải bài toán tìm giá trị của tham số để hàm số có đạo hàm tại x_0, ta tiến hành qua hai bước:
>
> Điều kiện cần:
>
> Hàm số f(x) có đạo hàm tại $x_0 \Rightarrow$ f(x) liên tục tại x_0
>
> $$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (*)$$
>
> Từ phương trình (*) ta tìm được giá trị của tham số.
>
> Điều kiện đủ:
>
> Với giá trị tham số tìm được ở điều kiện cần, ta kiểm tra hàm số có đạo hàm tại x_0 không.

Câu 21: Điều kiện cần: f(0) = m

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2 - x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim(x + m) = m$$

f(x) có đạo hàm tại x = 0 $\Rightarrow$ f(x) liên tục tại x = 0

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

Điều kiện đủ: Với m = 0

Cho $x = 0$ số gia Δx, số gia tương ứng của hàm số là Δy, ta có:

$$\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = f(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (\Delta x - 1) = -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Vì $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

ĐS: Câu d.

Câu 22: Vì $0 = 1^3 - 1$, vì vậy $N(1; 0) \in (C)$. **ĐS:** Câu b.

Câu 23: Ta có: $y' = 3x^2 - 1$

Hệ số góc tiếp tuyến với (C) tại điểm $N(2; 6)$ thuộc (C) là

$k = f'(2) = 11$. **ĐS:** Câu a.

Chú ý: Cho (C): $y = f(x)$. Hệ số góc tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) là: $k = f'(x_0)$

Câu 24: $k = f'(x) \Leftrightarrow 5 = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{5}{3} \end{array}\right.$

- $x = 1 \Rightarrow y = 2$
- $x = -\frac{5}{3} \Rightarrow y = (-\frac{5}{3})^3 + (-\frac{5}{3})^2 = -\frac{125}{27} + \frac{25}{9} = -\frac{50}{27}$

Vậy có hai điểm M có toạ độ: $(1; 2)$ và $(-\frac{5}{3}; -\frac{50}{27})$. **ĐS:** Câu a.

Câu 25: $y' = 3x^2 - 4x \Rightarrow y'(-1) = 7$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(-1; -2) \in (C)$ có phương trình là:

$y = y'(-1)(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = 7x + 5$. **ĐS:** Câu c.

Chú ý: Cho (C): $y = f(x)$. Tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) có phương trình là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Câu 26: M có hoành độ $x = 1$, nên có tung độ $y = 1^4 - 2.1^2 = -1$.

Vậy $M(1; -1)$.

$y' = 4x^3 - 4x$

Tiếp tuyến với (C) tại điểm M có phương trình là:

$y = y'(1)(x - 1) - 1 \Leftrightarrow y = -1$. **ĐS:** Câu c.

Câu 27: Trong phương trình của (C) cho $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ Giao điểm của (C) và trục tung là M(0; 1).

$y'(x) = 3x^2 - 3$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là:

$y = y'(0)(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1.$ **ĐS:** Câu a.

Câu 28: $y = 0 \Leftrightarrow x^5 - 32 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy (C) cắt trục hoành tại điểm M(2; 0).

$y'(x) = 5x^4$

Tiếp tuyến tại M có phương trình:

$y = y'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = 80x - 160.$ **ĐS:** Câu a.

Câu 29: Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = 2x$ nên d có hệ số góc $k = 2$.

Giả sử d tiếp xúc với (P) tại điểm $M(x_0; y_0)$. Ta có:

$k = f'(x_0) \Leftrightarrow 2 = 2x_0 - 2 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow M(2; 0)$

Vậy d: $y = 2(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 4.$ **ĐS:** Câu d.

> *Chú ý:* Để viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc k và tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ ta giải như sau:
>
> - Giải phương trình $k = f'(x)$ để tìm các nghiệm x_i, x_i là hoành độ tiếp điểm của (d) và (C). Sau đó xác định các tiếp điểm $M_i(x_i; f(x_i))$.
> - Các tiếp tuyến (d) có phương trình dạng:
>
> $$y = k(x - x_i) + y_i\ (y_i = f(x_i)).$$

Câu 30: Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{30}x$, nên d có hệ số góc $k = 30$.

$k = f'(x) \Leftrightarrow 30 = 4x^3 - 2 \Leftrightarrow x = 2$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 2^4 - 2.2 = 12$

Vậy d có phương trình:

$Y = 30(x - 2) + 12 \Leftrightarrow y = 30x - 48.$ **ĐS:** Câu b.

Câu 31: Đặt $f(x) = \sqrt[7]{7x+1} - 1$, ta có: $f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{7}{7.\sqrt[7]{(7x+1)^6}} = \frac{1}{\sqrt[7]{(7x+1)^6}} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[7]{7x+1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1.$$ **ĐS:** Câu b.

Chú ý: Trong cách giải trên ta đã sử dụng định nghĩa đạo hàm để tính giới hạn:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) chứa điểm x_0.

Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \ (*)$$

Để ý rằng giới hạn ở (*) có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$, vì vậy ta có thể sử dụng đạo hàm để tính một số giới hạn có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Câu 32: Đặt $f(x) = \sqrt{2x+2}\sqrt[3]{7x+1} - 4$, ta có: f(1) = 0

$$f'(x) = (\sqrt{2x+2})'\sqrt[3]{7x+1} + \sqrt{2x+2}(\sqrt[3]{7x+1})'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\sqrt[3]{7x+1} + \sqrt{2x+2}\frac{7}{3\sqrt[3]{(7x+1)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(1) = 1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+2}\sqrt[3]{7x+1} - 4}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{13}{6}.$$

ĐS: Câu b.

Câu 33: Ta biến đổi như sau:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+2}\sqrt[3]{7x+1} - 4}{\sqrt{2x-1} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{\sqrt{2x+2}\sqrt[3]{7x+1} - 4}{x-1}}{\dfrac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1}}$$

Theo câu 32 ta có $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x+2}\sqrt[3]{7x+1} - 4}{x-1} = \dfrac{13}{6}$

Tính toán đơn giản ta có $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} = 1$

Vậy $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x+2}\sqrt[3]{7x+1} - 4}{\sqrt{2x-1} - 1} = \dfrac{13}{6}$. **ĐS:** Câu b.

ĐẠO HÀM CẤP CAO

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = (x - 3)^8$. Giá trị của $f^{(4)}(4)$ bằng:

a) 1680 b) 1690 c) 1660 d) 1650.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$. Giá trị của $f^{(5)}(\frac{\pi}{6})$ bằng:

a) 32 b) 0 c) –32 d) 16.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \cos^2 2x$. Giá trị $f^{(6)}(\frac{\pi}{6})$ bằng:

a) 512 b) 1024 c) 2048 d) 1022

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$. Chọn khẳng định đúng:

a) $2.[f'(x)]^2 = [f(x) - 1]f''(x)$ b) $2.[f'(x)]^2 = [f(x) - 2]f''(x)$

c) $2.[f'(x)]^2 = [f(x) - 3]f''(x)$ d) $2.[f'(x)]^2 = [f(x) - 4]f''(x)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chọn khẳng định đúng:

a) $y^3y'' + 1 = 0$ b) $y^3y'' - 1 = 0$

c) $y^3y'' + 2 = 0$ d) $y^3y'' - 2 = 0$.

Câu 6: Cho hàm số $y = A\sin(\omega t + \phi) + B\cos(\omega t + \phi)$. Chọn khẳng định đúng:

a) $y'' + \omega^2 y = 1$ b) $y'' + \omega^2 y = -1$

c) $y'' + \omega^2 y = 0$ d) $y'' + \omega^2 y = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1}$. Chọn khẳng định đúng:

a) $y^{(20)}(3) = \frac{20!}{2^{21}}$ b) $y^{(20)}(3) = -\frac{20!}{2^{21}}$

c) $y^{(20)}(3) = \frac{20!}{2^{20}}$ d) $y^{(20)}(3) = -\frac{20!}{2^{20}}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+2}{2x+1}$. Chọn khẳng định đúng:

a) $f^{(21)}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{21!}{2}$ b) $f^{(21)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21!}{2}$

c) $f^{(21)}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{20!}{2}$ d) $f^{(21)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21!}{2}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x}$. Giá trị của $f^{(20)}(1)$ bằng:

a) $\dfrac{20!}{2^{20}}$ b) $20!(\dfrac{1}{2^{20}} + 1)$

c) $\dfrac{20!}{2^{21}}$ d) $20!(\dfrac{1}{2^{21}} + 1)$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \sin(x + 30^0)$. Giá trị của $f^{(20)}(15^0)$ bằng:

a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2 x$. Tính $f^{(22)}(\dfrac{\pi}{4})$.

a) -2^{22} b) 2^{22} c) 1 d) 0.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = 2\sin 3x\cos x$. Tính $f^{(21)}(\dfrac{\pi}{3})$.

a) $-2^{20}(2^{21}+1)$ b) $2^{20}(2^{21}+1)$ c) $2^{20}(2^{21}-1)$ d) $-2^{20}(2^{21}-1)$.

Câu 13: Cho hàm $f(x) = \ln(1 + x)$. Tính $f^{(22)}(1)$.

a) $\dfrac{21!}{2^{22}}$ b) $\dfrac{21!}{2^{21}}$ c) $-\dfrac{21!}{2^{21}}$ d) $-\dfrac{21!}{2^{22}}$.

Câu 14: Cho hàm $f(x) = e^{2x}$. Tính $f^{(20)}(1)$.

a) $2^{20}e^2$ b) $2e^{20}$ c) $2^{20}e^{20}$ d) $2^{20}e$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x.e^x$. Giá trị của $f^{(50)}(1)$ bằng:

a) 49e b) 50e c) 51e d) 52e.

Hướng dẫn

Câu 1: $f'(x) = 8(x-3)^7$; $f''(x) = 8.7(x-3)^6$; $f^{(3)}(x) = 8.7.6(x-3)^5$; $f^{(4)}(x)$
$= 8.7.6.5(x-3)^4$

$\Rightarrow f^{4}(4) = 8.7.6.5 = 1680$. **ĐS:** Câu a.

Câu 2: $f'(x) = 2\cos(2x + \dfrac{\pi}{6})$; $f''(x) = -4.\sin(2x + \dfrac{\pi}{6})$; $f'''(x) = -8\cos(2x + \dfrac{\pi}{6})$

$f^{(4)}(x) = 16\sin(2x + \dfrac{\pi}{6})$; $f^{(5)}(x) = 32\cos(2x + \dfrac{\pi}{6})$

$\Rightarrow f^{(5}(\dfrac{\pi}{6}) = 0$. **ĐS:** Câu b.

Câu 3: $f'(x) = -4cox2x.sin2x = -2sin4x$; $f''(x) = -8cos4x$; $f'''(x) = 32sin4x$

$f^{(4)}(x) = 128cos4x$; $f^{(5)}(x) = -512sin4x$; $f^{(6)}(x) = -2048cos4x$

$\Rightarrow f^{(6)}(\frac{\pi}{6}) = -2048cos\frac{2\pi}{3} = 1024.$ **ĐS:** Câu b.

Câu 4: $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$

$$f'(x) = \frac{7}{(x+4)^2};\ f'(x) = \frac{-14}{(x+4)^3}$$

$$2.[f'(x)]^2 = [f(x) - a]f''(x) \Leftrightarrow \frac{98}{(x+4)^4} = (\frac{x-3}{x+4} - a)\frac{-14}{(x+4)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{98}{(x+4)^4} = \frac{-14[(1-a)x - 3 - 4a]}{(x+4)^4} \Rightarrow (1-a)x - 3 - 4a = -7$$

$\Leftrightarrow a = 1.$ **ĐS:** Câu a.

Câu 5: $y' = \frac{(2x - x^2)'}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}},$

$$y'' = \frac{(1-x)'\sqrt{2x - x^2} - (1-x)(\sqrt{2x - x^2})'}{2x - x^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2x - x^2} - (1-x)\frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}}{2x - x^2}$$

$$= -\frac{2x - x^2 + (1-x)^2}{(2x - x^2)\sqrt{2x - x^2}} = -\frac{1}{(2x - x^2)\sqrt{2x - x^2}}$$

$\Rightarrow y^3y'' = -1 \Rightarrow y^3y'' + 1 = 0.$ **ĐS:** Câu a.

Câu 6: $y' = A\omega cos(\omega t + \phi) - B\omega sin(\omega t + \phi)$

$y'' = -A\omega^2 sin(\omega t + \phi) - B\omega^2 cos(\omega t + \phi)$

$= -\omega^2[Asin(\omega t + \phi) + Bcos(\omega t + \phi)] = -\omega^2 y$

$\Rightarrow y'' + \omega^2 y = 0.$ **ĐS:** Câu c.

Câu 7: Rõ ràng, ta phải tìm công thức tính $\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}$, ta chứng minh công thức tổng quát sau:

$$\left(\frac{1}{a.x + b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(a.x + b)^{n+1}}\ (a \neq 0)\ (1)$$

- $n = 1$: $\left(\dfrac{1}{a.x + b}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^1 a^1 1!}{(a.x + b)^{1+1}}$: công thức đúng.

- Giả sử công thức đúng với $n = k$. Ta chứng minh công thức đúng với $n = k + 1$.

$$\left(\frac{1}{a.x + b}\right)^{(k+1)} = \left[\left(\frac{1}{a.x + b}\right)^{(k)}\right]' = \left[\frac{(-1)^k a^k k!}{(a.x + b)^{k+1}}\right]' \text{ (theo giả thiết qui nạp)}$$

$$= \frac{(-1)^k a^k k!(-1)(k + 1).a(a.x + b)^k}{(a.x + b)^{2k+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}(k + 1)!}{(a.x + b)^{k+2}}$$

Công thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lí qui nạp công thức đúng với mọi số nguyên dương n.

Áp dụng vào bài toán. **ĐS:** Câu a.

Câu 8: Sử dụng kết quả của câu 7. Chia tử cho mẫu ta có:

$$y = 1 + \frac{1}{2x + 1}$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x + 1)^{n+1}}$$ **ĐS:** Câu a.

Câu 9: Phân tích f(x) thành tổng những hạng tử dạng $\dfrac{A}{a.x + b}$, sau đó sử dụng công thức đạo hàm trong câu 7.

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x} = \frac{2x + 1}{x(x + 1)} = \frac{x + (x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{x}{x(x + 1)} + \frac{(x + 1)}{x(x + 1)}$$

$$= \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x}$$

Theo câu 7: $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1 + x)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

$$= (-1)^n n! \left[\frac{1}{(1 + x)^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+1}}\right]$$

$$\Rightarrow f^{(20)}(1) = 20!\left(\frac{1}{2^{21}} + 1\right).$$ **ĐS:** Câu d.

Câu 10: Ta phải tìm công thức tính $f^{(n)}(x)$. Tổng quát ta chứng minh công thức sau: $[\sin(ax + b)]^{(n)} = a^n\sin[ax + b + n90^0]$.

Ta chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

- Với n = 1: $[\sin(ax + b)]' = a.\cos(ax + b) = a.\sin(ax + b + 1.90^0)$ công thức đúng.
- Giả sử công thức đúng với n = k, ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1.

$$\begin{aligned}[\sin(ax + b)]^{(k+1)} &= \{[\sin(ax + b)]^{(k)}\}' = \{a^k\sin(ax + b + k90^0)\}' \\ &= a^k a.\cos(ax + b + k90^0) \\ &= a^{k+1}\sin(ax + b + k90^0 + 90^0) \\ &= a^{k+1}\sin[ax + b + (k + 1)90^0]\end{aligned}$$

Công thức đúng với n = k + 1. Theo nguyên lí qui nạp, công thức với mọi số nguuyên dương n

$\Rightarrow \quad f^{(20)}(15^0) = \sin(15^0 + 30^0 + 20.90^0) = \sin45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **ĐS:** Câu c.

Câu 11: Sử dụng công thức hạ bậc, sau đó sử dụng công thức đã chứng minh ở câu 10.

$$f(x) = 1 - \cos2x = 1 - \sin(2x + \frac{\pi}{2}).$$

Theo công thức ở câu 10:

$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = -2^n\sin(2x + \dfrac{\pi}{2} + n\dfrac{\pi}{2}) = -2^n\sin[2x + (n + 1)\dfrac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \quad f^{(22)}(\dfrac{\pi}{4}) = -2^{22}\sin(\dfrac{\pi}{2} + 23\dfrac{\pi}{2}) = -2^{22}\sin(24\dfrac{\pi}{2}) = 0$ **ĐS:** Câu d.

Câu 12: Biến hàm y dưới dạng tổng nhờ công thức biến đổi tích thành tổng, sau đó sử dụng công thức trong câu 10.

$$f(x) = \sin4x + \sin2x$$

Theo công thức trong câu 10, ta có:

$$f^{(n)}(x) = 4^n\sin(4x + n\frac{\pi}{2}) + 2^n\sin(2x + n\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad f^{(21)}(\frac{\pi}{3}) &= 4^{21}\sin(\frac{4\pi}{3} + 21.\frac{\pi}{2}) + 2^{21}\sin(\frac{2\pi}{3} + 21.\frac{\pi}{2}) \\ &= 4^{21}\sin(\frac{\pi}{3} + 11\pi + \frac{\pi}{2}) + 2^{21}\sin(\frac{2\pi}{3} + 10\pi + \frac{\pi}{2}) \\ &= 4^{21}\cos(\frac{\pi}{3} + \pi) + 2^{21}\cos\frac{2\pi}{3} \\ &= -4^{21}.\frac{1}{2} - 2^{20} = -(2^{41} + 2^{20}) = -2^{20}(2^{21} + 1).\end{aligned}$$

ĐS: Câu a.

Câu 13: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Theo công thức ở câu 7, ta có:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$\Rightarrow \quad f^{(22)}(1) = -\dfrac{21!}{2^{22}}$. **ĐS:** Câu d.

Câu 14: $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 2.2.e^{2x} = 2^2e^{2x}$, ...

$\Rightarrow \quad f^{(20)}(x) = 2^{20}e^{2x} \Rightarrow f^{(20)}(1) = 2^{20}e^2$. **ĐS:** Câu a.

Câu 15: $f'(x) = e^x + xe^x$

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

Bằng phương pháp qui nạp ta dễ dàng chứng minh rằng:

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x$$

$\Rightarrow \quad f^{(50)}(1) = 50e + e = 51e$ **ĐS:** Câu c.

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập : Minh Hải – Trần Hưng

Chế bản : Nhà sách Hồng Ân

Trình bày bìa : Ngọc Anh

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH LỚP 11

Mã số: 1L-210 ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm. Tại Công ty TNHH in bao bì Phong Tân

Số xuất bản: 706-2007/CXB/15-106/ĐHQGHN, ngày 06/09/2007.

Quyết định xuất bản số: 469 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2007.