TRẦN BÌNH

Bài tập giải sẵn Giải tích I

- TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CHỌN LỌC
- PHỤ CHƯƠNG CÁC ĐỀ THI HỌC KỲ I CÁC NĂM 2003 - 2007

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRẦN BÌNH

BÀI TẬP GIẢI SẴN

GIẢI TÍCH I

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CHỌN LỌC

PHỤ CHƯƠNG: CÁC ĐỀ THI HỌC KỲ I CÁC NĂM 2003 - 2007

In lần thứ tư có sửa chữa và bổ sung

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Sau khi bộ giáo trình GIẢI TÍCH (2 tập) của tác giả do Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật ấn hành (1998 - 2000), nhiều độc giả đã đề nghị viết tiếp bộ Bài tập giải tích giải sẵn có phần tóm tắt lý thuyết như một ***Sổ tay toán học giải tích*** *cho sinh viên kỹ thuật và kỹ sư, dựa trên bộ giáo trình GIẢI TÍCH.*

Để đáp ứng yêu cầu đó nhằm nâng cao chất lượng đào tạo trong hiện tại và tương lai, tác giả đã soạn bộ bài tập này (Tập I (II): Giải tích I (II, III), ứng với các nội dung học ở học kỳ I (II, III).

*Phần bài tập, tác giả đã chọn lọc các bài từ dễ, trung bình đến khó, đại diện cho các loại tương ứng với các phần lý thuyết theo chương trình toán giải tích hiện tại. Những bài khó có đánh dấu * nhằm bồi dưỡng thêm cho sinh viên (nhất là các sinh viên khá, giỏi). Cuối sách có phần phụ chương: Các đề thi Giải tích học kỳ I các năm 2003 - 2007 của Đại học Bách khoa để sinh viên tham khảo.*

Tác giả xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp, nhất là PGS. TS. Dương Quốc Việt đã đọc rất kỹ bản thảo và cho nhiều ý kiến quý báu.

Vì sách mới xuất bản, không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong bạn đọc cho những ý kiến chỉ giáo.

Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội tháng 5 năm 2005

TÁC GIẢ

MỤC LỤC

CHƯƠNG I

SỐ THỰC - GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ THỰC

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Ký hiệu logique

Xét A, B, C, ... là các mệnh đề toán học:

$\overline{A}$ (không A) (mệnh đề phủ định của A)

A & B (A và B) (mệnh đề hội)

$A \vee B$ (A hoặc B) (mệnh đề tuyển)

$A \Rightarrow B$ (A kéo theo B, nếu A thì B, ...) (mệnh đề kéo theo, điều kiện đề)

$A \Leftrightarrow B$ (A tương đương với B: $A \Rightarrow B$ & $B \Rightarrow A$) (mệnh đề tương đương)

$\forall x\ P(x)$ (với mọi x, P(x)) (mệnh đề khái quát)

$\exists x\ P(x)$ (tồn tại hay có một x, P(x)) (mệnh đề tồn tại)

$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ (quy luật phủ định của phủ định)

$(A \Rightarrow B\ .\ B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (quy luật bắc cầu)

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (quy luật phản đảo)

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\forall x\ P(x)} \Leftrightarrow \exists x\ \overline{P(x)} \\ \overline{\exists x\ P(x)} \Leftrightarrow \forall x\ \overline{P(x)} \end{array}\right\} \text{(quy luật đối ngẫu)}$$

1.2. Tập hợp: A, B, ...

$x \in A$ $(x \bar{\in} A)$ (x thuộc A (x không thuộc A))

x: phần tử của A

$A \subset B$ (A bao hàm trong B: $x \in A \Rightarrow x \in B$)

$A = B$ (A bằng B: $A \subset B$ & $B \subset A$)

$A \cup B$ (A hợp B: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$)

$A \cap B$ (A giao B: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ & $x \in B$)

$A \setminus B$ (A trừ B: $x \in A$ & $x \bar{\in} B$)

$A^c = X \setminus A$ (phần bù của A), X: tập cố định

$A = A_1 . A_2 \dots A_n$ (tập hợp tích: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \Leftrightarrow x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$). A: tích Decartes.

Ø: tập hợp trống (rỗng)

1.3. Ánh xạ

$$f : X \to Y$$

(quy luật tương ứng: $\forall x \in X$, ứng với một phần tử duy nhất $y \in Y$)

$y = f(x)$ (ảnh của $x \in X$ qua ánh xạ f)

f : đơn ánh (toàn ánh) (phương trình $f(x) = y$, $\forall y \in Y$ có nhiều nhất một nghiệm (có nghiệm) trong X.

f : song ánh (vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh).

$f^{-1} : x = f^{-1}(y)$ (ánh xạ ngược)

$f . g : z = g[f(x)]$ (ánh xạ hợp).

1.4. Phương pháp quy nạp toán học

Cho mệnh đề P phụ thuộc $n : n \in N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Nếu P(1) đúng và từ giả thiết P(n) đúng ta chứng minh được P(n+1) đúng thì P(n) đúng $\forall n \in N$.

1.5. Nhị thức Newton

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ (n giai thừa hay giai thừa n, $n \in N$).

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ (số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử, mỗi chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là mỗi nhóm k phần tử lấy từ n phần tử đó sao cho các nhóm đó khác nhau vì bản thân các phần tử hoặc vì thứ tự các phần tử và mỗi phần tử có mặt không quá một lần trong mỗi nhóm đó).

$C_n^k = \frac{A_n^k}{n!}$ (số tổ hợp chập k của n phần tử, mỗi tổ hợp chập k của n phần tử là một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử không kể thứ tự).

$0! = 1$ (quy ước),

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}; \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$$

Nhị thức Newton:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots +$$

$$+ C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^n a^n$$

1.6. Đẳng thức và bất đẳng thức cần dùng

$1^0)$ $$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$2^0)$ $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3°) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

4°) $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ (Cauchy)

5°) $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$

x_i, y_i: tuỳ ý (Cauchy - Bouniakovski)

6°) $(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

x_i cùng dấu, > -1 (Bernoulli)

7°) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $n > 1, x > -1$

8°) $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, $n > 1$

9°) $\left|\sin \sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i$, $0 \leq x_i \leq \pi$, $i = 1, 2, \ldots, n$

10°) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$

11°) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\cos \frac{n+1}{2} x . \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$

12°) $\dfrac{1}{2} + \cos 2x + \ldots + \cos 2nx = \dfrac{\sin(2n + 1)x}{2 \sin x}$

BÀI TẬP

1. Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh:

1) $n^{n+1} > (n + 1)^n$ $n \geq 3$

2) $x_1 . x_2 \ldots x_n = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots x_n \geq n$

$x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$

3) $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ chia hết cho 19

4) $S_n = \text{arctg}\frac{1}{2} + \text{arctg}\frac{1}{8} + \ldots + \text{arctg}\frac{1}{2n^2} = \text{arctg}\frac{n}{n+1}$

Bài giải

1) $n = 3$: $3^{3+1} > (3 + 1)^3$ đúng

Giả sử: $n^{n+1} > (n + 1)^n$ đúng, nhân hai vế bất đẳng thức này với $\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}$ ta được:

$$(n + 1)^{n+2} > \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}}$$

mặt khác: $$\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}} > (n + 2)^{n+1}, \text{ vì}$$

$$(n + 1)^{2(n+1)} - n^{n+1}(n + 2)^{n+1} =$$

$$= (n^2 + 2n + 1)^{n+1} - (n^2 + 2n)^{n+1} > 0$$

Vậy $(n + 1)^{n+2} > (n + 2)^{n+1}$

2) $n = 1$, từ $x_1 = 1$, ta có $x_1 \geq 1$: đúng

Giả sử điều khẳng định đúng với $n = k$.

Xét $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} > 0$ và $x_1 . x_2 \ldots x_k . x_{k+1} = 1$.

Có thể xảy ra hai trường hợp: hoặc $x_1 = x_2 = \ldots x_k = x_{k+1} = 1$ khi đó: $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$ là đúng, hoặc trong các số đó có một số khác 1, chẳng hạn $x_k > 1$ khi đó phải có ít nhất một số khác, chẳng hạn: $x_{k+1} < 1$.

Bây giờ xét k số:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k.x_{k+1}$$

Theo giả thiết quy nạp:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k$$

Do đó:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1}$$
$$= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1})$$
$$= k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) \geq k + 1$$

(Chú ý: Dấu = chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$).

3) $n = 1$: $5 \cdot 2^{3.1-2} + 3^{3.1-1} = 10 + 9 = 19$: đúng

Giả sử $n = k$: $5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}$ chia hết cho 19. Khi đó:

$$5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 8 \cdot 5 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1}$$

$= 8(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1}$, theo giả thiết quy nạp, tổng này chia hết cho 19.

4) $n = 1$: $S_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+1} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$: đúng

Giả sử $S_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$: đúng

Xét $S_{n+1} = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2(n+1)^2}$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{2(n+1)^2}} = \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2}$$

$$\left(\operatorname{arctg}a + \operatorname{arctg}b = \operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

Vậy công thức đúng $\forall n \in N$.

2. Chứng minh

1) $$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n}, \; x_i \geq 0$$

2) $$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n}, \quad x_i > 0$$

*3) $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Bài giải

1) Xét $x_i > 0$ ($i = 1, 2, ..., n$), (trường hợp một trong các số bằng 0 hoặc mọi số bằng 0 thì bất đẳng thức hiển nhiên là đúng).

Xét các số:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}, \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}, ..., \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}$$

rõ ràng tích của chúng bằng 1, áp dụng bài 1.2) ta có:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}} \ge n$$

Do đó, ta có: 1) Rõ ràng dấu = chỉ xảy ra khi và chỉ khi:

$$x_1 = x_2 = ... = x_n$$

2) Áp dụng 1) với các số $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$ ta được:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n}$$

3) Xét $$\sum_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2 \ge 0$$

hay $$t^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ge 0$$

Vế trái là một tam thức bậc hai với biến t, tam thức ≥ 0 khi:

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq 0$$

do đó ta có 3).

Dấu = chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x_i t + y_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ nghĩa là tồn tại $\lambda \neq 0$ sao cho $y_i = \lambda x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ hoặc mọi x_i hoặc mọi y_i đều bằng 0 $(i = 1, 2, ..., n)$.

§2. TẬP HỢP CÁC SỐ THỰC

Tập hợp số tự nhiên:

$$N = \{1, 2, ..., n, ...\}$$

Tập hợp số nguyên:

$$Z = \{ ... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

Tập hợp số hữu tỉ:

$$Q = \{x = \frac{p}{q}, p, q \in Z, q \neq 0\}$$

Tập hợp số thực R, các phần tử là các số thực.

Trị số tuyệt đối của số thực:

$$|x| = \begin{cases} x & : \ x \geq 0 \\ -x & : \ x < 0 \end{cases}$$

$\forall x, y \in R$:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$|x| \leq M \ (M > 0) \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

$$|x.y| = |x| . |y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

$A \subset R$ gọi là bị chặn trên (dưới, bị chặn) $\Leftrightarrow \exists c \in R, \forall x \in A$: $x \leq c$ ($\geq c$, $|x| \leq c$ $(c > 0)$).

$M(m) \in R$ gọi là supremum (infimum) của $A \subset R$, ký hiệu $M = \sup A$ ($m = \inf A$)

$\Leftrightarrow 1^0$ $\quad \forall x \in A; x \leq M$ ($\geq m$)

2^0 $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > M - \varepsilon$ ($< m + \varepsilon$)

Tập hợp các số thực R thỏa mãn mọi tính chất của tập hợp các số hữu tỉ Q, ngoài ra còn thoả mãn tính chất sau đây gọi là tiên đề liên tục của R (tiên đề supremum).

Tiên đề Supremun: Mọi $A \subset R$. $A \neq \varnothing$ bị chặn trên (dưới) đều có supremun (infimum) trong R.

Tập hợp R cũng gọi là đường thẳng số thực R.

Ký hiệu $R = (-\infty, +\infty)$. Trong R:

Đoạn $\quad [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

Khoảng $\quad (a, b) = \{x : a < x < b\}$

$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$

Ta gọi lân cận của điểm $x_0 \in R$ là khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$.

Theo định nghĩa $Q \subset R$. Số thực x không phải là số hữu tỉ, gọi là một số vô tỉ. $R = Q \cup I$, I : tập hợp các số vô tỉ .

Nếu $M = \sup A$ ($m = \inf A$) $\in A$ thì M(m) gọi là phần tử lớn (nhỏ) nhất của A.

BÀI TẬP

3. Chứng minh:

1) $\big||a| - |b|\big| \le |a - b| \le |a| + |b|$

2) $|a + a_1 + a_2 + ... + a_n| \ge |a| - (|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|)$

Bài giải

1) $|a - b| = |a + (-b)| \le |a| + |-b| \le |a| + |b|$

mặt khác $a = a - b + b \Rightarrow |a| \le |a - b| + |b|$

$\Rightarrow |a - b| \ge |a| - |b|$; $b = b - a + a \Rightarrow |b| \le |a - b| + |a|$

$\Rightarrow |a - b| \ge |b| - |a| = -(|a| - |b|)$ vậy $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$

và $\big||a| - |b|\big| \le |a - b| \le |a| + |b|$ (đ.c.m).

2) Đặt $y = a_1 + a_2 + ... + a_n$

$|a + a_1 + a_2 + ... + a_n| = |a - (-y)| \ge |a| - |-y| = |a| - |y|$

Mặt khác: $|y| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$

vậy: $|a + a_1 + a_2 + ... + a_n| \ge |a| - (|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|)$.

***4.** Chứng minh

1) $\forall a, b \in R, a > 0 \Rightarrow \exists n \in N : na > b$

(Tính chất Archimede)

2) $\forall a, b \in R, a < b \Rightarrow \exists r \in Q : a < r < b$

(Tính trù mật của Q trong R).

Bài giải

1) Giả sử ngược lại: $\forall n \in N : na \le b$.

Khi đó $A = \{x = na, \forall n \in N\}$ bị chặn trên bởi b.

Theo tiên đề sup có M = sup A : $\forall\varepsilon > 0, \exists m \in N, ma \in A$, $M - \varepsilon < ma$. Vì $a > 0$ nên $M > 0$ lấy $\varepsilon = \frac{M}{2}$ thì :

$$M - \frac{M}{2} < ma$$

hay $\quad M < 2ma \in A$:

Chứng tỏ M không phải là sup A, vô lý.

2) Theo 1) thì: $\exists n \in N : n \,.\, 1 > \frac{1}{b-a}$

hay $\frac{1}{n} < b - a$, lại theo 1) : $\exists p \in N$

$p \,.\, 1 > n.b$. Gọi p' là số bé nhất sao cho:

$$\frac{p'}{n} \geq b \text{ thì } \quad p' - 1 \leq nb \qquad \text{hay} \quad \frac{p'-1}{n} < b$$

Từ đó: $\quad \frac{p'-1}{n} = \frac{p'}{n} - \frac{1}{n} > b - (b - a) = a$

và $a < \frac{p'-1}{n} < b$, nghĩa là $\exists r = \frac{p'-1}{n} \in Q : a < r < b$

Chú ý: Tính chất trù mật của R: $\forall a, b \in R, a < b \Rightarrow \exists c \in R$: $a < c < b$

*5. Cho $A = \{x\}$, $B = \{-x\}$ chứng minh:

1) inf B = - sup A

2) sup B = - inf A

Bài giải

1) Nếu A bị chặn trên thì B bị chặn dưới vì từ $x \leq M \Rightarrow -x \geq -M$. Do đó sự tồn tại sup A suy ra sự tồn tại inf B.

Giả sử sup A = M nghĩa là: $\forall x \in A : x \leq M$

và $\forall\varepsilon > 0, \exists x \in A$: $M - \varepsilon < x \leq M$, khi đó; $-x \geq -M$

và $-M \leq -x < -M + \varepsilon$ với $-x' \in B$ nghĩa là

$$\inf B = -M = -\sup A$$

2) Chứng minh tương tự như 1)

***6.** Cho $A = \{x\}$, $B = \{y\}$, $C = \{x + y\}$, $D = \{x . y\}$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

Chứng minh:

1) $\inf C = \inf A + \inf B$
2) $\sup C = \sup A + \sup B$
3) $\sup D = \sup A . \sup B$
4) $\inf D = \inf A . \inf B$

Bài giải

1) Giả sử A, B bị chặn dưới, khi đó tồn tại:

$$m_1 = \inf A, \quad m_2 = \inf B$$

Theo định nghĩa: $\forall x \in A : x \geq C_1$

$\forall y \in B : y \geq C_2$

Do đó $\forall(x + y) \in C : x + y \geq C_1 + C_2$, nghĩa là C bị chặn dưới, vậy tồn tại inf C.

Theo định nghĩa của inf : $\forall x \in A : x \geq m_1$

$\forall y \in B : y \geq m_2$

Vậy $\forall(x + y) \in C : x + y \geq m_1 + m_2$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : \quad m_1 \leq x < m_1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\exists y \in B : \quad m_2 \leq y < m_2 + \dfrac{\varepsilon}{2}$

Vậy $m_1 + m_2 \leq x + y \leq m_1 + m_2 + \varepsilon$

nghĩa là $\inf C = m_1 + m_2$.

2) Chứng minh tương tự 1).

3) Từ $x \le C_1$, $y \le C_2$, do $x, y \ge 0$.

nên $xy \le C_1C_2$: nghĩa là sự tồn tại của sup A, sup B kéo theo sự tồn tại của sup D.

Giả sử $M_1 = \sup A$, $M_2 = \sup B$

nghĩa là: $\forall x \in A : x \le M_1$

$\forall y \in B : y \le M_2$

Do đó $\forall (x.y) \in D : xy \le M_1M_2$ (do $x, y \ge 0$).

$\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists x \in A : M_1 - \varepsilon_1 < x \le M_1$

$\forall \varepsilon_2 > 0 : \exists y \in B : M_2 - \varepsilon < y \le M_2$

Do đó: $(M_1 - \varepsilon_1)(M_2 - \varepsilon_2) < x.y \le M_1.M_2$

$M_1M_2 - (\varepsilon_2M_1 + \varepsilon_1M_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2) < x.y \le M_1.M_2$

Rõ ràng $\varepsilon_2M_1 + \varepsilon_1M_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon > 0$.

Vậy $\sup D = M_1 . M_2$.

4) Chứng minh tương tự như 3).

*7. Cho 1) $A = \{x = \frac{m}{n}, m, n \in N, 0 < m < n\}$

2) $B = \{x, x \in Q, x > 0 : x^2 < 2\}$

3) $C = \{x : x = \frac{n-1}{n+1}, n \in N\}$

A, B, C có các phần tử nhỏ (lớn) nhất không?

Tìm sup, inf của chúng.

Bài giải

1) Theo giả thiết thì $0 < \frac{m}{n} < 1$.

$\forall m, n \in N$, tồn tại $m', n' \in N$ sao:

$$0 < \frac{m'}{n'} < \frac{m}{n}, \text{ chẳng hạn } m' = m, n' > n$$

Nghĩa là A không có phần tử nhỏ nhất.

Rõ ràng A cũng không có phần tử lớn nhất.

Vì $\forall m, n \in N$, $m < n$, theo tính chất Archimède (bài 4.1)

$$\exists p \in N : p \,.\, 1 > \frac{1}{1 - \frac{m}{n}} \quad \text{hay} \quad \frac{m}{n} + \frac{1}{p} < 1.$$

$$\frac{m}{n} + \frac{1}{p} > \frac{m}{n}$$

Rõ ràng inf A = 0.

Vì $\forall x = \frac{m}{n} \in A : x > 0$.

và $\forall m \in N$. $\exists n' \in N : n' > m$.

và $\forall \varepsilon > 0$ theo (4.1) $\exists n'' \in N : n'' > \frac{m}{\varepsilon}$

Gọi $n = \max(n', n'')$ thì $n > m$ và $n > \frac{m}{\varepsilon}$ hay $x = \frac{m}{n} < \varepsilon + 0$, vậy inf A = 0.

Rõ ràng sup A = 1 vì $\forall x \in A$, $x = \frac{m}{n} < 1$ (do $m < n$) và $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p \in N$ (theo bài 4.1) $\exists m \in N$.

$m > \frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$ hay $\frac{m}{p+m} > 1 - \varepsilon$ nghĩa là với $n = m + p$ ta có $\frac{m}{n} > 1 - \varepsilon$, vậy sup A = 1.

Rõ ràng inf A = 0 $\overline{\in}$ A, sup A = 1 $\overline{\in}$ A.

2) Rõ ràng B bị chặn trên (bởi 2 chẳng hạn: $x^2 < 2 < 2^2 = 4$).

Từ $x^2 < 2$, $\exists n \in N : \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$

hay $$x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 \Rightarrow \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - x^2$$

Bất đẳng thức này thoả mãn nếu:

$$\frac{2x+1}{n} < 2 - x^2 \qquad \left(\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{2x+1}{n}\right)$$

hay $n > \dfrac{2-x^2}{2x+1}$, bất phương trình này luôn luôn có nghiệm (theo bài 4.1). Vậy B không có phần tử lớn nhất.

Có thể chứng minh sup A = M, $M^2 = 2$, M $\overline{\in}$ Q. (*Giải tích* I của tác giả).

3) Rõ ràng $\forall x \in C : 0 \le x < 1$ chứng minh tương tự như 1)

sup C = 1 $\overline{\in}$ C, inf C = 0 $\in$ C

§3. DÃY SỐ THỰC - GIỚI HẠN

3.1. Định nghĩa

Dãy số thực $(x_n) = (f(n))$, $\forall n \in N$ là một ánh xạ:

$f : N \to R$ (ta cũng ký hiệu: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ hay (x_n) hay x_n.

Dãy (x_n) gọi là bị chặn trên (dưới, bị chặn), nếu tập hợp $\{x_n\}$ là bị chặn trên (dưới, bị chặn).

Dãy (x_n) gọi là đơn điệu không giảm (tang) nếu:

$$\forall n \in N \qquad x_n \le x_{n+1} \quad (\ge x_{n+1})$$

Nếu không có dấu = thì gọi là đơn điệu tăng (giảm).

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ hay } a = \lim x_n \text{ hay } x_n \to a.$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$+\infty\ (-\infty) = \lim x_n \text{ hay } x_n \to +\infty\ (-\infty)$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > M\ (< -M).$$

3.2. Tính chất và phép toán

1^0) $x_n \to a,\ x_n \to a' \Rightarrow a' = a$

2^0) $x_n \to a \Leftrightarrow (x_n - a) \to 0$

3^0) $x_n = c\ \forall n \in N \Rightarrow x_n \to c$

4^0) $x_n \to a \Rightarrow x_n$ bị chặn

5^0) $x_n \to a,\ a > p\ (< q) \Rightarrow \exists n_0, \forall n > n_0 : x_n > p\ (< q).$

6^0) $x_n \to a, \exists n_0, \forall n > n_0 : x_n \le p\ (\ge q) \Rightarrow a \le p\ (\ge q).$

7^0) $x_n \to a,\ y_n \to b \Rightarrow x_n \pm y_n \to a \pm b,\ x_n y_n \to ab,$

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b} \quad (b \ne 0)$$

3.3. Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

1^0) $x_n \to a,\ z_n \to a,\ \forall n : x_n \le y_n \le z_n$

$$\Rightarrow y_n \to a \text{ (tiêu chuẩn kẹp)}$$

2^0) Mọi dãy (x_n) đơn điệu không giảm (tăng) và bị chặn trên (dưới) đều có giới hạn và $x_n \le (\ge) \lim x_n$ (nguyên lý Weierstrass).

3^0) Dãy (x_n) có giới hạn khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \forall m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Dãy (x_n) thoả mãn điều kiện này gọi là một dãy cơ bản (nguyên lý Cauchy).

Một dãy có giới hạn cũng gọi là dãy hội tụ, ngược lại thì gọi là dãy phân kỳ.

Số e: $$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$\log_e x = \ln x$ gọi là logarithme neper hay logarithme tự nhiên.

Chú ý: Tập hợp $\widetilde{R} = R \cup (+\infty) \cup (-\infty)$ gọi là tập hợp các số thực mở rộng: $+\infty$ $(-\infty)$ ký hiệu chung là ∞.

BÀI TẬP

8. Chứng minh

1) $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 0$

2) $\lim \frac{2n+1}{n+2} = 2$

3) $\lim \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$

4) $\lim \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$

Bài giải

1) $\forall\varepsilon > 0$, theo bài 4.1): $\exists n_0 \in N : n_0 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

hay $\frac{1}{n_0^2} < \varepsilon$, do đó $\forall n > n_0 : \frac{1}{n^2} < \varepsilon$ hay $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$,

chứng tỏ: $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 0$.

2) $\forall\varepsilon > 0$, xét: $|x_n - 2| = \left|\dfrac{2n+1}{n+2} - 2\right| = \left|-\dfrac{3}{n+2}\right| < \dfrac{3}{n} < \varepsilon$

Từ $\dfrac{3}{n} < \varepsilon$ suy ra $n > \dfrac{3}{\varepsilon}$, bất phương trình này luôn có nghiệm theo bài 4.1) lấy $n_0 = E(\dfrac{3}{\varepsilon})$

(E(x): phần nguyên của x, $E(x) \le x$) thì $\forall n > n_0$, theo trên ta có:

$$|x_n - 2| < \varepsilon, \text{ nghĩa là } \lim \frac{2n+1}{n+2} = 2$$

3) $\forall\varepsilon > 0$, xét:

$|x_n - 0| = \left|\dfrac{2+(-1)^n}{n}\right| \le \dfrac{3}{n} < \varepsilon$ lý luận như 2), ta có $\lim x_n = 0$.

4) $\forall\varepsilon > 0$, xét:

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}\right| <$$

$$< \frac{5n}{9n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon; \qquad n > 2.$$

lý luận tương tự như 2) ta có $\lim x_n = \dfrac{1}{3}$.

*9. Chứng minh

1) $x_n \to a$, $y_n \to b$, $\forall n : x_n \le y_n \Rightarrow a \le b$

2) $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to |a|$

3) $x_n = (-1)^n$ phân kỳ

4) $x_n = \sin n$ phân kỳ

Bài giải

1) Giả sử ngược lại a > b, theo tính trù mật của R : $\exists c \in R$: $a > c > b$.

Theo giả thiết và 5^0 ở §3: $\exists n_0, \forall n > n_0 : x_n > c, y_n < c \Rightarrow y_n < x_n$: mâu thuẫn với giả thiết.

2) Theo giả thiết: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

mặt khác: $\left||x_n| - |a|\right| \leq |x_n - a|$ (3.1)

do đó: $\left||x_n| - |a|\right| < \varepsilon$ và $|x_n| \to |a|$

3) $x_{2m} = (-1)^{2m} = 1 \to 1$

$x_{2m+1} = (-1)^{2m+1} = -1 \to -1$

Theo 1^0 (3.2) x_n không có giới hạn, nghĩa là x_n phân kỳ.

4) Giả sử ngược lại $x_n = \sin n$ hội tụ, khi đó $\sin(n+2) - \sin n \to 0$

$\Rightarrow 2\sin 1\cos(n + 1) \to 0 \Rightarrow \cos n \to 0 \Rightarrow \cos 2n \to 0$

Mặt khác $\sin 2n = 2\sin n\cos n \to 0$, vậy:

$\cos^2 2n + \sin^2 2n \to 0$: vô lý, do đó $x_n = \sin n$ phân kỳ.

10. Chứng minh

1) $\lim\left(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}\right) = 0$, $k > 1$ $(\in N)$

2) $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$, $a > 0$

3) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

4) $\lim \sqrt[n]{1 + 2 + ... + n} = 1$

5) $\lim \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty$, $a > 1$, $k > 0$

Bài giải

1) Ta có:

$$0 < \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n} = \frac{1}{\sqrt[k]{(n+1)^{k-1}} + \ldots + \sqrt[k]{n^{k-1}}} < \frac{1}{\sqrt[k]{n^{k-1}}}$$

(Nhân và chia với lượng liên hợp của $\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}$).

nhưng $0 \to 0$, $\dfrac{1}{\sqrt[k]{n^{k-1}}} \to 0$, do đó theo tiêu chuẩn kẹp (3.3):

$$\lim \left(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}\right) = 0$$

2) Xét $a > 1$, ta có:

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{a-1}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \ldots + 1} < \frac{a-1}{n}$$

Lý luận tương tự như 1), ta có $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Xét $a < 1$, đặt $a' = \dfrac{1}{a} > 1$ thì $a^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a'^{\frac{1}{n}}}$ theo trên $a'^{\frac{1}{n}} \to 1$

theo tính chất (3.2), $a^{\frac{1}{n}} \to \dfrac{1}{1} = 1$.

3) Xét: $\left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(1 + \sqrt[n]{n} - 1\right)^n =$

$$= 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \ldots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

(khai triển theo nhị thức Newton (1.5) $x = 1$, $a = \sqrt[n]{n} - 1$).

Từ đó:

$$n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

(bỏ các số hạng dương ở vế phải, chỉ để lại số hạng thứ ba)

hay $$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}, \; n > 1$$

nhưng $0 \to 0$, $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \to 0$.

Vậy theo (3.3) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

4) Theo (1.6) $$\sqrt[n]{1+2+...+n} = \sqrt[n]{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^{\frac{1}{n}}}.\sqrt[n]{n+1} =$$

$$= \frac{\sqrt[n]{n}}{2^{\frac{1}{n}}}.\left[(n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}}$$

Theo 2), 3) ta có: $\sqrt[n]{1+2+...+n} \to \dfrac{1}{1}(1)^1 = 1$.

5) Đặt $a = 1 + \lambda \Rightarrow \lambda = a - 1$.

Tương tự như 3) ta có:

$$a^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2, \text{ hay } \frac{a^n}{n} > \frac{n-1}{2}(a-1)^2$$

nhưng $$\frac{n-1}{2}(a-1)^2 \to +\infty, \text{ vậy } \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$

$$\frac{a^n}{n^k} = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}\right]^k \to +\infty \text{ vì } \frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n} \to +\infty$$

(theo trên, $a^{\frac{1}{k}} > 1$).

Chú ý: Rõ ràng: $a^n \to +\infty$ $(a > 1)$, $n^k \to +\infty$ $(k > 0)$ nên $\frac{a^n}{n^k}$ có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

11. Tìm

1) $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

2) $\lim \frac{a^n}{n!}$

3) $\lim \sqrt[k]{1+x_n}$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ và $\forall n : x_n \geq -1$

4) $\lim \frac{1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2}{n^3}$

Bài giải

1) Theo (1.6): $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$

Do đó $0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{3}{n}$ và $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

2) Xét: $0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\ldots\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\ldots\frac{|a|}{n}$

$$< \frac{|a|^m}{m!}\cdot\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} < \frac{|a|^m}{m!}\cdot\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^n$$

Giả sử $m + 1 > |a|$, điều giả thiết này hợp lý vì theo 4.1) luôn luôn tồn tại $m \in \mathbb{N}$ như vậy, do đó $\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^n \to 0$ và $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

3) Nếu $x_n \geq 0$ thì:

$$1 \leq \sqrt[p]{1+x_n} \leq \left(\sqrt[p]{1+x_n}\right)^p = 1 + x_n = 1 + |x_n|,$$

nếu $-1 \leq x_n < 0$ thì:

$$1 \geq \sqrt[p]{1+x_n} \geq \left(\sqrt[p]{1+x_n}\right)^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|$$

do đó: $\forall x_n \geq -1$ ta có:

$$1 - |x_n| \leq \sqrt[p]{1+x_n} \leq 1 + |x_n|$$

Theo giả thiết và theo tiêu chuẩn (3.1) ta có $\lim \sqrt[p]{1+x_n} = 1$.

4) Ta có: $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2 +$

$$+ (2n+1)^2 - (2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2) =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} - \frac{2^2.n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(theo 6.1).

Vậy $\lim \dfrac{1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2}{n^3} = \dfrac{8}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3}$.

12.* 1) Cho (x_n) hội tụ, (y_n) phân kỳ

(x_n, y_n cùng phân kỳ) thì tổng $x_n + y_n$, tích $x_n.y_n$ hội tụ hay phân kỳ?

2) Cho $x_n . y_n \to 0$ thì có thể kết luận $x_n \to 0$ hoặc $y_n \to 0$?

3) Cho $x_n \to 0$, y_n tuỳ ý thì $x_n . y_n \to 0$?

Bài giải

1) Xét tổng $x_n + y_n$, giả sử tổng này hội tụ, khi đó:

$(x_n + y_n) - x_n = y_n$ hội tụ, trái với giả thiết, vậy $x_n + y_n$ phân kỳ.

Xét tích $x_n \cdot y_n$, không thể kết luận dứt khoát tích này hội tụ hay phân kỳ, chẳng hạn $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ, $y_n = n$ phân kỳ khi đó $x_ny_n = (-1)^n$ phân kỳ.

$x_n = \frac{1}{n^2}$ hội tụ, $y_n = n$ phân kỳ, $x_ny_n = \frac{1}{n}$ hội tụ

(x_n, y_n cùng phân kỳ thì $x_n + y_n$, x_ny_n không thể kết luận dứt khoát là hội tụ hay phân kỳ, chẳng hạn $x_n = n$, $y_n = n^2$ đều phân kỳ, tổng $x_n + y_n = n + n^2$ phân kỳ, $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = -\sqrt{n}$

$$x_n + y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ hội tụ}$$

Trường hợp tích x_ny_n: $x_n = n$, $y_n = n^2$: phân kỳ

$x_ny_n = n^3$ phân kỳ

$x_n = 1 - (-1)^n$, $y_n = 1 + (-1)^n$: phân kỳ $x_ny_n = 1 - (-1)^{2n} = 0$! hội tụ).

2) Không thể kết luận $x_n \to 0$ hoặc $y_n \to 0$ vì $x_n = 1 - (-1)^n$, $y_n = 1 + (-1)^n$, $x_n . y_n = 0 \to 0$, nhưng x_n, y_n không dần tới 0.

3) Không thể kết luận $x_ny_n \to 0$, chẳng hạn:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0 \qquad y_n = n.$$

$x_ny_n = (-1)^n$ phân kỳ, không dần tới 0.

13. Dùng nguyên lý Weierstrass (W), xét sự hội tụ của các dãy:

1) $x_n = \frac{a^n}{n!}$ $\quad (a > 0)$

2) $x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$ $\quad (0 \le a_i \le 9,\ i = 1, 2, \ldots, n)$

3) $x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

4) $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

Bài giải

1) Xét $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1}$

rõ ràng $\exists\, n_0 \in N, \forall n > n_0 : n + 1 > a$

do đó $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ hay $x_{n+1} < x_n$

Vậy dãy x_n là đơn điệu giảm, rõ ràng $x_n > 0$ nghĩa là dãy x_n bị chặn dưới, theo tiêu chuẩn (W), x_n là dãy hội tụ.

(Theo trên $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{a}{n+1}$, giả sử $x_n \to l$ thì $x_{n+1} \to l$ và: $l = l.0$, suy ra $l = 0$).

2) Xét $x_{n+1} - x_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} > 0 \Rightarrow x_n < x_{n+1}$: x_n là dãy đơn điệu tang.

Mặt khác $x_n < a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} + \ldots = a_0 + \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} =$

$= a_0 + 1.$

Vậy x_n bị chặn trên.

Do đó theo tiêu chuẩn(W): $\lim x_n$ tồn tại.

3) Xét $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) < 1$

$x_{n+1} < x_n$: vậy x_n là đơn điệu giảm, mặt khác $\forall n : x_n > 0$ (tích của các số dương) nghĩa là x_n bị chặn dưới, theo tiêu chuẩn (W): $\lim x_n$ tồn tại.

4) Xét $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \dfrac{1}{2^{n+1}} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$: x_n là đơn điệu tăng.

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy:

$$x_n \leq \frac{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)^n}{n^n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

(Theo chứng minh sự tồn tại của số e (Giải tích I, C2, tác giả).

Vậy x_n bị chặn trên, theo tiêu chuẩn (W): $\lim x_n$ tồn tại.

※14.

1) Cho x_n đơn điệu tăng, y_n đơn điệu giảm và $\lim(x_n - y_n) = 0$. Chứng minh x_n, y_n là các dãy hội tụ và $\lim x_n = \lim y_n$.

2) Áp dụng 1) chứng minh:

$$\lim\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \lim\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\,n}\right) = e$$

Bài giải

1) Đặt $Z_n = x_n - y_n$

Xét $Z_{n+1} - Z_n = (x_{n+1} - y_{n+1}) - (x_n - y_n) = (x_{n+1} - x_n) + (y_n - y_{n+1}) > 0$, theo giả thiết.

Vậy Z_n là dãy đơn điệu tăng, cũng theo giả thiết $Z_n \to 0$, theo tiêu chuẩn (W): $Z_n \leq 0$. Do đó: $\forall n : x_n < y_n$, hay:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y_n < y_{n-1} < \ldots < y_1$$

Điều này chứng tỏ x_n (y_n) là dãy đơn điệu (tăng) giảm và bị chặn trên (dưới) (bởi y_1 (x_1) chẳng hạn), theo tiêu chuẩn (W): $\lim x_n$ ($\lim y_n$) tồn tại và theo giả thiết: $\lim x_n = \lim y_n$.

2) Đặt $$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\,n} = x_n + \frac{1}{n!\,n}$$

Rõ ràng x_n là đơn điệu tăng vì:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$$

y_n là dãy đơn điệu giảm vì:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!\,n}$$

$$= \frac{(n+1).n + n}{(n+1)!(n+1)n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)!(n+1)n}$$

$$= \frac{-1}{(n+1)!(n+1)n} < 0 \Rightarrow y_n > y_{n+1}$$

Xét $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!\,n} = 0$

Vậy theo 1) $\lim x_n = \lim y_n$.

Ta sẽ chứng minh $\lim x_n = e$. Thực vậy, ta biết $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Đặt $t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, khai triển theo nhị thức Newton:

$$t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n} >$$

$$> 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right), \forall k \le n.$$

Cho $n \to +\infty$

$$e \ge 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{k!} = x_k, \forall k \le n$$

đặc biệt $e \ge 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!} = x_n$

mặt khác $t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!} = x_n$

Do đó: $t_n < x_n \le e$, nhưng $\lim t_n = e$.

Vậy theo tiêu chuẩn kẹp (3.3) $\lim x_n = e$.

15. Chứng minh các dãy sau đây hội tụ và tìm giới hạn của chúng

1) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$

2) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$

3) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$

* 4) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$

* 5) $x_1 = p$, $y_1 = q$ $(p, q \ge 0)$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$

Bài giải

1) Vì $x_1 > 0$ nên $x_n > 0$, $\forall n \in N$ và $x_n + \frac{1}{x_n} \ge 2$ do đó $x_{n+1} \ge 1$, vậy dãy x_n bị chặn dưới.

Mặt khác: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \le \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n$, $\forall x_n > 1$. Vậy x_n đơn điệu không tăng, theo tiêu chuẩn (W), $\lim x_n$ tồn tại.

Giả sử $x_n \to a$, khi đó: từ $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$ ta có:

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \text{ hay } a = 1.$$

2) Xét $x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - x_n = 2 - \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$

nhưng $x_1 = 2$ nên $\forall n : x_n > 0$ và $x_n + \frac{1}{x_n} \ge 2$, do đó: $x_{n+1} - x_n \le 0$ và $x_{n+1} \le x_n$: x_n đơn điệu không tăng.

Mặt khác: $\forall n \in N : x_n > 1$.

Thực vậy, dùng phương pháp quy nạp:

$$x_1 = 2 > 1, \text{ giả sử } x_n > 1$$

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) > 1$$

Do đó x_n là bị chặn dưới, theo tiêu chuẩn (W): $\lim x_n$ tồn tại, giả sử $x_n \to a$, khi đó từ:

$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ ta có $a = 2 - \frac{1}{a}$ hay $a = 1$: Thoả mãn điều kiện trên.

3) $\forall n \in N$ từ $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, suy ra:

$$x_{n+2}^2 = 6 + x_{n+1}, \quad x_{n+1}^2 = 6 + x_n \qquad (1)$$

$$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n \qquad (2)$$

Ta sẽ chứng minh x_n là dãy đơn điệu tăng bằng quy nạp.

Thực vậy $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{6} > x_1$

Giả sử $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in N$, khi đó từ (2) suy ra:

$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 > 0$, vì $x_{n+1} > 0$, $\forall n \in N$ nên $x_{n+2} - x_{n+1} > 0$ nghĩa là $x_{n+2} > x_{n+1}$. Vậy $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in N$: x_n đơn điệu tăng.

Rõ ràng x_n bị chặn trên, thực vậy:

Từ $x_n \geq 0$ và $x_n^2 < x_{n+1}^2 < 6 + x_n$, $\forall n \in N$

hay $x_n^2 - x_n - 6 < 0$, khi $x_n < 3$.

Vậy theo tiêu chuẩn (W), $\lim x_n$ tồn tại.

Giả sử $x_n \to a$, từ (1): $a^2 = 6 + a$ hay $a = 3$.

4) Bằng quy nạp, ta chứng minh x_n là dãy tăng, thực vậy: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > x_1$ đúng

Giả sử $x_{n+1} > x_n$ hay $x_{n+1} - x_n > 0$.

Xét $x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = (x_{n+2} + x_{n+1})(x_{n+2} - x_{n+1}) =$

$$= 2 + x_{n+1} - 2 - x_n = x_{n+1} - x_n > 0,$$

theo giả thiết quy nạp, do $x_n > 0$, $\forall n \in N$, suy ra $x_{n+2} - x_{n+1} > 0$ hay $x_{n+2} > x_{n+1}$.

Vậy $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in N$.

x_n là dãy bị chặn trên, thực vậy:

$x_1 < \sqrt{2} + 1$, giả sử $x_n < \sqrt{2} + 1$

thì $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+\sqrt{2}+1} < \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$.

Vậy $x_n < \sqrt{2} + 1$, $\forall n \in N$.

Theo tiêu chuẩn (W) $\lim x_n$ tồn tại.

Giả sử $x_n \to a$, khi đó từ $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ ta có $a = \sqrt{2+a}$ hay $a = 2$ thoả mãn điều kiện $\forall n$:

$$x_n < \sqrt{2} + 1$$

5) Từ các điều kiện của bài toán ta có:

$x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ ($\forall n \in N$), áp dụng bất đẳng thức:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \ a, b \geq 0$$

ta có: $$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geq \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}$$

do đó: $$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n^2} = x_n$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq y_n$$

Vậy x_n đơn điệu không giảm, y_n đơn điệu không tăng. Mặt khác, cũng theo trên:

$$x_n \leq y_n \leq \ldots \leq y_1$$

$$y_n \geq x_n \geq \ldots \geq x_1$$

Do đó x_n bị chặn trên, y_n bị chặn dưới.

Theo tiêu chuẩn (W), $\lim x_n$, $\lim y_n$ tồn tại.

Giả sử $x_n \to a$, $y_n \to b$ thì từ: $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ ta có:

$$b = \frac{a+b}{2} \text{ hay } a - b = 0 \text{ và } a = b.$$

16.

*1) Chứng minh $x_n \to a \Rightarrow y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \to a$

2) Chứng minh $x_n \to a \Rightarrow z_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \to a \ (x_n > 0)$

3) Chứng minh $x_n > 0$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to a \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} \to a$

4) Áp dụng 1) 2) 3). Tìm:

$$\lim \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n}$$

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \ \lim a^{\frac{1}{n}}, \ a > 0$$

Bài giải

1) Theo giả thiết $x_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, |x_n - a| < \varepsilon$.

Xét: $$|a - y_n| = \left| \frac{an_0}{n} - \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n_0}}{n} + \frac{(a - x_{n_0+1}) + ... + (a - x_n)}{n} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{an_0}{n} \right| + \left| \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n_0}}{n} \right| + \left| \frac{(a - x_{n_0+1}) + ... + (a - x_n)}{n} \right|$$

Hai số hạng đầu của vế phải dần tới 0 là hiển nhiên, số hạng thứ ba:

$$\left| \frac{(a - x_{n_0+1}) + ... + (a - x_n)}{n} \right| \leq \frac{(n - n_0)\varepsilon}{n} = \varepsilon - \frac{n_0\varepsilon}{n} < \varepsilon.$$

(Theo giả thiết). Vậy $\lim y_n = a$.

2) Ta có $z_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ lấy logarithme cơ số e ($\ln x = \log_e x$) hai vế ta có:

$$\ln z_n = \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n}{n}$$

Theo giả thiết $x_n \to a \Rightarrow \ln x_n \to \ln a$. Vậy theo 1): $\ln z_n \to \ln a$ và $z_n \to a$.

3) Xét $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{x_1.\frac{x_2}{x_1}.\frac{x_3}{x_2}...\frac{x_n}{x_{n-1}}} \to a$

vì theo giả thiết: $\lim\frac{x_n}{x_{n-1}} = a$ và theo 2).

4) Đạt $x_n = \sqrt[n]{n}$ vì $x_n = \sqrt[n]{n} \to 1$ (bài 10.3))

nên theo 1): $\lim\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n} = 1$.

Ta có $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{n-1}{n}} \to 1$

vì $\lim\frac{n-1}{n} = 1$ và theo 2)

Đạt $x_n = a$ thì $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1 \to 1$.

Vậy theo 3) $\quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_n} \to 1$.

17. Dùng nguyên lý Cauchy, xét sự hội tụ, phân kỳ của các dãy

1) $x_n = \frac{\sin 1}{3} + \frac{\sin 2}{3^2} + ... + \frac{\sin n}{3^n}$

2) $x_n = \frac{\cos a}{1.2} + \frac{\cos 2a}{2.3} + ... + \frac{\cos na}{n(n+1)}$, $a \in R$.

*3) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$

4) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n}$

Bài giải

1) Xét: $\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\frac{\sin(n+1)}{3^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{3^{n+p}}\right| \le$

$$\le \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{3^p}}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{2.3^n}\left(1-\frac{1}{3^p}\right) < \frac{1}{2.3^n} < \frac{1}{3^n}$$

vì $\lim\frac{1}{3^n} = 0$ nên $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{3^n} < \varepsilon$, do đó $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \forall p \in N : \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$, vậy dãy x_n thoả mãn điều kiện của tiêu chuẩn Cauchy nên $\lim x_n$ tồn tại.

2) Xét

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\frac{\cos(n+1)a}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)a}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)a}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

vì $\lim\frac{1}{n} = 0$ nên $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0$.

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$, do đó $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \forall p \in N$.

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Vậy dãy x_n thoả mãn điều kiện của tiêu chuẩn Cauchy: $\lim x_n$ tồn tại.

3) Xét ε: $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

và $|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| > \frac{p}{n+p}$.

(Thay các số hạng bằng số hạng cuối cùng).

khi $p = n$: $|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2} > \varepsilon$.

Vậy $\exists \varepsilon : 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$: $|x_{n+p} - x_n| > \varepsilon$, nghĩa là dãy x_n không thoả mãn điều kiện của tiêu chuẩn Cauchy:

x_n là dãy phân kỳ.

4) Tương tự như 3):

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)}$$

$$> \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2} > \varepsilon \text{ khi } p = n.$$

Vậy dãy x_n phân kỳ.

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Định nghĩa

- Hàm số của một biến số thực hay một đối số thực: $y = f(x)$ là một ánh xạ $f : X \to Y$; $X, Y \subset R$.

X gọi là miền xác định hay miền tồn tại của hàm số.

Y gọi là miền giá trị của hàm số nếu f là một toàn ánh. Tập hợp $(x, f(x)), \forall x \in X$ gọi là đồ thị của hàm số.

- Cho hàm $y = f(x)$, với f là một song ánh từ $X \to Y$. Ánh xạ ngược f^{-1} của $f : x = f^{-1}(y)$ gọi là hàm ngược của f (miền xác định Y, miền giá trị X).

- Cho các hàm $y = f(x), f : X \to Y$

$z = g(y), g : Y \to Z$

f, g là các toàn ánh.

Ánh xạ hợp $f.g : Z = g[f(x)]$ gọi là hàm hợp của f và g có miền xác định X và miền giá trị Z.

- Hàm $y = f(x)$: có miền xác định X, miền giá trị Y gọi là bị chặn trên (dưới, bị chặn), nếu tập hợp các giá trị Y của nó là bị chặn trên (dưới, bị chặn):

$$M = \sup_{x \in X} f(x) = \sup Y, \quad m = \inf_{x \in X} f(x) = \inf Y$$

Nếu $M(m) \in Y$ thì $M(m)$ gọi là giá trị lớn (bé) nhất của $f(x)$ trong X.

Nếu trong lân cận của x_o, : $M(m) = f(x_o)$ thì M(m) gọi là giá trị cực đại (tiểu) của hàm số tại $x_o \in X$, gọi chung là cực trị: y_{max} (y_{min}) = $f(x_o)$.

- Hàm $y = f(x)$ là đơn điệu không giảm (không tăng) trong X nếu: $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2), (f(x_1) \geq f(x_2))$.

Nếu không có dấu bằng thì f(x) gọi là đơn điệu tăng (giảm) trong X.

- Hàm $y = f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) trong miền X thì tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) trong miền Y là miền giá trị của f(x).

- Hàm $y = f(x)$ là chẵn (lẻ) trong $X = (-\ell, +\ell)$ $(\ell > 0)$ nếu $\forall x \in X : f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = - f(x))$.

- Hàm $y = f(x)$ gọi là tuần hoàn trong X nếu:

$$\exists a \neq 0 : f(x + a) = f(x), \forall x \in X.$$

Số dương T (nhỏ nhất) sao cho $f(x + T) = f(x)$ gọi là chu kỳ (nhỏ nhất) của hàm số.

1.2. Các hàm số sơ cấp cơ bản

1⁰) Hàm luỹ thừa $\quad y = x^\alpha, \alpha \in R$

2⁰) Hàm mũ $\quad y = a^x, a > 0, \neq 1.$

3⁰) Hàm logarithme $\quad y = \log_a x, a > 0, \neq 1.$

Đặc biệt $a = e : y = \ln x$

$$\ln x = \ln a . \log_a x, \quad \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$\ln x = \ln 10 . \lg x, \quad \lg e = \frac{1}{\ln 10}$$

$$\ln x = M \lg x, \quad M = 2{,}302$$

4⁰) Hàm lượng giác

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg}x,\ y = \operatorname{cotg}x.$$

5⁰) Hàm lượng giác ngược

$$y = \arcsin x,\ -1 \le x \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

$$y = \arccos x,\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi$$

$$y = \operatorname{arctg}x,\quad -\infty < x < +\infty,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$y = \operatorname{arccotg}x,\ -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < \pi$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\quad \operatorname{arctg}x + \operatorname{arccotg}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg}x \pm \operatorname{arctg}y = \operatorname{arctg}\frac{x \pm y}{1 \mp xy},\qquad (xy < 1)$$

$$\operatorname{arctg}x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ -\infty < x < +\infty$$

6⁰) Hàm Hyperbole

$$y = \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad y = \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},\qquad y = \operatorname{coth}x = \frac{1}{\operatorname{th}x}$$

$$\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2x} = 1 - \operatorname{th}^2x,\qquad \frac{1}{\operatorname{sh}^2x} = \operatorname{coth}^2x - 1$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y \pm \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y;\quad \operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2x + \operatorname{sh}^2x$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y \pm \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y;\quad \operatorname{sh}2x = 2\operatorname{ch}x.\operatorname{sh}x$$

Hàm sơ cấp là hàm được xác định bằng một công thức duy nhất liên hệ giữa các hàm sơ cấp cơ bản bằng một số hữu hạn các phép tính đại số (cộng, trừ, nhân, chia, lấy luỹ thừa, lấy căn) và các phép lập hàm số hợp.

Chú ý:

Hàm $y = y(x)$ cho bởi phương trình $F(x, y) = 0$ (1) gọi là hàm ẩn của biến x trên tập hợp E. Nếu $\forall x \in E$, phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Theo định nghĩa thì $F[x, y(x)] \equiv 0$ trên E.

BÀI TẬP

18. Tìm miền xác định của các hàm số:

1) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2 - \sqrt{x}}}$

2) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

3) $y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x)]$

4) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x}$

5) $y = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$

Bài giải

1) Hàm số y xác định khi $x \geq 0$ và $x^2 - \sqrt{x} \neq 0$ hay $x \neq 0$ hoặc $x \neq 1$. Vậy hàm số chỉ xác định khi $x > 0$ và $x \neq 1$, nghĩa là miền xác định của hàm số là:

$$X = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

2) Hàm số có nghĩa khi $x \geq 0$ và $\sin\sqrt{x} \geq 0$ hay $2k\pi \leq \sqrt{x} \leq (2k + 1)\pi$, $x \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ và $4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Vậy miền xác định của hàm số là:

$$X = \bigcup_{k=0,1,2,\ldots} [4k^2\pi^2, (2k + 1)^2\pi^2]$$

3) Hàm số xác định khi:

$$1 - \lg(x^2 - 5x) > 0 \text{ và } x^2 - 5x > 0$$

hay $x^2 - 5x - 10 < 0$ và $x^2 - 5x > 0$.

Các bất phương trình này có nghiệm:

$$\frac{5-\sqrt{65}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{65}}{2} \text{ và } x < 0 \text{ hoặc } x > 5$$

Vậy miền xác định của hàm số đã cho là:

$$X = \left(\frac{5-\sqrt{65}}{2}, 0\right) \cup \left(5, \frac{5+\sqrt{65}}{2}\right)$$

4) Hàm số xác định khi:

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1,\ x \neq -1 \qquad (1)$$

Nếu $x < -1$ thì $1 + x < 0$ và bất phương trình (1) viết được:

$$-1 - x \geq 2x \geq x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ vô nghiệm.

Nếu $x > -1$ thì (1) viết được:

$$-1 - x \leq 2x \leq x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy miền xác định của hàm số đã cho là: $X = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

5) Hàm số xác định khi $-1 \leq 1 - x \leq 1$ và $\begin{cases} x > 0 \\ \lg x > 0 \end{cases}$

hay $0 \leq x \leq 2$ và $x > 1$.

Vậy miền xác định của hàm số là $X = (1, 2]$.

19. Vẽ đồ thị của các hàm số:

1) $y = E(x)$, $E(x)$: phần nguyên của x, $E(x) \leq x$.

2) $y = \text{sign}x = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x > 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ -1 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

(Đọc là sig - num của x)

3) $y = x + \sin x$

4) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

*5) $y = \arcsin(\sin x)$

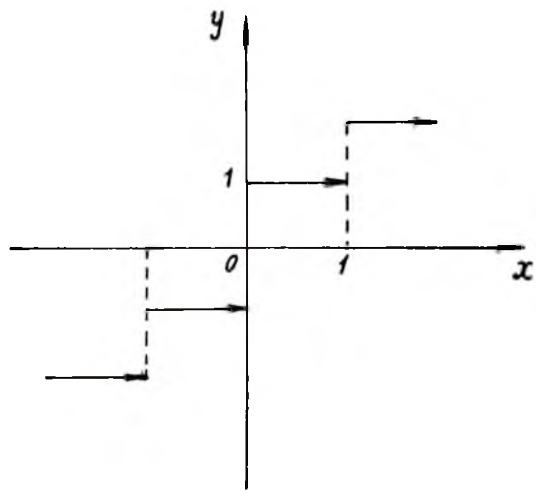
Bài giải

1) Rõ ràng E(x) xác định $\forall x \in R$

$$E(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ 0 : 0 \le x < 1 \\ 1 : 1 \le x < 2 \\ 2 : 2 \le x < 3 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Do đó ta có đồ thị của hàm số (H1).

2) Theo giả thiết ta có đồ thị của hàm số (H2).



Hình 1.

3) Để có đồ thị của $y = x + \sin x$ ($\forall x \in R$) ta vẽ đồ thị của các hàm số $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$ rồi cộng tung độ của y_1 và y_2 với cùng hoành độ x, ta có các điểm $(x, y_1 + y_2)$ trên đồ thị của y và từ đó ta có đồ thị của y (H3).

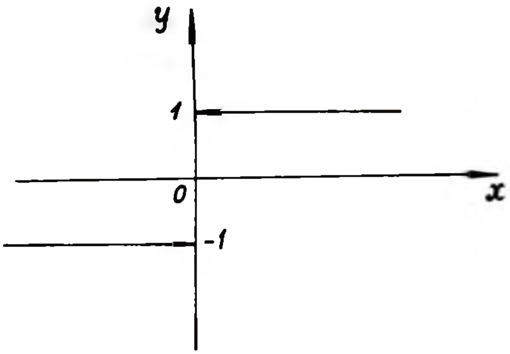
4) $y = \dfrac{x^3+1}{x} =$

$= x^2 + \dfrac{1}{x}$,

$x \neq 0$,

$y_1 = x^2$, $y_2 = \dfrac{1}{x}$

Tương tự như 3) ta có đồ thị của y (H4).



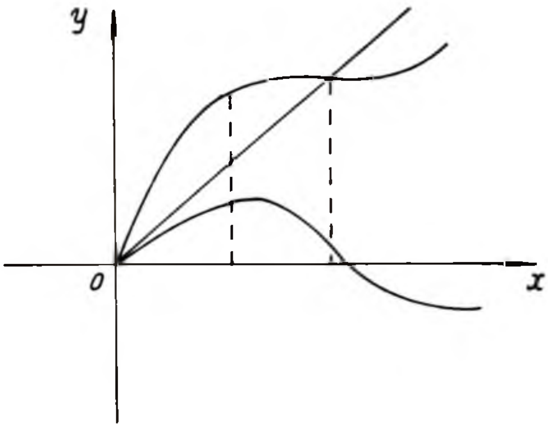
Hình 2.

5) Hàm này xác định $\forall$ x $\in$ R, tuần hoàn, chu kỳ 2π vì:

$\arcsin(\sin(x + 2\pi)) =$

$= \arcsin(\sin x)$

Mặt khác $\sin(\dfrac{\pi}{2} + \alpha) = \sin(\dfrac{\pi}{2} - \alpha)$, $\forall\alpha \in R$ nên $\arcsin(\sin(\dfrac{\pi}{2} + \alpha)) = \arcsin(\sin(\dfrac{\pi}{2} - \alpha))$.

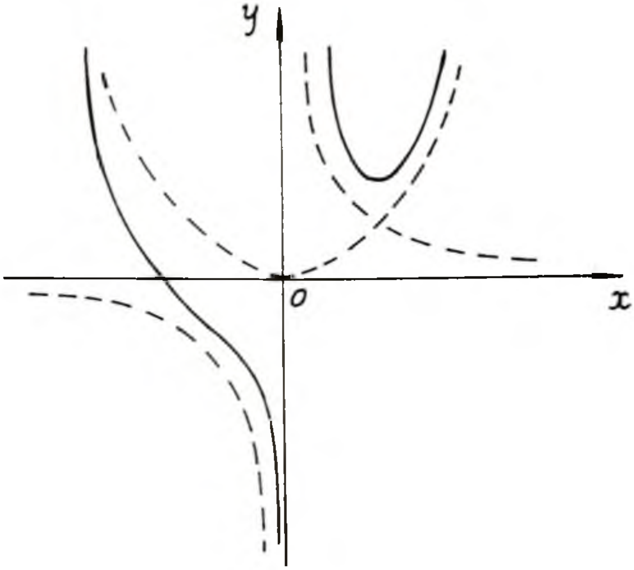


Hình 3.

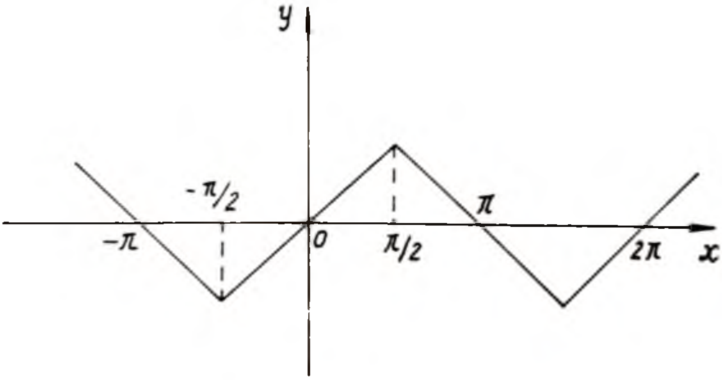
nghĩa là đồ thị của hàm đã cho đối xứng với đường thẳng $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Xét $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ thì $y = \arcsin(\sin x) = x$.

Do đó khi $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ thì $y = \pi - x$. Vậy ta có đồ thị trong một chu kỳ tĩnh tiến dọc Ox những đoạn 2π ta được toàn bộ đồ thị (H5).



Hình 4.



Hình 5.

20. Tìm miền giá trị của các hàm:

1) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 9}$

2) $y = \sqrt{2x - 1 - x^2}$

3) $y = \arccos \dfrac{2x}{1 + x^2}$

4) $y = \sin x - 5\cos x$

Bài giải

1) Miền xác định của hàm số: X = R.

Để tìm miền giá trị của hàm số ta giải phương trình $y = \dfrac{2x}{x^2 + 9}$ (1) với x là ẩn số. Miền giá trị của y là tập hợp các giá trị của y để từ (1) ta xác định được x.

Từ (1): $x^2y - 2x + 9y = 0$, có nghiệm đối với x khi:

$$\Delta' = 1 - 9y^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}$$

Vậy miền giá trị phải tìm là: $Y = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

2) Tương tự như 1):

$$y^2 = 2x - 1 - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 1 = 0$$

$$\Delta' = 1 - (y^2 + 1) = -y^2 \geq 0 \Rightarrow y = 0.$$

Vậy miền giá trị của hàm số là $Y = \{0\}$.

3) Cũng tương tự như 1): $\dfrac{2x}{1 + x^2} = \cos y$

$$x^2\cos y - 2x + \cos y = 0 \Rightarrow \Delta' = 1 - \cos^2 y \geq 0$$

$\Rightarrow - 1 \leq \cos y \leq 1$, theo định nghĩa của arccos ta có $0 \leq y \leq \pi$. Vậy miền giá trị của hàm đã cho là $Y = [0, \pi]$.

4) Ta có $y = \sqrt{26}\sin(x - \varphi)$, với $tg\varphi = 5$.

Vậy $|y| \leq \sqrt{26}$ và miền giá trị của hàm số đã cho là:

$$Y = [-\sqrt{26}, \sqrt{26}]$$

21. Tìm hàm ngược và miền tồn tại của nó, của các hàm sau:

1) $y = x^2 - 4x + 2$

2) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $x \neq 1$

3) $y = shx$

4) $y = signx$

5) $y = x^2 signx$

Bài giải

1) Xét phương trình $x^2 - 4x + 2 = y_0$ (1)

Nghiệm của (1): $x_1 = 2 - \sqrt{y_0+2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{y_0+2}$ với mọi $y_0 \geq -2$.

Xét $-\infty < x \leq 2$ thì $\forall y_0 \geq -2$, (1) chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 2 - \sqrt{y_0+2}$, nghĩa là hàm $y = x^2 - 4x + 2$ trong $(-\infty, 2]$ có hàm ngược $x = 2 - \sqrt{y+2}$ với $y \geq -2$.

Nếu xét $-\infty < x < +\infty$ thì $\forall y_0 > -2$, phương trình (1) có hai nghiệm (không có nghiệm duy nhất) nên hàm $y = x^2 - 4x + 2$ khi $-\infty < x < +\infty$ không tồn tại hàm ngược.

2) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

Trên $(-\infty, -1)$, y đơn điệu giảm từ -1 đến $-\infty$

$(-1, +\infty)$, y đơn điệu giảm từ $+\infty$ đến -1

Do đó, $\forall y \in R$, $y \neq -1$, tồn tại hàm ngược duy nhất của y:

$$x = \frac{1-y}{1+y},\ y \neq -1.$$

3) $y = \text{sh}x$, ta biết $\text{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $-\infty < x < +\infty$

Trong $(-\infty, +\infty)$, shx là đơn điệu tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$.

Do đó $\forall y \in (-\infty, +\infty)$ tồn tại hàm ngược duy nhất:

$x = f^{-1}(y)$, để tìm x, ta xét:

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$\Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$, vì $e^x > 0$ nên lấy dấu +

Ta có: $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

Do đó: $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$, $-\infty < y < +\infty$

4) $y = \text{sign}x$. Theo định nghĩa:

$$y = \text{sign}x = f(x) = \begin{cases} 1 \text{ khi } x > 0 \\ 0 \text{ khi } x = 0 \\ -1 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$$

Do đó phương trình $f(x) = y_0$ có vô số nghiệm x.

Theo định nghĩa, hàm $y = \text{sign}x$ không tồn tại hàm ngược.

5) $$y = x^2\text{sign}x = \begin{cases} x^2 \text{ khi } x > 0 \\ 0 \text{ khi } x = 0 \\ -x^2 \text{ khi } x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Trong (- ∞, + ∞), hàm y là đơn điệu tăng, do đó ∀y ∈ **R**, tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$.

Từ (1) suy ra:

$$x = \begin{cases} \sqrt{y} \text{ khi } y > 0 \\ 0 \text{ khi } y = 0 \\ -\sqrt{-y} \text{ khi } y < 0 \end{cases}$$

Vậy $x = \sqrt{|y|}.\text{sign}y$

22. Xét tính bị chặn, tìm sup, inf, giá trị lớn (bé) nhất M(m) của các hàm sau đây trên miền X tương ứng.

1) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, X = R

2) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, X = R

3) y = x - E(x), X = R

4) y = sinx + cosx, X = [0, 2π]

Bài giải

1) Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq |ab|$ ta có $|x| < \dfrac{x^2+1}{2}$ (a = x, b = 1).

Do đó ∀x ∈ R: $|y| = \left|\dfrac{x}{x^2+1}\right| \leq \dfrac{1}{2}.\dfrac{x^2+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$

Vậy hàm y bị chặn trong miền X = R.

Rõ ràng sup y = M = $\dfrac{1}{2}$, inf y = m = - $\dfrac{1}{2}$.

2) Vì $x^2 < x^2 + 1$, ∀x ∈ R nên:

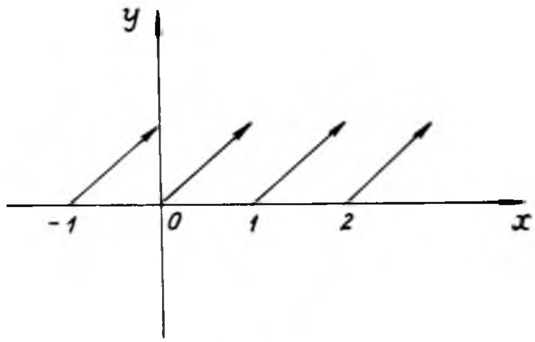
$|y| = \dfrac{x^2}{x^2+1} < 1$. Vậy y bị chặn $\forall x \in R$, $X = R$.

Rõ ràng $\sup\limits_{x\in X} y = 1$, $\inf\limits_{x\in X} y = m = 0$.

3) Theo định nghĩa:

$$y = x - E(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ x : 0 \le x < 1 \\ x - 1 : 1 \le x < 2 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Do đó ta có đồ thị của y trên H6 và $\sup\limits_{x\in R} y = 1$, $\inf\limits_{x\in R} y = m = 0$.



Hình 6.

4) Ta có $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Do đó: $|y| \le \sqrt{2}$, $\forall x \in R$, đặc biệt $\forall x \in [0, 2\pi)$ và $\sup\limits_{x\in X} y = M = \sqrt{2}$, $\inf\limits_{x\in X} y = m = -\sqrt{2}$.

***23.** Chứng minh rằng, nếu:

1) f(x), g(x), h(x) là các hàm đơn điệu tăng và $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $\forall x \in X$ thì:

$$f[f(x)] \le g[g(x)] \le h[h(x)]$$

2) f(x) là đơn điệu tăng (giảm) trong X thì tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) trong miền Y là miền giá trị của f(x).

Bài giải

1) Theo giả thiết thì:

$$f[f(x)] \le f[g(x)] \le g[g(x)] \le h[g(x)] \le h[h(x)] \quad \text{(đ.c.m)}$$

2) Xét f đơn điệu tăng (giảm: chứng minh tương tự).

Theo định nghĩa $\forall x_1, x_2 \in X$, $(x_1 < x_2)$:

$$f(x_1) < f(x_2);\ f(x_1),\ f(x_2) \in Y$$

$\Rightarrow x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$, nghĩa là f là một song ánh từ X vào Y, vậy tồn tại ánh xạ ngược f^{-1} cũng là một song ánh từ Y vào X là hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ của f xác định trong miền Y.

Rõ ràng $x = f^{-1}(y)$ là đơn điệu tăng.

Thực vậy, nếu $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$ thì $x_1 < x_2$ vì nếu không, nghĩa là $x_1 \ge x_2$ thì theo giả thiết $f(x_1) \ge f(x_2)$, tức là $y_1 \ge y_2$: mâu thuẫn với giả thiết $y_1 < y_2$.

24. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

1) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

3) $f(x) = \sin x + \cos x$

4) $f(x) = \mathrm{sign}(x^3 - 4x)$

Bài giải

1) $\forall x \in R$: xét $f(-x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = f(x)$

Vậy f(x) là chẵn $\forall x \in R$.

2) $\forall x \in R$ xét $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) =$

$$= \ln\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}} = \ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} =$$

$= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x)$

Vậy f(x) là hàm lẻ $\forall x \in R$.

3) $\forall x \in R$: $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$

$\neq f(x)\ (-f(x))$

Vậy f(x) không chẵn lẻ $\forall x \in R$.

4) $\forall x \in R$, xét $f(-x) = \text{sign}((-x)^3 - 4(-x)) = \text{sign}[-(x^3 - 4x)] =$

$= -\text{sign}(x^3 - 4x) = -f(x)$

Vậy f(x) là lẻ $\forall x \in R$.

25. Chứng minh rằng nếu f(x), g(x) là các hàm tuần hoàn và xác định trong cùng một miền và có chu kỳ T_1, T_2 thông ước với nhau ($\frac{T_1}{T_2} = r \in Q$) thì $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$ cũng là các hàm tuần hoàn, chu kỳ T là BSCNN của T_1, T_2.

Bài giải

Theo giả thiết $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$, m, n $\in$ N, m, n nguyên tố cùng nhau.

Đặt $T = nT_1 = mT_2$, khi đó:

$f(x + T) \pm g(x + T) = f(x + nT_1) \pm g(x + mT_2) = f(x) \pm g(x)$

$f(x + T).g(x + T) = f(x + nT_1).g(x + mT_2) = f(x).g(x)$

Vậy $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$ là các hàm tuần hoàn, rõ ràng chu kỳ T của nó là BSCNN của T_1 và T_2.

26. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số:

1) $f(x) = A\cos\alpha x$, $(\alpha \neq 0)$, $f(x) = A\text{tg}\alpha x$ $(\alpha \neq 0)$,

$f(x) = \sin^n x$

2) $f(x) = A\cos x + B\sin 2x + C\text{tg}3x$

3) $f(x) = tg\sqrt{x}$

4) $f(x) = \sin x^2$

5) $f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}\,x$

6) $f(x) = \begin{cases} 1 : x \in Q \\ 0 : x \in I \end{cases}$ (hàm Dirichlet)

7) $f(x) = x - E(x)$

Bài giải

1) Để xét tính tuần hoàn của hàm số ta giải phương trình:

$f(x + a) = f(x)$ để tìm $a = const \neq 0$

$\Rightarrow A\cos\alpha(x + a) = A\cos\alpha x$

$\Rightarrow \alpha x + \alpha a = \pm\, \alpha x + 2k\pi$

$\Rightarrow a = \dfrac{2k\pi}{\alpha} \neq 0, \ (k \neq 0)$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn và số dương T nhỏ nhất để: $f(x + T) = f(x)$ là $T = \dfrac{2\pi}{|\alpha|}$.

Tương tự, hàm $f(x) = A\sin\alpha x$ là hàm tuần hoàn, chu kỳ $\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$.

Tương tự, hàm $f(x) = Atg\alpha x$, $f(x) = Acotg\alpha x$ là hàm tuần hoàn chu kỳ là $\dfrac{\pi}{|\alpha|}$.

Xét hàm $y = \sin^n x$, tương tự như trên ta có: $\sin^n(x + a) = \sin^n x$ (1). Nếu n lẻ thì từ (1) suy ra:

$\sin(x + a) = \sin x$

hay $x + a = x + 2k\pi$,

$x + a = \pi - x + 2k\pi$.

Từ đó: $a = 2k\pi$, hàm là tuần hoàn và có chu kỳ: $T = 2\pi$.

Nếu n chẵn thì từ (1) suy ra: $\sin(x + a) = \pm \sin x$.

Từ đó: $x + a = \pi + x + 2k\pi$

hay $a = (2k + 1)\pi$ và $T = \pi$.

Tương tự: hàm $f(x) = \cos^n x$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π nếu n lẻ, π nếu n chẵn.

2) $f(x) = A\cos x + B\sin 2x + Ctg3x$

Ta có: $A\cos x$ có chu kỳ 2π.

$B\sin 2x$ có chu kỳ $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

$Ctg3x$ có chu kỳ: $\frac{\pi}{3}$

Theo bài 25, chu kỳ của f(x) là BSCNN của 2π, π và $\frac{\pi}{3}$ là $T = 2\pi$.

3) $f(x) = tg\sqrt{x}$, tương tự lần lượt ta có:

$$tg\sqrt{x+a} = tg\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x+a} = \sqrt{x} \neq k\pi$$

$\Rightarrow x + a = x + k^2\pi^2 + 2k\pi\sqrt{x}$ hay $a = k^2\pi^2 + 2k\pi\sqrt{x}$; a phụ thuộc x, nghĩa là không tìm được a = const ≠ 0, do đó hàm đã cho không là hàm tuần hoàn.

4) $f(x) = \sin x^2$, lần lượt ta có:

$$\sin(x + a)^2 = \sin x^2 \Rightarrow (x + a)^2 = x^2 + 2k\pi$$

$(x + a)^2 = \pi - x^2 + 2k\pi$, từ các phương trình này, ta không tìm được a = const ≠ 0. Vậy hàm số đã cho không là hàm tuần hoàn.

5) $f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}\,x$

$\sin x$ có chu kỳ 2π, $\sin\sqrt{2}\,x$ có chu kỳ $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, nghĩa là không tồn tại BSCNN của 2π và $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ nên f(x) không là hàm tuần hoàn.

6) Nếu $T \in Q$, ta có $f(x + T) = \begin{cases} 1: \text{nếu } x \in Q \\ 0: \text{nếu } x \in I \end{cases}$

hay $f(x + T) = f(x)$

Vậy f(x) là hàm tuần hoàn có chu kỳ là một số hữu tỷ bất kỳ.

Rõ ràng không có số vô tỉ nào là chu kỳ của nó.

7) $f(x) = x - E(x) \Rightarrow f(x + a) = x + a - E(x + a)$

Do đó từ: $x + a - E(x + a) = x - E(x)$ ta suy ra:

$$a = E(x + a) - E(x) = m,\ m \in Z$$

Vậy hàm đã cho là tuần hoàn, chu kỳ T = 1.

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

2.1. Định nghĩa

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ hay } f(x) \to a\ (x \to x_0),\ (x_0 \in \tilde{R},\ a \in \tilde{R}).$$

$\Leftrightarrow \exists x_n,\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a$ (1)

hay $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ (2)

$(x_0,\ a \in R)$.

Giới hạn bên phải (trái) điểm x_0 của f(x):

$a = \lim\limits_{x \to x_0^+ (x_0^-)} f(x) \Leftrightarrow [\exists x_n, x_n \neq x_0, x_n > x_0 \ (< x_0) \Rightarrow f(x_n) \to a]$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 < x < x_0 + \delta, (x_0 - \delta < x < x_0)$

$\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$

Chú ý: Ta cũng ký hiệu $x_0^+ \ (x_0^-) = x_0 + 0 \ (x_0 - 0)$

$a = \lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x > N \ (< -N)$

$\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon, \ (a \in R).$

$+\infty \ (-\infty) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow f(x) > M \ (< -M).$

$+\infty \ (-\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} f(x) \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0, \forall x > N \ (< -N)$

$\Rightarrow f(x) > M \ (< -M)$

Chú ý:

$x \to +\infty \ (-\infty)$ ký hiệu chung là $x \to \infty$.

2.2. Tính chất và phép toán

Xét $x_0 \in \tilde{R}$, $a \in R$

1^0) $f(x) \to a_1$, $f(x) \to a_2$ $(x \to x_0) \Rightarrow a_2 = a_1$

2^0) $f(x) \to a \ (x \to x_0) \Leftrightarrow (f(x) - a) \to 0 \ (x \to x_0)$

3^0) $f(x) = c, \forall x \in X \Rightarrow f(x) \to c \ (x \to x_0), x_0 \in X$

4^0) $f(x) \to a \ (x \to x_0) \Rightarrow f(x)$ bị chặn $(x \to x_0)$

5^0) $f(x) \to a \ (x \to x_0)$, $a > p \ (< q) \Rightarrow \exists$ lân cận của x_0

(trừ x_0): $f(x) > p \ (< q)$

6^0) $f(x) \to a$ $(x \to x_0)$, $\exists$ lân cận của x_0 (trừ x_0)

$f(x) \le p$ $(\ge q) \Rightarrow a \le p$ $(\ge q)$

7^0) $f(x) \to a$, $g(x) \to b$ $(x \to x_0) \Rightarrow f(x) \pm g(x) \to a \pm b$

$f(x).g(x) \to a.b$, $f(x)/g(x) \to a/b$ $(b \ne 0)$ $(x \to x_0)$

8^0) $f(x) \to a$ $(x \to x_0)$, $g(y) \to b$ $(y \to a) \Rightarrow$

$\Rightarrow g[f(x)] \to b$ $(x \to x_0)$.

2.3. Vô cùng bé (VCB). Vô cùng lớn (VCL)

Xét $x_0 \in \tilde{R}$:

+ f(x) là một VCB (VCL) khi

$$x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (\lim_{x \to x_0}|f(x)| = +\infty)$$

+ Cho f(x), g(x) VCB (VCL) khi $x \to x_0$.

f(x) gọi là có bậc k so với g(x) $\Leftrightarrow \lim \dfrac{f(x)}{[g(x)]^k} = C \ne 0$ $k > 0$

k > 1: f(x) (g(x)) có bậc cao (thấp) hơn bậc của g(x) (f(x))

k = 1: f(x), g(x) đồng bậc

k = 1, c = 1: f(x), g(x) là tương đương nhau.

Ký hiệu: $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$

Nếu f(x) có bậc k so với g(x) thì: $f(x) \sim C[g(x)]^k$

$C[g(x)]^k$ là phần chính của f(x), g(x) là VCB (VCL) cơ sở.

+ Nếu f(x), g(x) VCB (VCL) $(x \to x_0)$, g(x) có bậc cao (thấp) hơn bậc của f(x) thì: $f(x) + g(x) \sim f(x)$.

+ Nếu $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ $(x \to x_0)$

thì: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, $(x_0 \in \tilde{R})$

0(g(x)): ký hiệu VCB bậc cao hơn bậc của g(x).

2.4. Các giới hạn và công thức tương đương thông dụng

1⁰) $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2⁰) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

3⁰) $\lim_{x \to 0} a^x = 1 \ (a > 0, \neq 1)$

4⁰) $\lim_{x \to +\infty(-\infty)} a^x = +\infty \ (0), a > 1$

5⁰) $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \ (a > 1, k > 0)$

6⁰) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0 \ (a > 1, k > 0)$

7⁰) $\lim_{x \to +0} x^k \log_a x = 0 \ (a > 1, k > 0)$

8⁰) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \ (a > 0, \neq 1)$

9⁰) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \ (a > 0, \neq 1)$

10⁰) $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \ \alpha \in R$

11⁰) $\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to \infty}} (1 + u)^v = e^{\lim\limits_{u \to 0, v \to \infty} uv}$

12⁰) $\sin x \sim x, \ \mathrm{tg}x \sim x, \ \arcsin x \sim x, (x \to 0)$

13⁰) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \ (x \to 0), \ \mathrm{tg}x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3 \ (x \to 0)$

14⁰) $\ln(1 + x) \sim x \ (x \to 0)$

15⁰) $e^x - 1 \sim x \ (x \to 0)$

16⁰) $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (x \to 0), (\alpha \in R)$

2.5. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

1^0) $\forall x \in X$: $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$,

$$x_0 \in X \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = a \text{ (kẹp)}$$

2^0) Nếu f(x) là đơn điệu không giảm (tăng) trong (a, b) (a, b $\in \tilde{R}$) và bị chặn trên (dưới) trong khoảng đó thì $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$, ($\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$) tồn tại (Weierstrass).

Nếu f(x) không bị chặn trên (dưới) trong khoảng đó thì:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty, \quad \left(\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty\right)$$

3^0) Hàm f(x) có giới hạn là a khi $x \to x_0$ khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0; \forall x, x': |x - x_0| < \delta(\varepsilon), |x' - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \text{(Cauchy)}$$

Chú ý:

1) Khi tìm giới hạn, ta thường gặp các dạng vô định $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 ta phải biến đổi và dùng các khái niệm đã biết để khử các dạng vô định đó đi, ta sẽ tìm ra giới hạn phải tìm nếu giới hạn đó tồn tại.

2) Ta cũng ký hiệu $e^x = \exp x$

BÀI TẬP

27. Chứng minh:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, $(0 < a < 1)$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^k} = +\infty$ $(a > 1, k > 0)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^k} = 0$ (a > 1, k > 0)

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^k \log_a x = 0$ (a > 1, k > 0)

6) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{\pi}{x}$ không tồn tại

Bài giải

1) Lấy một dãy bất kỳ $x_n \neq 1$, $x_n \to 1$ khi đó:

$$f(x_n) = \frac{x_n^3 - 1}{x_n - 1} = x_n^2 + x_n + 1 \to 3$$

Theo định nghĩa (1), (2.1): $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$

Ta có thể làm theo định nghĩa (2), (2.1) như sau: $\forall \varepsilon > 0$, xét một lân cận của x = 1, chẳng hạn khoảng (0, 2) và xét:

$$\left|\frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right| = |(x-1)(x+2)| \le 4|x - 1| < \varepsilon, \forall x \in (0, 2)$$

Chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$ thì $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right| < \varepsilon$

Theo định nghĩa (2), (2.1): $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$

2) Vì $x \to +\infty$, nên lấy một dãy bất kỳ $x_n > 1$, $x_n \to +\infty$, đặt $E(x_n) = n$, khi đó: $n \le x_n$ và $0 < a^{x_n} \le a^n$, $(0 < a < 1)$.

Rõ ràng $a^n \to 0$ vì đặt $a = \dfrac{1}{a'}$ thì $a' > 1$ và $a^n = \dfrac{1}{a'^n} \to 0.$

Vậy theo tiêu chuẩn kẹp (phần giới hạn của dãy):

$f(x_n) = a^{x_n} \to 0$, theo định nghĩa (1):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = 0,\ (0 < a < 1)$$

3) Trước hết, chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$, $(a > 1)$.

Ta đã biết (bài 10.3): $\lim \frac{a^n}{n} = +\infty$, $(a > 1)$.

Xét $x_n > 1$, $x_n \to +\infty$, $E(x_n) = n$, khi đó:

$$\frac{a^n}{n+1} < \frac{a^{x_n}}{x_n} < \frac{a^{n+1}}{n} \quad (a > 1,\ n \leq x_n < n+1).$$

Theo tiêu chuẩn kẹp về giới hạn dãy ta có: $\frac{a^{x_n}}{x_n} \to +\infty$, theo

định nghĩa (1): $\lim \frac{a^x}{x} = +\infty$ $\left(\frac{a^n}{n+1} = \frac{a^n}{n}\cdot\frac{n}{n+1} \to +\infty\right)$.

Bây giờ ta chứng minh $\lim \frac{a^x}{x^k} = +\infty$, $a > 0$, $k > 0$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{(a^{\frac{1}{k}})^x}{x}\right]^k = +\infty$

Vì theo trên: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(a^{\frac{1}{k}})^x}{x} = +\infty$, $(a^{\frac{1}{k}} > 1)$.

4) Đặt $y = \log_a x$, $x \to +\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$

Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y}{\left(a^k\right)^y} = 0$.

Vì $\frac{y}{\left(a^k\right)^y} = \frac{1}{\frac{\left(a^k\right)^y}{y}} \to \frac{1}{+\infty} = 0$, $(y \to +\infty)$ theo 3)

5) Đặt $x = \frac{1}{y}$, $x \to +0 \Leftrightarrow y \to +\infty$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to 0} x^k \log_a x = \lim\limits_{y\to +\infty} \frac{-\log_a y}{y^k} = 0$. Theo 4).

6) Lấy một dãy bất kỳ $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $(n \to +\infty)$

Khi đó $f(x_n) = \cos n\pi = (-1)^n$, ta biết (bài 9.3)) dãy $(-1)^n$ phân kỳ. Vậy theo định nghĩa (1):

$$\lim_{x\to 0} \cos\frac{\pi}{x} \text{ không tồn tại}$$

28. Tìm:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[q]{x^p} - 1}{\sqrt[s]{x^r} - 1}$, $p, q, r, s \in N$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x - \sin x}{\sin^3 x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\sin x} - \cos x}{\sin\frac{x}{2}}$

*6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^\alpha x}{x^2}$, $\alpha \in R$

*7) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$, $a > 0$

Bài giải

1) Đặt $x = y^{qs}$, $x \to 1 \Leftrightarrow y \to 1$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[q]{x^p}-1}{\sqrt[s]{x^r}-1} = \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^{ps}-1}{y^{qr}-1} =$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^{ps-1}+y^{ps-2}+\ldots+1)}{(y-1)(y^{qr-1}+y^{qr-2}+\ldots+1)} = \frac{ps}{rq}$$

2) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a}\left[\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]}{a.\dfrac{x}{a}} -$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{a}\left[\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]}{a.\dfrac{x}{a}} = \frac{2}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}},$$

vì theo công thức $(1 + x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$:

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}.\frac{x}{a},\quad \left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}.\left(\frac{-x}{a}\right)$$

3) Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos a\sin x}{x} = 2\cos a$$

vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

4) Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Vì $tgx - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$, $\sin^3 x \sim x^3$ theo các công thức tương đương (2.4).

5) Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x} - \cos x}{\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1 + 1 - \cos x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1}{\sin\frac{x}{2}} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}.2x}{\frac{x}{2}} + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}.x^2}{\frac{x}{2}} = 2$$

(Theo các công thức tương đương ở (2.4)).

6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2}$, $\alpha \in R$

Ta có: $\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2} = \frac{[1+(\cos x - 1)]^\alpha - 1}{\cos x - 1}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$

Theo các công thức tương đương ở (2.4):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(\cos x - 1)}{\cos x - 1}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{\alpha}{2}$$

$(x \to 0,\ \cos x \to 1,\ 1 - \cos x \to 0)$

7) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$, $a > 0$

Ta có: $a^x - x^a = (a^x - a^a) - (x^a - a^a)$

Do đó:

$$\frac{a^x - x^a}{x-a} = \frac{a^a\left(a^{x-a} - 1\right)}{x-a} - \frac{a^a\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^a - 1\right]}{x-a} =$$

$$= \frac{a^a\left(a^{x-a} - 1\right)}{x-a} - \frac{a^{a-1}\left[\left(1 + \dfrac{x-a}{a}\right)^a - 1\right]}{\dfrac{x-a}{a}}$$

và $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a} = a^a \lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^{x-a} - 1}{x-a} - a^{a-1} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\left(1 + \dfrac{x-a}{a}\right)^a - 1}{\dfrac{x-a}{a}}$

$$= a^a \ln a - a^a = a^a \ln\frac{a}{e}$$

(Theo các công thức 9^0, 10^0 (2.4)).

29. Tìm:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{4/3}\left(\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-2}\right)^{3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}$

6) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{2x}$

9) $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

Bài giải

1) Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}} = 1$

Có thể dùng VCL tương đương:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x+1} \sim \sqrt{x} \quad (x \to +\infty)$$

Vậy $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$

2) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{4/3}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{4/3} \frac{2}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^4-1} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{2}{3}$$

(Nhân và chia với lượng liên hợp của $\sqrt[3]{x^2+1}$ - $\sqrt[3]{x^2-1}$, mẫu số ~ $3\sqrt[3]{x^4}$).

3) Đặt 1 - x = α, $x \to 1 \Leftrightarrow \alpha \to 0$

Ta có: $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{\alpha\to 0}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha} = \frac{2}{\pi}$

($\frac{\operatorname{tg}ax}{x} = a.\frac{\operatorname{tg}ax}{ax} \to a.1 = a$ ($\alpha \to 0$))

4) Ta có: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x-2}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-2}\right)^{3x+2} =$

$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{4(3x+2)}{2x-2}\right) = e^6$. Theo (2.4)

($\exp x = e^x$)

5) $\lim_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2x^3}{x^3}\right) = e^{-2}$

6) $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{1/\cos x} = \lim_{x\to\pi/2}(1+\sin x - 1)^{1/\cos x}$

$= \exp\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x - 1}{\cos x}\right) = e^0 = 1$

$\left(\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \frac{(\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(\sin x + 1)\cos x} = \frac{-\cos x}{\sin x + 1} \to 0 \ (x \to \pi/2)\right)$

7) Đặt $y = \dfrac{1}{x}$, ta có:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to 0}\left(e^{y} + y\right)^{1/y} = \lim_{y\to 0}\left(1 + e^{y} + y - 1\right)^{1/y}$$

$$= \exp\left(\lim_{y\to 0}\frac{e^{y} + y - 1}{y}\right) = \exp\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^{y} - 1}{y} + 1\right)\right) = e^{2}$$

Vì $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y} - 1}{y} = \ln e = 1$, theo (2.4).

8) Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}\left(\dfrac{x+2}{x+\frac{1}{2}}\right)^{2x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{3}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}.\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-3.2x}{2x+1}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 \,.\, e^{-3} = 0 \quad \text{khi} \quad x \to +\infty \\ +\infty \,.\, e^{-3} = +\infty \quad \text{khi} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Vì $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$ có dạng $a^{x} \to 0$ $(0 < a < 1)$.

khi $x \to +\infty$. Khi $x \to -\infty$, đặt $x = -x'$ thì

$x' \to +\infty$. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2x'} = 2^{2x'} \to +\infty$ $(x' \to +\infty)$

9) $\lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \begin{cases} 0 \text{ khi } x \to +\infty \\ 1 \text{ khi } x \to -0 \end{cases}$

vì khi $x \to +0$, $2^{1/x} \to +\infty$. Khi $x \to -0$: đặt $x = -x'$, $x' \to +0$:

$$2^{1/x} = 2^{-1/x'} = \frac{1}{2^{1/x'}} \to 0$$

30. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{tg^2 x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+tg^2 x} - \sqrt[3]{1-tg^2 x}}{x+\sqrt[3]{x^2}}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x \sin 5x}{(x-x^3)^2}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+a^x}{x^2+x}$, $(a > 1)$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + 2arctg3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2)+xe^x}$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right) - \ln\dfrac{x}{2}\right]$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\cos x}{tgx^2}$

*9) $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2^2}\ldots.\cos\dfrac{x}{2^n}$, $x \neq 0$

*10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n}{2^n}$, a, b > 0

Bài giải

1) Thay $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $tg^2x \sim x^2$ $(x \to 0)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{tg^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

2) Ta có:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x} - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} - 1 = 3$$

3) Ta có:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tg^2x} - \sqrt{1-tg^2x}}{x + \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+tg^2x\right)^{1/2} - 1}{x^{2/3}} -$$

$$- \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-tg^2x\right)^{1/2} - 1}{x^{2/3}}, \text{ vì } x + \sqrt[3]{x^2} \sim \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}\ (x \to 0)$$

Mặt khác: $(1 + tg^2x)^{1/2} - 1 \sim \dfrac{1}{2} tg^2x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

$(1 - tg^2x)^{1/2} - 1 \sim -\dfrac{1}{2} tg^2x \sim -\dfrac{1}{2}x^2$

Do đó: $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^{2/3}} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^{2/3}} = 0$

4) Ta có: $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x \sin 5x}{\left(x - x^3\right)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x.5x}{x^2} = 15$

5) Vì: $a^x + x^2 \sim a^x \quad (x \to +\infty)$

$x^2 + x \sim x^2 \quad (x \to +\infty)$

nên $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2 + a^x}{x^2 + x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a^x}{x^2} = +\infty$ (bài 27.3)

6) Ta có: $\sin 2x = 2x + 0(2x)$

$\text{arctg}3x = 3x + 0(3x)$

$\ln(1 + 3x + \sin^2 x) \sim 3x + \sin^2 x \sim 3x$

$\Rightarrow \ln(1 + 3x + \sin^2 x) = 3x + 0(3x)$

$xe^x = x + 0(x)$ (khi $x \to 0$)

Vậy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + 2\text{arctg}3x + 3x^2}{\ln\left(1 + 3x + \sin^2 x\right) + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x + 0(2x) + 2(3x + 0(3x)) + 3x^2}{3x + 0(3x) + x + 0(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{8x + 0(x)}{4x + 0(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{8 + \dfrac{0(x)}{x}}{4 + \dfrac{0(x)}{x}} = 2$$

Vì tổng các vô cùng bé bậc cao hơn x là một VCB bậc cao hơn x:

$$0(2x) + 2.0(3x) + 3x^2 = 0(x) + 0(3x) + 0(x) = 0(x)$$

7) Tương tự như 6):

$$\lim_{x\to +\infty} x\left[\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln\frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2}{x}+0\left(\frac{2}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{0\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = 2$$

8) Tương tự như 6), 7) ta có:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{tgx^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{tgx^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-x^2+0(-x^2)}{x^2+0(x^2)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-1+\frac{0(x^2)}{x^2}}{1+\frac{0(x^2)}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

9) Ta có: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$

$$= 2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4} = \ldots$$

$$= 2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

Do đó: $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

và $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}\ldots.\cos\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}\Big/\frac{1}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}$$

10) Ta có: $$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^n$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n\right]$$

Vì $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab}$$

Vậy $L = \exp(\ln\sqrt{ab}) = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$.

31. Tìm các giới hạn:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^x)}{x}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}\right)^{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$

9) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{\operatorname{tg}x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sin\ln(x+1) - \sin\ln x]$

13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$

*14) $\lim\limits_{n\to +\infty}\underbrace{\sin\sin \ldots \sin x}_{\text{n lần}}$

*15) $\lim\limits_{n\to +\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x > 0)$

*16) $\lim\limits_{n\to +\infty}\operatorname{sign}[\sin^2(n!\pi x)]$

Bài giải

1) Theo §1.2, 5°:

$$\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{x}{x+1}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1}$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{x}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$$

2) Cũng theo §1.2, 5^0: $\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \text{arctg}x$.

Ta có: $L = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}x\right)$

Đặt $\frac{\pi}{2}$ - arctgx = t, $x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0$

$$\Rightarrow x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \text{cotg}t$$

Khi đó: $L = \lim_{t\to0} \text{cotg}t.t = \lim_{t\to0} \frac{t}{\text{tg}t} = 1$.

3) $\lim_{x\to0} \frac{\text{ch}x - 1}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{x}\right)^2$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to0}\left[\frac{(e^{\frac{x}{2}} - 1) - (e^{-\frac{x}{2}} - 1)}{x}\right]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

vì $\lim_{x\to0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{x} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to0} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - 1}{x} = -\frac{1}{2}$ (theo 2.4).

4) Ta có: $\lim_{x\to0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{(\alpha - \beta)x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{\alpha x} - 1) - (e^{\beta x} - 1)}{(\alpha - \beta)x} = 1$$

5) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{x} = 1$$

Xét $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(2 + e^x)}{x} = 0$ vì $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

6) $$L = \lim_{x \to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim_{x \to 0} \frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}\right)$$

vì $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \cos\sqrt{x} - 1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} = -\frac{1}{2}.$$

$(\ln(1 + x) \sim x,\ x \to 0)$

nên $L = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2}{2x + 1}\right)^{x^2} = +\infty$ (không thuộc một trong các dạng vô định).

8) Ta có: $L = \lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^x = \exp(\lim\limits_{x \to 0} x \ln \sin x)$

$$= \exp\left[\lim_{x \to 0}\left(\frac{x}{\sin x}.\sin x \ln \sin x\right)\right] = e^0 \quad (e^x = \exp x) \quad (\text{Theo } 7^0,\ 2.4)$$
$$= 1$$

9) Ta có $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}} = \exp\left(\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}\right) =$

$$= \exp\left(\lim_{y\to0}\frac{\ln(1-y)}{y}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e} \ (x = 1 - y)$$

10) Ta có: $L = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{\operatorname{tg}x} = \exp\left[\lim\limits_{x\to0}\left(-\operatorname{tg}x\ln\sin^2 x\right)\right]$

vì $\operatorname{tg}x.\ln\sin^2 x = \dfrac{(\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}\ln\sin^2 x}{\cos x} \to \dfrac{0}{1} = 0$

nên $L = e^0 = 1$.

11) Ta có: $L = \lim\limits_{x\to0} x^{x^x - 1} = \exp\left[\lim\limits_{x\to0}(x^x - 1)\ln x\right]$

vì $(x^x - 1)\ln x = (e^{x\ln x} - 1)\ln x \sim x\ln^2 x$

$$= \left(x^{\frac{1}{2}}\ln x\right)^2 \to 0 \ (x \to 0)$$

nên $L = e^0 = 1$.

12) Ta có: $L = \lim\limits_{x\to+\infty}[\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x)] =$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\cos\left(\ln\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\right)\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\cos\frac{\ln x(x+1)}{2}\sin\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2} = 0$$

vì $\left|\cos\dfrac{\ln x(x+1)}{2}\right| \le 1$, $\sin\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2} \to 0 \ (x \to +\infty)$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} =$

$$= \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

(nhân với lượng liên hợp của $\sqrt{x^2+x}$ - x).

14) Đặt $x_n = \underbrace{\sin\sin\ldots\sin x}_{n \text{ lần}}$ thì $x_n = \sin x_{n-1}$ (1)

Giả sử: $\sin x \geq 0$ ($\sin x < 0$: tương tự).

Ta có: $0 \leq x_n = \sin x_{n-1} \leq x_{n-1}$

Do đó x_n là dãy đơn điệu không tăng và bị chặn dưới. Theo tiêu chuẩn (W): $\lim x_n$ tồn tại, giả sử $l = \lim x_n$, theo (1), ta có $l = \sin l$, phương trình này có nghiệm duy nhất $l = 0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin x}_{n \text{ lần}} = 0$

15) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+x^n}$ $(x > 0)$

Xét $0 < x \leq 1$, ta có $1 \leq \sqrt[n]{1+x^n} \leq \sqrt[n]{2}$

ta biết $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \to 1$, vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+x^n} = 1$.

Xét $1 < x < +\infty$ khi đó $\sqrt[n]{1+x^n} = x\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{x^n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{x^n}} = 1$, theo trên, và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+x^n} = x$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+x^n} = \begin{cases} 1: 0 < x \leq 1 \\ x: 1 < x < +\infty \end{cases}$

16) $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \text{sign}[\sin^2(n!\pi x)]$

Xét $x = \frac{p}{q}$ là số hữu tỉ, p, q nguyên tố cùng nhau, khi đó:

$n!x = n!\frac{p}{q}$ là một số nguyên khi $n > q$ và do đó: $\forall n > q$:

$\sin^2(n!\pi x) = 0$ và $L = 0$, $\forall x \in Q$.

Nếu $x \in I$ (vô tỉ) thì $n!x \overline{\in} Z$ và $\sin^2(n!\pi x) > 0$, do đó:

$$\text{sign}[\sin^2(n!\pi x)] = 1$$

Vậy $L = 1$, $\forall x \in I$.

Tóm lại $y = \lim\limits_{n\to+\infty} \text{sign}[\sin^2(n!\pi x)] = \begin{cases} 0 : x \in Q \\ 1 : x \in I \end{cases}$

(Hàm Dirichlet)

32. 1) Nếu f(x), g(x) là các VCB (VCL) khi $x \to x_0$ ($x_0 \in \tilde{R}$) thì tổng, tích, thương của chúng có là VCB (VCL) không?

2) Cho $f(x) = x^2\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)$ là một VCB khi $x \to x_0$, có thể nói f(x) là VCB bậc hai không?.

3) Có thể nói đến bậc của VCL:

$$f(x) = a^x \text{ khi } x \to +\infty \ (a > 1) \text{ không?}$$

Bài giải

1) - Với vô cùng bé (VCB): + Tổng hoặc tích các VCB (khi $x \to x_0$) là một VCB vì theo các tính chất về giới hạn của tổng và tích các hàm số:

$$f(x) \to 0,\ g(x) \to 0\ (x \to x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \pm g(x) \to 0,\ f(x).g(x) \to 0\ (x \to x_0)$$

+ Thương của hai VCB là một dạng vô định $\left(\frac{0}{0}\right)$, không thể kết luận là VCB được, chẳng hạn:

$$f(x) = x,\ g(x) = \sin x,\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sin x} \to 1$$

khi $x \to 0$, vậy $\frac{f(x)}{g(x)}$ không là VCB khi $x \to 0$.

$$f(x) = x^2,\ g(x) = \sin x,\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\sin x} \to 0$$

khi $x \to 0$, vậy $\frac{f(x)}{g(x)}$ là một VCB khi $x \to 0$.

- Với VCL, tích là một VCL vì $f(x), g(x) \to \infty, (x \to x_0)$ thì $f(x).g(x) \to \infty\ (x \to x_0)$.

Tổng và thương của các VCL là các vô định $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ không thể kết luận là một VCL được, chẳng hạn:

$f(x) = x^2,\ g(x) = -x^2 + 1$, khi $x \to \infty$ là các VCL

$f(x) + g(x) = 1$ không là VCL khi $x \to \infty$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{-x^2+1} \to -1$ khi $x \to \infty$, vậy thương của hai VCL này không là một VCL khi $x \to \infty$.

Nhưng nếu $f(x) = x^3,\ g(x) = x^2 + 1$ thì tổng:

$f(x) + g(x) = x^3 + x^2 + 1$, thương $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x^2+1}$ lại là các VCL khi $x \to \infty$.

2) Không thể nói VCB: $f(x) = x^2\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)$ là có bậc 2 khi $x \to 0$ vì:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)$$ không tồn tại, $g(x) = x^2$

3) Không thể nói đến bậc của VCL $f(x) = a^x$ $(a > 1)$ khi $x \to +\infty$ vì $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^k}{x^k} = +\infty$ $(\forall k > 0)$.

§3. HÀM LIÊN TỤC

3.1. Định nghĩa

- Hàm f(x) gọi là liên tục tại $x_0 \in X$ nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

hay $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

f(x) gọi là liên tục bên phải (trái) điểm x_0 nếu:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0),\ \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right)$$

f(x) là liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow$ f(x) liên tục bên trái và bên phải x_0

f(x) là liên tục trong miền X nếu nó liên tục $\forall x \in X$.

Đối với hàm liên tục, ta có thể viết $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$.

f(x) gọi là gián đoạn tại x_0 nếu nó không liên tục tại x_0, x_0 gọi là điểm gián đoạn của hàm số.

x_0 gọi là điểm gián đoạn loại 1 của f(x) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ tồn tại ($\in R$)

$h = f(x_0^+) - f(x_0^-)$ gọi là bước nhảy của hàm số tại x_0

nếu $f(x_0^+) = f(x_0^-)$ thì x_0 gọi là điểm gián đoạn bỏ được của f(x) vì có thể lập lại sự liên tục của f(x) tại x_0 bằng cách đặt: $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$.

Điểm gián đoạn của f(x) không phải là điểm gián đoạn loại 1 của nó, gọi là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số.

Nếu ít nhất một $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$ bằng ∞ thì x_0 gọi là điểm gián đoạn vô hạn của hàm số.

3.2. Các phép toán về hàm liên tục. Sự liên tục của hàm sơ cấp

1^0) Nếu f(x), g(x) là liên tục tại x_0 thì $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$, $f(x)/g(x)$, $(g(x_0) \neq 0)$ cũng liên tục tại x_0.

2^0) Nếu $y = f(x)$ liên tục tại x_0, $z = g(y)$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$ thì hàm $z = g[f(x)]$ là liên tục tại x_0.

3^0) Nếu $y = f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) và liên tục trong miền X thì hàm ngược của nó $x = f^{-1}(y)$ cũng là hàm đơn điệu tăng (giảm) và liên tục trong miền Y, là miền giá trị của f(x).

4^0) Các hàm sơ cấp cơ bản (1.2) và nói chung các hàm sơ cấp đều liên tục trong miền xác định của chúng.

3.3. Các định lý về hàm liên tục trong một đoạn

Nếu f(x) liên tục trong đoạn [a, b] thì:

1^0) f(x) bị chặn trong [a, b] (Định lý Weierstrass I).

2^0) f(x) đạt một giá trị lớn nhất M và một giá trị bé nhất m trong [a, b] (Định lý Weierstrass II).

3^0) f(x) lấy mọi giá trị trung gian gồm giữa f(a), f(b) nghĩa là: $f(a) < \gamma < f(b)$ $(f(a) > \gamma > f(b))$ thì $\exists c \in (a, b)$: $f(c) = \gamma$ (định lý Cauchy).

Đặc biệt $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b): f(c) = 0$

và $m < \gamma < M \Rightarrow \exists c \in (a, b): f(c) = \gamma$.

3.4. Hàm liên tục đều

Hàm f(x) gọi là liên tục đều trong miền X $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, $\forall x.x' \in X : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

- Nếu f(x) liên tục trong [a, b] thì f(x) liên tục đều trên [a, b] (Định lý Cantor).

BÀI TẬP

33. Chứng minh các hàm sau đây liên tục trong miền chỉ ra tương ứng:

1) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \ge 0$

2) $f(x) = \log_a x$, $x > 0$

3) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$

*4) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^3 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$, $-\infty < x < +\infty$

Bài giải

1) Xét $\Delta f(x) = \sqrt[n]{x + \Delta x} - \sqrt[n]{x}$, $x > 0$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt[n]{(x + \Delta x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x + \Delta x)^{n-2}}.\sqrt[n]{\Delta x} + \ldots + \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Do đó, khi $\Delta x \to 0$ thì $\Delta f(x) \to 0$. Tại $x = 0$, $\Delta f(0) = \sqrt[n]{\Delta x} \to 0$ $(\Delta x \to +0)$.

Vậy hàm số là liên tục $\forall x \ge 0$.

2) Xét $x > 0$ và $\Delta f(x) = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$

$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f(x) \to \log_a 1 = 0$.

Vậy hàm số là liên tục $\forall x > 0$.

3) $f(x) = \text{arctg}x, -\infty < x < +\infty$

$\Delta f(x) = \text{arctg}(x + \Delta x) - \text{arctg}x = \text{arctg}\dfrac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}$, theo 5°(1.2).

Rõ ràng $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f(x) \to 0$.

Vậy hàm số là liên tục $\forall x \in R$.

4) Ta có:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x + x^3e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Rõ ràng $f(x)$ là liên tục $\forall x \in R$, vì khi $x > 0$ và $x < 0$, $f(x)$ là các hàm sơ cấp nên nó liên tục trong miền xác định của nó, còn tại $x = 0$:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} x^3 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} x = f(0)$$

Do đó $f(x)$ là liên tục tại $x = 0$.

34. Xét sự liên tục và gián đoạn và phân loại các điểm gián đoạn của các hàm số:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$

4) $f(x) = x - E(x)$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos \pi x}{4-x^2}}$

6) $f(x) = \cos^2 \dfrac{1}{x}$

7 $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2} & : |x| \le 1 \\ |x-1| & : |x| > 1 \end{cases}$

*8) $f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in Q \\ 0 & : x \in I \end{cases}$

9) $f(x) = \text{sign}(x^3 - x)$

10) $f(x) = \begin{cases} x & : x \in Q \\ 0 & : x \in I \end{cases}$

Bài giải

1) Ta có: khi $x < 0$: $f(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$,

khi $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

là các hàm sơ cấp nên f(x) liên tục $\forall x \neq 0$.

Tại x = 0, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x} = -1$.

$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, vậy x = 0 là điểm gián đoạn loại một của hàm số với bước nhảy h = 1 - (-1) = 2.

Vì f(0) = 1 nên f(x) là liên tục bên phải điểm x = 0.

2) Với $x \neq 0$ $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ là hàm sơ cấp: nó liên tục.

Tại x = 0 $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$

nghĩa là f(x) cũng liên tục tại x = 0.

Vậy f(x) liên tục $\forall x \in R$.

3) Tương tự như trên, f(x) là liên tục $\forall x \neq 1$.

Tại x = 1, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = 0$$

Vậy x = 1 là điểm gián đoạn loại 1 của f(x) với bước nhảy:

$$h = 1 - 0 = 1.$$

4) Trước hết xét f(x) = E(x), nếu $k \in Z$ và $k - 1 \leq x < k$ thì E(x) = k - 1, nếu $k \leq x < k + 1$ thì E(x) = k. Nếu x_0 là một số không nguyên thì có một lân cận của x_0 không chứa số nguyên nào trong đó E(x) = const, do đó hàm E(x) là liên tục tại x_0, nếu $x_0 = k \in Z$ thì E(k - 0) = k - 1, E(k + 0) = k, nghĩa là $x_0 = k$ là điểm gián đoạn loại một của hàm số với bước nhảy:

$$h = n - (n - 1) = 1$$

Bây giờ xét f(x) = x - E(x), rõ ràng f(x) là liên tục với mọi $x \overline{\in} Z$ và gián đoạn loại 1 tại $x = k \in Z$, vì nếu ngược lại f(x) liên tục tại $k \in Z$ thì:

$$x - (x - E(x)) = E(x) \text{ là liên tục tại } x = k \in Z, \text{ vô lý.}$$

5) f(x) xác định khi - 2 < x < 2 và là hàm sơ cấp nên f(x) là liên tục khi - 2 < x < 2.

Xét $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$, đặt 2 - x = t thì $x \to 2^- \Leftrightarrow$

$t \to 0^+$ và $\lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt{\dfrac{1-\cos\pi(2-t)}{t(4-t)}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt{\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi t}{2}}{t(4-t)}} = 0$

Tương tự: $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$.

Vậy f(x) không liên tục bên trái điểm x = 2 và bên phải điểm x = - 2 (tại x = ± 2, f(x) không xác định).

6) f(x) xác định $\forall x \neq 0$ và là hàm sơ cấp nên f(x) liên tục $\forall x \neq 0$.

tại x = 0, lấy $x_n = \dfrac{1}{\pi n} \to 0$ khi $n \to \infty$.

Khi đó: $f(x_n) = \cos^2\dfrac{1}{x_n} = \cos^2 n\pi = 1 \to 1\ (n \to +\infty)$

Mặt khác, lấy $x_n = \dfrac{2}{(2n+1)\pi} \to 0\ (n \to \infty)$

thì $f(x_n) = \cos^2\dfrac{1}{x_n} = \cos^2(2n+1)\dfrac{\pi}{2} = 0 \to 0\ (n \to \infty)$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại và x = 0 là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số.

7) Với $x \neq \pm 1$, f(x) là hàm sơ cấp nên nó liên tục.

Xét tại x = +1, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \cos\dfrac{\pi x}{2} = 0 = f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} |x-1| = 0 = f(1)$

Vậy f(x) là liên tục tại x = 1.

Tại x = - 1, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \cos\frac{\pi x}{2} = 0 = f(-1)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} |x-1| = -2$. Vậy x = -1 là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

8) f(x) xác định $\forall x \in R$ và f(x) không phải là hàm sơ cấp. Xét một điểm tuỳ ý $x_0 \in R$ và lấy một dãy tuỳ ý các số hữu tỉ (vô tỉ) x_n $(x'_n) \to 0$. Khi đó $f(x_n) = 1 \to 1$, $f'(x_n) = 0 \to 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại và x_0 là điểm gián đoạn loại hai của f(x).

Vì x_0 tuỳ ý nên f(x) là gián đoạn $\forall x \in R$.

9) Ta có:

$$f(x) = \text{sign}(x^3 - x) = \begin{cases} 1: -1 < x < 0,\ 1 < x < +\infty \\ 0: x = 0;\ 1;\ -1 \\ -1: -\infty < x < -1,\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Do đó f(x) liên tục $\forall x \neq 0, 1, -1$

x = 0, 1, -1 là các điểm gián đoạn loại 1 của f(x).

10) Tương tự như 8) f(x) gián đoạn tại $\forall x \neq 0$ (gián đoạn loại 2) và chỉ liên tục tại x = 0.

35. Xác định a, b để các hàm số sau là liên tục trong miền xác định của chúng:

1) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3} & : x \neq -1 \\ a & : x = -1 \end{cases}$$

2) $f(x) = \begin{cases} \cos x & : x \le 0 \\ a(x-1) & : x > 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & : x \le 0 \\ ax + b & : 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & : x \ge 1 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x}, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right], x \ne 0, \pi \\ a : x = 0 \\ b : x = \pi \end{cases}$

Bài giải

1) f(x) liên tục $\forall x \ne -1$ vì nó là hàm sơ cấp.

Do đó để f(x) liên tục $\forall x \in R$ thì nó phải liên tục tại x = -1, nghĩa là:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{1+x^3} = \frac{1}{3} = f(-1) = a \text{ hay } a = \frac{1}{3}$$

2) Tương tự như 1), để f(x) liên tục $\forall x \in R$ thì nó phải liên tục tại x = 0, nghĩa là: $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} \cos x = 1 = f(0)$

$$= \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} a(x-1) = -a \text{ hay } a = -1$$

3) f(x) liên tục $\forall x \ne 0; 1$ vì là các hàm sơ cấp. Để f(x) liên tục $\forall x \in R$ thì nó phải liên tục tại x = 0 và x = 1, nghĩa là:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (x-1)^3 = -1 = f(0)$$

$$= \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (ax+b) = b \text{ hay } b = -1 \ (1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax + b) = a + b$$

$$= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x} = 1 = f(1) \text{ hay } a + b = 1 \ (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $a = 2$, $b = -1$.

4) Tương tự như 3) để f(x) liên tục $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} = 1 = f(0) = a$$

$$\lim_{x\to \pi} f(x) = \lim_{x\to \pi} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{\pi}{2} = f(\pi) = b$$

Vậy $a = 1$, $b = \frac{\pi}{2}$.

36. Chứng minh rằng:

1) Nếu f(x) liên tục trong [a, b]

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ thì $\exists c \in (a, b)$ sao cho:

$$f(c) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$$

2) Nếu f(x) liên tục trong [a, b] đạt cực đại tại các điểm x_1, $x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ thì f(x) đạt 1 cực tiểu tại $x_3 \in (x_1, x_2)$.

3) Nếu f(x) liên tục trong $[a, +\infty]$ và $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, $\forall\gamma$ gồm giữa f(a) và L thì $\exists c > a$ sao cho: $f(c) = \gamma$.

4) Phương trình $a^y + b^y = x$, $a > 1$, $b > 1$

xác định một hàm liên tục duy nhất $y = y(x)$ xác định trong $(0, +\infty)$.

Bài giải

1) Giả sử $f(x_k) = \min\{f(x_i)\}$

$$f(x_l) = \max\{f(x_i)\},\ i = 1, 2, ..., n$$

Khi đó: $f(x_k) \le \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)] \le f(x_l)$.

Đặt $\gamma = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]$ thì theo định lý Cauchy (3.3, 3°):

$$\exists c \in (x_k.x_l) \text{ nghĩa là } c \in (a, b)$$

sao cho $f(c) = \gamma = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]$ (đ.c.m)

2) Xét $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, rõ ràng giá trị bé nhất m của f(x) trong $[x_1, x_2]$ không thể đạt tại x_1, x_2 vì nếu, chẳng hạn $f(x_1) = m$. Khi đó trong lân cận của x_1 ta có $f(x) \ge m$, trái với giả thiết: f(x) đạt cực đại tại x_1 $(f(x) \le f(x_1))$. Vì m cũng là một cực tiểu của hàm số nên suy ra:

hàm số đạt một cực tiểu tại $x_3 \in (x_1, x_2)$ (đ.c.m).

3) Giả sử $f(a) < \gamma < L$.

Rõ ràng $\exists b \in (a, +\infty)$ sao cho $f(b) > \gamma$ vì nếu ngược lại $\forall b > a$: $f(b) \le \gamma$ theo tính chất của giới hạn: $L \le \gamma$, trái với giả thiết.

Vậy $\exists b > a$: $f(a) < \gamma < f(b)$.

Theo định lý Cauchy, $\exists c \in (a, b)$: $f(c) = \gamma$.

nghĩa là $\exists c > a$: $f(c) = \gamma$ (đ.c.m).

4) Như đã biết các hàm a^y, b^y là đơn điệu tăng và liên tục trên R, do đó tổng của chúng là đơn điệu tăng và liên tục trên R, hơn nữa:

$$\lim_{y \to -\infty}\left(a^y + b^y\right) = 0,\quad \lim_{y \to +\infty}\left(a^y + b^y\right) = +\infty$$

Theo định lý tồn tại hàm ngược (3.2.3^0) thì hàm $x = a^y + b^y$ có hàm ngược duy nhất $y = y(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trong $(0, +\infty)$.

*** 37.** Chứng minh rằng:

1) Nếu $f(x)$ liên tục trong $[a, +\infty)$ và tồn tại $L = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ($\in R$) thì $f(x)$ bị chặn trong $[a, +\infty)$.

2) Nếu $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 và $f(x_0) > 0$ (< 0) thì tồn tại một lân cận của x_0, trong đó $f(x) > 0$ (< 0).

3) Nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu và bị chặn trong khoảng (a,b) thì mọi điểm gián đoạn của nó đều là các điểm gián đoạn loại 1.

4) Nếu $f(x)$ liên tục trong $[a, b]$ và có hàm ngược thì $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng (giảm) trong $[a, b]$.

5) Dãy $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \cos x_n$, $n \in N$, hội tụ và có giới hạn là nghiệm của phương trình: $x = \cos x$.

Bài giải

1) Theo giả thiết: $L = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

hay $|f(x)| < |L| + \varepsilon, \forall x > N$.

Đặt $M = \max\{ |L| + \varepsilon, \sup |f(x)| \}$ $a \leq x \leq N$.

thì $\forall x \geq a$: $|f(x)| \leq M$, nghĩa là $f(x)$ bị chặn.

2) Theo giả thiết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ (< 0).

Theo tính chất của giới hạn ((2.2).5^0) thì tồn tại một lân cận của x_0, trong đó: $f(x) > 0$ (< 0).

3) Xét $f(x)$ đơn điệu không giảm ($f(x)$ đơn điệu không tăng: chứng minh tương tự).

Giả sử $x_0 \in (a, b)$ là một điểm gián đoạn của $f(x)$, $\forall x < x_0$ thì $f(x) \le f(x_0)$, do đó $f(x)$ bị chặn trên (bởi $f(x_0)$ trong (a, x_0)). Theo tiêu chuẩn tồn tại giới hạn (2.5) thì $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ tồn tại tương tự $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ tồn tại, các giới hạn này không thể cùng bằng $f(x_0)$ vì theo giả thiết x_0 là một điểm gián đoạn của $f(x)$, theo định nghĩa x_0 là một điểm gián đoạn loại 1 của $f(x)$.

4) Vì $f(x)$ có hàm ngược trên $[a, b]$ nên khi $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, cho γ gồm giữa $f(x_1)$, $f(x_2)$: $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$ hoặc $f(x_1) > \gamma > f(x_2)$, theo định lý Cauchy (3.3, 3°); $\exists x_3 \in (x_1, x_2)$: $f(x_3) = \gamma$, nghĩa là $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ hoặc $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$ hay khi $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$ hoặc $f(x_1) > f(x_2)$. Vậy $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng hoặc giảm trên $[a, b]$.

5) Rõ ràng $0 < x_n \le 1$, $\forall n \ge 2 \Rightarrow$ dãy x_n là bị chặn. Khi $n \ge 3$, ta có:

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \cos x_n - \cos x_{n-2} = -2\sin\frac{x_n - x_{n-2}}{2}\sin\frac{x_n + x_{n-2}}{2}$$

$$0 < \frac{x_n + x_{n-2}}{2} \le 1, \; -1 \le \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \le 1$$

$$\sin\frac{x_n + x_{n-2}}{2} > 0$$

$$\operatorname{sign}\left(\sin\frac{x_n - x_{n-2}}{2}\right) = \operatorname{sign}(x_n - x_{n-2})$$

Do đó: $\operatorname{sign}(x_{n+1} - x_{n-1}) = -\operatorname{sign}(x_n - x_{n-2})$.

Khi $n \ge 3$ và $n \ge 4$.

$$\operatorname{sign}(x_{n+1} - x_{n-1}) = -(-\operatorname{sign}(x_{n-1} - x_{n-3})) = \operatorname{sign}(x_{n-1} - x_{n-3}) \quad (1)$$

Xét dãy x_{2k-1} : $x_3 = \cos x_2 = \cos(\cos 0) = \cos 1 > 0$

nghĩa là $x_3 > x_1$, bằng quy nạp từ (1) suy ra:

$x_{2k+1} > x_{2k-1}$, $k \in N$, nghĩa là x_{2k-1} là dãy đơn điệu tăng.

Bây giờ xét dãy x_{2k}, $x_4 = \cos x_3 = \cos(\cos 1) < 1$

nghĩa là: $x_4 < x_2$ và cũng từ (1), bằng quy nạp suy ra x_{2k} là dãy đơn điệu giảm.

Như vậy dãy x_{2k-1} (x_{2k}) đơn điệu tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) (bởi 1(0)), theo tiêu chuẩn (W) thì tồn tại các giới hạn:

$$a = \lim x_{2k-1},\ b = \lim x_{2k}$$

Do cosx là hàm liên tục nên từ các đẳng thức:

$$x_{2k} = \cos x_{2k-1},\ x_{2k+1} = \cos x_{2k}$$

Ta suy ra:

$$b = \lim x_{2k} = \lim \cos x_{2k-1} = \cos(\lim x_{2k-1}) = \cos a$$

$$a = \lim \cos x_{2k} = \cos(\lim x_{2k}) = \cos b$$

hay $b = \cos a$, $a = \cos b$ (2).

Vì $0 \le x_n \le 1$, $n \in N$ nên $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$

Từ (2): $a - b = \cos b - \cos a = 2\sin\dfrac{a-b}{2}\sin\dfrac{a+b}{2}$

Mặt khác: $0 \le \dfrac{a+b}{2} \le 1$ và $\left|\sin\dfrac{a-b}{2}\right| \le \left|\dfrac{a-b}{2}\right|$, do đó:

$$0 \le \sin\frac{a+b}{2} \le \sin 1 \text{ và } |a-b| \le |a-b|\sin 1,$$

bất đẳng thức này chỉ xảy ra khi a = b. Như vậy hai dãy x_{2k}, x_{2k-1} cùng hội tụ tới giới hạn a, do đó $\lim x_n = a$ và từ (2) ta có a, b là nghiệm của phương trình $x = \cos x$.

*** 38.** Xét tính liên tục đều của các hàm:

1) $f(x) = \dfrac{x}{3-x^2}$ trong $[-1, 1]$

2) $f(x) = \log_a x$ $(a > 1)$ trong $(0, 1)$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ trong $[0, +\infty]$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ trong $[a, +\infty]$, $a > 0$

5) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ trong $(0, +\infty)$

Bài giải

1) f(x) là liên tục trong đoạn [-1, 1], theo định lý Cantor: f(x) là liên tục đều trong đoạn này.

2) Lấy $x_n = a^{-n}$, $x'_n = a^{-n-1}$ $(0 < x_n, x'_n < 1)$

thì $|x_n - x'_n| = \frac{a-1}{a^{n+1}} \to 0$ $(n \to +\infty)$

Nhưng $|f(x_n) - f(x'_n)| = -n + n + 1 = 1 > \varepsilon$, $\forall\varepsilon < 1$

Vậy f(x) không liên tục đều trong (0, 1).

3) Đặt $x' = x + \Delta$

Và xét $|\sqrt{x+\Delta} - \sqrt{x}| = \varepsilon$

$\Delta > 0 \Rightarrow \sqrt{x+\Delta} = \varepsilon + \sqrt{x}$

$\Rightarrow x + \Delta = \varepsilon^2 + 2\sqrt{x}.\varepsilon + x \Rightarrow \Delta = 2\sqrt{x}.\varepsilon + \varepsilon^2$

Chọn $\delta = \Delta_{min} = \varepsilon^2$ thì khi $|x'-x| < \delta = \varepsilon^2$

ta có $|f(x') - f(x)| = \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x} < \varepsilon$, $\forall x \in [0, +\infty)$.

Vậy theo định nghĩa: f(x) là liên tục đều trong $[0, +\infty)$.

4) Xét $x, x' \in [a, +\infty)$, $a > 0$ khi đó:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| = \frac{|x - x'|}{xx'} \leq \frac{1}{a^2}|x - x'|.$$

$\forall\varepsilon > 0$, chọn $\delta = a^2\varepsilon$ thì khi $|x - x'| < \delta$.

Ta có

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}\right| < \frac{1}{a^2}a^2\varepsilon = \varepsilon.$$

Theo định nghĩa: f(x) là liên tục đều trong [a, + ∞), (a > 0).

5) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Xét $x, x' \in (0, +\infty)$, $\delta > 0$, $|x - x'| \le \delta$

Lấy $x = x_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $x' = x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$

thì $\sin\frac{1}{x_n} = -1$, $\sin\frac{1}{x'_n} = 1$.

$\lim x_n = \lim x'_n = 0 \Rightarrow \exists n : 0 < x_n < \delta$.

$0 < x'_n < \delta$ khi đó $|x_n - x'_n| < \delta$.

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x'_n)| = \left|\sin\frac{1}{x_n} - \sin\frac{1}{x'_n}\right| = 2 = \varepsilon.$$

Vậy $\exists\varepsilon = 2$, $\forall\delta > 0$: $|x_n - x'_n| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x'_n)| \ge \varepsilon$.

Theo định nghĩa: f(x) không liên tục đều trong (0, + ∞).

CHƯƠNG 3

ĐẠO HÀM - VI PHÂN - ÁP DỤNG

§1. ĐỊNH NGHĨA - TÍNH CHẤT - QUY TẮC TÍNH

1.1. Đạo hàm

Cho y = f(x) xác định trong miền X, đạo hàm của f(x):

$$y' = y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \ x \in X$$

Đạo hàm bên phải (trái) điểm $x \in X$: $f'(x + 0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\left(f'(x - 0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ hay: $f'(x^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(f'(x^-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

Về hình học: f'(x) là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại (x, f(x)), $f'(x) = \infty$: tiếp tuyến // Oy.

1.2. Vi phân

y = f(x) gọi là khả vi tại $x \in X$

$$\Leftrightarrow \Delta y = A.\Delta x + 0(\Delta x) \qquad (1)$$

A = const: chỉ phụ thuộc x

$0(\Delta x)$: VCB bậc cao hơn bậc của Δx.

Vi phân $dy = A.\Delta x = f'(x)dx$

Do đó: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; $\frac{dy}{dx}$: ký hiệu đạo hàm, cũng là thương của hai vi phân.

1.3. Tính chất

1^0) $f(x)$ khả vi tại $x \Rightarrow \exists f'(x)$

2^0) $f(x)$ khả vi tại $x \Rightarrow f(x)$ liên tục tại x

3^0) $f(x)$ khả vi tại x và đạt cực trị tại $x \Rightarrow f'(x) = 0$

1.4. Quy tắc tính

1^0) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $\quad d(u \pm v) = du \pm dv$

2^0) $(uv)' = u'v + uv'$; $d(uv) = vdu + udv$

3^0) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$; $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ $(v \neq 0)$

4^0) $y = f(u)$, $u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$

5^0) $y = f(x)$ có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ trong Y

$\Rightarrow x'_y = \frac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$ trong X

1.5. Bảng đạo hàm và vi phân cơ bản

1^0) $c' = 0$ $(c = \text{const})$; $dc = 0$

2^0) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in R)$; $\quad d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$

3^0) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

4^0) $(a^x)' = a^x\ln a$; $\quad d(a^x) = a^x\ln a dx$ $\quad (a > 0, \neq 1)$

$5^0)$ $(e^x)' = e^x;$ $d(e^x) = e^x dx$

$6^0)$ $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\ln a};$ $d(\log_a|x|) = \dfrac{dx}{x\ln a}, \ (x \neq 0)$

$7^0)$ $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x};$ $d(\ln|x|) = \dfrac{dx}{x}, \ (x \neq 0)$

$8^0)$ $(\sin x)' = \cos x;$ $d(\sin x) = \cos x dx$

$9^0)$ $(\cos x)' = -\sin x;$ $d(\cos x) = -\sin x dx$

$10^0)$ $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$ $d(\mathrm{tg}x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

$11^0)$ $(\mathrm{cotg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$ $d(\mathrm{cotg}x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

$12^0)$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$13^0)$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $d(\arccos x) = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$14^0)$ $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$ $d(\mathrm{arctg}x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$15^0)$ $(\mathrm{arccotg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2};$ $d(\mathrm{arccotg}x) = \dfrac{-dx}{1+x^2}$

$16^0)$ $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x;$ $d(\mathrm{sh}x) = \mathrm{ch}x dx$

$17^0)$ $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x;$ $d(\mathrm{ch}x) = \mathrm{sh}x dx$

$18^0)$ $(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x};$ $d(\mathrm{th}x) = \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = (1 - \mathrm{th}^2 x)dx$

$19^0)$ $(\mathrm{coth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x};$ $d(\mathrm{coth}x) = -\dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = (1-\mathrm{coth}^2 x)dx$

$20^0)$ $y = f(x), \ y' = y[\ln f(x)]'$

1.6. Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định nghĩa: $y = f(x)$, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

$(n = 1, 2, \ldots, y^{(0)} = y)$

$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n$.

$y = f(x)$ có vi phân cấp n tại x, gọi là khả vi n lần tại đó.

Quy tắc tính:

$1^0)$ $(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

$2^0)$ $(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . u^{(n-k)}.v^{(k)}$

$= C_n^0 u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \ldots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + C_n^n uv^{(n)}$

(Quy tắc Leibniz).

1.7. Công thức thông dụng

$1^0)$ $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$

$2^0)$ $[(1+ x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$

$3^0)$ $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$4^0)$ $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$5^0)$ $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$, $(e^x)^{(n)} = e^x$

$6^0)$ $(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\ln a x^n}$

$7^0)$ $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

BÀI TẬP

39. Tính f'(x + 0), f'(x - 0), f'(x) tại x tương ứng.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, x = 0

2) $f(x) = |\sin 2x|$, x = 0

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} : x \neq 0 \\ 0 \quad : x = 0 \end{cases}$

4) $f(x) = |1 - x^2|$, x = ± 1

5) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} : x \neq 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$

Bài giải

1) Theo định nghĩa:

$$f'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^2} - \sqrt[3]{0^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = +\infty$$

Tương tự: f'(-0) = - ∞ và f'(0) không tồn tại.

2) $$f'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\sin 2\Delta x}{\Delta x} = -2$$

Vì f'(+0) ≠ f'(-0) nên f'(0) không tồn tại.

3) $$f'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} = 0$$

Tương tự f'(-0) = 0.

Vậy tồn tại f'(0) = 0.

Chú ý rằng khi $x \neq 0$ ta có: $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

Vậy $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} : x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad : x = 0 \end{cases}$

vì $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ không tồn tại nên f'(x) là gián đoạn tại x = 0.

4) Theo giả thiết: $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 : |x| < 1 \\ x^2 - 1 : |x| > 1 \end{cases}$

Xét tại x = 1:

$$f'(1^+) = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0} (2 + \Delta x) = 2$$

Tương tự $f'(1^-) = -2$, vậy không tồn tại f'(1).

Tương tự $f'(-1^+) = -2$, $f'(-1^-) = 2$ và f'(-1) cũng không tồn tại.

5) $$f'(+0) = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{e^{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x} = \lim_{\alpha\to +\infty} \frac{e^{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha\to +\infty} \alpha e^{\alpha} = +\infty$$

$$\left(\alpha = \frac{1}{\Delta x},\ \Delta x \to +0 \Leftrightarrow \alpha \to +\infty\right)$$

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{e^{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x} = \lim_{\alpha\to -\infty} \frac{-\alpha}{e^{\alpha}} = 0$$

$$\left(\alpha = -\frac{1}{\Delta x},\ \Delta x \to -0 \Leftrightarrow \alpha \to +\infty\right)$$

Vậy f'(0) không tồn tại.

40. 1) Xác định α để:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

a) liên tục tại x = 0;

b) có f'(0);

c) có f'(x) liên tục tại x = 0.

2) Xác định α, β ($\beta > 0$) để:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\frac{1}{|x|^\beta} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

có f'(x):

a) bị chặn;

b) không bị chặn tại lân cận điểm x = 0.

Bài giải

1) a) Ta có $\lim\limits_{x\to\pm0} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm0} x^\alpha \sin\frac{1}{x}$

Giới hạn này tồn tại và bằng 0 chỉ khi $\alpha > 0$.

Vậy f(x) liên tục tại x = 0 khi $\alpha > 0$.

b) Ta có:

$$f'(\pm0) = \lim_{\Delta x\to\pm0} \frac{(\Delta x)^\alpha \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to\pm0} (\Delta x)^{\alpha-1} \sin\frac{1}{\Delta x}$$

Giới hạn này tồn tại và bằng 0 chỉ khi $\alpha - 1 > 0$ hay $\alpha > 1$.

Vậy f(x) có f'(0) khi $\alpha > 1$.

c) $x \neq 0$ ta có:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{x\to\pm 0} f'(x)$ tồn tại và bằng 0 chỉ khi $\alpha - 2 > 0$ hay $\alpha > 2$.

Vậy f'(x) liên tục tại x = 0 khi $\alpha > 2$.

2) Tại lân cận gốc toạ độ x = 0:

$$f'(x) = \alpha|x|^{\alpha-1}\text{signx}.\sin\frac{1}{|x|^{\beta}} - \beta|x|^{\alpha-\beta-1}\text{signx}.\cos\frac{1}{|x|^{\beta}} \quad (x \neq 0)$$

a) Rõ ràng $|f'(x)| < +\infty$ (bị chặn)

nếu $\alpha - 1 \geq 0$ và $\alpha - \beta - 1 \geq 0$ hay $\alpha \geq \beta + 1$

b) f'(x) không bị chặn tại lân cận gốc toạ độ nếu $\alpha - 1 < 0$ hoặc $\alpha - \beta - 1 < 0$ hay $\alpha < 1 + \beta$ là được.

Mặt khác để f'(x) tồn tại ta cần có $\alpha > 1$.

Vậy $1 < \alpha < \beta + 1$.

41. Xác định a, b để các hàm sau đây liên tục và khả vi $\forall x \in R$ (1) → 3)).

1) $f(x) = \begin{cases} ax + b & : x \leq 1 \\ x^2 & : x > 1 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} ax + b & : x < 0 \\ a\cos x + b\sin x & : x \geq 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & : |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & : |x| \geq 1 \end{cases}$

*4) Xác định a, b để:

$$f(x) = \begin{cases} \text{arctg}ax & : |x| \le 1 \\ b\text{sign}x + \dfrac{x-1}{2} & : |x| > 1 \end{cases}$$

khả vi tại : a) x = 1; b) x = -1.

Bài giải

1) Khi $x \neq 1$, f(x) là hàm sơ cấp. Vậy nó liên tục $\forall x \neq 1$.

Tại x = 1: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax + b) = a + b$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1$

Vậy để f(x) liên tục tại x = 1 thì: a + b = 1.

Tóm lại: f(x) liên tục tại $\forall x \in R$ khi a + b = 1.

Ta có: $f'(x) = \begin{cases} a & : x \le 1 \\ 2x & : x > 1 \end{cases}$

Do đó khi $x \neq 1$, f'(x) tồn tại, nghĩa là f(x) khả vi $\forall x \neq 1$.

Khi x = 1:

$$f'(1^-) = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{a(1+\Delta x) + \beta - (a+b)}{\Delta x} = a$$

$$f'(1^+) = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{(1+\Delta x)^2 - (a+b)}{\Delta x} = 2$$

Vì theo trên a + b = 1: điều kiện để f(x) liên tục tại x = 1. Do đó để f(x) có đạo hàm,nghĩa là f(x) khả vi tại x = 1 thì a + b = 1 và a = 2, b = -1.

Tóm lại để f(x) khả vi $\forall x \in R$ thì a = 2, b = -1.

2) Tương tự như 1): f(x) là liên tục và khả vi $\forall x \neq 0$.

Xét tại x = 0:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (ax + b) = b$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (a\cos x + b\sin x) = a$$

Vậy f(x) liên tục tại x = 0 khi a = b.

Ta có:

$$f'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{a\cos\Delta x + b\sin\Delta x - a}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{a(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} b\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$= b \text{ (vì } 1 - \cos\Delta x \sim \frac{1}{2}\Delta x^2\text{: số hạng đầu} \to 0)$$

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{a\Delta x + b - a}{\Delta x} = a$$

(vì theo trên a = b ⇒ b - a = 0)

Vậy để f(x) khả vi tại x = 0 thì a = b.

Tóm lại: f(x) khả vi $\forall x \in R$ khi a = b.

3) Tương tự: f(x) là liên tục và khả vi $\forall |x| \neq 1$.

Xét tại x = 1:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (a + bx^2) = a + b$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{|x|} = 1$$

Vậy f(x) liên tục tại x = 1 khi a + b = 1.

$$f'(1^-) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{a + b(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2b$$

(vì a + b = 1: điều kiện liên tục).

$$f'(1^+) = \lim\left(\frac{1}{|1+\Delta x|}-1\right)\Big/\Delta x = -1$$

Vậy f(x) khả vi tại x = 1 và do đó khả vi $\forall x \in R$ khi a + b = 1, 2b = - 1 hay a = 3/2, b = - 1/2.

4) a) Xét x = 1: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \text{arctg}ax = \text{arctg}a$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(b\,\text{sign}x + \frac{x-1}{2}\right) = b$$

Vậy f(x) liên tục tại x = 1 khi b = arctga.

$$f'(1^-) = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\text{arctg}a(1+\Delta x) - \text{arctg}a}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\text{arctg}\frac{a\Delta x}{1+a^2(1+\Delta x)} = \frac{a}{1+a^2}$$

(theo 1.2 chương 2).

$$f'(1^+) = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\Delta x}\left[b\,\text{sign}(1+\Delta x) + \frac{1+\Delta x-1}{2} - \text{arctg}a\right]$$

$$= \lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\Delta x}\left(b - \text{arctg}a + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(b = arctga: điều kiện liên tục).

Vậy f(x) khả vi tại x = 1 khi:

$$b = \text{arctg}a,\ \frac{a}{1+a^2} = \frac{1}{2} \text{ hay } a = 1,\ b = \frac{\pi}{4}.$$

b) Xét x = - 1: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \text{arctg}ax = -\,\text{arctg}a$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(b\,\text{sign}x + \frac{x-1}{2}\right) = -b-1$$

Vậy f(x) liên tục tại x = -1 khi arctga = b + 1.

$$f'(-1^+) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\operatorname{arctga}(-1+\Delta x) - \operatorname{arctg}(-a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x} \operatorname{arctg} \frac{a\Delta x}{1 - a^2(-1+\Delta x)} = \frac{a}{1+a^2}$$

$$f'(-1^-) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x} \left[b\operatorname{sign}(-1+\Delta x) + \frac{-1+\Delta x - 1}{2} - \operatorname{arctg}(-a) \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x} \left(-b - 1 + \frac{\Delta x}{2} + \operatorname{arctga} \right) = \frac{1}{2}$$

(b + 1 = arctga: điều kiện liên tục).

Vậy f(x) khả vi tại x = -1 khi b + 1 = arctga và $\frac{a}{1+a^2} = \frac{1}{2}$ hay a = 1 và b = $\frac{\pi}{4}$ - 1.

42. Tính đạo hàm của các hàm số:

1) $y = \ln\{\cos[\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}2x)]\}$, $x \in R$

2) $y = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\sin^7 x}$, $x \neq \pi n$, $n \in N$

3) $y = (2 + \cos x)^x$, $x \in R$

4) $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$

5) $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$, (a > 0)

6) $y = |\ln|x||$ $(x \neq 0)$

Bài giải

1) $y' = \dfrac{1}{\cos[\text{arctg}(\text{sh}2x)]}.(\cos[\text{arctg}(\text{sh}2x)])'$

$$= \frac{-\sin[\text{arctg}(\text{sh}2x)]}{\cos[\text{arctg}(\text{sh}2x)]}(\text{arctg}(\text{sh}2x))'$$

$$= - \text{tg}[\text{arctg}(\text{sh}2x)]\frac{1}{1+\text{sh}^2 2x}(\text{sh}2x)'$$

$$= - \frac{\text{sh}2x}{1+\text{sh}^2 2x}.\text{ch}2x.(2x)' = - \frac{2\text{ch}2x.\text{sh}2x}{1+\text{sh}^2 2x}$$

$$= - 2\text{th}2x, \quad x \in R$$

2) Đặt $z = \ln|y|$ thì: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}.\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}.\dfrac{dy}{dx}$ và

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = y\frac{dz}{dx}$$

Theo trên:

$$z = \ln|y| = \ln(1 + x^2) - \frac{4}{3}\ln|x| - 7\ln|\sin x|.$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - \frac{7\cos x}{\sin x}$$

Do đó:

$$y' = y'_x = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4\sin^7 x}}.\left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - \frac{7\cos x}{\sin x}\right)$$

3) Ta viết

$y = \exp\{x\ln(2 + \cos x)\}$

$y' = \exp\{x\ln(2 + \cos x)\}.(x\ln(2 + \cos x))'$

$$= \exp\{x\ln(2+\cos x)\}.\left[\ln(2+\cos x) - \frac{x\sin x}{2+\cos x}\right]$$

$$= (2+\cos x)^x.\left[\ln(2+\cos x) - \frac{x\sin x}{2+\cos x}\right]$$

4) Đặt $u = 1 - e^{-x^2}$ $y = \sqrt{u}$ và $y'_u = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, $u > 0$

Vậy khi $x \neq 0$ thì:

$$y' = y'_x = y'_u.u'_x = \frac{(1-e^{-x^2})'}{2\sqrt{1-e^{-x^2}}} = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$$

Tại $x = 0$:

$$y'(\pm 0) = \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{1-e^{-\Delta x^2}} = \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\sqrt{\frac{1-e^{-\Delta x^2}}{\Delta x^2}}$$

$$= \pm\lim_{\Delta x\to\pm 0}\sqrt{\frac{1-e^{-\Delta x^2}}{\Delta x^2}} = \pm 1 \text{ (vì } 1 - e^{-\Delta x^2} \sim \Delta x^2)$$

5) $y' = \left(\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)' + \dfrac{a^2}{2}\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)'$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2}.\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{2}.\frac{1}{a\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} = \sqrt{a^2-x^2}$$

6) Ta có:

$$y = \begin{cases} \ln|x| : \ln|x| \geq 0,\ |x| \geq 1 \\ -\ln|x| : \ln|x| < 0,\ |x| < 1,\ x \neq 0 \end{cases}$$

hay $y = \text{sign}(\ln|x|).\ln|x|$

$$y' = \text{sign}(\ln|x|).\frac{\text{sign}x}{|x|} = \frac{1}{x}.\ \text{sign}(\ln|x|)$$

với $|x| \neq 1$.

Tại $x = \pm 1$

$$f'(1^{\pm}) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}|\ln(1+\Delta x)|$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}\left|\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}\right| = \pm 1$$

$$f'(-1^{\pm}) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}|\ln(-1+\Delta x)|$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}\left|\frac{\ln(1-\Delta x)}{-\Delta x}\right| = \pm 1$$

***43.** 1) Hàm hợp $F(x) = f[g(x)]$ có khả vi tại x_0? nếu':

a) $f(x)$ khả vi tại $g(x_0)$ và $g(x)$ không khả vi tại x_0.

b) $f(x)$ không khả vi tại $g(x_0)$ còn $g(x)$ khả vi tại x_0.

2) Nếu $f(x)$ khả vi trong (a, b)

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \infty \text{ thì } \lim_{x \to a} f(x) = \infty?$$

3) Nếu $f(x)$ khả vi trong $(x_0, +\infty)$ và tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ tồn tại?

4) Hàm $f(x)$ có thể có đạo hàm hữu hạn hoặc vô hạn tại điểm gián đoạn của nó không?

Bài giải

1) Có thể khả vi cũng có thể không.

a) Thí dụ:

$f(x) = x^2$ khả vi tại $x_0 = 0$

$g(x) = |x|$ không khả vi tại $x_0 = 0$.

Hàm hợp $F(x) = f[g(x)] = |x|^2$ là khả vi tại $x_0 = 0$.

Vì $F'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|^2}{\Delta x} = 0$

$f(x) = x$, $g(x) = |x|$

$F(x) = f[g(x)] = |x|$ không khả vi tại $x_0 = 0$.

b) Thí dụ:

$f(x) = |x|$ không khả vi tại $x_0 = 0$, $g(x) = x^2$ khả vi tại $x_0 = 0$.

$F(x) = f[g(x)] = |x^2| = x^2$ khả vi tại $x_0 = 0$.

$f(x) = |x|$, $g(x) = x$.

$F(x) = f[g(x)] = |x|$ không khả vi tại $x_0 = 0$.

2) Từ $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$ không nhất thiết, suy ra $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Thí dụ $f(x) = \sqrt{x}$; $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \infty$ nhưng $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

3) Không nhất thiết suy ra $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ tồn tại.

Thí dụ $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$, $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x^2}{x} = 0$$

nhưng $$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\cos x^2 - \sin x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}\right) \text{ không tồn tại}$$

4) f(x) không thể có đạo hàm hữu hạn tại điểm gián đoạn x_0 của nó, vì nếu ngược lại thì f(x) khả vi tại x_0, theo tính chất hàm khả vi: f(x) là liên tục tại x_0, trái với giả thiết. Mặt khác f(x) có thể có đạo hàm ∞ tại điểm gián đoạn của nó. Thí dụ: f(x) = signx.

x = 0 là điểm gián đoạn của nó.

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x\to-0} \frac{\text{sign}\Delta x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to-0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty$$

$$f'(+0) = \lim_{\Delta x\to+0} \frac{\text{sign}\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to+0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty$$

44. Tính đạo hàm của các hàm ẩn. y = y(x) xác định từ các phương trình:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

3) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

5) $\text{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

Bài giải

1) Coi y = y(x), đạo hàm hai vế phương trình theo x, ta có:

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 2$$

Từ đó:

$$y' = \frac{1-x-y}{x-y}, \ x \neq y$$

2) Tương tự như 1) ta có:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{-b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

3) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}.y' = 0 \Rightarrow y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

4) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y' = 0 \Rightarrow y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$

5) $\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'-y}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow xy' - y = x + yy', \ (x^2 + y^2 \neq 0)$

$\Rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$, $(x \neq y)$

45. Tính dạo hàm của các hàm số cho theo tham số:

1) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

2) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$

3) $\begin{cases} x = \ln\left(\sin\dfrac{t}{2}\right) \\ y = \ln(\sin t) \end{cases}$ $\quad 0 < t < \pi$

4) $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 < \varphi < \dfrac{2\pi}{3}$

Bài giải

1) Theo định nghĩa:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Do đó:

$$y'_x = \frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

2) $$y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}, \quad 0 < t < \pi$$

$y'_x(0) = \infty$

$y'_x(a\pi) = 0$

3) $$y'_x = \frac{\cos t}{\sin t} \Bigg/ \frac{\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}} = \frac{\cos t\sin\dfrac{t}{2}}{\dfrac{1}{2}\sin t\cos\dfrac{t}{2}}$$

$$= \frac{2\cos t\sin\dfrac{t}{2}}{2\sin\dfrac{t}{2}\cos^2\dfrac{t}{2}} = \frac{2\cos t}{1+\cos t}, \quad 0 < t < \pi$$

4) $x = r\cos\varphi = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$

$0 < \varphi < \dfrac{2\pi}{3}$

$$y'_x = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = -\frac{a(1+\cos\varphi)\cos\varphi - a\sin^2\rho}{a(1+\cos\varphi)\sin\rho + a\cos\varphi\sin\rho}$$

$$= -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi} = -\frac{\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$= -\operatorname{cotg}\left(\frac{3\varphi}{2}\right), \quad 0 < \varphi < \frac{2\pi}{3}$$

46. Xác định miền tồn tại của các hàm ngược $x = x(y)$ và tính đạo hàm x'_y nếu:

1) $y = x + \ln x$

2) $y = x + e^x$

3) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ $(x < 0)$

4) $y = \operatorname{ch}x$ $(x > 0)$

Bài giải

1) $y = x + \ln x$, $x > 0$, $-\infty < y < +\infty$

$y'_x = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$, khi $x > 0$ vậy y là hàm đơn điệu tăng nên tồn tại hàm ngược $x = x(y)$ trong $(-\infty, +\infty)$ và

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+x}$$

2) $y = x + e^x$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$.

$y'_x = 1 + e^x > 0$, $\forall x \in R \Rightarrow y$ đơn điệu tăng, do đó tồn tại hàm ngược $x = x(y)$ trong $(-\infty, +\infty)$ và

$$x'_y = \frac{1}{1+e^x}$$

3) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $x < 0$, $0 < y < 1$

$y'_x = \dfrac{(1+x^2)2x - 2x.x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$ khi $x < 0$, vậy y là hàm đơn điệu giảm, vậy tồn tại hàm ngược:

$$x = x(y) \text{ trong } (0, 1) \text{ và } x'_y = \frac{(1+x^2)^2}{2x} = \frac{x^3}{2y^2}$$

4) $y = \text{ch}x$, $x > 0$, $1 < y < +\infty$

$$y' = \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) > 0$$

Vậy y là đơn điệu tăng và tồn tại hàm ngược $x = x(y)$ trong $(1, +\infty)$ và

$$x'_y = \frac{1}{\text{sh}x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

($\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$, $x > 0 : \text{sh}x > 0$).

*__47__. Tính các tổng:

1) $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$

2) $Q(x) = 1^2 + 2^2.x + 3^2.x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$

3) $R(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$

4) $S(x) = \cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$

5) $T(x) = \operatorname{ch}x + 2\operatorname{ch}2x + \ldots + n\operatorname{ch}nx$

Bài giải

1) Rõ ràng

$$P(x) = (x + x^2 + \ldots + x^n)' = \left[\frac{x\left(1-x^n\right)}{1-x}\right]'$$

$$\text{(Tổng cấp số nhân: } S = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}\text{, } a = q = x\text{)}$$

$$P(x) = \left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{(1-x)\left(1-(n+1)x^n\right)+(x-x^{n+1})}{(1-x^2)}$$

$$= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2},\ (x \neq 1)$$

2) Ta có thể viết:

$$Q(x) = 1^2 + 2^2x + \ldots + n^2x^{n-1}$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots nx^{n-1} + x(2 + 6x + \ldots + n(n-1)x^{n-2})$$

$$= P(x) + xP'(x) = (xP(x))'$$

Do đó và theo 1): $Q(x) = \left[x.\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\right]'$

Sau khi tính toán ta có:

$$Q(x) = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3},\ (x \neq 1)$$

3) Ta có:

$$R(x)\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}\sin x + \sin\frac{x}{2}\sin 2x + \ldots + \sin\frac{x}{2}\sin nx$$

$$= \frac{1}{2}[(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}) + (\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}) + \dots$$

$$+ (\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x)]$$

Do đó: $R(x) = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$, $(\sin\frac{x}{2} \neq 0)$

4) Rõ ràng $S(x) = R'(x)$, do đó và theo 3):

$$S(x) = \frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

5) Xét $U(x) = \text{sh}x + \text{sh}2x + \dots + \text{sh}nx$

thì: $T(x) = U'(x)$

Mặt khác:

$$U(x)\text{sh}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}[(\text{ch}\frac{3x}{2} - \text{ch}\frac{x}{2}) + (\text{ch}\frac{5x}{2} - \text{ch}\frac{3x}{2}) + \dots$$

$$+ (\text{ch}\frac{2n+1}{2}x - \text{ch}\frac{2n-1}{2}x)]$$

$$= \frac{1}{2}(\text{ch}\frac{2n+1}{2}x - \text{ch}\frac{x}{2})$$

(Áp dụng công thức: $\text{ch}a - \text{ch}b = 2\text{sh}\frac{a+b}{2}\text{sh}\frac{a-b}{2}$).

Do đó: $U(x) = \dfrac{\text{ch}\frac{2n+1}{2}x - \text{ch}\frac{x}{2}}{2\text{sh}\frac{x}{2}}$, $(x \neq 0)$

và $T(x) = \dfrac{n\,sh\dfrac{x}{2}\,sh\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x - sh^2\dfrac{nx}{2}}{2sh^2\dfrac{x}{2}}$

48. Tính đạo hàm và vi phân cấp 1, cấp 2 của các hàm số:

1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $y = xe^{-x}$

3) $y = \sin x^2,\ \ x = x(t)$

4) $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$

5) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

Bài giải

1) $y' = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$

$dy = \dfrac{dx}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$, $|x| < 1$

$y'' = \left[\dfrac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}\right]' = [(1 - x^2)^{-3/2}]' = -\dfrac{3}{2}(-2x)(1 - x^2)^{-5/2}$

$= \dfrac{3x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5}$, $d^2y = \dfrac{3xdx^2}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5}$, $|x| < 1$

2) $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$, $dy = e^{-x}(1 - x)dx$

$y'' = (e^{-x} - xe^{-x})' = - e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$

$= (x^2 - 2)e^{-x}$, $d^2y = (x - 2)e^{-x}dx^2$

3) $y'_x = 2x\cos x^2$, $y''_{xx} = 2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2$

$dy = 2x\cos x^2 dx$

$d^2y = d(dy) = d(2x\cos x^2 dx)$

$= 2x\cos x^2 d^2x + (2\cos x^2 - 2x^2\sin x^2)dx^2$

$(x = \ (x(t) : d^2x \neq 0)$

4) $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) + x\left[\frac{\cos(\ln x)}{x} - \frac{\sin(\ln x)}{x}\right] =$

$= 2\cos(\ln x)$

$y'' = - \frac{2\sin(\ln x)}{x}$, $x > 0$

$dy = 2\cos(\ln x)dx$, $d^2y = - \frac{2\sin(\ln x)}{x}dx^2$, $(x > 0)$

5) $y'_x = \mathrm{cotg}\frac{t}{2}$ (bài 45.2)

$dy = \mathrm{cotg}\frac{t}{2}dx$

$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t.t'_x$

$(y'_x)'_t = (\mathrm{cotg}\frac{t}{2})'_t = - \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}$,

$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{a(1 - \cos t)}$

Vậy $y''_{xx} = \dfrac{-1}{2a(1-\cos t)\sin^2\dfrac{t}{2}}$

và $d^2y = \dfrac{-dx^2}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$; $(dx = a(1 - \cos t)dt,\ t \neq 2k\pi)$.

49. Chứng minh các hàm sau đây nghiệm đúng các phương trình tương ứng: (C_1, C_2 = const):

1) $y = xe^{\frac{-x^2}{2}}$: $xy' = (1 - x^2)y$

2) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$: $y'' + y = 0$

3) $y = e^{10\arcsin x}$: $(1 - x^2)y'' - xy' - 100y = 0$

4) $y = x^n[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]$:

$$x^2y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$$

bằng cách đặt $x = e^t$

Bài giải

1) $y' = e^{\frac{-x^2}{2}} - x^2e^{\frac{-x^2}{2}}$, thay vào phương trình ta có:

$$xy' - (1 - x^2)y = x(1 - x^2)e^{\frac{-x^2}{2}} - (1 - x^2)\,xe^{\frac{-x^2}{2}} \equiv 0$$

Vậy hàm $y = xe^{\frac{-x^2}{2}}$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

2) $y' = -C_1\sin x + C_2\cos x$

$y'' = -C_1\cos x - C_2\sin x$

$y'' + y = -C_1\cos x - C_2\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x \equiv 0$

3) Đặt $u = 10\arcsin x$, $u' = \dfrac{10}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \frac{10}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = e^u.u'. \frac{100}{\sqrt{1-x^2}} + e^u\left(\frac{10}{\sqrt{1-x^2}}\right)'$$

$$= e^u \frac{10}{1-x^2} + e^u \frac{10x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$$

Vậy:

$(1 - x^2)y'' - xy' - 100y =$

$$= 100e^u + \frac{10xe^u}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{10xe^u}{\sqrt{1-x^2}} - 100e^u \equiv 0$$

$(-1 < x < 1)$

4) $x = e^t$, $\ln x = t$, $(x > 0)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{1}{e^t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{1}{e^t}$$

Do đó: $y = e^{nt}(C_1\cos t + C_2\sin t)$ (1)

và $x^2y'' - 2ny' + (1 + n^2)y =$

$$= e^{2t} \cdot \frac{1}{e^{2t}}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + (1 - 2n) \cdot \frac{e^t}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt} + (1 + n^2)y = 0$$

hay $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2n\dfrac{dy}{dt} + (1 + n^2)y = 0$ (2)

Vậy, bài toán dưa về bài toán: Chứng minh hàm (1) nghiệm đúng phương trình (2):

Ta có:

$y'_t = ne^{nt}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{nt}(-C_1\sin t + C_2\cos t)$

$$y''_{tt} = n^2e^{nt}(C_1\cos t + C_2\sin t) + ne^{nt}(-C_1\sin t + C_2\cos t) + $$
$$+ ne^{nt}(-C_1\sin t + C_2\cos t) + e^{nt}(-C_1\cos t - C_2\sin t)$$

và $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2n\dfrac{dy}{dt} + (1 + n^2)y =$

$$= e^{nt}[n^2(C_1\cos t + C_2\sin t) + 2n(-C_1\sin t + C_2\cos t) -$$
$$- (C_1\cos t + C_2\sin t) - 2n^2(C_1\cos t + C_2\sin t) -$$
$$- 2n(-C_1\sin t + C_2\cos t) + n^2(C_1\cos t + C_2\sin t) +$$
$$+ (C_1\cos t + C_2\sin t)] = 0$$

50. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

1) $y = \dfrac{1}{a + bx}$

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a + bx}}$

3) $y = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$

4) $y = e^{ax}\sin bx$

5) $y = x^2\cos 2x$

*6) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x}}$

*7) $y = x^{n-1}.e^{\frac{1}{x}}$

Bài giải

1) $y = \dfrac{1}{a + bx} = (a + bx)^{-1}$

$y' = -b(a + bx)^{-2}$

$y'' = -1.(-2).b^2(a + bx)^{-3}, \ldots$

$$y^{(n)} = -1.(-2)...(-1-n+1)b^n(a+bx)^{-1-n} = \frac{(-1)^n.n!b^n}{(a+bx)^{n+1}}$$

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a+bx}} = (a+bx)^{-\frac{1}{2}}$

Tương tự ta có:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.(2n-1)!!.b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}$$

$((2n-1)!! = 1.3.5..(2n-1))$

3) $y = \dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{(x+a)(x-a)} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right)$

$y^{(n)} = \dfrac{1}{2a}\left[\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)} - \left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}\right]$, theo 1) với b = 1:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$$

4) Ta có:

$$y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$$

Đặt $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

thì $y' = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{ax}(\sin bx\cos\varphi + \cos bx\sin\varphi)$

hay $y' = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{ax}\sin(bx+\varphi)$

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}.\ e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$$

Thực vậy, n = 1, theo trên công thức đúng.

Giả sử công thức đúng với n = k:

$$y^{(k)} = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{k}{2}} .\ e^{ax}\sin(bx + k\varphi)$$

$$y^{(k+1)} = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{k}{2}} .\ [ae^{ax}\sin(bx + k\varphi) + be^{ax}\cos(bx + k\varphi)]$$

$$= \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{k+1}{2}} .\ e^{ax}\sin[bx + (k + 1)\varphi]$$

Nghĩa là công thức đúng với n = k + 1.

Vậy công thức đúng $\forall n \in N$.

5) $y = x^2\cos 2x$, đặt $u = \cos 2x$, $v = x^2$

Áp dụng công thức Leibniz (1.6):

$$y^{(n)} = C_n^0 x^2(\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)'(\cos 2x)^{(n-1)} +$$

$$+ C_n^2 (x^2)''(\cos 2x)^{(n-2)} + 0 \text{ vì } (x^2)''' = 0$$

Mặt khác theo ($1.7.4^0$):

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

và tính toán, cuối cùng ta có:

$$y^{(n)} = 2^n\left(x^2 - \frac{n(n-1)}{2}\right)\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^n nx\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left[C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},\right.$$

$$\cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\left.\cos\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

6) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$, ta viết $y = xy_1$

với $y_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$

Áp dụng công thức Leibniz (1.6):

$$y^{(n)} = (xy_1)^{(n)} = xy_1^{(n)} + ny_1^{(n-1)}$$

Áp dụng công thức (1.7.2°) ta có:

$$y_1^{(k)} = (-1)^k \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)...\left(\frac{1}{3}-k+1\right)(1+x)^{-\frac{1}{3}-k}$$

Do đó:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n .1\,.\,4 ... (3n-2)x}{3^n(1+x)^{\frac{1}{3}+n}} + \frac{(-1)^{n-1} .1\,.\,4 ... (3n-5)n}{3^{n-1}(1+x)^{\frac{1}{3}+n-1}}$$

$$= \frac{(-1)^n .1\,.\,4 ... (3n-5)}{3^n(1+x)^{\frac{1}{3}+n}}.[(3n-2)x - 3n(1+x)]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} .1\,.\,4 ... (3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$$

7) $y = x^{n-1}.e^{\frac{1}{x}}$, $n \in N$, $x \neq 0$

Xét $n = 1$, $y = e^{\frac{1}{x}}$, $y' = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

$n = 2$, $y = xe^{\frac{1}{x}}$, $y' = e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} \qquad (1)$$

Theo trên n = 1, n = 2, (1) là đúng.

Giả sử n = k, (1) là đúng:

$$y^{(k)} = \frac{(-1)^k e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{d}{dx}\left(x^k e^{\frac{1}{x}}\right)\right]$$

$$= \frac{d^k}{dx^k}[kx^{k-1} e^{\frac{1}{x}} - x^{k-2} e^{\frac{1}{x}}]$$

$$= k\frac{d^k}{dx^k}(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}) - \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(x^{k-2} e^{\frac{1}{x}}\right)\right]$$

$$= k(-1)^k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}} - \frac{d}{dx}\left[(-1)^{k-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^k}\right]$$

$$= k(-1)^k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}} - \left[-(-1)^{k-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}} - (-1)^{k-1}\frac{ke^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}}\right]$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+2}}$$

Vậy (1) đúng với n = k + 1 và theo phương pháp quy nạp: (1) đúng $\forall n \in N$.

51. Tính đạo hàm và vi phân các cấp được chỉ ra của các hàm số tại x tương ứng:

1) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, $y^{(10)}(0) = ?$

2) $y = \dfrac{e^x}{x}$, $y^{(10)}(x) = ?$

3) $y = \cos x.\text{ch}x$, $d^6y(x) = ?$

*4) $y = \text{arctg}x$, $d^ny(0) = ?$

Bài giải

1) $y = \dfrac{x^2}{1-x} = \dfrac{x^2-1+1}{1-x} = -(1+x) + \dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(10)}(x) = [-(1+x)]^{(10)} + [(1-x)^{-1}]^{(10)} = [(1-x)^{-1}]^{(10)}$$

Áp dụng (1.7.2^0) ta có:

$$y^{(10)}(x) = 10!(1-x)^{-11},\ x \neq 1$$

Do đó $y^{(10)}(0) = 10!$

2) Đặt $u = \dfrac{1}{x}$, $v = e^x$

Theo công thức Leibniz (1.6) ta có:

$$y^{(10)} = C_{10}^0\frac{1}{x}e^x - C_{10}^1.\frac{e^x}{x^2} + 2.C_{10}^2.\frac{e^x}{x^3} - 2.3.C_{10}^3.\frac{e^x}{x^4} +$$

$$+ 2.3.4.C_{10}^4.\frac{e^x}{x^5} - 5!C_{10}^5.\frac{e^x}{x^6} + 6!C_{10}^6.\frac{e^x}{x^7} - 7!C_{10}^7.\frac{e^x}{x^8} +$$

$$+ 8!C_{10}^8.\frac{e^x}{x^9} - 9!C_{10}^9.\frac{e^x}{x^{10}} + 10!\ \frac{e^x}{x^{11}}$$

$$= e^x\sum_{n=0}^{10}(-1)^nC_{10}^n\frac{n!}{x^{n-1}}$$

3) $y = \cos x.\text{ch}x$, đặt $u = \cos x$, $v = \text{ch}x$

Theo công thức Leibniz (1.6) và ($1.7.4^0$) ta có:

$$y^{(6)} = C_6^0\cos\left(x+\frac{6\pi}{2}\right)\text{ch}x + C_6^1\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\text{sh}x +$$

$$+ C_6^2\cos\left(x+\frac{4\pi}{2}\right)\text{ch}x + C_6^3\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\text{sh}x +$$

$$+ C_6^4\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\text{ch}x + C_6^5\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\text{sh}x + C_6^6\cos x.\text{ch}x$$

$$= \cos x.\text{ch}x - 6\sin x\text{sh}x + 15\cos x\text{ch}x + 20\sin x\text{sh}x -$$

$$- 15\cos x\text{ch}x - 6\sin x\text{sh}x + \cos x\text{ch}x = 8\sin x\text{sh}x$$

Do đó: $d^6y = 8\text{sh}x\sin x dx^6$

4) Ta có: $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ hay $(1 + x^2)y' = 1$ (1)

Lấy đạo hàm cấp $(n - 1)$ hai vế của (1) ta có:

(theo công thức Leibniz $u = y'$, $v = 1 + x^2$)

$$(1 + x^2)y^{(n)} + 2(n - 1)xy^{(n-1)} + (n - 1)(n - 2)y^{(n-2)} = 0$$

tại $x = 0$, ta có:

$$y^{(n)}(0) = -(n - 1)(n - 2)y^{(n-2)}(0)\ ,\ n \geq 2 \quad (2)$$

Do đó: $n = 2 : y^{(2)}(0) = 0$

$$y^{(4)} = -(3.2)y'' = 0 \ .... \ y^{(2k)} = 0$$

$n = 1$, từ $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ ta có $y'(0) = 1$.

Theo (2): $y^{(3)}(0) = -(2.1).f'(0) = -(2.1)$

$$y^{(2k+1)}(0) = -(2k).(2k - 1).y^{(2k-1)}(0)$$

$$= ... = (-1)^k(2k)!y'(0) = (-1)^k(2k)!$$

52. Các hàm sau dây khả vi bao nhiêu lần tại x = 0?

1) $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & : x < 0 \\ \ln(1+x)-x & : x \geq 0 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 2x\cos x & : x < 0 \\ \sin 2x & : x \geq 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\dfrac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

Bài giải

1) $f'(x) = \begin{cases} \sin x & : x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} - 1 & : x \geq 0 \end{cases}$

Do đó: $f'(+0) = 0$

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x} = 0$$

Vậy $f'(+0) = f'(-0) = 0$: $f(x)$ là khả vi tại $x = 0$ và $f'(0) = 0$.

$$f''(x) = \begin{cases} \cos x & : x < 0 \\ -\dfrac{1}{(1+x)^2} & : x \geq 0 \end{cases}$$

Do đó: $f''(+0) = -1$

$$f''(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Vậy $f''(+0) \neq f''(-0)$: $f''(0)$ không tồn tại và $f(x)$ chỉ khả vi một lần tại $x = 0$.

2) Ta có $f'(x) = \begin{cases} 2\cos x - 2x\sin x : x < 0 \\ 2\cos 2x \quad : x \geq 0 \end{cases}$

và $f'(+0) = 2$.

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{2\Delta x \cos \Delta x}{\Delta x} = 2$$

Vậy $f'(+0) = f'(-0) = 2$, $f'(0) = 2$: $f(x)$ là khả vi tại $x = 0$.

$$f''(x) = \begin{cases} -4\sin x - 2x\cos x : x < 0 \\ -4\sin 2x \quad : x \geq 0 \end{cases}$$

và $f''(+0) = 0$.

$$f''(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f'(0+\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{2\cos \Delta x - 2\Delta x \sin \Delta x - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{2(\cos \Delta x - 1) - 2\Delta x \sin x}{\Delta x} = 0$$

Vậy $f''(+0) = f''(-0) = 0$, $f''(0) = 0$.

Xét $\quad f'''(x) = \begin{cases} -6\cos x + 2x\sin x : x < 0 \\ -8\cos 2x \quad : x \geq 0 \end{cases}$

Từ đó $\quad f'''(+0) = -8$.

$$f'''(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f''(0+\Delta x) - f''(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-4\sin \Delta x - 2\Delta x \cos \Delta x - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \left(\frac{-4\sin \Delta x}{x} - 2\cos \Delta x \right) = -6$$

Vậy $f'''(0)$ không tồn tại và $f(x)$ chỉ khả vi hai lần tại $x = 0$.

3) $\quad f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} : x \neq 0 \\ 0 \quad : x = 0 \end{cases}$

Ta có: $f'(x) = 4x^3\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x^4\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

$f''(x) = 12x^2\sin\frac{1}{x} - 6x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$$f''(0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{4\Delta x^3\sin\frac{1}{\Delta x} - \Delta x^2\cos\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'''(0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f''(0+\Delta x) - f''(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{12\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x} - 6\Delta x\cos\frac{1}{\Delta x} + \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$

Do đó f'''(0) không tồn tại và f(x) chỉ khả vi hai lần tại x = 0.

4) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

khi $x \neq 0$ ta có:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}.e^{-\frac{1}{x^2}},\ f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right).e^{-\frac{1}{x^2}},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)$$

$$= Q_{3n}.\left(\frac{1}{x}\right).e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ là một da thức bậc 3n của dối số $\frac{1}{x}$.

Xét $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} - 0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha e^{\alpha^2}} = 0, \ (\alpha = \frac{1}{\Delta x})$$

Tương tự $f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$ với $n \in N$.

Vậy $f(x)$ khả vi $\forall n \in N$ tại $x = 0$, ta gọi $f(x)$ là khả vi vô hạn lần khi $x = 0$.

53. 1) Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi tại $x \in X$. Tìm:

a) Phương trình của tiếp tuyến, pháp tuyến với đồ thị hàm số tại $x_0 \in X$;

b) Độ dài của đoạn tiếp tuyến, pháp tuyến (độ dài của tiếp tuyến, pháp tuyến gồm giữa tiếp điểm và trục hoành);

c) Độ dài của tiếp ảnh, pháp ảnh (hình chiếu của đoạn tiếp tuyến, pháp tuyến trên trục hoành).

2) Cho $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ khả vi tại $x_0 \in X$; (x_0, y_0) là giao điểm các đồ thị của chúng.

Tìm góc giữa các đồ thị đó tại (x_0, y_0) (góc giữa các tiếp tuyến của chúng tại (x_0, y_0)).

3) Tìm giao điểm của các ellipses:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

và tìm góc giữa chúng tại các giao điểm đó.

Bài giải

1) a) Theo ý nghĩa hình học của đạo hàm thì phương trình của tiếp tuyến MT (pháp tuyến MN) với đồ thị hàm số tại M có hoành độ x_0 là:

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0)$$

$$(Y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(X - x_0), \ y_0 = f(x_0))$$

(nếu $f'(x_0) = \infty$ thì tiếp tuyến song song với trục tung).

b) Theo H7, ta có đoạn tiếp tuyến MT (đoạn pháp tuyến MN) là:

$$MT = \sqrt{(x_T - x_0)^2 + (y_T - y_0)^2};$$

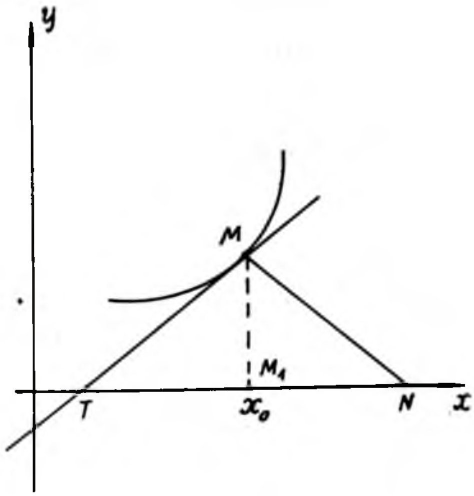
$$(MT = \sqrt{(x_N - x_0)^2 + (y_N - y_0)^2})$$

(x_T, y_T) và $((x_N, y_N))$ là giao điểm của tiếp tuyến (pháp tuyến) với Ox:

Từ phương trình của tiếp tuyến ta có:

$$y_T = 0 \Rightarrow x_T = -\frac{y_0}{y'_0} + x_0,$$

với $y'_0 = f'(x_0)$.



Hình 7.

Từ đó:

$$MT = \sqrt{\left(-\frac{y_0}{y'_0} + x_0 - x_0\right)^2 + (0 - y_0)^2} = \left|\frac{y_0}{y'_0}\right|\sqrt{1 + y'^2_0}$$

(Tương tự: $MN = |y_0|\sqrt{1 + y'^2_0}$).

c) Theo H7, tiếp ảnh (pháp ảnh) tại tiếp điểm M có hoành độ x_0 là:

$$MM_1 = MT\cos\alpha = \left|\frac{y_0}{y'_0}\right| \text{ vì}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_0}}$$

tương tự: pháp ảnh $NM_1 = |y_0 y'_0|$.

2) Theo H8, ta có:

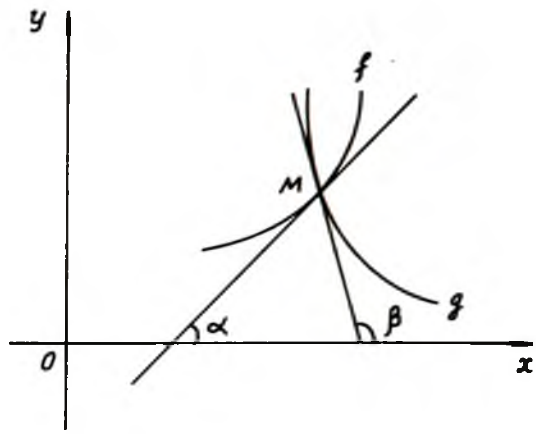
$\varphi = \beta - \alpha,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

và $\mathrm{tg}\varphi = \left|\dfrac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}\right|$

hay $\mathrm{tg}\varphi = \left|\dfrac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 - f'(x_0)g'(x_0)}\right|$,

$M(x_0, y_0)$.

Đó là công thức xác dịnh góc giữa hai đường cong tại giao đểm $M_0(x_0, y_0)$ của chúng.



Hình 8.

3) Giao điểm của các ellipses đã cho là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có 4 nghiệm tương ứng với 4 giao điểm của các ellipses.

Xét một giao điểm $(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$.

Từ phương trình đầu ta có:

$$\frac{2x}{16} + \frac{2yy'}{9} = 0 \text{ hay } y' = -\frac{9}{16}\frac{x}{y} \text{ và } y'(\frac{12}{5}) = -\frac{9}{16}$$

Tương tự đối với ellipses thứ hai: $y'(\frac{12}{5}) = -\frac{16}{9}$.

Do đó góc giữa hai ellipses tại M_1:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{-\frac{9}{16} - \left(-\frac{16}{9}\right)}{1 + \left(-\frac{9}{16}\right)\left(-\frac{16}{9}\right)} \right| = \frac{175}{288}$$

hay $\varphi \approx 31^0$.

Vì lý do đối xứng, dễ dàng suy được các giao điểm khác và các góc giữa hai ellipses tại các giáo điểm đó.

***54. Chứng minh:**

1) **Đa thức Legendre:**

$$y = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x^2 - 1)^n]}{dx^n}, \; n \in N$$

nghiệm đúng phương trình Legendre:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

2) **Đa thức Laguerre:**

$$y = L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n\left(x^n e^{-n}\right)}{dx^n}$$

nghiệm đúng phương trình: $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$

Bài giải

1) Đặt $u = (x^2 - 1)^n$ thì $u^{(n)} = 2^n.n!P_n(x)$

Rõ ràng nếu $u^{(n)}$ nghiệm đúng phương trình Legendre thì $P_n(x)$ cũng nghiệm đúng phương trình đó vì $2^n.n! = \text{const}$ và vì phương trình đó không có vế phải (thuần nhất).

Từ $u = (x^2 - 1)^n$ ta có $u' = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}$

hay $(x^2 - 1)u' = 2nxu$

Đạo hàm $(n + 1)$ lần đẳng thức này, theo công thức Leibniz (1.6), ta có:

$$(x^2 - 1)u^{(n+2)} + 2(n + 1)xu^{(n+1)} + (n + 1)nu^{(n)}$$
$$= 2nxu^{(n+1)} + 2n(n + 1)u^{(n)}$$

hay $(1 - x^2)u^{(n+2)} - 2xu^{(n+1)} + n(n + 1)u^{(n)} = 0$

Vậy $u^{(n)}$ nghiệm đúng phương trình Legendre nghĩa là $y = P_n(x)$ nghiệm đúng phương trình đó.

2) Đặt $u = x^n e^{-x}$ thì $u^{(n)} = e^{-x}.n!L_n(x)$

Từ đó $\quad u' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$

$$xu' = nu - xu = (n - x)u$$

hay $xu' + (x - n)u = 0$

Đạo hàm $(n + 1)$ lần đẳng thức này, theo (1.6), ta có:

$$xu^{(n+2)} + (n + 1)u^{(n+1)} + (x - n)u^{(n+1)} + (n + 1)u^{(n)} = 0$$

hay $\quad xu^{(n+2)} + (x + 1)u^{(n+1)} + (n + 1)u^{(n)} = 0 \quad (1)$

vì $u^{(n)} = n!e^{-x}L_n(x)$

nên $u^{(n+1)} = n!e^{-x}[L'_n(x) - L_n(x)]$

$$u^{(n+2)} = n!e^{-x}[L''_n(x) - 2L'_n(x) + L_n(x)]$$

Thay $u^{(n)}$, $u^{(n+1)}$, $u^{(n+2)}$ theo các công thức này vào (1) và rút gọn ta được:

$$xL''_n(x) + (1 - x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$$

§2. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI

2.1. Các định lý trung bình

Định lý Rolle (R)

$$\text{Nếu} \begin{cases} f(x) \text{ liên tục trong } [a, b] \\ \text{khả vi trong } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad \text{thì } \exists c \in (a, b): f'(c) = 0$$

Định lý Lagrange (L)

Nếu $\begin{cases} f(x) \text{ liên tục trong } [a, b] \\ \text{khả vi trong } (a, b) \end{cases}$ thì $\begin{cases} \exists c \in (a, b): \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \end{cases}$

Định lý Cauchy (C)

Nếu $\begin{cases} f(x), g(x) \text{ liên tục trong } [a, b] \\ \text{khả vi trong } (a, b) \\ g'(x) \neq 0 \text{ trong } (a, b) \end{cases}$ thì $\begin{cases} \exists c \in (a, b): \\ \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \end{cases}$

Định lý L'Hôpital (H) (khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$)

Nếu $\begin{cases} f(x), g(x) \text{ thoả mãn các điều kiện của định lý} \\ \text{Cauchy trong lân cận của } x_0 \in \widetilde{R}, \text{ trừ tại } x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \ (\infty) \\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a \ (a \in \widetilde{R}) \end{cases}$

thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$

2.2. Công thức Taylor và Maclaurin

Nếu hàm $y = f(x)$ khả vi $n + 1$ lần trong lân cận cua điểm x_0 thì trong lân cận của x_0, ta có công thức:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots +$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (T)$$

gọi là công thức Taylor cấp n.

Với: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$: số hạng dư dạng Lagrange.

$c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$

$R_n(x) = 0((x - x_0)^n)$ (VCB bậc cao hơn $(x - x_0)^n$): số dư dạng Peano.

Đạc biệt $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n + R_n(x) \quad \text{(M)}$$

gọi là công thức Maclaurin cấp n.

Các khai triển thông dụng theo công thức Maclaurin:

$1^0)$ $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$2^0)$ $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots +$$

$$+ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + \sin[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}]\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$3^0)$ $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots +$$

$$+ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + \cos[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}]\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$4^0)$ $$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1 + \theta x)^{\alpha-n-1}.x^{n+1}$$

$\alpha \in R$, $0 < \theta < 1$.

5°) $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n)$

6°) $\text{arctgx} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + 0(x^{2k+2})$

$n = 2$: $\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + 0(x^6)$.

7°) $\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)}x^{2k+1} + 0(x^{2k+2})$

$n = 2$: $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + 0(x^6)$

($(2k - 1)!! = 1.3.5\ldots(2k - 3)(2k - 1)$; $5!! = 1.3.5$)

BÀI TẬP

55. Nghiệm lại định lý:

1) (R) đối với

a) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ trong $[1, 3]$;

b) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ trong $[-1, 1]$

2) (L) đối với $f(x) = \sin x + 2x$ trong $[0, \pi]$

3) (C) đối với $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ trong $[-1, 1]$

Bài giải

1) a) $f(x)$ liên tục trong $[1, 3]$ vì là hàm sơ cấp;

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ nên $f(x)$ khả vi $\forall x \in R$, đặc biệt nó khả vi trong $(1, 3)$;

$f(1) = f(3) = 0$. Vậy $f(x)$ thoả mãn mọi điều kiện của định lý (R) nên $\forall c \in (1, 3)$:

$f'(c) = 0$ hay $3c^2 - 12c + 11 = 0$

Do đó ta tìm được hai giá trị của c:

$$c_1 = \frac{6+\sqrt{3}}{3};\ c_2 = \frac{6-\sqrt{3}}{3} \quad (c_1, c_2 \in (1, 3))$$

b) f(x) không thoả mãn điều kiện khả vi trong (-1, 1), vì $f'(x) = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$ tại $0 \in (-1, 1)$. Vậy không có c để f'(c) = 0 trong (-1, 1).

2) Rõ ràng f(x) thoả mãn các điều kiện của định lý (L) trong $[0, \pi]$.

Vậy ta có: $f(\pi) - f(0) = f'(c)(\pi - 0)$

hay: $2\pi = (\cos c + 2)\pi$ và $c = \frac{\pi}{2}$, $(\in (0, \pi))$

3) Áp dụng định lý (C), trong [-1, 1]:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},\ c \in (-1, 1)$$

hay $\frac{0}{2} = \frac{2c}{3c^2} = \frac{2}{3c}$, nghĩa là không tồn tại c thoả mãn định lý, điều này do g(x) không thoả mãn một điều kiện của định lý:

$$g'(x) = 3x^2 = 0 \text{ tại } x = 0 \in (-1, 1)$$

56. Áp dụng định lý (L) chứng minh các bất đẳng thức:

1) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$

2) $|\text{arctg}a - \text{arctg}b| \le |a - b|$

3) $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b},\ 0 < b < a$

4) $\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}}\right],\ \alpha > 0,\ n \in N$

Bài giải

1) Xét hàm số $f(t) = \sin t$ thì $f(t)$ thoả mãn mọi điều kiện của định lý (L) trong đoạn $[x, y]$ bất kỳ.

Vậy $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$

hay $\sin x - \sin y = \cos c(x - y)$

và $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ do $|\cos c| \le 1$.

2) tương tự như 1): xét $f(x) = \mathrm{arctg}x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

ta có: $\mathrm{arctg}a - \mathrm{arctg}b = \dfrac{1}{1+c^2}(a - b)$

Vậy $|\mathrm{arctg}a - \mathrm{arctg}b| \le |a - b|$ vì $\dfrac{1}{1+c^2} \le 1$.

3) Xét $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ thoả mãn các điều kiện của định lý (L) trong $[a, b]$.

Vậy $\ln a - \ln b = \dfrac{1}{c}(a - b)$ với $b < c < a$

Do đó $\ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$ và $\ln\dfrac{a}{b} > \dfrac{a-b}{a}$

Vậy $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$.

4) Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$: $f(x)$ thoả mãn mọi điều kiện của định lý (L) trong $[n - 1, n]$.

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{\alpha}{x^{\alpha-1}}$

và: $\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n-1)^\alpha} = -\dfrac{\alpha}{c^{\alpha-1}}(n - (n - 1))$

hay $\dfrac{1}{(n-1)^\alpha} - \dfrac{1}{n^\alpha} = \dfrac{\alpha}{c^{\alpha+1}}$ với $n - 1 < c < n$

Vậy $\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}}\right]$

***57.** Chứng minh:

1) Nếu f(x) có f'(x) trong (a, b); a, b $\in \tilde{R}$

và $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = A \in R$ thì $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

2) Nếu f(x) có f'(x), ..., $f^{(n-1)}(x)$ liên tục trong $[x_0, x_n]$, có $f^{(n)}(x)$ trong (x_0, x_n) và $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_n)$; $x_0 < x_1 < ... < x_n$ thì $\exists c \in (x_0, x_n) : f^{(n)}(c) = 0$.

3) Cho f(x) khả vi trên [a, b], có f''(x) trên (a, b), chứng minh: $\forall x \in (a, b), \exists c \in (a, b)$:

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$$

4) Cho f(x) khả vi trên [0, 1], $f'(0).f'(1) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0, 1): f'(x_0) = 0$

Bài giải

1) Xét a, b $\in$ R

Đặt $F(x) = \begin{cases} f(x) : a < x < b \\ A : x = a, x = b \end{cases}$

Rõ ràng f(x) thoả mãn các điều kiện của định lý (R):

$\exists c \in (a, b) : F'(c) = 0$ nhưng $c \in (a, b)$ thì $F'(c) = f'(c)$

Vậy $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Xét a $\in$ R, b= + ∞ (tương tự cho các trường hợp a = - ∞, b $\in$ R, a = ∞, b = ∞).

Vì $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$ nên $\forall \varepsilon > 0$, đường thẳng y = A + ε ($A \ge 0$) hay y = A - ε ($A \le 0$) sẽ cắt đồ thị của hàm số ít nhất tại hai điểm x_1, x_2. $x_1, x_2 \in (a, +\infty)$. Trên $[x_1, x_2]$, f(x) thoả mãn các điều kiện của định lý (R) nên $\exists c \in (x_1, x_2)$: f'(c) = 0 vì $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ nên suy ra:

$\exists c \in (a, +\infty) : f'(c) = 0$

2) Theo giả thiết thì f(x) thoả mãn các điều kiện của định lý (R) trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$, i = 1, 2, ..., n nên $\exists$n điểm c_i (i = 1, 2, ..., n), $c_i \in (x_0, x_n) : f'(c_i) = 0$.

Hàm f'(x) lại thoả mãn các điều kiện của định lý (R) trên mỗi đoạn $[c_i, c_{i+1}]$ i = 1, 2, ..., n - 1, do đó $\exists$(n - 1) điểm $d_i \in (x_0, x_n) : f''(d_i) = 0$.

Quá trình lý luận tiếp tục ta có: $\exists$(n - (n - 2)) = 2 điểm $e_i \in (x_0, x_n) : f^{(n-1)}(e_i) = 0$ (i = 1, 2). Theo giả thiết $f^{(n-1)}(x)$ là liên tục trên $[e_1, e_2]$ và do đó $f^{(n-1)}(x)$ có đầy đủ các giả thiết của định lý (R) trên đoạn đó, vậy $\exists c \in [e_1, e_2] : f^{(n)}(c) = 0$.

3) Xét $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \dfrac{(x-a)(x-b)}{2}.\lambda$

Xác định λ để $\varphi(x_o) = 0, x_o \in (a, b)$. Ta có $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$, $\varphi(x_o) = 0$. Hàm φ thoả mãn định lý Rolle trong $[a, x_o]$, và $[x_o, b] \Rightarrow \exists c_1 : a < c_1 < x_o$, $\exists c_2 : x_o < c_2 < b : \varphi'(c_1) = 0$, $\varphi'(c_2) = 0$. Hàm φ' thoả mãn định lý Rolle trong $[c_1, c_2] \Rightarrow \exists c \in (c_1, c_2)$; $\varphi''(c) = 0$, $\varphi''(c) = f''(c) - \lambda = 0 \Rightarrow f''(c) = \lambda$, $a < c < b$. Do đó ta có công thức phải chứng minh.

4) Xét $f'(0) > 0$ thì $f'(1) < 0$; f(x) liên tục trong $[0, 1] \Rightarrow$ f(x) đạt một giá trị lớn nhất $M = f(x_o)$, $x_o \in [0, 1]$, rõ ràng $x_o \neq 0$ vì $f(x) = f(0) + f'(0).x + 0(x) \Rightarrow f(x) > f(0)$, tương tự $x_o \neq 1 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

*58. Chứng minh rằng:

1) Nếu mọi nghiệm của đa thức với hệ số thực:

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ đều thực thì các đạo hàm: f'(x), f''(x), ..., $f^{(n-1)}(x)$ cũng chỉ có các nghiệm thực.

2) Mọi nghiệm của đa thức Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}$$

đều thực và thuộc khoảng (-1, 1).

3) Mọi nghiệm của đa thức Laguerre:

$L_n(x) = e^x\dfrac{d^n(x^ne^{-x})}{dx^n}$ đều dương.

Bài giải

1) Giả sử các nghiệm của f(x) là thực và khác nhau, theo định lý (R): f'(x) có n - 1 nghiệm, f"(x) có n - 2 nghiệm thực, $f^{(n-1)}(x)$ có n - (n - 1) = 1 nghiệm thực. Vậy mọi nghiệm của các đạo hàm đó đều thực vì f(x) bậc n thì f'(x) bậc n - 1 ... $f^{(n-1)}(x)$ có bậc 1, theo đại số học một đa thức bậc n có đúng n nghiệm.

Nếu một nghiệm thực của f(x) là nghiệm bội m ($m \le n$) chẳng hạn thì nó cũng là nghiệm của đạo hàm của f(x) nghĩa là nghiệm đó cũng thực.

2) Xét đa thức $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$ (bậc 2n)

Đa thức này có 2n nghiệm thực

$$x_1 = x_2 = \dots x_n = -1$$

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{2n} = 1$$

theo 1) $Q_{2n}^{(n)}(x)$ có 2n - n = n nghiệm thực $\in (-1, 1)$.

Vậy $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n.n!} Q_{2n}^{(n)}(x)$ có n nghiệm thực $\in (-1, 1)$.

Vì một đa thức bậc n chỉ có n nghiệm nên mọi nghiệm của $P_n(x)$ đều thực và $\in (-1, 1)$.

3) Xét hàm $g(x) = x^n e^{-x}$

$$g'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - e^{-x}.x^n = e^{-x}(nx^{n-1} - x^n) = e^{-x}.P_{1,n}(x)$$

$$g''(x) = e^{-x}[n(n-1)x^{n-2} - 2nx^{n-1} + x^n] = e^{-x}P_{2,n}(x)$$

.....

$$g^{(n-1)}(x) = e^{-x}P_{n-1,n}(x)$$

$$g^{(n)}(x) = e^{-x}P_{n,n}(x)$$

Trong đó $P_{1,n}(x)$, $P_{2,n}(x)$, ..., $P_{n-1,n}(x)$ là các đa thức bậc n không có số hạng tự do, còn $P_{n,n}(x)$ có số hạng tự do là n!.

Ta có $g(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, theo bài (57.1)): $\exists c_1 \in (0, +\infty)$ sao cho $g'(c_1) = 0$.

Ta lại có $g'(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, theo định lý (R) và bài (57.1)) thì $\exists c_2 \in (0, c_1)$, $g''(c_2) = 0$, $\exists c_3 \in (c_1, +\infty)$: $g''(c_3) = 0$, mặt khác $g''(0) = 0$ theo trên, do đó $g''(x)$ triệt tiêu tại ba điểm $\in [0, +\infty)$.

Lý luận tiếp tục ta thấy $g^{(n-1)}(x)$ triệt tiêu tại n + 1 điểm 0, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in (0, +\infty)$.

Lại theo định lý (R), $g^{(n)}(x)$ sẽ triệt tiêu tại n điểm: $\eta_1 \in (0, \xi_1)$, $\eta_2 \in (0, \xi_2)$, ..., $\eta_n \in (0, \xi_n)$, nghĩa là $g^{(n)}(x)$ có n nghiệm dương, vì $g^{(n)}(x) = e^{-x}.P_{nn}(x)$ (theo trên).

$g^{(n)}(0) \neq 0$ do $P_{nn}(x)$ có số hạng tự do bằng n! và $P_{nn}(x)$ chỉ có n nghiệm, nên $g^{(n)}(x)$ chỉ có n nghiệm dương.

Vì $L_n(x) = e^x g^{(n)}(x)$ nên $L_n(x)$ cũng chỉ có n nghiệm dương.

59. Áp dụng định lý (quy tắc) L'Hôspital, tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{tgx - x}{x - \sin x}$

2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3tg^4x - 12tgx}{\sin 4x - 12\sin x}$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{tgx} - 1}{2\sin^2 x - 1}$

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$

5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{sh^2x \ln(1+x)}{tgx - x}$

7) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 x}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2n}}$, $(n \in N)$

10) $\lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}$

11) $\lim\limits_{x\to+0} |\ln x|^{2x}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$

13) $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1}$

14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$ 16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e\sqrt{x^2-x+1}-x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]$

Bài giải

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x - x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x(1-\cos x)} = 2$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\operatorname{tg}^4 x - 12\operatorname{tg}x}{\sin 4x - 12\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{12\operatorname{tg}^3 x - 12}{\cos^2 x(4\cos 4x - 12\cos x)} =$

$$= \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x - 1} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{3\cos^2 x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}.2\sin 2x} = \dfrac{1}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x\ln a - ax^{a-1}}{1} = a^a(\ln a - 1)$

5) $L = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$, $(\sin^3 x \sim x^3)$

$L = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{3}$

6) $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sh^2x\ln(1+x)}{tgx - x}$, $\ln(1 + x) \sim x$, $shx \sim x$ $(x \to 0)$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{tgx - x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x}.\cos^2 x = 3$$

7) $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 x}$, $\sin^6 x \sim x^6$, đặt $x^3 = t$, $x \to 0$

$\Rightarrow t \to 0$, do đó:

$$L = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{2t} = \frac{1}{2}$$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\text{arctg}x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln\dfrac{2}{\pi} + \ln\text{arctg}x]$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\dfrac{2}{\pi} + \ln\text{arctg}x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{1}{1+x^2}.\dfrac{1}{\text{arctg}x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}$$

9) $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2n}}$, $(n \in N)$

Đặt $\dfrac{1}{x^2} = t$, $x \to 0$, $t \to +\infty$.

Ta có:

$$L = \lim_{t\to +\infty} t^n.e^{-t} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t^n}{e^t} = \lim_{t\to +\infty} \frac{nt^{n-1}}{e^t} = \ldots = \lim_{t\to +\infty} \frac{n!}{e^t} = 0$$

$$10)\ L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}\right\} =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$11)\ L = \lim_{x\to +0}|\ln x|^{2x} \quad \text{xét } 0 < x < 1 : \ln x < 0 \Rightarrow |\ln x| = -\ln x$$

$$L = \exp(\lim_{x\to +0} 2x\ln(-\ln x)) = \exp\lim_{x\to +0}\frac{2\ln(-\ln x)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to +0}\frac{2\left(-\dfrac{1}{x\ln x}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to +0}\frac{2x}{\ln x}\right\} = e^0 = 1$$

$$12)\ L = \lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to\infty} 2\pi\left[\frac{1}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2}\right]\right\}$$

Đặt $\alpha = \pi - \frac{2\pi x}{2x+1} = \frac{\pi}{2x+1}$ thì $x \to \infty \Leftrightarrow \alpha \to 0$.

và $L = \exp\left\{\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha^2}{\pi\sin\alpha}\right\} = e^0 = 1$.

13) $L = \lim_{x\to+0} x^{x^x-1}$ (dạng vô định 0^0)

$$L = \exp\left\{\lim_{x\to+0}(x^x - 1)\ln x\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to+0}(e^{x\ln x} - 1)\ln x\right\}$$

Đặt $x\ln x = t$, $x \to +0 \Leftrightarrow t \to 0$, khi đó:

$$L = \exp\left\{\lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x\to+0} x\ln^2 x\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\right\}$$, áp dụng quy tắc (H):

$$L = \exp\left\{\lim_{x\to+0}(-2x\ln x)\right\} = e^0 = 1.$$

14) $L = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

với $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$: không tồn tại,

vì $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại. Vậy không áp dụng được quy tắc (H) để tìm L.

Ta có thể làm cách khác như sau:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 1\ .\ 0 = 0$$

(vì $x\sin\dfrac{1}{x}$ là một VCB khi $x \to 0$, do $\sin\dfrac{1}{x}$ bị chặn khi $x \to 0$).

15) Tương tự như 14), không thể áp dụng quy tắc (H).

Cách khác:

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{1 + x + \sin x\cos x}{(x + \sin x\cos x)e^{\sin x}},\qquad L = \lim_{x\to\infty}\frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{\sin x\cos x}{x}}{\left(1 + \frac{\sin x\cos x}{x}\right)e^{\sin x}}$$

không tồn tại vì $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\sin x}$ không tồn tại.

16) Đặt $x = \dfrac{1}{t}$; $L = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e\sqrt{t^2 - t + 1} - (1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}$;

$$L' = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{e(2t-1)^t}{2\sqrt{t^2 - t + 1}} - \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]'\right\} = -\frac{e}{2} - \left(-\frac{e}{2}\right) = 0$$

60. Viết công thức Maclaurin của các hàm:

1) $f(x) = \operatorname{tg}x$ đến $0(x^6)$

2) $f(x) = e^{\sin x}$ đến $0(x^3)$

3) $f(x) = e^x\ln(1 + x)$ đến $0(x^4)$

4) $f(x) = \ln\dfrac{\sin x}{x}$ đến $0(x^6)$

5) $f(x) = \cos^3 x$ đến $0(x^{2n+1})$

6) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 + x - 12}$ đến $0(x^n)$

Bài giải

1) Vì $f(x) = tgx$ là hàm lẻ và $tgx = x + 0(x)$ nên:

$$tgx = x + a_3x^3 + a_5x^5 + 0(x^6)$$

Mặt khác ta có: $\sin x = tgx.\cos x$, do đó theo các công thức (M) của cosx, sinx (2.2) ta có:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + 0(x^6) = (x + a_3x^3 + a_5x^5 + 0(x^6)) \times$$

$$\times\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + 0(x^5)\right)$$

Cho đồng nhất các hệ số của x^3 và x^5 ở hai vế ta có:

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_3,\ \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} - \frac{a_3}{2!} + a_5$$

hay: $a_3 = \dfrac{1}{3}$, $a_5 = \dfrac{2}{15}$

Vậy: $\quad tgx = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + 0(x^6)$.

2) Theo công thức (M) của e^x, sinx ở (2.2) ta có:

$$e^{\sin x} = 1 + \frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)$$

Do đó: $\quad e^{\sin x} = 1 + \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + 0(x^3)\right) + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + 0(x^3)\right)^2 +$

$$+\ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)\right)^3$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)x^3 + 0(x^3)$$

Vậy $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 0(x^3)$

3) $f(x) = e^x\ln(1 + x)$ đến $0(x^4)$

Dùng các công thức ở (2.2) ta có:

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 0(x^4)\right)$$

$$= x + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^3 +$$

$$+ \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x^4 + 0(x^4)$$

Vậy $e^x\ln(1 + x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 0(x^4)$.

4) $f(x) = \ln\frac{\sin x}{x}$ đến $0(x^7)$

Ta có $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + 0(x^7)$, $(x \neq 0)$

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + 0(\alpha^3)$$

với $\alpha = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + 0(x^7)$

Do đó:

$$\ln\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360}\right) - \frac{x^6}{648} + 0(x^7)$$

hay $$\ln\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + 0(x^7)$$

5) $f(x) = \cos^3 x$ đến $0(x^{2n+1})$

Ta có: $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

Do đó:và theo các công thức ở (2.2) ta có:

$$\cos^3 x = \sum_{k=0}^{n}\frac{3(-1)^k}{4(2k)!}(3^{2k-1} + 1)x^{2k} + 0(x^{2k+1})$$

6) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$ đến $0(x^5)$

Từ (2.2) suy ra: $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + 0(x^n)$ (a)

Mặt khác: $$f(x) = 1 - \frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-3}$$

$$= 1 - \frac{3}{4\left(1+\frac{x}{4}\right)} - \frac{2}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}$$

Áp dụng (a) ta có:

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{4^k} - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^k} + 0(x^n)$$

hay $$f(x) = -\frac{5}{12} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3(-1)^{k+1}}{4^{k+1}} - \frac{2}{3^{k+1}}\right)x^k + 0(x^n)$$

61. Áp dụng công thức (M) tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\operatorname{tg}x}{x + \sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x.\operatorname{arctg}x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}x.\arcsin x}\right)$

6) Xác định a, b để $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \in R$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin^3 x} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{a}{x^2} - \dfrac{b}{x}$

Bài giải

1) Theo các khai triển ở (2.2) ta có:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + 0(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + 0(x^4)$$

(vì mẫu số chỉ có x^4 nên dùng khai triển ở tử số đến $0(x^4)$)

Vậy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + 0(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + 0(x^4)\right)}{x^4}$$

$$= \lim \frac{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8}}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+0(x^3)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+0(x^3)\right)-x-x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+\ldots+x^2-\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{2}+\ldots-x-x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right) = \lim_{x\to+\infty}|x|\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{6x}+\ldots\right)-\left(1-\frac{1}{6x}+\ldots\right)\right] = \frac{1}{3}$$

($x \to +\infty$, xét $x > 0$: $|x| = x$)

4) $$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\text{tg}x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

Dùng các khai triển: $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + 0(x^2)$

$$\text{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + 0(x^3)$$

ta có: $$\left(\frac{2\text{tg}x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \left(\frac{2x+\frac{2x^3}{3}+0(x^3)}{2x-\frac{x^3}{6}+0(x^3)}\right)^{\frac{1}{\frac{x^2}{2}+0(x^2)}}$$

$$= \left(\frac{1 + \frac{x^3}{3} + 0(x^2)}{1 - \frac{x^2}{12} + 0(x^2)}\right)^{\frac{1}{\frac{x^2}{2}+0(x^2)}} = \left(1 + \frac{5x^2}{12\left(1 - \frac{x^2}{12} + 0(x^2)\right)}\right)^{\frac{1}{\frac{x^2}{2}+0(x^2)}}$$

Do đó:

$$L = \exp\left\{\lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{12\left(1 - \frac{x^2}{12} + 0(x^2)\right)} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{2} + 0(x^2)}\right\}$$

$$= e^{\frac{10}{12}} = e^{\frac{5}{6}}$$

5) $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x.\text{arctg}x} - \dfrac{1}{\text{tg}x.\arcsin x}\right)$

Dùng các khai triển:

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + 0(x^3)$; $\quad \text{arctg}x = x - \dfrac{x^3}{3} + 0(x^4)$

$\text{tg}x = x + \dfrac{x^3}{3} + 0(x^3)$; $\quad \arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + 0(x^4)$

Ta có:

$$\frac{1}{\sin x.\text{arctg}x} - \frac{1}{\text{tg}x.\arcsin x} = \frac{\text{tg}x.\arcsin x - \sin x.\text{arctg}x}{\sin x.\text{arctg}x.\text{tg}x.\arcsin x}$$

$$= \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\left(x + \frac{x^3}{6}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + 0(x^4)}{x^4 + 0(x^4)}$$

$= \dfrac{x^4 + 0(x^4)}{x^4 + 0(x^4)}$. Do đó L = 1.

6) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + 0(x^3)$ $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x = x^3 - \dfrac{x^5}{2} + 0(x^6)$

$$x^3\sin^3 x = x^6 + 0(x^6) \Rightarrow f(x) = \frac{-\left[ax^4 + (b - \frac{1}{2})x^5 + cx^6 + 0(x^6)\right]}{x^6 + 0(x^6)}, c \in R$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = c \Rightarrow a = 0, b = \frac{1}{2}$$

62. Khai triển theo công thức Taylor các hàm sau tại lân cận các điểm tương ứng:

1) $f(x) = \dfrac{3x + 3}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$, $x_0 = -1$ đến $0((x + 1)^n)$

2) $f(x) = \ln(2x - x^2 + 3)$, $x_0 = 2$ đến $0((x - 2)^n)$

Bài giải

1) Đặt $x + 1 = t$

Ta có: $f(x) = \dfrac{3(x + 1)}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}} = \dfrac{3t}{\sqrt{4 - t^2}}$

hay $f(x) = \dfrac{3}{2}t\left(1 - \dfrac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = g(t)$

Áp dụng công thức 4^0 ở (2.2) ta có:

$$g(t) = \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}t.\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)!!}{2^k.k!}(-1)^k\frac{t^{2k}}{4^k} + 0(t^{2n})$$

Thay $t = x + 1$, ta có:

$$f(x) = \frac{3}{2}(x + 1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}(x + 1)^{2k+1} + 0((x + 1)^{2n})$$

2) Ta có: $2x - x^2 + 3 = (3 - x).(x - 1)$

Đặt $x - 2 = t$ thì $2x - x^2 + 3 = (1 - t).(3 + t) = 3(1 - t)(1 + t/3)$

và $f(x) = g(t) = \ln 3 + \ln(1 - t) + \ln\left(1 + \frac{t}{3}\right)$

Áp dụng công thức 5^0 ở (2.2) ta có:

$$g(t) = \ln 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k.3^k} + 0(t^n)$$

Thay $t = x - 2$, ta có:

$$f(x) = \ln 3 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k} - 1 \right) \frac{(x-2)^k}{k} + 0((x-2)^n)$$

§3. KHẢO SÁT HÀM SỐ Y = F(x)

3.1. Chiều biến thiên

Định lý: Nếu f(x) khả vi trong miền X và:

1^0) $f'(x) = 0, \forall x \in X$ thì $f(x) = const$ trong X.

2^0) $f'(x) > 0$ (< 0) trong X thì f(x) là đơn điệu tăng (giảm) trong X.

3^0) f(x) là đơn điệu không giảm (tăng) trong X thì $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) trong X.

3.2. Cực trị

1^0) Điều kiện cần: Nếu f(x) đạt cực trị tại $x_0 \in X$ và khả vi tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

2^0) Điều kiện đủ:

Quy tắc I

Nếu
$$\begin{cases} 1) & f(x) \text{ liên tục trong miền } X \\ 2) & f(x) \text{ khả vi tại lân cận } \delta \text{ của } x_0 \in X \\ 3) & f'(x) < 0\ (> 0),\ \forall x \in (\delta - x_0, x_0) \\ & f'(x) > 0\ (< 0),\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases}$$

thì f(x) đạt cực tiểu (đại) tại x_0, f_{min} (f_{max}) = $f(x_0)$.

Quy tắc II

Nếu $\begin{cases} 1) \text{ tồn tại } f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0 \\ 2) \text{ n chẵn (lẻ)} \end{cases}$

thì

$\begin{cases} 1) \text{ f(x) đạt (không đạt) cực trị tại } x_0 \\ 2) \ f_{min} \ (f_{max}) = f(x_0) \text{ khi } f^{(n)}(x_0) > 0 \ (< 0) \end{cases}$

Quy tắc III (Tìm m, M)

Để tìm giá trị bé (lớn) nhất m (M) của hàm liên tục f(x) trong đoạn [a, b]:

- Tìm các điểm bất thường (tới hạn) của hàm số ($f'(x) = 0$, ∞ hay không tồn tại) trong (a, b).
- Tính giá trị của f(x) tại các điểm bất thường đó và tại a, b.
- So sánh các giá trị của f(x) vừa tìm được ta có m (M).

Đặc biệt: - Nếu f(x) đơn điệu không giảm (tăng) troug [a, b] thì m = f(a), M = f(b) (M = f(a), m = f(b))

- Nếu f(x) chỉ có một cực đại (tiểu) trong miền X thì cực đại (tiểu) đó là M (m) của f(x) trong X.

3.3. Bề lồi (lõm) điểm uốn

Định nghĩa 1. Hàm f(x) hay đồ thị của nó gọi là lồi (lõm) trong miền X nếu $\forall x_1, x_2 \in X$:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ thì:}$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq (\leq) \ \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Định nghĩa 1'. Đồ thị của f(x) gọi là lồi (lõm) trong miền X nếu đồ thị đó không ở trên (dưới) tiếp tuyến tại điểm bất kỳ $x \in X$ với đồ thị đó.

Định nghĩa 2. Nếu f(x) có $f'(x) \in \tilde{R}$ (hữu hạn hoặc vô hạn) trong X thì điểm phân chia bề lồi, lõm của f(x) trong X gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số hay của hàm số.

Định lý 1.

1^0) Nếu f(x) có $f''(x_0)$, $x_0 \in X$ và x_0 là điểm uốn của f(x) thì $f''(x_0) = 0$.

2^0) Điều kiện cần và đủ để f(x) có đạo hàm đến cấp hai trong miền X là lồi (lõm) trong X là $f''(x) \le 0$ (≥ 0) trong X.

Định lý 2.

1) Nếu f(x) có $f'(x) \in \tilde{R}$ trong X có f"(x) trong lân cận của $x_0 \in X$ (có thể trừ tại x_0) và f"(x) đổi dấu qua x_0 thì x_0 là hoành độ điểm uốn của đồ thị hàm số.

2) Nếu f(x) có: $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, n lẻ thì x_0 là điểm uốn của hàm số.

3.4 Tiệm cận của đồ thị hàm số

Định nghĩa: Đường thẳng D gọi là tiệm cận của đồ thị hàm số y = f(x) nếu khoảng cách MH từ $M(x, y) \in$ đồ thị đến D dần tới 0 khi M(x, y) vẽ nhánh vô hạn của đồ thị hàm số (ít nhất một trong x, y không bị chặn) với $MH \neq 0$ khi M đủ xa trong quá trình vẽ nhánh vô hạn đó.

Quy tắc tìm tiệm cận

1^0) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì $x = x_0$ là tiệm cận của đồ thị của f(x) (tiệm cận đứng).

2^0) Nếu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$ thì $y = y_0$ là tiệm cận của đồ thị của f(x) (tiệm cận ngang).

3^0) Nếu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ và tồn tại $a = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$ thì y = ax + b là tiệm cận của đồ thị của f(x) (tiệm cận xiên).

3.5. Sơ đồ khảo sát và vẽ đồ thị của y = f(x)

Để khảo sát và vẽ đồ thị của y = f(x):

- Đầu tiên tìm miền xác định, khoảng đối xứng, chu kỳ (nếu có) rồi tiến hành qua các bước 3.1 đến 3.4. Sau cùng lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của f(x).

BÀI TẬP

63. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

1) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x + 1$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e} & : x < e \\ \dfrac{\ln x}{x} & : x \geq e \end{cases}$

3) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

4) $f(x) = \begin{cases} x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sin(\ln x)\right) & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

5) $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$

Bài giải

1) $f'(x) = 3x^2 - 60x + 225 = 3(x - 5)(x - 15)$

Xét dấu của y' ta có: f(x) là đơn điệu tăng trong (5, 15), là đơn điệu giảm trong $(-\infty, 5)$ và $(15, +\infty)$.

2) $f'(x) = \begin{cases} 0 & : x < e \\ (1 - \ln x)/x^2 & : x \geq e \end{cases}$

Rõ ràng $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in R$, do đó f(x) là đơn điệu không tăng trong $(-\infty, +\infty)$.

Trong $(-\infty, e)$, $f(x)$ là không đổi, trong $(e, +\infty)$ $f(x)$ là đơn điệu giảm.

3) $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$

Trong $[0, 2\pi]$, $y' = 0$ tại:

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

Trong $\left(0, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$: $f'(x) > 0$

Vậy $f(x)$ là đơn điệu tăng trên các khoảng đó.

Trong $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$: $f'(x) < 0$, $f(x)$ là đơn điệu giảm.

4) $f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f'(x) > 0$ khi $\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

hay $e^{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi} < x < e^{\frac{13\pi}{12} + 2k\pi}$

Vậy $f(x)$ là đơn điệu tăng trong $\left(e^{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}, e^{\frac{13\pi}{12} + 2k\pi}\right)$.

Tương tự: $f(x)$ là đơn điệu giảm trong $\left(e^{\frac{13\pi}{12} + 2k\pi}, e^{\frac{17\pi}{12} + 2k\pi}\right)$.

$(k \in Z)$

5) Vì $f(x)$ là hàm chẵn, xét $x > 0$, $f'(x) = \frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x} > 0$

khi $0 < \frac{\pi}{x} < \pi$, $2k\pi < \frac{\pi}{x} < \pi + 2k\pi$, $k \in N$

hay $x > 1$, $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$, $k \in N$

Vậy f(x) là đơn điệu tăng trong:

$$(1, +\infty), \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$$

Và là đơn điệu giảm trong: $\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right)$, $k \in N$.

Từ f(x) là hàm chẵn, suy ra: khi $x < 0$, f(x) là đơn điệu tăng trong: $\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k-1}\right)$, $k \in N$

và đơn điệu giảm trong $(-\infty, -1)$, $\left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k}\right)$.

Như vậy tại lân cận điểm $x = 0$, f(x) không là hàm đơn điệu vì lân cận này chứa một tập hợp đếm được khoảng đơn điệu tăng và giảm của hàm số.

64. Chứng minh:

*1) điều kiện cần và đủ để f(x) là đơn điệu tăng (giảm) trong X là $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) và f'(x) không triệt tiêu trên $[\alpha, \beta] \subset X$.

2) $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$

3) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, $x > 0$

4) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x > 0$

*5) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$

*6) $(x^a + y^a)^{\frac{1}{a}} > (x^b + y^b)^{\frac{1}{b}}$, $x, y > 0, 0 < a < b$

Bài giải

1) Nếu f(x) đơn điệu tăng trong X thì theo 3^0 (3.1): $f'(x) \geq 0$ trong X, mặt khác nếu $f'(x) = 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta] \subset X$ thì theo 1^0 (3.1): $f(x) = c = const$: $\forall x \in [\alpha, \beta] \subset X$ trái với giả thiết: f(x) là đơn điệu tăng trong X.

Ngược lại nếu $f'(x) \geq 0$ và không triệt tiêu $\forall x \in [\alpha, \beta] \subset X$, khi đó lấy $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, theo định lý Lagrange $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $c \in (x_1, x_2)$.

Vì $f'(x) \geq 0$ nên $f'(c) \geq 0$ và do đó:

$f(x_2) \geq f(x_1)$: nghĩa là f(x) là đơn điệu không giảm trong X.

Lấy $x \in [x_1, x_2]$ thì $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$, $\forall x \in [x_1, x_2]$ nghĩa là $f(x) = c = const$ trong $[x_1, x_2]$ và $f'(x) = 0$, $\forall x \in [x_1, x_2]$ trái với giả thiết: f'(x) không triệt tiêu $\forall x \in [\alpha, \beta] \subset X$.

Vậy $f(x_1) < f(x_2)$ khi $x_1 < x_2$; nghĩa là f(x) đơn điệu tăng trong X.

Trường hợp f(x) đơn điệu giảm, chứng minh tương tự.

2) $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$

Xét $x > 0$ và $f(x) = e^x - 1 - x$ với $x \geq 0$.

$f'(x) = e^x - 1 > 0$ khi $x > 0$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại $x = 0$.

Vậy theo 1) f(x) là đơn điệu tăng khi $x \geq 0$ nghĩa là $0 < x$ thì $f(0) < f(x)$.

Nhưng $f(0) = 0$ vậy $f(x) = e^x - 1 - x > 0$ hay $e^x > 1 + x$ khi $x > 0$.

Trường hợp $x < 0$, đặt $x = -x'$, $x' > 0$ ta sẽ đưa về trường hợp trên. Vậy bất đẳng thức là đúng $\forall x \neq 0$.

3) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x,\ x > 0$

Xét $f(x) = x - \ln(1 + x),\ x \geq 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } f'(x) > 0 \text{ khi } x > 0.$$

Vậy $f(x)$ là đơn điệu tăng khi $x \geq 0$ nghĩa là $f(0) < f(x)$ khi $x > 0$ và ta suy ra: $\ln(1 + x) < x$ khi $x > 0$.

Bây giờ xét:

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x) \text{ khi } x \geq 0$$

$g'(x) = 1 - x - \dfrac{1}{1 + x} = - \dfrac{x^2}{1 + x} = 0$ tại $x = 0$ và $g'(x) < 0$ khi $x > 0$, vậy $g(x)$ là đơn điệu giảm khi $x \geq 0$ nghĩa là $0 < x$ thì $g(0) > g(x)$ nhưng $g(0) = 0$ nên $g(x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1 + x) < 0$ hay

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) \text{ khi } x > 0$$

và cuối cùng:bất đẳng thức đã cho là đúng $\forall x > 0$.

4) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x,\ x > 0$

Xét $f(x) = x - \sin x,\ x \geq 0,\ f'(x) = 1 - \cos x \geq 0,\ f'(x) = 0$ chỉ khi $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Vậy theo 1) $f(x)$ là đơn điệu tăng khi $x \geq 0$: $0 < x$ thì $f(0) < f(x)$ hay $0 < x - \sin x$ và $\sin x < x$ (a).

Xét $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$ khi $x \geq 0,\ g(0) = 0$

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

Xét $h(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ ta có $h(0) = 0$.

$h'(x) = -\sin x + x > 0$ theo chứng minh trên, vậy khi $x > 0$ thì $h(x) > h(0)$ hay $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) > 0$ và $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ khi $x > 0$.

Vậy $g'(x) > 0$ khi $x > 0$ và $g'(x) = 0$ chỉ tại $x = 0$ theo 1) $g(x)$ là đơn điệu tăng khi $x \geq 0$: $g(x) > g(0)$ khi $x > 0$ hay

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} > 0$$

Do đó $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ (b)

Kết hợp với (a) ta có 4).

5) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$

lấy logarithme neper bất đẳng thức này ta có bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

Đặt $\frac{1}{x} = t > 0$, ta có:

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1 + t) < t$$

Vế phải của bất đẳng thức này đã chứng minh ở 2). Để chứng minh vế trái của bất đẳng thức này, ta xét:

$$f(t) = \ln(1 + t) - \frac{t}{1 + t} \quad \text{với } t \geq 0, \text{ ta có } f(0) = 0$$

$$f'(t) = \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{(1 + t)^2} = \frac{t}{(1 + t)^2} = 0 \text{ khi } t = 0$$

và $f'(t) > 0$ khi $t > 0$. Vậy theo 1) $f(t)$ là đơn điệu tăng khi $t \geq 0$ và từ đó suy ra vế trái của bất đẳng thức là đúng.

6) Bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức:

$$\left[\left(\frac{x}{y}\right)^a + 1\right]^{\frac{1}{a}} > \left[\left(\frac{x}{y}\right)^b + 1\right]^{\frac{1}{b}}$$

Đặt $\frac{x}{y} = t$ và xét hàm $f(u) = (t^u + 1)^{\frac{1}{u}}$ với $0 < u < +\infty$

Từ đó $\ln f(u) = \frac{1}{u}\ln(t^u + 1)$

và $f'(u) = f(u)\left[\frac{t^u \ln t}{u(1 + t^u)} - \frac{\ln(1 + t^u)}{u^2}\right]$

hay $f'(u) = \frac{f(u)}{u^2(1 + t^u)} \ln \frac{(t^u)^{t^u}}{(1 + t^u)^{(1+t^u)}} < 0$ khi $0 < u < +\infty$.

(vì $\frac{(t^u)^{t^u}}{(1 + t^u)^{(1+t^u)}} = \frac{1}{1 + t^u}\left(\frac{t^u}{1 + t^u}\right)^{t^u} < 1$)

Vậy $f(u)$ là hàm đơn điệu giảm: $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

hay $(x^a + y^a)^{\frac{1}{a}} > (x^b + y^b)^{\frac{1}{b}}$

65. Tìm cực trị của các hàm:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

2) $y = (x + 1)e^{2x}$

3) $y = \sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}$

4) $y = \text{ch}x + \cos x$

5) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

6) $y = |x|e^{-|x-1|}$

7) $y = \sqrt{x}\ln x$

*8) $y = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, $y(0) = 0$

Bài giải

1) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

khi $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

x		1		3	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	0	↘	-4	↗

Bảng này cho chiều biến thiên và cực trị của y.

$$y_{max} = y(1) = 0,\ y_{min} = y(3) = -4.$$

2) $y' = e^{2x} + (x + 1).2e^{2x} = (2x + 3)e^{2x}$

$y' = 0$ khi $x = -3/2$

$y' < 0$ khi $x < -\dfrac{3}{2}$ và $y' > 0$ khi $x > -\dfrac{3}{2}$.

Vậy $y_{min} = y(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-3}$.

3) $y' = \dfrac{(1-x).2.(x-2)-(x-2)^2}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)^4}} = \dfrac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}$

$x \neq 1$, $x \neq 2$.

$y' = 0$ khi $x = \frac{4}{3}$

$y' = \infty$ khi $x = 1$ và $x = 2$.

Vậy y có 3 điểm bất thường.

Dấu của y' là dấu của $(4 - 3x)(x - 2)$.

x		1		4/3		2	
y'	-	||	-	0	+	||	-
y	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Theo bảng trên ta có: $y_{min} = y(4/3) = -\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

$y_{max} = y(2) = 0$

($x = 1$: không là điểm cực trị của y vì y' không đổi dấu qua điểm đó).

4) y xác định $\forall x \in R$, $f'(x) = shx - sinx = 0$, chỉ có một nghiệm $x = 0$.

($shx - sinx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} - sinx \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2sinx$ chỉ có nghiệm $x = 0$?).

$f''(x) = chx - cosx$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = shx + sinx$, $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = chx + cosx$, $f^{(4)}(0) = 2$

Vậy theo quy tắc II (3.2), $f_{min} = f(0) = 2$.

5) $y = cosx + \frac{1}{2}cos2x$

y là hàm tuần hoàn, chu kỳ 2π.

Xét $0 \leq x \leq 2\pi$, $y' = - sinx - sin2x$ hay:

$$y' = - sinx(1 + 2cosx) = 0 \text{ khi } x = k\pi$$

và $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Trong $[0, 2\pi]$ y có các điểm dừng: $0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$.

$y'' = - cosx - 2cos2x$. Theo quy tắc II (3.2):

$$y''(0) = - 3 < 0 \Rightarrow y_{max} = y(0) = \frac{3}{2}$$

$$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow y_{min} = y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = - \frac{3}{4}$$

$$y''(\pi) = - 1 < 0 \Rightarrow y_{max} = y(\pi) = - \frac{1}{2}$$

$$y''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow y_{min} = y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = - \frac{3}{4}$$

$$y''(2\pi) = - 3 < 0 \Rightarrow y_{max} = y(2\pi) = \frac{3}{2}$$

Tổng quát $y_{max} = y(k\pi) = (-1)^k + \frac{1}{2}$

$$y_{min} = y\left(\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = - \frac{3}{4}, k \in Z$$

6) $y = |x|e^{-|x-1|}$

Ta có: $y = \begin{cases} -xe^{x-1} & : \ x < 0 \\ xe^{x-1} & : \ 0 \le x < 1 \\ xe^{1-x} & : \ x \ge 1 \end{cases}$

và $y' = \begin{cases} -(x+1)e^{x-1} & : \ x < 0 \\ (x+1)e^{x-1} & : \ 0 \le x < 1 \\ (1-x)e^{1-x} & : \ x \ge 1 \end{cases}$ (a)

Do đó y'(0), y'(1) không tồn tại, y'(-1) = 0 vậy có ba điểm bất thường -1; 0; 1.

Theo (a): y' > 0 khi x < - 1 và y' < 0 khi x > - 1

Vậy

$y_{max} = y(-1) = e^{-2}$

Tương tự $y_{min} = y(0) = 0$

$y_{max} = y(1) = 1$

Chú ý, ta có thể viết:

$$y' = e^{-|x-1|}\text{sign}x - |x|e^{-|x-1|}\text{sign}(x-1)$$

$x \neq 0; 1$

7) $y = \sqrt{x}\ln x$, $x > 0$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2) = 0 \text{ khi } x = e^{-2}$$

$$y_{min} = y(e^{-2}) = -\frac{2}{e}$$

8) $y = e^{-\frac{1}{x}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, $y(0) = 0$

Ta có $y = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right) : x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right) : x > 0 \end{cases}$

do đó: $y' = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) : x < 0 \\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) : x > 0 \end{cases}$

vì $\left|\sin\frac{1}{x} \pm \cos\frac{1}{x}\right| \le \sqrt{2}$ nên $f'(x) \ge 0$ khi $x > 0$

$f'(x) \le 0$ khi $x < 0$

Vậy $f'(x)$ không đổi dấu qua các không điểm của nó khi $x \ne 0$.

Tại $x = 0$: $f(x)$ là hàm liên tục và $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + qua điểm đó. Vậy hàm chỉ có một cực tiểu:

$$y_{min} = y(0) = 0.$$

66. Tìm cực trị của hàm $y = f(x)$ cho bởi các hệ phương trình và phương trình tương ứng:

1) $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^3 - 2t^2}{t^2+1} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \ln\sin\dfrac{t}{2} \\ y = \ln\sin t \end{cases}$

3) $x^3 + y^3 = 3x^2$ *4) $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$, $y > |x|$

Bài giải

1) Ta tính $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

$$x'_t = \frac{(t^2+1)3t^2 - 2t^4}{(t^2+1)^2} = \frac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2} > 0$$

$$y'_t = \frac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2}$$

$$y'_x = \frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}$$

$y'_x = 0$ khi $t = 1$, $y'_x = \infty$ khi $t = 0$, vậy $y = y(x)$ có hai điểm bất thường $x(1) = \frac{1}{2}$, $x(0) = 0$, xét dấu của y'_x qua các điểm bất thường này ta có: $y_{max} = y(0) = 0$, $y_{min} = y(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

2) $\begin{cases} x = \ln\sin\frac{t}{2} \\ y = \ln\sin t \end{cases}$

x xác định khi $\sin\frac{t}{2} > 0$, nghĩa là:

$$2k\pi < \frac{t}{2} < (2k+1)\pi \text{ hay } 4k\pi < t < 2(2k+1)\pi$$

y xác định khi $\sin t > 0$, nghĩa là: $2k\pi < t < (2k+1)\pi$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos t}{\cos\frac{t}{2}\sin t} = \frac{\cos t}{\cos^2\frac{t}{2}}$$

$y'_x = 0$ khi $\cos t = 0$ nghĩa là $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

$y'_x = \infty$ khi $\cos\frac{t}{2} = 0$ nghĩa là $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

hay $t = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi$: $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thuộc miền xác định của x và y khi $k = 4m$, còn $t = (2k + 1)\pi$ không thuộc miền xác định của y. Vậy $y = y(x)$ chỉ có một điểm bất thường là điểm dừng x: ứng với $t = \frac{\pi}{2} + 4m\pi$:

$$x = \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right) = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2$$

Để kết luận về cực trị của y, theo quy tắc II, ta xét:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\cos t}{\cos^2\frac{t}{2}}\right)'_t .t'_x\ ,\ t'_x = \frac{1}{x'_t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\cos^2\frac{t}{2}\sin t + 2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\cos t}{\cos^4\frac{t}{2}} . \frac{2\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$$

Do đó: $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}+4m\pi} = -4 < 0$

Vậy $y_{max} = y\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) = 0.$

3) $x^3 + y^3 = 3x^2$

Đạo hàm hai vế theo x ta có:

$$3x^2 + 3y^2y' = 6x \text{ và } y' = \frac{2x - x^2}{y^2}$$

$(y \neq 0)$ $y' = 0$ khi $x = 2$.

y' không xác định khi $x = 0$ (vì khi đó $y = 0$)

Xét dấu của y' qua 0; 2 ta có:

$$y_{min} = y(0) = 0, \quad y_{max} = y(2) = \sqrt[3]{4}$$

4) $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$ (1), $y > |x|$

Đạo hàm hai vế theo x, ta có:

$$4x^3 - 4y^3y' = 2x - 4yy'$$

Từ đó: $y' = \dfrac{x(1 - 2x^2)}{2y(1 - y^2)}$ (2)

Theo điều kiện $y > |x|$ nên $y > 0$.

Mặt khác từ (1) giải y theo x ta có:

$$y = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - x^2 + x^4}}$$

vì $y > 0$ nên lấy dấu +

$$y = \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - x^2 + x^4}}$$

Xét điều kiện $y > |x|$ thì:

$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2 + x^4}} > |x|$: thoả mãn

$\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2 + x^4}} > |x|$: không thoả mãn

Vậy lấy $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2 + x^4}}$

Rõ ràng $y > 1$ hay $y^2 > 1$, $1 - y^2 < 0$

Khi đó dấu của y' ở (2) là dấu của $x(2x^2 - 1)$.

Vậy ta có bảng:

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'_x	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$	$\nearrow$

Do đó: $y_{max} = y(0) = \sqrt{2}$

$$y_{min} = y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$$

* **67.** Chứng minh rằng:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

có $f_{min} = f(0)$ nhưng trong mỗi khoảng $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$, $\delta > 0$, $f(x)$ không biến thiên đơn điệu.

2) Không thể áp dụng quy tắc II để xét cực trị của hàm:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

Bài giải

1) Rõ ràng trong lân cận của $x = 0$ (trừ tại $x = 0$)

$$f(x) = x^2\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) > 0 = f(0)$$

vậy $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

$$f_{min} = f(0) = 0$$

Mặt khác khi $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) + x^2\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

$$= 4x + 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

Rõ ràng f(x) đổi dấu trong mỗi khoảng (- δ, 0), (0, δ), ∀δ > 0, nghĩa là f(x) không biến thiên đơn điệu trong mỗi khoảng đó.

2) Theo 4) bài 52 thì ∀n: $f^{(n)}(0) = 0$

Do đó không thể áp dụng quy tắc II để tìm cực trị của f(x) mặt khác trong lân cận của x = 0 (trừ x = 0) ta có:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} > 0 = f(0)$$

Vậy $f_{min} = f(0) = 0$.

68. 1) Tìm các giá trị lớn (bé) nhất M(m) của:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$ trên [-3, 6]

b) $f(x) = (x - 3)^2e^{|x|}$ trên [-1, 4]

*2) Tìm số hạng lớn nhất của các dãy số:

a) $x_n = \sqrt[n]{n}$; $n \in N$

b) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + 1985}$

3) Chứng minh các bất đẳng thức;

a) $x^m(1 - x)^n \leq \dfrac{m^m.n^n}{(m + n)^{m+n}}$, m.n > 0, 0 ≤ x ≤ 1

b) $x^\alpha > 1 + \alpha\ln x$; x, α > 0

Bài giải

1) a) $y' = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x + 2)(x - 3)$

$f'(x) = 0$ khi $x = -2$, $x = 3 \in [-3, 6]$

Tính: $f(-3) = 19$, $f(-2) = 36$, $f(3) = -89$

$f(6) = 100$

Vậy $M = 100$, $m = -89$.

b) Ta có:

$$f'(x) = \begin{cases} (x-3)(5-x)e^{-x} & : x < 0 \\ (x-3)(x-1)e^{x} & : x \geq 0 \end{cases}$$

Vậy có ba điểm bất thường $x = 0; 1; 3 \in [-1, 4]$

Ta tính:

$f(-1) = 16e$; $f(0) = 9$; $f(1) = 4e$

$f(3) = 0$; $f(4) = e^4$

Do đó: $M = e^4$, $m = 0$.

2) Xét $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ là một hàm liên tục và khả vi $\forall x > 0$ và

n) = $n^{\frac{1}{n}} = x_n$.

Rõ ràng nếu x_0 là một điểm dừng của $f(x)$ thoả mãn

$k \leq x_0 \leq k + 1$, $k \in N$

thì số hạng lớn nhất của dãy số: $\max x_n$ phải là số lớn nhất ong các số x_1, x_k, x_{k+1}.

Ở đây: $f'(x) = x^{\frac{1}{x} - 2}.(1 - \ln x) = 0$ khi $x = e$, vì $2 < e < 3$ ên:

$$\max x_n = \max\{f(1), f(2), f(3)\}$$
$$= \max\{1.\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}\} = \sqrt[3]{3}$$

b) Tương tự với a)

Xét hàm $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1985}$ thì $f(n) = x_n$, $n \in N$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1985 - x}{2\sqrt{x}(x + 1985)^2}$

$f'(x) = 0$ khi $x = 1985$

Vậy $\max x_n = \max\{f(1), f(1985)\} = \max\left\{\dfrac{1}{1986}, \dfrac{1}{2\sqrt{1985}}\right\}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{1985}}$

3) a) Xét $f(x) = x^m(1 - x)^n$, $0 \le x \le 1$

Ta tìm giá trị lớn nhất M của f(x) trong [0, 1]

Ta có: $f'(x) = x^{m-1}(1 - x)^{n-1}[m - (m + n)x]$

$f'(x) = 0$ tại $x = 0$, $x = 1$ và $x = \dfrac{m}{m + n}$

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f\left(\dfrac{m}{m + n}\right) = \dfrac{m^m.n^n}{(m + n)^{m+n}}$

Do đó $M = \dfrac{m^m.n^n}{(m + n)^{m+n}}$ và $\forall x \in [0, 1]$ ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

b) Xét hàm $f(x) = x^\alpha - 1 - \alpha\ln x$

Ta có: $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\alpha}{x}(x^\alpha - 1)$

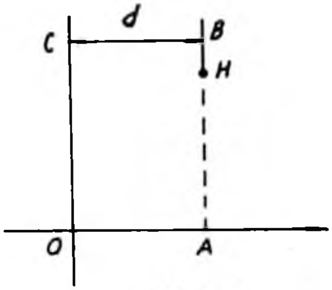
$f'(x) = 0$ chỉ tại $x = 1$

Vì $\alpha > 0$ nên $f'(x) < 0$ khi $x \in (0, 1)$ và $f'(x) > 0$ khi $x \in (1, +\infty)$. Vậy f(x) chỉ có một cực tiểu trong $(0, +\infty)$, nó cũng là giá trị bé nhất của f(x) trong $(0, +\infty)$.

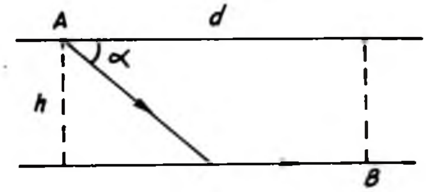
Như vậy $\forall x > 0$: $f(x) \ge f(1) = 0$ và ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

69. 1) Tìm một hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong một hình cầu bán kính R.

*2) Tìm chiều cao ngắn nhất của một cửa tháp OABC: x = AH sao cho qua cửa ấy có thể đưa vào tháp một thanh cứng MN = *l*, biết chiều rộng cửa tháp là d < *l* (H9).



Hình 9.



Hình 10.

3) Một liên lạc viên (LLV) cần đi từ điểm A bên này sông sang điểm B bên kia sông, biết tốc độ của LLV trên bộ gấp k lần tốc độ dưới nước (k > 1). LLV cần băng qua sông dưới góc bằng bao nhiêu để đến B nhanh nhất, cho biết chiều rộng của sông là h và khoảng cách giữa A, B dọc theo bờ sông là d (H10).

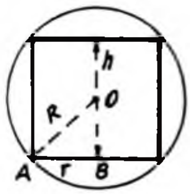
Bài giải

1) Gọi bán kính hình trụ là r:

Chiều cao là h thì thể tích hình trụ là:

$V = \pi r^2 h$

Theo H11:



Hình 11.

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \qquad (\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2)$$

Do đó $V = \pi\left(R - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$

Ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của V theo h $(0 \le h \le 2R)$.

Ta có:

$$V' = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \text{ khi } h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Ta tính $V(0) = 0$, $V(2R) = 0$, $V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

Vậy giá trị lớn nhất của V:

$$V_{max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} \text{ khi } h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

2) Theo H12, ta có:

$l = MH + NH = MN$

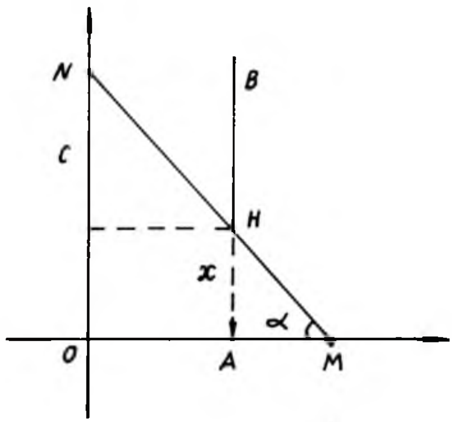
hay

$$l = \frac{x}{\sin\alpha} + \frac{d}{\cos\alpha}$$

Do đó:

$$x = l\sin\alpha - d\,\mathrm{tg}\alpha \quad (1)$$

với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



Hình 12.

Ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của x theo α:

$$x'_\alpha = l\cos\alpha - \frac{d}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{l\cos^3\alpha - d}{\cos^2\alpha} = 0 \text{ khi } \cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{d}{l}}$$

x'_α đổi dấu từ - sang + qua $\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{d}{l}}$

Vậy x chỉ đạt một cực tiểu trong $(0, \frac{\pi}{2})$, cực tiểu đó cũng là giá trị bé nhất của x phải tìm:

$$x_{min} = x(\arccos \sqrt[3]{d/l})$$

Mặt khác ta có: $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^{2/3}}$

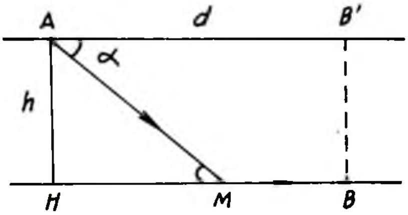
$$= \frac{\left(l^{2/3} - d^{2/3}\right)^{1/2}}{l^{1/3}}$$

Do đó theo (1):

$$x_{min} = l.\frac{\left(l^{2/3} - d^{2/3}\right)^{1/3}}{l^{1/3}} - d.\frac{\left(l^{2/3} - d^{2/3}\right)^{1/2}}{l^{1/3}\left(\frac{d}{l}\right)^{1/3}}$$

$$= (l^{2/3} - d^{2/3})^{1/2}.[l^{2/3} - d^{2/3}] = [l^{2/3} - d^{2/3}]^{3/2}$$

3) Theo hình H13, thời gian LLV cần thiết để đi từ A đến B là:



Hình 13.

$$t = \frac{\overline{AM}}{1} + \frac{\overline{MB}}{k}$$

$$\overline{HM} = \frac{h}{tg\alpha},$$

$$\overline{MB} = d - HM = d - \frac{h}{tg\alpha}$$

với $\text{arctg}\frac{h}{d} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

Đặt $\frac{1}{tg\alpha} = u$ thì $t = h\sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{k}(d - hu)$

$$t'_u = \frac{hu}{\sqrt{1 + u^2}} - \frac{h}{k} = 0$$

khi $\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{k}$ hay $\cos\alpha = \frac{1}{k}$

Ta tính:

$$t\left(\text{arctg}\frac{h}{d}\right),\ t\left(\text{arccos}\frac{1}{k}\right),\ t\left(\frac{\pi}{2}\right) = h + \frac{d}{k}$$

Tuỳ theo giá trị của các tham số ta có α phải tìm:

$$\alpha = \max\{\text{arccos}\frac{1}{k},\ \text{arctg}\frac{h}{d},\ h + \frac{d}{k}\}$$

70. Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị các hàm số:

1) $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$

2) $y = \ln(1 + x^2)$

3) $y = x + \sin x$

4) $y = \dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$

5) $y = x\sin(\ln x),\ x > 0$

6) $\begin{cases} x = 1 + \text{cotg}\, t \\ y = \dfrac{\cos 2t}{\sin t} \end{cases},\quad 0 < t < \pi$

Bài giải

1) $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$ xác định $\forall x \in R$

ta có $y' = 4x^3 - 12x - 6$

$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 0$ tại $x = \pm 1$

x		-1		1	
y''	+	0	−	0	+
y		7		-10	

Từ bảng này ta có: Đồ thị của y là lõm trong $(-\infty, -1)$ và $(1, +\infty)$ và lồi trong $(-1, 1)$. Các điểm: M_1 $(-1,7)$, M_2 $(1, -10)$ là các điểm uốn của đồ thị đó (tại $x = \pm 1$, $f'(x)$ tồn tại hữu hạn).

2) $y = \ln(1+x^2)$ xác định $\forall x \in R$

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$y'' < 0$ khi $|x| > 1$, $y'' > 0$ khi $|x| < 1$.

Vậy đồ thị của y là lồi trong $(-\infty, -1)$ và $(1, +\infty)$, là lõm trong $(-1, 1)$, các điểm $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$ là các điểm uốn của đồ thị đó.

3) $y = x + \sin x$, xác định $\forall x \in R$

$y' = 1 + \cos x$, $y'' = -\sin x = 0$ khi $x = k\pi$.

đồ thị của y là lồi trong $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$

là lõm trong $((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$.

tại $x = k\pi$, $y'(x)$ tồn tại (hữu hạn), vậy $x = k\pi$

$k \in Z$, là các điểm uốn của hàm số.

4) $y = \dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$ xác định $\forall x \in (0,+\infty)$.

Tính toán ta có: $y''(x) = \dfrac{3}{4}.\dfrac{5 - x}{x^3\sqrt{x}}$: $x \in (0, 1)$.

$$y''(x) = \frac{3}{4}.\frac{x - 5}{x^3\sqrt{x}} \quad : x \in (1, +\infty).$$

$y''(x) = 0$ tại $x = 5$ và không tồn tại hoặc bằng ∞, tại $x = 1$.

Qua $x = 5$: $f''(x)$ đổi dấu nên $x = 5$ là điểm uốn của đồ thị $f'(x)$ tồn tại hữu hạn tại $x = 5$).

Qua $x = 1$: $f''(x)$ đổi dấu nhưng tại $x = 1$, $f'(x)$ không tồn tại hữu hạn hoặc bằng ∞. Vậy $x = 1$ không là điểm uốn của đồ thị hàm số.

5) $y = x\sin(\ln x),\ x > 0.$

$$y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$$

$$y'' = \frac{1}{x}\cos\ln x - \frac{1}{x}\sin\ln x = \frac{\sqrt{2}}{x}\cos(\ln x + \frac{\pi}{4})$$

$$y'' = 0 \text{ khi } \ln x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ hay } \ln x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$y'' > 0 \text{ khi } -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < \ln x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$y'' < 0 \text{ khi } \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \ln x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy y là lõm trong $\left(e^{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi},\ e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}\right)$

là lồi trong $\left(e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi},\ e^{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}\right)$

và các điểm uốn là: $\left(e^{\frac{\pi}{4} + k\pi},\ \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}.e^{\frac{\pi}{4} + k\pi}\right)$, $k \in Z$.

6) $\begin{cases} x = 1 + \cot gt \\ y = \dfrac{\cos 2t}{\sin t} \end{cases}$ $\quad 0 < y < \pi.$

$$x'_t = \frac{-1}{\sin^2 t} < 0 \text{ trong } (0, \pi).$$

$$y'_t = \frac{-\cos t(2\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\cos t(2\sin^2 t + 1).$$

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t .t'_x = (-\cos t(2\sin^2 t + 1))'_t . \frac{1}{x'_t}$$

$$y''_{xx} = -3\sin^3 t \cos 2t = 0 \text{ khi } t = \frac{\pi}{4} \text{ và } t = \frac{3\pi}{4}$$

$$y''_{xx} < 0 \text{ khi } 0 < t < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} < t < \pi$$

$$y''_{xx} > 0 \text{ khi } \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$$

Vậy y là lồi khi $t \in (0, \frac{\pi}{4})$ và $t \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

là lõm khi $t \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

Điểm uốn của đồ thị của y là các điểm: (2, 0) và (0, 0) ứng với $t = \frac{\pi}{4}$ và $t = \frac{3\pi}{4}$.

71. 1) Điểm x = 0 có là điểm uốn của hàm $f(x) = \frac{x^3}{2} - \text{tg}x + \sin x$?

2) Dùng tính lồi, lõm của hàm số, chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\frac{x^n + y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $x > 0$, $y > 0$

b) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x \neq y)$

*c) $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$ nếu $f''(x) \geq 0$ trong $[x_1, x_2]$

*3) Chứng minh rằng điểm uốn của đồ thị hàm số $y = x \sin x$ nằm trên đường: $y^2(4 + x^2) = 4x^2$

Bài giải

1) Ta biết trong lân cận của $x = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + 0(x^6)$$

$$\text{tg}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + 0(x^6)$$

(2^0 (2.2) và 1) bài 60)

Do đó : $f(x) = c_5x^5 + 0(x^6)$, $c_5 \neq 0$.

và $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(n)}(0) = 0$.

$f^{(5)}(0) \neq 0$, ở đây $n = 5$ lẻ nên $x = 0$ là điểm uốn của hàm số (định lý 2, (3.3)).

2) Các hàm $f_1(x) = x^n$ và $f_2(x) = e^x$ có $f''_1(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$ $f''_2(x) = e^x > 0$ khi $0 < x < +\infty$, do đó theo định lý 1 (3.3) thì $f_1(x)$, $f_2(x)$ là lõm trong $(0, +\infty)$, theo định nghĩa 1 (3.3), chọn $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x \neq y$, $x.y > 0$

ta có các bất đẳng thức a), b).

c) Xét $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$

thì $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

Áp dụng định lý Lagrange vào các hiệu:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)f'(c_1) \quad (1)$$

$$f(x_2) - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)f'(c_2) \quad (2)$$

$$c_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right), \ c_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$$

Nhân 2 vế của (1) và (2) với $\frac{1}{2}$ và trừ nhau ta có:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)\left[f'(c_2) - f'(c_1)\right] \text{ với } c_1 < c_2$$

Lại áp dụng định lý Lagrange vào hiệu $f'(c_2)$ - $f'(c_1)$ ta có:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(c_2 - c_1)f''(c)$$

với $c \in (c_1, c_2)$

Theo giả thiết $f''(c) \geq 0$, $c \in (c_1, c_2)$.

Vậy $$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

3) Giả sử x_0 là điểm uốn của y thì $y''(x_0) = 0$

Ở đây $y' = \sin x + x\cos x$, $y'' = 2\cos x - x\sin x$

$y''(x_0) = 2\cos x_0 - x_0\sin x_0 = 0$ hay $x_0 = 2\mathrm{cotg}x_0$ (1).

Thay vào vế trái của phương trình đã cho của đường cong ta có:

$4\mathrm{cotg}^2x_0.\sin^2x_0.(4 + 4\mathrm{cotg}^2x_0) =$

$$= 4\cos^2x_0.\left(4.\frac{1}{\sin^2 x_0}\right) = 16\mathrm{cotg}^2x_0 = 4x_0^2$$

Vậy điểm uốn của y nằm trên đường cong đã cho.

Rõ ràng x_0 thoả mãn (1) là điểm uốn của hàm số vì một mặt (1) luôn có nghiệm thực.

Mặt khác $y'''(x) = -3\sin x - x\cos x = 0$ khi $x = 3\mathrm{tg}x = -\frac{3}{\cot gx}$

Do đó $y'''(x_0) \neq 0$

$n = 3$ lẻ (định lý 2(3.3)).

72. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số:

1) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

2) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

3) $y = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

4) $y = x^2 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

5) $y = \dfrac{\sqrt{4x^4 + 1}}{|x|}$

6) $y = 3\sqrt{\dfrac{x^2}{4} - 1}$

7) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - 2t}{t - 1} \\ y = \dfrac{\sqrt{t^4 + 1}}{t} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases}$

*9) $x^3 - 3xy^2 = R(x^2 + y^2)$, $R > 0$, $x \neq 0$.

*10) $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$.

Bài giải

1) Ta có $x^2 - 4x + 3 = 0$ khi $x = 1$ và $x = 3$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 3} y = \infty$ và các đường $x = 1$, $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$, do đó đường thẳng $y = 0$ (trục ox) là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (không có tiệm cận xiên vì không có trường hợp $x \to \infty$ thì $y \to \infty$).

2) Tương tự như 1): $x = \pm 2$ là tiệm cận đứng,

$y = 1$ là tiệm cận ngang.

3) $y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$, ta có $\lim\limits_{x\to\pm 1} y = \infty$, nên $x = \pm 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$, vậy ta có thể tìm tiệm cận xiên.

Ta tìm: $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x^2-1}} = \pm 1$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - ax) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} \mp x\right)$$

Xét $b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)^2 - x^2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+1-x\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+1+x\sqrt{x^2-1}\right)} = 0$$

Tương tự $b_2 = \lim_{x\to-\infty}(y-ax) = 0$

Vậy đồ thị có hai tiệm cận xiên $y = \pm x$.

4) $y = x^2\text{arctg}\frac{1}{x}$, ta có $\lim_{x\to 0} y = 0$

$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\text{arctg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \pm\infty$, vậy đồ thị y có thể có tiệm cận xiên.

Xét $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x.\text{arctg}\frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\text{arctg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y-ax) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2\text{arctg}\frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\text{arctg}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

đặt $\frac{1}{x} = t$, $x \to \pm\infty \Leftrightarrow t \to 0$, khi đó:

$$b = \lim_{t\to 0} \frac{\text{arctg}t - t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+t^2} - 1}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{2(1+t^2)} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x$.

5) Hàm $y = \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$, xác định $\forall x \neq 0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2|x|\sqrt{x^2+\dfrac{1}{4x^2}}}{|x|} = +\infty$

Vậy x = 0 (trục Oy) là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Xét $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+\dfrac{1}{x^2}} = \infty$, vậy đồ thị hàm số y có thể có tiệm cận xiên.

Xét $a_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}} = 2$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(y-a_1x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^4+1}-2x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{4x^4+1}+2x^2\right)} = 0$$

Vậy khi $x \to +\infty$, $y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số .

Tương tự, khi $x \to -\infty$, $y = -2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

6) $y = 3\sqrt{\dfrac{x^2}{4}-1}$, y xác định khi $|x| \ge 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} y = +\infty$, $\quad a = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{2}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}} = \pm\dfrac{3}{2}$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{3}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}-\frac{3}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\,\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0$$

Tương tự: $b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(y+\dfrac{3}{2}x\right) = 0$

Vậy đồ thị của y có 2 tiệm cận xiên

$$y = \frac{3}{2}x \quad (x \to +\infty)$$

$$y = -\frac{3}{2}x \quad (x \to -\infty)$$

Chú ý là từ $y = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ ta có:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

đây là phương trình của hyperbole, đồ thị của hàm số là nửa trên của hyperbole ($x \geq 0$).

7) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - 2t}{t - 1} \\ y = \dfrac{\sqrt{t^4 + 1}}{t} \end{cases}$, x, y xác định $\forall t \neq 1; 0$.

Xét các trường hợp:

a) $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = -\infty$

b) $\lim\limits_{t \to -0} x(t) = -0$, $\lim\limits_{t \to -0} y(t) = -\infty$

$\lim\limits_{t \to +0} x(t) = +0$, $\lim\limits_{t \to +0} y(t) = +\infty$

c) $\lim\limits_{t \to 1-} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to 1-} y(t) = \sqrt{2}$

$\lim\limits_{t \to 1+} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to 1+} y(t) = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$

Từ b) suy ra: đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng.

Từ c) suy ra: đường thẳng $y = \sqrt{2}$ là tiệm cận ngang.

Từ a) và d) suy ra: đồ thị của hàm số có thể có tiệm cận xiên.

Xét $a = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{\sqrt{t^4+1}(t-1)}{t^2(t-2)} = 1$

$$b = \lim_{t \to \pm\infty}\left(y(t) - x(t)\right) = \lim_{t \to \pm\infty}\left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t} - \frac{t^2-2t}{t-1}\right) = \lim_{t \to \pm\infty}\left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t} - t + \frac{t}{t-1}\right)$$

$$= \lim_{t \to \pm\infty}\left(\frac{\sqrt{t^4+1}-t^2}{t} + \frac{t}{t-1}\right) = \lim_{t \to \pm\infty}\left(\frac{1}{t(\sqrt{t^4+1}+t^2} + \frac{t}{t-1}\right) = 1$$

Vậy y = x + 1 là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x \to \pm\infty$).

8) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

Ta thấy khi $t \to -1$ thì $x \to \infty$ và $y \to \infty$

Xét $a = \lim\limits_{t \to -1} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t \to -1} \frac{3at^2}{3at} = -1$

$$b = \lim_{t \to -1}(y - x) = \lim_{t \to -1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3} - \frac{3at}{1+t^3}\right) = \lim_{t \to -1}\frac{3at(t-1)}{(t-1)(t^2-t+1)} = -a$$

Vậy $y = -x - a$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

(Đồ thị của hàm số không có tiệm đứng và ngang?).

9) $x^3 - 3xy^2 = R(x^2+y^2)$ (1) $\qquad R > 0,\ x \neq 0$

Trước hết ta đưa phương trình đường cong (1) về dạng tham số:

Đặt y = tx ta được:

$$\begin{cases} x = R\dfrac{1+t^2}{1-3t^2} \\ y = \dfrac{Rt(1+t^2)}{1-3t^2} \end{cases}$$

- Rõ ràng khi $t \to \infty$ thì $x \to -\dfrac{R}{3}$, $y \to \infty$

Vậy đường thẳng $x = -\dfrac{R}{3}$ là tiệm cận đứng của đường cong.

- Khi $t \to \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $x \to \infty$, $y \to \infty$.

Xét $a = \lim\limits_{t \to \pm\frac{1}{\sqrt{3}}} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t \to \pm\frac{1}{\sqrt{3}}} \dfrac{t(1+t^2)}{1+t^2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$b_1 = \lim_{t \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}x \right) = \lim_{t \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \left(R\frac{t(1+t^2)}{1-3t^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{R(1+t^2)}{1-3t^2} \right)$$

$$= \frac{R}{\sqrt{3}} \lim_{t \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{(t^2+1)(\sqrt{3}t-1)}{(1-\sqrt{3}t)(1+\sqrt{3}t)} = -\frac{2R}{3\sqrt{3}}$$

Tương tự: $b_2 = \lim\limits_{t \to -\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(y + \dfrac{1}{\sqrt{3}}x \right) = \dfrac{2R}{3\sqrt{3}}$

Vậy đường cong có hai tiệm cận xiên:

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2R}{3\sqrt{3}}, \qquad y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2R}{3\sqrt{3}}$$

Chú ý:

- Một đường cong có phương trình: $\sum a_{ke} x^k y^e = 0$ (a)

Trong đó tổng Σ lập nên $\forall k, e \in N$, $0 \le k \le n$, $0 \le e \le n$, $k + e \le n$ số hạng ứng với $k + e = n$ khác không, gọi là một đường đại số bậc n.

- Nếu đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (a) thì x_0 là nghiệm của đa thức của x là hệ số của luỹ thừa bậc cao nhất của y.

- Nếu $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của (a) thì thay vào (a) ta được một đa thức của x. cho bằng không hai hệ số của 2 luỹ thừa bậc cao nhất của x, khi đó a, b sẽ là nghiệm của hai phương trình này.

Chẳng hạn. xét (1), hệ số của luỹ thừa bậc cao nhất của y (y^2) là $3x + R$. do đó $x = -R/3$ (b) có thể là tiệm cận đứng của đường cong. Để tìm tiệm cận xiên, ta thay $y = ax + b$ vào (1) ta có:

$$(3a^2 - 1)x^3 + (6ab + Ra^2 + R)x^2 + (3b^2 + 2Rab)x + Rb^2 = 0$$

theo chú ý trên: ta có hệ để tìm a, b:

$$\begin{cases} 3a^2 - 1 = 0 \\ 6ab + Ra^2 + R = 0 \end{cases}$$

Giải ta có: $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $b = \mp\dfrac{2R}{3\sqrt{3}}$

và $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}} \mp \dfrac{2R}{3\sqrt{3}}$ (c) có thể là tiệm cận của đường cong. Theo cách đưa (1) về dạng tham số đã làm ở trên thì các đường thẳng đó đúng là các đường tiệm cận của đường cong.

10) $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$ (1) theo chú ý ở 9), ở đây hệ số của luỹ thừa bậc cao nhất của y (y^3) là 1. vậy đường cong không có tiệm cận đứng.

Giả sử $y = ax + b$ là tiệm cận xiên thì:

$$x^4 - 2x^2(ax + b)^2 + (ax + b)^3 = 0$$

hay:

$$(1 - 2a^2)x^4 + (a^3 - 4ab)x^3 + (3a^2b - 2b^2)x^2 + 3ab^2x + b^3 = 0$$

và a, b phải là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 1-2a^2=0 \\ a^3-4ab=0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Vậy $y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{8}$ (2) có thể là tiệm cận xiên của đường cong nếu đưa phương trình (1) về dạng tham số, đặt y = tx thì:

$$x^4 - 2t^2x^2 + t^3x^3 = 0$$

Từ đó: $$\begin{cases} x=\dfrac{-t^3}{1-2t^2} \\ y=\dfrac{-t^4}{1-2t^2} \end{cases} \quad (1')$$

Rõ ràng (2) là các đường tiệm cận của (1') nghĩa là (2) cũng là các đường tiệm cận của (1).

73. Dùng khai triển Taylor, tìm tiệm cận của đồ thị các hàm số.

1) $y=\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$

2) $y = \sqrt[3]{x^3-x^2}$

3) $y=\dfrac{x^2-4}{x}e^{\frac{-5}{3x}}$

4) $y=|x|\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

Bài giải

1) Khi $x \to 2$ thì $y \to \infty$.

Vậy x = 2 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Để tìm tiệm cận xiên, ta viết:

$y = \frac{x}{4}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-2}$, và áp dụng khai triển 4°(2.2) cho $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-2}$ với

$\alpha = -2$ và x thay bởi $\frac{-x}{2}$

ta có: $y = \frac{x}{4}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} + 0\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{x}{4} + 1 + \frac{3}{x} + 0\left(\frac{1}{x}\right)$

($0(\frac{1}{x})$ là VBC bậc cao hơn $\frac{1}{x}$ khi $x \to \infty$)

Vậy khi $x \to \infty$ $y \sim Y = \frac{x}{4} + 1$, nghĩa là $Y = \frac{x}{4} + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

2) Ta viết $y = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

Tương tự như 1):

$$y = x\left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + 0\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

hay $$y = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + 0(\frac{1}{x})$$

Vậy $Y = x - \frac{1}{3}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

3) y xác định $\forall x \neq 0$

$$\lim_{x \to -0} y = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -0} y = -0$$

Vậy x = 0 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \to -0$.

Khi $x \to \infty$ thì $y \to \infty$, để tìm tiệm cận xiên, áp dụng khai triển 1^0 ở (2.2) ta có:

$$y = \left(x - \frac{4}{x}\right)\left(1 - \frac{5}{3x} + \frac{25}{18x^2} + 0\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x - \frac{5}{3} - \frac{47}{18x} + 0\left(\frac{1}{x}\right) \text{ khi } x \to \infty$$

Vậy $y = x - \frac{5}{3}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x \to \pm \infty$).

4) y xác định khi $x \leq 2$ và $x > 3$

vì $\lim\limits_{x \to 3+} y = +\infty$ nên $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

khi $x \to \infty$ thì $y \to +\infty$, để tìm tiệm cận xiên, ta viết:

$$y = |x|\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

tương tự như 1) ta có:

$$y = |x|\left(1 - \frac{1}{x} + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 + \frac{3}{2x} + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= |x|\left(1 + \frac{1}{2x} + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Do đó khi $x \to \pm \infty$:

$$y = \pm x \pm \frac{1}{2} + \alpha \text{ , } \alpha \text{ là VCB khi } x \to \infty$$

Nghĩa là $Y = \pm x \pm \frac{1}{2}$ là các tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (khi $x \to \pm \infty$).

74. **Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:**

1) $y = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x - 3)$

2) $y = \frac{x^3}{4(2-x)^2}$

3) $y = \frac{x^2-4}{x}.e^{-\frac{5}{3x}}$

4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

5) $y = \frac{\ln x}{x}$

6) $y = x\text{arctg}x$.

Bài giải

1) Hàm y xác định $\forall x \in R$

$$y' = \frac{3}{4}(x^2 + 2x - 3) = 0 \text{ khi } x = -3 \text{ và } x = 1$$

$$y'' = \frac{3}{2}(x+1) = 0 \text{ khi } x = -1$$

Đồ thị của y không có tiệm cận.

Để xét chiều biến thiên, cực trị, bề lồi, lõm, điểm uốn, ta lập bảng sau đây:

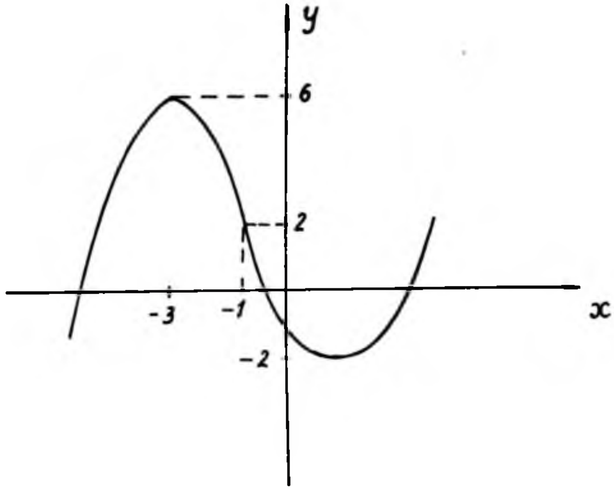
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−		−	0	+	
y''		−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	6	↘	2	↘	-2	↗	$+\infty$

(Mũi tên cong : chỉ bề lồi, : chỉ bề lõm).

Từ bảng: $y_{max} = y(-3) = 6$

$y_{min} = y(1) = -2$: điểm uốn $(-1, 2)$.

Đồ thị của y trên H14.



Hình 14.

2) $y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$, y xác định $\forall x \in R$, $x \neq 2$.

Theo 1) bài 73, tiệm cận của đồ thị hàm số là $x = 2$ và $y = \dfrac{x}{4}$ + 1.

Ta tính: $y' = \dfrac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3} = 0$ tại $x = 0$ và $x = 6$

$y' = \infty$ khi $x = 2$, dấu của y' là dấu của tích $(x - 2)(x - 6) > 0$ (< 0) khi $x < 2$, $x > 6$, $(2 < x < 6)$.

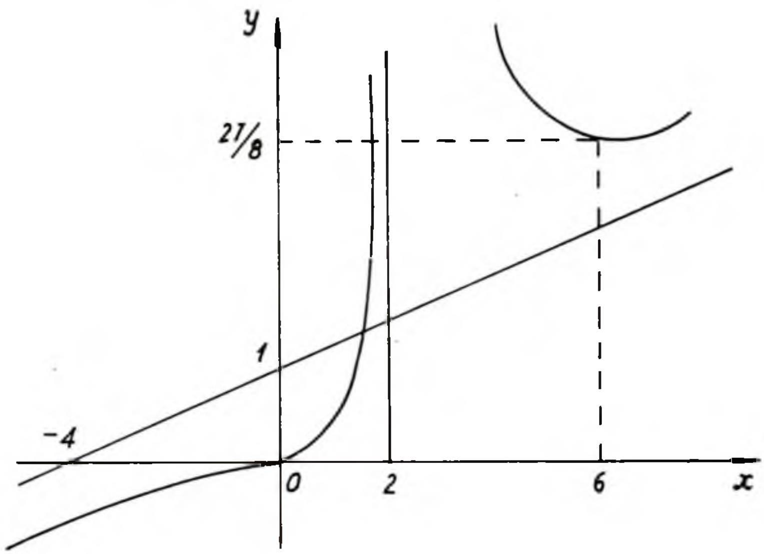
$$y'' = \frac{6x}{(x-2)^4} = 0 \quad \text{khi } x = 0,\ y'' = \infty \text{ khi } x = 2$$

Ta lập bảng:

x	$-\infty$		0		2		6		$+\infty$
y'		$+$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng ta có: $y_{min} = y(6) = \dfrac{27}{8}$, điểm uốn $(0,0)$.

Đồ thị của y trên H.15.



Hình 15.

3) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x} e^{\frac{-5}{3x}}$, y xác định $\forall\ x \neq 0$.

Theo 3) bài toán 73, tiệm cận của đồ thị hàm số là các đường $x = 0$ và $y = x - \frac{5}{3}$.

Tính toán ta có:

$$y' = \frac{(x-1)(3x^2+8x+20)}{3x^3} e^{\frac{-5}{3x}}$$

$y' = 0$ khi $x = 1$, $y' = \infty$ khi $x = 0$.

Dấu của y' là dấu của : $x(x-1) > 0$ (< 0) khi $x < 0$, $x > 1$ $(0 < x < 1)$.

$$y_{min} = y(1) = -3e^{\frac{-5}{3}} \approx -0{,}6$$

$$y'' = \frac{-47x^2 - 240x + 100}{9x^5} e^{\frac{-5}{3x}}$$

$y'' = 0$ khi $x = x_1 = 10\dfrac{12-\sqrt{97}}{47} \approx 0{,}5$, $y(x_1) \approx -0{,}2$.

$x = x_2 = 10\dfrac{12+\sqrt{97}}{47} \approx 4{,}6$, $y(x_2) \approx 2{,}8$.

$y'' = \infty$ khi $x = 0$.

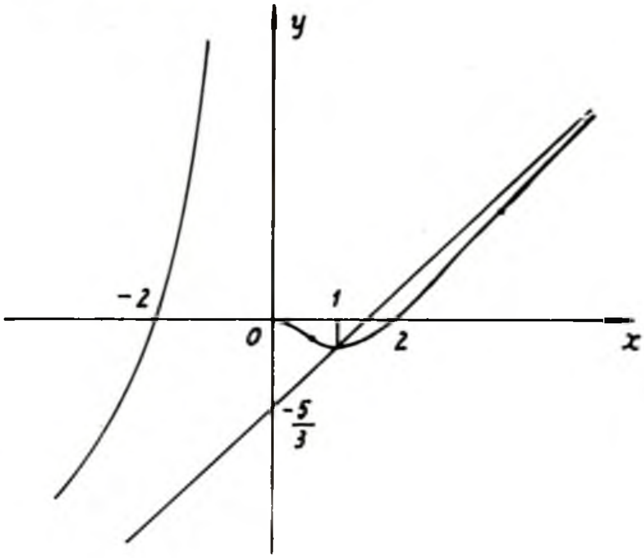
Dấu của y'' là dấu của : $-x(x-x_1)(x-x_2)$, điểm uốn $(0{,}5; -0{,}2)$ và $(4{,}6; 2{,}8)$.

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		$+\infty$
y'		+	‖		−		0	+		+	
y''		+	‖	−	0		+	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ 0	↘	$-0{,}2$	↘	$-0{,}6$	↗	$2{,}8$	↗	$+\infty$

Chú ý: $\lim\limits_{x \to +0} y = -0$

$y = 0$, $x = \pm 2$.

Đồ thị của y trên hình H16.



Hình 16.

4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

y xác định $\forall x \in R$ và là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, do đó ta xét $0 \le x \le 2\pi$ và vẽ đồ thị trên đoạn này và tịnh tiến dọc trục Ox ta có toàn bộ đường cong.

$y' = 3\sin^2 x\cos x - 3\cos^2 x\sin x = 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$.

Cho $y' = 0$ ta có các điểm dừng trong khoảng $[0, 2\pi]$:

$$x = 0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi$$

$$y'' = \frac{9}{2}(\sin x + \cos x)\left(\sin 2x - \frac{2}{3}\right)$$

$y''(0) = \frac{9}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = -3 < 0$ theo quy tắc II: $y_{max} = y(0) = 1$

$$y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{2}\frac{2\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow y_{min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tương tự tại các điểm dừng khác ta có bảng:

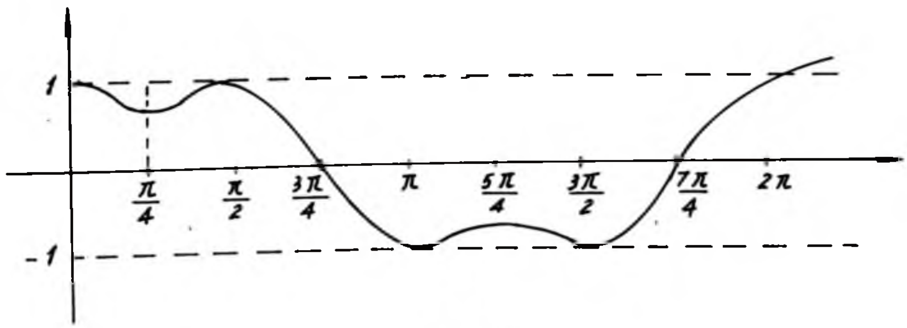
x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0
y	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1	↘	-1	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1

Xét $\qquad y'' = \frac{9}{2}(\sin x + \cos x)\left(\sin 2x - \frac{2}{3}\right) = 0$

tại $x_1 = \frac{3\pi}{4} \approx 2{,}36$; $x_2 = \frac{7\pi}{4} \approx 5{,}5$; $x_3 \approx 0{,}36$; $x_4 \approx 1{,}21$; $x_5 \approx 3{,}51$; $x_6 \approx 4{,}35$.

y'' đổi dấu qua các điểm này, nên chúng đều là điểm uốn của đồ thị hàm số.

Đồ thị của y được cho trên hình H.17.



Hình 17.

5) $\quad y = \frac{\ln x}{x}$: xác định $\forall x > 0$.

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

Vậy x = 0 là tiệm cận đứng của đường cong.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ nên y = 0 là tiệm cận ngang của đường cong.

Ta có : $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^3} = 0$ tại $\ln x = 1$ hay $x = e$.

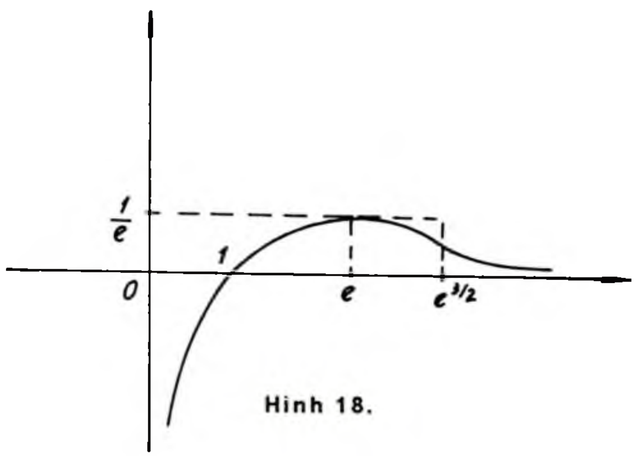
$$y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3} = 0 \text{ tại } \ln x = \frac{3}{2} \text{ hay } x = e^{3/2}$$

Bảng biến thiên:

x	0		1		e		$e^{3/2}$		$+\infty$
y'		+		+	0	-		-	
y''		-		-		-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2\sqrt{e^3}}$	↘	0

Ta có: $y_{max} = y(e) = \dfrac{1}{e}$, điểm uốn $\left(e^{3/2}, \dfrac{3}{2e^{3/2}}\right)$

Đồ thị của y trên hình H.18.



Hình 18.

6) $y = x\,\mathrm{arctg}x$, hàm y xác định $\forall x \in R$.

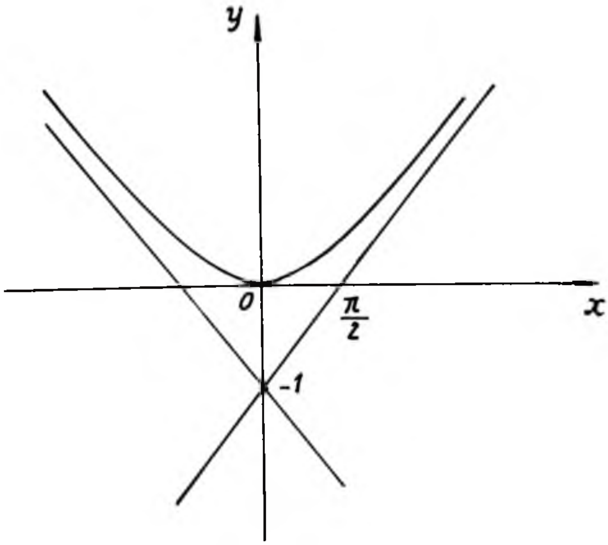
$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$, ta tìm tiệm cận xiên:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\mathrm{arctg}x = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(y - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\,\mathrm{arctg}x - \frac{\pi}{2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\mathrm{arctg}x - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$$

Tương tự $\quad b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(y + \frac{\pi}{2}x\right) = -1$



Hình 19.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận xiên là:

$$y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$$

Ta tính:

$$y' = \frac{x}{1+x^2} + \text{arctg}x = 0 \text{ tại } x = 0.$$

$$y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2},$$

$y''(0) = 2 > 0$ nên $y_{min} = y(0) = 0$ vậy $y'' > 0$: đường cong luôn luôn lõm $\forall x \in R$.

Đồ thị của y trên hình H.19.

§4. KHẢO SÁT HÀM SỐ CHO THEO THAM SỐ VÀ TRONG TOẠ ĐỘ ĐỘC CỰC

4.1. Hàm số cho theo tham số

Hàm $y = f(x)$ cho theo hệ:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (1) \qquad \alpha \le t \le \beta$$

gọi là hàm số cho theo tham số t, đồ thị của nó là đường cong C thì (1) gọi là phương trình tham số của C.

Để khảo sát và vẽ đồ thị C của hàm số, ta tiến hành qua các bước như đã làm với hàm $y = f(x)$, chỉ khác là tiến hành khảo sát gián tiếp y theo x qua biến trung gian t.

4.2. Hàm số cho theo toạ độ độc cực

Trong R^2 cho trục Ox và 1 điểm M, các số:

$$r = |\overrightarrow{OM}|, \qquad 0 \le r < +\infty$$

$$\varphi = (\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}), \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \text{(H.20)}$$

gọi là các toạ độ cực của điểm M.

ký hiệu là M(r, φ), r gọi là bán kính cực; φ gọi là góc cực. Hệ gồm điểm O và trục Ox gọi là hệ toạ độ độc cực.

Người ta cũng xét: $-\infty < r < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$

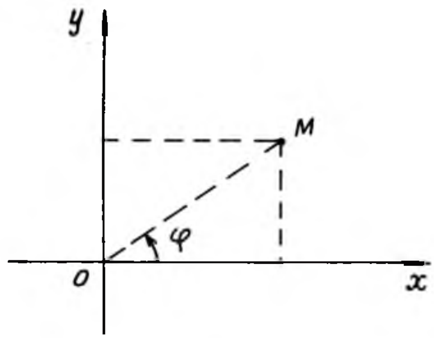
lúc đó r, φ gọi là các toạ độ độc cực suy rộng.

Liên hệ với toạ độ Descartes:

$$x = r\cos\varphi;\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi;\ \varphi = \text{arc tg}\frac{y}{x} \quad (1)$$

- Xét hàm r = r(φ) (2) $\alpha \le \varphi \le \beta$ trong toạ độ độc cực, (2) gọi là phương trình độc cực của đường cong C là đồ thị của hàm số. Để khảo sát (2) và vẽ C, ta có thể đưa (2) về dạng tham số với tham số φ:



Hình 20.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \qquad \alpha \le \varphi \le \beta$$

hoặc về dạng F(x,y) = 0 theo các công thức liên hệ trên.

Trong thực tiễn, thường khảo sát trực tiếp r theo φ, bằng cách xét các điểm riêng biệt của C và góc V giữa vecteur bán kính cực và tiếp tuyến với C tại các điểm ấy:

$$\text{tg}V = \frac{r}{r'_\varphi} \qquad (3)$$

Nếu $\varphi \to \varphi_0$, $r \to \infty$ thì đường cong (2) có thể có tiệm cận, nếu:

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0) = d \neq 0 \quad (4)$$

thì đường thẳng: $r = \dfrac{d}{\sin(\varphi - \varphi_0)}$ (5) là tiệm cận của đường cong đó.

BÀI TẬP

75. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm cho theo tham số (hoặc đưa được về tham số).

1) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(a > 0)$, đường astroïde

3) $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}$ $(a > 0)$, đường cardioïde

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$, đường cycloïde

5) $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$, lá descartes

6) $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$ $(a > 0)$, đường cissoïde

7) $y^2 = x^2.\dfrac{a + x}{a - x}$ $(a > 0)$, đường strophoïde

Bài giải

1) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

các hàm x, y xác định $\forall t$: $-\infty < t < +\infty$

vì $x_{max} = 1$ (khi $t = 1$) nên hàm $y = y(x)$ xác định khi $-\infty < x \leq 1$.

Khi $t \to +\infty$ thì $x, y \to +\infty$, $\frac{y}{x} \to \infty$ nên đồ thị của hàm số không có tiệm cận.

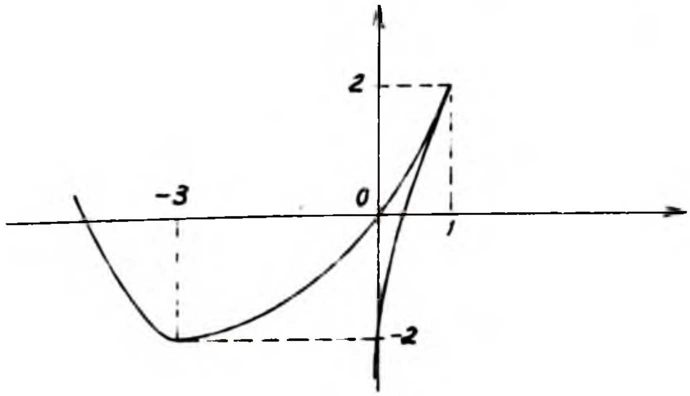
Ta tính $$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3}{2}\frac{1-t^2}{1-t}$$

$y'_x = 0$ khi $t = -1$ $(x=-3)$, y'_x có gián đoạn bỏ được khi $t = 1$ vì $\lim\limits_{t\to 1} y'_x = 3$.

$$y''_{x^2} = \frac{3}{4}\frac{1-t^2}{(1-t)^3} = 0 \text{ khi } t = 1.$$

Tính toán ta có bảng:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x	$-\infty$	↗	-3	↗	1	↘	$-\infty$
y'_x		$-$	0	$+$	‖	$+$	
y''_{x^2}		$+$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$



Hình 21.

Đường cong cắt các trục toạ độ tại

$(0, 0)$ khi $t = 0$ $(\pm 2\sqrt{3} - 3, 0)$ khi $t = \pm\sqrt{3}$.

$(0, -2)$ khi $t = 2$.

Đồ thị của y trên hình H.21.

Chú ý: Điểm $(1, 2)$ không phải là điểm uốn của đồ thị hàm số (?).

2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (1)

Các hàm x, y xác định $\forall t$ và là các hàm tuần hoàn chu kỳ 2π.

Xét $0 \le t \le 2\pi$.

Thay t bởi $-t$ thì $x \to x$, $y \to -y$; do đo đường cong đối xứng qua Ox, nên xét $0 \le t \le \pi$.

Thay t bởi $\pi - t$ thì $y \to y$, $x \to -x$, do dó đường cong lại đối xứng qua Oy nên ta chỉ cần xét $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, sau đó lấy đối xứng ta sẽ có đường cong trong một chu kỳ, nó cũng là đường cong trong các chu kỳ khác.

Ta tính:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\text{tg}t$$

$y'_x = 0$ tại $t = 0$, $y'_x = \infty$ tại $t = \frac{\pi}{2}$

$$y''_{x^2} = (-\text{tg}t)'_t\, t'_x = \frac{-1}{\cos^2 t}\,\frac{1}{(-3a\cos^2 t\sin t)} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t} > 0,\ 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

Vậy đường cong luôn lõm khi $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Tính toán ta có bảng:

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x	a	↘	$\frac{a\sqrt{2}}{4}$	↘	0
y'_x	0	-		-	
y''_{x^2}	‖	+		+	
y	0	↗	$\frac{a\sqrt{2}}{4}$	↗	a

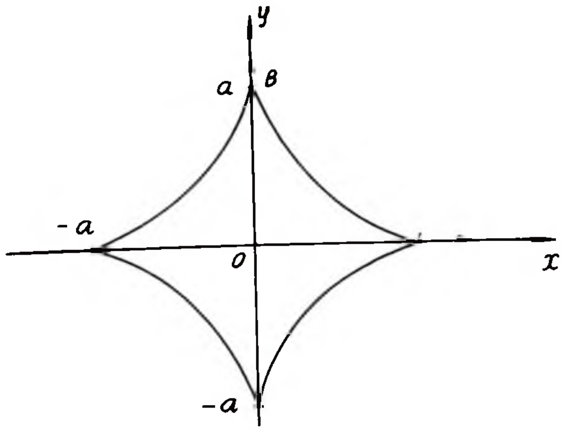
tại A(a, 0): $y'_x = 0$: tiếp tuyến nằm ngang (trục Ox).

B(0, a): $y'_x = \infty$: tiếp tuyến nằm thẳng đứng (trục Oy).

Khử t từ (1): lấy luỹ thừa 2/3 hai vế rồi cộng:

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$: đường cong gọi là Astroside (H.22), ta thấy đường cong có hai nửa:

- Nửa ứng với $y \geq 0$; $y_{max} = a$ khi $x = 0$.
- Nửa ứng với $y < 0$; $y_{min} = -a$ khi $x = 0$.



Hình 22.

3) $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}$

x, y xác định $\forall t \in R$ và là các hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, nên ta xét $-\pi \le t \le \pi$.

Mặt khác thay t bởi $-t$ thì $x \to x$, $y \to -y$ nên đường cong đối xứng qua trục Ox, do đó ta xét $-\pi \le t \le 0$ rồi lấy đối xứng qua trục Ox ta có đường cong trong $-\pi \le t \le \pi$.

Tính:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2a\cos t - 2a\cos 2t}{-2a\sin t + 2a\sin 2t} = \frac{\cos t - \cos 2t}{\sin 2t - \sin t} = \frac{2\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{2\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{3t}{2}$$

Trong $[-\pi, 0]$: $y'_x = 0$ khi $t = 0$ và $t = -\frac{2\pi}{3}$

$y'_x = \infty$ khi $t = -\pi$ và $t = -\frac{\pi}{3}$

Tính toán ta có bảng:

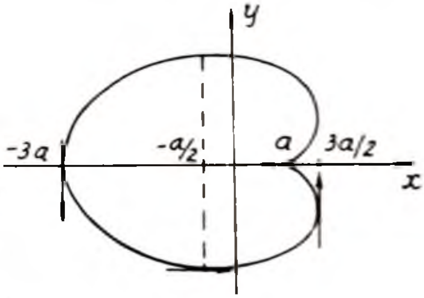
t	$-\pi$		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{-\pi}{3}$		0
x	-3a	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}a$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}a$	$\searrow$	0
y'_x	‖	−	0	+	‖	−	
y	0	$\searrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}a$	$\nearrow$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}a$	$\nearrow$	0

Từ bảng này ta có các điểm đặc biệt của đường cong và tiếp tuyến với đường cong tại các điểm đó, trên cơ sở đó ta vẽ được đường cong (H.23).

Ở đây đã bỏ qua việc xét y''_x:

ta có: $y_{min} = \frac{-3\sqrt{3}a}{2}$ khi $x = -\frac{a}{2}$

$x_{max} = \frac{3a}{2}$ khi $y = \frac{-\sqrt{3}a}{2}$



Hình 23

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

x, y xác định $\forall t \in R$, chu kỳ của y đối với t là 2π, khi $0 \le t \le 2\pi$ thì $0 \le t \le 2a\pi$. Vậy chu kỳ của y đối với x là $2a\pi$. Vậy xét $0 \le t \le 2\pi$, sau đó tịnh tiến đường cong trên $[0, 2a\pi]$ dọc Ox những đoạn $2a\pi$ ta có toàn bộ đường cong.

Ta tính:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \cot g\frac{t}{2}$$

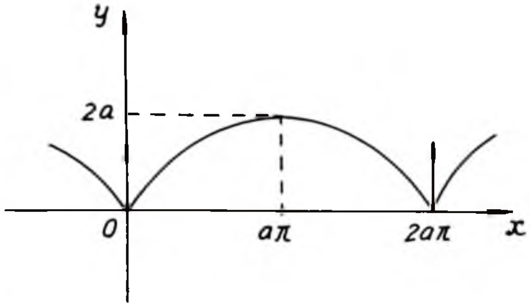
$y'_x = 0$ khi $t = \pi$, $y'_x = \infty$ khi $t = 0$ và $t = 2\pi$

$$y''_{x^2} = (\cot g\frac{t}{2})'_t .t'_x = \frac{-1}{\sin^2 t.a(1-\cos t)} < 0$$

Khi $0 < t < 2\pi$, vậy đường cong là lồi khi $0 < x < 2\pi a$

Tính toán ta có bảng:

t	0		π		2π
x	0	↗	aπ	↗	2aπ
y'ₓ	‖	+	0	-	
y''ₓ²	‖	-		-	
y	0	↗	2a	↘	0



$y_{max} = 2a$ tại $x = a\pi$ (H24)

Hình 24.

5) $x^3 + y^3 = 3axy$, đặt $y = tx$ thì ta có phương trình tham số của đường cong:

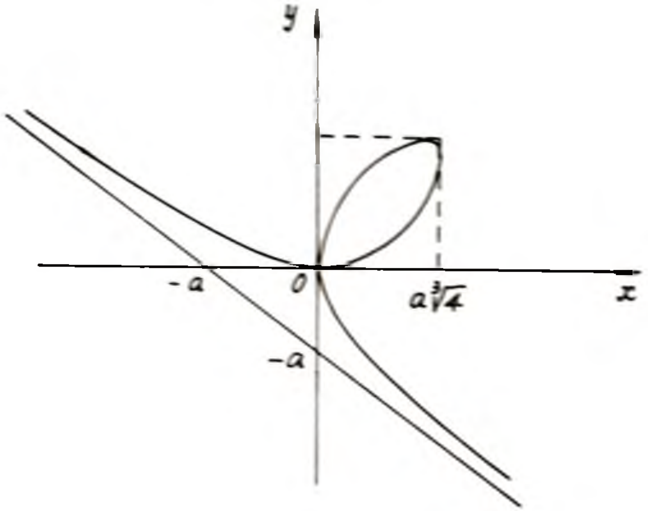
$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Theo bài 73 thì đường cong có tiệm cận xiên là y = − x − a

Ta tính: $$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

$$y'_x = 0 \text{ khi } t = 0 \text{ và } t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x	0		$+\infty \parallel -\infty$		0		$a\sqrt[3]{4}$		$a\sqrt[3]{2}$		0
y'_x		$-$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$
y	0	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0



Hình 25.

Ở đây ta đã bỏ qua việc xét y''_{x^2}.

Căn cứ vào các điểm đặc biệt trên bảng và tiếp tuyến tại các điểm đó, ta vẽ được đường cong (H25).

Tại (0,0) đường cong có 2 tiếp tuyến là trục Ox và Oy (ứng với $t = 0$, $t \to \infty$: $y'_x = \infty$).

Tại $a\sqrt[3]{4}$, $a\sqrt[3]{2}$: tiếp tuyến thẳng đứng.

Tại $a\sqrt[3]{2}$, $a\sqrt[3]{4}$: tiếp tuyến nằm ngang.

Đường cong gọi là "lá" Descartes, nó đối xứng đối với đường thẳng $y = x$.

6) $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$, đặt $y = tx$, giải ra ta có:

$$\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = a$

$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty$

Vậy $x = a$ là tiệm cận đứng của đường cong.

Các hàm x, y xác định $\forall t \in R$.

Thay t bởi -t thì x = const, y thành -y.

Vậy đường cong đối xứng qua Ox, nên xét $0 \le t < +\infty$, rồi lấy đối xứng.

Tính $y'_x = \dfrac{t(t^2+3)}{2}$, $y'_x = 0$ khi $t = 0$

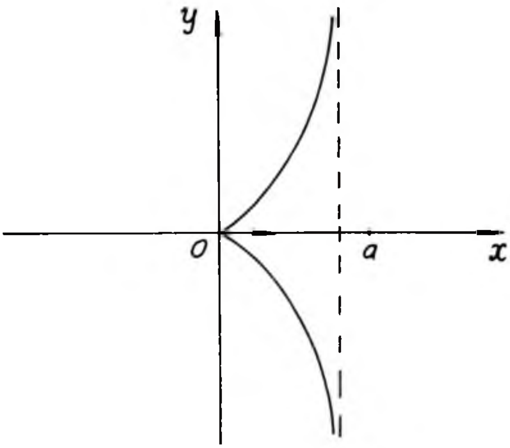
$y''_{x^2} = \dfrac{3(1+t^2)^3}{2at}$, $y''_{x^2} = \infty$ khi $t = 0$

Ta có bảng:

t	0		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	a
y'_x	0	$+$	$\Vert$
y''_{x^2}	$\Vert$	$+$	$\Vert$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tại (0,0): y' = 0, tiếp tuyến nằm ngang.

Đường cong gọi là đường cong cissoïde (H26).

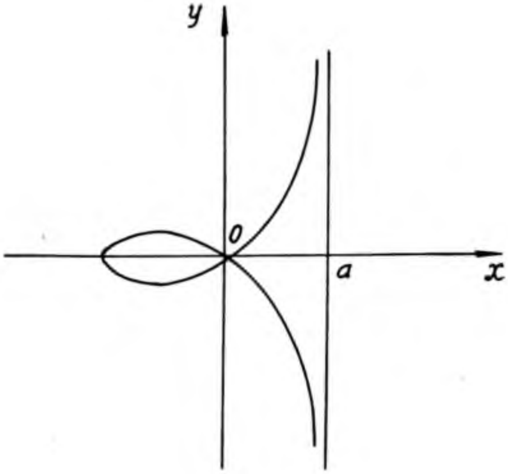


Hình 26.

7) $y^2 = x^2\dfrac{a+x}{a-x}$ $(a > 0)$, đặt $y = tx$

ta có $\begin{cases} x = a.\dfrac{(t^2-1)}{t^2+1} \\ y = \dfrac{at(t^2-1)}{t^2+1} \end{cases}$

Tương tự 6) ta có đường cong trên H27.



Hình 27.

***76.** Cho hàm $r = r(\varphi)$ (1), $\alpha < \varphi < \beta$ trong toạ độ độc cực. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} r(\varphi) = \infty$ và tồn tại $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0)$ $= d$ thì đường thẳng $r = \dfrac{d}{\sin(\varphi - \varphi_0)}$ là tiệm cận của đường cong (đồ thị của hàm số).

Bài giải

Xét $d > 0$, dựng đường thẳng D song song với nửa đường thẳng (tia) $\varphi = \varphi_0$ và cách nửa đường thẳng này một đoạn bằng d, theo H28, thì $\overline{OH'} = \left|\overline{OM}\right|\sin(\varphi - \varphi_0) = r(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0)$ và theo giả thiết thì $d = \overline{OH} = \lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} \overline{OH'}$.

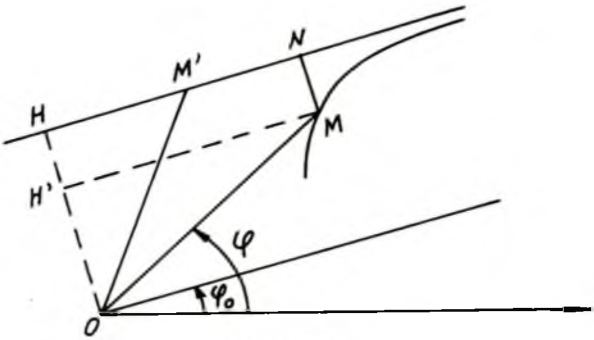
Do đó $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} \overline{MN} = \lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} \overline{H'H} = \lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} (d - \overline{OH'}) = 0$

Nghĩa là đường thẳng D là tiệm cận của đường cong (1).

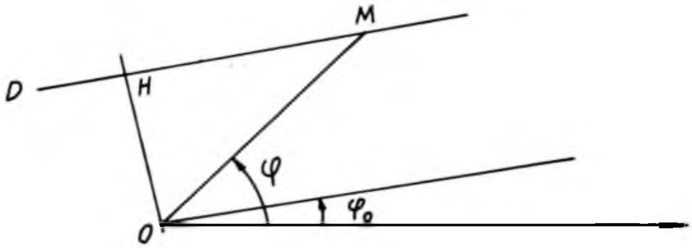
Xét $M \in D$, $M(r, \varphi)$ thì theo H.29:

$$\overline{OH} = \left|\overline{OM}\right|\sin(\varphi - \varphi_0) \quad \text{hay} \quad r = \frac{d}{\sin(\varphi - \varphi_0)} \quad (2)$$

nghĩa là (2) là phương trình của tiệm cận D của đường cong.



Hình 28.



Hình 29.

Trường hợp d < 0, thì rõ ràng tiệm cận D của đường cong cách gốc O một khoảng là $|d|$ và thẳng góc với đường thẳng qua O và lập với Ox một góc $\varphi_0 - \frac{\pi}{2}$.

Trường hợp đạc biệt: d = 0 thì tiệm cận của đường cong là đường thẳng qua gốc và chứa tia $\varphi - \varphi_0$.

77. Vẽ các đường cong trong toạ độ độc cực:

1) $r = a\varphi$

2) $r = ae^{b\varphi}$

3) $r = \dfrac{a}{\varphi}$

4) $r = a(1 + \cos\varphi)$

5) $x^2 + y^2 = ay$

6) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

7) $r = a\sin 3\varphi$

8) $r = a|\sin 2\varphi|$

9) $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$

*10) $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$, xét 3 trường hợp:

a) $e = 1$; b) $e < 1$; c) $e = 2 > 1$.

(Các tham số a, p, e cho trong bài đều dương)

11) $r = b + a\cos\varphi$, $0 < a \leq b$

12) $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$, $(a > 0)$

Bài giải

1) $r = a\varphi$: xác định $\forall\varphi \in R$.

Thay φ bởi $-\varphi$ thì r thành $-r$: đường cong đối xứng qua trục Oy nên xét $0 \leq \varphi \leq +\infty$, rồi lấy đối xứng ta có toàn bộ đường cong.

Ta có: $r'_\varphi = a > 0$.

Lập bảng:

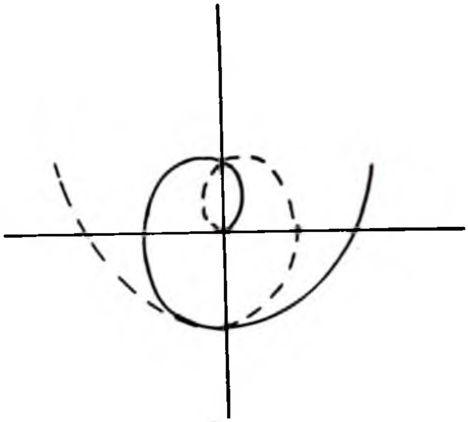
φ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π ...
r'_φ		+		+		+		+	
r	0	$\nearrow$	$a\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$a\pi$	$\nearrow$	$\frac{a.3\pi}{2}$	$\nearrow$	$a.2\pi$...

Để dựng tiếp tuyến tại các điểm đặc biệt ta tính:

$$\text{tg}V = \frac{r}{r'_{\varphi}} = \frac{a\varphi}{a} = \varphi$$

V: góc giữa bán kính vecteur của điểm (r, φ) và tiếp tuyến với đường cong tại điểm đó.

Đường cong gọi là đường xoắn ốc Archimede (H.30).



Hình 30.

2) $r = ae^{b\varphi}$ hàm r xác định $\forall\varphi \in R$, $(r > 0)$.

$\lim\limits_{\varphi \to -\infty} r = 0$,

$\lim\limits_{\varphi \to +\infty} r = +\infty$, $r'_{\varphi} = abe^{b\varphi} > 0$, $\forall\varphi \in R$.

$$\text{tg}V = \frac{r}{r'_{\varphi}} = \frac{ae^{b\varphi}}{abe^{b\varphi}} = \frac{1}{b} = \text{const tại mọi điểm.}$$

Lập bảng:

φ	$-\infty$		0		$+\infty$
r'_{φ}		$+$		$+$	
r	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

Đường cong gọi là đường xoắn ốc Logarithme (H.31).

3) $r = \frac{a}{\varphi}$, r xác định $\forall\varphi \neq 0$

Thay φ bởi $-\varphi$ thì r thành $-r$, do đó đường cong đối xứng qua trục Oy nên chỉ xét $0 < \varphi < +\infty$.

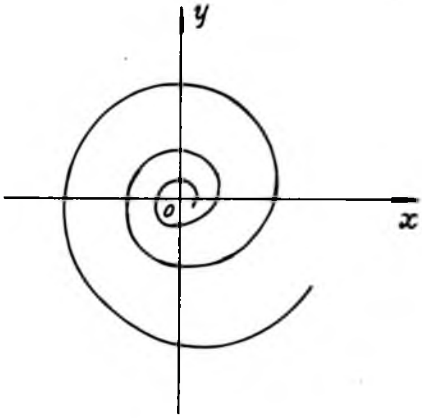
Khi $\varphi \to 0$ thì $r \to \infty$ nên đường cong có thể có tiệm cận.

Theo (4) và (5) ở (4.2), ở đây:

$$d = \lim_{\varphi \to 0} OH' = \lim_{\varphi \to 0} r \sin\varphi$$

$$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{a}{\varphi} \sin\varphi = a$$

và phương trình tiệm cận là đường thẳng song song với Ox và cách O một đoạn bằng a (H.32).



Hình 31.

Ta có :

$$r'_{\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2} < 0$$

$$tgV = \frac{r}{r'_{\varphi}} = \frac{a}{\varphi\left(\frac{-a}{\varphi^2}\right)} = -\varphi$$

Ta lập bảng:

φ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		...
r'		$-$		$-$			
r	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2a}{\pi}$	$\searrow$	$\frac{a}{\pi}$	$\searrow$	...

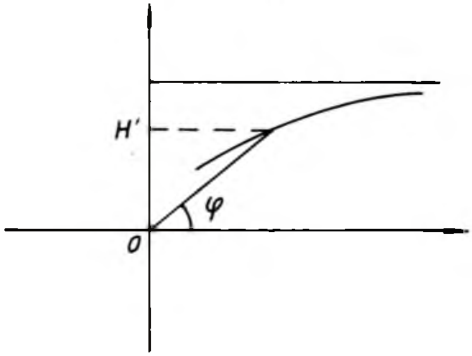
Đường cong (H.33) gọi là đường xoắn ốc hyperbole.

4) $r = a(1 + \cos\varphi)$, r xác định $\forall\varphi$, chu kỳ của r đối với φ là 2π.

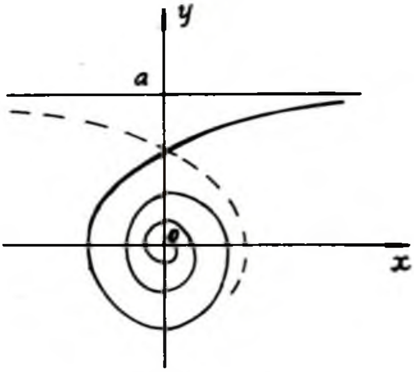
Thay φ bởi $-\varphi$ thì r không đổi. Vậy đường cong đối xứng qua Ox, nên ta xét $0 \le \varphi \le \pi$:

$r'_\varphi = -a\sin\varphi \le 0,$

$$\mathrm{tg}V = \frac{r}{r'_\varphi} = \frac{a(1+\cos\varphi)}{-a\sin\varphi} = -\cot g\frac{\varphi}{2} = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}) \text{ trong } 0 \le \varphi \le \pi.$$



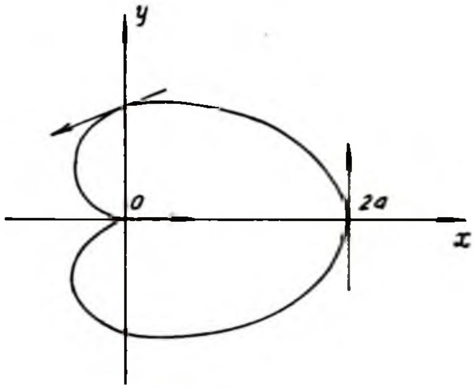
Hình 32.



Hình 33.

Lập bảng:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r'_φ	$-$	$-$	
r	$\searrow$	a $\searrow$	0
V	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π



Hình 34.

Từ bảng biến thiên và do đối xứng ta vẽ đường cong (H.34), gọi là đường Cardioide.

Chú ý: - Trong một chu kỳ ta đã có đường cong khép kín, suy ra: đường cong trong các chu kỳ khác do quay một góc 2π, ta được chính đường cong trong $[0, 2\pi]$.

5) $x^2 + y^2 = ay$, theo các công thức liên hệ (1) ở (4.2) ta có:

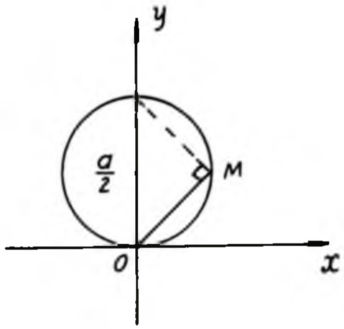
$$r^2 = ar\sin\varphi \quad \text{hay } r = a\sin\varphi$$

là phương trình của một đường cong trong toạ độ độc cực đó là đường tròn tâm $(0, \frac{a}{2})$ trên trục Oy và bán kính $\frac{a}{2}$ (H.35).

(Theo hình $r = |\overline{OM}| = a\sin\varphi$) nếu đưa phương trình đã cho về dạng chính tắc :

$$x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$$

ta cũng có kết quả ấy.



Hình 35.

6) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Theo các công thức liên hệ (1) ở (4.2) thì phương trình này có thể viết được:

$$r^4 = a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) \text{ hay } r^2 = a^2\cos 2\varphi \qquad (1)$$

là phương trình đường cong trong toạ độ độc cực, từ (1) ta có:

$$r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}\,.$$

Ta thấy với một giá trị của φ thì có hai giá trị của r (đối nhau) nên đường cong đối xứng qua gốc O, nên chỉ cần xét $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, r là hàm tuần hoàn chu kỳ π, nên xét $0 \le \varphi \le \pi$, rồi quay các góc π ta sẽ có toàn bộ đường cong. Mặt khác thay φ bởi $-\varphi$ thì r không đổi, nên đường cong đối xứng qua Ox. Vậy chỉ cần xét $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ rồi lấy đối xứng ta có đường cong trong một chu kỳ. Trong $[0, \frac{\pi}{2}]$, r chỉ xác định khi $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, nên lại chỉ cần xét trong đoạn này.

Ta có :

$$r'_{\varphi} = \frac{-a\sin 2\varphi}{a\sqrt{\cos^2\varphi}} < 0 \text{ trong } (0, \frac{\pi}{4})$$

$$\operatorname{tg}V = \frac{r}{r'_{\varphi}} = \frac{a\sqrt{\cos 2\varphi}.a\sqrt{\cos 2\varphi}}{-a\sin\varphi} = -\frac{-a\cos 2\varphi}{\sin\varphi}$$

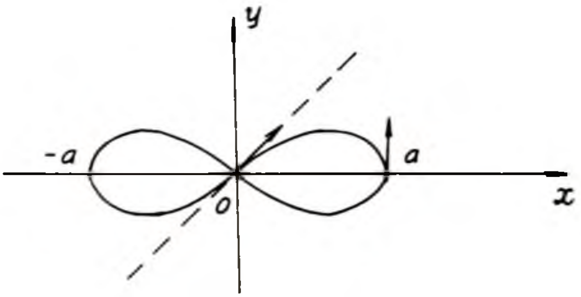
tại $\varphi = 0$, $\operatorname{tg}V = \infty$ nên $V = \frac{\pi}{2}$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}V = 0$ nên $V = 0$.

Bảng

φ	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$
r'_{φ}		$-$		$-$	
r	a	$\searrow$	$a\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\searrow$	0
V	$\frac{\pi}{2}$		$-\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$		0

Theo bảng và tính đối xứng, tuần hoàn, ta vẽ được đường cong (H.36) gọi là đường Lemniscate.



Hình 36.

7) $r = a\sin 3\varphi$, r xác định $\forall\varphi \in R$ và là hàm tuần hoàn chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$ xét $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$.

Thay φ bởi $-\varphi$ thì r thành $-r$ nên đường cong đối xứng qua Oy, nên chỉ cần xét $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, rồi lấy đối xứng và quay những góc $\frac{2\pi}{3}$ ta có toàn bộ đường cong.

Tính $r'_\varphi = 3a\cos 3\varphi = 0$ khi $\varphi = \frac{\pi}{6}$ trong $(0; \frac{\pi}{3})$.

$$\mathrm{tg}V = \frac{r}{r'_\varphi} = \frac{a\sin 3\varphi}{3a\cos 3\varphi} = \frac{1}{3}\mathrm{tg}3\varphi$$

tại $\varphi = 0$ và $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\mathrm{tg}V = 0$, $V = 0$.

tại $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\mathrm{tg}V = \infty$, $V = \frac{\pi}{2}$

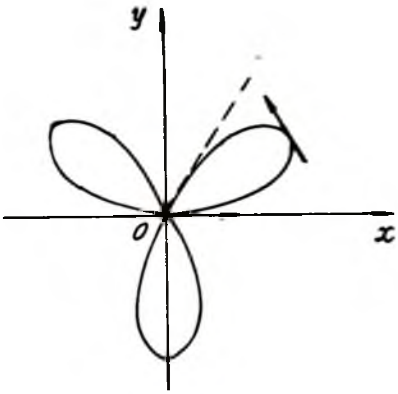
Lập bảng:

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r'_φ		$+$	0	$-$	
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
V	0		$\frac{\pi}{2}$		0

Theo bảng ta vẽ được đường cong trong $[0, \frac{\pi}{3}]$ sau đó lấy đối xứng qua Oy và quay các góc $\frac{2\pi}{3}$ (vì chu kỳ của r là $\frac{2\pi}{3}$) ta có được toàn bộ đường cong (H.37) gọi là đương "hoa hồng ba cánh".

8) $r = a|\sin 2\varphi|$, r xác định $\forall\varphi \in R$, $r \geq 0$ và là hàm tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{2}$, do đó ta xét $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, trong khoảng này $\sin 2\varphi \geq 0$ nên $r = a\sin 2\varphi$, $r'_\varphi = 2a\cos 2\varphi = 0$ tại $\varphi = \frac{\pi}{4}$ trong $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$$tgV = \frac{r}{r'_\varphi} = \frac{a\sin 2\varphi}{2a\cos 2\varphi} = \frac{1}{2}tg2\varphi$$



Hình 37.

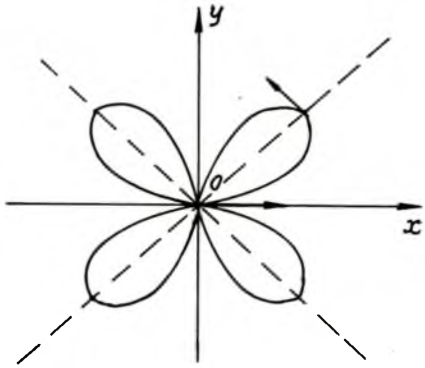
Khi $\varphi = 0$ và $\varphi = \frac{\pi}{2}$ thì $tgV = 0$ và $V = 0$.

Khi $\varphi = \frac{\pi}{4}$ thì $tgV = \infty$ và $V = \frac{\pi}{2}$.

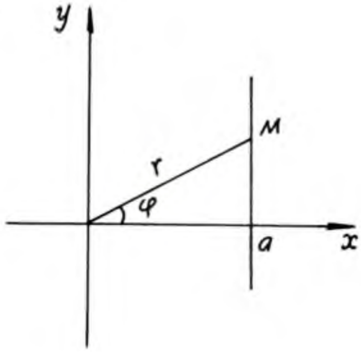
Ta có bảng:

φ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r'_φ		+	0	–	
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
V	0		$\frac{\pi}{2}$		0

Từ bảng ta vẽ được đường cong trong góc phần tư thứ nhất, quay các góc $\frac{\pi}{2}$ ta có toàn bộ đường cong (H.38) và đường cong gọi là đường "hoa hồng bốn cánh".



Hình 38.



Hình 39.

9) $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ (1)

Ta thấy mọi điểm M(r, φ) của đường thẳng x = a đều thoả mãn phương trình (1) (H.39). Vậy (1) là phương trình đường thẳng, thẳng góc với Ox và cách Ox một đoạn là a.

(Ta cũng thấy rõ điều này khi thay:

$r\cos\varphi = x$ (4.2), ta có x = a).

10) $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$

a) e = 1 thì $r = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$, r xác định $\forall\varphi \neq 2k\pi$ và là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, xét $0 < \varphi < 2\pi$, mặt khác thay φ bởi $-\varphi$ thì r không đổi, nên đường cong đối xứng qua Ox, nên chỉ cần xét $0 < \varphi \leq \pi$.

Khi $\varphi \to 0$ thì $r \to \infty$, nên đường cong có thể có tiệm cận, tương tự như 3) tìm:

$$a = \lim_{\varphi\to 0} r\sin\varphi = \lim_{\varphi\to 0}\frac{p}{1-\cos\varphi}\sin\varphi = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \infty$$

Vậy đường cong không có tiệm cận.

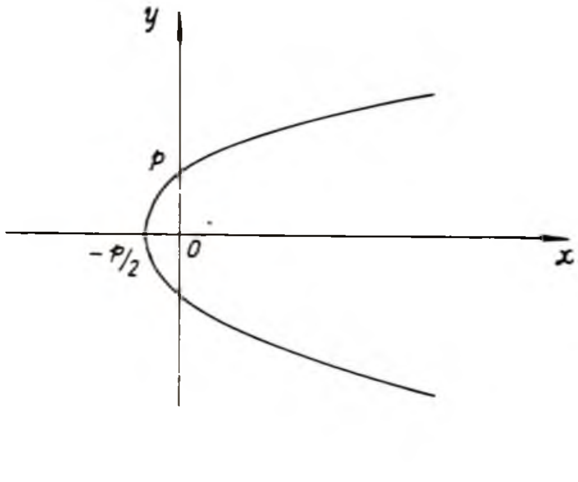
Tính $r'_{\varphi} = \dfrac{-p\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}$, $\quad r'_{\varphi} = 0$ khi $\varphi = \pi$.

$$\operatorname{tg}V = \frac{r}{r'_{\varphi}} = \frac{p}{(1-\cos\varphi)}\,\frac{(1-\cos\varphi)^2}{(-p\sin\varphi)} = -\frac{(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

Lập bảng:

φ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
r'_{φ}	$\Vert$	$-$		$-$	0
r	$\Vert$	$\searrow$	p	$\searrow$	$\frac{p}{2}$
V			$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$

Theo bảng và tính đối xứng, tuần hoàn của r ta vẽ được đường cong (H.40).



Hình 40.

b) $0 < e < 1$. Tương tự như a) ta xét $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Tính $r'_\varphi = \dfrac{-pe\sin\varphi}{(1-e\cos\varphi)^2} = 0$ khi $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

$$\mathrm{tg}V = \frac{r}{r'_\varphi} = \frac{p}{(1-e\cos\varphi)}\,\frac{(1-e\cos\varphi)^2}{(-pe\sin\varphi)} = -\frac{(1-e\cos\varphi)}{e\sin\varphi}$$

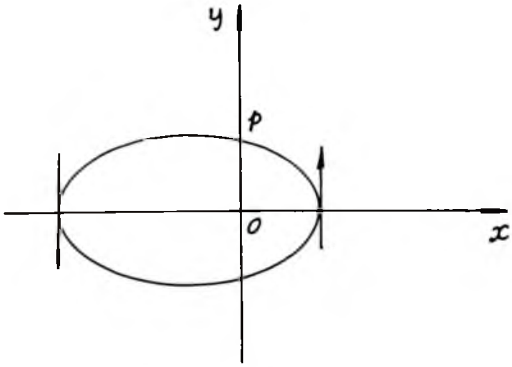
Tại $\varphi = 0$ và $\varphi = \pi$ thì $\mathrm{tg}V = \infty$ và $V = \dfrac{\pi}{2}$

tại $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ thì $\mathrm{tg}V = \dfrac{-1}{e}$ và $V = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{-1}{e}\right)$

Lập bảng:

φ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
r'_φ		$-$		$-$	0
r	$\frac{p}{1-e}$	$\searrow$	p	$\searrow$	$\frac{p}{1+e}$
V	$\frac{\pi}{2}$		$\mathrm{arctg}\left(\frac{-1}{e}\right)$		$\frac{\pi}{2}$

Theo bảng và tính đối xứng, tuần hoàn của r ta vẽ được đường cong (H.41).



Hình 41.

c) $r = \dfrac{p}{1-2\cos\varphi}$. r xác định $\forall\varphi \neq \pi/3$,

tương tự như b) xét $0 \le \varphi \le \pi$ với $\varphi \neq \dfrac{\pi}{3}$

Khi $\varphi \to \dfrac{\pi}{3}$ thì $r \to \infty$ theo (4), (5) ở (4.2) ta xét:

$$d = \lim_{\varphi\to\frac{\pi}{3}} \frac{p}{1-2\cos\varphi}\sin(\varphi-\frac{\pi}{3}) = p\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(\varphi-\frac{\pi}{3})}{2\sin\varphi} = \frac{p}{\sqrt{3}}$$

Vậy đường thẳng $r = \dfrac{p}{\sqrt{3}\sin(\varphi-\frac{\pi}{3})}$ là tiệm cận của đường cong, đường thẳng này cắt Ox tại $x = \dfrac{-2p}{3}$ ($\varphi = 0$) và song song với nửa đường thẳng $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Tính $r'_\varphi = \dfrac{-2p\sin\varphi}{(1-2\cos\varphi)^2} = 0$ tại $\varphi = 0$ và $\varphi = \pi$.

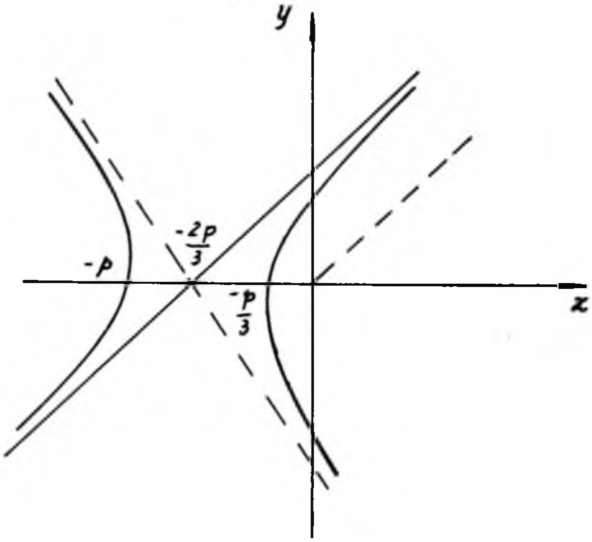
$r'_\varphi < 0$ khi $0 < \varphi < \pi$ trừ $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

$\mathrm{tg}V = \dfrac{r}{r'_\varphi} = -\dfrac{(1-2\cos\varphi)}{2\sin\varphi}$, $\varphi \neq \dfrac{\pi}{3}$

Tính toán, ta có bảng:

φ	0		$\pi/3$		$\pi/2$		π
r'_φ	0	$-$	‖	$-$		$-$	0
r	$-p$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	p	↘	$p/3$
V	$\pi/2$				arctg(1/2)		$\pi/2$

Theo bảng và do tính đối xứng, tuần hoàn của r ta vẽ được đường cong (H.42).



Hình 42.

Chú ý

Từ $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$ với p, e > 0, theo các công thức liên hệ ở (4.2):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

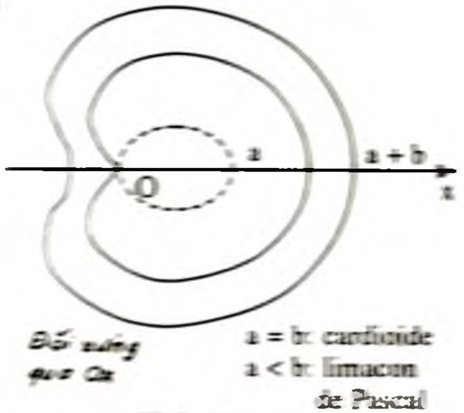
ta có: $$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{1 - e\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

hay $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2pex - p^2 = 0$

Rõ ràng khi e = 1 (< 1, > 1) thì phương trình này là một parabole (elipse, hyperbole).

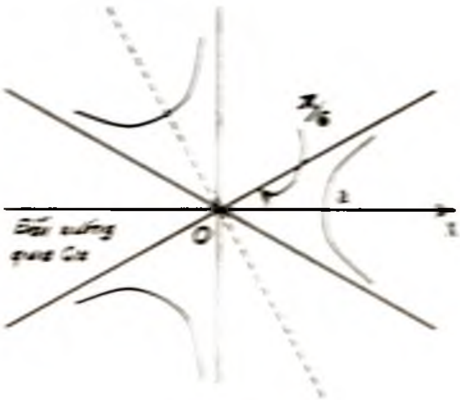
Do đó $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$ là phương trình trong toạ độ độc cực của parabole khi $e = 1$, của ellipse khi $e < 1$ và của hyperbole khi $e > 1$, gọi chung là phương trình trong toạ độ độc cực của các đường conique.

11)



Hình 42a.

12)



Hình 42b.

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3\ln|x-1| + C$$

9) $$\int e^{-(x^2+1)}xdx = -\frac{1}{2}\int e^{-(x^2+1)}d\left(-(x^2+1)\right) = -\frac{1}{2}e^{-(x^2+1)} + C$$

10) $$\int (\cos ax + \sin ax)^2 dx = \int (\cos^2 ax + \sin^2 ax + 2\sin ax\cos ax)dx$$

$$= \int (1 + \sin 2ax)dx = x - \frac{1}{2a}\cos 2ax + C$$

11) $$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)dx}{\cos^6 x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x} + \int \frac{tg^2 x}{\cos^4 x}dx$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)dx}{\cos^4 x} + \int tg^2 x(1 + tg^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int tg^2 x d(tgx) + \int (tg^2 x + tg^4 x)d(tgx)$$

$$= tgx + \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C$$

$$= tgx + \frac{2tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C$$

12) $$\int \frac{e^{arctgx} + x\ln(1+x^2) + 1}{(1+x^2)}dx =$$

$$= \int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx + \int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \int e^{arctgx}d(arctgx) + \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d\ln(1+x^2) + \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= e^{arctgx} + \frac{1}{4}\ln^2(1+x^2) + arctgx + C$$

79. Dùng phương pháp tích phân từng phần, tính:

1) $\int (x^2 + 5x + 6)\cos 2x dx$

2) $\int x^3 e^{\frac{-x}{3}} dx$

3) $\int \ln^2 x dx$

4) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x} dx$

5) $I_1 = \int \sin(\ln x) dx$, $I_2 = \int \cos(\ln x) dx$

6) $\int (\arcsin x)^2 dx$

7) $\int \frac{x\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$

8) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

*9) $\int \frac{xe^{arctgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

10) $\int e^{2x} \cos^2 3x dx$

Bài giải

1) $I = \int (x^2 + 5x + 6)\cos 2x dx$

Đặt $u = x^2 + 5x + 6$, $dv = \cos 2x dx$ thì $du = (2x + 5)dx$ và

$$v = \frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$I = (x^2 + 5x + 6)\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int (2x + 5)\sin 2x dx}_{I_1}$$

Để tính I_1, đặt $u = 2x + 5$, $dV = \sin 2x dx$ thì

$$du = 2dx, \quad v = \frac{-\cos 2x}{2}$$

$$I_1 = -\frac{\cos 2x}{2}(2x + 5) + \int \frac{2\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{-\cos 2x}{2}(2x + 5) + \frac{\sin 2x}{2} + C$$

Vậy $I = \dfrac{2x^2 + 10x + 11}{4}\sin 2x + \dfrac{2x + 5}{4}\cos 2x + C$

2) $I = \int x^3 e^{\frac{-x}{3}} dx$,

đặt $u = x^3$, $e^{\frac{-x}{3}} dx = dv$ thì $du = 3x^2dx$, $v = -3e^{\frac{-x}{3}}$

$$I = -3e^{\frac{-x}{3}} x^3 + 9\int x^2 e^{\frac{-x}{3}} dx \qquad (a)$$

Xét $I_1 = \int x^2 e^{\frac{-x}{3}} dx$ đặt $u = x^2$, $e^{\frac{-x}{3}} dx = dv$ thì

$$du = 2xdx, \quad v = -3e^{\frac{-x}{3}}$$

$$I_1 = -3x^2 e^{\frac{-x}{3}} + 6\int xe^{\frac{x}{3}} dx \qquad (b)$$

Lại xét: $I_2 = \int xe^{\frac{-x}{3}} dx$ đặt $u = x$, $e^{\frac{-x}{3}} dx = dv$ thì

$$du = dx, \quad v = -3e^{\frac{-x}{3}}$$

$$I_2 = -3xe^{\frac{-x}{3}} + 3\int e^{\frac{-x}{3}}dx = -3xe^{\frac{-x}{3}} - e^{\frac{-x}{3}} \quad (c)$$

Theo (a), (b), (c) ta có:

$$I = -3e^{\frac{-x}{3}}(x^3 + 9x^2 + 54x + 162) + C$$

3) $I = \int \ln^2 x dx$, đặt $u = \ln^2 x$, $dv = dx$ thì $du = \frac{2\ln x}{2x}dx$, $v = x$.

$$I = x\ln^2 x - \int \frac{2\ln x}{x} x dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx$$

Xét $I_1 = \int \ln dx = x\ln x - \int dx$ (do $u = \ln x$, $dx = dv$),

$I_1 = x\ln x - x$.

Vậy $I = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

4) $I = \int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx = -\int xd(\frac{1}{\sin x}) = \frac{-x}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin x}$

$I = \frac{-x}{\sin x} + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$ (Theo 24^0 (1.4)).

5) $I_1 = \int \sin\ln x dx$, đặt $u = \sin\ln x$, $dv = dx$ khi đó có:

$du = \frac{\cos\ln x}{x}dx$, $v = x$.

$$I_1 = x\sin\ln x - \int \frac{x\cos\ln x}{x}dx = x\sin\ln x - \int \cos\ln x dx$$

Xét $I_2 = \int \cos\ln x dx$, $u = \cos\ln x$, $dv = dx$ thì

$$du = -\frac{\sin \ln x}{x}dx\ ,\ v = x$$

$$I_2 = x\cos \ln x + \int \sin \ln x dx$$

Vậy: $\quad I_1 = x\sin\ln x - I_2$

$\quad\quad\quad I_2 = x\cos\ln x + I_1$

Giải hệ này ta có:

$$I_1 = \frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$$

$$I_2 = \frac{x}{2}(\sin \ln x + \cos \ln x) + C$$

6) $I = \int (\arcsin x)^2 dx$

Đặt $u = (\arcsin x)^2,\quad dv = dx$

$$du = 2\arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v = x$$

$$I = x(\arcsin x)^2 - 2\int \arcsin x \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Xét $\quad I_1 = \int \arcsin x \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \arcsin x d(-\sqrt{1-x^2})$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx\,.$$

Vậy $I = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$

7) $I = \int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Đặt $u = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = dv$

thì: $du = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $v = \sqrt{1+x^2}$

$$I = \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \sqrt{1+x^2}.\frac{dx}{\sqrt{1+x^2)}}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + C$$

8) $I = \int \sqrt{a^2-x^2}dx$, đặt $u = \sqrt{a^2-x^2}$, $dv = dx$

$du = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, $v = x$

$$I = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx + \int a^2\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Do đó:

$$2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} + 2C$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

9) $I = \int \frac{xe^{arctgx}}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{arctgx}\frac{dx}{1+x^2}$

Đặt $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $dv = e^{arctgx}\frac{dx}{1+x^2}$

$$du = \frac{\sqrt{1+x^2}.1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{\left((1+x^2)^{3/2}\right)}dx$$

$$v = \int e^{arctgx}\frac{dx}{1+x^2} = \int e^{arctgx}d(arctgx) = e^{arctgx}$$

$$I = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.e^{arctgx} - \int \frac{e^{arctgx}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$$

Xét $I_1 = \int \frac{e^{arctgx}}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{dx}{1+x^2}$

Đặt $u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $dv = \int e^{arctgx}\frac{dx}{1+x^2}$

thì: $du = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$, $v = e^{arctgx}$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{arctgx} + \int \frac{xe^{arctgx}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$$

Do đó:

$$I = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{arctgx} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{arctgx} - I$$

và $$I = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x} + C$$

10) $$I = \int e^{2x}.\cos^2 3xdx = \int e^{2x}\frac{1+\cos 6x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int e^{2x}dx + \int e^{2x}\cos 6xdx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{2^2+6^2}(2\cos 6x + 6\sin 6x) + C$$

(Theo 22^0 ở bảng 1.4)

$$= \frac{1}{40}e^{2x}(10 + 2\cos 6x + 6\sin 6x) + C$$

80. Dùng phương pháp đổi biến số, tính các tích phân:

1) $\int x(2x+5)^{10}dx$

2) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

4) $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x}$

5) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

7) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}dx$

8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

9) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

10) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$ $(a > 0)$.

Bài giải

1) Đặt $2x + 5 = t \Rightarrow x = \frac{t-5}{2}$ và $dx = \frac{1}{2}dt$

$$I = \int x(2x+5)^{10}dx = \int \frac{t-5}{2}t^{10}\frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (t^{11} - 5t^{10})dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^{12}}{12} - \frac{5t^{11}}{11}\right) + C$$

Trở lại biến cũ:

$$I = \frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right] + C$$

2) Đặt: $\sqrt{x} = t$, $t \geq 0$ khi đó $x = t^2$ và $dx = 2tdt$.

$$I = \int \frac{1+t^2}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t^3+t}{t+1}dt = 2\int (t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1})dt$$

$$= 2(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1|) + C$$

Trở lại biến cũ:

$$I = 2\left[\frac{(\sqrt{x})^3}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})\right] + C$$

3) Đặt: $\sqrt{e^x - 1} = t > 0$ khi đó: $x = \ln(1+t^2)$ và $dx = \dfrac{2tdt}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\text{arctg}t + C$$

Trở lại biến cũ:

$$I = 2\text{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C$$

4) $I = \displaystyle\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x} = \int \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln 4 + \ln x} d\ln x$.

Đặt $\ln x = t$ thì:

$$I = \int \frac{\ln 2 + t}{\ln 4 + t}dt = \int \frac{t + \ln 4 + \ln 2 - \ln 4}{t + \ln 4}dt$$

$$= \int dt - \ln 2\int \frac{dt}{t + \ln 4} = t + \ln 2.\ln(t + \ln 4) + C$$

Trở lại biến cũ:

$$I = \ln x - \ln 2.\ln|\ln x + \ln 4| + C$$

5) $I = \displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$

Đặt $\cos x = t$ thì $\sin x dx = - dt$

và $I = -\displaystyle\int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}dt = \int (t^{3/2} - t^{1/2})dt$

$$= \frac{2}{5}t^{5/2} - 2t^{1/2} + C$$

Trở lại biến cũ:

$$I = \frac{2}{5}(\cos^2 x - 5)\sqrt{\cos x} + C$$

6) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Đặt $x = \frac{1}{t}$ thì $dx = \frac{-dt}{t^2}$

$$I = -\text{sign}t\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\text{sign}t \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C$$

Trở lại biến cũ:

$$I = \text{sign}\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right) + C.$$

7) $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}dx$,

Đặt $\sqrt{2-x^2} = t > 0$ thì:

$2 - x^2 = t^2$, $x^2 = 2 - t^2$, $2x\ dx = -\ 2t\ dt$

và $I = \int \frac{(2-t^2)(-t)dt}{t} = \int (t^2 - 2)dt = \frac{t^3}{3} - 2t + C$

Trở lại biến cũ:

$$I = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3 - 2\sqrt{2-x^2} + C$$

8) $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Đặt $x = \frac{1}{t}$, (t, x ≠ 0) thì $dx = -\frac{dt}{t^2}$ và

$$I = \int \frac{\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{4 - \frac{1}{t^2}}} = -\text{signt}\int \frac{tdt}{\sqrt{4t^2 - 1}}$$

$$= -\text{signt}.\frac{1}{8}\int \frac{d(4t^2 - 1)}{\sqrt{4t^2 - 1}} = -\text{signt}.\frac{1}{4}\sqrt{4t^2 - 1} + C$$

Trở lại biến cũ:

$$I = -\text{sign}\frac{1}{x}\text{signx}.\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C = -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$$

9) Đặt: $\sqrt{x} = t > 0$ thì $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

$$I = \int \frac{2tdt}{t(1 + t^2)} = 2\int \frac{dt}{1 + t^2} = 2\text{arctgt} + C$$

Trở lại biến cũ:

$$I = 2\text{arctg}\sqrt{x} + C$$

10) $I = \int \sqrt{a^2 + x^2}dx$,

Đặt $x = asht$ thì $dx = achtdt$

$$I = \int \sqrt{a^2 + a^2 sh^2 t}.achtdt = a^2\int ch^2 tdt$$

$$= a^2\int \frac{1 + ch2t}{2}dt = a^2\frac{t}{2} + \frac{a^2}{4}sh2t + C \qquad (1)$$

Trở lại biến cũ:

$$x = asht = a\frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ hay } e^{2t} - \frac{2x}{a}e^t - 1 = 0$$

Do đó $\qquad e^t = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}$

và $\ t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a$

mặt khác:

$$\mathrm{sh}2t = 2\,\mathrm{sh}t.\mathrm{ch}t = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{x^2 + a^2}$$

Thay lại (1) ta có:

$$I = \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{a^2}{4}\frac{2x}{a^2}\sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \overline{C}$$

với : $\overline{C} = C - \frac{a^2}{2}\ln a$

81. Tính các tích phân:

1) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

2) $\int x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

3) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$

4) $\int \frac{\sin^2 x}{e^x}dx$

5) $\int \cos^2(\ln x)dx$

6) $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$

Bài giải

1) $\int e^{\sqrt{x}}dx$, đặt $\sqrt{x} = t \geq 0$ thì $x = t^2$, $dx = 2tdt$

$I = 2\int e^t.tdt$, tích phân từng phần (đặt $u = t$, $dv = e^t dt$) và trở lại biến cũ x, ta có:

$$I = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$$

2) $I = \int x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx = \int x\ln(1-x)dx - \int x\ln(1+x)dx = I_1 - I_2$

Tích phân từng phần với I_1, đặt: $\ln(1-x) = u$, $xdx = dv$, thì:

$$du = \frac{-dx}{1-x}, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I_1 = \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \int\frac{x^2}{2(1-x)}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\int\frac{x^2-1+1}{2(1-x)}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\int\left[-(1+x) + \frac{1}{1-x}\right]dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\left[-x - \frac{x^2}{2} - \ln(1-x)\right] + C_1$$

Với I_2, đặt $u = \ln(1+x)$, $xdx = dv$

thì $$du = \frac{dx}{1+x}, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

và tương tự, ta có:

$$I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\left[-x - \frac{x^2}{2} + \ln(1+x)\right] + C_2$$

Vậy $$I = \frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - x + C \qquad (C = C_1 - C_2).$$

3) $I = \int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$, đặt $u = \arcsin x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$

thì $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = -\frac{1}{x}$

$$I = \frac{-\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Xét $$I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}, \text{ đặt } x = \frac{1}{t} \qquad (x, t \neq 0)$$

thì $dx = \frac{-dt}{t^2}$, $$I = \int \frac{\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = -\text{signt}.\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$I_1 = -\text{signt}.\ln(t + \sqrt{t^2-1}) + C \text{ (theo 18}^0\text{ (1.4))}$$

Trở lại biến cũ:

$$I_1 = -\text{sign}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) = \text{sign}\frac{1}{x}\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C$$

Vậy:

$$I = -\frac{1}{x}\arcsin x + \text{sign}\frac{1}{x}\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C$$

4) $$I = \int \frac{\sin^2 x}{e^x}dx = \int e^{-x}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\frac{(-\cos 2x + 2\sin 2x)}{5} + C$$ (Theo 22°, (1.4))

$$= \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x - 2\sin 2x}{5} - 1\right) + C$$

5) $I = \int \cos^2(\ln x)dx$, đặt $t = \ln x$ thì $x = e^t$, $dx = e^t dt$,

$$I = \int \cos^2 t e^t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int e^t dt + \frac{1}{2}\int e^t \cos 2t dt$$

$$= \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^t \frac{(\cos 2t + 2\sin 2t)}{5} + C$$

Trở lại biến x:

$$I = \frac{x}{2} + \frac{x\cos(2\ln x) + 2x\sin(2\ln x)}{10} + C$$

6) $I = \int x\sin\sqrt{x}dx$, đặt $\sqrt{x} = t$ thì $x = t^2$, $dx = 2tdt$

$I = 2\int t^3 \sin t dt$, tích phân từng phần ba lần liên tiếp và trở lại biến x, ta có:

$$I = 2\sqrt{x}(6 - x)\cos\sqrt{x} + 6(x - 2)\sin\sqrt{x} + C$$

82. Chứng minh công thức: ($n, m \in Z$)

1) $\int \sin^n x dx = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$

2) $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$

3) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

4) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

5) $\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x dx$

$(m < n)$

6) $\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x dx$

$(m > n)$

*7) $\int e^{ax} \cos^n x dx = \frac{e^{ax}.\cos^{n-1} x(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} +$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2-n^2}\int e^{ax} \cos^{n-2} x dx$

8) $\int x^m \ln^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x dx$

Bài giải

Phương pháp chứng minh các công thức này đều dùng phương pháp tính tích phân từng phần.

1) $I = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx$

Đặt $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x dx$

thì $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx$, $v = -\cos x$

Do đó:

$$I = -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x - (n-1)\int \sin^n x dx$$

hay $$I = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

2) Chứng minh như 1).

3) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^{n+1} x}$,

đặt $u = \frac{1}{\sin^{n+1} x}$, $dv = \sin x dx$

thì: $$I_n = \frac{-\cos x}{\sin^{n+1} x} - (n+1)\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^{n+2} x}$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin x} - (n+1)\int \frac{dx}{\sin^{n+2} x} + (n+1)\int \frac{dx}{\sin^n x}$$

$$I_n = \frac{-\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n+1)I_{n+2} + (n+1)I_n \text{ , do đó}$$

$$(n+1)I_{n+2} = (n+1)I_n - \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$$

hay:

$$I_{n+2} = -\frac{\cos x}{(n+1)\sin^{n-1} x} + \frac{n}{n+1} I_n$$

Thay n bởi n - 2 ta có công thức phải chứng minh.

4) Chứng minh tương tự như 3)

5) $I = \int \cos^m x \sin^n x dx = \int \cos^{m-1} x \sin^n x d\sin x$

$$= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{m-2} x \sin^{n+2} x dx$$

$$= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\left[\int \cos^{m-2} x \sin^{n} x dx - I\right]$$

Do đó:

$$\left(1 + \frac{m-1}{n+1}\right) I = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{m-2} x \sin^{n} x dx$$

hay:

$$I = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{n+m}\int \cos^{m-2} x \sin^{n} x dx$$

với $m < n$, áp dụng công thức này một số lần thì bậc của cos sẽ giảm đến 0 (1) nếu m chẵn (lẻ).

6) Chứng minh tương tự như 5).

7) $I_n = \int e^{ax} \cos^n x dx$, đặt $u = \cos^n x$, $dv = e^{ax}dx$

thì $du = - n \cos^{n-1}x \sin x dx$, $v = \dfrac{e^{ax}}{a}$

$$I_n = \frac{e^{ax} \cos^n x}{a} + \frac{n}{a}\int e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x dx \quad (1)$$

Xét $J = \int e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x dx$

đặt $u = \cos^{n-1}x \sin x$, $dv = e^{ax}dx$ thì:

$$du = \left[-(n-1)\cos^{n-2} x \sin^2 x + \cos^n x\right]dx \text{ , } v = \frac{e^{ax}}{a}$$

Khi đó:

$$J = \frac{e^{ax}}{a}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{a}\int e^{ax} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx - \frac{1}{a}\int e^{ax} \cos^n x dx$$

$$J = \frac{e^{ax}}{a}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{a}(I_{n-2} - I_n) - \frac{1}{a} I_n \quad (2)$$

Thay (2) vào (1):

$$I_n = \frac{e^{ax}\cos^n x}{a} + \frac{n}{a^2}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2} - \frac{n^2}{a^2}I_n$$

hay $$\frac{a^2+n^2}{a^2}I_n = \frac{e^{ax}}{a^2}\cos^{n-1} x(a\cos x + n\sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}$$

và cuối cùng:

$$I_n = \frac{e^{ax}\cos^{n-1} x(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} x dx$$

8) Đặt $u = \ln^n x$, $dv = x^m dx$

thì $du = n\ln^{n-1} x.\frac{1}{x}$, $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ $(m \neq -1)$

và $$\int x^m \ln^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x dx$$

2. TÍCH PHÂN CÁC HÀM HỮU TỈ

2.1. Phương pháp chung

Hàm hữu tỉ có dạng:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n, m của x

$n < m$ ($n \geq m$): f(x) là các hàm hữu tỉ thực sự (không thực sự)

Nếu $n < m$, $Q_m(x) = A(x-a)^\alpha \ldots (x^2 + px + q)^\beta$, $(p^2 - 4q < 0)$ thì:

$$f(x) = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{x-a} + \ldots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^{\beta}} +$$

$$+ \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta}x+C_{\beta}}{x^2+px+q} \quad (1)$$

qui đồng mẫu số ở hai vế rồi bỏ mẫu số, ta được hai đa thức đồng nhất nhau, cho bằng nhau các hệ số của cùng luỹ thừa của x ở 2 vế, ta được một hệ phương trình để xác định:

A_i , $i = 1, 2, \ldots, \alpha$

B_i , C_i , $i = 1, 2, \ldots \beta$

Khi đó:

$I = \int f(x)dx$ là tổng tích phân các phân số đơn giản ở vế phải của (1).

2.2. Phương pháp Ostrogradski

Nếu $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ và nếu Q(x) có nghiệm bội:

thì $I = \int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx \quad (1)$

Trong đó $Q_1(x)$ là ước số chung lớn nhất của Q(x) và Q'(x), còn $Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x)$.

X(x), Y(x) là các đa thức hệ số chưa xác định, bậc của chúng kém bậc của $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ tương ứng một đơn vị. Các hệ số của X(x), Y(x) được xác định bằng các đạo hàm 2 vế của (1), ta sẽ được hai đa thức đồng nhất nhau, cho bằng nhau các hệ số của cùng luỹ thừa của x ở 2 vế, ta sẽ được một hệ phương trình để xác định các hệ số đó.

BÀI TẬP

83. Tính tích phân I của các hàm số hữu tỉ:

1) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

2) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

3) $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$

4) $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$

5) $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$

6) $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx$

7) $\int \frac{dx}{x^3+1}$

8) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

9) $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$

*10) $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$

Bài giải

1) Thực hiện phép chia đa thức:

$$\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} = 5+\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}$$

Phân tích các phân số hữu tỉ ta có:

$$\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}=\frac{25x^2-20x+2}{x(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-4}$$

Từ đó ta có: $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{7}{3}$, $C=\frac{161}{6}$

Vậy: $$I=\int(5+\frac{1}{2x}-\frac{7}{3(x-1)}+\frac{161}{6}.\frac{1}{x-4})dx$$

hay:

$$I=5x+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+C$$

$$=5x+\ln\left|\frac{x^{1/2}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}\right|+C$$

2) Tương tự như 1):

$$\frac{x^3-1}{4x^3-x}=\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}x-1}{x(2x+1)(2x-1)}$$

$$\frac{\frac{1}{4}x-1}{x(2x+1)(2x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{2x-1}$$

$A=1$, $B=\frac{-9}{16}$, $C=\frac{-7}{16}$

$$I=\frac{x}{4}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|+C$$

3) $$\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}=x+\frac{8x+6}{(x-2)^3}$$

$$\frac{8x+6}{(x-2)^3}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$$

Từ đó: A = 22, B = 8, C = 0

$$I=\int\left[x+\frac{22}{(x-2)^3}+\frac{8}{(x-2)^2}\right]dx=\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+C$$

Chú ý: Có thể phân tích như sau:

$$\frac{8x+6}{(x-2)^3}=\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{8(x-2)}{(x-2)^3}+\frac{16}{(x-2)^2}=\frac{22}{(x-2)^3}+\frac{8}{(x-2)^2}$$

4) $I=\int\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$, bài này không cần phân tích phân số hữu tỉ mà làm như sau:

$$I=\int\frac{d(x^2-3x+2)}{(x^2-3x+2)^3}=\frac{-1}{2(x^2-3x+2)^2}+C$$

5) $I=\int\frac{x^4}{x^4-1}dx=\int\frac{x^4-1+1}{x^4-1}dx=\int(1+\frac{1}{x^4-1})dx$

Xét $\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$ (1)

Ta có thể tìm A, B, C, D bằng phương pháp sau:

- Nhân 2 vế của (1) với x-1, rồi cho x = 1, ta có:

$$\frac{1}{(1+1)(1+1)}=A+0 \text{ hay } A=\frac{1}{4}$$

- Nhân hai vế của (1) với x + 1, rồi cho x = -1, ta có:

$$\frac{1}{(-1-1)(1+1)}=B+0 \text{ hay } B=-\frac{1}{4}$$

- Nhân 2 vế của (1) với x rồi cho $x\to\infty$ ta được:

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + C \text{ hay } C = 0$$

- Cho x = 0 ở hai vế của (1) ta có:

$$\frac{1}{-1} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{D}{1} \text{ hay } D = -\frac{1}{2}$$

Do đó:

$$I = \int\left[1 + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}\right]dx$$

$$= x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\text{arctg}x + C$$

6) $I = \int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx = \int(1 + \frac{1}{x^3+x})dx$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Xác định A, B, C như 5) ta được A = 1, B = −1, C = 0

Do đó:

$$I = \int(1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1})dx = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$$

7) $\int \frac{dx}{x^3+1}$

Ta có: $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

Làm tương tự như 5) ta có: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$

Do đó:

$$I = \int \frac{1}{3(x+1)}dx + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + I_1$$

$$I_1 = -\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = -\frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Vậy $I = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

hay $I = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

8) $I = \int \frac{dx}{x^4+1}$ ta có:

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

Dùng phương pháp hệ số bất định ta được:

$$A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = D = \frac{1}{2}$$

Do đó:

$$I = \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx + \int \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx + \frac{1}{4}\int\frac{d(x+\frac{\sqrt{2}}{2})}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+2\sqrt{x}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}(x\sqrt{2}+1)$$

Tương tự:

$$I_2 = \frac{-1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}(x\sqrt{2}-1)$$

và cuối cùng

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\text{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\text{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{2x\sqrt{2}}{1-(2x^2-1)},\right.$$

$$\left.\text{arctg}a + \text{arctg}b = \text{arctg}\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

Cách khác:

Biến đổi: $I = \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-(x^2-1)}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + C \quad \left(\text{arctg}x + \text{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\right)$$

9) $I = \int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$

ta có: $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

hay:

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) + $$
$$+ (Dx+E)(x-2)$$

Từ đó: $\begin{cases} A + B = 0 \\ -2B + C = 0 \\ 2A + B - 2C + D = 2 \\ -2B + B - 2D + E = 2 \\ A - 2C - 2E = 13 \end{cases}$

hay A = 1, B = −1, C = −2, D = −3, E = −4

Vậy:

$$I = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx$$

$$I = \ln|x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} - 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\mathrm{arctg}x + \frac{3}{2}.\frac{1}{x^2+1} -$$

$$- 4\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x\right) + C \text{ (theo } 28^0 \text{ (1.1))}$$

hay:

$$I = \frac{1}{2}.\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\mathrm{arctg}x + C$$

10) $I = \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$

Khai triển Taylor hàm $f(x) = x^3$ tại lân cận điểm $x_0 = 1$, ta có:

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3,$$

và:

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^{100}} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^{99}} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^{98}} + \int \frac{dx}{(x-1)^{97}}$$

$$= -\frac{1}{99(x-1)^{99}} - \frac{1}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{97(x-1)^{97}} - \frac{1}{96(x-1)^{96}} + C$$

***84. Dùng phương pháp Ostrogradski, tính các tích phân:**

1) $\displaystyle\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$

2) $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

Bài giải

1) Ở đây $Q_1(x) = Q_2(x) = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1$

Do đó:

$$I = \int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2}dx = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + x^2 + x + 1} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 + x^2 + x + 1}dx$$

Đạo hàm 2 vế theo x và đồng nhất các hệ số của cùng luỹ thừa ở 2 vế ta có:

hệ số của x^5: $D = 0$

hệ số của x^4: $-A + E = 4$

hệ số của x^3: $-2B + E + F = 4$

hệ số của x^2: $A - B - 3C + E + F = 16$

hệ số của x: $2A - 2C + E + F = 12$

hệ số của x^0: $B - C + F = 8$

Từ hệ này, ta có: $A = -1$, $B = 1$, $C = -4$, $D = 0$, $E = 3$, $F = 3$

Vậy $I = -\dfrac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3\int \dfrac{dx}{x^2 + 1} = -\dfrac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3\operatorname{arctg} x + C$

2) Ở đây $Q_1 = (x^2 - 2x + 2)^2$, $Q_2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$

Do đó

$$I = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \int\left(\frac{E}{x - 1} + \frac{Fx + G}{x^2 - 2x + 2}\right)dx$$

Làm như 1) ta có: $A = 2$, $B = -6$, $C = 8$, $D = -9$, $E = 2$, $F = -2$, $G = 4$.

và $$I = \frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 9}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \ln\frac{(x - 1)^2}{x^2 - 2x + 2} + 2\operatorname{arctg}(x - 1) + C$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}$

ở đây $Q_1 = Q_2 = x^4 + 1$

Do đó:

$$I = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^4 + 1} + \int \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4 + 1}dx$$

và $1 = (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^4 + 1) - 4x^3(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) +$
$+ (x^4 + 1)(Ex^3 + Fx^2 + 6x + H)$

$\Rightarrow E = 0$ $\qquad -4D + E = 0$

$-A + F = 0$ $\qquad 3A + F = 0$

$-2B + G = 0$ $\qquad 2B + G = 0$

$-3C + H = 0$ $\qquad C + H = 1$

$$\Rightarrow A = B = D = E = F = G = 0,\ C = \frac{1}{4},\ H = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^4+1}$$

Theo 8) bài 6 thì:

$$I = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right) + \frac{3}{8\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right) + C$$

4) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$, ở đây: $Q_1 = Q_2 = x^2 + x+1$

Do đó:

$$I = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx$$

Làm như 3) ta có: $A = D = \dfrac{2}{3}$, $B = \dfrac{1}{3}$

và $$I = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Chú ý, có thể viết:

$$I = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2}$$

và dùng công thức truy hồi (1.1, 28°).

***85. Tính các tích phân:**

1) $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{(x^3+1)(x^3+8)}$

2) $\int \frac{x^7 + x^3}{x^{12} - 2x^4 + 1}dx$

3) $\int \frac{dx}{x(x^5 + 1)^2}$

4) $\int \frac{dx}{x(x^7 + 1)}$

5) $\int \frac{xdx}{x^8 - 1}$

6) $\int \frac{x^4dx}{(x^{10} - 10)^2}$

7) $\int \frac{(x^4 - 1)dx}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)}$

8) $\int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1}dx$

9) $\int \frac{P_n(x)dx}{(x - a)^{n+1}}$; $P_n(x)$: đa thức bậc n của x

10) $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1}dx$, $n \in N$.

Bài giải

1) $I = \int \frac{x^5dx}{(x^3 + 1)(x^3 + 8)} = \frac{1}{3}\int \frac{x^3dx^3}{(x^3 + 1)(x^3 + 8)}$

Đặt $x^3 = t$ thì:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{tdt}{(t + 1)(t + 8)} = -\frac{1}{21}\int \frac{dt}{t + 1} + \frac{8}{21}\int \frac{dt}{t + 8}$$

Tích phân và trở lại biến cũ ta có:

$$I = \frac{1}{21}(8\ln|x^3+8| - \ln|x^3+1|) + C$$

2) $$I = \int \frac{x^7dx}{x^{12}-2x^4+1} + \int \frac{x^3dx}{x^{12}-2x^4+1}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{x^4d(x^4)}{(x^4)^3-2x^4+1} + \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^3-2x^4+1}$$

đặt $x^4 = t$ thì:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{tdt}{t^3-2t+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^3-2t+1}$$

Lấy tích phân và trở lại biểu cũ ta được :

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^4+1| - \frac{1}{4}\ln|x^8+x^4-1| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}\right| + C$$

3) $$I = \int \frac{dx}{x(x^5+1)^2} = \int \frac{x^4dx}{x^5(x^5+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5)}{x^5(x^5+1)^2}$$

Đặt $x^5 = t$ thì:

$$I = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t(1+t)^2}$$

Phân tích:

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{1+t} \Rightarrow A = 1,\ B = -1,\ C = -1.$$

Do đó: $I = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{5}\left(\ln|t| + \frac{1}{t+1} - \ln(t+1)\right) + C$

Trả lại biến cũ:

$$I = \ln\left|\frac{x}{\sqrt[5]{x^5+1}}\right| + \frac{1}{5}.\frac{1}{x^5+1} + C$$

4) $I = \int \frac{dx}{x(x^7+1)} = \int \frac{x^7+1-x^7}{x(x^7+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x^6}{x^7+1}\right)dx$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{7}\int \frac{d(x^7+1)}{x^7+1} = \ln|x| - \frac{1}{7}\ln|x^7+1| + C$$

5) $I = \int \frac{xdx}{x^8-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^4-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^4-1}$, $t = x^2$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\text{arctgt}\right) + C$$

(Theo 5) bài 6)

Trở lại biến cũ, ta có:

$$I = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{4}\text{arctg}x^2 + C \quad (x \neq \pm 1)$$

6) $I = \int \frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}$

Đặt $x^5 = t$ thì $5x^4dx = dt$

và $\quad I = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{(t^2-10)^2}$

mặt khác: $I = \left\{\frac{1}{2\sqrt{10}}\left[(t+\sqrt{10}) - (t-\sqrt{10})\right]\right\}^2$

nên $\quad I = \frac{1}{200}\int\left(\frac{1}{(t-\sqrt{10})^2} - \frac{2}{t^2-10} + \frac{1}{(t+\sqrt{10})^2}\right)dt$

$$= \frac{1}{200}\left[\frac{-1}{t-\sqrt{10}} - \frac{1}{t+\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}}\right|\right] + C$$

Trở lại biến x:

$$I = -\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10} + \frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right) + C$$

$$x \neq \pm \sqrt[10]{10}$$

7) $$I = \int \frac{(x^4-1)dx}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} = \int \frac{(x^4-1)\left[(x^5-5x+1)-(x^5-5x)\right]}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}dx$$

$$= \int \frac{x^4-1}{x^5-5x}dx - \int \frac{x^4-1}{x^5-5x+1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4-5}{x^5-5x}dx - \frac{1}{5}\int \frac{5x^4-5}{x^5-5x+1}dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|x^5-5x\right| - \frac{1}{5}\ln\left|x^5-5x+1\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5-5x}{x^5-5x+1}\right| + C$$

8) $$I = \int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^4-1}{x^8+1}dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^4}}{x^4+\frac{1}{x^4}}dx^2 = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2}$$

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\frac{1}{x^2}-\sqrt{2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^2+\sqrt{2}x^2+1}\right| + C$$

9) $$I = \int \frac{P_n(x)dx}{(x-a)^{n+1}}$$

Khai triển Taylor $P_n(x)$ tại lân cận điểm $x = a$, ta có:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Do đó:

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} \int \frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} \ln|x-a| + C; \quad x \neq a$$

10) $I = \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \frac{1}{n}\int \frac{x^n dx^n}{x^n+1} = \frac{1}{n}\int \left(1 - \frac{1}{x^n+1}\right)dx^n =$

$$= \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1|) + C$$

$-\infty < x < +\infty$ khi n chẵn, $x \neq -1$ khi n lẻ.

§3. TÍCH PHÂN CÁC HÀM VÔ TỈ VÀ LƯỢNG GIÁC

3.1. Dạng

$$I = \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$$

R là hàm hữu tỉ của các đối số

Đặt $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$. k là BSCNN của n, ... s.

thì I đưa được về tích phân của một hàm hữu tỉ của t.

3.2. Dạng

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx \text{ (vi phân nhị thức)}$$

$a, b \neq 0$, $m, n, p \in Q$ (hữu tỉ)

1^0. Nếu $p \in Z$ (nguyên), đặt $x = t^s$, s là mẫu số chung của m, n.

2^0. Nếu $\frac{m+1}{n} \in Z$, đặt $a + bx^n = t^s$, s là mẫu số của p.

3^0. Nếu $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, đặt $ax^{-n} + b = t^s$, s là mẫu số của p.

thì I sẽ đưa được về tích phân các hàm hữu tỉ

- Nếu không rơi vào một trong ba trường hợp trên thì I không tính được qua các hàm sơ cấp.

3.3. Dạng

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$$

- Phép thế Euler:

1^0. Nếu $a > 0$, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x$

2^0. Nếu $c > 0$, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$

3^0. Nếu $ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu)$,

đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$ (hoặc $= t(x - \mu)$)

thì I sẽ đưa được về tích phân các hàm hữu tỉ

4^0. Đặc biệt $I = \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $P_n(x)$: đa thức bậc n của x

thì $I = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ (1)

Trong đó $Q_{n-1}(x)$ là một đa thức bậc $n - 1$, $\lambda = const$, các hệ số của $Q_{n-1}(x)$ và λ được xác định bằng cách đạo hàm 2 vế của (1) theo x, rồi đồng nhất 2 đa thức ở 2 vế.

3.4. Dạng

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx \qquad (1)$$

R: là hàm hữu tỉ các đối số.

Trường hợp chung:

Đặt $tg\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ thì (1) được đưa về tích phân của một hàm hữu tỉ.

Trường hợp đặc biệt:

1^0. R là hàm lẻ của sinx, đặt t = cosx

2^0. R là hàm lẻ của cosx, đặt t = sinx

3^0. R là hàm chẵn của sinx, cosx, đặt t = tgx

thì (1) đưa được về tích phân của hàm hữu tỉ.

3.5. Dạng

$$I = \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx$$

Tích phân này chỉ đưa được về tích phân hàm hữu tỉ nếu có một trong ba trường hợp sau:

1^0. $\mu \in Z$, lẻ

2^0. $\nu \in Z$, lẻ

3^0. $\mu + \nu \in Z$, chẵn

Chú ý: Các tích phân không biểu thị được qua các hàm sơ cấp:

$$\int e^{-x^2}dx \ , \ six = \int \frac{\sin x}{x}dx, \ cix = \int \frac{\cos x}{x}dx,$$

$$lix = \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx, \ \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \ k \neq \pm 1$$

Các tích phân của vi phân nhị thức không rơi vào 3 trường hợp đã xét ở 3.2.

BÀI TẬP

86. Tính tích phân các hàm vô tỉ:

1) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ 2) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

3) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$ 4) $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}$

Bài giải

1) Đặt $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$

$$I = \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{(t^3-1)6t^5dt}{t^2+1}$$

$$I = 6\int (t^6 - t^4 - t^3 + t^2 - t - 1 + \frac{-t+1}{t^2+1})dx$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \operatorname{arctg} t\right) + C$$

Trở lại biến cũ x, ta có:

$$I = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} -$$

$$- 3\ln(1+\sqrt[3]{x}) + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$$

2) $I = \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$,

Đặt $\frac{x-1}{x+1} = t^2$ $(t \geq 0)$

thì $x = \dfrac{-(t^2+1)}{t^2-1}$, $dx = \dfrac{-4tdt}{(t^2-1)^2}$

$$I = \int t.\frac{t^2+1}{1-t^2}.\frac{4tdt}{(1-t^2)^2} = 4\int\frac{t^4+t^2}{(1-t^2)^3}dt$$

Đây là tích phân của hàm hữu tỷ của t, lấy tích phân theo t và trở lại biến cũ ta có:

$$I = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$$

3) $I = \int\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}dx$, đặt $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} = t$

thì $\dfrac{x+1}{x-1} = t^3$, $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$

$$dx = -\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2},$$

$$I = -6\int\frac{t.t^2dt}{(t^3-1)^2}$$

$$= -2\int\frac{td(t^3-1)}{(t^2-1)^2} = 2\int td\left(\frac{1}{t^3-1}\right) = 2\left[\frac{t}{t^3-1}-\int\frac{dt}{t^3-1}\right]$$

$$= 2\left[\frac{t}{t^3-1}-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{6}\int\frac{2t+1+3}{t^2+t+1}dt\right]$$

$$= \frac{2t}{t^3-1}+\frac{1}{3}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

với $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$

4) $I = \int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$,

Đặt $\frac{2-x}{2+x} = t$ thì: $x = 2\frac{1-t}{1+t}$, $dx = -\frac{4dt}{(1+t)^2}$, $2-x = \frac{4t}{1+t}$

$$I = \int t^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\left(\frac{4t}{1+t}\right)^2} \cdot \frac{(-4dt)}{(1+t)^2} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{5}{3}} dt = \frac{3}{8} t^{-\frac{2}{3}} + C$$

Trả lại biến x: $I = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$

*87. Tính tích phân các vi phân nhị thức:

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$ 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

3) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ 4) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^5}}$ 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

Bài giải

1) $I = \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2} dx$, ở đây: $p = -2 \in Z$,

Đặt $x = t^6$ (6 là mẫu số chung của $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$) thì $dx = 6t^5dt$ và:

$$I = \int \frac{6t^8 dt}{(1+t^2)^2} = 6\int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right) dt$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{1+t^2} - 21\mathrm{arctg}t + C \text{ với: } t = x^{\frac{1}{6}}$$

2) $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx$

Ở đây: $\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2/3} = 3 \in Z$,

do đó đặt: $1 + x^{2/3} = t^2$ thì $x = (t^2-1)^{3/2}$,

$$dx = \frac{3}{2}(t^2-1)^{1/2}2tdt = 3t(t^2-1)^{1/2}dt$$

$$I = \int \frac{(t^2-1)^{3/2}3t(t^2-1)^{1/2}dt}{t} = 3\int(t^2-1)^2dt$$

$$= 3(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t) + C \quad \text{với: } t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$$

3) $I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx$,

Ở đây $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2 \in Z$,

do đó đặt: $1.x^{-2} + 1 = t$ thì $x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$, $dx = \frac{-t}{(t^2-1)^{3/2}}dt$,

$$I = \int(t^2-1)^2.\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}.\frac{-tdt}{(t^2-1)^{3/2}} = -\int(t^2-1)dt = t - \frac{t^3}{3} + C$$

Trở lại biến cũ ta có: $I = \frac{\sqrt{1+x^2}(2x^2-1)}{3x^3} + C$

4) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-1/3}dx$,

Ở đây: $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-1+1}{5} = 0 \in Z$, do đó ta đặt : $1 + x^5 = t^3$, thì

$$x = (t^3 - 1)^{1/5}\ ,\ dx = \frac{1}{5}(t^3-1)^{4/5}3t^2dt$$

$$I = \frac{3}{5}\int\frac{tdt}{t^3-1} = \frac{3}{5}\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{-t+1}{t^2+t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{5}\ln|t-1| - \frac{1}{10}\ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{5}\text{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{(t^2+t+1)} + \frac{\sqrt{3}}{5}\text{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C \text{ với } t = \sqrt[3]{1+x^5}$$

5) $I = \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-1/2}dx$,

ở đây: $p = -\dfrac{1}{2} \overline{\in} Z$, $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{0+1}{4} = \dfrac{1}{4} \overline{\in} Z$,

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \overline{\in} Z.$$

Vậy tích phân này không biểu thị được qua các hàm sơ cấp. Sau này ta sẽ có các phương pháp tính gần đúng các loại tích phân đó.

88. Tính các tích phân:

1) $\displaystyle\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$ 3) $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4) $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$ 5) $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$

Bài giải

1) $$I = \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C$$

2) $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} = \text{signx}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$

Đặt: $\frac{1}{x} = t$ thì:

$$I = -\text{signt}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t-t^2}} = -\text{signt}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-(t-\frac{1}{2})^2}} = -\text{signt}\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{5}} + C$$

Trở lại biến x: $I = \text{signx}\,\text{arsin}\frac{2-x}{x\sqrt{5}} + C$.

3) $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$, đặt : x = sint , $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, dx = costdt.

$I = \int \sin^5 t dt$, áp dụng 1) bài 82):

$$I = -\frac{\cos t}{15}(\sin^4 t + 4\sin^2 t + 8) + C$$

Trở lại biến cũ: x = sint, cost = $\sqrt{1-x^2}$, (cost > 0). Ta có:

$$I = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{15}(x^4 + 4x^2 + 8) + C.$$

4) $I = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. áp dụng phương pháp 4^0.(3.3)

ở đây $P_n(x) = x^3$, n = 3, nên ta có:

$$I = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

Đạo hàm 2 vế theo x, ta có:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} \equiv (2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2} +$$

$$+ \ (Ax^2+Bx+C).\frac{(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

hay: $x^3 \equiv (2Ax+B)(1+2x-x^2) + (1-x)(Ax^2+Bx+C) + \lambda$,

$$x^3 = -3Ax^3 + (5A-2B)x^2 + (2A+3B-C)x + B + C + \lambda .$$

Từ đó: $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{5}{6}$, $C = -\frac{19}{6}$, $\lambda = 4$.

$$I = \frac{-(2x^2+5x+19)}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

5) $I = \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$

$$I = \int \frac{x^2+x}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\left(x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{2}\ln(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1}) + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 1}} = -\text{signx}\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} + 1}} =$$

$$= -\text{signx}\ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} + 1} =$$

$$= -\text{signx}\ln\left(1 - \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1}\right) - \ln|x| + C_2$$

Vậy $$I = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{2}\ln(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1})$$

$$-\text{signx}\left[\ln(1 - \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1}) - \ln|x|\right] + C$$

$$(C = C_1 + C_2)$$

89. Dùng phép thế Euler tính các tích phân:

1) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ 2) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$

3) $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}}dx$ 4) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}$

5) $\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}dx$ 6) $\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}dx$

Bài giải

1) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ ở đây $a = 1 > 0$

nên ta dùng phép thế Euler 1°, đặt: $\sqrt{x^2+x+1} = -x + t$

ta có: $x^2 + x + 1 = x^2 + t^2 - 2xt$

$$x = \frac{t^2-1}{2t+1}, \quad dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt$$

$$I = \int \frac{2(t^2+t+1)}{t(2t+1)^2}dt = -3\int \frac{dt}{(2t+1)^2} - 3\int \frac{dt}{2t+1} + 2\int \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{3}{2(2t+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3} + C$$

với $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$, $(x \neq -1)$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$, ở đây $c = 1 > 0$,

nên ta dùng phép thế Euler 2°, đặt: $\sqrt{1-2x-x^2} = xt - 1$

thì $x = \dfrac{2(t-1)}{t^2+1}$, $dx = 2.\dfrac{(1+2t-t^2)}{(t^2+1)^2}dt$

$$I = \int \frac{\dfrac{2(1+2t-t^2)dt}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{2(t-1)}{t^2+1}t} = \int \frac{1+2t-t^2}{t(1-t)(1+t^2)}dt$$

$$= \int \frac{-dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} - 2\int \frac{dt}{1+t^2} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\text{arctg}t + C$$

với: $t = \dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$

3) $I = \displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

ở đây tam thức: $x^2 + 3x + 2$ có hai nghiệm thực là $x = -1$ và $x = -2$ nên theo phép thế Euler 3°, ta đặt:

$$\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1) \text{ thì } x = \frac{2-t^2}{t^2-1},\ dx = \frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} = t\left(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1\right) = \frac{t}{t^2-1},$$

$$I = \int \frac{2-t^2-t}{2-t^2+t}\cdot\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2} = \int \frac{(t-1)(t+2)}{(t+1)(t-2)}\cdot\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$$

$$= \int \frac{-2t^2-4t}{(t-1)(t-2)(t+1)^3}dt$$

$$= \int\left(\frac{1}{3(1+t)^3}+\frac{5}{18(t+1)^2}-\frac{17}{108(t+1)}+\frac{3}{4(t-1)}-\frac{16}{27(t-2)}\right)dt$$

$$= \frac{-1}{6(t+1)^2}-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{17}{108}\ln|t+1|+\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{16}{27}\ln|t-2|+C$$

với: $t = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$

4) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-a^2}}$.

ở đây : $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$, theo phép thế Euler 3°, ta đặt:

$$\sqrt{x^2-a^2} = t(x-a) \text{ thì } x = a\frac{t^2-1}{t^2+1},\ dx = \frac{4atdt}{(t^2+1)^2},$$

$$I = \frac{1}{2a^2}\int\frac{2t^2-2}{t^4-1}dt = \frac{1}{2a^2}\left[\int\frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\int\frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)\right] + C$$

với $t = \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

5) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}dx = \int \frac{\operatorname{sign}x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}}$

$$= \int \frac{\operatorname{sign}x\, d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}} = \operatorname{sign}x \ \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+x^2+1}}{x}\right| + C,\ x \neq 0$$

90. Tính tích phân các hàm lượng giác:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$

3) $\displaystyle\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x^2+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$

5) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$

6) $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{a\sin x+b\cos x}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}$

*8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$

*9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

10) $\displaystyle\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx$

Bài giải

1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

đặt $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, ta có $x = 2\operatorname{arctg}t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{8 - \frac{8t}{1+t^2} + \frac{7(1-t^2)}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2 - 8t + 15} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t-5)(t-3)} = \ln|t-5| - \ln|t-3| + C$$

Trở lại biến x: $I = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3}\right| + C$

2) $I = \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$, tương tự như 1):

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2.\frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \operatorname{arctg}(t+1) + C$$

Trở lại biến x: $I = \operatorname{arctg}(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C$

3) $I = \int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx$

Đặt: $3\sin x + 2\cos x = a(2\sin x + 3\cos x) + b(2\sin x + 3\cos x)'$

Từ đó: $\begin{cases} 2a - 3b = 3 \\ 3a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{12}{13} \\ b = \frac{-5}{13} \end{cases}$

Vậy:

$$I = \int \frac{\frac{12}{13}(2\sin x + 3\cos x) - \frac{5}{13}(2\sin x + 3\cos x)'}{2\sin x + 3\cos x}dx$$

$$= \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x)| + C$$

4) $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}$, đặt $tgx = t$

thì $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{3t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 3t - 1}$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t + \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\left(t + \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2t + 3 - \sqrt{13}}{2t + 3 + \sqrt{13}}\right| + C$$

Trở lại biến x:

$$I = \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2tgx + 3 - \sqrt{13}}{2tgx + 3 + \sqrt{13}}\right| + C$$

5) $I = \int \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{d(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x)}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1 + \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x}\right| + C$$

6) $I = \int \frac{\sin x dx}{a\sin x + b\cos x}$

Xét $J = \int \frac{\cos x dx}{a\sin x + b\cos x}$

Ta có: $aI + bJ = \int dx = x + C_1$

$$aJ - bI = \int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x}dx = \int \frac{d(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x}dx$$

$$= \ln|a\sin x + b\cos x| + C_2$$

Do đó:

$$I = \frac{ax - b\ln|a\sin x + b\cos x|}{a^2 + b^2} + C$$

$$(J = \frac{bx + a\ln|a\sin x + b\cos x|}{a^2 + b^2} + C)$$

7) Xét

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} = \int \frac{\sin x + 2\cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}dx =$$

$$= \int \frac{d(-\cos x + 2\sin x)}{(\sin x + 2\cos x)^2} = \frac{-\cos x + 2\sin x}{(\sin x + 2\cos x)^2} - 2\int \frac{(\cos x - 2\sin x)^2}{(\sin x + 2\cos x)^3}dx$$

$$I_1 - 2I_1 = \frac{-\cos x + 2\sin x}{(\sin x + 2\cos x)^2} - 2\int \frac{\left[(\cos x - 2\sin x)^2 + (\sin x + 2\cos x)^2\right]}{(\sin x + 2\cos x)^3}dx$$

$$= \frac{-\cos x + 2\sin x}{(\sin x + 2\cos x)^2} - 10\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$$

và $I = \int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3} = \frac{1}{10}\frac{(2\sin x - \cos x)}{(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10}I_1$

Mặt khác:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sin(x+\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|tg(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2})\right| + C$$

với: φ = arctg2.

Vậy: $I = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|tg(\frac{x}{2}+\frac{arctg2}{2})\right| + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\right] + C$,

($x \neq k\pi -$ arctg2)

8) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int \sin^{-3/2} x.\cos^{-5/2} x dx$

ở đây: $\nu + \mu = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2} = -4$: chẵn, nên tích phân trên tính được qua các hàm sơ cấp.

Ta có:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^8 x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x\sqrt{tg^3 x}} = \int \frac{1+tg^2 x}{\sqrt{tg^3 x}} d(tgx)$$

$$= -2\sqrt{\cot gx} + \frac{2}{3}\sqrt{tg^3 x} + C, \text{ với : } (k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi).$$

9) $I = \int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int (\cos x)^{-1}(\sin x)^{-2/3} dx$,

$\mu = -1$: lẻ, vậy I tính được qua các hàm sơ cấp:

$I = \int \frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)(\sin x)^{2/3}}$, đặt: $\sin x = t^3$, $d\sin x = 3t^2 dt$.

$I = \int \frac{3t^2 dt}{(1-t^6)t^2} = 3\int \frac{dt}{1-t^6} = \frac{3}{2}\left[\int \frac{dt}{1-t^3} + \int \frac{dt}{1+t^3}\right]$. Tính toán ta có:

$$I = \frac{1}{4}\ln\frac{(1+t^2)(t^2+t+1)}{(t^2-t+1)(1-t^2)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{arctg}\frac{\sqrt{3}t}{1-t^2} + C$$

với: $t = \sqrt[3]{\sin x}$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

10) $I = \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \int \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\sin 3x dx$

$$= \frac{1}{4}\int(\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x)dx =$$

$$= \frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C .$$

91. Dùng phép thế lượng giác tính các tích phân:

1) $\int (x^2 + x + 1)^{3/2}dx$ 2) $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{3/2}}$

3) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 4) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$

Bài giải

1) $I = \int (x^2 + x + 1)^{3/2}dx = \int \left[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]^{3/2} dx$,

Đặt : $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{tg}t$ thì $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{tg}t - \frac{1}{2}$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{\cos^2 t}$, khi đó:

$$I = \int \frac{3}{4}(1+\text{tg}^2 t)^{3/2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{\cos^2 t}$$

$I = \frac{9}{16}\int \frac{dt}{\cos^5 t}$, áp dụng 4) bài 82 ta có:

$$I=\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{5-1}\cdot\frac{\sin t}{\cos^4 t}+\frac{3}{4}\int\frac{dt}{\cos^3 t}$$

$$=\frac{9}{64}\frac{\sin t}{\cos^4 t}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos t}\right)$$

$$=\frac{9}{64}\frac{\sin t}{\cos^4 t}+\frac{3}{8}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{3}{8}\ln\left|tg(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2})\right|+C$$

với: $t=\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

2) $I=\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}=\int\frac{dx}{[(x-1)+4]^{3/2}}$

Đặt: $x-1=2sht \Rightarrow x=2sht+1,\ dx=2chtdt$.

$$I=\int\frac{2chtdt}{\left[4(sh^2t+1)\right]^{3/2}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{ch^2t}=\frac{1}{4}tht+C.$$

Trả lại biến x: theo trên $sht=\frac{x-1}{2}, cht=\sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{4}}$ thì:

$$I=\frac{1}{4}tht+C=\frac{1}{4}\frac{sht}{cht}+C=\frac{1}{4}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}+C$$

3) $I=\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$,

đặt: $x=\sin t\quad(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$ thì $dx=\cos tdt$ khi đó:

$$I=\int\frac{\cos tdt}{(1+\sin^2 t)\cos t}=\int\frac{dt}{1+\sin^2 t}.$$

Lại đặt: u = tgt thì $dt = \dfrac{du}{1+u^2}$, $\sin^2 t = \dfrac{u^2}{1+u^2}$

$$I = \int \frac{\dfrac{du}{1+u^2}}{1+\dfrac{u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{2u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}u + C.$$

Trở lại biến x:

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

4) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$,

Đặt x = tgt thì $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$

$$I = \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{(1-tg^2 t).\dfrac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t dt}{1-2\sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\sin t)}{1-(\sqrt{2}\sin t)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right| + C$$

Trở lại biến x: $\sin t = \dfrac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| + C.$$

92. Tính tích phân các hàm mũ và hyperboles:

1) $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$ 5) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

3) $\int ch^4 x dx$ 4) $\int \frac{shxdx}{\sqrt{ch2x}}$ 6) $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$

Bài giải

1) $I = \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$,

Đặt $e^x = t$ thì $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$

$$I = \int \frac{t^2dt}{(1+t)t} = \int \frac{tdt}{1+t} = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt = \int dt + \int \frac{dt}{1+t}$$

$$= t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(1+e^x) + C.$$

2) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$,

Đặt: $e^x = t$ thì $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$

$$I = \int \frac{dt}{t(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})} = \int \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t(1+t-1+t)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2}dt - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2}dt = I_1 - I_2.$$

Tính I_1:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+t}\,d\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{1+t}}{t} + \int\frac{d(\sqrt{1+t})}{t}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{1+t}}{t} + \int\frac{d(\sqrt{1+t})}{(\sqrt{1+t})^2-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{1+t}}{t} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right] + C$$

Trở lại biến x:

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}-1}\right] + C$$

I_2 nhận được từ I_1 bằng cách thay t bởi $-t$.

3) $I = \int ch^4x dx = \int \frac{1}{4}(1+ch2x)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int(1+2ch2x+ch^2x)dx = \frac{1}{4}\int\left[1+2ch2x+\frac{1}{2}(1+ch4x)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int(\frac{3}{2}+2ch2x+\frac{1}{2}ch4x)dx = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x+sh2x+\frac{1}{8}sh4x)+C$$

4) $I = \int\frac{shxdx}{\sqrt{ch2x}} = \int\frac{dchx}{\sqrt{2ch^2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}chx+\sqrt{2ch^2x-1})+C$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}chx+\sqrt{ch2x})+C$$

5) $I \equiv \int\frac{e^x}{x+1}dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx = \frac{e^x}{x+1} + \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$

$$= \frac{e^x}{x+1} + C$$

6) $e^x = t \Rightarrow \int\frac{\ln t dt}{(t+1)^2} = \frac{-\ln t}{t+1} + \int\frac{dt}{t(t+1)} = \frac{-x}{e^x+1} + \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)+C$

***93.** Tính các tích phân:

1) $\int |x|dx$ 2) $\int \max(1, x^2)dx$ 3) $\int E(x).|\sin \pi x|dx$

4) $\int f(x)dx$ nếu $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 : \text{nếu} |x| \leq 1 \\ 1 - |x| : \text{nếu} |x| > 1 \end{cases}$

5) $\int f'(x)dx$ nếu $f'(\ln x) = \begin{cases} 1 : 0 < x \leq 1 \\ x : 1 < x < +\infty \end{cases}$, $f(0) = 0$.

6) $I = \int P(\frac{1}{x})e^x dx$ với : $P(\frac{1}{x}) = a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n}$.

(a_i = const, i = 1, 2, 3 ... n).

7) $\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}dx$

8) $I = \int \frac{\varphi(x)}{(x - m)^k}dx$, $\varphi(x)$ là một trong các hàm:

e^{ax}, sinax, cosax, $k \in N$.

Bài giải

1) $I = \int |x|dx$

Ta có : $I = \begin{cases} \int xdx = \frac{x^2}{2} + C_1 : x \geq 0 \\ -\int xdx = -\frac{x^2}{2} + C_2 : x < 0 \end{cases}$

Theo định nghĩa, nguyên hàm của một hàm số là một hàm liên tục trong miền tồn tại của nó, do đó tại x = 0 ta phải có: $C_1 = C_2 = C$ = const. Vậy $\forall x \in R$:

$$I = \frac{x^2}{2}\text{signx} + C = \frac{x|x|}{2} + C$$

2) $\int \max(1, x^2)dx$

Xét $|x| \leq 1$ ta có : $I = \int 1dx = x + C_1$

$|x| > 1$ ta có : $I = \int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C_2$

Vì nguyên hàm là một hàm liên tục nên tại x = 1, ta có:

$$1+C_1=\frac{1}{3}+C_2 \text{ hay } C_2=\frac{2}{3}+C_1=\frac{2}{3}+C$$

$(C_1 = C)$ khi $x > 0$.

Tại $x = -1$: $-1+C_1=-\frac{1}{3}+C_2$ hay $C_2=-\frac{2}{3}+C_1$, $C = C_1$ khi $x \le 0$.

$$\text{Vậy : } I=\int \max(1,x^2)dx=\begin{cases} x+C : |x|\le 1 \\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\sin gx+C : |x|>1 \end{cases}$$

3) $I=\int E(x).|\sin \pi x|dx$

Theo định nghĩa:

$$E(x).|\sin \pi x|=(-1)^n.n.\sin \pi x,\quad n \le x< n+1,\quad n \in Z.$$

Do đó: $I=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}n\cos \pi x+C_n$, $n \le x< n+1$.

Theo tính liên tục của nguyên hàm, tại x = n + 1 ta phải có:

$$C_{n+1}=C_n+\frac{2n+1}{\pi}.$$

4) $I=\int f(x)dx$ nếu $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 : \text{nếu} |x|\le 1 \\ 1-|x| : \text{nếu} |x|>1 \end{cases}$

Lấy tích phân ta có:

$$\begin{cases} x+\frac{x^2}{2}+C_1 : -\infty<x<-1 \\ x-\frac{x^3}{3}+C_2 : -1<x<0 \\ x-\frac{x^3}{3}+C_3 : 0\le x\le 1 \\ x-\frac{x^2}{2}+C_4 : 1<x<+\infty \end{cases}$$

Vì nguyên hàm của một hàm số là một hàm liên tục nên:

$$C_2 - C_1 = \frac{1}{6},\ C_2 = C_3,\ C_4 - C_3 = \frac{1}{6}$$

hay $$C_2 = C_3 = \frac{1}{6} + C_1,\ C_4 = \frac{1}{3} + C_1$$

Vậy : $$I = \int f(x)dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + C : |x| \le 1 \\ x - \dfrac{x}{2}|x| + \dfrac{1}{6}\text{signx} + C : 1 < |x| < +\infty \end{cases} \quad (C_1 = C).$$

5) Đặt $t = \ln x$ thì $x = e^t$ và theo giả thiết :

$$f'(t) = \begin{cases} 1 : -\infty < t \le 0 \\ e^t : 0 < t < +\infty \end{cases}$$

Do đó: $$f(t) = \begin{cases} t + C_1 : -\infty < t \le 0 \\ e^t + C_2 : 0 < t < +\infty \end{cases}$$

Do $f(t)$ là một hàm liên tục nên tại $t = 0$: $0 + C_1 = 1 + C_2$.

Vậy $$f(t) = \begin{cases} t + C_1 : -\infty < t \le 0 \\ e^t - 1 + C_1 : 0 < t < +\infty \end{cases}$$

Do $f(0) = 0$ nên $C_1 = 0$.

6) Ta có: (Tích phân từng phần)

$$I = \int P(\frac{1}{x}).e^x dx = \int (a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})e^x dx$$

$$= a_0 e^x + a_1 \text{li}e^x - \frac{a_2}{x}e^x + a_2 \text{li}e^x -$$

$$+ \ldots - \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a_n}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \ldots - \frac{a_n}{(n-1)!x} + \frac{a_n}{(n-1)!}\text{li}(e^x)$$

với $li(e^x) = \int \frac{e^x}{x}dx + C$, đặt $e^x = u$ thì

$$x = \ln u,\ e^x dx = du \text{ và } li(e^x) = li u = \int \frac{du}{\ln u} + C.$$

Ta biết: $lix = \int \frac{dx}{\ln x}$ không biểu thị được qua các hàm sơ cấp.
Vậy điều kiện để I biểu thị được qua các hàm sơ cấp là:

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + ... + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0$$

7) $I = \int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}dx = \int \frac{e^{2x}}{x-2}dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1}dx$

Xét $I_1 = \int \frac{e^{2x}dx}{x-2}$, đặt: $x - 2 = t$ thì $dx = dt$

$$I_1 = \int \frac{e^{4+2t}dt}{t} = e^4 \int \frac{e^{2t}d(2t)}{2t} = e^4 li(e^{2t}) + C_1 = e^4 li e^{2(x-2)} + C_1$$

Tương tự ta có: $I_2 = e^2 li\left(e^{2(x-1)}\right) + C_2$

Vậy: $I = e^4 li\left(e^{2(x-2)}\right) - e^2 li\left(e^{2(x-1)}\right) + C$, $(C = C_1 + C_2)$

8) $I = \int \frac{\varphi(x)}{(x-m)^k}dx$, $(k \in N)$.

Tích phân từng phần, đặt : $u = \varphi(x)$, $dv = \frac{dx}{(x-m)^k}$

thì $du = \varphi'(x)dx$ và $v = -\frac{1}{k-1}.\frac{1}{(x-m)^{k-1}}$

$$I = -\frac{1}{k-1}.\frac{\varphi(x)}{(x-m)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}\int \frac{\varphi'(x)}{(x-m)^{k-1}}dx$$

vì $(e^{ax})' = ae^{ax}$, $(\sin ax)' = a\cos ax$, $(\cos ax)' = -a\sin ax$, do đó từ I tích phân từng phần k lần ta có một trong các tích phân:

$$\int \frac{e^{ax}}{x-m}dx\ ,\quad \int \frac{\sin ax}{x-m}dx\ ,\quad \int \frac{\cos ax}{x-m}dx$$

đặt : $a(x-m) = t$, ta di đến phải tính các tích phân :

$$\int \frac{e^t}{t}dt = \text{li}e^t\ ,\quad \int \frac{\sin t}{t}dt = \text{si}t\ ,\quad \int \frac{\cos t}{t}dt = \text{ci}t$$

Các tích phân lix, six, cix không biểu thị được qua các hàm sơ cấp (người ta dã lập bảng tính gần dúng các tích phân này).

CHƯƠNG 5

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1 Định nghĩa

- Tích phân xác định của hàm f(x) xác định và bị chặn trên đoạn [a, b]:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} I_n$$

với một cách chia bất kỳ đoạn [a, b]:

$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $\quad$ $(i = 1, 2, \ldots n)$

I_n gọi là tổng tích phân thứ n của f(x) trên [a, b].

f(x) có tích phân trên [a, b] gọi là khả tích trên đó .

1.2. Điều kiện khả tích (R) (RIEMANN)

Điều kiện cần và đủ để hàm bị chặn f(x) khả tích trên đoạn [a, b] là:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (S - s) = 0$$

trong đó: $S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$; $s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

$$M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x),\ m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

S(s) gọi là các tổng Darboux trên (dưới) của f(x) ứng với cách chia nào đó của [a, b], gọi chung là các tổng Darboux.

Từ điều kiện (R) suy ra:

1^0. Mọi hàm f(x) liên tục trên [a, b] đều khả tích trên đoạn đó.

2^0. Mọi hàm f(x) bị chặn và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên [a, b] đều khả tích trên đoạn đó.

3^0. Mọi hàm f(x) đơn điệu và bị chặn trên [a, b] đều khả tích trên đoạn đó.

1.3 Ý nghĩa hình học và cơ học

$I = \int_a^b f(x)dx$, với $f(x) \geq 0$ trên [a, b] là diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường x = a, x = b, y = 0 và y = f(x).

$I = \int_a^b f(x)dx$ với $f(x) > 0$ trên [a, b] là:

- Khối lượng của đoạn [a, b] với mật độ khối lượng (dài) f(x).

- Công của lực có độ lớn $f(x) > 0$ tác dụng vào một vật chuyển động thẳng từ x = a đến x = b

1.4. Tính chất

Giả thiết f(x), g(x) khả tích trên [a, b]

1^0. $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx$, $\alpha, \beta = const$

2^0. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (f(x) khả tích trên đoạn lớn nhất trong các đoạn [a, b], [a, c], [c, b]).

3^0. $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (a < b) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

4^0. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a < b)$.

5^0. $m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

$a < b$, $M(m) = \sup\limits_{[a,b]}(\inf) f(x)$

6^0. $\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a)$, $\inf\limits_{[a,b]} f(x) \leq \mu \leq \sup\limits_{[a,b]} f(x)$

Đặc biệt: f(x) liên tục trên [a, b].

$f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ gọi là giá trị trung bình của f(x) trên [a, b]. $(a \leq \xi \leq b)$.

Tổng quát: Nếu f(x), g(x) liên tục trên [a, b], $g(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$, $\xi \in [a, b]$.

BÀI TẬP

94. Tính trực tiếp (từ định nghĩa) các tích phân:

*1. $I = \int_a^b x^\alpha dx \quad (\alpha \in R, 0 < a < b)$

2. $I = \int_0^1 a^x dx$

3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

4. $I = \int_0^{x} \cos t dt$, $x > 0$

Bài giải

1) $f(x) = x^{\alpha}$ là hàm liên tục $\forall x > 0$, đặc biệt nó liên tục trên $[a, b]$ với $0 < a < b$.

Vậy theo hệ quả 1^0 (1.2) f(x) khả tích trên [a, b]. Do đó ta chỉ cần chọn một cách chia đặc biệt đoạn [a, b] để tính I (vì theo định nghĩa: khi f(x) đã khả tích thì với mọi cách chia ta đều có cùng một kết quả).

Xét $\alpha \neq -1$, ta chọn cách chia [a, b] thành n phần bởi các điểm tạo thành một cấp số nhân:

$$x_1 = a,\ x_2 = x_1.q \dots x_{i+1} = x_1 \cdot q^i, \dots,\ x_{n+1} = x_n q^n = b.$$

Khi đó : $q = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = a \cdot q^{i-1}(q - 1)$.

và tổng tích phân thứ n của f(x) trên [a, b] là:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} (aq^{i-1})^{\alpha}\, aq^{i-1}(q - 1).$$

ở đây ta chọn $\xi_i = x_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

Ta có:

$$I_n = a^{\alpha+1}(q - 1) \sum_{i=1}^{n} q^{(\alpha+1)(i-1)}$$

$$= a^{\alpha+1}(q - 1)[1 + q^{\alpha+1} + q^{(\alpha+1)2} + \dots + q^{(\alpha+1)(n-1)}]$$

$$= a^{\alpha+1}(q - 1)\frac{q^{(\alpha+1)n} - 1}{q^{\alpha+1} - 1} \text{ (Tổng của cấp số nhân)}$$

$$= \frac{a^{\alpha+1}(q-1)[(\frac{b}{a})^{\alpha+1} - 1]}{q^{\alpha+1} - 1} = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})\frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1}$$

Vậy $\quad I = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} I_n = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \lim\limits_{q \to 1} \dfrac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$

hay: $\quad I = \dfrac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\Delta x_i \to 0 \Leftrightarrow q \to 1)$

Xét $\alpha = -1$: $\quad I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\Delta x_i}{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{aq^{i-1}(q-1)}{aq^{i-1}}$

hay: $\quad I_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(q-1) = n(q-1) = \dfrac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\dfrac{1}{n}}$

và $\quad I = \lim\limits_{n \to \infty} I_n = \ln\dfrac{b}{a}, \quad (\Delta x_i \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty)$

2) $\quad I = \int\limits_{0}^{1} a^x dx, \quad (a > 0 \neq 1)$

Tương tự như 1) hàm $f(x) = a^x$ khả tích trên $[0, 1]$, do đó chọn một cách chia đặc biệt: chia $[0, 1]$ ra n phần bằng nhau bởi các điểm:

$x_i = \dfrac{i-1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \dfrac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Chọn $\xi_i = x_i$, khi đó $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}}$

hay $I_n = \dfrac{1}{n}(1 + a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \ldots + a^{\frac{n-1}{n}}) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \dfrac{a-1}{\dfrac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\dfrac{1}{n}}}$

(cấp số nhân số đầu a = 1, công bội $q = a^{\frac{1}{n}}$)

Vậy $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a-1}{\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} = \dfrac{a-1}{\ln a}$, $(\max \Delta x_i \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty)$

Đặc biệt a = e: $I = \int\limits_0^1 e^x dx = e - 1$.

3) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Tương tự như 2), chia $[0, \frac{\pi}{2}]$ thành n phần bằng nhau:

$$x_i = \frac{i-1}{n}\pi, \quad \Delta x_i = \frac{\pi}{2n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

chọn $\xi_i = x_{i+1}$, i = 1, 2, ..., n. Khi đó:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{i\pi}{n}.\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}$$

Áp dụng 10^0 (1. 6) chương 1 cho tổng Σ, ta có:

$$I_n = \frac{\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4n}.\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n})}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

Do đó: $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}.\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}.\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}) = \sqrt{2}.1.\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

4) Tương tự như 3) chia [0, x] ra n phần bằng nhau bởi:

$$t_i = \frac{(i-1)x}{n}, \ \Delta t_i = \frac{x}{n}, \ (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

chọn $\xi_i = t_i + 1 = \dfrac{ix}{n}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

Ta có:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \cos\frac{ix}{n}.\frac{x}{n} \quad \text{theo } (1.6, 11^\circ) \text{ chương 1:}$$

$$I_n = \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\frac{ix}{n} = \frac{x}{n}\,\frac{\cos\dfrac{n+1}{2}.\dfrac{x}{n}.\sin\dfrac{n}{2}.\dfrac{x}{n}}{\sin\dfrac{x}{2n}}$$

Do đó:

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$$

*95. Chứng minh rằng nếu f(x), g(x) khả tích trên [a, b] thì các hàm sau cũng khả tích trên [a, b]:

1) $\dfrac{1}{f(x)}$, $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \neq 0$ và cùng dấu

2) $\sqrt{f(x)}$, $(f(x) > 0)$

3) $f(x) \,.\, g(x)$.

Bài giải

1) Xét $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} (m = \inf\limits_{x\in[a,b]}) f(x) > 0$.

Khi đó $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a, b]$.

$$\frac{1}{M} \le \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{m}.$$

Do đó $M' = \sup\,(m' = \inf)\ \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{M}\right)$.

Xét các tổng Darboux trên S (dưới s) của $\frac{1}{f(x)}$ thì

$$S - s = \sum_{i=1}^{n}(M'_i - m'_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i}\right)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i - m_i}{m_i M_i}.\Delta x_i$$

hay $S - s \le \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i$

Theo giả thiết f(x) khả tích nên tổng ở vế phải dần tới 0 khi $\max \Delta x_i \to 0$. Vậy $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0}(S - s) = 0$: chứng tỏ $\frac{1}{f(x)}$ khả tích trên [a, b]. Trường hợp m, M < 0, đặt g(x) = - f(x) thì đưa được về trường hợp trên.

2) $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Tương tự như 1), gọi S(s) là các tổng Darboux của g(x) ứng với một cách chia đoạn [a, b] và xét:

$$S - s = \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{M_i} - \sqrt{m_i}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i - m_i}{\sqrt{M_i} + \sqrt{m_i}}\Delta x_i \le \frac{1}{2\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon,$$

nghĩa là $g(x) = \sqrt{f(x)}$ khả tích trên [a, b] .

3) Tương tự như 2), 3) và sử dụng bất đẳng thức:

$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \le |[f(x'') - f(x')]g(x'')| + |[g(x'') - g(x')]f(x')|$ dễ dàng chứng minh được 3).

*96. Chứng minh rằng:

1) Nếu f(x) khả tích trên [a, b] thì f(x) khả tích trên $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

2) Nếu $f(x) \ge 0$ và liên tục trong [a, b], $\int_a^b f(x)dx = 0$ thì f(x) = 0, $\forall x \in [a, b]$, (a < b).

3) Nếu f(x) khả tích và f(x) > 0, $\forall x \in [a, b]$

thì $\int_a^b f(x)dx > 0$ (a < b).

4) f(x) khả tích trên [a, b] thì $|f(x)|$ khả tích trên [a, b]

Điều ngược lại có đúng không ? (a < b)

Bài giải

1) Xét $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, theo 2^0 ở (1.4): Nếu f(x) khả tích trên [a, b] thì f(x) khả tích trên $[a, \beta]$ và $[\beta, b]$.

Lại theo 2^0 ở (1.4): f(x) khả tích trên $[a, \beta]$ thì f(x) khả tích trên $[a, \alpha]$ và $[\alpha, \beta]$. Vậy f(x) khả tích trên [a, b] thì f(x) khả tích trên $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

2) Giả thiết ngược lại f(x) > 0 tại $x_0 \in [a, b]$; theo tính chất của hàm liên tục thì có một lân cận (α, β) của x_0, $[\alpha, \beta] \in [a, b]$ sao cho f(x) > 0, do đó $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ và $\int_a^b f(x)dx > 0$: trái với giả thiết. Vậy kết luận là đúng.

3) Giả sử ngược lại $\int_a^b f(x)dx = 0$ khi đó tổng Darboux trên $S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \to 0$ khi $d = \max \Delta x_i \to 0$, do đó $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta > 0$, $d < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i < \varepsilon_1(b - a)$, do đó một trong những $M_i < \varepsilon_1$, nghĩa là trong [a, b] có phần $[a_1, b_1]$: $f(x) < \varepsilon_1$

Rõ ràng $\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = 0$ vì:

$$\int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{b_1} + \int_{b_1}^{b} \text{ và } \int_a^{a_1} \geq 0 \text{ nên } 0 \leq \int_{a_1}^{b_1} \leq \int_a^b = 0.$$

Lý luận tương tự, có $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ và $0 < f(x) < \varepsilon_2, \ldots,$ $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$ và $0 < f(x) < \varepsilon_k$ Ta thấy dãy đoạn $\{[a_k, b_k]\}$ là một đoạn thắt, nên $\exists C \in [a_k, b_k]$, $k = 1,2\ldots$, khi đó $0 < f(c) < \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Cho $\varepsilon_k \to 0$ thì $0 < f(c) < 0$, điều vô lý này, chứng tỏ mệnh đề 3) là đúng.

4) Gọi các tổng Darboux của f(x) là S, s và của $|f(x)|$ là S', s', thì theo bất đẳng thức:

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

ta có: $S' - s' < S - s$.

Theo giả thiết f(x) khả tích, nghĩa là $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0}(S - s) = 0$, do đó $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0}(S' - s') = 0$ nghĩa là $|f(x)|$ khả tích trên [a, b].

Điều ngược lại, nói chung không đúng, chẳng hạn xét:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in Q \text{ (hữu tỉ)} \\ -1 & \text{nếu } x \in I \text{ (vô tỉ)} \end{cases}$$

ở đây $|f(x)| = 1$, $\forall x \in R$ nên $|f(x)|$ khả tích trên [a, b] bất kỳ. Nhưng f(x) không khả tích trên [a, b] bất kỳ.

Vì với $\xi_i \in Q$, $f(\xi_i) = 1$, $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = b - a \to (b - a)$.

$\xi_i \in I$, $f(\xi_i) = -1$, $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} -1\Delta x_i = -(b - a) \to (a - b)$.

97. 1. Xét dấu của các tích phân:

a) $I = \int\limits_0^{2\pi} x \sin x dx$ b) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

2. So sánh các tích phân

a) $I_1 = \int\limits_0^1 e^{-x}dx$, $I_2 = \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

b) $I_1 = \int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$, $I_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$

Bài giải

1) a) $I = \int\limits_0^{2\pi} x\sin xdx = \int\limits_0^{\pi} x\sin xdx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} x\sin xdx$,

trong tích phân thứ hai đặt $x = \pi + t$, ta có:

$$I = \int\limits_0^{\pi} x\sin xdx + \int\limits_0^{\pi} (\pi + t)\sin(\pi + t)dt ,$$

nhưng $\sin(\pi + t) = -\sin t$, nên:

$$I = \int\limits_0^{\pi} x\sin xdx - \int\limits_0^{\pi} t\sin tdt - \pi\int\limits_0^{\pi} \sin tdt = -\pi^2\sin\xi < 0,$$

$(0 < \xi < \pi)$, theo 6^0 (1-4).

b) Xét $F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{với } x \in (0,\ 2\pi) \\ 1 & \text{với } x = 0 \end{cases}$

Khi đó $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^{2\pi} F(x)dx$.

hay $I = \int\limits_0^{\pi} F(x)dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \dfrac{\sin x}{x}dx$

Trong tích phân thứ hai, đặt $x = \pi + t$ thì:

$$I = \int\limits_0^{\pi} F(x)dx + \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(\pi + t)}{(\pi + t)}dt = \int\limits_0^{\pi}\left[\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x}{x + \pi}\right]dx$$

$$= \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x(x + \pi)}dx = \pi F(\xi)\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{x + \pi} = \pi\frac{\sin\xi}{\xi}\ln 2 > 0$$

$0 < \xi < \pi$ (Định lý trung bình tổng quát: (1.4, 6°)

với $f(x) = F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} : x \neq 0 \\ 1 \quad : x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \dfrac{1}{x+\pi}$

2) a) Xét $I_1 - I_2 = \int\limits_0^1 (e^{-x} - e^{-x^2})dx$, áp dụng định lý trung bình (1.4, 6°).

$$I_1 - I_2 = (e^{-\xi} - e^{-\xi^2})(1 - 0), \quad 0 < \xi < 1$$

hay $I_1 - I_2 < 0$ và $I_1 < I_2$

b) Trong I_2, đặt $x = \pi + t$.

ta có:

$$I_2 = \int\limits_0^{\pi} e^{-(\pi+t)^2} \cos^2 t dt = \int\limits_0^{\pi} e^{-(\pi+t)^2} \cos^2 x dx$$

Xét $\quad I_1 - I_2 = \int\limits_0^{\pi} (e^{-x^2} - e^{-(x+\pi)^2}) \cos^2 x dx$

Áp dụng định lý trung bình thì:

$$I_1 - I_2 = (e^{-\xi^2} - e^{-(\pi+\xi)^2})\pi, \quad 0 < \xi < \pi$$

hay $\quad I_1 - I_2 > 0 \quad$ và $\quad I_1 > I_2$

98. Ước lượng các tích phân

1) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}dx$; 2) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$; 3) $I = \int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$

4) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$

Tìm giá trị trung bình của 5) $f(x) = x^2$ trên $[0, 1]$

6) $f(x) = a\sin x + b$ trên $[0, \frac{\pi}{2}]$

Bài giải

Ta có thể dùng 5^0 hoặc 6^0 ở (1-4) để giải các bài toán này.

1) Dùng 5^0, xét $f(x) = x\sqrt{\operatorname{tg}x}$, ta tìm giá trị lớn (bé) nhất M(m) của f(x) trong $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Ta có:

$$f'(x) = \sqrt{\operatorname{tg}x} + \frac{x}{2\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}x}} > 0 \text{ khi } 0 < x \le \frac{\pi}{4},$$

$$(f'(x) \to 0 \text{ chỉ khi } x \to 0)$$

Do đó f(x) là hàm đơn điệu tăng trong $[0, \frac{\pi}{4}]$ nên $m = f(0) = 0$, $M = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $\quad 0\,(\frac{\pi}{4} - 0) \le I \le \frac{\pi}{4}\,(\frac{\pi}{4} - 0).$

hay $\quad 0 \le I \le \frac{\pi^2}{16}.$

Nếu dùng 6^0 ta có:

$$I = \xi\operatorname{tg}\xi\,(\frac{\pi}{4} - 0) \text{ với } 0 < \xi < \frac{\pi}{4} \text{ (I: đơn điệu tăng)}$$

Khi $\xi = 0$, thì $I = 0$, khi $\xi = \frac{\pi}{4}$ thì $I = \frac{\pi^2}{16}$, vậy $0 < I < \frac{\pi^2}{16}$.

2) Áp dụng ($1.3, 6^0$), ta có:

$$I = \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2\xi}\ (\frac{\pi}{2}-0)$$

$0 < \xi < \frac{\pi}{2}$, từ đó $I(0) = \frac{\pi}{2}$, $I(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{\pi}{2}$.

Vậy:

$$\frac{\pi}{2} < I < \sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{\pi}{2}.$$

3) Áp dụng (1.3, 6°), ta có:

$$I = \frac{\xi^9}{\sqrt{1+\xi}}.(1-0),\ 0 < \xi < 1.$$

$$I(0) = 0,\ I(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{vậy}\ 0 < I < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4) Áp dụng (1.3, 6°), ta có:

$$I = \left(\frac{\sin\xi-\cos\xi}{\sin\xi+\cos\xi}\right)^{2n+1}.\left(\frac{\pi}{4}-0\right),\ 0 < \xi < \frac{\pi}{4}$$

$$I(0) = -\frac{\pi}{4},\ I\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0\ \text{vậy}\ -\frac{\pi}{4} < I < 0.$$

5) Theo(1.3, 6°): $f(\xi) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ (Theo 1) bài 1).

6)Theo (1.3, 6°), ta có:

$$f(\xi) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x + b)\,dx = \frac{2}{\pi}(a + b\frac{\pi}{2}) = \frac{2a}{\pi}+b$$

(theo 3) bài 1).

99. Chứng minh:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = 0$

*3) $\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| < \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$ (Schwarz)

*4) $\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right\}^{1/2} \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{1/2}$

Bài giải

1) Áp dụng 6^0(1-4), ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{\xi^n}{1+\xi}(1-0) = 0 \quad (0 < \xi < 1)$$

2) Như 1):

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \lim_{n\to+\infty} \sin^n \xi(\frac{\pi}{2}-0), \quad 0 < \xi < \frac{\pi}{2}$$

$$= 0 \text{ (vì } 0 < \xi < \frac{\pi}{2}, 0 < \sin\xi < 1).$$

3) Xét $\int_a^b (f+\lambda.g)^2dx = \int_a^b f^2dx + \lambda^2\int_a^b g^2dx + 2\lambda\int_a^b f.g.dx \ge 0.$

Đây là một tam thức bậc hai của λ, không âm, suy ra:

$$\Delta = b'^2 - ac = (\int_a^b f.g.dx)^2 - \int_a^b f^2dx.\int_a^b g^2dx \le 0 \qquad (1)$$

Từ sự khả tích của f, g theo 3) bài 2, suy ra f.g, f^2, g^2 khả tích nên các tích phân ở (1) là tồn tại và từ đó ta suy ra 3).

4) Xét $\int_a^b (f+g)^2 dx = \int_a^b f^2 dx + \int_a^b g^2 dx + 2\int_a^b f.g dx \le$

$$\le \int_a^b f^2 dx + \int_a^b g^2 dx + 2\left(\int_a^b f^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left[\left(\int_a^b f^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2 dx\right)^{1/2}\right]^2$$ (theo 3) và do đó ta có 4).

§2. ĐẠO HÀM THEO CẬN TRÊN - CÔNG THỨC NEWTON - LEIBNIZ CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH CƠ BẢN

2.1. Đạo hàm theo cận trên

- Nếu f(x) khả tích trên [a, b] thì $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một hàm liên tục trên [a, b] .

- Nếu thêm điều kiện f(t) liên tục tại t = x ∈ [a, b] thì I'(x) = f(x).

- Mọi hàm liên tục trên [a, b] đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

2.2. Công thức Newton - Leibniz (N - L)

Nếu f(x) liên tục trên [a, b] thì $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Với F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a, b].

2.3. Phương pháp tích phân từng phần

Nếu các hàm u(x), v(x) khả vi liên tục (có đạo hàm liên tục) trên [a, b] thì:

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du \qquad (1)$$

Áp dụng:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2} : n = 2m \\ 1 : n = 2m+1 \end{cases} \qquad (2)$$

2.4. Phương pháp đổi biến số

Để tính $I = \int_a^b f(x)dx$, f(x) liên tục trên [a, b], đặt x = x(t), $\alpha \le t \le \beta$, thoả mãn:

x(t) có x'(t) liên tục trong $[\alpha, \beta]$, $\alpha \le t \le \beta \Rightarrow a \le x \le b$.

$x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$

thì $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]x'(t)dt \qquad (1)$$

có thể đặt t = t(x), nhưng phải thoả mãn điều kiện: t = t(x) liên tục, đơn điệu tăng (giảm) và có $t'(x) \neq 0$, liên tục trong [a, b], f(x)dx = g(t)dt thì:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t(a)}^{t(b)} g(t)dt \qquad (2)$$

Áp dụng:

$$\int_{-k}^{k} f(x)dx = \begin{cases} \int_0^k [f(x) + f(-x)]dx : \text{nếu } f(x) \text{ không chẵn, lẻ.} \\ 2\int_0^k f(x)dx : \text{nếu } f(x) \text{ chẵn.} \\ 0 \qquad : \text{nếu } f(x) \text{ lẻ.} \end{cases} \qquad (3)$$

(k > 0)

BÀI TẬP

100. 1) Tính I'(x) nếu:

$$\text{a) } I(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}dt \qquad \text{b) } \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t dt \qquad (x > 0)$$

2) Tìm:

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt}$$

$$\text{c) } \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$$

Bài giải

1) a) $I(x) = \int_a^{x^2} e^{-t^2}dt - \int_a^x e^{-t^2}dt$

$$I'(x) = \left(\int_a^{x^2} e^{-t^2}dt\right)'_u u'_x - \left(\int_a^x e^{-t^2}dt\right)'_x$$

Với $u = x^2$, $u'_x = 2x$.

Vậy $I'(x) = e^{-u^2}.2x - e^{-x^2} = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$

b) Tương tự như a)

$$I'(x) = \left(\int_a^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt - \int_a^{\frac{1}{x}} \cos t^2 dt\right)'_x = \cos x.\frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos\frac{1}{x^2}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$$

2) a) Giới hạn có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, áp dụng quy tắc L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x (\mathrm{arctgt})^2 dt}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mathrm{arctgx})^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\pi^2}{4}, \ (\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1)$$

b) Giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$, áp dụng quy tắc L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to+0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\mathrm{tgt}}dt}{\int_0^{\mathrm{tgx}} \sqrt{\sin t}dt} = \lim_{x\to+0} \frac{\cos x\sqrt{\mathrm{tg}(\sin x)}}{\frac{\sqrt{\sin(\mathrm{tgx})}}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\mathrm{tg}(\sin x)}{\sin(\mathrm{tgx})}} = \lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\sin x}{\mathrm{tgx}}} = 1$$

c) Tương tự như b):

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}dt + 2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}} + 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}} + 1 = 1$$

*101. 1) Chứng minh: f(x) liên tục $\forall x > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$,

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)dx = L$$

2) Tìm α để $L = \lim\limits_{x \to 1^-} (x-1)^{\alpha} \int\limits_0^x \frac{t}{\ln^2 t} dt$ tồn tại và tìm giới hạn đó.

3) Chứng minh: $\int\limits_0^2 \ln \sqrt[3]{(1+x)^2} dx + \int\limits_0^3 \ln \sqrt[3]{1+x^2} dx \geq \int\limits_0^{7/3} \ln(1+x^2) dx$

Bài giải

1) L = 0 thì mệnh đề là hiển nhiên đúng.

Xét $L \neq 0$, đặt nx = t thì:

$$\int\limits_0^1 f(nx)dx = \frac{1}{n}\int\limits_0^n f(t)dt = g_n \qquad (1)$$

g_n là giá trị của hàm $g(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt$ tại x = n.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (theo giả thiết).

Nên $g_n \to L$ khi $n \to \infty$ và theo (1): $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^1 f(nx)dx = L$

2) $L = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\int\limits_0^x \frac{t}{\ln^2 t} dt}{\frac{1}{(x-1)^{\alpha}}}$,

L có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, áp dụng quy tắc L'Hôpital:

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{-x(x-1)^{\alpha+1}}{\alpha \ln^2 x}, \text{ đặt } x - 1 = t$$

thì $x \to 1^- \Leftrightarrow t \to -0$

3) Xét $f(t) = \int\limits_0^t \ln(1+x^2)dx$, $f'(t) = \frac{2t}{1+t^2} > 0$: $t > 0 \Rightarrow f$: lõm $\Leftrightarrow$

$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3 \Rightarrow$ 3) và $$L = \lim_{t \to -0} \frac{-(t+1)t^{\alpha+1}}{\alpha \ln^2(1+t)} = \begin{cases} -1 & \text{khi } \alpha = 1 \\ 0 & \text{khi } \alpha > 1 \end{cases}.$$

102. Áp dụng công thức Newton - Leibniz (N - L), tính các tích phân:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+4}}$; 2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

3) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{ch^2x}$; 4) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|dx$

*5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1}$, $0 < \alpha < \pi$; 6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2+tg^2x}dx$; 8) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\text{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$

Bài giải

1) $$I = \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+4}} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx^3}{\sqrt{x^6+4}} = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+\sqrt{x^6+4}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left(1+\sqrt{5}\right) - \ln 2\right] = \frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2) $$I = \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = -\cos\ln x\Big|_1^e = 1 - \cos 1.$$

3) $$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{ch^2x} = thx\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = th(\ln 3) - th(\ln 2).$$

Ta biết $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$, do đó $th(\ln x) = \dfrac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}$

Vậy $$I = \frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}} - \frac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \frac{8}{10} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}.$$

4) $$I = \int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (1-x)dx$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 1.$$

5) $$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}, \quad 0 < \alpha < \pi$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{d(x+\cos\alpha)}{(x+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} + \operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

hay $$I = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}$$

(vì $0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$) và theo:

$(\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ khi $x > 0)$.

6) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\operatorname{tg}x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\operatorname{cotg}x}{1 + 2\operatorname{cotg}^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}(\sqrt{2}\cot gx)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \text{arctg}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

7) Nguyên hàm của $\frac{\sec^2 x}{2+\text{tg}^2 x}$ là $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$ có gián đoạn loại 1 tại $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ nên không thể áp dụng công thức (N - L) để tính tích phân này.

8) Nguyên hàm của $\frac{d}{dx}\left(\text{arctg}\frac{1}{x}\right)$ là $\text{arctg}\frac{1}{x}$, có gián đoạn loại 1 tại x = 0, nên cũng không thể áp dụng công thức (N -L) để tính tích phân này.

103. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, nếu:

1) $S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$

2) $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$

3) $S_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$ $(p > 0)$

4) $S_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}$

5) $S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

*6) $S_n = \sin\frac{\pi}{n}.\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$

Bài giải

1) Đặt $\sigma_n = S_n + \frac{n}{n^2}$ thì $S_n = \sigma_n - \frac{1}{n}$

$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}$, σ_n chính là tổng tích phân của hàm f(x) = x trên đoạn [0, 1] với cách chia đều và $\xi_i = \frac{i}{n}$ (i = 1, 2, ... n).

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, và theo định nghĩa tích phân xác định:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x dx - 0 = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

2) $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$

đây chính là tổng tích phân của hàm $f(x) = \frac{1}{1+x}$ trên đoạn [0, 1] với cách chia đều và $\xi_i = \frac{i}{n}$ (i = 1, 2, ..., n).

Theo định nghĩa tích phân xác định:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

3) $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p$, tương tự như 1), 2):

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x^p dx = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1},\ p > 0.$$

4) Tương tự như trên ta có:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

5) Cũng tương tự như trên:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n} - \sin\frac{n\pi}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 \sin\pi x\,dx = \frac{-\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

6) Ta có: $S_n = \sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$

Vì $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$ (khi $n\to\infty$)

nên $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = \int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$

vì $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ nên:

$$\lim S_n = 2\int_0^{\pi}\frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{3-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

104. Dùng phương pháp tích phân từng phần, tính các tích phân:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ 2) $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\text{arctg}x dx$

3) $\int_0^{\pi} e^{2x}\sin 3x dx$ 4) $\int_0^{1} x^3 e^{2x} dx$

Bài giải

1) Đặt $u = x$, $\cos x dx = dv$ thì $du = dx$, $v = \sin x$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

2) Đặt $u = \text{arctg}x$, $xdx = dv$ thì $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} x\,\text{arctg}x dx = \frac{x^2}{2}\text{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) Có thể tính trực tiếp, đặt $u = \sin 3x$, $dv = e^{2x}dx$ hoặc áp dụng công thức (1.4: 23°, chương 4):

$$I = \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{13}(e^{2\pi} + 1)$$

4) Đặt $u = x^3$, $e^{2x}dx = dv$, $du = 3x^2dx$, $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

$$I = \int_0^{1} x^3 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}x^3\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3x^2 e^{2x}}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}I_1$$

Tương tự:

$$I_1 = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^{2x}}{2} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$$

Vậy $\qquad I = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{e^2}{4} - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{e^2 + 3}{8}$

105. Chứng minh các công thức:

1) $L_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$

2) $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right) \quad (n \in N).$

3) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n} x dx = (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$

4) $B_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$ (Hàm Beta)$(m, n \in N)$.

Bài giải

1) Đặt $u = \cos^n x$, $dv = \cos nx dx$ thì $du = -n\cos^{n-1} x \sin x dx$, $v = \dfrac{\sin nx}{n}$

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} \cos^n x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^{n-1} x \sin x . \frac{\sin nx}{n} dx$$

hay $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin nx \sin x dx$, cộng vào 2 vế L_n ta có:

$$2L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\sin nx \sin x + \cos nx \cos x)dx$$

hay $$2L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(n-1)x dx = L_{n-1}.$$

Vậy $L_n = \frac{1}{2}L_{n-1}$, áp dụng liên tiếp công thức này ta có:

$$L_n = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}L_{n-2} = \frac{1}{2^2} L_{n-2} = \ldots = \frac{1}{2^n}L_0$$

nhưng $L_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$

Vậy $L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

2) Đặt $u = \cos^n x$, $dv = \sin nx dx$ thì $du = -n\cos^{n-1} x \sin x dx$, $v = \frac{-\cos nx}{n}$.

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx = \left. \frac{-\cos^n x.\cos nx}{n} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nx}{n}.n\cos^{n-1} x \sin x dx.$$

hay $$K_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos nx \sin x dx$$

Cộng K_n vào hai vế, ta có:

$$2K_n = \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\sin nx \cos x - \cos nx \sin x)dx$$

hay $$2K_n = \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n-1)x dx = \frac{1}{n} + K_{n-1}$$

Do đó $$K_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + K_{n-1}\right), \tag{1}$$

Áp dụng liên tiếp công thức truy hồi (1) ta có:

$$K_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + K_{n-2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} - K_{n-3}\right)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2^2(n-2)} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}K_1\right]$$

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx = \left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Do đó $$K_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2^2(n-2)} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

Nhân tử và mẫu ở vế phải với 2^n ta có:

$$K_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n-1} + \frac{2^n}{n}\right)$$

3) $$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n-2} x(tg^2 x + 1 - 1)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n-2}x\,dtgx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n-2}x\,dx$$

$$I_n = \left.\frac{tg^{2n-1}x}{2n-1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}$$

Từ công thức này, suy ra:

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + I_{n-2} = \ldots$$

$$= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \ldots + \frac{(-1)^{2n-(n-1)}}{2n-(2n-1)} + (-1)^n I_0$$

Theo giả thiết: $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1dx = \frac{\pi}{4}$

Vậy $\quad I_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{1} + (-1)^n \frac{\pi}{4}$

hay $\quad I_n = (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^{n-3}}{2n-3} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$

4) Đặt $u = (1-x)^{n-1}$, $dv = x^{m-1}dx$

thì $du = -(n-1)(1-x)^{n-2}dx$, $v = \frac{x^m}{m}$

$$B(m, n) = \left.\frac{x^m(1-x)^{n-1}}{m}\right|_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx$$

$$= \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1) \text{ (số hạng đầu bằng không)}$$

Áp dụng công thức này liên tiếp, ta có:

$$B(m, n) = \frac{n-1}{m}.\frac{n-2}{m+1}.B(m+2, n-2)$$

$$= \frac{n-1}{m}.\frac{n-2}{m+1}...\frac{n-(n-1)}{m+n-2}B(m+n-1, 1)$$

Mặt khác: $B(m+n, 1) = \int_0^1 x^{m+n-2}(1-x)^{1-1}dx = \frac{1}{m+n-1}$

Do đó: $B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)...2.1}{m.m+1...(m+n-1)}.\frac{(m-1)!}{(m-1)!} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$

106. Dùng phương pháp đổi biến số, tính các tích phân:

1) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;   2) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

3) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$;   4) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

5) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, $(n = 0,1,2...)$;   6) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $(n = 0,1,2...)$

*7) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$;   *8) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

Bài giải

1) Đặt $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \le x < 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t.\cos t dt}{\sin^2 t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^2 t} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt$$

$$= -\cot g t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

2) Đặt $\sqrt{x^2-1}=t$ $\quad 1\le x\le 2 \Leftrightarrow 0\le t\le \sqrt{3}$

$$\frac{xdx}{t} = dt \Rightarrow dx = \frac{tdt}{x}$$

$$I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2dt}{1+t^2} = \int_0^{\sqrt{3}} dt - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= t\Big|_0^{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

3) $I = \displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

Đặt $\sqrt{e^x-1}=t$ $\quad 0\le x\le \ln 5 \Leftrightarrow 0\le t\le 2$

$$\frac{e^x dx}{2t} = dt \qquad dx = \frac{2tdt}{e^x}$$

$$e^x - 1 = t^2\ ;\ e^x = t^2+1; \qquad e^x + 3 = t^2 + 4$$

$$I = \int_0^2 \frac{t.2tdt}{t^2+4} = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt = 2\left(\int_0^2 dt - 4\int_0^2 \frac{dt}{t^2+4}\right)$$

$$= 2\left(2 - \frac{4}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Big|_0^2 = 4 - \pi$$

4) $\quad I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Đặt $x = \operatorname{tg}t$; $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$, $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Chú ý: Có thể áp dụng 28^0 (1.4) chương 4.

$$I = 2\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

5) $I = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, đặt $x = \sin t$, $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^n \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt.$$

Áp dụng công thức I_n ở (2.3) ta có: $I = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

6) $I = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

Đặt $x = \sin t$, $dx = \cos t dt \quad 0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t.\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \frac{(n-1)!!}{n!!}.\begin{cases} \frac{\pi}{2}: & n = 2m, m = 0, 1, 2\dots \\ 1: & n = 2m+1, m = 0, 1, 2\dots \end{cases}$$

(Theo 2.3).

7) $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ đặt $x = \pi - t$, $dx = -dt$

$$I = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)(-dt)}{1+\cos^2(\pi - t)} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t dt}{1+\cos^2 t}$$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t} - \int_0^\pi \frac{t \sin t dt}{1+\cos^2 t}$$

Do đó: $2I = -\pi \int_0^\pi \frac{d\cos t}{1+\cos^2 t} = -\pi \operatorname{artg}(\cos t)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$ vậy $I = \frac{\pi^2}{4}$

8) $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$; đặt $x = \operatorname{tg}t$, $dx = (1 + \operatorname{tg}^2 t)dt$,

$0 \le x \le 1, \Leftrightarrow 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\operatorname{tg}t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}(1+\operatorname{tg}^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg}t)dt$$

nhưng $1 + \operatorname{tg}t = \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\cos t}$

Do đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt$$

Đặt $t = \frac{\pi}{4} - \tau$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \ge \tau \ge 0$, $dt = -d\tau$

Khi đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin(\frac{\pi}{4}+t)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin(\frac{\pi}{2}-\tau)\right)d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\tau)d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)dt$$

Vậy $\quad I = \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}dt + \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)dt - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)dt = \frac{\pi}{8}\ln 2$

107. Chứng minh các công thức:

1) $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$ với f(x) liên tục trên [a, b].

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ với f(x) liên tục trên [0, 1].

3) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ với f(x) liên tục trên [0, 1].

4) $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ với f(x) tuần hoàn, liên tục $\forall x \in R$, chu kỳ T, $a \in R$.

*5) $\frac{\pi}{2} = \lim \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$ (Wallis).

Bài giải

1) Đặt $t = \frac{x-a}{b-a}$, $x = a + (b - a)t$, $dx = (b - a)dt$,

$$a \le x \le b \Leftrightarrow 0 \le t \le 1$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$$

2) Đặt $\frac{\pi}{2} - x = t, x = \frac{\pi}{2} - t, dx = -dt, 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \ge t \ge 0$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin(\frac{\pi}{2} - t)dt\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

3) $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$, đặt $x = \pi - t$, $dx = -dt$, $0 \le x \le \pi \Leftrightarrow \pi \ge t \ge 0$

$$I = \int_{\pi}^{0}(\pi - t)f[\sin(\pi - t)](-dt) = \int_{0}^{\pi}\pi f(\sin t)dt - \int_{0}^{\pi} tf(\sin t)dt = \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx - I$$

do đó: $I = \dfrac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin t)dt = \dfrac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$

4) $I = \int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{a+T} f(x)dx$

Xét $I_1 = \int_{T}^{a+T} f(x)dx$, đặt $x = T + t$, $dx = dt$, $T \le x \le a + T \Leftrightarrow 0 \le t \le a$.

$$I_1 = \int_{0}^{a} f(T+t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

vì $f(T + t) = f(t)$ do $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ T.

vậy $I = \int_{a}^{T} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$.

5) Với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x$

và $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$.

Áp dụng (2) ở (2.3), ta có:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

hay $\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2.\dfrac{1}{(2n+1)} < \dfrac{\pi}{2} < \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.\dfrac{1}{2n}$ (1)

Đặt $x_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{(2n+1)}$, $y_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{2n}$

thì $0 < y_n - x_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2 \left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{2n(2n+1)} <$

$< \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{2n}$ (theo (1)).

vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{4n} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$

mặt khác cũng theo (1):

$0 < \dfrac{\pi}{2} - x_n < y_n - x_n$, theo chứng minh trên:

$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0,$

do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$

hay $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2.2.4.4...2n.2n}{1.3.3.5...(2n-1)(2n+1)}$

108. Tính các tích phân:

1) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$ 2) $\int\limits_{0}^{3} \text{sign}(x - x^3) dx$ *3) $\int\limits_{0}^{\pi} x\,\text{sign}(\cos x) dx$

*4) $\int\limits_{0}^{6} E(x) \sin \dfrac{\pi x}{6} dx$ (E(x): phần nguyên của x, E(x) ≤ x).

Bài giải

1) $I = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} -\ln x dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x dx$

$$= (-x\ln x + x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_{1}^{e} = 2(1 - \frac{1}{e}).$$

2) Ta có: $\operatorname{sign}(x - x^3) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } 0 < x < 1 \\ -1 \text{ nếu } 1 < x \le 3 \\ 0 \text{ nếu } x = 0, x = 1 \end{cases}$

Do đó $I = \int_0^3 \operatorname{sign}(x - x^3)dx = \int_0^1 dx - \int_1^3 dx = 1 - 2 = -1$.

3) Ta có: $\operatorname{sign}(\cos x) = \begin{cases} 1 \;\text{ nếu } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ -1 \;\text{ nếu } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \\ 0 \;\text{ nếu } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Do đó: $I = \int_0^{\pi} x\operatorname{sign}(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xdx = -\frac{\pi^2}{4}$

4) $f(x) = E(x)\sin\frac{\pi x}{6}$ có gián đoạn loại 1 tại $x_k = k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ trong $[0, 6]$.

Vì $E(x) = k$ khi $x \in [k, k + 1]$ nên $f(x)$ khả tích trên $[0, 6]$ và:

$$I = \sum_{k=1}^{5} k \int_{k}^{k+1} \sin\frac{\pi x}{6}dx = \sum_{k=1}^{5} \frac{6k}{\pi} \cos\frac{\pi x}{6}\Big|_{k+1}^{k} = \frac{39}{\pi}.$$

§3 ÁP DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

3.1. Tính diện tích phẳng

- Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi các đường liên tục $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ và trục Ox (H.43).

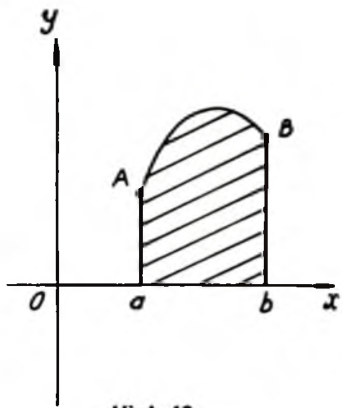
$$S = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (1)$$

- Nếu hình giới hạn bởi $a \le x \le b$, $y_1 \le y \le y_2$ thì:

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)dx \qquad (2)$$

- Nếu đường $y = f(x)$ cho dưới dạng tham số: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ ứng với $a \le x \le b$ thì:

$$S = \int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|dt \qquad (3)$$



Hình 43.

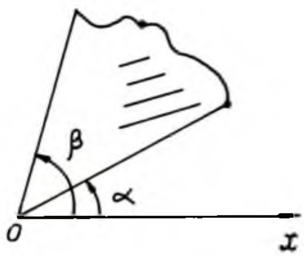
- Nếu đường $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \le t \le T$ là đường kín liên tục, chạy ngược chiều kim đồng hồ và giới hạn diện tích S và phía trái thì:

$$S = -\int_0^T y(t)x'(t)dt = \int_0^T x(t).y'(t)dt$$

hay $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T [x(t)y'(t) - x'(t)\,y(t)]dt \qquad (4)$

- Trong toạ độ độc cực, diện tích S của hình giới hạn bởi các tia: $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ và đường $r = r(\varphi)$ là:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi \quad \text{(H.44)} \quad (5)$$



Hình 44.

3.2. Tính độ dài đường cong

Độ dài s của cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$: $y = y(x)$, $y'(x)$ liên tục, $a \le x \le b$:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx \qquad (1)$$

- Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ ứng với $a \le x \le b$ thì:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \qquad (2)$$

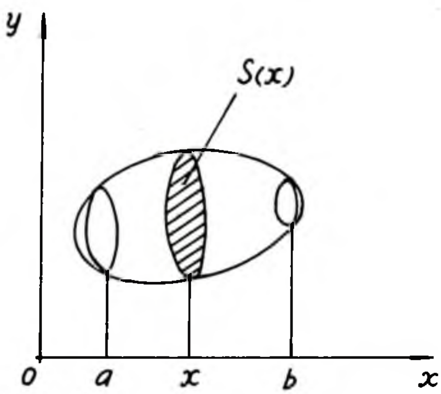
Trong toạ độ dộc cực độ dài của AB: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r_{\varphi}'^2}\,d\varphi \qquad (3)$$

3.3. Tính thể tích

- Thể tích V của vật thể T mà thiết diện thẳng góc với Ox có diện tích S(x) là một hàm liên tục của x: $a \le x \le b$ (H45) là:

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (1)$$



Hình 45.

Thể tích V của vật thể tròn xoay T do hình giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, $f(x)$ là hàm liên tục $\forall x \in [a, b]$.

quay quanh Ox tạo nên là: $V = \pi\int_a^b y^2(x)dx \qquad (2)$

quay quanh Oy tạo nên là: $V = 2\pi\int_a^b xy(x)dx \qquad (3)$

Do hình: $c \le y \le d$, $0 \le x \le x(y)$, $x(y)$ là hàm liên tục $\forall x \in [c, d]$.

quay quanh Oy tạo nên là:

$$V = \pi\int_c^{d} x^2(y)dy \qquad (4)$$

Do hình $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$, $r = r(\varphi)$, $r(\varphi)$ là hàm liên tục $\forall\varphi \in [\alpha, \beta]$.

quay quanh trục độc cực Ox tạo nên là:

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi \qquad (5)$$

3.4. Tính diện tích mặt tròn xoay

Diện tích của mặt tròn xoay do cung $\overset{\frown}{AB}$: $y = f(x)$, $f'(x)$ liên tục

$a \le x \le b$ quay quanh Ox tạo nên (H.46):

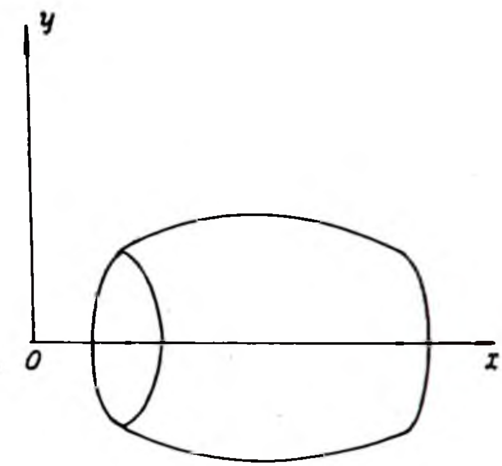
$$\sigma = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2_x}\,dx \qquad (1)$$

Nếu do cung $\overset{\frown}{AB}$: $x = x(y)$, $c \le y \le d$ quay quanh 0y thì:

$$\sigma = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1 + x'^2_y}\,dy \qquad (2)$$

Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$



Hình 46.

$\alpha \le t \le \beta$ ứng với $a \le x \le b$ và quayquanh 0x thì:

$$\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\,dt \qquad (3)$$

quay quanh Oy thì:

$$\sigma = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \tag{4}$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho theo phương trình độc cực $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ quay quanh trục 0x thì:

$$\sigma = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2 + r_\varphi'^2}\,d\varphi \tag{5}$$

BÀI TẬP

109. Tính diện tích của hình giới hạn bởi các đường:

1) $x + y = 0$, $y = 2x - x^2$.

2) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = 2x$.

3) $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 8$, $(x \ge 0)$

4) $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 = 12(y - 1)$, $(y \ge 1)$

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 2a$.

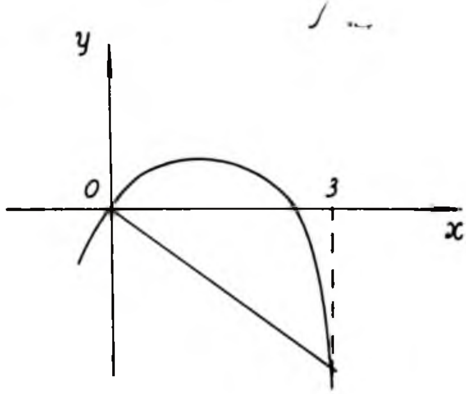
Bài giải

1) Hai đường cắt nhau tại $x = 0$ và $x = 3$ (H47). Do đó theo (1) ở (3.1):

$$S = \int_0^3 \left[2x - x^2 - (-x)\right]dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = 4\frac{1}{2} \text{ (dvdt)}$$



Hình 47.

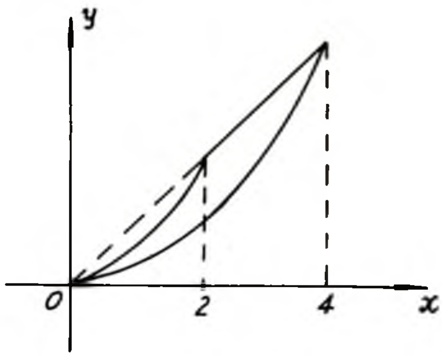
2) Các đường cắt nhau tại x = 0, x = 2, x = 4 (H48), do đó, theo (1) ở (1.4).

$$S = \int_0^2 (x^2 - \frac{x^2}{2})dx +$$

$$+ \int_2^4 (2x - x^2)dx =$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^4 = 4$$

(đ.v.d.t).



Hình 48.

3) Hai đường cắt nhau tại x = 2 (H.49).

S = 2 (Diện tích $\frac{1}{4}$ hình tròn - S_1)

$$S_1 = \int_0^2 (\sqrt{8 - x^2} - \sqrt{2x})dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{8 - x^2} + \frac{8}{2}\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^2$$

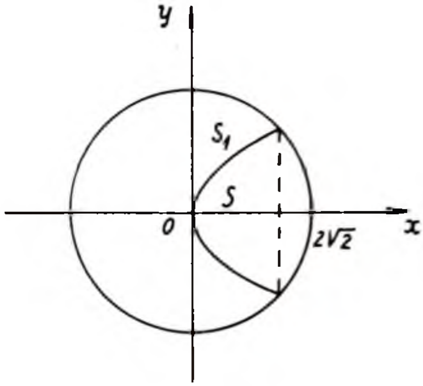
$$= \pi - \frac{2}{3}$$

(Theo 2^0 (1-4) C.4).

Vậy:

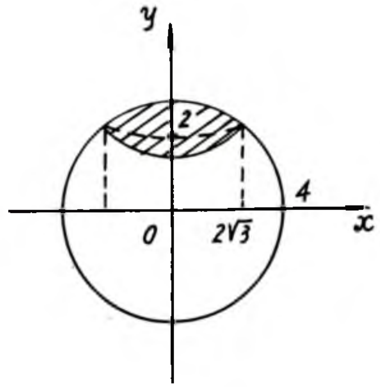
$$S = 2\left[\frac{(2\sqrt{2})^2.\pi}{4} - (\pi - \frac{2}{3})\right]$$

$$= 2\pi + \frac{4}{3} \text{ (đvdt).}$$

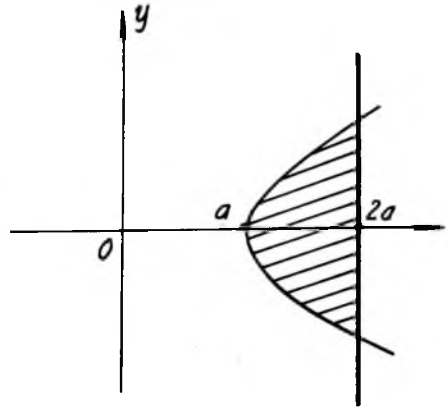


Hình 49.

4) Hai đường cắt nhau tại $x = \pm 2\sqrt{3}$ (y = 2).



Hình 50.



Hình 51.

Theo H50, ta có:

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{3}}\left[\sqrt{16-x^2} - \left(\frac{x^2}{12}+1\right)\right]dx$$

$$= 2\left[\left(\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2}\arcsin\frac{x}{4} - \frac{x^3}{36} - x\right)\right]_0^{2\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{(đvdt)}$$

(Theo (1.4; 20°) chương 4)

5) Theo H.51, ta có:

$$S = 2\int_a^{2a}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right)\Bigg|_a^{2a}$$

$$= ab\left(2\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})\right) \quad \text{(đvdt)}$$

110. Tính diện tích S của các hình giới hạn bởi các đường cho theo phương trình tham số và độc cực:

1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) & 0 \le t \le 2\pi \\ y = a(1 - \cos t) & y \ge 0 \end{cases}$ (cycloide)

2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$ (astroide)

3) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ (cardioide)

4) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (cardioide)

5) $r = a\cos 2\varphi$ (hoa hồng 4 cánh)

6) $r = a\sin 3\varphi$ (hoa hồng 3 cánh)

7) $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$, $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ (parabole)

8) $r = a\cos\varphi$, $r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right) \in$ hình

9) $r = 2a\cos 3\varphi$, $r = a$ (phần ngoài dường tròn)

*10) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases}$ (lá Descarte)

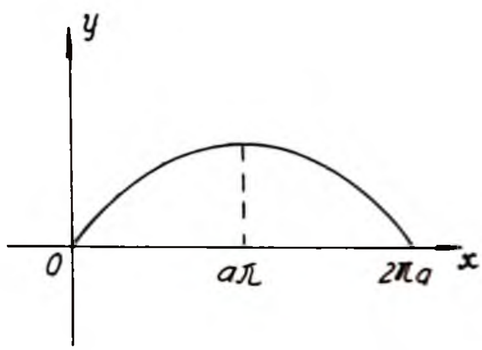
*11) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$

Bài giải

Ta có $0 \le t \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le x \le 2a\pi$

Theo (3), (3.1), H.52 và do đối xứng ta có:

$$S = 2\int_0^{\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt$$



Hình 52.

$$= 2a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)^2dt$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}4\sin^4\frac{t}{2}dt = 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}dt$$

Đặt $\frac{t}{2} = u$ thì $0 \le t \le \pi \Leftrightarrow 0 \le u \le \frac{\pi}{2}$, $dt = 2du$

$$S = 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,du = 16a^2.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2 \text{ (dvdt)}$$

(Theo (2), (2.3)).

2) Ta có $0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a \ge x \ge 0$ (H.53)

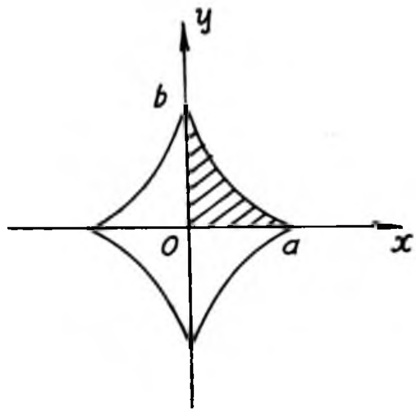
Tương tự 1):

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)dt$$

$$= 12ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t - \sin^6 t)dt$$

$$= 12ab\left(\frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2} - \frac{5.3.1}{6.4.2}.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8}\pi ab \text{ (dvdt)}$$



H53.

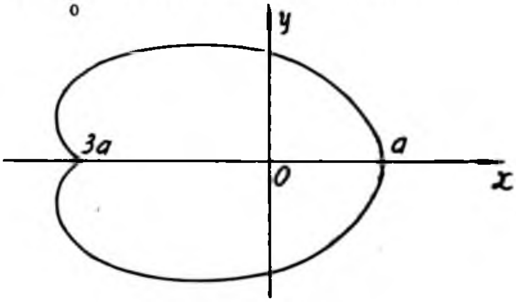
3) Theo (4), (3.1) và H.54:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - x'y)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(2\cos t - \cos 2t)a(2\cos t - 2\cos 2t) -$$

$$-a(-2\sin t + 2\sin 2t)a(2\sin t - \sin 2t)]dt$$

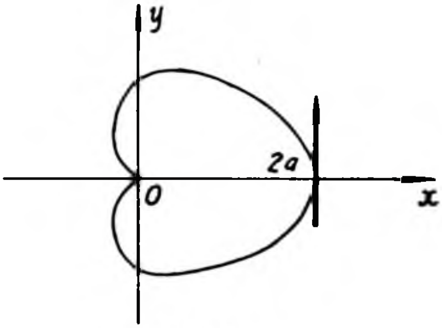
hay $$S = 3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt = 6a^2\pi \quad \text{(dvdt)}$$



Hình 54.

4) $r = a(1 + \cos\varphi)$

Theo (5), (3.1) và vì đối xứng (H.55)



Hình 55.

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi\right) = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi\right)$$

$$= a^2\int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

Đặt $\dfrac{\varphi}{2} = u$, $0 \le \varphi \le \pi \Leftrightarrow 0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}$, $d\varphi = 2du$ thì:

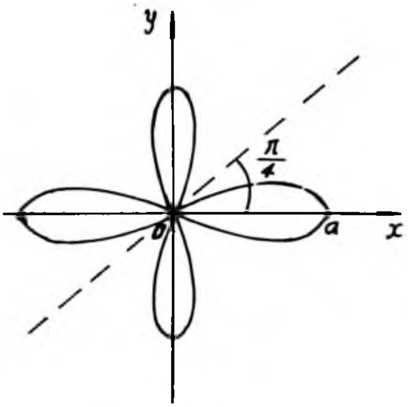
$$S = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u du = 8a^2\left(\frac{1.3}{2.4}.\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3a^2\pi}{2} \quad \text{(dvdt)}$$

5) Theo H.56 và do đối xứng:

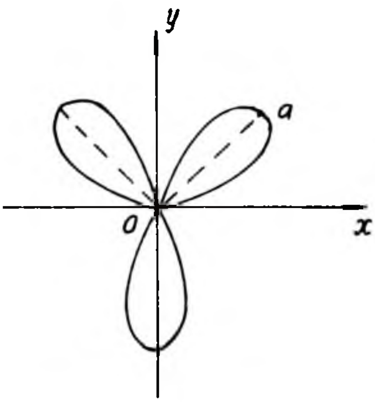
$$S = 8\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\varphi d\varphi$$

Đặt $2\varphi = t$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, $d\varphi = \dfrac{dt}{2}$

$$S = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2a^2\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{2} \quad \text{(dvdt).}$$



Hình 56.



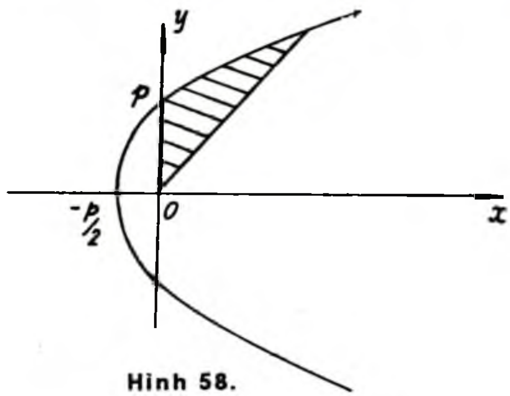
Hình 57.

6) Theo H.57 và đối xứng:

$$S = 6\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\sin^2 3\varphi d\varphi$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi = \frac{3}{2}a^2\left(\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4} \quad \text{(dvdt).}$$

7) Theo H.58



Hình 58.

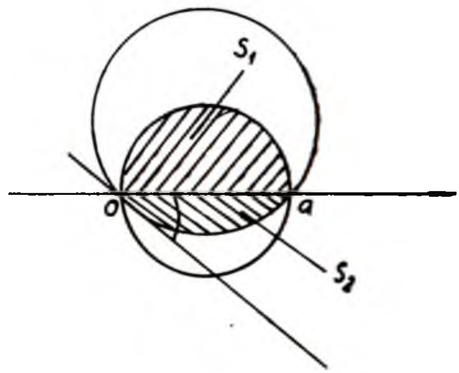
$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} p^2\frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cot g^2\frac{\varphi}{2})d(\cot g\frac{\varphi}{2})$$

$$= \frac{p^2}{4}(\cot g\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\cot g^3\frac{\varphi}{2})\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{p^2}{6}(4\sqrt{2}+3) \ \text{(dvdt)}$$

$$\left(\cot g\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 1+\sqrt{2}\right)$$

8) Hai đường cắt nhau tại:

$(-\frac{\pi}{4}, 0)$ và $(0, a)$



Theo H.59:

$S = S_1 + S_2$

Hình 59.

S_1 là diện tích nửa hình tròn bán kính $\frac{a}{2}$:

$$S_1 = \frac{\pi a^2}{8}$$

$$S_2 = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(\sin\varphi + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1 + \sin 2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

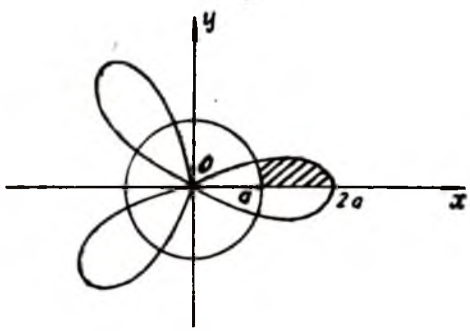
Vậy $S = S_1 + S_2 = \frac{a^2}{4}(\pi - 1)$ (đvdt).

9) Xét $2\cos 3\varphi = a$

$$\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{9} \quad \text{khi } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$$

Vậy hai đường cắt nhau tại $(\frac{\pi}{9}, a)$



Hình 60.

Theo H.60 và do đối xứng nên:

$$S = 6.\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{9}}(4a^2\cos^2 3\varphi - a^2)d\varphi\right)$$

$$= 6\left(2a^2\int_0^{\frac{\pi}{9}}\frac{(1+\cos 6\varphi)}{2}d\varphi - \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{9}}d\varphi\right)$$

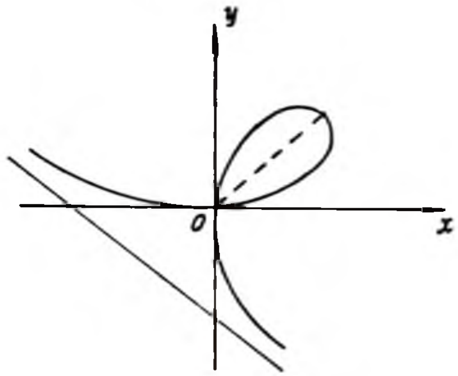
$$= 6\left(a^2(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6})\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} - (\frac{a^2}{2}\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{9}}\right) = a^2(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{(dvdt)}$$

10) Đưa về phương trình $F(x,y) = 0$ bằng cách đặt $y = tx$ thì $t = \frac{y}{x}$.

Thay vào phương trình tham số ta có:

$x^3 + y^3 = 3axy$ (1)

(Lá Desear tes 5) bài 75) H.61.



Hình 61.

Lại đưa (1) về toạ độ dộc cực:

$x = r\cos\varphi$,

$y = r\sin\varphi$

thì $r = \dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$

dường cong khép kín khi $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Do đó:

$$S = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2\varphi d(tg\varphi)}{(1+tg^3\varphi)^2}$$

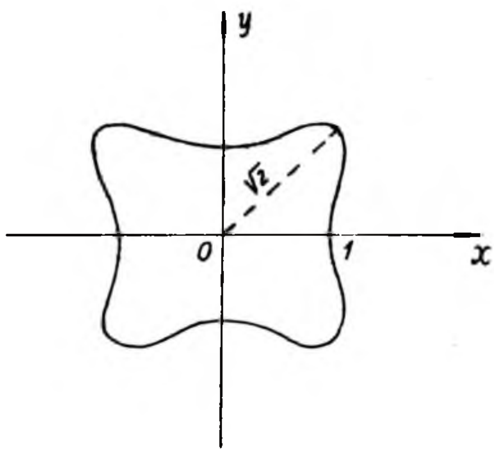
$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(tg^3\varphi)}{(1+tg^3\varphi)^2} = \frac{3a^2}{2}\left(\frac{1}{1+tg^3\varphi}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{3a^2}{2} \quad (dvdt)$$

11) Đưa phương trình đường cong về toạ độ độc cực:

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ thì $r^2 = \dfrac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$ (H.62)

Do đối xứng nên:

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+tg^2\varphi)d(tg\varphi)}{1+tg^4\varphi}$$



Hình 62.

Xét:

$$\int \frac{1+tg^2\varphi}{1+tg^4\varphi}dtg\varphi = \int \frac{1+t^2}{1+t^4}dt, t = tg\varphi$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt = \int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} = \int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{\sqrt{2}.t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg^2\varphi-1}{\sqrt{2}tg\varphi}\right)$$

Vậy $\quad S = \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg^2\varphi-1}{\sqrt{2}tg\varphi}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}.\pi = \pi\sqrt{2}$ (dvdt).

111. Tính độ dài s của các cung đường cong:

1) $y = a\,ch\frac{x}{a}$, $0 \le x \le b$;

2) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \le y \le e$;

3) $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le a < \frac{\pi}{2}$;

4) $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}, 0 \le x \le \frac{5}{3}a$.

5) $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

6) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$.

7) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

8) $x = a\sin t$, $y = b\cos t$.

9) $r = a(1 + \cos\varphi)$

*10) $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

*11) $\varphi = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $1 \le r \le 3$

*12) $r = a\sin^3 \frac{\varphi}{3}$

Bài giải

1) Theo (1), (3.2)

$$s = \int_0^b \sqrt{1+y'^2_x}\,dx = \int_0^b \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 \frac{x}{a}}\,dx$$

$$= \int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{a}dx = a.\mathrm{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b = a.\mathrm{sh}\frac{b}{a} = a.\frac{e^{\frac{b}{a}} - e^{\frac{-b}{a}}}{2} \quad \text{(đvd)}$$

2) Đổi vai trò của x và y trong (1), (3.2):

ta có $s = \int_1^e \sqrt{1+x'^2_y}\,dy = \int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(y-\frac{1}{y}\right)^2}\,dy$

$$= \frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{1}{y}+y\right)dy = \frac{1}{2}\left(\ln y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{4}(1 + e^2) \quad \text{(đvdt)}$$

3) Tương tự như 1):

$$s = \int_0^a \sqrt{1+y'^2_x}\,dx = \int_0^a \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}\,dx = \int_0^a \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^a$$

$$= \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \quad \text{(đvd). (Theo } 25^0 \text{ ở 1.4.C.4).}$$

4) Theo 6) bài 75, dường cong gồm 2 nhánh đối xứng nhau qua Ox (H63), do đó:

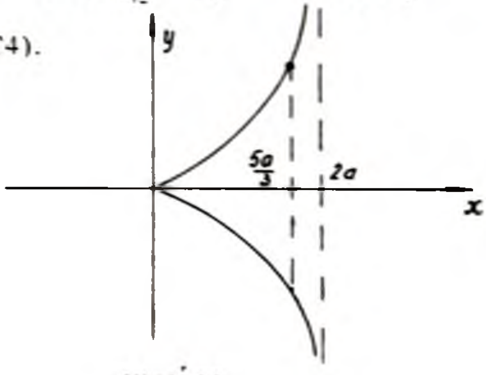
$$s = 2\int_0^{\frac{5}{3}a}\sqrt{1+y_x'^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{5}{3}a}\sqrt{1+\frac{x(3a-x)^2}{(2a-x)^3}}\,dx$$

Đặt $t^2(2a - x) = 8a - 3x$ với $2 \le t \le 3$ và biến đổi ta được:

$$s = 4a\int_2^3\frac{t^2dt}{t^2-3} = 4a\int_2^3 dt + 3\int_2^3\frac{dt}{t^2-3}$$

$$= 4a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right)\Bigg|_2^3 = 4a\left(1+\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) \text{ (dvd).}$$

(theo 19°, (1.4), C4).



Hình 63.

5) Ta phải tính độ dài của 1 nhịp của Cycloide

Theo (2), (3.2) và do đối xứng đối với đường thẳng $x = a\pi$:

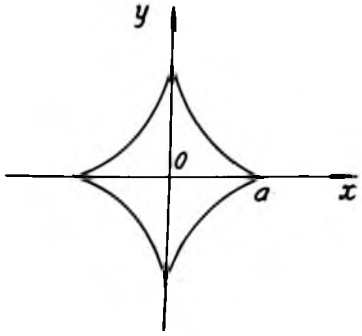
$$s = 2\int_0^{\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt = 2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a.2\cos\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{0}$$

$= 8a$ (dvd).

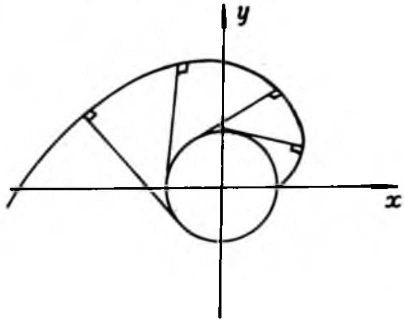
6) Đường cong là đường astroide đối xứng đối với các trục toạ độ (2) bài 75), (H64). Do đó:

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = 6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \quad \text{(đvdt)}$$



Hình 64.



Hình 65.

7) Đường cong là đường thân khai của đường tròn (H65):

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2t^2}dt = a\int_0^{\pi} tdt = a\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2 a}{2} \quad \text{(đvd)}$$

8) Phương trình tham số của ellipse đã cho:

$$x = a\sin t,\ y = b\cos t$$

Do đối xứng nên:

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2\sin^2 t + a^2(1 - \sin^2 t)}dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2 t}dt$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\sin^2 t}dt \quad (1)$$

$e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ là tâm sai của ellipse.

Tích phân (1) gọi là một tích phân ellipteque loại 2 chỉ có thể tính gần đúng.

9) Đường cardioide, đối xứng đối với trục Ox (4) bài 17). Theo (3), (3.2), ta có:

$$s = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2 + r_{\varphi}'^2}\,d\varphi$$

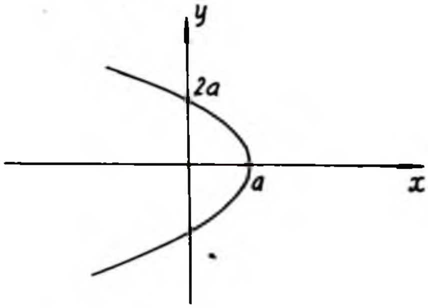
$$r^2 + r'^2 = a^2(1 + \cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2$$

$$= 2a^2(1 + \cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

Do đó:

$$s = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a.2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a \quad (\text{đvd})$$

10) $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2} = \dfrac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{2a}{1+\cos\varphi}$: đường parabole (H.66), (xem 7), bài 17).



Hình 66.

Ở đây $r^2 + r'^2 = \dfrac{4a^2}{(1+\cos\varphi)^2} + \dfrac{4a^2\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^4}$

$$= \frac{8a^2}{(1+\cos\varphi)^3} = \frac{a^2}{\cos^6\frac{\varphi}{2}}$$

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} = 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}\ ,t = \frac{\varphi}{2}$$

Áp dụng 4) bài 5 chương 4:

$$\int \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{1}{2}\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos t} = \frac{1}{2}.\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{2}\ln tg(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$$

Vậy $$s = 4a.\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \ln\left|tg(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right|\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a(\sqrt{2} + \ln\left|tg\frac{3\pi}{8}\right|\Bigg)$$

$$= 2a\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right) \qquad \text{(đvd)}$$

$$\left(tg\frac{3\pi}{8} = tg(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8})\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{8}}{1 - tg\frac{\pi}{4}.tg\frac{\pi}{8}}\ ,\ tg\frac{\pi}{4} = 1$$

$$tg\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1 + \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow tg\frac{3\pi}{8} = \frac{1 + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \sqrt{2}$$

11) Trong (3), (3.2) ta đổi biến φ thành r, ta có:

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2 + \frac{1}{\varphi_r'^2}}.\varphi_r'.dr = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(r\varphi_r')^2 + 1}dr$$

ở đây: $$(r\varphi_r')^2 + 1 = \frac{r^2}{4}(1 - \frac{1}{r^2})^2 = (\frac{r}{2} + \frac{1}{2r})^2$$

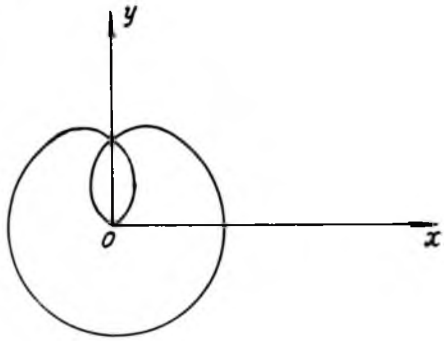
vậy: $$s = \int_1^3 \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)dr = (\frac{r^2}{4} + \frac{1}{2}\ln r)\Big|_1^3 = 2 + \frac{1}{2}\ln 3 \qquad \text{(đvd)}$$

12) Khi $0 \leq \varphi \leq 3\pi$, điểm (φ, r) vẽ toàn bộ đường cong (H.67).

Vậy: $$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + r_\varphi'^2}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}}\,d\varphi$$

$$= a\int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = 3a\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{3\pi a}{2}, \quad (t = \frac{\varphi}{3}) \quad \text{(dvd)}$$



Hình 67.

112. Tính thể tích của hình giới hạn bởi các mặt (các tham số đều dương).

1) $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$, $x = a$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \frac{c}{a}x$, $z = 0$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z = 0$, $z = h$

*4) $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$

5) $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = a$

Bài giải

1) $\dfrac{y^2}{2p}+\dfrac{z^2}{2q}=x$ là mặt paraboloide elliptique, trục Ox, (H.68).

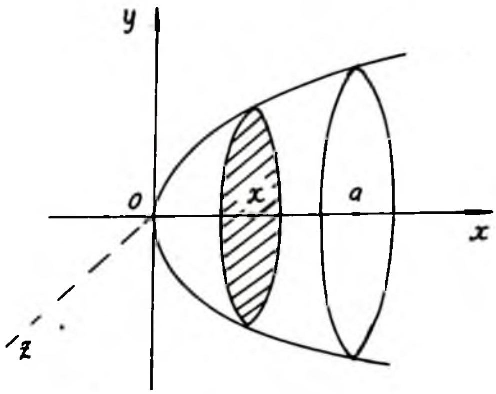
Ở đây S(x) là hình ellipse:

$$\frac{y^2}{2px}+\frac{z^2}{2qx}=1$$

Vậy:

$$S(x) = \pi\sqrt{2px}.\sqrt{2qx}$$

$$= 2\pi\sqrt{pq}\cdot x$$



Hình 68.

Theo (1), (3.3), ta có thể tích phải tìm là:

$$V = \int_0^a S(x)dx = \int_0^a 2\pi\sqrt{pq}xdx = a^2\pi\sqrt{pq} \quad \text{(đvtt)}$$

2) Hình phải tìm thể tích giới hạn bởi mặt trụ ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

mặt phẳng $z = \dfrac{c}{a}x$ và mặt phẳng xOy: z = 0

Theo H.69:

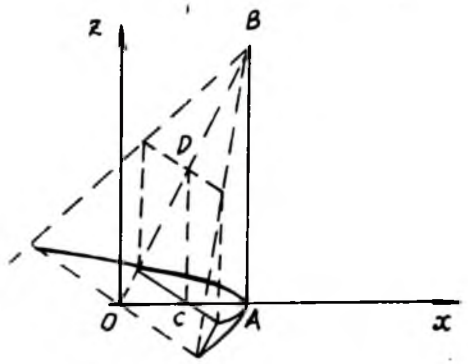
$$\frac{AB}{CD}=\frac{OA}{OC} \Rightarrow CD=\frac{AB.OC}{OA}=\frac{c}{a}x$$

Diện tích S(x) của thiết diện (hình chữ nhật) vuông góc với Ox tại X = x sẽ là:

$$S(x) = 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.\frac{c}{a}x=\frac{2bcx}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Vậy:

$$V = \frac{2bc}{a}\int_0^a x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = \frac{2bca}{3}(1-\frac{x^2}{a^2})^{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^0 = \frac{2}{3}abc \text{ (đvtt)}$$



Hình 69.

3) Hình phải tính thể tích giới hạn bởi mặt hyperboloide 1 tầng:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

và hai mặt phẳng z = 0 và z = h (H.70).

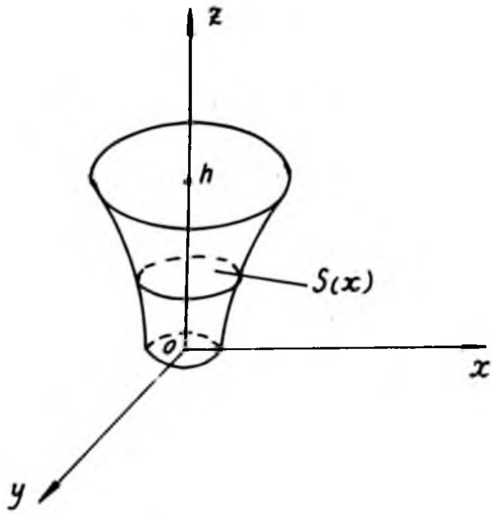
Diện tích S(z) của thiết diện bất kỳ Z = z thẳng góc với Oz là diện tích của ellipse:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

$$S(z) = \pi ab(1+\frac{z^2}{c^2})$$

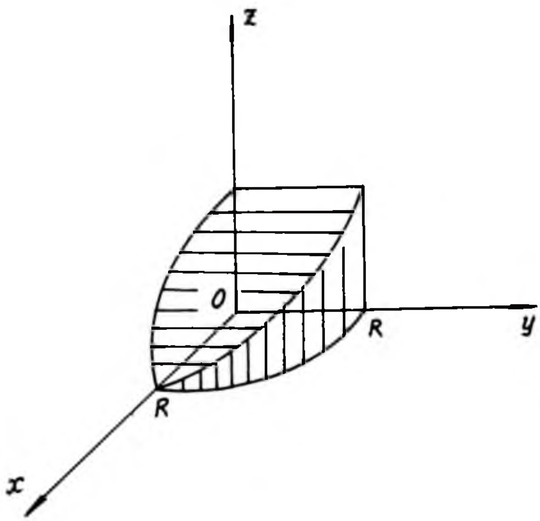
Vậy $$V = \int_0^h S(z)dz = \pi ab\int_0^h (1+\frac{z^2}{c^2})dz$$

$$= \pi ab\left(z+\frac{z^3}{3c^2}\right)\Bigg|_0^h = \pi ab\left(h+\frac{h^3}{3c^2}\right) \qquad \text{(đvtt)}$$



Hình 70.

4) Hình giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = R^2$, đường sinh song song với Oz và mặt trụ $x^2 + z^2 = R^2$ đường sinh song song với Oy (H.71).



Hình 71.

Trong góc phần tám thứ nhất, diện tích của thiết diện thẳng góc với Ox (X = x) là:

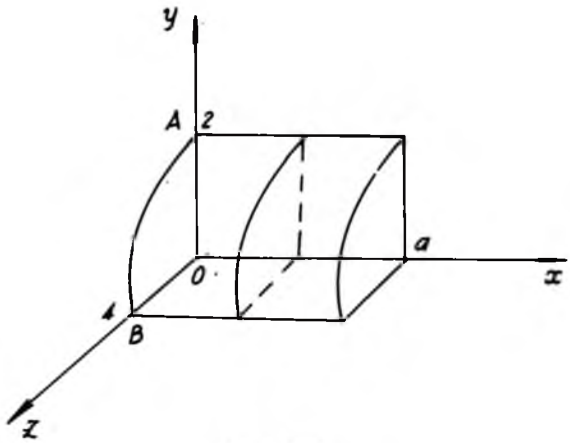
$$S(x) = y.z = \sqrt{R^2 - x^2}.\sqrt{R^2 - x^2} = R^2 - x^2$$

Do đối xứng:

$$V = 8\int_0^R S(x)dx = 8\int_0^R (R^2 - x^2)dx$$

$$= 8\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{16R^2}{3} \quad \text{(dvtt)}$$

5) Hình đã cho giới hạn bởi các mặt phẳng toạ độ, mặt phẳng x = a và mặt trụ parabole đường sinh song song với Ox (H.72).



Hình 72.

Diện tích của thiết diện thẳng góc với Ox, S(x) bằng diện tích hình thang cong OAB, do đó:

$$S(x) = \int_0^2 (4 - y^2)dy = \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} \quad \text{(dvtt)}$$

và $$V = \int_0^a S(x)dx = \int_0^a \frac{16}{3}dx = \frac{16}{3}a \quad \text{(dvtt)}$$

113. Tính thể tích hình tròn xoay tạo bởi các đường:

1) $y = ax - x^2$ $(a > 0)$, $y = 0$ quay quanh: a) Ox; b) Oy.

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh Ox.

*3) $y^2 = 2px$, $x = \dfrac{p}{2}$, quay quanh: a) Oy, b) đường thẳng $y = -p$.

4) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$; $0 < a \leq b$ quay quanh Ox.

5) $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ quay quanh: a) Ox, b) Oy.

*6) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$, $y = 0$ quay quanh: a) Ox, b) Oy, c) $y = 2a$.

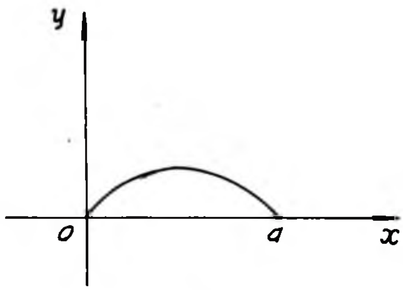
*7) $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ quay quanh trục cực.

8) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$ quay quanh Ox.

Bài giải

1) a) Theo (3.3, (2)), ta có: (H73):

$$V = \int_0^a \pi(ax - x^2)^2 dx = \frac{\pi a^5}{30} \text{ (dvtt)}.$$



Hình 73.

b) Theo (2'), (3.3):

$$V = 2\pi\int_0^a x(ax - x^2)dx = 2\pi\int_0^a (ax^2 - x^3)dx = 2\pi\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^4}{6} \text{ (dvtt)}$$

2) Tương tự như 1)

$$V = \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$= 2\pi b^2\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4\pi ab^2}{3} \text{ (dvtt)}.$$

3) a) Theo (4), (3.3) và H74 ta có:

$$V = \pi \int_{-p}^{p} x^2(y)dy = \pi \int_{-p}^{p} \frac{y^4}{4p^2}dy = \frac{\pi}{2p^2}\int_0^p y^4 dy = \frac{\pi}{2p^2}\left(\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^p = \frac{\pi p^3}{10} \text{ (dvtt)}$$

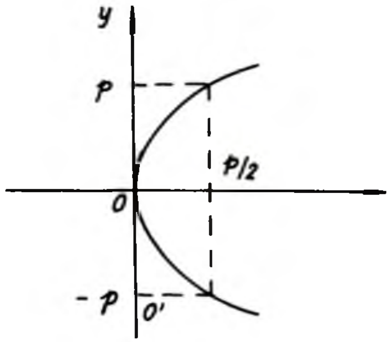
b) Tịnh tiến gốc O về O' (0, - p): $x = X$

$y = Y - p$ phương trình của parabole là:

$$(Y - p)^2 = 2pX,$$

giải ra đối với Y ta có:

$$Y = p \pm \sqrt{2pX}$$



Hình 74.

ứng với 2 nhánh trên và dưới trục Ox, do đó:

$$V = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left[\left(p + \sqrt{2pX}\right)^2 - \left(p - \sqrt{2pX}\right)^2\right] dX$$

hay $$V = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} 4p\sqrt{2pX}dX = \pi.4p\sqrt{2p}\left(\frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{4}{3}\pi p^3 \text{ (dvtt)}$$

4) Từ phương trình đã cho ta có các phương trình:

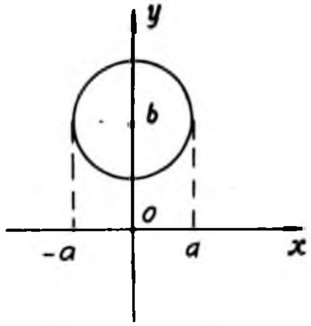
$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

ứng với nửa trên và nửa dưới của đường tròn, do đó và theo H.75, ta có:

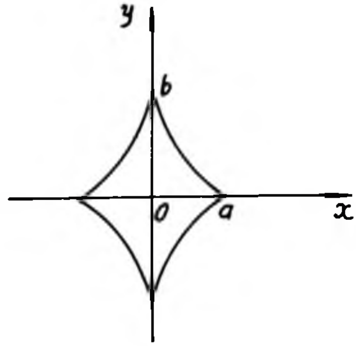
$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - x^2}dx = 8b\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

$$= 8\pi b\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi^2 a^2 b \quad \text{(đvtt)}$$



Hình 75.



Hình 76.

5) a) Theo H.76 do đối xứng:

$$V = 2\pi\int_0^a y^2 dx$$

vì khi $0 \le x \le a \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \ge t \ge 0$ nên sang biến t ta có:

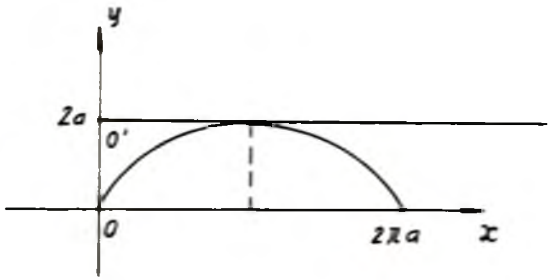
$$V = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2\sin^6 t(-3a\cos^2 t\sin t)dt = 6\pi b^2 a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t - \sin^9 t)dt$$

$$= 6\pi ab^2(I_7 - I_9) = 6\pi ab^2\left(\frac{6.4.2}{7.5.3} - \frac{8.6.4.2}{9.7.5.3}\right) = \frac{32\pi ab^2}{105} \quad \text{(đvtt)}$$

b) Tương tự như a) ta có:

$$V = 2\pi\int_0^b x^2(y)dy = \frac{32\pi a^2 b}{105} \qquad \text{(đvtt)}$$

6) a) Tương tự như 5): (H.77)



Hình 77.

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = 2\pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2 \frac{t}{2}\right)^3 dt$$

$$= 16\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt = 32\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 u du, \left(u = \frac{t}{2}\right)$$

$$= 32\pi a^3 I_6 = 32\pi a^3 \left(\frac{5.3.1}{6.4.2}.\frac{\pi}{2}\right) = 5\pi^2 a^3 \text{ (dvtt)}$$

b) Theo (3), (3.3):

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy(x)dx = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}t - 2t\cos t + \frac{t}{2}\cos 2t - \frac{3}{2}\sin t + \sin 2t - \frac{\sin t \cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= 2\pi . a^3 . \frac{3}{2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 6\pi^2 a^3 \quad \text{(dvtt)}.$$

c) Để giải bài toán, đầu tiên tịnh tiến gốc O về điểm O' (0, 2a): x = X

$y = Y + 2a$, khi đó phương trình của cycloide là:

$$X = a(t - \sin t), \quad Y = a(1 - \cos t) - 2a$$

Theo H.77, thể tích phải tìm là: $V = V_1 - V_2$

V_1 là thể tích hình trụ tròn bán kính $2a$ và chiều cao là $2\pi a$:

$$V_1 = (2a)^2.\pi.2\pi a = 8\pi^2a^3$$

$$V_2 = \pi\int_0^{2\pi a} Y^2 dX \text{ ; sang biến t.}$$

$$V_2 = \pi\int_0^{2\pi}\left(a(1-\cos t)-2a\right)^2 a(1-\cos t)dt$$

Tính toán ta có: $V_2 = \pi^2a^2$

Vậy $V = 8\pi^2a^2 - \pi^2a^2 = 7\pi^2a^2$ (đvtt).

7) Theo 4) bài 77 và (3.3, (5)), ta có:

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3\sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3}a^3\int_{\pi}^{0}(1+\cos\varphi)^3 d(1+\cos\varphi) = \frac{2\pi}{3}a^3\left.\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\right|_{\pi}^{0} = \frac{8}{3}\pi a^3 \text{ (đvtt)}$$

8) Chuyển sang toạ độ độc cực: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ta có phương trình: $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (lemniscate, 6) bài 77).

Theo (5), (3.3), do đối xứng, ta có:

$$V = \frac{4}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}} d\cos\varphi$$

Đặt $\sqrt{2}\cos\varphi = t$, ta có:

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt \text{, và tính toán ta được:}$$

$$V = \frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\right] \quad \text{(dvtt)}.$$

114. Tính diện tích σ của mặt tròn xoay tạo nên do các đường sau:

1) $9y^2 = x(3-x)^2$, $0 \le x \le 3$ quay quanh Ox.

*2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ quay quanh: a) Oy; b) $y = x$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh: a) Ox; b) Oy $(a > b)$

4) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $(a < b)$ quay quanh Ox

*5) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, quay quanh: a) Ox; b) Oy ; c) đường $y = 2a$.

*6) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ quay quanh: a) trục độc cực; b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

7) $r = a(1 + \cos\varphi)$ quay quanh trục độc cực.

Bài giải

1) Đường cong có hai nhánh đối xứng nhau qua Ox, (H.78)

$$y = \pm \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$$

nên chỉ xét nhánh: $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$.

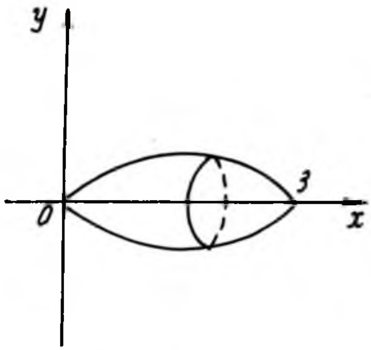
Theo (1), (3.4):

$$\sigma = 2\pi\int_0^3 y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}.\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = 3\pi \quad \text{(dvdt)}$$

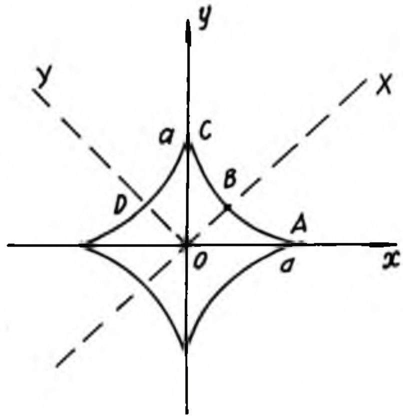
2) a) Đưa về tham số, phương trình của đường đã cho là:

$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (đường astroide)

Theo (4), (3.4) và do đối xứng (H.79), ta có:



Hình 78.



Hình 79.

$$\sigma = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\,\sin^2 t \;\; + 9a^2\sin^4 t.\cos^2 t}\,dt$$

$$= 12a^2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4 t\,d\cos t = \frac{12a^2\pi}{5} \qquad (\text{đvdt}).$$

b) Làm phép quay trục một góc $\frac{\pi}{4}$

$$x = X\cos\frac{\pi}{4} - Y\sin\frac{\pi}{4}\,,\; y = Y\cos\frac{\pi}{4} + X\sin\frac{\pi}{4}$$

từ đó: $X = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}(\sin^3 t + t\cos^3 t)$

$$Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sin^3 t - \cos^3 t)$$

là phương trình của đường cong đối với hệ toạ độ mới XOY. Do đối xứng, diện tích cần tìm bằng hai lần tổng diện tích các mặt được tạo nên khi quay các cung AB, và CD quanh Ox (H.79).

$$\sigma = 4\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}|Y|ds + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} Yds\right)$$

$$ds = \sqrt{X_t'^2 + Y_t'^2}dt, \quad (\text{khi } t \in [0, \frac{\pi}{4}]: Y \le 0).$$

Tính toán, ta có: $ds = 3a|\sin t\cos t|dt$ và:

$$\sigma = \frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^3 t - \sin^3 t)\sin t\cos t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin^3 t - \cos^3 t)\sin t\cos t dt\right)$$

$$= \frac{6\sqrt{2}\pi a^2}{5}(\cos^5 t + \sin^5 t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} + (\cos^5 t + \sin^5 t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^2}{5}(4\sqrt{2} - 1)$$

(dvdt)

3) a) Ta biết phương trình tham số của ellipse là $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

Tương tự, ta có:

$$\sigma = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = 4\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2\cos^2 t)}dt$$

$$= \frac{4\pi b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2\cos^2 t)}.d\left(\sqrt{a^2 - b^2}\cos t\right)$$

$$= \frac{4\pi b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}\cos t}{2}\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t} + \right.$$

$$+\ \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cos t}{a}\Bigg)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \qquad \text{(dvdt).}$$

(Theo 20^0, (1. 4) chương 4).

b) Tương tự:

$$\sigma = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = 4\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\,d\sin t$$

$$= \frac{4\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\,d\left(\sqrt{a^2-b^2}\sin t\right)$$

Áp dụng: 21^0, (1.4) chương 4, ta có:

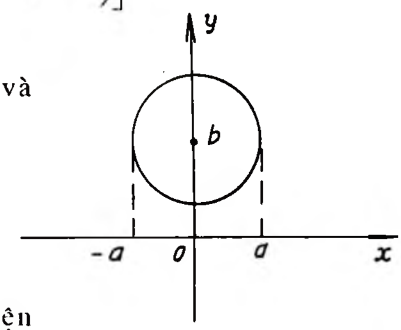
$$= 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2 a}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left[\frac{a}{b}\left(1+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right] \qquad \text{(dvdt)}$$

4) Phương trình các nửa trên và dưới của đường tròn là: (H.80)

$$y_1 = b + \sqrt{a^2-x^2}$$

$$y_2 = b - \sqrt{a^2-x^2}$$

Diện tích phải tìm là tổng diện tích của các nửa trên và dưới của đường tròn quay quanh Ox tạo nên, do đó:



Hình 80.

$$\sigma = 2\pi\int_{-a}^{a}\left[(b+\sqrt{a^2-x^2})+(b-\sqrt{a^2-x^2})\right]\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= 4\pi ab\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8\pi ab\int_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8\pi ab\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a = 4\pi^2 ab$$

5) a) Ta có $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt$

$$= \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

Do đó và do đối xứng đối với đường thẳng $x = \pi a$

$$\sigma = 4\pi\int_0^{\pi} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = 4\pi\int_0^{\pi} a(1-\cos t).2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = 32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 u\,du = 32\pi a^2\,\frac{2}{3.1} = \frac{64\pi a^2}{3} \quad \text{(đvdt)}$$

($u = \frac{t}{2}$, và theo (2), (2.3)).

b) Theo (4), (3.4):

$$\sigma = 2\pi\int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} a(t-\sin t).2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt = 4\pi a^2\left(\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt\right) = 16\pi^2 a^2$$

(đvdt)

c) Tịnh tiến trục: $X = x$, $Y = y - 2a$, do đường cong đối xứng với đường thẳng $X = a\pi$ và do $Y \le 0$ đối với hệ trục mới, ta có:

$$\sigma = 4\pi\int_0^{\pi}|Y|\sqrt{X_t'^2 + Y_t'^2}\,dt = 4\pi\int_0^{\pi}\left|a(1-\cos t) - 2a\right|2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{\pi}|-\cos t - 1|\sin\frac{t}{2}dt = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 32\pi a^2\int_{\pi}^{0}\cos^2\frac{t}{2}d\cos\frac{t}{2} = \frac{32\pi a^2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{0} = \frac{32\pi a^2}{3} \qquad \text{(đvdt)}$$

6) Đó là dường lemniscate, do đối xứng và theo (5), (3.4), ta có:

$$\sigma = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2 + r_\varphi'^2}\,d\varphi$$

ở đây:

$$r\sin\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$$

$$r^2 + r_\varphi'^2 = a^2\cos 2\varphi + \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$$

Do đó: $\sigma = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi = 4\pi a^2 \cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = 2\pi a^2(2 - \sqrt{2}) \text{ (dvdt)}$$

b) Từ a) và từ (4) (3.4) coi đường cong cho theo tham số φ ta có:

$$\sigma = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi d\varphi = 2\sqrt{2}\pi a^2 \text{ (dvdt)}$$

7) Ở đây $ds = \sqrt{r^2 + r_\varphi'^2}\,d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$

$y = r\sin\varphi = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi = 4a\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$, nên:

$$\sigma = 2\pi\int_0^{\pi} r\sin\varphi\sqrt{r^2 + r_\varphi'^2}\,d\varphi = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$= 32\pi a^2 \int_{\pi}^{0}\cos^4\frac{\varphi}{2}d(\cos\frac{\varphi}{2}) = \frac{32\pi a^2}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{0} = \frac{32}{5}\pi a^2 \text{ (dvdt)}$$

115. 1) Tính công để nâng một vật có khối lượng m từ mặt quả đất có bán kính R lên độ cao h.

2) Tính áp lực của nước lên một thành đập thẳng đứng có dạng hình thang, biết đáy trên của đập là a = 70 m, đáy dưới là b = 50 m và chiều cao là h = 20 m.

3) Tính khối lượng của một hình cầu bán kính R. Biết khối lượng riêng tại mỗi điểm của hình cầu tỷ lệ với khoảng cách của điểm đó đến tâm.

Bài giải

1) Theo định luật Newton, lực hút của quả đất lên vật có độ lớn là:

$$F = -\frac{k.m.M}{r^2}$$

r là khoảng cách từ vật N đến tâm quả đất,

M là khối lượng quả đất (H.81).

(dấu - do hướng của lực ngược với hướng của trục Ox).

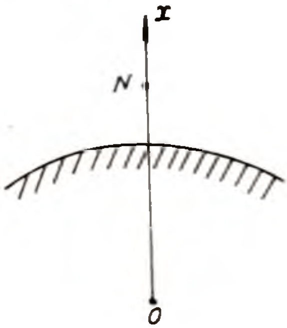
Theo ý nghĩa cơ học của tích phân, công T phải tìm là:

$$T = \int_R^{R+h} -\frac{kmM}{r^2}dr = -kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

trên mặt đất: F = mg nên $mg = \frac{kmM}{R^2}$, suy ra:

$$kmM = mgR^2$$

Vậy $$T = \frac{-mghR}{R+h}$$



Hình 81.

2) Xét một dải MN của đập ở độ sâu x, bề rộng dx khá bé (H.82).

Theo định luật Pascal:

Áp lực của nước lên dải này:

$$dP = \gamma \times \text{diện tích dải} \times \text{độ sâu } x$$

γ là trọng lượng riêng của nước, $\gamma = 1$.

Ta tính diện tích của dải $dS = MN.dx$.

$$MN = MK + KN = MK + b,\quad \frac{MK}{AH} = \frac{DI}{DJ} \Rightarrow \frac{MK}{a-b} = \frac{h-x}{h}$$

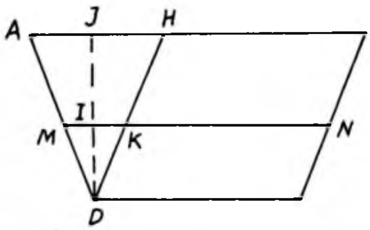
$$\Rightarrow MK = \frac{(a-b)(h-x)}{h} \Rightarrow MN = \frac{(a-b)(h-x)}{h} + b$$

Vậy:

$$dS = \left(\frac{(a-b)(h-x)}{h} + b\right)dx$$

và

$$dP = \left(\frac{(a-b)(h-x)}{h} + b\right)xdx.$$



Hình 82.

Do đó áp lực của nước lên đập là:

$$P = \int_0^h \left[\frac{(a-b)(h-x)}{h}x + bx\right]dx$$

$$= \frac{a-b}{h}\left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h + \frac{bx^2}{2}\Bigg|_0^h = \frac{h^2}{6}(a+2b)$$

Theo giả thiết: $P = 11{,}3.10^3$ (tấn/m^2).

3) Xét hình vành cầu bán kính r và r + dr (H83), thể tích của hình vành cầu này là:

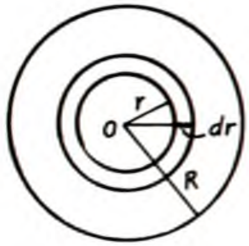
$$dV = \left[\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right] \approx \frac{4}{3}\pi.3r^2dr$$

(bỏ qua các VCB bậc cao hơn dr và khối lượng của nó là:

$$dm = \frac{4}{3}\pi.3r^2dr.kr$$, k là hệ số tỷ lệ

Theo định nghĩa tích phân, khối lượng của hình cầu dã cho là:

$$m = 4K\pi\int_0^R r^3dr = k\pi R^4 \quad (\text{đvkl})$$



Hình 83.

§4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

4.1. Định nghĩa

- Ta sẽ xét hai loại tích phân suy rộng:

Tích phân suy rộng có cận vô hạn (loại 1) là tích phân:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$, f(x) khả tích trên [a, b] $\forall b \in R$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$, f(x) khả tích trên [a, b] $\forall a \in R$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

- Tích phân suy rộng của f(x) không bị chặn (loại 2) là tích tích phân:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$, f(x) không bị chặn tại b và khả tích trên [a, b - ε], $\forall\varepsilon$: $0 < \varepsilon < b - a$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a-\varepsilon}^{b} f(x)dx$$, f(x) không bị chặn tại a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$, f(x) không bị chặn tại c ∈ (a, b).

Các giới hạn trên tồn tại (không tồn tại) thì tích phân suy rộng gọi là hội tụ (phân kỳ); +∞ , - ∞

a, b, c gọi là các điểm bất thường của tích phân.

Áp dụng: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ (1) hội tụ (phân kỳ) khi $\alpha > 1$ ($0 < \alpha \le 1$)

$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ (2) hội tụ (phân kỳ) khi $0 < \alpha < 1$ ($\alpha \ge 1$).

4.2. Tiêu chuẩn hội tụ của tích phân suy rộng loại (1) (cận + ∞)

1⁰. Tiêu chuẩn so sánh

Nếu f(x) khả tích trên [a, b] $\forall b \in R$, $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \ge a$ và:

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, ($\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ), thì:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ)

2⁰. Tiêu chuẩn Cauchy

Nếu tồn tại $c > 0$, $M > 0$, $\alpha > 1$ sao cho: $0 \le f(x) \le \frac{M}{x^\alpha}$ với $c \le x < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, còn nếu $\alpha \le 1$ sao cho $f(x) \ge \frac{M}{x^\alpha}$ với $c \le x < +\infty$ thì tích phân phân kỳ.

Hệ quả

a) Nếu $\alpha > 1$ và tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x).x^\alpha$ ($\alpha \le 1$ và tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x).x^\alpha > 0$) thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (phân kỳ).

b) Nếu $x \to +\infty$, $f(x)$ là một vô cùng bé bậc $\alpha > 0$ so với $\frac{1}{x}$

thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (phân kỳ) khi $\alpha > 1$ ($\alpha \le 1$).

3^0. Tiêu chuẩn hội tụ với $f(x)$ có dấu tuỳ ý

a) Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,

khi đó $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ gọi là hội tụ tuyệt đối.

$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ gọi là bán hội tụ hay hội tụ có điều kiện.

b) Nếu $F(x) = \int_a^{x} \varphi(x)dx$ bị chặn khi $x \to +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}dx$ là hội tụ, $\forall \alpha > 0$ ($a > 0$) (tiêu chuẩn Dirichlet).

4.3. Tiêu chuẩn hội tụ của tích phân suy rộng loại 2

Với $f(x)$ không bị chặn tại b.

1^0. $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in (a, b - \varepsilon)$, $\int_a^{b} g(x)dx$ hội tụ ($\int_a^{b} f(x)dx$ phân kỳ) thì $\int_a^{b} f(x)dx$ hội tụ ($\int_a^{b} g(x)dx$ phân kỳ).

2^0. Nếu $0 \le f(x) \le \frac{M}{(b-x)^\alpha}$, $c \le x < b$, $M > 0$, $0 < \alpha < 1$,

thì tích phân $\int_a^{b} f(x)dx$ hội tụ

$\alpha \geq 1$: $f(x) \geq \dfrac{M}{(b-x)^{\alpha}}$ $\forall c$: $c \leq x < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Hệ quả

a) Nếu $\alpha < 1$, $\lim\limits_{x \to b} f(x)(b - x)^{\alpha}$ tồn tại thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ,

$\alpha \geq 1$, $\lim\limits_{x \to b} f(x)(b - x)^{\alpha} > 0$ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

b) Khi $x \to b$, $f(x)$ là VCL bậc α so với $\dfrac{1}{b-x}$ thì tích phân hội tụ (phân kỳ) khi $0 < \alpha < 1$ ($\alpha \geq 1$).

Chú ý

1) Dễ dàng suy ra (tương tự như 4.2) các tiêu chuẩn hội tụ đối với các tích phân suy rộng:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \ \int_a^b f(x)dx \text{ với } f(x) \text{ không bị chặn tại } a.$$

2) Nếu tích phân suy rộng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ngoài các điểm bất thường $+\infty$ ($-\infty$) có những điểm bất thường c_i ($i = 1, 2, \ldots, n$): $-\infty < c_i < +\infty$ (tại c_i, $f(x)$ không bị chặn) thì khi xét sự hội tụ của I, ta phải tách I thành tổng của 2 loại tích phân đã xét, và sau đó kết hợp lại.

Trong các bài tập, để đơn giản cách viết ta xét ngay tại các điểm bất thường đó rồi kết hợp lại.

BÀI TẬP

116. Tính các tích phân suy rộng:

1) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$

3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx\ (a > 0)$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x\,dx}{(1+x^2)^2}$

5) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

6) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

7) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

8) $\int_0^1 \frac{\ln^3 x}{x}dx$

*9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$

*10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\mathrm{tg}x}dx$

*11) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Bài giải

1) $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\int_2^b\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Bigg|_2^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\ln\frac{b-1}{b+2} - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\ln 2$$

2) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]^2}$

$$= \left(\frac{1}{2.\frac{3}{4}}.\frac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2(\frac{\sqrt{3}}{2})^3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

(Áp dụng (1.4, 28°, chương 4).

3) $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$, áp dụng (1.4, 23°, chương 4), ta có:

$$I = \frac{-a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

4) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2}$

Đặt $u = \ln x$, $dv = \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$, thì $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{-1}{2(x^2+1)}$

Tính toán ta có:

$$I = \left(\frac{-\ln x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+0}\left(\frac{\ln x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+0}\left(\frac{\ln x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4}\ln x^2 - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+0}\left(\frac{-x^2\ln x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{1+x^2}\right) = 0$$

(vì $\lim_{x\to+0} x^2\ln x = 0$)

5) $$I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^6\sqrt{\left(\frac{1}{x^5}\right)^2 + \frac{1}{x^5} + 1}} = -\frac{1}{5}\int_1^{+\infty}\frac{d(\frac{1}{x^5})}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^5}\right)^2 + \frac{1}{x^5} + 1}}$$

Xét: $$I_1 = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= \ln\left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right) \quad \text{với } t = \frac{1}{x^5}$$

thì $\quad I_1 = \ln\dfrac{2 + x^5 + 2\sqrt{x^{10} + x^5 + 1}}{2x^5}$

Vậy $\quad I = \dfrac{1}{5}\ln\dfrac{2x^5}{2 + x^5 + 2\sqrt{x^{10} + x^5 + 1}}\Bigg|_1^{+\infty}$

hay $\quad I = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{5}\left(\ln\dfrac{2x^5}{2 + x^5 + 2\sqrt{x^{10} + x^5 + 1}} - \ln\dfrac{2}{3 + 2\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{2}{3 + 2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{5}\ln\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

6) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$,

Đặt $u = x^n$, $e^{-x}dx = dv$, thì $du = nx^{n-1}dx$, $v = -e^{-x}$

và $\quad I_n = e^{-x}.x^n\Big|_0^{+\infty} + n\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$

Do đó: $I_n = nI_{n-1}$, mặt khác $\;I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$

nên $I_1 = 1.I_0 = 1$, $I_2 = 2I_1 = 2.1 \ldots$, $I_n = n(n-1)\ldots2.1 = n!$

7) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$,

đặt $\sqrt{1-x} = t > 0$, $0 \le x < 1 \Leftrightarrow 1 \ge t > 0$, $x = 1 - t^2$, $dx = -2tdt$

$$I = 2\int_0^1 \frac{dt}{1 - t^2} = 2\text{arctgt}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

8) $I = \int_0^1 \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int_0^1 \ln^3 x d\ln x = \frac{\ln^4 x}{4}\Big|_0^1 = \infty$

Vậy tích phân I phân kỳ.

9) Đặt $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$

Trong I_1, đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$, $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \ge t > 0$, $dx = -dt$

$$I_1 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\cos(\frac{\pi}{2} - t)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt = I_2$$

Do đó: $2I_2 = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx$$

Xét $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx$,

Đặt $2x = t$ thì $J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t)dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t dt\right]$.

Trong tích phân $K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t dt$, đặt $t = \pi - u$

thì $K = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi - u))du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u du = I_2$

Vậy $$2I_2 = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

hay $$I_2 = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

Vì $I_2 = I_1$ nên $I_1 = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

10) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tgx}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\frac{d\sin x}{\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\ln\sin x) =$$

$$= x\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$$

Nhưng $$x\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \lim_{x\to 0} x\ \ln(\sin x)$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\sin x\ln(\sin x)\times\frac{x}{\sin x}\right) = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 \text{ (bài trên)}$$

Vậy $I = -\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

11) $$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Xét hàm $f(t) = (1 + t)e^{-t}$

$f'(t) = -(1 + t)e^{-t} + e^{-t} = -t\,e^{-t} = 0$ tại $t = 0$

$f'(t) > 0$ khi $t < 0$ và $f'(t) < 0$ khi $t > 0$

Vậy $\max f(t) = f(0) = 1$

hay $(1 + t)\, e^{-t} < 1,\ \forall t \neq 0$

Đặt $t = x^2$ thì $(1 + x^2)e^{-x^2} < 1$ hay $e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$

$t = -x^2$ thì $(1 - x^2)\, e^{x^2} < 1$ hay $e^{-x^2} > 1 - x^2$

Vậy $\quad (1 - x^2) < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2},\ \forall x > 0$

và $$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

$\left(1 - x^2 > 0 \text{ khi } 0 < x < 1,\ e^{-nx^2} < \dfrac{1}{(1+x^2)^n}, \text{ khi } x > 0\right)$

nhưng $$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{n}x)^2} d(\sqrt{n}x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} I \quad (t = \sqrt{n}x)$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

(x = cost và theo (2), (2.3))

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t\,dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.\frac{\pi}{2}, \quad (x = \text{cotg}t)$$

Do đó: $$\sqrt{n}.\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < I < \sqrt{n}.\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.\frac{\pi}{2}$$

hay $$\frac{n}{2n+1}.\frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)} < I^2 < \frac{n}{2n-1}.\frac{((2n-3)!!)^2(2n-1)}{((2n-2)!!)^2}.\frac{\pi^2}{2^2}$$

Theo 5) bài 14:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left((2n)!!\right)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2(2n+1)} \qquad \text{(công thức Wallis).}$$

Vậy khi $n \to \infty$ ta có: $\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} < I^2 < \frac{1}{2}.\frac{2}{\pi}.\frac{\pi^2}{2^2}$

hay $$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(tích phân Poisson)}$$

117. Xét sự hội tụ của các tích phân:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 5}$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\text{arctg}x}{x^\alpha}dx$

3) $\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx \quad (n \geq 0)$

5) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\lambda}dx$

6) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \text{arctg}x}{1+x^n}dx \quad (n \geq 0)$

*7) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{K^2 + x^2}dx \quad (K, a > 0)$

*8) $\int_0^{+\infty} e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^\lambda}dx \quad (a, \lambda > 0)$

9) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q}$

10) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x} \quad (p, q > 0)$

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)dx$

14) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$

15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\text{tg}x)^p dx$

16) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

17) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

18) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$

*19) $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}dx$ (hàm Гamma)

*20) $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ (p, q > 0), (hàm Beta)

*21) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

*22) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

23) $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$

24) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ không?

Bài giải

1) $I = \int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+5}$ chỉ có điểm bất thường:

$+\infty$ khi $x \to +\infty$, $\frac{x^2}{x^4-x^2+5} \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$

Theo hệ quả b) ở 2^0, (4.2), ở đây $\alpha = 2 > 1$ nên tích phân dã cho hội tụ.

2) $I = \int_0^{+\infty}\frac{\text{arctg}x}{x^\alpha}dx$ tích phân này có hai điểm bất thường x = 0 và ∞.

Khi $x \to +0$, $\frac{\text{arctg}x}{x^\alpha} = \frac{\text{arctg}x}{x}.\frac{1}{x^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$

Tương tự như 1), tích phân hội tụ khi α - 1 < 1 hay α < 2 (1)

Khi $x \to +\infty$, $\frac{\text{arctg}x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha}$, tích phân hội tụ khi $\alpha > 1$ (2)

Vậy theo (1) và (2): $I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{arctg}x}{x^\alpha} dx$ hội tụ khi $1 < \alpha < 2$.

3) $I = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx$ tích phân này chỉ có điểm bất thường $+\infty$ ($\lim_{x \to 0} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) = 0$).

Khi $x \to +\infty$:

$$\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) = \left(1 - \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{x^4} - \ldots \right) - \left(1 - \frac{b^2}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^4}{x^4} - \ldots \right)$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{a^4 - b^4}{x^4} + \ldots \sim \frac{b^2 - a^2}{x^2}$$

ở đây $\alpha = 2 > 1$ nên tích phân hội tụ.

4) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n} dx$, tích phân này có hai điểm bất thường: $x = 0$ (khi $m < 0$) và $+\infty$.

Khi $x \to +0$, $\frac{x^m}{1 + x^n} \sim \frac{1}{x^{-m}}$, do đó tích phân hội tụ khi $-m < 1$ hay $m > -1$ (1).

Khi $x \to +\infty$, $\frac{x^m}{1 + x^n} \sim \frac{1}{x^{n-m}}$ do đó tích phân hội tụ khi $n - m > 1$ (2).

Vậy theo (1) và (2), I hội tụ khi $\begin{cases} m > -1 \\ n - m > 1 \end{cases}$

5) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\lambda}} dx$, I có hai điểm bất thường: 0, $+\infty$

Khi $x \to +0$, $\frac{\ln(1+x)}{x^{\lambda}} = \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{x^{\lambda-1}} \sim \frac{1}{x^{\lambda-1}}$

Do đó, I hội tụ khi $\lambda - 1 < 1$ hay $\lambda < 2$ (1)

Khi $x \to +\infty$, theo a) 2^0, (4.2), xét:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \frac{\ln(1+x)}{x^{\lambda}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^{\lambda-\alpha}} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{\lambda-\alpha} = 0 \text{ khi } \lambda - \alpha > 0$$

và I hội tụ khi $\alpha > 1$, nghĩa là I hội tụ khi $\lambda > 1$ (2).

Kết hợp (1) và (2) thì I hội tụ khi $1 < \lambda < 2$.

6) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{1+x^n} dx$, I có 2 điểm bất thường: 0, $+\infty$

Khi $x \to +0$: $\frac{x^m \operatorname{arctg} x}{1+x^n} = \frac{1}{x^{-(m+1)}} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^n)} \sim \frac{1}{x^{-(m+1)}}$

Khi $x \to +\infty$: $\frac{x^m \operatorname{arctg} x}{1+x^n} = \frac{1}{x^{n-m}} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+\frac{1}{x^n})} \sim \frac{1}{x^{n-m}}$

Vậy I hội tụ khi $-(m+1) < 1$ và $n - m > 1$ hay $m > -2$ và $n - m > 1$.

7) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{K^2 + x^2} dx$ $(K, a > 0)$, I có điểm bất thường: $+\infty$

Theo b) 3^0, (4.2), xét $\varphi(x) = \sin ax$

$$F(x) = \int_0^x \sin at\,dt = \frac{1 - \cos ax}{a} \text{ bị chặn khi } x \to +\infty$$

Mặt khác $\frac{x}{K^2 + x^2} < \frac{1}{x^1}$, $\alpha - 1 > 0$. Vậy I hội tụ.

8) $I = \int_0^{+\infty} e^{\sin x}\dfrac{\sin 2x}{x^{\lambda}}dx \qquad (\lambda > 0)$

Tương tự 7) ta có:

$$\left|\int_0^x e^{\sin t}\sin 2t dt\right| = \left|2\int_0^x \sin t e^{\sin t} d\sin t\right| = \left|2\left[\sin t.e^{\sin t} - e^{\sin t}\Big|_0^x\right]\right| \le M$$

Theo giả thiết $\lambda > 0$ nên I hội tụ.

9) $I = \int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p(\ln x)^q} = \int_0^{+\infty}\dfrac{e^{(1-p)t}}{t^q}dt$, $(\ln x = t)$

I có hai điểm bất thường 0 và $+\infty$

Khi $t \to 0$, $\dfrac{e^{(1-p)t}}{t^q} \sim \dfrac{1}{t^q}$, $q < 1$, I hội tụ

Khi $t \to +\infty$ và $p > 1$, $q < 1$, $\alpha > 1$ thì

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha}\frac{e^{(1-p)t}}{t^q} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha-q}}{e^{(p-1)t}} = 0$$

Vậy I hội tụ khi $q < 1$ và $p > 1$.

10) $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$, I có điểm bất thường $x = 1$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} = \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)(1+x^2)}} \sim \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}$

ở đây: $\alpha = \dfrac{1}{3} < 1$, nên I hội tụ.

11) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$, có điểm bất thường $x = 0$

Theo a) 2^0, (4.3), xét: với $\alpha < 1$:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}x^{\alpha} = \lim_{x\to+0}(\sin x)^{\alpha-\frac{1}{2}}.\ln\sin x\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} = 0$$

khi $\alpha - \frac{1}{2} > 0$ hay $\alpha > \frac{1}{2}$, đặc biệt khi $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Vậy I hội tụ.

12) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$, I có điểm bất thường: $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$

Khi $x \to +0$, $\frac{1}{\sin^p x\cos^q x} \sim \frac{1}{x^p}$

Khi $x \to \frac{\pi}{2} - 0$, $\frac{1}{\sin^p x\cos^q x} = \frac{1}{\sin^p x\sin^q x(\frac{\pi}{2}-x)} \sim \frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^q}$

Vậy I hội tụ khi $p < 1$ và $q < 1$.

13) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sec x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\frac{1}{\cos x})dx$

(ký hiệu $\sec x = \frac{1}{\cos x}$), đặt $\frac{1}{\cos x} = t$ thì

$$\frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = dt, dx = \frac{\cos^2 x}{\sin x}dt$$

$$0 \le x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 \le t < +\infty$$

và $I = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ có 2 điểm bất thường $1, +\infty$.

Khi $t \to 1+0$, $\dfrac{|\sin t|}{t\sqrt{(t-1)}\sqrt{t+1}} \sim \dfrac{1}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}, \alpha = \dfrac{1}{2} < 1$

Khi $x \to +\infty$ $\left|\dfrac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}}\right| \leq \dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}} = \dfrac{1}{t^2\sqrt{1-\dfrac{1}{t^2}}} \sim \dfrac{1}{t^2}$, $\alpha = 2 > 1$

Vậy I hội tụ tuyệt đối.

14) $I = \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$ có điểm bất thường: x = 0

Ta viết: $I = \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2 \dfrac{(e^x - e^{-x})}{x}}}$, vì $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$

nên khi $x \to +0$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[3]{\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}.x^{\frac{2}{3}}}$

ở đây $\alpha = \dfrac{2}{3} < 1$. Vậy I hội tụ.

15) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (tgx)^{\lambda} dx$, khi $\lambda < 0$, I có điểm bất thường x = 0, khi $\lambda > 0$, I có điểm bất thường $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Do đó I hội tụ khi $|\lambda| < 1$.

16) $I = \int\limits_0^1 \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, có điểm bất thường x = 0 ($x \to 1 - 0$, $\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \to 0$).

Khi $x \to +0$, $\dfrac{\ln x . x^{\alpha}}{\sqrt{1-x^2}} \to 0$ với $\forall\alpha > 0$, đặc biệt $0 < \alpha < 1$.

Vậy I hội tụ.

17) $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

Vì $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x(2x^2-1)} = 0$ nên chỉ có điểm bất thường ∞.

Khi $x \to +\infty$, $\dfrac{\ln x . x^{\alpha}}{x\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\ln x}{x^{2-\alpha}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} \to 0$ khi $2 - \alpha > 0$ hay $\alpha < 2$, đặc biệt $1 < \alpha < 2$.

Vậy I hội tụ.

18) $I = \int_0^1 \dfrac{\ln x}{1+x^2} dx$, có điểm bất thường $x = 0$

Khi $x \to +0$, $\dfrac{\ln x . x^{\alpha}}{1+x^2} \to 0$ khi $\alpha > 0$, đặc biệt $0 < \alpha < 1$

Vậy I hội tụ.

19) $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}dx$ có 2 điểm bất thường: $x = 0$ khi $p < 1$ và ∞.

Khi $p < 1$ và $x \to +0$: $x^{p-1}.e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{x^{1-p}} \sim \dfrac{1}{x^{1-p}}$ và tích phân hội tụ khi $1 - p < 1$ hay $p > 0$.

Khi $x \to +\infty$, $x^{\alpha}.x^{p-1}.e^{-x} = \dfrac{x^{\alpha+p-1}}{e^x} \to 0$, khi $p > 0$ và $\alpha > 1$ $(\alpha + p - 1 > 0)$.

Vậy $\Gamma(p)$ hội tụ $\forall p > 0$.

20) $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p, q > 0)$

$p < 1$: có điểm bất thường $x = 0$, $q < 1$: có điểm bất thường $x = 1$.

Khi $x \to +0$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim \dfrac{1}{x^{1-p}}$

$x \to +1$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim \dfrac{1}{(1-x)^{q-1}}$

Vậy $B(p, q)$ hội tụ khi $1 - p < 1$ và $1 - q < 1$ hay $p > 0$, $q > 0$.

21) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx = I_1 + I_2$

I_1 tồn tại vì e^{-x^2} liên tục trong $[0, 1]$

Xét I_2, với $x \geq 1$, ta có: $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ mà $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \dfrac{1}{e}$: hội tụ

Do đó I_2 hội tụ.

Vậy I hội tụ (tích phân Poisson).

22) $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx$, xét $I_1 = \int_a^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx \qquad (a > 0)$

Theo b), 3^0, (4.2), xét $\varphi(x) = \sin x$

thì $F(x) = \int_a^x \sin x dx = \cos x\Big|_a^x = \cos a - \cos x$ bị chặn

ở đây $\alpha = 1 > 0$ nên I_1 hội tụ.

Vì $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nên I hội tụ

Chú ý là I không hội tụ tuyệt đối vì có thể chứng minh $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ phân kỳ.

Thực vậy, vì nếu ngược lại thì $\int_a^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ hội tụ.

(vì $\sin^2 x \le |\sin x|$) hay $\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x}dx$ hội tụ

Mặt khác $\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ hội tụ (chứng minh tương tự như $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$). Do đó: $\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx + \frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{(1-\cos 2x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}$ là hội tụ,

vô lý, vì: $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^{+\infty} = \infty$ phân kỳ.

23) $I = \int_0^2 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^1 \frac{dx}{\ln x} + \int_1^2 \frac{dx}{\ln x} = I_1 + I_2$

I_1, I_2 đều có điểm bất thường tại $x = 1$.

Xét I_1: $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{(x-1)'}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1-0} x = 1 > 0$

Theo b) 2^0 (4.3) thì I_1 là phân kỳ.

Vì một trong I_1, I_2 phân kỳ nên I phân kỳ.

24) Không. Chẳng hạn xét $I = \int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$ $f(x) = \sin x^2 \not\to 0$ khi $x \to +\infty$.

Nhưng I hội tụ, thực vậy: Đổi biến $x^2 = t$

$I = \int_0^a \frac{\sin t dt}{2\sqrt{t}} + \int_a^{+\infty}\frac{\sin t dt}{2\sqrt{t}} = I_1 + I_2$ $(a > 0)$

$\to I_1$ tồn tại $\sin x^2$ liên tục trong $[0, a]$)

$I_2 = \frac{-\cos t}{2\sqrt{t}}\Big|_a^{+\infty} - \frac{1}{4}\int_a^{+\infty}\frac{\cos t dt}{t^{3/2}}$: tồn tại ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$). Vậy I hội tụ.

CHƯƠNG 6

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

§1 KHÔNG GIAN VECTEUR n CHIỀU R^n

1.1. Định nghĩa

Tập hợp các bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, ..., x_n)$ gọi là một không gian hay một không gian vecteur n chiều, ký hiệu R^n

$x = (x_1, x_2 ... x_n) \in R^n$ gọi là một điểm hay một vecteur trong R^n.

Cho $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ta định nghĩa:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n), \alpha \in R$$

$\rho_{(x,y)} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$ gọi là khoảng cách giữa hai điểm x, y.

2.2. Tập hợp mở và đóng trong R^n

Tập hợp $S_r(x_0) = \{x : \rho(x, x_0) < r, r \in R, r > 0\} \subset R^n$ (1) gọi là một lân cận của điểm $x_0 \in R^n$.

Xét $x \in R^n$ và tập hợp $A \subset R^n$.

x gọi là một điểm trong (ngoài) của A nếu:

$\exists S_r(x)$: $S_r(x) \subset A$, $(x \in A)$

$(S_r(x) \subset A^c$, $(x \bar{\in} A))$

x gọi là một điểm biên của A nếu $\forall S_r(x)$ đều chứa các điểm x thuộc A và những điểm khác không thuộc A.

Tập hợp $A \subset R^n$ gọi là mở (đóng) nếu A không chứa (chứa) điểm biên nào (mọi điểm biên) của A. Rõ ràng:

- Lân cận $S_r(x_0)$ là một tập hợp mở (hình cầu mở).

- Tập hợp $\bar{S}_r(x_0) = \{x : \rho(x, x_0) \le r, r \in R, r > 0\}$ là một tập hợp đóng (hình cầu đóng).

Tập hợp $A \subset R^n$ gọi là bị chặn (giới nội) nếu: $\exists x_0 \in A$, $\forall x \in A$, $\exists c \in R$, $c > 0$: $\rho(x, x_0) \le c$.

Tập hợp $A \subset R^n$ *đóng và bị chặn* gọi là một tập hợp *Compact*.

Tập hợp $A \subset R^n$ gọi là *liên thông* nếu $\forall x, y \in A$, có thể nối nhau bằng một đường liên tục $\subset A$.

Tập hợp $D \subset R^n$, *liên thông và mở* gọi là một *miền*.

Tập hợp $D \subset R^n$, liên thông và đóng gọi là một *miền đóng*.

Miền D gọi là một *miền Compact* nếu D là một *miền đóng và bị chặn*.

Miền D gọi là *đơn (đa liên)* nếu D giới hạn bởi một (nhiều) đường liên tục và khép kín.

§2. KHÁI NIỆM CƠ BẢN - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Xét hàm hai biến, các khái niệm đều suy rộng được cho hàm n biến bất kỳ, n > 2.

2.1. Định nghĩa

Ánh xạ $f: D \subset R^2 \to R$ gọi là *một hàm số thực của hai đối số hay hai biến số thực.*

Ký hiệu $z = f(x, y)$ hay $z = f(M)$ với $M(x, y) \in D$, $f(M)$ cũng gọi là giá trị của f tại M.

D gọi là miền xác định của hàm số.

Tập hợp $\{f(M)\}, \forall M \in D\}$ gọi là miền giá trị của hàm số.

Tập hợp $\{(x, y, z): z = f(M), \forall M \in D \subset R^3\}$ gọi là đồ thị của hàm số.

2.2. Giới hạn và liên tục

$$a = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim_{M \to M_0} f(M), \left(M_0(x_0,y_0), M(x,y)\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \rho(M_0,M) < \delta \Rightarrow \left|f(M-a)\right| < \varepsilon$$

hay $\forall M_n(x_n,y_n)$, $M_n \neq M_0$, $M_n \to M_0$ $(x_n \to x_0, y_n \to y_0) \Rightarrow f(M_n) \to f(M_0)$.

Hàm $Z = f(x,y) = f(M)$ gọi là liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu $\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

- gọi là *liên tục* trong miền D nếu nó liên tục $\forall M(x, y) \in D$.

- gọi là *liên tục đều* trong miền D nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M, M' \in D, \rho(M, M') < \delta \Rightarrow \left|f(M) - f(M')\right| < \varepsilon, (M(x,y), M'(x',y'))$.

Định lý

- Nếu $z = f(M)$ liên tục trong miền Compact D thì:

  1^0. $f(M)$ bị chặn trong D

  2^0. $f(M)$ đạt một giá trị nhỏ (lớn) nhất m (M) trong D.

  3^0. $m < \gamma < M \Rightarrow \exists M_c(x_c,y_c) \in D: f(M_c) = \gamma$.

  4^0. $f(x,y)$ là liên tục đều trong D.

2.3. Đạo hàm riêng

Đạo hàm riêng của $z = f(x, y)$ đối với x tại $(x, y) \in D$:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

2.4. Sự khả vi, vi phân toàn phần

$z = f(x, y)$ gọi là khả vi tại $(x, y) \in D$ nếu:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = a\Delta x + b\Delta y + 0(\rho),\ a, b = \text{const}$$

$0(\rho)$ là một VCB bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

$dz = a\Delta x + b\Delta y$ gọi là vi phân của hàm số tại (x, y).

Định lý

1^0. Nếu $z = f(x, y)$ khả vi tại $(x, y) \in D$ thì nó liên tục và có các đạo hàm riêng tại (x, y), khi đó: $dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$

2^0. Nếu $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ liên tục tại $(x, y) \in D$ thì nó khả vi tại đó.

2.5. Đạo hàm của hàm hợp

Hàm $z = f(u, v)$, $(u, v) \in D$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $(x, y) \in D_1$ gọi là hàm hợp của các biến độc lập x, y trong D_1 qua các biến trung gian u, v.

Đạo hàm: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x}$ tại $(x, y) \in D_1$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y},$$

nếu $z = f(u, v)$ khả vi tại $(u, v) \in D$ và u, v có các đạo hàm riêng tại $(x, y) \in D_1$

Đặc biệt $u = u(x)$, $v = v(x)$, $x \in X$:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

gọi là đạo hàm toàn phần của z theo x tại $x \in X$.

2.6. Đạo hàm của hàm ẩn

Hàm $y = y(x)$ cho bởi phương trình $F(x, y) = 0$ (1) gọi là hàm ẩn của biến x trên tập hợp E, nếu $\forall x \in E$, phương trình (1) có nghiệm duy nhất. Theo định nghĩa thì: $F[x, y(x)] \equiv 0$ trên E.

Đạo hàm: $y'_x = \frac{-F'_x}{F'_y}$ $(F'_y \neq 0, \forall x \in E)$

Tương tự:

Hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định từ $F(x, y, z) = 0$ trên $D \subset R^2$, có các đạo hàm:

$$z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z},\ z'_y = \frac{-F'_y}{F'_z} \qquad (F'_z \neq 0,\ \forall(x, y) \in D).$$

2.7. Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Đạo hàm cấp hai:

$$z''_{x^2} = (z'_x)'_x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\ z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ldots$$

Đạo hàm cấp n: $\frac{\partial^n z}{\partial y^i \partial x^j}$, $i + j = n$

Định lý Schwarz

- Nếu $z = f(x,y)$ có các đạo hàm (hỗn hợp) $f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ liên tục tại (x, y) thì $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

- Vi phân $d^2z = d(dz)$, ..., $d^nz = d(d^{n-1}z)$.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z...$$

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

Một hàm có vi phân cấp n tại một điểm gọi là khả vi n lần tại điểm đó.

BÀI TẬP

118. Tìm miền xác định của các hàm số:

1) $z = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

2) $z = \sqrt{(x^2+y^2-a)(2a^2-x^2-y^2)}$ $(a > 0)$

3) $z = \sqrt{y\sin x}$

4) $z = \arcsin\frac{y}{x}$

5) $z = \text{arctg}\,\frac{x-y}{1+x^2y^2}$

6) $z = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

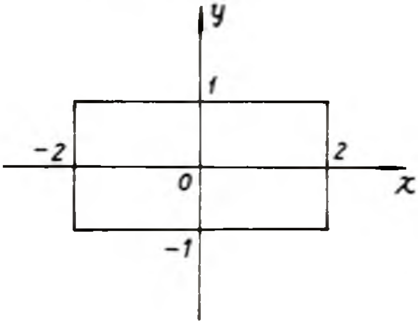
7) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$

8) $u = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} + \ln x + \ln y + \ln z$

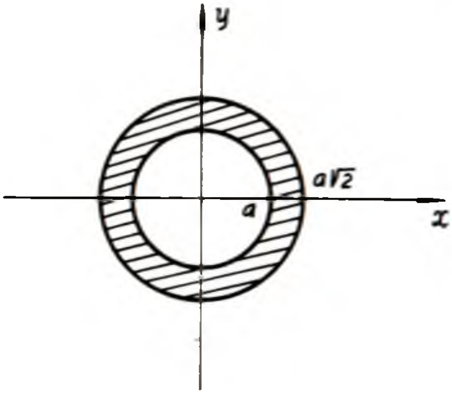
Bài giải

1) z xác định khi $4 - x^2 \geq 0$, $1 - y^2 \geq 0$ hay $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$.

Vậy miền xác định của z là hình chữ nhật (đóng): $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$ (H.84).



Hình 84.



Hình 85.

2) Hàm z xác định khi $(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2) \geq 0$.

hay $\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 0 \\ 2a^2 - x^2 - y^2 \leq 0 \end{cases}$ (1) và $\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \geq 0 \\ 2a^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases}$ (2)

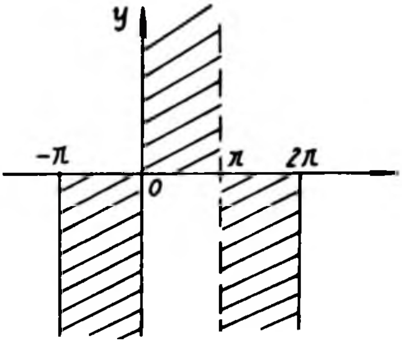
hệ (1) vô nghiệm, hệ (2) cho: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq a^2 \\ x^2 + y^2 \leq 2a^2 \end{cases}$

Nghĩa là miền xác định của z là một hình vành tròn (đóng) (H.85).

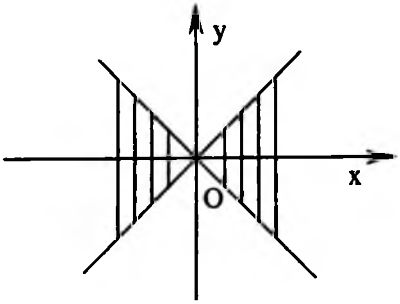
3) z xác định khi $y\sin x \geq 0$ hay:

$\begin{cases} y \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} y \leq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} y \geq 0 \\ 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \end{cases}$ (1)

và $\begin{cases} y \leq 0 \\ (2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi \end{cases}$ (2), (H.86)



Hình 86.



Hình 87.

Vậy miền xác định của z là tập hợp các dải xác định bởi (1) và (2).

4) z xác định khi: $-1 \le \frac{y}{x} \le 1,\ x \ne 0$

hay $\begin{cases} x > 0 \\ -x \le y \le x \end{cases}$ (1) và $\begin{cases} x < 0 \\ x \le y \le -x \end{cases}$ (2)

Vậy miền xác định của z gồm 2 góc xác định bởi (1) và (2) trừ điểm gốc O (x = 0) (H87).

5) Hàm z xác định $\forall (x, y) \in R^2$.

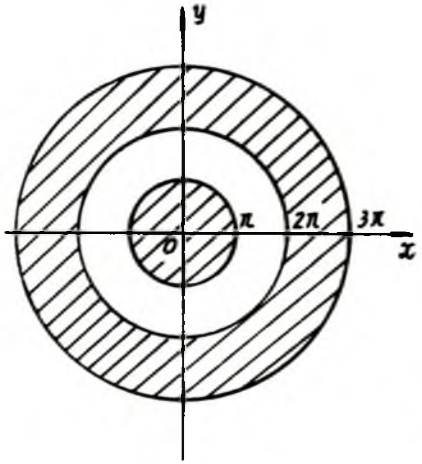
6) Hàm z xác định khi $\sin(x^2 + y^2) \ge 0$, hay $2k\pi \le x^2 + y^2 \le (2k + 1)\pi$ (1)

Nghĩa là miền xác định của z là tập hợp các hình vành tròn xác định bởi (1) (H.88).

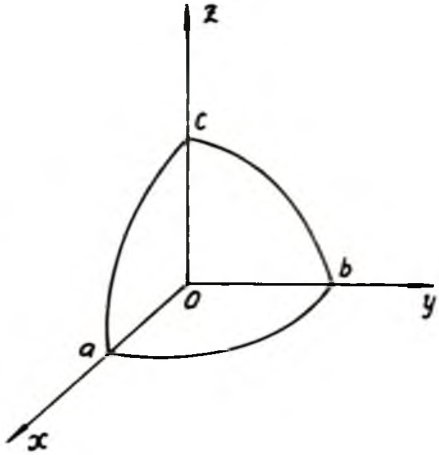
7) u = arcsinx + arcsiny + arcsinz

u xác định khi $-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\ -1 \le z \le 1$ (1).

Vậy miền xác định của u là hình hộp đóng xác định bởi (1).



Hình 88.



Hình 89.

8) $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} + \ln x + \ln y + \ln z$

u xác định khi $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \geq 0$ và $x, y, z > 0$

hay $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$ (1). Vậy miền xác định của u là hình giới hạn bởi mặt ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(kể cả những điểm trên mặt). trong góc phần tám thứ nhất và các mặt toạ độ (không kể các điểm trên các mặt phẳng toạ độ đó).

119. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$;   2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Bài giải

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}=0$

vì $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(x^2+y^2)=0$ và $\left|\sin\dfrac{1}{xy}\right|\le 1$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, đặt $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Lấy $x_n=\dfrac{1}{n}$, $y_n=\dfrac{1}{n}\Rightarrow x_n,y_n\to0$ khi $n\to\infty$.

và $f(x_n,y_n)=\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}=0\to0$, $x_n=0$, $y_n=\dfrac{1}{n}$ thì x_n, $y_n\to0$ khi $n\to\infty$

và $f(x_n,y_n)=\dfrac{-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=-1\to-1$.

Vậy $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ không tồn tại.

3) Ta có: $0\le\dfrac{x^2+y^2}{e^{(x+y)}}=\dfrac{x^2}{e^{x+y}}+\dfrac{y^2}{e^{x+y}}\le\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{y^2}{e^y}\to0$

khi $x\to+\infty$, $y\to+\infty$

Vậy: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$.

4) Ta có: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2} = \exp\{\lim x^2y^2\ln(x^2+y^2)\}$

$$= \exp\left\{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2).\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right.$$

$$= e^0 = 1$$

vì $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0$ $(t = x^2+y^2)$, $0 \le \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le x^2 + y^2 \to 0$ $(x \to 0,$ $y \to 0)$.

120. Xét sự liên tục và gián đoạn của các hàm số:

1) $z = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$; 2) $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$

3) $z = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & : x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & : x^2+y^2 = 0 \end{cases}$; 4) $z = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & : x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & : x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Bài giải

1) Hàm z liên tục $\forall(x, y)$: $x^3 + y^3 \neq 0$ vì là hàm sơ cấp, do đó z chỉ có thể gián đoạn tại (x, y): $x^3 + y^3 = 0$ hay $y = -x$, xét $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $x_0 + y_0 = 0$.

Khi đó $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{x+y}{x^3+y^3} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{1}{x^2-xy+y^2} = \dfrac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}$.

Do đó các điểm trên đường thẳng $y = -x$ là các điểm gián đoạn bỏ được của z trừ điểm (0, 0).

Xét $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x^3+y^3} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2-xy+y^2} = +\infty$

Vậy (0,0) là điểm gián đoạn loại 2 (vô cực) của z.

2) $z = \arcsin\frac{y}{x}$, z xác định khi: $-1 \le \frac{y}{x} \le 1$, $x \ne 0$ hay $|y| \le |x|$, $x \ne 0$ (1).

Vậy miền xác định của z xác định bởi (1). Trong miền đó z là liên tục vì nó là hàm sơ cấp.

3) z xác định $\forall(x, y) \ne (0, 0)$ nên z liêu tục, $\forall(x, y) \ne (0, 0)$. Tại (0, 0) ta có:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$$

Nghĩa là z liên tục tại (0, 0). Vậy z liên tục $\forall(x, y) \in R^2$.

4) Hàm z xác định $\forall(x, y) \ne (0, 0)$ nên nó liên tục $\forall(x, y) \ne (0, 0)$, vì z là hàm sơ cấp.

Xét tại (x, y) = (0, 0), lấy $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ khi $n \to \infty$, $z(x_n, y_n) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1 \to 1$

Lại lấy $x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

$$z(x_n, y_n) = \frac{\frac{4}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \to \frac{4}{5}.$$

Vậy z không liên tục tại (0, 0), vì z bị chặn trong lân cận của (0, 0):

$$\left(\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1\right),$$

nên (0, 0) là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

121. Tính các đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của các hàm số.

1) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 2) $z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

3) $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$; 4) $z = x^{x^y}$

5) $u = (xy)^2$; 6) $u = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z}$

7) $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = \cos x$

8) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $x = u\sin v$, $y = u\cos v$

9) $u = xyz$, $x = t^2+1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$

10) $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, tính $df(3,4,5)$.

Bài giải

1) $$z'_x = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z'_y = \frac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad dz = \frac{y^2dx - xydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

2) $$z'_x = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)},$$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(dx + \frac{dy}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

3) $z = \arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$, đặt $u = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow z = \arcsin u$, $\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2y^2}{x^2+y^2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)'_x}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} = \frac{2xy^2}{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{2xy^2}{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} = \frac{\sqrt{2}xy^2}{|y|}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

Tương tự: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\sqrt{2}yx^2}{|y|}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\quad x \neq y$

và $dz = \frac{\sqrt{2}xy}{|y|}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}(ydx - xdy)$

4) $z = x^{x^y}$, lấy logarithme Neper hai vế ta có:

$\ln z = x^y \ln x$, đạo hàm hai vế theo x:

$$\frac{z'_x}{z} = yx^{y-1}.\ln x + x^y.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\ z'_x = x^{x^y-y-1}.(y\ln x + 1)$$

$$z'_y = x^{x^y+y}.\ln^2 x$$

$$dz = x^{x^y-y}\left[\left(\frac{y}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right)dx + \ln^2 x\,dy\right]$$

5) $u = (xy)^z$, $u'_x = yz(xy)^{z-1}$, $u'_y = xz(xy)^{z-1}$, $u'_z = (xy)^z\ln(xy)$

$du = (xy)^{z-1}[yzdx + xzdy + xy\ln(xy)dz]$

6) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z}$

$$u'_x = \frac{x - y\cos z}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z}} = \frac{x - y\cos z}{u}$$

$$u'_y = \frac{y - x\cos z}{u}\quad,\ u'_z = \frac{xy\sin z}{u}$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z}}\left[(x - y\cos z)dx + (y - x\cos z)dy + xy\sin z\,dz\right]$$

7) $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = \cos x$

Theo (2.5): $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}.\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v}.\dfrac{dv}{dx} = vu^{v-1}\cos x + u^v\ln u(-\sin x)$

$= (\sin x)^{\cos x}(\cos x\,\mathrm{cotg}\,x - \sin x\ln\sin x)$

$dz = (\sin x)^{\cos x}(\cos x\,\mathrm{cotg}\,x - \sin x\ln\sin x)dx.$

8) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$, $x = u\sin v$, $y = u\cos v$

Theo (2.5):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{y\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}\sin v+\frac{-x}{y^2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}.\cos v$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}\sin v-\frac{x}{x^2+y^2}\cos v=\frac{1}{x^2+y^2}.(u\cos v\sin v-u\sin v\cos v)=0$$

$$(x^2+y^2\neq 0)$$

Tương tự: $\frac{\partial z}{\partial v}=1$ và $dz = dv$.

9) $u = xyz$, $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$= 2t.\ln t\operatorname{tg} t+\frac{(t^2+1)\operatorname{tg} t}{t}+\frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}=f(t)$$

$du = f(t)dt$.

10) $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$f'_x = z(-\frac{1}{2}.2x)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{-xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$f'_x(3, 4,5) = -\dfrac{3}{25}$, tương tự $f'_y(3,4,5) = -\dfrac{4}{25}$; $f'_z(3,4,5) = \dfrac{1}{5}$

$$dz = \frac{1}{25}(5dz - 3dx - 4dy).$$

122. Xét sự liên tục và khả vi của hàm số:

1) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$;   2) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

*3) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & : x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & : x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

*4) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & : x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & : x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Bài giải

1) Rõ ràng f(x, y) liên tục $\forall(x, y) \in R^2$

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{3\sqrt[3]{(xy)^2}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{x}{3\sqrt[3]{(xy)^2}}, \quad \forall(x, y) \neq (0,0).$$

$f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ là liên tục $\forall(x, y) \neq (0, 0)$. Vì là các hàm sơ cấp, theo định lý ở (2.4) thì f(x,y) khả vi $\forall(x,y) \neq (0,0)$.

Xét tại (0,0):

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)0} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = 0.$$

Giả sử: $\Delta f(0,0) = 0.\Delta x + 0.\Delta y + 0.(\rho), \ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Nếu $0(\rho)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn bậc của ρ, nghĩa là $\dfrac{0(\rho)}{\rho} \to 0(\rho \to 0)$ thì f(x,y) khả vi tại (0,0).

Xét: $$\frac{0(\rho)}{\rho} = \frac{\Delta f(0,0)}{\rho} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

Lấy $\Delta x = \Delta y = \dfrac{1}{n}$ thì $\Delta x, \Delta y \to 0$ khi $n \to \infty$

$$\frac{0(\rho)}{\rho} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}} \to \infty$$

Vậy $0(\rho)$ không là vô cùng bé bậc cao hơn ρ và $f(x, y)$ là không khả vi tại $(0, 0)$.

2) Tương tự như 1) $f(x, y)$là liên tục $\forall(x, y) \in R^2$ và khả vi $\forall(x, y) \neq (0, 0)$. Xét tại $(0, 0)$:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|(0 + \Delta x).0|} - 0}{\Delta x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0$$

$$\Delta f(0,0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|} = 0(\rho), \quad \frac{0(\rho)}{\rho} = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Lấy $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$

$$\frac{0(\rho)}{\rho} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \text{ khi } \rho \to 0.$$

Vậy $f(x, y)$ không khả vi tại $(0, 0)$.

3) $f(x, y)$ là gián đoạn tại $(0, 0)$, vì lấy $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^3}$, thì $x_n, y_n \to 0 \ (n \to \infty)$.

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$

Vậy $f(x, y)$ không khả vi tại $(0, 0)$. Rõ ràng $f(x, y)$ là liên tục và khả vi $\forall(x, y) \neq (0, 0)$.

(vì f, f'_x, f'_y là các hàm sơ cấp $\forall(x, y) \neq (0, 0)$)

Tuy nhiên f(x, y) vẫn có các đạo hàm riêng tại (0, 0).

Thực vậy: $f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{(0+\Delta x)^3.0}{(0+\Delta x)^6+0^2} - 0\right)\dfrac{1}{\Delta x} = 0$

$$f_y(0, 0) = 0 \text{ (tương tự)}$$

Chú ý: Qua 3) so sánh với hàm số một biến, ta thấy có những điểm khác nhau cơ bản: tại điểm gián đoạn của hàm nhiều biến, vẫn có thể có các đạo hàm riêng.

4) $\forall(x, y) \neq (0, 0)$, ta có:

$$f_x(x, y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x, y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

Vậy f(x, y) là liên tục và khả vi $\forall(x, y) \neq (0, 0)$, (vì f(x, y), $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ là các hàm sơ cấp).

Xét tại (0, 0):

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x} = 0, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Giả sử: $\Delta f(0, 0) = 0.\Delta x + 0.\Delta y + 0(\rho)$,

hay $\quad 0(\rho) = \Delta f(0,0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

và $$\frac{0(\rho)}{\rho} = \frac{\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho^2}}{\rho} \to 0 \text{ khi } \rho \to 0$$

Vậy f(x, y) khả vi tại (0, 0).

Tuy nhiên $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ không liên tục tại (0, 0).

Thực vậy: lấy $x_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}$, $y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}$ thì $x_n, y_n \to 0$ $(n \to \infty)$

và $f'_x(x_n, y_n) = -2\sqrt{n\pi} \to -\infty \neq 0 = f'_x(0,0)$...

123. Tính gần đúng:

1) $A = (1,02)^3(0,97)^2$

2) $A = \sqrt{(4.0,5)^2 + (2,93)^2}$

3) $A = \sin 32^0 \cos 59^0$

Bài giải

Ta biết nếu f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì

$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

$$= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + 0(\rho) \quad (1)$$

$0(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Khi Δx, Δy khá bé, ta có thể bỏ qua $0(\rho)$ và ta có công thức tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

1) Xét hàm số $f(x, y) = x^3.y^2$

Đặt $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$, $y_0 = 1$, $\Delta y = -0,03$ thì

$$A = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

$f(x_0, y_0) = 1^3.1^2 = 1$; $f'_x(x, y) = 3x^2y^2$; $f'_x(x_0, y_0) = 3$;

$f'_y(x, y) = 2x^3y$, $f'_y(x_0, y_0) = 2$.

Vậy theo (1): $A \approx 1 + 3.(0,02) - 2.(0,03) = 1$

2) Xét hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Đặt $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,05$; $y_0 = 3$, $\Delta y = -0,07$

Tương tự như 1) ta có $A \approx 4,998$.

3) Ta có $\sin 32^0 . \cos 59^0 = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{180}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{180}\right)$

Xét hàm $f(x, y) = \sin x \cos y$ và đặt $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = \frac{2\pi}{180}$, $y_0 = \frac{\pi}{3}$,

$\Delta y = -\frac{\pi}{180}$

Tương tự như 1) ta có: $A \approx 0,273$.

***124.** Hàm $u = f(x, y, z)$ gọi là đẳng cấp bậc n nếu $\forall\lambda \in R$:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V$$

1) Chứng minh rằng nếu hàm $f(x, y, z)$ đẳng cấp bậc n và tồn tại f'_x, f'_y, f'_z tại (x, y, z) thì:

$$x f'_x(x, y, z) + y f'_y(x, y, z) + z f'_z(x, y, z) = nf(x, y, z).$$

2) Chứng minh rằng hàm $f(x, y, z)$ đẳng cấp bậc n và khả vi tại (x, y, z) thì các đạo hàm riêng của f là các hàm đẳng cấp bậc $n - 1$.

Bài giải

1) Theo giả thiết: $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in V$. Đạo hàm theo λ hai vế đẳng thức này:

$$x f'_{\lambda x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + y f'_{\lambda y}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + z f'_{\lambda z}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = n\lambda^{n-1} f(x, y, z)$$

Cho $\lambda = 1$ ta có:

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = nf(x, y, z)$$

2) Theo trên $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z)$.

Đạo hàm theo x hai vế ta có:

$$\lambda f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f'_x(x, y, z), \quad \lambda \neq 0.$$

hay $\quad f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{n-1} f'_x(x, y, z).$

Tương tự $\quad f'_y(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{n-1} f'_x(x, y, z)$

$$f'_z(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{n-1} f'_x(x, y, z)$$

nghĩa là các đạo hàm riêng của f là các hàm đẳng cấp bậc n - 1.

125. Chứng minh rằng các hàm sau đây thoả mãn (là nghiệm) của các phương trình tương ứng:

1) $z = y\varphi(x^2 - y^2)$; $\qquad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$

2) $z = xy + x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

3) $f(x, y, z) = F(u, v, w)$ với $x^2 = vw$, $y^2 = uw$; $z^2 = uv$.

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = u F'_u + v F'_v + w F'_w.$$

(Giả thiết các hàm đều có các đạo hàm)

Bài giải

1) Đặt $u = x^2 - y^2$, $u'_x = 2x$, $u'_y = -2y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y.\varphi'_u.u'_x = 2xy\varphi'_u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x^2 - y^2) + y\varphi'_u.(-2y) = \varphi(x^2 - y^2) - 2y^2\varphi'_u$$

Thay vào phương trình ta có:

$$\frac{1}{x}.2xy\varphi'_u + \frac{1}{y}\left[\varphi_{(u)} - 2y^2\varphi'_u\right] = 2y\varphi'_u + \frac{\varphi}{y} - 2y\varphi'_u = \frac{y\varphi}{y^2} = \frac{z}{y^2}$$

2) Đặt $u = \frac{y}{x}, u'_x = -\frac{y}{x^2}, u'_y = \frac{1}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi_{(u)} + x\varphi'_u\left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\varphi'_u.(\frac{1}{x}).$$

Thay vào phương trình ta có một đồng nhất thức.

3) Theo giả thiết: $F(u, v, w) = f(\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv})$.

Đạo hàm hai vế đẳng thức này theo u, v, w, ta có:

$$F'_u = f'_y.\frac{w}{2\sqrt{uw}} + f'_z.\frac{v}{2\sqrt{uv}} \qquad (1)$$

$$F'_v = f'_x.\frac{w}{2\sqrt{vw}} + f'_z.\frac{u}{2\sqrt{uv}} \qquad (2)$$

$$F'_w = f'_x.\frac{v}{2\sqrt{vw}} + f'_y.\frac{u}{2\sqrt{uw}} \qquad (3)$$

Nhân lần lượt (1), (2), (3) với u, v, w rồi cộng lại ta có:

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = xf'_x + yf'_y + zf'_z.$$

126. Tính:

1) $d^2f(0, 0)$ nếu $f(x, y) = (1 + x)^m(1 + y)^n$.

2) $d^2f(0, 0, 0)$ nếu

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

$$f''_{xy}(0,0),\ f''_{yx}(0,0) \text{ nếu } f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} : x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 : x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4) d^2z nếu $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Bài giải

1) $f'_x(x, y) = m(1 + x)^{m-1}(1 + y)^n$, $f'_y = n(1 + y)^{n-1}(1 + x)^n$

$$f''_{x^2}(x,y) = m(m - 1)(1 + x)^{m-2}(1 + y)^n$$

$$f''_{xy}(x,y) = m.n(1 + x)^{m-1}(1 + y)^{n-1}$$

$$f''_{y^2} = n(n - 1)(1 + y)^{n-2}(1 + x)^n$$

$f''_{x^2}(0, 0) = m(m - 1)$, $f''_{xy}(0, 0) = mn$, $f''_{y^2}(0, 0) = n(n-1)$.

Vậy $d^2f(0,0) = m(m - 1)dx^2 + 2mndxdy + n(n - 1)dy^2$.

2) Theo (2.7) suy rộng cho trường hợp hàm 3 biến ta có:

$$d^2f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 z$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dydx + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2\partial z}dydz$$

Tính toán ta có:

$$d^2f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 -$$
$$- 4dxdy + 8dxdz + 4dydz.$$

3) Ta có: $f'_x(x, y) = y\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$, với $x^2 + y^2 \neq 0$.

$$f'_y(x,y) = x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ với } x^2 + y^2 \neq 0.$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0, \quad f'_y(0,0) = 0.$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y^3}{\Delta y^3} = -1.$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x^3} = 1$$

4) Ta có $dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv$,

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial u}du\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial v}dv\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right).du + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + d\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right).dv + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.d^2u + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}dvdu + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u}.du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v$$

Vậy vi phân cấp hai của z không có tính bất biến về dạng đối với các biến số.

127. Chứng minh các hàm sau đây thoả mãn các phương trình tương ứng:

1) $u = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (phương trình Laplace hai chiều).

2) $u = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

(phương trình Laplace ba chiều).

3) $u = \varphi(x - at) + \varphi(x + at)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(phương trình sóng một chiều).

Bài giải

1) Ta có: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(\dfrac{-y}{x^2}\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{với } x^2 + y^2 \neq 0.$$

Vậy $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$ với $x^2 + y^2 \neq 0$.

2) Ta có: $\dfrac{\partial u}{\partial r} = -\dfrac{1}{r^2}$, $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$

Do đó $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}.\dfrac{\partial r}{\partial x} = -\dfrac{1}{r^2}.\dfrac{x}{r} = -\dfrac{x}{r^3}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{1}{r^3} + \frac{x(-3r^2 r_x')}{r^6}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

Tương tự: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3y^2}{r^5}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3z^2}{r^5}$

Do đó: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\dfrac{3}{r^3} + \dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\dfrac{3}{r^3} + \dfrac{3}{r^3} = 0$

với $r \neq 0$

3) Đặt x - at = ξ, x + at = η

Ta có: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}=-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \qquad (2)$$

Do đó: từ (1), (2) ta có:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

128. Tìm đạo hàm cấp một và cấp hai của các hàm ẩn y = y(x), z = z(x,y) xác định từ các phương trình:

1) $y = x + \ln y$

2) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$ tại x = 1

3) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$

4) $z^3 - 3xyz = a^3$

5) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+10$, tính dz và d^2z.

6) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ với y = y(x), z = z(x).

Bài giải

1) Theo (2.6): $y'_x=\dfrac{-F'_x}{F'_y}$ ở đây $F(x,y) = x + \ln y - y = 0$, do đó:

$$y'_x = -\frac{1}{\frac{1}{y}-1} = \frac{y}{y-1}, \text{ đạo hàm hai vế theo x:}$$

$$y''_{x^2} = \frac{(y-1)y'-y'.y}{(y-1)^2} = \frac{-y'}{(y-1)^2} = \frac{-1}{(y-1)^2}.\frac{y}{(y-1)} = -\frac{y}{(y-1)^3}$$

2) Tại x = 1, phương trình trở thành $y^2 - y = 0$, có nghiệm là y = 0 và y = 1.

$$y'_x = -\frac{2x-2y+1}{2y-2x+1}$$

tại x = 1, y = 0: $y'_x = 3$, tại x = 1, y = 1: $y'_x = -1$.

$$y''_{x^2} = \frac{-(2y-2x+1)(2-2y')-(2x-2y+1)(2y'-2)}{(2y-2x+1)^2}$$

Do đó: $y''_{x^2} = 8$ tại x = 1, y = 0

$y''_{x^2} = -8$ tại x = 1, y = 1.

3) $$y'_x = -\frac{\left(y - \frac{ye^{xy}-ye^{xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}\right)}{\left(x - \frac{xe^{xy}-xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}\right)} = -\frac{y}{x}$$

$$y''_{x^2} = -\frac{xy'-y}{x^2} = \frac{y-x(-\frac{y}{x})}{x^2} = \frac{2y}{x^2}$$

4) Theo (2.6): $z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z}$, $z'_y = \frac{-F'_y}{F'_z}$,

ở đây $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3 = 0$.

do đó: $z'_x = -\dfrac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \dfrac{yz}{z^2 - xy}$ (1)

$$z'_y = \frac{xz}{z^2 - xy} \quad (z^2 - xy \neq 0) \qquad (2).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(z^2 - xy)yz'_x - yz(2zz'_x - y)}{(z^2 - xy)^2}$$

Thay z'_x ở (1) vào công thức này và tính toán ta có:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3 z}{(z^2 - xy)^3}$$

Tương tự: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{2yx^3 z}{(z^2 - xy)^3}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{z(z^4 - 2z^2 xy - x^2 y^2)}{(z^2 - xy)^3},\ z^2 - xy \neq 0.$$

5) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 10.$

Xét z = z(x, y), lấy vi phân hai vế đẳng thức này ta có:

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{y}{z}\,\frac{ydz - zdy}{y^2}$$

hay $\qquad yzdx - xydz - yzdz + z^2dy = 0 \qquad (1)$

Do đó $\qquad dz = \dfrac{z(ydx + zdy)}{y(x + z)} \quad (x \neq -z) \qquad (2)$

Lại lấy vi phân đẳng thức (1) ta có:

$$y(x + z)d^2z = zdxdy + (zdy - xdy)dz - ydz^2$$

Do đó và từ (2), ta có:

$$d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x + z)^3},\quad (x \neq -z).$$

6) Đạo hàm hệ đã cho theo x:

$$\begin{cases} 1+y'_x+z'_x=0 \\ 2x+2yy'_x+2zz'_x=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Do đó: $y' = \dfrac{x-z}{z-y}$, $z' = \dfrac{y-x}{z-y}$ $(z \neq y)$.

Lại lấy đạo hàm hệ (1) và tính toán ta có:

$$y'' = \frac{(x-z)^2+(y-x)^2+(z-y)^2}{(z-y)^3}$$

$$z'' = -y''$$

129. Chứng minh các hàm số ẩn xác định từ các phương trình sau thoả mãn các phương trình tương ứng:

1) $F(x, y, z) = 0$: $\dfrac{\partial x}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial z}.\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$

2) $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$: $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$ $(x, y > 0)$.

3) $F(x - az, y - bz) = 0$: $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$

4) $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$:

$$: \ (cy - bx)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Bài giải

1) Coi lần lượt: $z = z(x, y)$, $y = y(z, x)$, $x = x(y, z)$, theo (2.6) ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F'_x}{F'_z}, \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{-F'_z}{F'_y}, \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-F'_y}{F'_x}$$

Nhân các đẳng thức này vế với vế ta có:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

2) Lấy vi phân phương trình đã cho ta có:

$$2xy^2dx + 2x^2dy + 2xdx + 2ydy = 0.$$

hay $\quad x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0 \quad (1)$

Từ phương trình đã cho ta có:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},\quad y = \pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

Vì xy > 0, nên thay vào (1) và rút gọn ta có:

$$\sqrt{1-y^4}dx+\sqrt{1-x^4}dy=0 \text{ hay } \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0$$

3) Đặt u = x - az, v = y - bz, ta có F(u, v) = 0.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{F'_u.u'_x}{F'_u.u'_z+F'_v.v'_z}=-\frac{F'_u}{-aF'_u-bF'_v},$$

tương tự $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_v}{-aF'_u-bF'_v}$

Do đó: $\quad a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{aF'_u+bF'_v}{aF'_u+bF'_v}=1.$

4) Đặt ax + by + cz = u, ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(u) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x-a\varphi'_u}{2z-c\varphi'_u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y-b\varphi'_u}{2z-c\varphi'_u}$$

Do đó và tính toán ta có:

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

130. Biến đổi các phương trình sau bằng cách đổi biến số:

1) $(x + 1)^2y'' - 2(x + 1)y' + 2y = 0$, đặt $x + 1 = e^t$.

2) $(1 - x)^2 y'' - x y' = 0$, đạt $x = \cos t$.

3) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, đặt $u = x$, $v = x^2 + y^2$.

*4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a \neq 0$, đặt $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

*5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

*6) $(y - z)z'_x + (y + z)z'_y = 0$ với ẩn hàm $x = x(u,v)$, $u = y - z$, $v = y + z$

Bài giải

1) Ta có: $x + 1 = e^t$, $x = e^t - 1$, $x'_t = e^t$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t.e^{-t}$$

$$y''_{x^2} = (y'_t.e^{-t})'_t.t'_x = (e^{-t}.y''_{t^2} - e^{-t}y'_t)e^{-t} = e^{-2t}(y''_{t^2} - y'_t),$$

Do đó phương trình đã cho biến đổi thành:

$$e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 2e^t.e^{-t}.\frac{dy}{dt} + 2y = 0. \text{ hay } \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

2) Ta có: $x = \cos t$, $dx = -\sin t dt$.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{-\sin t dt} = -\frac{1}{\sin t}.\frac{dy}{dt}$$

$$y''_{x^2} = -\left(\frac{1}{\sin t}.\frac{dy}{dt}\right)'_t.t'_x = -\left(\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right)$$

Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình:

$$\sin^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}\right)+\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}=0 \quad \text{hay} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

3) Ta có $u = x$, $v = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}.2y,$$

Thay vào phương trình đã cho ta có:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\left(\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}\right)-x.2y\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

hay $\quad y\frac{\partial z}{\partial u}=0$ và $\frac{\partial z}{\partial u}=0$, là phương trình đã biến đổi.

4) Ta có $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, $\frac{\partial \xi}{\partial x}=1, \frac{\partial \xi}{\partial t}=-a, \frac{\partial \eta}{\partial x}=1, \frac{\partial \eta}{\partial t}=a$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Tương tự:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

Thay vào phương trình đã cho, ta có phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \text{ là phương trình theo biến mới } \xi,\ \eta.$$

5) Ta có: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Lấy đạo hàm các đẳng thức này theo x và y ta có:

$$1 = \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial x}-r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$0 = \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y}-r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$0 = \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$1 = \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial y}+r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Giải hệ này ta có:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{r} \qquad (1)$$

Tính:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}.\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}.\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Theo (1) thì:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}.\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cos\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}.\frac{\sin\varphi}{r}\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\sin^2\varphi}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial\varphi}.\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.\frac{\sin^2\varphi}{r^2} \quad (2)$$

Tương tự:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r} - 2\frac{\partial u}{\partial\varphi}.\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.\frac{\cos^2\varphi}{r^2} \quad (3)$$

Cộng vế với vế (2) và (3) ta có:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

6) $(y - z)z'_x + (y + z)z'_y = 0$ (1); $dx = x'_u du + x'_v dv$, $du = dy - dz$, $dv = dy + dz \Rightarrow dx = (x'_u + x'_v)dy + (x'_u - x'_v)dz$ (2); $dz = z'_x dx + z'_y dy \Rightarrow dx = \frac{dz}{z'_x} - \frac{z'_y}{z'_x}dy$ (3); (2), (3) $\Rightarrow x'_u + x'_v = \frac{-z'_y}{z'_x}$, $x'_u - x'_v = \frac{1}{z'_x} \Rightarrow z'_x = \frac{1}{x'_v - x'_u}$. $z'_y = \frac{x'_u + x'_v}{x'_v - x'_u}$; (1) $\Rightarrow x'_u + x'_v = \frac{u}{v}$

§3 CÔNG THỨC TAYLOR - CỰC TRỊ

3.1. Công thức Taylor

- Nếu $f(x, y)$ khả vi $n + 1$ lần tại lân cận điểm (x_0, y_0) thì trong lân cận này, ta có công thức Taylor cấp n:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}d^n(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}(x_0 + \theta dx, y_0 + \theta dy) \quad (T)$$

Với $x - x_0 = \Delta x = dx$; $y - y_0 = \Delta y = dy$.

$0 < \theta < 1$, $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}(x_0 + \theta dx, y_0 + \theta dy)$ gọi là số hạng dư.

Tương tự, ta có công thức Taylor cấp m của hàm n biến $f(M)$ với $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại lân cận điểm $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0 \ldots x_n^0)$:

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{m!}d^m f(M_0) + \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(M_c) \quad (T')$$

với $M_c(x_1^0+\theta dx_1, x_2^0 + \theta dx_2, ..., x_n^0 + \theta dx_n)$, $0 < \theta < 1$.

Trong công thức (T), (T') nếu thay $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ($x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = ... = x_n^0 = 0$) ta có công thức Maclaurin của hàm hai (n biến).

3.2 Định nghĩa cực trị - Điều kiện cần

Định nghĩa

Hàm $z = f(M)$, $M(x, y)$ xác định tại lân cận s của điểm $M_0(x_0, y_0)$ gọi là đạt cực đại (tiểu) tại M_0 nếu $\forall M \in s$:

$$f(M) \le f(M_0) \quad (f(M) \ge f(M_0)).$$

Kí hiệu $f_{max} = f(M_0)$ ($f_{min} = f(M_0)$).

Cực đại, cực tiểu gọi chung là cực trị.

Điều kiện cần:

- Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0) và có:

$$f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0)$$

thì $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, (x_0, y_0) gọi là một điểm dừng của hàm số.

Chú ý:

- Cực trị của hàm số cũng có thể đạt tại các điểm các đạo hàm không tồn tại hoặc bằng ∞. Điểm dừng và các điểm trên gọi chung là các điểm *bất thường* (tới hạn) của hàm số.

Điều kiện đủ

- Nếu hàm $z = f(x, y)$ liên tục trong lân cận s của điểm $M_0(x_0,y_0)$, có $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, $f''_{x^2}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{y^2}(x, y)$ liên tục trong s và $d^2f(x_0, y_0) \neq 0$ thì $f_{max}(f_{min}) = f(x_0, y_0)$ khi $d^2f(x_0, y_0) < 0$ (> 0) trong s.

Và f(x, y) không đạt cực trị tại (x_0, y_0) khi $d^2f(x_0, y_0)$ thay đổi dấu trong s.

Điều kiện đủ này có thể suy rộng cho hàm n biến bất kỳ có các đạo hàm đến cấp m (chẵn) liên tục tại M_0, và $f'(M_0) =$ $= f''(M_0) = ... = f^{(m-1)}(M_0) = 0$, $f^{(m)}(M_0) \neq 0$.

Trong trường hợp hàm hai biến z = f(x, y): đặt $A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$ thì điều kiện đủ trên tương đương với điều kiện: nếu tại M_0

$A < 0$ (> 0), $AC - B^2 > 0$ thì $f_{max}(f_{min}) = f(x_0, y_0)$

$AC - B^2 < 0$ thì f không đạt cực trị tại M_0.

$AC - B^2 = 0$ thì f có thể đạt hoặc không đạt cực trị tại M_0.

3.4. Cực trị của hàm ẩn

Cho hàm ẩn z = z(x, y) trên D xác định từ phương trình F(x, y, z) = 0, nếu hàm z hai lần khả vi liên tục trong D (các đạo hàm riêng cấp hai đều liên tục) và $(x_0, y_0) \in D$ là một điểm dừng của z thì (x_0, y_0) thoả mãn hệ:

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = 0,\ F_y(x_0, y_0, z_0) = 0,\ F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad z_0 = z(x_0, y_0)$$

và z đạt cực đại (tiểu) tại M_0 khi $d^2z(x_0, y_0) < 0$ (> 0) trong lân cận của M_0.

$$\text{Với } d^2z = -\frac{1}{F_z}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2\right).$$

3.5. Cực trị có điều kiện

Hàm z = f(x, y), $(x, y) \in D$ (1) gọi là đạt cực đại (tiểu) tại điểm $(x_0, y_0) \in D$, với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ (2).

Nếu với mọi $(x, y) \in$ s lân cận của (x_0, y_0), thoả mãn (2) ta có: $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $(\geq f(x_0, y_0))$.

Cực đại (tiểu) đó gọi chung là cực trị có điều kiện.

Cách tìm: nếu từ (2) giải được $y = y(x)$ thay lại (1) thì $z = f[x, y(x)]$ là hàm một biến đã biết cách tìm cực trị.

- Phương pháp Lagrange

Việc tìm cực trị của hàm (1) với điều kiện (2) đưa về việc tìm cực trị của hàm Lagrange:

$$\Phi(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \lambda \in R.$$

Điểm dừng (x_0, y_0) của Φ được xác định từ hệ:

$$\Phi'_x = 0, \Phi'_y = 0, \varphi(x, y) = 0$$

nếu $d^2\Phi(x_0, y_0) < 0$ (> 0) thì hàm (1) đạt cực đại (tiểu) với điều kiện (2) tại (x_0, y_0), (f, φ có đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục và $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$ tại (x_0, y_0)).

3.6. Bài toán tìm giá trị lớn (bé) nhất

Để tìm giá trị lớn (bé) nhất của hàm liên tục $z = f(x, y)$ trong miền compact D, ta

- Tìm các điểm dừng của z tại các điểm trong và trên biên của D (điểm dừng có điều kiện).

- Tính giá trị của z tại các điểm dừng đó, so sánh các giá trị đó ta sẽ có giá trị lớn (bé) nhất cần tìm.

BÀI TẬP

131. Viết công thức Taylor của các hàm sau đây tại các điểm tương ứng:

1) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$; $(-2, 1)$.

2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$; $(1, 1, 1)$.

3) $f(x, y) = e^x \sin y$, $(0, 0)$, cấp ba.

4) $f(x, y) = \cos x \cos y$, $(0, 0)$, cấp bốn.

Bài giải

1)Vì f(x, y) là một đa thức bậc hai của (x, y) nên các đạo hàm cấp ba của f(x, y) đều bằng không. Do đó công thức Taylor của f(x, y) chỉ có các số hạng đến bậc hai.

Theo (3.1):

$$f(x, y) = f(-2, 1) + f'_x(-2, 1).(x + 2) + f'_y(-2, 1)(y - 1) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f''_{x^2}(2,1).(x+2)^2 + 2f''_{xy}(-2,1).(x+2)(y-1) + f''_{y^2}(-2,1).(y-1)^2\right]$$

ở đây: $f(-2, 1) = 1$, $f'_x(x, y) = -2x + 2y - 6$, $f'_x(-2, 1) = 0$.

$$f'_y(x,y) = 2x + 6y - 2,\ f'_y(-2, 1) = 0,$$

$$f''_{x^2}(x, y) = -2,\ f''_{xy}(x, y) = 2,\ f''_{y^2}(x, y) = 6.$$

Vậy công thức Taylor phải tìm là:

$$f(x, y) = 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2.$$

2) Tương tự như 1) công thức Taylor của f(x, y, z) cũng chỉ có đến các số hạng lũy thừa bậc hai:

$$f(x, y, z) = f(1, 1, 1) + \frac{1}{1!}[f'_x(1, 1, 1).(x - 1) + f'_y(1, 1, 1).(y - 1) +$$

$$+ f'_z(1, 1, 1).(z - 1)] + \frac{1}{2!}[f''_{x^2}(1, 1, 1).(x - 1)^2 + f''_{y^2}(1, 1, 1).(y - 1)^2 +$$

$$+ f''_{z^2}(1, 1, 1).(z - 1)^2 + 2f''_{xy}(1, 1, 1).(x - 1).(y - 1) +$$

$$+ 2f''_{yz}(1, 1, 1).(y - 1).(z - 1) + 2f''_{zx}(1, 1, 1).(z - 1).(x - 1)]$$

ở đây: $f'(1,1,1) = 0$.

$f'_x(x,y,z) = 2x + 2y - 4$; $\quad f'_x(1, 1, 1) = 0$

$f'_y(x,y,z) = 2y + 2x - z - 3$; $\quad f'_y(1, 1, 1) = 0$

$f'_z(x,y,z) = 2z - y - 1$; $\quad f'_z(1, 1, 1) = 0$

$f''_{x^2}(x,y,z) = 2$, $f''_{y^2}(x,y,z) = 2$, $f''_{z^2}(x,y,z) = 2$,

$f''_{xy}(x,y,z) = 2$, $f''_{yz}(x,y,z) = -1$, $f''_{zx}(x,y,z) = 0$.

Vậy công thức Taylor phải tìm là:

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 +$$
$$+ 2(x - 1)(y - 1) - (y - 1)(z - 1)$$

3) $f(x, y) = e^x \sin y$.

Ta có $f(0, 0) = 0$, $f'_x = e^x \sin y$, $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y = e^x \cos y$,

$f'_y(0, 0) = 1$, $f''_{x^2} = e^x \sin y$, $f''_{x^2}(0, 0) = 0$,

$f''_{xy} = e^x \cos y$, $f''_{xy}(0,0) = 1$, $f''_{y^2} = -e^x \sin y$,

$f''_{y^2}(0,0) = 0$, $f'''_{x^3} = e^x \sin y$, $f'''_{x^3}(0) = 0$,

$f'''_{y^3} = -e^x \cos y$, $f'''_{y^3}(0,0) = -1$, $f'''_{x^2y} = e^x \cos y$,

$f'''_{x^2y}(0,0) = 1$, $f'''_{y^2x} = -e^x \sin y$, $f'''_{y^2x}(0,0) = 0$.

Do đó: $f(x, y) = y + xy + \dfrac{3x^2y - y^3}{3!} + R_3(x,y)$

4) Tương tự, ta có:

$$f(x,y) = \cos x \cos y = 1 - \frac{x^2 + y^2}{2!} + \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{4!} + R_4(x,y)$$

132. Tìm cực trị của các hàm:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

2) $z = x^3y^2(6 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$

3) $z = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

4) $z = 5 - \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{2}{3}}$

5) $z = \left(x^2 + y^2\right)e^{-(x^2+y^2)}$

6) $z = x + y + 4\sin x \sin y$

7) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

8) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

9) $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $(x, y, z > 0)$

Bài giải

1) Điểm dừng của hàm số được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y - 2 = 0 \\ z'_y = 2y + x - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{giải ta có} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Theo (3.3), ta tính:

$$z''_{x^2} = 2,\ z''_{xy} = 1,\ z''_{y^2} = 2$$

$$A = z''_{x^2}(1, 0) = 2,\ B = z''_{xy}(1, 0) = 1,\ C = z''_{y^2}(1, 0) = 2.$$

ở đây $A = 2 > 0$, $AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$.

Vậy z đạt cực tiểu tại (1,0), $z_{min} = z(1,0) = -1$.

2) $\begin{cases} z = x^3y^2(6 - x - y);\ x, y > 0 \\ z = 6x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 \end{cases}$

$$\begin{cases} z'_x = 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ z'_y = 12x^3y - 2yx^4 - 3x^3y^2 = 0 \end{cases}$$

hay $\begin{cases} z'_x = x^2y^2(18 - 4x - 3y) = 0 \\ z'_y = x^3y(12 - 2x - 3y) = 0 \end{cases}$

Giải hệ này với điều kiện x, y > 0 ta có điểm dừng (3, 2).

Tính:

$$z''_{x^2} = 36xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3$$

$$z''_{xy} = 36x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2$$

$$z''_{y^2} = 12x^3 - 2x^4 - 6yx^3$$

Do đó: $A = z''_{x^2}(3, 2) = -144$, $B = z''_{xy}(3, 2) = -108$

$$C = z''_{y^2}(3, 2) = -162, \ AC - B^2 = 144.162 - 108^2 > 0$$

ở đây $A = -144 < 0$ nên z đạt cực đại tại (3,2):

$$z_{max} = z(3,2) = 108.$$

Chú ý

- Nếu thay điều kiện $x > 0$, $y > 0$ bằng điều kiện $x > 0$, $y \geq 0$ thì ta có thêm các điểm dừng: (x, 0) (các điểm trên Ox). Rõ ràng tại (x, 0): $AC - B^2 = 0$, nên ta chưa thể khẳng định tại đó hàm có cực trị hay không. Để khẳng định ta phải xét theo định nghĩa:

$$\Delta z(x, 0) = (x + \Delta x)^3 \Delta y^2 [6 - (x + \Delta x) - \Delta y]$$

$$= (x + \Delta x)^2 (\Delta y^2)[(6 - \Delta y)(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2]$$

Rõ ràng khi Δx, Δy khá bé thì:

$\Delta z(x, 0) \leq 0$ khi $-\infty < x < 0$, $6 < x < +\infty$.

$\Delta z(x, 0) \geq 0$ khi $0 < x < 6$.

Vậy tại (x, 0) với $-\infty < x < 0$, $6 < x < +\infty$ hàm z đạt cực đại:

$$z_{max} = z(x, 0) = 0.$$

và với $0 < x < 6$, hàm z đạt cực tiểu: $z_{min} = z(x, 0) = 0$ tại (0, 0) và tại (6, 0) hàm z không đạt cực trị vì $\Delta z(x, 0)$ thay đổi dấu qua các điểm đó.

3) $z = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, đặt $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = u$

Ta có: $z'_x = \dfrac{y(1-2x^2-y^2)}{u}$, $z'_y = \dfrac{x(1-x^2-2y^2)}{u}$

Hệ $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ cho các điểm dừng:

$P_1(0, 0)$, $P_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P_3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P_4\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P_5\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Tính:

$$z''_{x^2} = \frac{-xy(3-2x^2-3y^2)}{u^3}$$

$$z''_{xy} = \frac{1-3x^2-3y^2+2x^4+3x^2y^2+2y}{u^3}$$

$$z''_{y^2} = \frac{-xy(3-2x^2-2y^2)}{u^3}$$

Xét tại các điểm dừng, tính toán ta có:

Tại $P_1(0, 0)$: $AC - B^2 = -1 < 0$: hàm z không đạt cực trị.

Tại $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$: $AC - B^2 = 4 > 0$ nên P_2, P_3, P_4, P_5 là các điểm cực trị của z.

Tại P_2, P_3: $A = z''_{x^2}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{4}{9} < 0$ nên z đạt cực đại tại các điểm đó:

$$z_{max} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Tại P_4, P_5: $A = z''_{x^2}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{4}{9} > 0$ nên z đạt cực tiểu tại các điểm đó:

$$z_{min} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

4) $z = 5 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$

Ta thấy $\forall(x, y) \in R^2$, $z - 5 \leq 0$ hay $z \leq 5 = z(0, 0)$, do đó z đạt cực đại tại (0, 0), $z_{max} = 5$.

5) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Ta có: $$z'_x = 2[x(1 - x^2 - y^2)]e^{-(x^2+y^2)}$$

$$z'_y = 2[y(1 - x^2 - y^2)]e^{-(x^2+y^2)}$$

Hệ $z'_x = 0, z'_y = 0$ cho các điểm dừng là điểm (0, 0) và các điểm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

- Xét tại lân cận điểm (0, 0) ta có $z \geq 0 = z(0, 0)$, do đó z đạt cực tiểu tại (0, 0): $z_{min} = 0$.

- Xét các điểm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Đặt $t = x^2 + y^2$ thì $z = t.e^{-t}$ là hàm một biến,

$$z'_t = e^{-t}(1 - t) = 0 \text{ khi } t = 1,\ z'_t < 0\ (> 0) \text{ khi } t > 1\ (< 1).$$

Vậy z đạt cực đại tại t = 1, nghĩa là nó đạt cực đại tại các điểm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $z_{max} = e^{-1}$.

6) $z = x + y + 4\sin x \sin y$.

Để tìm điểm dừng của z ta có hệ:

$$\begin{cases} z'_x = 1 + 4\cos x \sin y = 1 - 2\sin(x - y) + 2\sin(x + y) = 0 \\ z'_y = 1 + 4\sin x \cos y = 1 + 2\sin(x - y) + 2\sin(x + y) = 0 \end{cases}$$

Từ hệ này ta có: $$x + y = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + m\pi$$
$$x - y = k\pi \qquad (1)$$

và các điểm dừng:

$$M_{m,k}\begin{cases} x = (-1)^{m+1}.\dfrac{\pi}{12} + (m+k)\dfrac{\pi}{2} \\ y = (-1)^{m+1}.\dfrac{\pi}{12} + (m-k)\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad (m, k \in Z) \quad (2)$$

Tính:

$$z''_{x^2} = -4\sin x \sin y,\ z''_{xy} = 4\cos x\cos y,\ z''_{y^2} = -4\sin x\sin y$$

Tại các điểm dừng (2) và theo (1):

$$AC - B^2 = -16\cos k\pi.\cos\left[(-1)^{m+1}.\frac{\pi}{6} + m\pi\right]$$

$$= (-1)^{m+k+1}.16\cos\frac{\pi}{6} \quad (m, k \in Z).$$

z đạt cực trị khi $AC - B^2 > 0$, hay $m + k + 1$ là số chẵn hay $k + m$ là số lẻ.

Tính $A = z''_{x^2}(M_{m,k}) = (-1)^m\sqrt{3} - (-1)^k.2$.

Nếu m chẵn, k lẻ thì $A = \sqrt{3} + 2 > 0$:

z đạt cực tiểu: $z_{min} = z(M_{m,k}) = \pi - 2 - \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{6}$

Nếu m lẻ, k chẵn thì: $A = -\sqrt{3} - 2 < 0$:

z đạt cực đại: $z_{max} = z(M_{m,k}) = m\pi + 2 + \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{6}$.

7) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Điểm dừng của z được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ z'_y = 4y^3 - 4y + 4x = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có các điểm dừng:

$$M_1(0, 0),\ M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Tính: $z''_{x^2} = 12x^2 - 4,\ z''_{xy} = 4,\ z''_{y^2} = 12y^2 - 4.$

Tại M_1: $AC - B^2 = 16 - 16 = 0$, ta sẽ xét sau.

Tại M_2, M_3: $AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ và $A = 20 > 0$.

Do đó z đạt cực tiểu tại M_2, M_3; $z_{min} = -8$.

Bây giờ xét tại M_1 vì $AC - B^2 = 0$ nên phải xét:

$$\Delta z(0, 0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2(\Delta x - \Delta y)^2$$

nếu $\Delta x = \Delta y$ thì $\Delta z(0, 0) = 2\Delta x^4 \geq 0$

nếu $\Delta x = -\Delta y$ thì $\Delta z(0, 0) = 2\Delta x^2(\Delta x^2 - 4)$

và $\Delta z(0, 0) \leq 0$ khi $0 \leq |\Delta x| \leq 2$.

Vậy $\Delta z(0, 0)$ thay đổi dấu trong lân cận của M_1, nghĩa là z không đạt cực trị tại M_1.

8) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Điểm dừng của u được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} u'_x = 2x - y + 1 = 0 \\ u'_y = 2y - x = 0 \\ u'_z = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

hệ này có nghiệm duy nhất: $x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = 1$

và ta có 1 điểm dừng: $M(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$.

Ta tính:

$$d^2u(M) = u''_{x^2}dx^2 + u''_{y^2}dy^2 + u''_{z^2}dz^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{yz}dydz + 2u''_{zx}dzdx$$

$$= 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2dxdy$$

$$= 2dz^2 + (dx^2 + dy^2) + (dx - dy)^2 > 0$$

Do đó, theo (3.3), u đạt cực tiểu tại M:

$$u_{min} = u(M) = -\frac{4}{3}.$$

9) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x, y, z > 0).$

Hệ: $\begin{cases} u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x} = 0 \\ u'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \\ u'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \end{cases}$ cho điểm dừng duy nhất: $M(\frac{1}{2}, 1, 1)$

Ta tính: $u''_{x^2} = \frac{y^2}{2x^3}$, $u''_{xy} = \frac{-y}{2x^2}$, $u''_{zx} = 0$, $u''_{y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}$

$$u''_{z^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}, \quad u''_{yz} = \frac{-2z}{y^2}.$$

$$d^2u(M) = u''_{x^2}(M)dx^2 + u''_{y^2}(M)dy^2 + u''_{z^2}(M)dz^2 +$$

$$+ 2u''_{xy}(M)dxdy + 2u''_{yz}(M)dydz + 2u''_{zx}(M)dzdx$$

$$= 4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy - 4dydz.$$

Đây là một dạng toàn phương của các biến dx, dy, dz.

Theo tiêu chuẩn Sylvester trong đại số, ta xét:

$$A_1 = 4 > 0, \; A_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \; A_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

Vậy theo tiêu chuẩn đó $d^2u(M)$ là xác định dương nên hàm u đạt cực tiểu tại M: $u_{min} = u(M) = 4$.

133. Tìm cực trị của các hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định từ các phương trình:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

2) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

3) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$

4) $x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

Bài giải

1) Ở đây $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

Rõ ràng phương trình xác định hai hàm ẩn: $z = z_1(x, y)$ và $z = z_2(x, y)$. Theo (3.4) điểm dừng của z được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 2 = 0,\ F'_y = 2y + 4 = 0 \\ F'(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được:

$$x_1 = 1,\ y_1 = -2 \text{ ứng với } z_1 = 8$$

$$x_2 = 1,\ y_2 = -2 \text{ ứng với } z_2 = -2$$

Cũng theo (3.4), ta xét d^2z

Ở đây $F''_{x^2} = 2,\ F''_{xy} = 0,\ F''_{y^2} = 2,$

$$F'_z = 2z - 6,\ F'_z(1, -2, 8) = 10,\ F'_z(1, -2, -2) = -10$$

Do đó: $d^2z_1 = -\dfrac{1}{10}(2dx^2 + 2dy^2) < 0$

$$d^2z_2 = -\frac{1}{-10}(2dx^2 + 2dy^2) > 0$$

khi $x = 1$, $y = -2$, $(z_1)_{max} = 8$, $(z_2)_{min} = -2$

Từ phương trình đã cho ta có:

$$z = 3 \pm \sqrt{25 - (x-1)^2 + (y+2)^2}$$

Miền xác định D của z là hình tròn:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 \le 25$$

Trên biên của D, tức là đường tròn $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

z_1 đạt cực tiểu: $(z_1)_{min} = 3$, z_2 đạt cực đại: $(z_2)_{max} = 3$

2) $F(x, y, z) = x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

Rõ ràng phương trình này xác định hai hàm ẩn:

$$z = z_1(x, y),\quad z = z_2(x, y)$$

Các điểm dừng của z được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} F_x' = 3x^2 - 3 = 0,\; F_y' = -2y + 4 = 0 \\ x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có:

$M_1(-1, 2)$ với $z = 1$

$M_2(-1, 2)$ với $z = -2$

$M_3(1, 2)$ với $z = 2$

$M_4(1, 2)$ với $z = -3$

Ta tính: $F''_{x^2} = 6x$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{y^2} = -2$, $F'_z = 2z + 1$

Xét $d^2z(M_1) = -\dfrac{1}{3}(-6dx^2 - 2dy^2) = \dfrac{1}{3}(6dx^2 + 2dy^2) > 0$

$$d^2z(M_2) = -\frac{1}{-3}(-6dx^2 - 2dy^2) = -\frac{1}{3}(6dx^2 + 2dy^2) < 0$$

$$d^2z(M_3) = -\frac{1}{5}(6dx^2 - 2dy^2)$$

$$d^2z(M_4) = \frac{1}{5}(6dx^2 - 2dy^2)$$

Do đó: $z_{min} = z(M_1) = 1$

$z_{max} = z(M_2) = -2$

Còn tại M_3, M_4, z không có cực trị vì $d^2z(M_3)$, $d^2z(M_4)$ thay đổi dấu trong lân cận của M_3, M_4, chẳng hạn xét $d^2z(M_3)$

khi dx = dy thì $d^2z(M_3) = -\frac{4}{5}dx^2 < 0$,

khi dx = 0 thì $d^2z(M_3) = \frac{2}{5}dy^2 > 0$.

Từ phương trình đã cho, giải ra đối với z ta có:

$$z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{33 - 4x^2 + 4y^2 + 12x - 16xy}\right)$$

Do đó z còn có cực trị tại những điểm trên đường cong:

$$4x^3 - 4y^2 - 12x + 16y - 33 = 0:$$

$$(z_1)_{min} = -\frac{1}{2},\ (z_2)_{max} = -\frac{1}{2}.$$

3) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$

Điểm dừng của z được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} F'_x = 2x - z + 2 = 0,\ F'_y = 2y - z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có:

$M_1(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6})$ với $z = -4 + 2\sqrt{6}$

$M_2(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6})$ với $z = -4 - 2\sqrt{6}$

Tính: $F''_{x^2} = 2$, $F''_{y^2} = 2$, $F''_{xy} = 0$, $F'_z = 2z - x - y + 2$

Do đó: $d^2z(M_1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 - dy^2) < 0$

$$d^2z(M_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2) > 0$$

Vậy $\quad z_{max} = z(M_1) = -3 + \sqrt{6}$

$z_{min} = z(M_2) = -3 - \sqrt{6}.$

4) $F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

Hệ: $\begin{cases} F'_x = 4x^3 - 4x = 0, F'_y = 4y^3 - 4y = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \end{cases}$

Cho các điểm dừng của z:

$M_1(0, 0)$ với $z = \sqrt{2}$, $M_2(0, 0)$ với $z = -\sqrt{2}$

$M_3(1, 1)$ với $z = \sqrt{1+\sqrt{3}}$, $M_4(-1, -1)$ với $z = \sqrt{1+\sqrt{3}}$

$M_5(1, 1)$ với $z = -\sqrt{1+\sqrt{3}}$, $M_6(-1,-1)$ với $z = -\sqrt{1+\sqrt{3}}$

Tính: $\quad F''_{x^2} = 12x^2 - 4,\ F''_{y^2} = 12y^2 - 4$

$F''_{xy} = 0,\ F'_z = 4z^3 - 4z.$

Do đó:

$$d^2z(M_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(dx^2 + dy^2\right) > 0,\ d^2z(M_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(dx^2 + dy^2\right) < 0.$$

$$d^2z(M_{3,4}) = \frac{-2\left(dx^2 + dy^2\right)}{\sqrt{3+3\sqrt{3}}} < 0,\ d^2z(M_{5,6}) = \frac{2\left(dx^2 + dy^2\right)}{\sqrt{3+3\sqrt{3}}} > 0.$$

Vậy $z_{min} = z(M_1) = \sqrt{2}$, $z_{max} = z(M_2) = -\sqrt{2}$

$z_{max} = z(M_{3,4}) = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ $\ z_{max} = z(M_{5,6}) = -\sqrt{1+\sqrt{3}}.$

134. Tìm cực trị của các hàm số sau với các điều kiện tương ứng:

1) $z = x + 2y,\quad x^2 + y^2 = 5$

2) $z = x^2 + y^2$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

3) $u = x^2 + y^2 + z^2$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$

4) $u = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3$, $x_1 + x_2 + ... + x_n = na$ $(a > 0)$

5) $u = xy^2z^3$, $x + y + z = a$ $(x, y, z, a > 0)$

6) $u = \sin x \sin y \sin z$, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ $(x, y, z > 0)$

7) $u = \frac{x^n + y^n + z^n}{3}$, $x + y + z = s$ $(x, y, z, s > 0)$

*8) $u = xy + xz$, $x^2 + y^2 = 2$, $x + z = 2$ $(x, y, z > 0)$

*9) $u = xyz$, $xy + yz + zx = 8$ $(x, y, z > 0)$

*10) $u = xyz$, $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$

Bài giải

1) Theo (3.5) ta lập hàm Lagrange:

$$\Phi(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x + 2y + \lambda(5 - x^2 - y^2).$$

điểm dừng của z được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} \Phi'_x = 1 - 2\lambda x = 0, \ \Phi'_y = 2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu ta có:

$$x = \frac{1}{2\lambda}, y = \frac{1}{\lambda}$$

thay vào phương trình thứ ba:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5$$

do đó $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ và $x = \pm 1$, $y = \pm 2$.

Và ta có điểm dừng:

$$M_1(1, 2) \text{ ứng với } \lambda = \frac{1}{2},$$

$$M_2(-1, -2) \text{ ứng với } \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Tính $\Phi''_{x^2} = -2\lambda$, $\Phi''_{y^2} = -2\lambda$, $\Phi''_{xy} = 0$.

Do đó $d^2\Phi(M_1) = -(dx^2 + d^2y) < 0$, $d^2\Phi(M_2) = dx^2 + d^2y > 0$.

Vậy z đạt cực đại (tiểu) với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

tại M_1 (M_2), $z_{max} = z(M_1) = 5$

$$z_{min} = z(M_2) = -5.$$

2) Ta lập hàm Lagrange:

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(6 - 3x - 2y)$$

Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} \Phi'_x = 2x - 3\lambda = 0 \\ \Phi'_y = 2y - 2\lambda = 0 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

Hệ này cho điểm dừng $M\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$ ứng với $\lambda = \frac{12}{13}$.

Xét $d^2\Phi$, ta tính $\Phi''_{x^2} = 2$, $\Phi''_{y^2} = 2$, $\Phi''_{xy} = 0$

Do đó: $d^2\Phi = 2(dx^2 + dy^2) > 0$. Vậy $z_{min} = z(M) = \frac{36}{13}$.

3) Lập hàm Lagrange:

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} - z^2\right)$$

Hệ $\begin{cases} \Phi'_x = 2x - \dfrac{2x\lambda}{4} = 0 \\ \Phi'_y = 2y - \dfrac{2y\lambda}{2} = 0 \\ \Phi'_z = 2z - 2z\lambda = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x\left(1 - \dfrac{\lambda}{4}\right) = 0 \\ y\left(1 - \dfrac{\lambda}{2}\right) = 0 \\ z(1-\lambda) = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1 \end{cases}$

Nếu $\lambda = 1$ thì $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm 1$

$\lambda = 2$ thì $x = 0$, $z = 0$, $y = \pm \sqrt{2}$

$\lambda = 4$ thì $y = 0$, $z = 0$, $x = \pm 2$

Vậy ta có các điểm dừng:

$M_{1,2}(0, 0, \pm 1)$ với $\lambda = 1$,

$M_{3,4}(0, \pm \sqrt{2}, 0)$ với $\lambda = 2$,

$M_{5,6}(\pm 2, 0, 0)$ với $\lambda = 4$.

Ta có:

$$\Phi''_{x^2} = 2\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right), \quad \Phi''_{y^2} = 2\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right),$$

$$\Phi''_{z^2} = 2(1-\lambda), \quad \Phi''_{xy} = 0, \quad \Phi''_{yz} = 0, \quad \Phi''_{zx} = 0.$$

Do đó:

$$d^2\Phi(M_{1,2}) = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right)dx^2 + 2(1 - \frac{1}{2})dy^2 = \frac{3}{2}dx^2 + dy^2 > 0$$

$$d^2\Phi(M_{3,4}) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)dx^2 - dz^2 = dx^2 - dz^2$$

$$d^2\Phi(M_{5,6}) = 2\left(1 - \frac{4}{2}\right)dy^2 + 2(1-4)dz^2 = -(dy^2 + 6dz^2) < 0$$

Vậy $u_{min} = u(M_{1,2}) = 1$, $u_{max} = u(M_{5,6}) = 4$.

Tại $M_{3,4}$, u không đạt cực trị vì khi $dx = 0$, $dz \neq 0$ thì $d^2\Phi(M_{3,4}) = -dz^2 < 0$, còn khi $dx \neq 0$, $dz = 0$ thì $d^2\Phi(M_{3,4}) = dx^2 > 0$, nghĩa là $d^2\Phi(M_{3,4})$ thay đổi dấu trong lân cận của $M_{3,4}$.

4) $u = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3$, $x_1 + x_2 + ... + x_n = na \quad (a > 0)$

Lập hàm Lagrange:

$$\Phi = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 + \lambda(na - x_1 - x_2 - ... - x_n).$$

Điểm dừng của u được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} \Phi'_{x_i} = 3x_i^2 - \lambda = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n) \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = na \end{cases}$$

Giải hệ này ta có điểm dừng M(a, a, ..., a) ứng với $\lambda = 3a^2$.

Xét $d^2\Phi$ ta có:

$$\Phi''_{x_i x_j} = \begin{cases} 6x_i, \; i = j \\ 0, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, ..., n) \end{cases}$$

Do đó:

$$d^2\Phi(M) = 6(x_1dx_1^2 + x_2dx_2^2 + ... + x_ndx_n^2) = 6a(dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2) > 0$$

Vậy $u_{min} = u(M) = na^3$.

5) $u = xy^2z^3$, $x + y + z = a$

Rõ ràng cực trị của u và $v = \ln u$ là như nhau, do đó ta xét cực trị của: $v = \ln u = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$ với điều kiện $x + y + z = a$

Lập hàm Lagrange:

$$\Phi = \ln x + 2\ln y + 3\ln z + \lambda(a - x - y - z)$$

Hệ: $\Phi'_x = \dfrac{1}{x} - \lambda = 0$, $\Phi'_y = \dfrac{2}{y} - \lambda = 0$, $\Phi'_z = \dfrac{3}{z} - \lambda = 0$, $x + y + z = a$

Cho điểm dừng: $x = \dfrac{a}{6}$, $y = \dfrac{a}{3}$, $z = \dfrac{a}{2}$ ứng với $\lambda = \dfrac{6}{a}$.

Xét: $$d^2\phi = -\left(\frac{1}{x^2}dx^2 + \frac{2}{y^2}dy^2 + \frac{3}{z^2}dz^2\right) < 0.$$

$$u_{max} = u\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{3}, \frac{a}{2}\right) = \frac{a^6}{432}$$

6) $u = \sin x \sin y \sin z$, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ $(x, y, z > 0)$.

Rõ ràng cực trị của hàm u và hàm $v = \ln u = \ln\sin x + \ln\sin y + \ln\sin z$ là như nhau. Do đó ta lập hàm Lagrange:

$$\Phi = \ln\sin x + \ln\sin y + \ln\sin z + \lambda\left(\frac{\pi}{2} - x - y - z\right)$$

Điểm dừng của v (cũng là của u) được xác định từ hệ:

$$\Phi'_x = \cot g x - \lambda = 0, \ \Phi'_y = \cot g y - \lambda = 0,$$

$$\Phi'_z = \cot g z - \lambda = 0, \ x + y + z = \frac{\pi}{2}, \ (x, y, z > 0)$$

Giải hệ này ta có:

$$x = y = z = \frac{\pi}{6}, \lambda = \sqrt{3}$$

Tính: $$\Phi''_{x^2} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \Phi''_{y^2} = -\frac{1}{\sin^2 y}, \Phi''_{z^2} = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

$$\Phi''_{xy} = 0, \Phi''_{yz} = 0, \Phi''_{zx} = 0$$

Do đó $$d^2\phi = -\left(\frac{dx^2}{\sin^2 x} + \frac{dy^2}{\sin^2 y} + \frac{dz^2}{\sin^2 z}\right) < 0$$

Vậy $$u_{max} = u\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

7) $u = \frac{x^n + y^n + z^n}{3}$, $x + y + z = s$ $(n > 1;\ x, y, z, s > 0)$

Xét hàm Lagrange:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^n + y^n + z^n) + \lambda(s - x - y - z)$$

Hệ $\Phi'_x = \frac{nx^{n-1}}{3} - \lambda = 0$, $\Phi'_y = \frac{ny^{n-1}}{3} - \lambda = 0$, $\Phi'_z = \frac{nz^{n-1}}{3} - \lambda = 0$,

$$x + y + z = 1.s$$

cho điểm dừng $M\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right)$ với $\lambda = \frac{n}{3}\left(\frac{s}{3}\right)^{n-1}$.

Tính:

$$\Phi''_{x^2} = \frac{n(n-1)}{3}x^{n-2},\ \Phi''_{y^2} = \frac{n(n-1)}{3}y^{n-2},\ \Phi''_{z^2} = \frac{n(n-1)}{3}z^{n-2},$$

$$\Phi''_{xy} = \Phi''_{yz} = \Phi''_{zx} = 0.$$

Do đó: $\quad d^2\Phi(M) = \frac{n(n-1)}{3}\left(\frac{s}{3}\right)^{n-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0.$

Vậy: $\quad u_{min} = u\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right) = \left(\frac{s}{3}\right)^n.$

Từ đó:

$$\frac{x^n + y^n + z^n}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^n \text{ vì } s = x + y + z \quad (x, y, z > 0).$$

8) $u = xy + xz$, $x^2 + y^2 = z$, $x + z = 2$ $(x, y, z > 0)$.

Vì $x + z = 2$ nên $z = 2 - x$ và bài toán đưa về việc tìm cực trị của hàm $u = xy + 2x - x^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 2$.

Lập hàm Lagrange của bài toán:

$$\Phi = xy + 2x - x^2 + \lambda(2 - x^2 - y^2).$$

Do đó, hệ sau đây sẽ xác định điểm dừng của u:

$$\begin{cases} \Phi'_x = -2(1+\lambda)x + y + 2 = 0 & (1) \\ \Phi'_y = 2 - 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 2 & (3) \end{cases}$$

Giải hệ gồm (1) và (2) ta có:

$$x = \frac{4\lambda}{4\lambda(1+\lambda)-1}, \ y = \frac{2}{4\lambda(1+\lambda)-1}$$

Thay vào (3) ta có phương trình để xác định λ:

$$16\lambda^4 + 32\lambda^3 - 8\lambda - 1 = 0$$

Phương trình này có 4 nghiệm:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \ \lambda_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{4}$$

Thử ta thấy chỉ có $\lambda_1 = \frac{1}{2} > 0$ thoả mãn điều kiện của bài toán vì khi đó $x = 1 > 0$, $y = 1 > 0$. Vậy có điểm dừng M(1, 1).

Xét $d^2\Phi = -2\lambda dy^2 - 2(1+\lambda)dx^2 + 2dxdy$

và

$$d^2\Phi(M) = -dy^2 - 3dx^2 + 2dxdy.$$

Từ phương trình này liên hệ $x^2 + y^2 = 2$ ta có:

$xdx + ydy = 0$, tại M: $dx + dy = 0$ hay $dy = -dx$

và

$$d^2\Phi(M) = -4dx^2 - 2dx^2 = -6dx^2 < 0.$$

Vậy $u_{max} = u(1, 1) = 2$.

9) $u = xyz$, $xy + yz + zx = 8$, $(x, y, z > 0)$.

Rõ ràng cực trị của u và $v = \ln u$ là như nhau, do đó ta lập hàm Lagrange:

$$\Phi(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z + \lambda(8 - xy - yz - zx)$$

Hệ
$$\begin{cases} \Phi'_x = \dfrac{1}{x} - \lambda(y+z) = 0 & (1) \\ \Phi'_y = \dfrac{1}{y} - \lambda(x+z) = 0 & (2) \\ \Phi'_z = \dfrac{1}{z} - \lambda(x+y) = 0 & (3) \\ xy + yz + zx = 8 & (4) \end{cases}$$

Cho điểm dừng $M\left(\sqrt{\dfrac{8}{3}}, \sqrt{\dfrac{8}{3}}, \sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)$ với $\lambda = \dfrac{3}{16}$

(Lấy (1) trừ (2) rồi (1) trừ (3), ta suy ra $x = y = z$, sau đó thay $y = x$, $z = x$ vào (4) ta suy ra $x = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$).

Ta có:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2},\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2},\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -\lambda,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} = -\lambda,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} = -\lambda.$$

Vậy $d^2\Phi(M) = -\dfrac{3}{8}(dx^2 + dy^2 + dxdy + dydz + dzdx)$

Từ phương trình liên hệ ta có:

$$(y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0.$$

Tại M ta có:

$$2\sqrt{\frac{8}{3}}(dx + dy + dz) = 0 \text{ hay } dz = -(dx + dy).$$

Do đó: $d^2\Phi(M) = \dfrac{-3}{a}(dx^2 + dy^2 + dxdy) < 0.$

Và $u_{max} = u(M) = \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{8}{3}}.$

10) $u = xyz$, $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

Lập hàm Lagrange:

$$\Phi(x,y,z) = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8)$$

Điểm dừng của u là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \Phi'_x = yz + \lambda_1 + \lambda_2(y+z) = 0 & (1) \\ \Phi'_y = xz + \lambda_1 + \lambda_2(x+z) = 0 & (2) \\ \Phi'_z = xy + \lambda_1 + \lambda_2(x+y) = 0 & (3) \\ x + y + z = 5 & (4) \\ xy + yz + zx = 8 & (5) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) ta có: $z(x - y) + \lambda_2(x - y) = 0$.

Suy ra $x = y$, và từ (4): $z = 5 - 2x$, thay vào (5) ta có:

$$x^2 + x(5 - 2x) + x(5 - 2x) = 8 \text{ hay } 3x^2 - 10x + 8 = 0$$

Nghiệm của phương trình này là $x_1 = 2$ và $x_2 = \frac{4}{3}$.

Xét $x_1 = 2$, thay vào (1) và (3) và giải ta được $\lambda_1 = 4$ và $\lambda_2 = -2$.

Vậy ta có điểm dừng $M_1(2, 2, 1)$ ứng với $\lambda_1 = 4$ và $\lambda_2 = -2$.

Tương tự với $x_2 = \frac{4}{3}$ ta có điểm dừng $M_2(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

Bây giờ đem (3) trừ đi (2) và (3) trừ đi (1) và làm tương tự như trên ta có các điểm dừng: $M_3(2, 1, 2)$, $M_4(1, 2, 2)$, $M_5(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$. $M_6(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

Xét $d^2\Phi(M_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, ta có:

$$\Phi''_{x^2} = 0,\ \Phi''_{y^2} = 0,\ \Phi''_{z^2} = 0$$

$$\Phi''_{xy} = z + \lambda_2,\ \Phi''_{yz} = x + \lambda_2,\ \Phi''_{zx} = y + \lambda_2$$

$d^2(M_1) = (1-2)dxdy + (2-2)dydz + (2-2)dzdx$ hay $d^2(M_1) = -dxdy$

Từ các phương trình liên hệ ta có:

$$dx + dy + dz = 0.$$

$$(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$$

Tại M_1 ta có:

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ 3dx + 3dy + 4dz = 0 \end{cases}$$

hay $dy = - dx$ và $dz = 0$.

Vậy $d^2(M_1) = - dx(- dx) = dx^2 > 0$ và $u_{min} = u(M_1) = 4$.

Làm tương tự đối với các điểm dừng khác ta có:

$u_{min} = u(M_3) = u(M_4) = 4.$

$u_{max} = u(M_2) = u(M_5) = u(M_6) = 4.\dfrac{4}{27}.$

135. Tìm giá trị bé nhất m và giá trị lớn nhất M của các hàm số sau trong các miền tương ứng:

1) $z = x^2 + y^2 - 2x - y$, D: $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2$

2) $z = x^2y$, D: $x^2 + y^2 \leq 1$

3) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, D: $0 \leq x, y \leq \dfrac{\pi}{2}$

*4) $u = x + y + z$ v: $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

Bài giải

1) Đầu tiên ta tìm các điểm bất thường của z trong D, ta có:

$$z'_x = 2x - 2, \quad z'_y = 2y - 1$$

hệ $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ cho điểm bất thường (điểm dừng): $M_1(1, \dfrac{1}{2}) \in D$.

Bây giờ xét các điểm bất thường của z trên biên của D. Với y = 0, ta có: $z = x^2 - 2x$, $0 \le x \le 2$, $z'_x = 0$ khi $x = 1$, vậy trên đoạn $y = 0$ $(0 \le x \le 1)$ ta có: điểm bất thường: $M_2(1, 0)$.

Tương tự trên đoạn $x = 0$, $0 \le y \le 2$ ta có điểm bất thường: $M_3(0, \frac{1}{2})$.

Trên đoạn $x + y = 2$, $0 \le x \le 2$ ta có: $y = 2 - x$ và $z = 2x^2 - 7x + 6$, $z'_x = 4x - 7$, khi $x = \frac{7}{4}$ do đó $y = \frac{1}{4}$ và ta có điểm bất thường: $M_4(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$.

Bây giờ ta tính giá trị của z tại các điểm bất thường (trong miền và trên biên của miền) và tại các đầu mút của các đoạn lập nên biên của D.

$$z(M_1) = -\frac{5}{4},\ z(M_2) = -1,\ z(M_3) = -\frac{1}{4},\ z(M_4) = -\frac{5}{8}.$$

$$z(0, 0) = 0,\ z(2, 0) = 0,\ z(0, 2) = 2.$$

Vậy $M = 2$, $m = -\frac{5}{4}$.

2) $z = x^2y$ D: $x^2 + y^2 \le 1$

Ta có: $z'_x = 2xy$, $z'_y = x^2$, $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ cho các điểm dừng M_1 trên đoạn:

$$x = 0,\ -1 \le y \le 1,\ (\in D).$$

Các điểm dừng trên biên là các điểm dừng của hàm $z = x^2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Ta lập hàm Lagrange:

$$\Phi(x, y) = x^2y + \lambda(1 - x^2 - y^2).$$

Hệ: $\begin{cases} \Phi'_x = 2xy - 2\lambda x = 0 \\ \Phi'_y = x^2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 2x(y - \lambda) = 0 \\ x^2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Cho các điểm dừng $M_2(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}})$.

Bây giờ tính giá trị của hàm z tại các điểm dừng: Trên đoạn $x = 0, -1 \le y \le 1, z = 0, z(M_1) = 0$.

Tại M_2: $z(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $z(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Vậy $M = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $m = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

3) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}$

Hệ: $$\begin{cases} z'_x = \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ z'_y = \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

Cho điểm dừng: $M_1(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \in D$

Xét các điểm dừng trên biên của D:

$y = 0$: $z = 2\sin x$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

$$z'_x = 2\cos x = 0 \text{ khi } x = \frac{\pi}{2}$$

Ta có điểm dừng: $M_2(\frac{\pi}{2}, 0)$.

$y = \frac{\pi}{2}$: $z = \sin x + 1 + \sin(x + \frac{\pi}{2})$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$.

hay: $z = 1 + \sin x + \cos x$, $z'_x = \cos x - \sin x = 0$ khi $x = \frac{\pi}{4}$.

Vậy ta có điểm dừng: $M_3(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Tương tự, trên biên $x = 0$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ và trên biên $x = \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, ta có các điểm dừng: $M_4(0, \frac{\pi}{2})$, $M_5(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.

Bây giờ tính giá trị của hàm số tại các điểm dừng và tại các đỉnh của miền D (hình vuông).

$$z(M_1) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ z(M_2) = 2,\ z(M_3) = \sqrt{2}+1,\ z(M_4) = 2,\ z(M_5) = \sqrt{2}+1$$

$$z(0, 0) = 0,\ z(\frac{\pi}{2}, 0) = 2,\ z(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2,\ z(0, \frac{\pi}{2}) = 2.$$

Vậy $M = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $m = 0$.

4) $u = x + y + z$, $v : x^2 + y^2 \le z \le 1$.

Ta có: $u'_x = 1$, $u'_y = 1$, $u'_z = 1$. Do đó u không có điểm dừng trong v.

Xét trên biên của v:

- Trên đáy (trên) của v: $z = 1$, $0 \le x^2 + y^2 \le 1$, ta có hàm Lagrange:

$$\Phi = x + y + 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

$$\text{Hệ: } \begin{cases} \Phi'_x = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \Phi'_y = 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Cho các điểm dừng: $M_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, $M_2(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, $M_3(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, $M_4(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.

Trên mặt xung quanh của miền v: $z = x^2 + y^2$ ta có:

$$z = x + y + x^2 + y^2 \text{ với } 0 \leq x^2 + y^2 < 1$$

$$z'_x = 1 + 2x = 0,\ z'_y = 1 + 2y = 0,$$

hệ này cho điểm dừng: $M_5(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.

Tính giá trị của hàm u tại các điểm dừng trên (M_i, i = 1, 2, 3, 4, 5) và so sánh với nhau ta có:

$$M = 1 + \sqrt{2},\ m = -\frac{1}{2}.$$

136. 1) Trong tất cả các tam giác có chu vi là 2p. Tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

2) Tìm hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất nội tiếp trong ellipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3) Trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, tìm một điểm mà tổng bình phương các khoảng cách từ điểm đó đến 3 điểm: $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 0, 1)$, $M_3(0, 1, 2)$ là bé nhất.

4) Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm M(1, 2, 3) đến đường thẳng: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$

*5) Tìm các bán trục của ellipse: $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.

Bài giải

1) Gọi x, y, z là các cạnh của tam giác thì diện tích của tam giác:

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \quad (1)$$

và $\quad x + y + z = 2p \quad (2) \quad (x, y, z > 0)$.

Bài toán đưa về tìm cực đại của hàm (1) với điều kiện (2), hay cũng thế, của hàm $u = (p - x)(p - y)(p - z)$ với điều kiện (2).

Đặt p - x = X, p - y = Y, p - z = Z thì bài toán lại đưa về việc tìm cực đại của hàm u = XYZ với điều kiện X + Y + Z = p (2') (X, Y, Z > 0).

Rõ ràng cực đại của u và v = lnu là như nhau, nên ta sẽ tìm cực đại của hàm v = lnu = lnX + lnY + lnZ (1') với điều kiện (2').

Lập hàm Lagrange:

$$\Phi = \ln X + \ln Y + \ln Z + \lambda(p - X - Y - Z).$$

Điểm dừng của v được xác định từ hệ:

$$\Phi'_X = \frac{1}{X} - \lambda = 0, \Phi'_Y = \frac{1}{Y} - \lambda = 0, \Phi'_Z = \frac{1}{Z} - \lambda = 0 : X + Y + Z = p$$

Giải hệ này ta có: $X = Y = Z = \frac{p}{3}$ và $\lambda = \frac{3}{p}$

Vậy ta có điểm dừng: $M(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}, \frac{p}{3})$.

Xét: $d^2\phi = -\frac{1}{X^2}dX^2 - \frac{1}{Y^2}dY^2 - \frac{1}{Z^2}dZ^2$

và $d^2\Phi(M) = -\frac{9}{p^2}(dX^2 + dY^2 + dZ^2) < 0$.

Vậy hàm v hay cũng thế, hàm u đạt cực đại tại M và do đó hàm S là đạt cực đại tại $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$ và tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác đều:

$$S_{max} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

2) Gọi 2x, 2y, 2z (x, y, z > 0) là các kích thước của hình hộp thì bài toán đưa về tìm cực đại của hàm V = 8xyz với điều kiện:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

vì cực trị của V và u = lnV là như nhau, nên bài toán đưa về việc tìm cực đại của hàm u = lnV = lnx + lny + lnz + ln8 với điều kiện:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ta lập hàm Lagrange:

$$\Phi = \ln x + \ln y + \ln z + \ln 8 + \lambda\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

Hệ:
$$\begin{cases} \Phi'_x = \dfrac{1}{x} - 2\lambda\dfrac{x}{a^2} = 0 \\ \Phi'_y = \dfrac{1}{y} - 2\lambda\dfrac{y}{b^2} = 0 \\ \Phi'_z = \dfrac{1}{z} - 2\lambda\dfrac{z}{c^2} = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

Cho điểm dừng của u: $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ với $\lambda=\frac{3}{2}$

Ta có: $d^2\Phi = \left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2\lambda}{a^2}\right)dx^2 + \left(-\frac{1}{y^2}-\frac{2\lambda}{b^2}\right)dy^2 + \left(-\frac{1}{z^2}-\frac{2\lambda}{c^2}\right)dz^2$

và $$d^2\Phi(M) = -6\left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}\right) < 0$$

Vậy u đạt cực đại tại M và V cũng đạt cực đại tại M:

$$V_{max} = V\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right) = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

Nghĩa là hình hộp phải tìm là một hình lập phương khi a = b = c

Chú ý: Bài toán ở (1) và (2) chính là bài toán: Tích của 3 số dương là lớn nhất khi chúng bằng nhau nếu tổng của chúng là không đổi.

3) Xét $M(x, y, z) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì bài toán đưa về tìm cực tiểu của hàm:

$$u = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 + (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 + \\ + x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2$$

$$= 3(x^2 + y^2 + z^2) - 6(x + y + z) + 15$$

với điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Lập hàm Lagrange:

$$\Phi = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 6(x + y + z) + 15 + \lambda(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Hệ: $\begin{cases} \Phi'_x = 6x - 6 - 2\lambda x = 0 \\ \Phi'_y = 6y - 6 - 2\lambda y = 0 \\ \Phi'_z = 6z - 6 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

Cho điểm dừng của u:

$$x = \pm\frac{3}{\sqrt{27}}, y = \pm\frac{3}{\sqrt{27}}, z = \pm\frac{3}{\sqrt{27}} \text{ với } \lambda = 3 \pm \sqrt{27}$$

Xét $d^2\Phi = (6 - 2\lambda)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

Khi $\lambda = 3 + \sqrt{27}$ thì $d^2\Phi < 0$ và khi $\lambda = 3 - \sqrt{27}$ thì $d^2\Phi > 0$.

Vậy $u_{min} = u\left(\frac{3}{\sqrt{27}}, \frac{3}{\sqrt{27}}, \frac{3}{\sqrt{27}}\right) = 18 - \frac{18}{\sqrt{3}}$.

4) Xét $M(x, y, z) \in$ đường thẳng đã cho, ta có bài toán:

Tìm cực tiểu của hàm: $u = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$ với điều kiện $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$ hay $3x + y = 0$, $2y + 3z = 0$

Hàm Lagrange của bài toán là:

$$\Phi = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 + \lambda_1(3x + y) + \lambda_2(2y + 3z)$$

Xét hệ: $\begin{cases} \Phi'_x = 2(x-1) + 3\lambda_1 = 0 \\ \Phi'_y = 2(y-2) + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \Phi'_z = 2(z-3) + 3\lambda = 0 \\ 3x + y = 0, 2y + 3z = 0 \end{cases}$

Từ 3 phương trình đầu của hệ ta có:

$$x = 1 + \frac{3\lambda_1}{2},\ y = 2 + \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{2},\ z = 3 + \frac{3\lambda_2}{2}$$

Thay vào hai phương trình cuối của hệ và giải ra ta có:

$$\lambda_1 = -\frac{13}{21},\ \lambda_2 = -\frac{40}{21}$$

và do đó: $x = \frac{1}{14},\ y = -\frac{3}{14},\ z = \frac{2}{14}$

Vậy ta có điểm dừng $M\left(\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, \frac{2}{14}\right)$

Tính $d^2\Phi = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, $d^2\Phi(M) > 0$.

Do đó $u_{min} = u(M) = \frac{2730}{14^2}$.

và khoảng cách ngắn nhất phải tìm là: $d = \sqrt{\frac{2730}{14^2}} = \frac{\sqrt{2730}}{14}$.

5) Ellipse đã cho có tâm tại gốc 0, do đó các bán trục của Ellipse chính là các khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm đến các điểm của Ellipse.

Xét $M(x, y) \in$ ellipse thì bài toán đưa về việc tìm cực đại và cực tiểu của hàm $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ hay cũng thế, của hàm $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.

Hàm Lagrange của bài toán là:

$$\Phi = x^2 + y^2 + \lambda(9 - 5x^2 - 8xy - 5y^2)$$

Ta tìm điểm dừng của z từ hệ:

$$\begin{cases} \Phi'_x = 2x - 10\lambda x - 8\lambda y = 0 \\ \Phi'_y = 2y - 10\lambda y - 8\lambda x = 0 \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \end{cases}$$

Từ hệ 2 phương trình đầu ta thấy, muốn hệ có nghiệm khác không thì:

$$\begin{vmatrix} 1-5\lambda & -4\lambda \\ -4\lambda & 1-5\lambda \end{vmatrix} = 0$$

hay $\lambda = 1$ và $\lambda = \dfrac{1}{9}$.

Bây giờ nhân phương trình đầu với x và phương trình thứ hai với y rồi cộng lại ta có:

$$2(x^2 + y^2) - 2\lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2) = 0$$

Do đó, từ phương trình cuối ta có: $z = 9\lambda$, nghĩa là giá trị lớn, bé nhất của z theo các giá trị của λ.

$$\lambda = 1 \text{ thì } z = 9$$

$$\lambda = \frac{1}{9} \text{ thì } z = 1.$$

Vậy các bán trục của ellipse đã cho là:

$$a = \sqrt{9} = 3, \ b = \sqrt{1} = 1.$$

PHỤ CHƯƠNG
CÁC ĐỀ THI GIẢI TÍCH HỌC KỲ I 2003 - 2007 CỦA ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

ĐỀ 1 (GIẢI TÍCH I K48)
Thời gian làm bài 90 phút

Câu I (2,5đ) 1) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-3^x)\sin x}{x^2+x^4}$

2) Cho hàm số $u = \text{arccotg}\,\dfrac{x}{y}$, tính $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Câu II (2,5đ) 1) Cho hàm số $y = e^{-x}.\cos x$, tính $y^{(100)}$.

2) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c phương trình $a.\cos x + b.\cos 2x + c.\cos 3x = 0$ luôn có nghiệm $0 < x < \pi$.

Câu III (2,5đ) 1) Tính tích phân $\int x.\cot g^2 x dx$.

2) Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3-x}}{\sqrt[3]{x^7+2x^4}}dx$.

Câu IV (1,5đ) Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 + 2x^2 + 4xy + 2y^2$.

Câu V (1đ) Đặt $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{41-2n}x.\cos^{2n+1}x dx$, với n là số tự nhiên, $1 \le n \le 20$.

1) Chứng minh rằng $I_n = \dfrac{n}{21-n}I_{n-1}$.

2) Tìm n để I_n đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐÁP AN

Câu I (2,5đ)

1) (1,5đ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-3^x)\sin x}{x^2+x^4} \overset{(L)}{=} \lim\dfrac{-3^x\ln 3.\sin x+(1-3^x).\cos x}{2x+4x^3}$ 0,5đ

$$=\frac{\lim(-3^x\ln^2 3.\sin x-2.3^x\ln 3.\cos x+(1-3^x)(-\sin x)}{2+12x^2}$$ 0,5đ

$= -\ln 3$ 0,5đ

(còn các cách khác - đúng = 1,5đ).

2) (1đ) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 0,5đ

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 0,5đ

Câu II (2,5đ)

1) (1,5đ) $y = e^{-x}.\cos x \Rightarrow y' = e^{-x}(-\cos x - \sin x)$

$= e^{-x}(-\sqrt{2})\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 0,5đ

$y'' = e^{-x}(-\sqrt{2})^2\cos\left(x-2\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\ldots \Rightarrow y^{(n)} = e^{-x}(-\sqrt{2})^n\cos\left(x-n\dfrac{\pi}{4}\right)$ 0,5đ

$\Rightarrow y^{(100)} = e^{-x}.2^{50}\cos(x-25\pi) = -e^{-x}.2^{50}\cos x$ 0,5đ

2) (1đ) Đặt $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$

Xét $F(x) = a\sin x + \dfrac{1}{2}b\sin 2x + \dfrac{1}{3}c\sin 3x \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x$ 0,5đ

Ta lại có $F(0) = 0 = F(\pi)$, theo Rolle, $\exists x_o \in (0, \pi)$;

$F'(x) = f(x) = 0$ 0,5đ

Câu III (2,5đ)

1) (1,5đ) $I = \int x\cot g^2 x dx = \int x\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$ 0,5đ

$$= -\frac{x^2}{2} + \int x d(-\cot gx) = -\frac{x^2}{2} - x\cot gx + \int \cot gx dx$$ 0,5đ

$$= -\frac{x^2}{2} - x\cot gx + \int \frac{d\sin x}{\sin x} = -\frac{x^2}{2} - x\cot gx + \ln|\sin x| + C$$ 0,5đ

2) (1đ) Ta có $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - x}}{\sqrt[3]{x^7 + 2x^4}} = \sqrt[6]{\frac{(x^3 - x)^3}{(x^7 + 2x^4)^2}} \sim \sqrt[6]{\frac{x^9}{x^{14}}} = \frac{1}{x^{5/6}}$

(khi $x \to \infty$) 0,5đ

Mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/6}} dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ 0,5đ

Câu IV (1,5đ)

Ta có $z'_x = 4x^3 + 4x + 4y$, $z'_y = 4y^3 + 4y + 4x$ $\Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$ 0,5đ

$\Rightarrow$ Hàm số chỉ có một điểm dừng (0, 0) (không có quá 1 điểm cực trị)

0,5đ

Ta có $z = x^4 + y^4 + 2(x + y)^2 \geq 0 = z(0, 0)$, dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = 0$

Vậy chỉ có một điểm cực tiểu (0, 0). 0,5đ

Câu V (1đ)

Ta có: $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{41-2n} x.\cos^{2n+1} xdx = \frac{1}{42-2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x.d\sin^{42-2n} x$

$$= \frac{1}{42-2n}\left[\cos^{2n} x \sin^{42-2n} x\Big|_0^{\pi/2} - 2n\int_0^{\pi/2} \sin^{42-2n} x \cos^{2n-1} x(-\sin x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{42-2n}\int_0^{\pi/2} \sin^{41-2(n-1)} x.\cos^{2(n+1)+1} xdx = \frac{n}{21-n} I_{n-1}$$ 0,5đ

$I_n > I_{n-1} \Leftrightarrow \frac{n}{21-n} > 1 \Leftrightarrow n > \frac{21}{2} \Rightarrow I_{10} < I_{11} < I_{12} < ... < I_{20}$

$I_n < I_{n-1} \Leftrightarrow \frac{n}{21-n} < 1 \Leftrightarrow n < \frac{21}{2} \Rightarrow I_{10} < I_9 < I_8 < ... < I_1$

$\Rightarrow$ n = 10 thì I_n nhỏ nhất 0,5đ

ĐỀ 2 (GIẢI TÍCH I K48)

Thời gian làm bài 90 phút

Câu I (2,5đ)

1) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c phương trình $2^x + ax^2 + bx + c = 0$ không có quá ba nghiệm thực phân biệt.

Câu II (2,5đ) 1) Xét sự liên tục tại điểm (0, 0) của hàm số:

$$f(x; y) = \begin{cases} \sin\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$$

2) Tìm cực trị của hàm số $z = e^{x^2+y^2}.(2x^2 + y^2)$.

Câu III (2,5đ) Tính các tích phân sau:

1) $\int e^{-x}\sin(2x)dx$; 2) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\dfrac{\cot gx}{1+\sin^2 x}dx$

Câu IV (1,5đ) Chứng tỏ rằng với $\alpha < 1$ tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2 + x^\alpha}$ hội tụ.

Câu V (1đ) Chứng minh rằng với mọi $x > -1$ ta có:

$$\int\limits_0^x \ln(1+t)dt \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5đ)

1) (1,5đ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{tgx}{x}\right)}{x^2}} \overset{(L')}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{tgx}{x}\left(\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-tgx}{x^2}\right)}{2x}}$ 0,5đ

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2\sin 2x}} \overset{(L')}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}} \qquad 0{,}5đ$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{4x\sin x\cos x+2x^2\cos 2x}} = e^{1/3} \qquad 0{,}5đ$$

2) (1đ) Đặt $f(x) = 2^x + ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; f'(x) = 2^x\ln 2 + 2ax + b$

$f''(x) = 2^x\ln^2 2 + 2a$ 0,5đ

Dễ thấy f''(x) luôn đồng biến $\Rightarrow$ f''(x) = 0 có không quá 1 nghiệm

$\Rightarrow$ f'(x) = 0 có không quá 2 nghiệm

$\Rightarrow$ f(x) = 0 có không quá 3 nghiệm 0,5đ

Câu II (2,5đ)

1) (1đ) Khi $y = kx \to 0$ ta có $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y) = \sin\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ 0,5đ

Giới hạn trên phụ thuộc k $\Rightarrow$ không $\exists\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$

$\Rightarrow$ hàm số gián đoạn tại (0, 0) 0,5đ

2) (1,5đ) $z'_x = e^{x^2+y^2}[2x.(2x^2 + y^2 + 2)]$

$z'_y = e^{x^2+y^2}[2y.(2x^2 + y^2 + 1)]$ $\Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$

$z''_{xx} = e^{x^2+y^2}[4x^2.(2x^2 + y^2 + 2) + (12x^2 + 2y^2 + 4)]$

$z''_{yy} = e^{x^2+y^2}[4xy.(2x^2 + y^2 + 2) + 4xy]$

$z''_{yy} = e^{x^2+y^2}[4y^2.(2x^2 + y^2 + 1) + 4x^2 + 6y^2 + 2]$ 0,5đ

Tại (0, 0) $\Rightarrow$ A = 4, B = 0, C = 2

$\Rightarrow \begin{cases} B^2 - AC < 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow z_{min} = z(0, 0) = 0$ 0,5đ

Chú ý: Sau khi tìm chỉ có một điểm dừng thì có thể chứng minh:

$z = e^{x^4+y^4}(2x^2 + y^2) \geq 0 = z(0, 0)$, dấu "=" $\Rightarrow x = y = 0$

$\Rightarrow z_{min} = z(0, 0)$ (vẫn cho điểm tối đa).

Câu III (2,5đ)

1) (1,5đ) 1) $\int e^{-x}\sin 2x dx = -\int \sin 2x de^{-x}$

$= -\left[e^{-x}\sin 2x - \int e^{-x} 2\cos 2x dx\right]$ 0,5đ

$= -\left[e^{-x}\sin 2x + 2\int \cos 2x de^{-x}\right]$

$= -e^{-x}\sin 2x - 2\left[e^{-x}\cos 2x - \int e^{-x}(-2\sin 2x)dx\right]$ 0,5đ

$= -e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) - 4\int e^{-x}\sin 2x dx$

$\Rightarrow \int e^{-x}\sin 2x dx = -\frac{e^{-x}}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x) + C$ 0,5đ

2) (1đ) Đặt $t = \sin x \Rightarrow t\Big|_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \Rightarrow I = \int\limits_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t(1+t^2)}$ 0,5đ

$= \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$ 0,5đ

Câu IV (1,5đ)

Ta có $I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x^\alpha} = \int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+x^\alpha} + \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x^\alpha} = I_1 + I_2$ 0,5đ

Vì $\alpha < 1$ nên $\frac{1}{x^2+x^\alpha} \sim \frac{1}{x^2}$ (khi $x \to 0$) và $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ $\Rightarrow I_1$ hội tụ

0,5đ

Khi $x \to \infty$ thì $\frac{1}{x^2+x^\alpha} \sim \frac{1}{x^2}$ và $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ hội tụ $\Rightarrow I_2$ hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ

0,5đ

Câu V (1đ)

Ta chứng minh $F(x) = \int_0^x \ln(1+t)dt - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \geq 0$ với $\forall x > -1$.

$$F'(x) = \ln(1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$F''(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0,\ \forall x > -1$$

$\Rightarrow$ $F'(x)$ đồng biến $(-1, +\infty)$ 0,5đ

$\Rightarrow$

x	-1	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vậy $F(x) \geq 0$, $\forall x > -1$ (đfcm) 0,5đ

ĐỀ 3 (GIẢI TÍCH I K48)

Thời gian làm bài 90 phút

Câu I (1,5đ) Xét tính khả vi của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.

Câu II (3đ) 1) (1,5đ) Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

2) (1,5đ) Cho z là hàm ẩn xác định bởi hệ thức $xe^y + yz + e^z = 0$.

a) Tính z'_x, z'_y tại điểm $A(-1, 0)$.

b) Sử dụng biểu thức vi phân toàn phần tính gần đúng giá trị của hàm z tại điểm $B(-0,95; 0,05)$.

Câu III (2,5đ) Tính các tích phân:

1) (1,5đ) $\int \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}dx$; 2) (1đ) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$

Câu IV (2đ) 1) (1đ) Viết khai triển Maclôranh của hàm số

$f(x) = \ln(1 + x) - xe^x$ đến số hạng chứa x^3.

2) (1đ) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x^2}} - \frac{e^x}{x}\right]$

Câu V (1đ) Cho hàm số f(x) khả vi trên đoạn $[x_1, x_2]$, với $x_1.x_2 > 0$. Chứng minh rằng tồn tại một số c thuộc khoảng (x_1, x_2) sao cho:

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(c) - c.f'(c).$$

ĐÁP ÁN

Câu I (1,5đ)

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x(1+e^{1/x})} = 0$, $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x(1+e^{1/x})} = 1$ 1đ

Vì $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ nên f(x) không khả vi tại điểm x = 0 do không tồn tại f'(0). 0,5đ

Câu II (3đ)

1) (1,5đ)

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 4(x-y) \\ z'_y = 4y^3 + 4(x-y) \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x - y \\ y^3 = y - x \end{cases}$$

Giải hệ được ba điểm tới hạn là:

$M_o(0; 0)$, $M_1(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ 0,5đ

$A = z''_{x^2} = 12x^2 - 4$, $B = z''_{xy} = 4$, $C = z''_{y^2} = 12y^2 - 4$.

Tại M_1: $AC - B^2 > 0$, $A > 0$ $\Rightarrow$ $z_{CT} = z(M_1) = -8$

Tại M_2: tương tự: $\Rightarrow$ $z_{CT} = z(M_2) = -8$

Tại M_o: $AC - B^2 = 16 - 16 = 0$ $\Rightarrow$ cần xét thêm 0,5đ

Đặt $\Delta(x, y) = z(x, y) - z(0, 0) = z(x, y)$

$\Delta(x, x) = 2x^4 > 0$ $(\forall x \neq 0)$

$\Delta(x, -x) = 2x^2(x^2 - 4) < 0$ $(0 < |x| < 2)$

$\Rightarrow$ Δ đổi dấu trong bất kỳ lân cận đủ nhỏ của điểm M_o $\Rightarrow$ Tại M_o hàm số không đạt cực trị. 0,5đ

2) (1,5đ)

a) Đặt $F(x, y, z) = xe^y + yz + e^z = 0$

$$F'_x = e^y,\ F'_y = xe^y + z,\ F'_z = y + e^z$$

$$z'_x = -\frac{e^y}{y+e^z},\ z'_y = \frac{xe^y + z}{y+e^z} \qquad 0{,}5đ$$

$F(-1; 0; z(-1; 0)) = -1 + e^z = 0 \Leftrightarrow z(-1; 0) = 0$

$$\Rightarrow z'_x(A) = -1,\ z'_y(A) = 1 \qquad 0{,}5đ$$

b) $z(-0{,}95; 0{,}05) \cong z(-1; 0) + z'_x(-1; 0).0{,}05 + z'_y(-1; 0).0{,}05 = 0$

0,5đ

Câu III (2,5đ)

1) (1,5đ) $I = \int \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}dx = x\arccos\frac{1}{\sqrt{x}} - \int xd\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ 0,5đ

$I = x\arccos\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}} = x\arccos\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x-1} + c\ (x \geq 1)$ 1đ

2) (1đ) $J = 2\int_1^{+\infty}\text{arctg}\sqrt{x}\,d(\text{arctg}\sqrt{x}) = \int_1^{+\infty}d(\text{arctg}\sqrt{x})^2$ 0,5đ

$$J = \lim_{b\to+\infty}(\text{arctg}\sqrt{2})^2\Big|_1^b = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{3\pi^2}{16} \qquad 0{,}5đ$$

Câu IV (2đ)

1) (1đ) $f(x) = \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)\right] - \left[x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + 0(x^3)\right]$ 0,5đ

$$= -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3) \qquad 0{,}5đ$$

2) (1đ) $\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{e^x}{x}\right] = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x) - xe^x}{x^2}$ 0,5đ

$$= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{3}{2}x^2 + 0(x^2)}{x^2} = -\frac{3}{2} \qquad 0{,}5đ$$

Câu V (1đ)

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

$$= \left[\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}\right] : \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) \qquad 0{,}25đ$$

Đặt $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$, $\psi(x) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ liên tục và khả vi trên đoạn $[x_1; x_2]$ (đoạn này không chứa điểm x = 0).

Áp dụng định lý Cauchy cho $\varphi(x)$ và $\psi(x)$ ta được:

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \text{ với } c \in (x_1, x_2) \qquad 0{,}5đ$$

Vì $\varphi'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$, $\psi(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = f(c) - cf'(c)$ 0,25đ

ĐỀ 4 (GIẢI TÍCH I K48)

Thời gian làm bài 90 phút

Câu I. (2đ) Tìm tiệm cận xiên của đường cong $y = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

Câu II (2,5đ) 1) Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{2x^2 + y^2}} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$

a) Tính $f'_y(x, y)$ tại điểm (0, 0) và tại điểm (x, y) với $x^2 + y^2 \neq 0$.

b) Xét sự liên tục của hàm $f'_y(x, y)$ tại điểm (0, 0).

2) Tính vi phân cấp hai tại điểm x = 0 của hàm y = y(x) cho bởi hệ thức $\text{arctg}(xy) + 1 = e^{x+y}$.

Câu III (3đ) 1) Tính tích phân $\int \frac{\cos x - \sin x}{2 + \cos x} dx$.

2) Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi quay hình elip $4x^2 + (y - 3)^2 \leq 4$ quanh trục Ox.

Câu IV (1,5đ) Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_0 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\alpha}} dx$.

Câu V (1đ) Cho hàm số f(x) khả vi trên khoảng $0 < x \le 1$ và trên khoảng này $|f'(x)| < 1$.

Đặt $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, với n nguyên dương. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_n)$.

ĐÁP ÁN

Câu I (2đ)

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} = \begin{cases} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x} = 2 \\ 1 + \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x} = 0 \end{cases} \qquad 1đ$$

$$m = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} - x - 2\right] =$$

$$= -2 + \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1\right] = -2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{-9}{\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\sqrt{x^2+9}} = -2 \qquad 1đ$$

Đồ thị có tiệm cận xiên bên phải là $y = 2(x - 1)$.

Câu II (2,5đ)

1) (1,5đ)

a) $$f'_y(x, y) = \left[x\sqrt{2x^2+y^2} - xy\frac{2y}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\right] : (2x^2 + y^2)$$

$$= [x(2x^2 + y^2) - xy^2] : (2x^2 + y^2)^{3/2}$$

$$= 2x^3 : (2x^2 + y^2)^{3/2} \qquad 0{,}5đ$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y\to0}\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to0}\frac{0}{y} = 0 \qquad 0{,}5đ$$

b) f'_y không liên tục tại điểm (0, 0) vì $f'_y(x, x) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ không dần đến

0 khi $x \to 0$ 0,5đ

2) (1đ)

Đặt $F(x, y) = \text{arctg}(xy) + 1 - e^{x+y} = 0$

$F'_x(x, y) = \dfrac{y}{1+x^2y^2} - e^{x+y}$, $F'_y(x, y) = \dfrac{x}{1+x^2y^2} - e^{x+y}$

$y'(x) = [y - e^{x+y}(1 + x^2y^2)] : [x - e^{x+y}(1 + x^2y^2)]$ 0,25đ

$y'(x) = 1 + \dfrac{y-x}{x-e^{x+y}(1+x^2y^2)} \Rightarrow$

$$y''(x) = \frac{(y'-1)[x-e^{x+y}(1+x^2y^2)]-(y-x)[1-e^{x+y}(1+x^2y^2+1+2xy^2)]}{[x-e^{x+y}(1+x^2y^2)]^2}$$

0,25đ

$F(0, y(0)) = 1 - e^{y(0)} = 0 \Leftrightarrow y(0) = 0 \Rightarrow y'(0) = 1 \Rightarrow y''(0) = -1$

Vậy $d^2y(0) = y''(0)dx^2 = -dx^2$ 0,5đ

Câu III (3đ)

1) (1,5đ)

$$I = \int\left(1-\frac{2+\sin x}{2+\cos x}\right)dx = x - 2\int\frac{dx}{2+\cos x} - \int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx = x - 2I_1 - I_2$$

0,5đ

Tính I_1: Đặt $t = \text{tg}\dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2\text{arctg}t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$I_1 = \int\frac{2dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + c_1$$ 0,5đ

Tính I_2: $I_2 = -2\displaystyle\int\frac{d(\cos x)}{2+\cos x} = -\ln(2+\cos x) + c_2$

$$I = x - \frac{4}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \ln(2+\cos x) + c$$ 0,5đ

2) (1,5đ)

Khối tròn xoay là hình xuyến có thể tích $V = V_1 - V_2$ với V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối tròn xoay tạo nên khi quay các hình thang cong:

$D_1 = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 3 + 2\sqrt{1-x^2}\}$ và

$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 3 - 2\sqrt{1-x^2}\}$ quanh trục Ox 0,5đ

$$V = 2\pi \int_0^1 \left[\left(3+2\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(3-2\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx = 48\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

0,5đ

$$= 48\pi\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\Bigg|_0^1 = 48\pi.\arcsin 1 = 24\pi^2$$ 0,5đ

Câu IV (1,5đ)

Đặt $f(x) = \dfrac{\text{arctg}x}{x^\alpha} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{khi } x \to 0^+ \quad 0{,}5đ \\ O\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right) & \text{khi } x \to +\infty \quad 0{,}5đ \end{cases}$

Vậy tích phân suy rộng hội tụ $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 < 1 \\ \alpha > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$ 0,5đ

Câu V (1đ) Áp dụng định lý Lagrange cho đoạn $\left[\frac{1}{3n}, 1\right]$: trên đoạn này hàm số f(x) liên tục và có đạo hàm nên $\exists c \in \left(\frac{1}{3n}, 1\right)$ sao cho:

$$u_{3n} - u_n = f\left(\frac{1}{3n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = f'(c)\left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{n}\right) = -\frac{2}{3n}f'(c)$$ 0,5đ

Vậy $|u_{3n} - u_n| \le \dfrac{2}{3n}|f'(c)| < \dfrac{2}{3n}$ do $|f'(c)| < 1$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{3n} - u_n) = 0$ 0,5đ

ĐỀ 1 (GIẢI TÍCH I K49)

Thời gian làm bài 90 phút

Câu I (2,5đ)

a) Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2n^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n^2 - 1^2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{2n^2 - (n-1)^2}}\right]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg} x^2, \text{ với } -\sqrt[4]{3} \le x \le \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

Câu II (2,5đ)

a) Dùng vi phân toàn phần của hàm số để tính gần đúng giá trị của biểu thức:

$$A = \sqrt{3e^{0,04} + (1,02)^2}$$

b) Tìm cực trị của hàm số $z = e^{-y}(3x - x^3 - y)$.

Câu III (1,5đ) Tìm a để hàm số sau khả vi tại x = 0:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + ax^4 - \cos x^2}{x^2 \operatorname{tg} x^3} & \text{khi } x \ne 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Câu IV (2,5đ) a) Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3x\,dx}{1 + x^3}$.

b) Cho miền phẳng D giới hạn bởi các đường: y = sinx, y = 1, x = 0, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Tính thể tích vật thể sinh bởi miền D khi quay quanh trục 0y.

Câu V (1đ) Chứng minh rằng với mọi a > 1 phương trình:

$$a^x - \frac{1}{2^x} = \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} \text{ có không quá hai nghiệm.}$$

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5đ)

a) Biến đổi $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n}$ 0,5đ

$\Rightarrow$ S_n là tổng tích phân của hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x^2}}$ trên [0, 1], f(x) liên tục [0, 1] $\Rightarrow$ khả tích [0, 1] 0,5đ

$$\Rightarrow \lim S_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$ 0,5đ

b) f(x) là hàm chẵn $\Rightarrow$ maxf(x), minf(x) trên $\left[-\sqrt[4]{3}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$ bằng maxf(x), minf(x) trên $[0, \sqrt[4]{3}]$. $f'(x) = x - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{x(x^4-1)}{1+x^4}$ $\Rightarrow$ trong $(0, \sqrt[4]{3})$ f(x) có một điểm dừng x = 1 0,5đ

Ta có $f(1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$; $f(0) = 0$; $f(\sqrt[4]{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}-2\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $\max f(x) = f(0) = 0$; $\min f(x) = f(1) = \frac{2-\pi}{4}$ 0,5đ

Câu II (2,5đ)

a) Xét $f(x, y) = \sqrt{3e^x + y^2}$ $\Rightarrow$ A = f(0,04; 1,02). Với $x_o = 0$; $y_o = 1$; $\Delta x = 0{,}04$; $\Delta y = 0{,}02$ $\Rightarrow$ $A \approx f(0, 1) + f'_x(0, 1).\Delta x + f'_y(0, 1).\Delta y$

0,5đ

$$f'_x = \frac{3e^x}{2\sqrt{3e^x+y^2}}\ ;\ f'_y = \frac{y}{\sqrt{3e^x+y^2}}$$

$\Rightarrow$ $A \approx 2 + \frac{3}{2.2}\cdot 0{,}04 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02 = 2{,}04$ 0,5đ

b) Miền xác định: R; $z'_x = e^{-y}(3 - 3x^2)$; $z'_y = e^{-y}(-3x + x^3 + y - 1)$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 1 + 3x - x^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Có hai điểm dừng $M_1(1, 3)$ và $M_2(-1, -1)$ 0,5đ

$z'_{xx} = e^{-y}(-6x)$; $z'_{xy} = e^{-y}(3x^2 - 3)$; $z'_{yy} = e^{-y}(3x - x^3 - y + 2)$.

Tại $M_1 \to A = -6e^{-1}$; $B = 0$; $C = e^{-1} \Rightarrow B^2 - AC > 0 \Rightarrow M_1$ không là điểm cực trị

Tại $M_2 \to A = 6e$; $B = 0$; $C = e \Rightarrow B^2 - AC < 0$, $A > 0 \Rightarrow M_2$ là điểm cực tiểu, $z_{min} = z(-1, -1) = -3e$

Câu III (1,5đ)

$f(x)$ khả vi tại $x = 0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = I$ hữu hạn

Khi $x \to 0$, $x^2 \text{tg} x^3 \sim x^5$; $\cos x^2 = 1 - \dfrac{x^4}{2} + 0(x^6)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)x^4 + 0(x^6)}{x^6} = I$$

I hữu hạn $\Leftrightarrow a + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Câu IV (2,5đ)

a) Biến đổi $\dfrac{3x}{x^3+1} = \dfrac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)}$

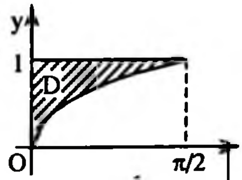
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \ldots = \frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \left[\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right] dx$$

$$= \left(\ln\left| \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} \right| + \sqrt{3}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)\Bigg|_0^{+\infty} = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \pi$$

b) $D \Leftrightarrow$ giới hạn bởi: $x = \arcsin y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$

$$\Rightarrow V = \pi\int_0^1 (\arcsin y)^2 dy$$ 0,5đ



$$= \pi.\left[y(\arcsin y)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 y.2\arcsin y\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy\right]$$

$$= \pi.\left[\frac{\pi^2}{4} + 2\int_0^1 \arcsin y d\sqrt{1-y^2}\right]$$ 0,5đ

$$= \pi.\left[\frac{\pi^2}{4} + 2\left(\sqrt{1-y^2}.\arcsin y\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy\right)\right]$$

$$= \pi.\left[\frac{\pi^2}{4} + 2(0-1)\right] = \frac{\pi.(\pi^2-8)}{4}$$ 0,5đ

Câu V (1đ)

Phương trình $\Leftrightarrow f(x) = (4a)^x - \left(\frac{4}{2}\right)^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x + 1 = 0$

$f'(x) = (4a)^x\ln(4a) - 2^x\ln 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^x \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ 0,5đ

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(4a) = \left(\frac{2}{4a}\right)^x \ln 2 + \left(\frac{1}{3a}\right)^x \ln\left(\frac{4}{3}\right)(*)$

Vế phải (*) là hàm nghịch biến $\Rightarrow$ (*) có không quá 1 nghiệm hay f'(x) = 0 có không quá 1 nghiệm $\Rightarrow$ f(x) = 0 có không quá 2 nghiệm (đfcm) 0,5đ

ĐỀ 2 (GIẢI TÍCH I K49)

Thời gian làm bài 90 phút

Câu I (2,5đ) a) Tìm giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{3n^2+n^2}}\right]$$

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = x^2 + 2\text{arccotg}x^2,\ \text{với } -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \le x \le \sqrt[4]{3}.$$

Câu II (2,5đ)

a) Dùng vi phân toàn phần của hàm số để tính gần đúng giá trị c biểu thức:

$$A = \sqrt{8e^{0,03}+(0,97)^2}$$

b) Tìm cực trị của hàm số $z = e^{-x}(x + y^3 - 3y)$.

Câu III (1,5đ) Tìm a để hàm số sau khả vi tại x = 0:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax^4+\ln(1-x^2)}{x^2\sin x^3} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Câu IV (2,5đ) a) Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{3xdx}{x^3-1}$.

b) Cho miền phẳng D giới hạn bởi các đường: y = cosx, y = 0, x =

$x = \dfrac{\pi}{2}$.

Tính thể tích vật thể sinh bởi miền D khi quay quanh trục Oy.

Câu V (1đ) Chứng minh rằng với mọi a > 4 phương trình:

$a^x - 4^x = 3^x - 2^x$ có không quá hai nghiệm.

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5đ)

a) Biến đổi $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{3+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ S_n là tổng tích phân của hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}$ trên [0, 1], f(x) liên tục [0, 1] $\Rightarrow$ khả tích [0, 1] 0,5đ

$$\Rightarrow \lim S_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{3+x^2}\right)\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln\sqrt{3} = \ln\sqrt{3}$$

0,5đ

b) f(x) là hàm chẵn $\Rightarrow$ maxf(x), minf(x) trên $\left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \sqrt[4]{3}\right]$ bằng maxf(x), minf(x) trên $[0, \sqrt[4]{3}]$. $f'(x) = \frac{2x(x^4-1)}{1+x^4}$ $\Rightarrow$ trong $(0, \sqrt[4]{3})$ f(x) có một điểm dừng x = 1 0,5đ

Ta có $f(1) = 1 + \frac{\pi}{2}$; $f(0) = \pi$; $f(\sqrt[4]{3}) = \sqrt{3} + 2\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $\max f(x) = f(0) = \pi$; $\min f(x) = f(1) = \frac{\pi+2}{2}$ 0,5đ

Câu II (2,5đ)

a) Xét $f(x, y) = \sqrt{8e^x + y^2}$ $\Rightarrow$ A = f(0,03; 0,97). Với $x_o = 0$; $y_o = 1$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}03$, ta có $A \approx f(0, 1) + f'_x(0, 1).\Delta x + f'_y(0, 1).\Delta y$

0,5đ

$$f'_x = \frac{8e^x}{2\sqrt{8e^x+y^2}}; \quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{8e^x+y^2}}$$

$\Rightarrow$ $A \approx 3 + \frac{4}{3}\cdot 0{,}03 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}03 = 3{,}03$ 0,5đ

b) Miền xác định: R; $z'_x = e^{-x}(-x - y^3 + 3y + 1)$; $z'_y = e^{-x}(3y^2 - 3)$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = -y^3 + 3y + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Có 2 điểm dừng $M_1(3, 1)$ và $M_2(-1, -1)$ 0,5đ

$z'_{xx} = e^{-x}(x + y^3 - 3y - 2)$; $z'_{xy} = e^{-y}(3 - 3y^2)$; $z'_{yy} = e^{-x}.6y$

Tại $M_1 \to A = -e^{-3}$; $B = 0$; $C = 6 \Rightarrow B^2 - AC > 0 \Rightarrow M_1$ khôi điểm cực trị.

Tại $M_2 \to A = -e$; $B = 0$; $C = -6e \Rightarrow B^2 - AC < 0$, $A < 0 \Rightarrow$ điểm cực đại, $z_{max} = z(-1, -1) = e$.

Câu III (1,5đ)

f(x) khả vi tại x = 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = I$ hữu hạn

Khi $x \to 0$, $x^2\sin x^3 \sim x^5$; $\ln(1 - x^2) = -x^2 - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{3} + 0(x^6)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)x^4 - \frac{x^6}{3} + 0(x^6)}{x^6} = I \text{ hữu hạn}$$

$$\Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Câu IV (2,5đ)

a) Biến đổi $\dfrac{3x}{x^3 - 1} = \dfrac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}$

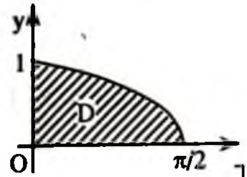
$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \ldots = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right] dx$$

$$= \left(\ln\frac{(x-1)}{\sqrt{x^2+x+1}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0} = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

b) D $\Leftrightarrow$ giới hạn bởi: x = arccosy, x = 0, y = 0, y = 1

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^1 (\arccos y)^2 dy$$



$$V=\pi.\left[y(\arccos y)^2\Big|_0^1-\int_0^1 y.2\arccos y\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy\right]$$

$$=\pi.\left[0-2\int_0^1 \arccos y\,d\sqrt{1-y^2}\right]$$ 0,5đ

$$=-2\pi.\left(\sqrt{1-y^2}.\arccos y\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{1-y^2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}dy\right)$$

$$=-2\pi.\left[0-\frac{\pi}{2}+1\right]=\pi(\pi-2)$$ 0,5đ

Câu V (1đ)

Phương trình $\Leftrightarrow f(x)=\left(\frac{a}{2}\right)^x-\left(\frac{4}{2}\right)^x-\left(\frac{3}{2}\right)^x+1=0$

$$f'(x)=\left(\frac{a}{2}\right)^x\ln\left(\frac{a}{2}\right)-2^x\ln2-\left(\frac{3}{2}\right)^x\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$ 0,5đ

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{4}{a}\right)^x\ln2+\left(\frac{3}{a}\right)^x\ln\left(\frac{3}{2}\right)(*)$$

Vế phải (*) là hàm nghịch biến ($a > 4$) $\Rightarrow$ (*) có không quá 1 nghiệm hay $f'(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm $\Rightarrow$ $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm (đfcm). 0,5đ

ĐỀ 3 (GIẢI TÍCH I K49)

Thời gian làm bài 90 phút

Câu I (2,5đ)

a) Điểm $x=\frac{\pi}{2}$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số $y=\frac{4}{3-2^{\operatorname{tg}x}}$?

b) Cho hàm số: $f(x) = (x^2 + 2x)\sin 2x$. Tính $d^{20} f(0)$.

Câu II (2,5đ)

a) Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\ln(1+y) - y\ln(1+x)}{x^2+y^2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$z = 4x^2 - 9y^2 \text{ trong miền } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1.$$

Câu III (1,5đ) Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số: $y = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $(x > 0)$.

Câu IV (2,5đ) a) Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3+2x^5}}dx$.

b) Tính diện tích mặt tròn xoay sinh bởi đường tròn $(x-2)^2 + y^2 = 1$ khi quay quanh trục Oy.

Câu V (1đ) Chứng minh rằng với mọi $a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ta có $\displaystyle\int_0^a (\sin x + \mathrm{tg}x)dx \ge a^2$.

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5đ)

a) Khi $x \to \dfrac{\pi}{2}^+$, $\mathrm{tg}x \to -\infty \Rightarrow \lim y(x) = \dfrac{4}{3}$ (1) 0,5đ

Khi $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$, $\mathrm{tg}x \to +\infty \Rightarrow \lim y(x) = 0$ (2) 0,5đ

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ là điểm gián đoạn loại 1. 0,5đ

b) $U = x^2 + 2x$, $V = \sin 2x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k U^{(k)} V^{(n-k)}$

Vì bậc của U là 2 $\Rightarrow U^{(k)} = 0, \forall k \geq 3$ 0,5đ

$$V^{(n)} = 2^n\sin(2x + n\frac{\pi}{2}) \overset{x=0}{\Rightarrow} \begin{cases} V^{(2k)}(0) = 0 \\ V^{(2k+1)}(0) = (-1)^k 2^{2k+1} \end{cases}$$

$\Rightarrow\ f^{(20)}(0) = 20.2.(-1)^9.2^{19}\ \Rightarrow\ d^{20}f(0) = -20.2^{20}dx^{20}$ 0,5đ

Câu II (2,5đ)

a) Khi $x \to 0$, $\ln(1 + x) = x + x.\alpha\ (\alpha \to 0)$

$y \to 0$, $\ln(1 + y) = y + y.\beta\ (\beta \to 0)$ 0,5đ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ln(1+y) - y\ln(1+x)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}(\beta - \alpha) = 0$$

$$\text{vì} \begin{cases} \left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{1}{2} \\ (\beta - \alpha) \to 0 \end{cases}$$ 0,5đ

b) $z'_x = 8x,\ z'_y = -18y \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ 0,5đ

Trong miền $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$ chỉ có một điểm dừng (0, 0); z = (0, 0) = 0

0,5đ

Trên biên $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow\ z = 36\cos 2t \in [-36, 36]$

Vậy maxz = 36, minz = −36. 0,5đ

Câu III (1,5đ)

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$ 0,5đ

$$b = \lim_{x\to+\infty} [y(x) - ex] = x \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]$$ 0,5đ

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[e^{1-\frac{1}{2x}+0\left(\frac{1}{x}\right)} - e\right] = e \lim_{x\to+\infty} x\left[-\frac{1}{2x} + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{e}{2}$$

Vậy tiệm cận xiên: $y = ex - \frac{e}{2}$ 0,5đ

Câu IV (2,5đ)

a) $I = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} = I_1 + I_2$

Khi $x \to 0^+$, $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3+2x^5}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ $\Rightarrow I_1$ hội tụ

0,5đ

Với $x \geq 1$, $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3+2x^5}} < \frac{x}{\sqrt{2x^5}} = \frac{1}{\sqrt{2x^3}}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^3}}dx$ hội tụ $\Rightarrow I_2$ hội tụ

Vậy $I = I_1 + I_2$ hội tụ 0,5đ

b) $(x-2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{1-y^2}$

$S = S_1 + S_2$ 0,5đ

$$S_1 = 2\pi \int_{-1}^{1}\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}dy$$

$$S_2 = 2\pi \int_{-1}^{1}\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}dy$$ 0,5đ

$$\Rightarrow S = 2\pi \int_{-1}^{1} 4.\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}dy = 8\pi \int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 8\pi.\arcsin y\Big|_{-1}^{1} = 8\pi^2 \quad \text{(đvdt)}$$

0,5đ

Câu V (1đ)

$F(a) = \int_0^a (\sin x + \operatorname{tg}x)dx - a^2$, với $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$F'(a) = \sin a + \operatorname{tg}a - 2a$ 0,5đ

$F''(a) = \cos a + \frac{1}{\cos^2 a} - 2 \geq 2\sqrt{\cos a \cdot \frac{1}{\cos^2 a}} - 2 \geq 0$

$F'(a)$ đồng biến, $F'(0) = 0 \Rightarrow \min F(a) = F(0) = 0 \Rightarrow F(a) \geq 0$

(đfcm) 0,5đ

ĐỀ 4 (GIẢI TÍCH I K49)

Thời gian làm bài 90 phút

Câu I (2,5đ) a) Điểm $x = \pi$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

$$y = \frac{2}{3+4^{\cot gx}}?$$

b) Cho hàm số: $f(x) = (x^2 - 3x)\cos 3x$. Tính $d^{10} f(0)$.

Câu II (2,5đ) a) Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x(e^y - 1) - y(e^x - 1)}{x^2 + y^2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$z = x^2 - 4y^2 \text{ trong miền } x^2 + 4y^2 \le 4.$$

Câu III (1,5đ) Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số: $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$, $(x > 0)$.

Câu IV (2,5đ) a) Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^5 + x^6}}dx$.

b) Tính diện tích mặt tròn xoay sinh bởi đường tròn $x^2 + (y-3)^2 = 4$ khi quay quanh trục Ox.

Câu V (1đ) Chứng minh rằng với mọi $a \in (0, \pi)$ ta có:

$$\int_a^{\pi/2} (\cos x + \cot gx)dx \ge \left(a - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5đ)

a) Khi $x \to \pi^+$, $\cot gx \to +\infty \Rightarrow \lim y(x) = 0$ (1) 0,5đ

Khi $x \to \pi^-$, $\cot gx \to -\infty \Rightarrow \lim y(x) = \dfrac{2}{3}$ (2) 0,5đ

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = \pi$ là điểm gián đoạn loại 1. 0,5đ

b) $U = x^2 - 3x$, $V = \cos 3x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k U^{(k)} V^{(n-k)}$

Vì bậc của U là 2 $\Rightarrow U^{(k)} = 0, \forall k \geq 3$ 0,5đ

$$V^{(n)} = 3^n\cos(3x + n\frac{\pi}{2}) \overset{x=0}{\Rightarrow} \begin{cases} V^{(2k)}(0) = (-1)^k 3^{2k} \\ V^{(2k+1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{(10)}(0) = \frac{10\times 9}{2}.2.(-1)^4.3^8 \Rightarrow d^{10}f(0) = 90.3^8dx^{10}$$ 0,5đ

Câu II (2,5đ)

a) Khi $x \to 0,\ e^x - 1 = x + x.\alpha\ \ (\alpha \to 0)$

$y \to 0,\ e^y - 1 = y + y.\beta\ \ (\beta \to 0)$ 0,5đ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^y - 1) - y(e^x - 1)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}(\beta - \alpha) = 0$$

$$\text{vì } \begin{cases} \left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{1}{2} \\ (\beta - \alpha) \to 0 \end{cases}$$ 0,5đ

b) $z'_x = 2x,\ z'_y = -8y \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ 0,5đ

Trong miền $x^2 + 4y^2 < 4$ chỉ có một điểm dừng (0, 0); z = (0, 0) = 0 0,5đ

Trên biên $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow z = 4\cos 2t \in [-4, 4]$

Vậy maxz = 4, minz = –4. 0,5đ

Câu III (1,5đ)

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \frac{1}{e}$$ 0,5đ

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[y(x) - \frac{1}{e}x\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(\frac{x}{1+x}\right)^x - \frac{1}{e}\right]$$ 0,5đ

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[e^{-1+\frac{1}{2x}+0\left(\frac{1}{x}\right)} - e^{-1}\right] = e^{-1}\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{2x}+0\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{e^{-1}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{e}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$ 0,5đ

Câu IV (2,5đ)

a) $I = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} = I_1 + I_2$

Khi $x \to 0^+$, $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^5+x^6}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{2x^5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{2x}}dx$ hội tụ $\Rightarrow I_1$ hội tụ

0,5đ

Với $x \geq 1$, $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^5+x^6}} < \dfrac{2\ln(1+x)}{\sqrt{x^6}} < \dfrac{2x}{x^3} = \dfrac{2}{x^2}$, $\int_1^{+\infty} \dfrac{2}{x^2}dx$ hội tụ

$\Rightarrow$ I_2 hội tụ

Vậy $I = I_1 + I_2$ hội tụ 0,5đ

b) $x^2 + (y-3)^2 = 4 \iff y = 3 \pm \sqrt{4-x^2}$

$S = S_1 + S_2$ 0,5đ

$$S_1 = 2\pi\int_{-2}^{2}\left(3+\sqrt{4-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx$$

$$S_2 = 2\pi\int_{-2}^{2}\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx$$ 0,5đ

$$\Rightarrow \quad S = 2\pi\int_{-2}^{2} 6.\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx = 2\pi\int_{-2}^{2}\frac{12}{\sqrt{4-x^2}}dx = 24\pi.\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}$$

$S = 24\pi^2$ (đvdt) 0,5đ

Câu V (1đ)

$$F(a) = \int_a^{\pi/2}(\cos x + \text{cotg}x)dx - \left(a-\frac{\pi}{2}\right)^2, \text{ với } a \in (0, \pi)$$

$$F'(a) = -(\cos a + \text{cotg}a) - 2\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$$ (0,5đ)

$$F''(a) = \sin a + \frac{1}{\sin^2 a} - 2 \geq 2\sqrt{\sin a.\frac{1}{\sin^2 a}} - 2 \geq 0$$

F'(a) đồng biến, $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \min F(a) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow F(a) \geq 0$

(đfcm) 0,5đ

ĐỀ 1 (GIẢI TÍCH I K50)

(thời gian 90 phút)

Câu I (2,5 đ)

1) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0^+} (\text{arctg}x)^{\sin x}$.

2) Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1-2x}{e^{2x}}$, (n nguyên dương).

Câu II (2,5 đ)

1) Xét tính liên tục tại đ (0;0) của hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{x^4 + y^4} & \text{khi } (x;y) \neq (0;0) \\ a & \text{khi } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

2) Phương trình $x - 2z + 2 = ye^{xz}$ xác định hàm ẩn z(x,y). Tính dz(0;0).

Câu III (2,5 đ)

1) Tính $\int\limits_1^2 \arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x}}dx$.

2) Tính độ dài cung $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$; $0 \leq t \leq \pi$.

Câu IV (2,5 đ)

1) Xét sự hội tụ theo tham số α của tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(2+3x)}{1+2x}dx$.

2) Chứng minh rằng với mọi x, y thoả mãn $x \geq y > 0$ ta có:

$$\operatorname{arctg}x^4 - \operatorname{arctg}y^4 \leq \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$$

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5 đ)

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{arctg}x)^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x.\ln(\operatorname{arctg}x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{arctg}x)}{1/\sin x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$ (0,5đ)

$$\overset{L'}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{-\sin^2 x}{\cos x}} = e^0 = 1.$$

Vì khi $x \to 0$ thì $\begin{cases} -\sin^2 x \sim -x^2 \\ \operatorname{arctg}x.(1+x^2)\cos x \sim x \end{cases}$ (0,5đ)

2) Đặt $u = 1 - 2x$, $v = e^{-2x} \Rightarrow y = u.v$, $y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.u^{(k)}.v^{(n-k)}$

$u' = 2$, $u'' = 0 \Rightarrow u^{(k)} = 0\ \forall k \geq 2.$ (0,5đ)

$v' = (-2)e^{(-2x)}$, $v'' = (-2)^2e^{(-2x)}$, ..., $v^{(n)} = (-2)^n e^{(-2x)}$ (0,5đ)

$\Rightarrow y^{(n)} = (1-2x).(-2)^n.e^{-2x} + n.(-2).(-2)^{n-1}.e^{-2x}$

$= (-2)^n.e^{-2x}.(n+1-2x)$ (0,5đ)

Câu II (2,5 đ)

1) Với $y = kx$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(x^2 - k^2x^2)}{x^4 + k^4x^4} = \frac{1-k^2}{1+k^4}$ (0,5đ)

Giới hạn trên thay đổi theo k

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \Rightarrow$ f(x,y) không liên tục tại (0;0) (0,5đ)

2) Đặt $F = x - 2z + 2 - y.e^{xz}$

$\Rightarrow F'_x = 1 - y.z.e^{xz}$; $F'_y = -e^{xz}$; $F'_z = -2 - xy.e^{xz}$ (0,5đ)

Tại (0;0), $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{1}{2}$; $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1}{2}$ (0,5đ)

$\Rightarrow dz(0;0) = \frac{1}{2}(dx - dy)$ (0,5đ)

Câu III (2,5 đ)

1) $\int_1^2 \arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x}}dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x}}\Bigg|_1^2 - \int_1^2 x.d\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ (0,5đ)

$= \left(2.\frac{\pi}{4}-0\right) - \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx = \frac{\pi}{2} - \sqrt{x-1}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 1$ (0,5đ)

2) x' = 1 − sint; y' = cost

$\Rightarrow s = \int_0^{\pi}\sqrt{(1-\sin t)^2+\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\sin t)}dt$ (0,5đ)

$s = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right|dt = 2.\int_0^{\pi}\left|\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|dt$ (0,5đ)

$= 2.\left[\int_0^{\pi/2} -\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dt\right]$

$= 2.\left[2\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} - 2\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right] = 8 - 4\sqrt{2}$ (0,5đ)

Câu IV (2,5 đ)

1) Khi $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{\ln^{\alpha}(2+3x)}{1+2x} \sim \frac{3}{2}\cdot\frac{\ln^{\alpha}(2+3x)}{2+3x} = g(x)$ (0,5đ)

$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\ln^{\alpha}(2+3x)d\ln(2+3x) = \frac{1}{2}\cdot\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{-\alpha}}$

$\begin{cases} \text{hội tụ khi } -\alpha > 1 \text{ hay } \alpha < -1 \\ \text{phân kỳ khi } -\alpha \le 1 \text{ hay } \alpha \ge -1 \end{cases}$ (0,5đ)

2) Khi x = y, 2 vế = 0 ⇒ BĐT đúng. (0,5đ)

Với x > y, BĐT $\Leftrightarrow \frac{\text{arctg}x^4 - \text{arctg}y^4}{\ln x^2 - \ln y^2} \le 1$ (*)

Hai hàm $f(t) = \text{arctg}t^4$ và $g(x) = \ln t^2$ thoả mãn định lý Cauchy trên đoạ [y;x] (0,5đ

$$\Rightarrow \exists t_o \in (y;x): VT^{(*)} = \frac{f'(t_o)}{g'(t_o)} = \frac{4t_o^3}{1+t_o^8} : \frac{2t_o}{t_o^2} = \frac{2t_o^4}{1+t_o^8} \le 1 \text{ (đfcm) (0,5đ)}$$

Cách 2: Xét hàm $F(t) = \text{arctg}t^4 - \ln t^2$, với $t > 0$

$$\Rightarrow F'(t) = \frac{4t^3}{1+t^8} - \frac{2}{t} = -\frac{2(t^4-1)^2}{t(1+t^8)} \le 0$$

$\Rightarrow$ F(t) nghịch biến $(0;+\infty) \Rightarrow$ với $x \ge y$ thì $F(x) \le F(y)$ (đfcm)

ĐỀ 2 (GIẢI TÍCH I K50)

(thời gian 90 phút)

Câu I (2,5 đ)

1) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\text{tg}x}$.

2) Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = x\ln(1 - 3x)$, (n nguyên dương).

Câu II (2,5 đ)

1) Xét tính liên tục tại điểm (0;0) của hàm số:

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{xy - y^2}{x^2 + y^2}\right) & \text{khi } (x;y) \ne (0;0) \\ a & \text{khi } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

2) Phương trình $xe^{yz} = y + z + 1$ xác định hàm ẩn z(x,y). Tính dz(0;0).

Câu III (2,5 đ)

1. Tính $\int\limits_1^2 \arccos\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x}}dx$.

2) Tính độ dài cung $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = 2t - \cos 2t \end{cases}$; $0 \le t \le \pi$.

Câu IV (2,5 đ)

1) Xét sự hội tụ theo tham số α của tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln^\alpha(3+2x)}{2+x}dx$.

2. Chứng minh rằng với mọi x, y thoả mãn $x \ge y > 0$ ta có:

$$\text{arccotg}x^4 - \text{arccotg}y^4 \geq \ln\left(\frac{y^2}{x^2}\right)$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,5 đ)

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{tgx} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} tgx.\ln(\arcsin x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\arcsin x)}{\cot gx}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$ (0,5đ)

$$\overset{L'}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(-\sin^2 x)} = e^0 = 1.$$

vì $\begin{cases} \text{khi } x \to 0 \\ -\sin^2 x \sim -x^2; (\arcsin x)\sqrt{1-x^2} \sim x \end{cases}$ (0,5đ)

2) Đặt u = x, v = ln(1 − 3x) ⇒ y = u.v ⇒ $y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.u^{(k)}.v^{(n-k)}$

$u' = 1$, $u'' = 0 \Rightarrow u^{(k)} = 0\ \forall k \geq 2.$ (0,5đ)

$v' = \frac{1}{1-3x}\cdot(-3) = (1-3x)^{-1}(-3)$, $v'' = (-1)(1-3x)^{-2x}(-3)^2$, …,

$\Rightarrow v^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-n+1)(1-3x)^{-n}(-3)^n = \frac{-3^n(n-1)!}{(1-3x)^n}$ (0,5đ)

Vậy $y^{(n)} = x\frac{-3^n(n-1)}{(1-3x)^n} + n\frac{-3^{n-1}(n-2)!}{(1-3x)^{n-1}}$

$= \frac{3^{n-1}(n-2)!}{(1-3x)^n}\cdot(3x-n)$ (0,5đ)

Câu II (2,5 đ)

1) Với y = kx thì $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{kx^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2}\right) = \cos\left(\frac{k-k^2}{1+k^2}\right)$ (0,5đ)

Giới hạn trên thay đổi theo k

$$\Rightarrow \nexists \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \Rightarrow f(x,y) \text{ không liên tục tại } (0;0) \qquad (0{,}5đ)$$

2) $F = xe^{yz} - (y + z + 1)$.

$$\Rightarrow F'_x = e^{yz}\ ;\ F'_y = xze^{yz} - 1\ ;\ F'_z = xye^{yz} - 1 \qquad (0{,}5đ)$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = 1\ ;\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -1 \qquad (0{,}5đ)$$

$$\Rightarrow dz(0;0) = dx - dy \qquad (0{,}5đ)$$

Câu III (2,5đ)

1) $$\int_1^2 \arccos\sqrt{\frac{2x-1}{2x}}dx = x\arccos\sqrt{\frac{2x-1}{2x}}\Bigg|_1^2 - \int_1^2 x.d\arccos\sqrt{\frac{2x-1}{2x}} \qquad (0{,}5đ)$$

$$= 2.\frac{\pi}{6} - 1.\frac{\pi}{4} + \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{2x-1}}dx$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{x-1}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) \qquad (0{,}5đ)$$

2) $x' = 2\cos 2t$; $y' = 2 + 2\sin 2t$

$$\Rightarrow s = \int_0^{\pi}\sqrt{4(2+2\sin 2t)}dt \qquad (0{,}5đ)$$

$$s = 2.\int_0^{\pi}\sqrt{2(\sin t+\cos t)^2}\,dt = 4.\int_0^{\pi}\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|dt \qquad (0{,}5đ)$$

$$= 4.\left[\int_0^{3\pi/4} - \int_{3\pi/4}^{\pi}\right] = 4\left[-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{3\pi/4} + \cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{3\pi/4}^{\pi}\right]$$

$$= 4\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{-\sqrt{2}}{2} + 1\right] = 8 \qquad (0{,}5đ)$$

Câu IV (2,5đ)

1) Khi $x \to +\infty$, $$f(x) = \frac{\ln^{\alpha}(3+2x)}{2+x} \sim 2\frac{\ln^{\alpha}(3+2x)}{3+2x} = g(x) \qquad (0{,}5đ)$$

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} 2\frac{\ln^{\alpha}(3+2x)}{3+2x}dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \ln^{\alpha}(3+2x)d\ln(3+2x) = \int_0^{+\infty} \frac{d\ln(3+2x)}{[\ln(3+2x)]^{-\alpha}}$$

$$\begin{cases} \text{hội tụ khi } \alpha < -1 \\ \text{phân kỳ khi } \alpha \geq -1 \end{cases} \quad (0{,}5đ)$$

2) Dễ thấy x = y thì 2 vế = 0 ⇒ BĐT đúng. (0,5đ)

Với x > y, BĐT ⇔ $\dfrac{\operatorname{arc\,cotg}x^4 - \operatorname{arc\,cotg}y^4}{\ln x^2 - \ln y^2} \geq -1$ (*)

Hai hàm $f(t) = \operatorname{arccotg}t^4$ và $g(x) = \ln t^2$ thoả mãn định lý Cauchy trên đoạn [y;x] (0,5đ)

$$\Rightarrow \exists t_0 \in (y;x):\ VT^{(*)} = \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}$$

$$= \frac{-4t_0^3}{1+t_0^8} : \frac{2t_0}{t_0^2} = -\frac{2t_0^4}{1+t_0^8} \geq -1 \text{ (đfcm)} \quad (0{,}5đ)$$

Cách 2: Xét hàm $F(t) = \operatorname{arccotg}t^4 + \ln t^2$, với t > 0

$$\Rightarrow F'(t) = \frac{-4t^3}{1+t^8} + \frac{2}{t} = \frac{2(t^4-1)^2}{t(1+t^8)} \geq 0$$

⇒ F(t) đồng biến (0;+∞) ⇒ với x ≥ y > 0 thì F(x) ≥ F(y) (đfcm)

ĐỀ 3 (GIẢI TÍCH I - K50)

(thời gian: 90 phút)

Câu I (2,5 đ)

1) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^{\cot gx}$

2) Xét tính liên tục tại điểm x = 0 của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-\sin x)}{x^2\sin x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Câu II (2,5 đ)

1) Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 - 2x + \text{arctg}(y^2)$

2) Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\text{tg}y}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Tính $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$.

Hàm f(x,y) có khả vi tại điểm (0,0)? Tại sao?

Câu III (2,5 đ)

1) Tính $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(2x+1)}{e^{2x}}dx$

2) Tính độ dài cung: $y = \arcsin(e^{-x})$, $0 \leq x \leq \ln 2$

Câu IV (2,5 đ)

1) Tính $\displaystyle\int \frac{xdx}{e^x(x-1)^2}$

2) Cho $\alpha(x) = \text{arctg}^2(1 + x) - \text{arctg}^2 x$ và $\beta(x) = \dfrac{\text{arccotg}(1 - x^2)}{1 + x^2}$

Chứng minh rằng $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB tương đương khi $x \to +\infty$.

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5 đ)

1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{\text{cotg}x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\sin x)}{\text{tg}x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{1-\sin x}\cdot\cos^2 x} \left(\frac{0}{0}\right)$ (0,5đ)

$\overset{L'}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-3\cos^2 x.(-\sin x)}{-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} -3\cos x.\sin x} = e^0 = 1$ (0,5đ)

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \overset{\sin x\sim x}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \left(\frac{0}{0}\right)$ (0,5đ)

$$\overset{L'}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

(hoặc thay $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$) (0,5đ)

$\Rightarrow a = \frac{1}{6}$, f(x) liên tục tại x = 0;

$a \neq \frac{1}{6}$, f(x) không liên tục tại x = 0 (0,5đ)

Câu II (2,5 đ)

1) $z'_x = 2x - 2$, $z'_y = \frac{2y}{1+y^4} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (1;0)$ (0,5đ)

$z''_{xx} = 2$, $z'_{xy} = 0$, $z''_{yy} = \frac{2(1+y^4) - 2y.4y^3}{(1+y^4)^2}$ (0,5đ)

Tại (1;0) ta có A = 2, B = 0, C = 2

$$\Rightarrow \begin{cases} B^2 - AC < 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow z_{min} = z(1;0) = \pm 1$$ (0,5đ

2) $f'_x(0;0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x;0) - f(0;0)}{x} = 0$;

$f'_y(0;0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y} = 0$ (0,5đ

Khi $y = kx \to 0$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \to 0}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x.\text{tg}kx}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$ thay đổi theo

$\Rightarrow \nexists \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) \Rightarrow$ f(x,y) không liên tục tại (0;0)

$\Rightarrow$ f(x,y) không khả vi tại (0;0) (0,5đ

Câu III (2,5 đ)

1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{(2x+1)}{e^{2x}} dx = \int_0^{+\infty} (2x+1) \frac{de^{-2x}}{-2}$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[(2x+1).e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-2x}.2dx\right] \qquad (0{,}5đ)$$

$$\text{Vì } \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)}{e^{2x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2e^{2x}} = 0$$

$$\text{nên } I = -\frac{1}{2}\cdot\left[0-1+e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}\right] = -\frac{1}{2}[-1-1] = 1 \qquad (0{,}5đ)$$

$$2)\ y' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \Rightarrow 1 + y'^2 = 1+\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} \qquad (0{,}5đ)$$

$$s = \int_0^{\ln 2}\sqrt{1+y'^2}dx = \int_0^2 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int_0^1 \frac{de^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\Big|_1^2 = \ln(2+\sqrt{3}) \qquad (0{,}5đ)$$

Câu IV (2,5 đ)

$$1)\ \int\frac{xdx}{e^x(x-1)^2} = \int\frac{(x-1)+1}{(x-1)^2}\cdot e^{-x}dx = \int\frac{e^{-x}dx}{x-1} + \int\frac{e^{-x}dx}{(x-1)^2} \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \int\frac{-1}{x-1}de^{-x} + \int e^{-x}d\left(\frac{-1}{x-1}\right) \qquad (0{,}5đ)$$

$$= \left[\frac{-1}{(x-1)}\cdot e^{-x} - \cancel{\int e^{-x}d\left(\frac{-1}{x-1}\right)}\right] + \cancel{\int e^{-x}d\left(\frac{-1}{x-1}\right)} = \frac{-e^{-x}}{x-1} + C \qquad (0{,}5đ)$$

2) Hàm $f(x) = \text{arctg}^2 t$ liên tục, khả vi $\forall t \Rightarrow$ thoả mãn Lagrange trên $[x;1+x] \Rightarrow \exists t_0 \in (x;1+x)$: $f(1+x) - f(x) = f'(t_0) = \dfrac{2\text{arctg}t_0}{1+t_0^2}$ (0,5đ)

Khi $x \to +\infty$, $\alpha(x) = f(1+x) - f(x)$

$$\sim \frac{2.\frac{\pi}{2}}{1+x^2} = \frac{\pi}{1+x^2} \sim \frac{\text{arc}\cot g(1-x^2)}{1+x^2} = \beta(x)\ (\text{đfcm}) \qquad (0{,}5đ)$$

ĐỀ 4 (GIẢI TÍCH I - K50)
(thời gian: 90 phút)

Câu 1 (2,5 đ)

1) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\operatorname{tg}x}$

2) Xét tính liên tục tại điểm x = 0 của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\operatorname{tg}x}{x^2\operatorname{tg}x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Câu II (2,5 đ)

1) Tìm cực trị của hàm số $z = \operatorname{arccotg}(x^2) - y^2 + 2y$

2) Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tính $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$.

Hàm f(x,y) có khả vi tại điểm (0,0)? Tại sao?

Câu III (2,5 đ)

1) Tính $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-x)}{e^{2x}}dx$

2) Tính độ dài cung: $y = \arccos(e^{-x})$, $0 \leq x \leq \ln 3$

Câu IV (2,5 đ)

1) Tính $\displaystyle\int\frac{(1+x)dx}{x^2e^x}$

2) Cho $\alpha(x) = \operatorname{arccotg}^2(1-x) - \operatorname{arccotg}^2(2-x)$ và $\beta(x) = \dfrac{4\operatorname{arctg}(1-x^2)}{1+x^2}$

Chứng minh rằng $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB tương đương khi $x \to +\infty$.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2,5 đ)

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{tgx} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\cot gx}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L'}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\cdot\sin x.(-\sin^2 x)} \left(\frac{0}{0}\right)$ **(0,5đ)**

$\stackrel{L'}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3\sin^2 x.\cos x}{\sin x}} = e^0 = 1$ **(0,5đ)**

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \stackrel{tgx\sim x}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-tgx}{x^3} \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}$ **(0,5đ)**

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-tg^2x}{3x^2} = -\frac{1}{3}$ **(0,5đ)**

$a = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0$; **(0,5đ)**

$a \neq -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x = 0$ **(0,5đ)**

Câu II (2,5 đ)

1) $z'_x = \frac{-2x}{1+x^4}$, $z'_y = -2y + 2 \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (0;1)$ **(0,5đ)**

$z''_{xx} = \frac{-2(1+x^4)+2x.4x^3}{(1+x^4)^2}$, $z'_{xy} = 0$, $z''_{yy} = -2$ **(0,5đ)**

Tại (0;1) ta có $A = -2$, $B = 0$, $C = -2$

$\Rightarrow \begin{cases} B^2 - AC < 0 \\ A < 0 \end{cases} \Rightarrow z_{max} = z(0;1) = \frac{\pi}{2} + 1$ **(0,5đ)**

2) $f'_x(0;0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x;0)-f(0;0)}{x} = 0;$

$f'_y(0;0) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0;y)-f(0;0)}{y} = 0$ **(0,5đ)**

Khi $y = kx$ thì $f(x,y) = \frac{x.\sin kx}{x^2(1+k^2)} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y) = \frac{k}{1+k^2}$

Giới hạn trên thay đổi theo k $\Rightarrow$ f(x,y) không liên tục tại (0;0)

$\Rightarrow$ f(x,y) không khả vi tại (0;0) (0,5đ

Câu III (2,5 đ)

1) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1-x)}{e^x}dx = \int\limits_0^{+\infty}(x-1)de^{-x} = (x-1).e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$ (0 5đ

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)}{e^x} \overset{L'}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\Rightarrow I = (0+1) + e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1 + (0-1) = 0$ (0,5đ

2) $y' = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \Rightarrow 1 + y'^2 = 1 + \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$ (0,5đ

$s = \int\limits_0^{\ln 3} \sqrt{1+y'^2}dx = \int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int\limits_0^{\ln 3} \frac{de^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ (0,5đ

$= \int\limits_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)\Big|_1^3 = \ln(3 + \sqrt{8})$ (0,5c

Câu IV (2,5 đ)

1) $\int \frac{(1+x)dx}{x^2e^x} = \int \frac{dx}{x^2e^x} + \int \frac{dx}{xe^x}$ (0,5c

$= -\int e^{-x}d\frac{1}{x} + \int \frac{e^{-x}dx}{x}$ (0,5c

$= -\frac{1}{x}e^{-x} + \int \frac{1}{x}de^{-x} + \int \frac{e^{-x}dx}{x}$

$= -\frac{e^{-x}}{x} - \int \frac{e^{-x}dx}{x} + \int \frac{e^{-x}dx}{x} = -\frac{e^{-x}}{x} + C$ (0,5

2) Hàm $f(x) = \text{arccotg}^2 t$ liên tục, khả vi $\forall t \Rightarrow$ thoả mãn Lagrange tr $[1-x;2-x] \Rightarrow \exists t_0 \in (1-x;2-x)$:

$$\frac{f(1-x)-f(2-x)}{-1} = f'(t_0) = \frac{-2\text{arccotg}\, t_0}{1+t_0^2}$$ (0,5

Khi $x \to +\infty$, $\alpha(x) = f(1-x) - f(2-x)$

$$\sim \frac{-2\pi}{1+x^2} \sim \frac{4\text{arctg}(1-x^-)}{1+x^2} = \beta(x) \text{ (đfcm)} \qquad (0,5đ)$$

ĐỀ 1 (GIẢI TÍCH I - K50)

(thời gian: 90 phút)

Câu I (2,5 đ)

1) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$.

2) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x-1}}{2^{\frac{1}{x-1}}+1}$ khi $x \neq 1$ và $f(1) = a$. Tìm a để f(x) liên tục tại điểm x = 1.

Câu II (2,5 đ)

1) Tìm cực trị của hàm số $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

2) Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Câu III (2,5 đ)

1) Cho hàm số $z = \dfrac{y^2}{3x} + \text{arctg}\dfrac{x}{y}$. Tính $A = x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2$.

2) Cho hàm số $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ nếu $x^2 + y^2 \neq 0$ và $f(0;0) = 0$.

Tính $f'_x(x,y)$ và $f''_{xy}(0;0)$.

Câu IV (2,5 đ)

1) Tính tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x-1}}dx$.

2) Cho hàm số f(x) có đạo hàm trên đoạn [0;1], $f'(0)f'(1) < 0$.

Chứng minh rằng $\exists c \in (0;1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

ĐAP AN

Câu I (2,5 đ)

1) $A = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$\ln A = \lim\limits_{x\to 1^-} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(1-x)\right].$

Đặt $1 - x = t \Rightarrow \ln A = \lim\limits_{t\to 0^+}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ln t\right]$ (0,5đ)

$= \frac{\pi}{2}\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}} \overset{L'}{=} \frac{\pi}{2}\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t\left(-\frac{1}{t^2}\right)}$ (0,5đ)

$\ln A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$ (0,5đ)

2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$ vì $\frac{1}{x-1} \to +\infty$ còn $\sin\frac{1}{x-1}$ bị chặn (0,5đ)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ không tồn tại vì $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ còn $\sin\frac{1}{x-1}$ không có giới hạn

$\Rightarrow$ không tồn tại a (0,5đ)

Câu II (2,5 đ)

1) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$y' = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, y' không xác định $\Leftrightarrow x = \pm 1$ (0,5đ)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

$$\begin{cases} y_{CT} = y(\pm 1) = 0 \\ y_{CĐ} = y(0) = 1 \end{cases}$$ (1đ)

(Chú ý: nếu chỉ kết luận y đạt cực đại tại điểm x = 0 thì trừ 0.5đ)

Cách 2: y đạt cực trị $\Leftrightarrow$ $f(x) = (x^2 - 1)^2$ đạt cực trị...

2) $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Đổi biến $x = \pi - t \Rightarrow I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - I$ (0,5đ)

Suy ra $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t}$

$= -\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$ (0,5đ)

Câu III (2,5đ)

1) $z = \frac{y^2}{3x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

$z'_x = -\frac{y^2}{3x^2} + \frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y = \frac{2y}{3x} - \frac{x}{x^2+y^2}$ (0,5đ)

$A = -\frac{y^2}{3} + \frac{x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2}{3}y^2 - \frac{x^2y}{x^2+y^2} + y^2 = 0$ (0,5đ)

2) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $f(0;0) = 0$.

$f'_x(x,y) = 2\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $(x^2+y^2 \neq 0)$ (0,5đ)

$f'_x(0;0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0;0)}{x-0} = 0$ (0,5đ)

$f''_{xy}(0;0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_y(0;0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{2}{y^2} = +\infty \Rightarrow \nexists f''_{xy}(0;0)$ (0 5đ)

Câu IV (2,5đ)

1) $J = \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x-1}}dx$

Đặt $t = \sqrt{x-1}$ $(t \geq 0) \Rightarrow J = 2\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-t}dt$ (0,5đ)

$$J_b = \int_0^b te^{-t}dt = -\int_0^b td(e^{-t}) = -te^{-t}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-t}dt$$

$$= -be^{-b} - e^{-t}\Big|_0^b = -be^{-b} - e^{-b} + 1$$ (0,5đ)

$J = 2\lim_{b\to+\infty} J_b = 2$ (0,5đ)

2) f có đạo hàm trên [0;1] $\Rightarrow$ f liên tục trên [0;1] $\Rightarrow$ f đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trên đoạn đó.

Vì $f'(0).f'(1) < 0$ nên với trường hợp $f'(0) < 0$, $f'(1) > 0 \Rightarrow \exists\delta_1 > 0$, $\exists\delta_2 > 0$ ($\delta_1, \delta_2 < 1$) sao cho:

$f(0) > f(x)\ \forall x \in [0, \delta_1]$, $f(1) > f(0)\ \forall x \in [\delta_2, 1]$

$\Rightarrow$ f đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $c \in (0;1)$ (0,5đ)

* Suy ra f đạt cực tiểu tại điểm c nên theo định lý Fermat thì $f'(c) = 0$.

Với trường hợp: $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$ chứng minh tương tự. (0,5đ)

Cách 2:

* Giả sử $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a,b] \Rightarrow$

Trường hợp 1: Nếu f đơn điệu ngặt trên [a,b] $\Rightarrow$ f' luôn cùng dấu trên [a, b] $\Rightarrow$ trái giả thiết. (0,5đ)

* Trường hợp: $\exists a_1, b_1 \in [a,b]$ sao cho $a_1 < b_1$, $f(a_1) = f(b_1)$. áp dụng định lý Rolle suy ra $\exists c \in [a_1,b_1]$: $f'(c) = 0 \Rightarrow$ vô lý. (0,5đ)

ĐỀ 2 (GIẢI TÍCH I - K50)
(thời gian: 90 phút)

Câu 1 (2,5 đ)

1) Tìm giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x\right)^x$.

2) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sin\dfrac{1}{x+1}}{2^{\frac{1}{x+1}} + 1}$ khi $x \neq -1$ và $f(-1) = a$. Tìm a để f(x) liên tục tại điểm $x = -1$.

Câu 2 (2,5 đ)

1) Tìm cực trị của hàm số $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

2) Tính tích phân $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\dfrac{1+\cos^3 x}{1+\sin^3 x}\right)dx$.

Câu 3 (2,5 đ)

1) Cho hàm số $z = \dfrac{x^2}{3y} + \text{arctg}\dfrac{y}{x}$. Tính $A = y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} - xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + x^2$.

2) Cho hàm số $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ nếu $x^2 + y^2 \neq 0$ và $f(0;0) = 0$.

Tính $f'_y(x,y)$ và $f''_{yx}(0;0)$.

Câu IV (2,5 đ)

1) Tính tích phân $\int_{-1}^{+\infty} e^{-\sqrt{x+1}}dx$.

2) Cho hàm số f(x) có đạo hàm trên đoạn [0;1], $f'(0).f'(1) < 0$.

Chứng minh rằng $\exists c \in (0;1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5đ)

1) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\text{arctgx}\right)^x$

$\ln A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\text{arctgx}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{2}{\pi}\text{arctgx} - 1\right)\right]$ (0,5đ)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{\pi}\text{arctg}x - 1}{\frac{1}{x}} \overset{L'}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{\pi(1+x^2)}\right):\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] \qquad (0{,}5đ)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \Rightarrow A = e^{-2/\pi} \qquad (0{,}5đ)$$

2) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = 0$ vì $\frac{1}{x+1} \to +\infty$ còn $\sin\frac{1}{x+1}$ bị chặn (0,5đ)

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ không tồn tại vì $\frac{1}{x+1} \to -\infty$ còn $\sin\frac{1}{x+1}$ không có giới hạn $\Rightarrow$ không tồn tại a (0,5đ)

Câu II (2,5 đ)

1) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

$y' = \frac{4-3x}{\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}$, $y' = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$, y' không xác định tại x = 1, x = 2 (0,5đ)

x	$-\infty$		1		4/3		2		$+\infty$
y'		–	||	–	0	+	||	–	
y	$+\infty$	↘			CT	↗	CĐ	↘	$-\infty$

$$\begin{cases} y_{CT} = y\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3} \\ y_{CĐ} = y(2) = 0 \end{cases} \qquad (1đ)$$

(Chú ý: nếu chỉ tìm được $x = \frac{4}{3}$ là điểm cực tiểu thì trừ 0,5đ)

Cách 2: y đạt cực trị $\Leftrightarrow f(x) = (1-x)(x-2)^2$ đạt cực trị…

2) $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\cos^3 x}{1+\sin^3 x}\right)dx$

Đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$

$$\Rightarrow I = -\int_{\pi/2}^{0} \ln\left(\frac{1+\sin^3 x}{1+\cos^3 x}\right)dx = \int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin^3 x}{1+\cos^3 x}\right)dx \qquad (0,5đ)$$

$$I = -\int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\cos^3 x}{1+\sin^3 x}\right)dx = -I \Rightarrow I = 0 \qquad (0,5đ)$$

Câu III (2,5 đ)

1) $z = \frac{x^2}{3y} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$z'_x = \frac{2x}{3y} - \frac{y}{x^2+y^2},\ z'_y = -\frac{x^2}{3y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (0,5đ)$$

$$A = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2}{3}x^2 - \frac{xy^2}{x^2+y^2} + x^2 = 0 \qquad (0,5đ)$$

2. $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $f(0;0) = 0$.

$$f'_y(x,y) = 2\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ (x^2+y^2 \neq 0) \qquad (0,5đ)$$

$$f'_y(0;0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0;0)}{y-0} = 0 \qquad (0,5đ)$$

$$f''_{yx}(0;0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0;0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2} = +\infty \Rightarrow \nexists\ f''_{yx}(0;0) \qquad (0,5đ)$$

Câu IV (2,5 đ)

1) $J = \int_{-1}^{+\infty} e^{-\sqrt{x+1}}dx$

Đặt $t = \sqrt{x+1}$ $(t \geq 0) \Rightarrow J = 2\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-t}dt$ (0,5đ)

$$J_b = \int_0^b te^{-t}dt = -\int_0^b td(e^{-t}) = -te^{-t}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-t}dt$$

$$= -be^{-b} - e^{-t}\Big|_0^b = -be^{-b} - e^{-b} + 1 \qquad \textbf{(0,5đ)}$$

$$J = 2\lim_{b \to +\infty} J_b = 2 \qquad \textbf{(0,5đ)}$$

2) Xem đáp án đề 1, câu 4.2. **(1đ)**

ĐỀ 3 (GIẢI TÍCH I - K51)

(thời gian: 90 phút)

Câu I (2,5 đ)

1) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2) Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

Câu II (2,5 đ)

1) Tính tích phân $\displaystyle\int \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}dx$.

2) Tính độ dài đường cong $x = \dfrac{1}{3}t^6$, $y = 4 - \dfrac{1}{2}t^4$, $(0 \le t \le \sqrt[4]{8})$.

Câu III (2,5 đ)

1) Tìm cực trị của hàm số $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

2) Cho $z = z(x,y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $z - ye^{x/z} = 0$. Tính $dz(0;1)$.

Câu IV (2,5 đ)

1) Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 - 1}}$.

2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$.

Tính $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)\sin nx\,dx$.

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5 đ)

1) $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$\ln A = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ (0,5đ)

$\overset{L'}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{3x^2}$ (có thể dùng khai triển Taylor để tính)

$= -\lim\dfrac{x^2}{6x^2} = -\dfrac{1}{6} \Rightarrow A = e^{-1/6}$ (0,5đ)

2) $y = \dfrac{3x^2+2}{\sqrt{x^2-4}}$

Tiệm cận đứng: $x = \pm 2$. Tiệm cận ngang: không có (0,5đ)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2+2}{x\sqrt{x^2-4}} = \pm 3$ (0,5đ)

$\lim\limits_{x\to+\infty}[y-3x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2+2}{\sqrt{x^2-4}} - 3x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[3\sqrt{x^2-4} - 3x + \dfrac{14}{\sqrt{x^2-4}}\right]$

$$= 3\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} + 14\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = 0$$

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên bên phải: $y = 3x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[y+3x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3x^2+2}{x\sqrt{x^2-4}} + 3x\right] = \ldots = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận xiên bên trái: $y = -3x$ (0,5đ)

* *Chú ý*: nếu thiếu một tiệm cận xiên thì trừ 0,5đ.

Câu II (2,5 đ)

1) $I = \displaystyle\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$

$$I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx + \int \frac{3}{\sqrt{(x+1)^2-4}}dx \qquad (0,5đ)$$

$$= \sqrt{x^2+2x-3} + 3\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right| + C \qquad (0,5đ)$$

2) $x = \frac{1}{3}t^6,\ y = 4 - \frac{1}{2}t^4\ (0 \le t \le \sqrt[4]{8})$.

$$s = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{4t^{10}+4t^6}\,dt = 2\int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3\sqrt{t^4+1}\,dt \qquad (0,5đ)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^4+1}\,d(t^4+1) = \frac{1}{3}(t^4+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt[4]{8}} \qquad (0,5đ)$$

$$s = \frac{1}{3}\left[(8+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{26}{3} \qquad (0,5đ)$$

Câu III (2,5 đ)

1) $z = 3x^2y - x^3 - y^4$

$$\begin{cases} z'_x = 6xy - 3x^2 \\ z'_y = 3x^2 - 4y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 6,\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{2 điểm dừng là} \\ M_1(0;0),\ M_2(6;3) \end{cases}$$

$z''_{x^2} = 6y - 6x,\ z''_{xy} = 6x,\ z''_{y^2} = -12y^2$

$\Rightarrow B^2 - AC = 36x^2 + 72y^2(y - x)$ (0,5đ)

Tại M_1: $B^2 - AC = 0$, vì $z(x,0) = -x^3$ đổi dấu trong bất kỳ lân cận nào của gốc toạ độ $\Rightarrow M_1$ không là điểm cực trị. (0,5đ)

Tại M_2: $B^2 - AC = -36.18 < 0$, $A = -18 < 0 \Rightarrow M_2$ là điểm cực đại và $z_{CĐ} = 27$. (0,5đ)

2) $z - ye^{x/z} = 0$

$dz(0;1) = z'_x(0;1)dx + z'_y(0;1)dy,\ z(0;1) = 1$ (0,25đ)

$F(x,y,z) = z - ye^{x/z} \Rightarrow F'_x = -\frac{y}{z}e^{x/z},\ F'_y = -e^{x/z},\ F'_z = 1 + \frac{xy}{z^2}e^{x/z}$

Tại đ (0;1): $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = 1,\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = 1$ (0,5đ)

$dz(0;1) = dx + dy.$ (0,25đ)

Câu IV (2,5 đ)

1) $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 - 1}}$

$J = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 - 1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 - 1}} \equiv J_1 + J_2$ (0,25đ)

J_1 hội tụ vì $f(x) = \frac{1}{(x^5 - 1)^{1/3}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{5}(x-1)^{1/3}}$ khi $x \to 1$, mà $\int \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$ hội tụ. (0,5đ)

J_2 hội tụ vì $f(x) \sim \frac{1}{x^{5/3}}$ khi $x \to +\infty$, mà $\int \frac{dx}{x^{5/3}}$ hội tụ. (0,5đ)

Suy ra J hội tụ. (0,25đ)

2) $I_n = -\frac{1}{n}\int_a^b f(x)d(\cos nx)$

$= -\frac{1}{n}\left[f(a)\cos na - f(b)\cos nb\right] + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nx).f'(x)dx$

$\Rightarrow |I_n| \le \frac{1}{n}\left[|f(a)| + |f(b)|\right] + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|dx$ (0,5đ)

Do f và f' liên tục trên [a,b] $\Rightarrow \exists M > 0$: $|f(x)| \le M$, $|f'(x)| \le M$

$\forall x \in [a,b] \Rightarrow |I_n| \le \frac{1}{n}[2M + M(b-a)] \to 0$ khi $n \to \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ (0,5đ)

ĐỀ 4 (GIẢI TÍCH I - K51)

(thời gian: 90 phút)

Câu I (2,5 đ)

1) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$\sqrt{x^2 - 1}$

Câu II (2,5 đ)

1) Tính tích phân $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx$.

2) Tính độ dài đường cong $x = \frac{1}{2}t^6$, $y = 6 - \frac{3}{4}t^4$. $(0 \le t \le \sqrt[4]{8})$.

Câu III (2,5 đ)

1) Tìm cực trị của hàm số $z = 3xy^2 - y^3 - x^4$.

2) Cho $z = z(x,y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $xe^{y/z} - z = 0$. Tính $dz(1;0)$.

Câu IV (2,5 đ)

1) Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$.

2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$.

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin nx dx$.

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5đ)

1) $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\ln\frac{tgx}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{tgx}{x} - 1\right)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \quad (0{,}5đ)$$

$$\overset{L'}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = e^{1/3} \quad (0{,}5đ)$$

2) $y = \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Tiệm cận đứng: $x = \pm 1$. Tiệm cận ngang: không có (0,5đ)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3}{x\sqrt{x^2-1}} = \pm 2$$ (0,5đ)

$$\lim_{x\to+\infty}[y-2x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2-1}}-2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x^2-1}-2x+\frac{5}{\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} + 5\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 0$$

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên bên phải: $y = 2x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[y+2x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2+3}{x\sqrt{x^2-1}}+2x\right] = \ldots = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận xiên bên trái: $y = -2x$ (0,5đ)

* *Chú ý*: nếu thiếu một tiệm cận xiên thì trừ 0,5đ.

Câu II (2,5 đ)

1) $I = \displaystyle\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx$

$$I = \int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx + \int\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-9}}dx$$ (0,5đ)

$$= \sqrt{x^2+4x-5} + \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right| + C$$ (0,5đ)

2) $x = \dfrac{1}{2}t^6$, $y = 6 - \dfrac{3}{4}t^4$ $(0 \le t \le \sqrt[4]{8})$.

$$s = \int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{9t^{10}+9t^6}\,dt = 3\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}\,dt$$ (0,5đ)

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^4+1}\,d(t^4+1) = \frac{1}{2}(t^4+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}$$ (0,5đ)

$$s = \frac{1}{2}\left[(8+1)^{\frac{3}{2}}-1\right] = 13.$$ (0,5đ)

Câu III (2,5 đ)

1) $z = 3xy^2 - y^3 - x^4$

$$\begin{cases} z'_x = 3y^2 - 4x^3 \\ z'_y = 6xy - 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 3, y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{2 điểm dừng là} \\ M_1(0;0), M_2(3;6) \end{cases}$$

$z''_{x^2} = -12x^2$, $z''_{xy} = 6y$, $z''_{y^2} = 6x - 6y$

$\Rightarrow B^2 - AC = 36y^2 + 72x^2(x - y)$ (0,5đ)

Tại M_1: $B^2 - AC = 0$, vì $z(0,y) = -y^3$ đổi dấu trong bất kỳ lân cận nào của M_1 nên z không đạt cực trị tại M_1. (0,5đ)

Tại M_2: $B^2 - AC = -36.18 < 0$, $A = -108 < 0 \Rightarrow M_2$ là điểm cực đại và $z_{CĐ} = 27$. (0,5đ)

2) $dz(1;0) = z'_x(1;0)dx + z'_y(1;0)dy$, $z(1;0) = 1$ (0,25đ)

$F(x,y,z) = xe^{y/z} - z \Rightarrow F'_x = e^{y/z}$, $F'_y = \dfrac{x}{z}e^{y/z}$, $F'_z = -\dfrac{xy}{z^2}e^{y/z} - 1$

$\Rightarrow z'_x(1;0) = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = 1$, $z'_y(1;0) = -1$ (0,5đ)

$dz(1;0) = dx - dy$ (0,25đ)

Câu 4 (2,5đ)

1) $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$

$J = \displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}} \equiv J_1 + J_2$ (0,25đ)

J_1 hội tụ vì $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 1)^{1/2}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{3}(x - 1)^{1/2}}$ khi $x \to 1$, mà $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 1}}$ hội tụ. (0,5đ)

J_2 hội tụ vì $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$ khi $x \to +\infty$, mà $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ hội tụ. (0,5đ)

Suy ra J hội tụ (0,25đ)

2) Xem đáp án ở đề 3, câu 4.2. (1đ)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ia.S.Bugrov, S.M.Nikolski, *Matemática para Engenharia* (1987).

[2] Raymond Couty, *Analyse* (1970).

[3] T.Bass, *Cours de Mathematiques* (1964).

[4] M.Nicocescu, *Analiza mamematica* (1970).

[5] SzeTenshu, *Elements of real analysis* (1978).

[6] G.Lefor, *Toán cao cấp dùng cho nhọc sinh* (1972).

[7] Lesieur, *Toán cao cấp dùng cho đại học kỹ thuật* (1972).

[8] Trần Bình, *Bài giảng toán cao cấp* (1968).

[9] Nguyễn Đình Trí, *Toán cao cấp* (1985).

[10] Hoàng Tụy, *Giải tích hiện đại* (1979).

[11] B.Demidovitch, *Problemas e exercicios de Análize Matemática* (1977).

[12] V.Smirnov, Cours de mathématiques Supérieures (1972).

[13] Г. М. Фихмензолы, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, I, II, III (1962).

[14] В. Немышкий, *Курс Математического Анализа* (1957).

[15] А. И. Маркушебич, *Теория Аналитических Функций* (1967).

[16] И. И. Ляшко, *Математический Анализ (В примерах и задачах)* (1978).

[17] Ю. С. Очан, *Математический Анализ* **(1961)**.

[18] Пицкунов, ***Курс дифференциального и интегрального исчисления*** (1982).

[19] Л. Т. Курош, ***Курс вышей алгребы*** (1965).

[20] Н. М. Матвеев, ***Сборник Задач и упрахнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям*** (1960).

[21] Trần Bình, *Giải tích, I, II, III* (1999 - 2000)

Chịu trách nhiệm xuất bản: TS. PHẠM VĂN DIỄN

Biên tập: NGỌC KHUÊ

Thiết kế bìa: TIẾN HÙNG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

In 500 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 cm, tại Xưởng in NXB Văn hóa dân tộc.

Số đăng ký KHXB: 82-2008/CXB/3.1-02/KHKT, cấp ngày 14-1-2008.

Quyết định xuất bản số: 200/QĐXB-NXB KHKT, cấp ngày 19-8-2008.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 9/2008.