BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

12
2000

SỐ 282 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

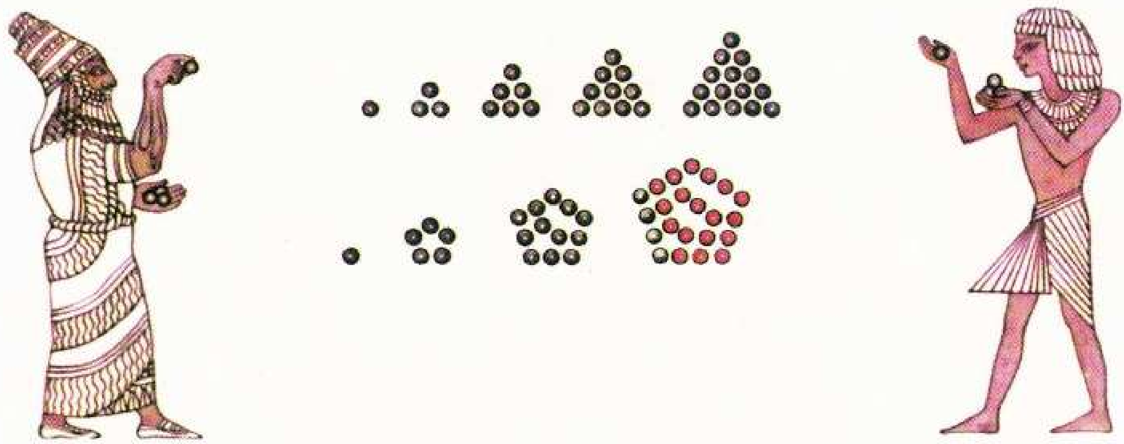
80 năm

Quốc học Vinh - Huỳnh Thúc Kháng

TOÁN HỌC MUÔN MẦU

SỐ ĐA GIÁC

CÁC nhà toán học cổ Hy Lạp (TK V - IV trước CN) đã xếp những viên sỏi thành các hình tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều rồi đếm số sỏi của từng hình. Từ đó họ được dãy số tam giác T_1, T_2, T_3, T_4, ... dãy số tứ giác V_1, V_2, V_3, V_4, ..., dãy số ngũ giác N_1, N_2, N_3, N_4, ... Nếu xếp các viên sỏi thành các đa giác đều thì được dãy số đa giác. Trường phái Pitago cũng đã biết mối liên hệ giữa các số đó, chẳng hạn : $V_4 = T_3 + T_4$, $V_7 = 8T_3 + 1$. Các bạn hãy tổng quát hóa (theo chỉ số) các hệ thức trên và tìm thêm các hệ thức khác.



DÀNH CHO BẠN ĐỌC

1) Hãy nêu công thức tổng quát của T_k, V_k, N_k và của số đa giác n đỉnh D_k.

2) Tìm các cách chứng minh công thức tổng quát D_k.

Tặng phẩm dành cho các bạn tìm được *nhiều cách chứng minh*.

Giải đáp bài:

CÁC VÒNG TRÒN LIÊN KẾT

Các bạn đã đưa ra nhiều hình các vòng tròn liên kết có kèm theo công thức liên kết, nhưng phần lớn là liên kết lồng đơn. Xin giới thiệu 1 hình gồm 5 vòng tròn liên kết lồng kép.

Các bạn sau vẽ nhiều hình và được nhận tặng phẩm :

1) *Trần Thị Thủy*, 11A1, THPT Đông Sơn 1, **Thanh Hóa**;

2) *Bùi Thị Nhàn*, 11A, Trung tâm GD thường xuyên, Nam Đàn, **Nghệ An**;

3) *Cao Xuân Hùng*, 12A, THPT Diễn Châu 4, **Nghệ An**;

4) *Phạm Văn Trượng*, 11 Toán, THPT NK **Hưng Yên**;

5) *Nguyễn Hữu Hùng*, 11/5 trường Quốc học Huế, Tp Huế, **Thừa Thiên - Huế**;

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 282 (12-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

TRONG SỐ NÀY

2 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Đức Trường – Phương pháp tách trong biến đổi phân thức đại số

4 **Nhìn ra thế giới - Around the World**
Đề thi Olympic toán của Hoa Kì

4 **Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems** – *Ngô Việt Trung*

5 **Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học - For University Entrance Preparation**
Phạm Đình Trường – Từ một bất đẳng thức lượng giác cơ bản

7 *Doãn Minh Cường* – Đề thi tuyển sinh môn Toán vào ĐHSP Hà Nội, khối A, năm 2000

9 **Bạn đọc tìm tòi - Reader's Constributions**
Bùi Viết Lộc – Một cách chứng minh công thức Crelle

10 **Toán học và đời sống - Mathematics and Life**
Nguyễn Việt Hải – Tính tuần hoàn trong dương lịch

12 **Đề ra kì này – Problems in this Issue**
T1/282, ..., T10/282, L1,L2/282

14 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 278

21 **Diễn đàn dạy học toán - Math Teaching Forum**
Nguyễn Đức Tấn – Tiếp tục bàn về điều kiện để tứ giác nội tiếp

22 **Giới thiệu về toán học cao cấp - Introduction to Higher Mathematics**
Nguyễn Hải Thanh – Giới thiệu tập hợp mờ

23 Hội nghị toán học châu Á

24 **Câu lạc bộ – Math Club**

Bìa 1: Phó Thủ tướng Phạm Gia Khiêm, Bộ trưởng Nguyễn Minh Hiển, Thứ trưởng Nguyễn Văn Vọng cùng các học sinh giỏi trong buổi lễ khen thưởng các đoàn dự thi Olympic quốc tế và khu vực năm 2000.
Ảnh : *Giang Hà Vy*
- Giờ tan trường

Bìa 2 : **Toán học muôn màu** – Số đa giác

Bìa 3 : **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 4: Mái trường lịch sử

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHƯƠNG PHÁP TÁCH TRONG BIẾN ĐỔI PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

Bài viết này được hình thành từ bài tập rút gọn ở SGK lớp 8 :

Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(z-x)(x-y)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}$$

với $x\neq y,\ y\neq z\ ;\ z\neq x$.

Việc biến đổi cho thấy biểu thức trên bằng 0.

Từ kết quả trên ta có thể suy ra hằng đẳng thức (*) :

$$\frac{1}{(x-y)(x-z)}=\frac{1}{(z-y)(x-z)}+\frac{1}{(x-y)(y-z)}$$

trong đó x, y, z đôi một khác nhau.

Ghi nhớ : Từ vế trái, ta lần lượt thay $x-y$ bởi $z-y$, thay $x-z$ bởi $y-z$ và giữ nguyên thừa số kia sẽ có 2 số hạng ở vế phải.

Khi gặp bài biến đổi phân thức đại số, nếu biết vận dụng hằng đẳng thức (*) nhiều khi dẫn đến kết quả nhanh hơn.

Bài 1. *Cho $a\neq b\ ;\ b\neq c;\ c\neq a$. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào a, b, c.*

$$A=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

Lời giải. Vận dụng hằng đẳng thức (*) trong đó thay tử số 1 bởi b^2 ta có :

$$A=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(a-c)(b-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c-b)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=\frac{a+b}{a-c}+\frac{c+b}{c-a}$$

$$=\frac{a+b}{a-c}-\frac{c+b}{a-c}=\frac{a-c}{a-c}=1.$$

Bài 2. *Cho $a\neq b,\ b\neq c;\ c\neq a$. Rút gọn biểu thức :*

$$B=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Lời giải. Vận dụng (*) ta có :

$$B=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(a-c)(b-a)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{x-c}{(a-b)(a-c)}[(x-b)-(x-a)]+\frac{x-a}{(c-a)(c-b)}[(x-b)-(x-c)]=$$

$$=\frac{(x-c)(a-b)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(c-b)}{(c-b)(c-a)}$$

$$=\frac{x-c}{a-c}+\frac{x-a}{c-a}=\frac{x-c}{a-c}-\frac{x-a}{a-c}=\frac{a-c}{a-c}=1.$$

Bài 3. *Cho các số a, b, c, x đôi một khác nhau. Chứng minh rằng :*

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}=\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Lời giải. Vận dụng hằng đẳng thức (*) trong đó thay tử số 1 bởi $\frac{b}{x-b}$ ta có :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(c-a)(b-c)(x-b)}+\frac{b}{(b-a)(a-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}\left[\frac{x}{x-a}-\frac{b}{x-b}\right]+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\left[\frac{c}{x-c}-\frac{b}{x-b}\right]$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}\times\frac{ax-bx}{(x-a)(x-b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\times\frac{cx-bx}{(x-c)(x-b)}$$

$$= \frac{x}{(a-c)(x-a)(x-b)} + \frac{x}{(c-a)(x-c)(x-b)}$$
$$= \frac{x}{(a-c)(x-b)} \times \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-c}\right]$$
$$= \frac{x}{(a-c)(x-b)} \times \frac{a-c}{(x-a)(x-c)}$$
$$= \frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)} \text{ đpcm.}$$

Qua ba bài trên, ta thấy có thể sử dụng phương pháp tách cho nhiều bài toán mà các biến có vai trò bình đẳng. Sau đây là một số bài tập trong đó các biến có vai trò bình đẳng song để sử dụng phương pháp tách cần dựa và đặc trưng của từng bài.

Bài 4. *Cho a, b, c đôi một khác nhau, chứng minh :*
$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$$
$$= \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Lời giải. Dễ thấy :
$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{b-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{a-c}{(a-b)(a-c)}$$
$$= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \qquad (1)$$

Tương tự, ta có :
$$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \qquad (2)$$
$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \qquad (3)$$

Cộng (1) (2) (3) ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. *Rút gọn biểu thức :*
$$\frac{a^2-bc}{(a+c)(a+b)} + \frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$$
với điều kiện : $a \neq -b$, $b \neq -c$, $c \neq -a$.

Lời giải.

Ta có : $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)} = \dfrac{a^2+ab-bc-ab}{(a+b)(a+c)}$
$$= \frac{a(a+b)}{(a+b)(a+c)} - \frac{b(c+a)}{(a+b)(a+c)} = \frac{a}{a+c} - \frac{b}{a+b}$$

Tương tự : $\dfrac{b^2-ac}{(b+a)(b+c)} = \dfrac{b}{b+a} - \dfrac{c}{b+c} \qquad (2)$
$$\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)} = \frac{c}{c+b} - \frac{a}{c+a} \qquad (3)$$

Cộng (1) (2) (3) ta được kết quả là 0.

Bài 6. *Cho ba phân thức* $\dfrac{a-b}{1+ab}; \dfrac{b-c}{1+bc}; \dfrac{c-a}{1+ac}$.

Chứng minh rằng tổng ba phân thức bằng tích của chúng.

Hướng dẫn giải:

Thay $\dfrac{b-c}{1+bc} = \dfrac{(b-a)}{1+bc} + \dfrac{(a-c)}{1+bc}$ rồi lấy thừa số chung là các tử thức.

Sau đây là một số bài tập có thể giải bằng phương pháp tách.

Bài 1. *Cho* $T_k = \dfrac{a^k(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^k(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^k(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$

Tính T_0; T_1; T_2.

Bài 2. Chứng minh :

a) $\dfrac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$

b) $\dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$

c) $\dfrac{(b+c)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(a+c)(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{(a+b)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = a+b+c-x.$

Bài 3. Rút gọn biểu thức
$$R = \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bài 4. Cho
$$Q_n = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^n}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^n}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$
Tính Q_0; Q_1; Q_2; Q_3.

Bài 5. Chứng minh đẳng thức :
$$\frac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{c^2-a^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)} = \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{a-b}{a+b}.$$

Nhắn tin :

Các bạn được giải trong các kì thi trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm 2000 hãy gửi địa chỉ mới nhất để Tòa soạn tiện liên hệ.

THTT

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA HOA KÌ (2/1996)

Ngày thứ nhất (3 giờ)

Bài 1. Chứng minh rằng trung bình cộng của các số $t\sin t^o$ ($t = 2, 4, 6, ..., 180$) bằng $\cot g1^o$.

Bài 2. Với mỗi tập hợp không rỗng S các số thực, kí hiệu $t(S)$ là tổng các phần tử của S. Cho tập hợp A gồm n số nguyên dương, ta xét họ tất cả các tổng khác nhau $t(S)$ với mỗi S là một tập con khác rỗng của A. Chứng minh rằng họ các tổng này có thể phân chia thành n lớp sao cho trong mỗi lớp thì tỉ số giữa tổng lớn nhất và tổng nhỏ nhất không vượt quá 2.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trong mặt phẳng chứa ABC với mỗi đường thẳng d gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua d. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng d sao cho phần giao của miền trong ΔABC với miền trong $\Delta A'B'C'$ (đối xứng qua d) có diện tích lớn hơn 2/3 diện tích ΔABC.

Ngày thứ hai (3 giờ)

Bài 4. Mỗi bộ n số $(x_1, x_2, ..., x_n)$, trong đó số x_i ($i = 1, 2, ..., n$) lấy giá trị 0 hoặc 1, được gọi là *bộ nhị phân độ dài n*. Giả sử a_n là số các bộ nhị phân độ dài n không chứa 3 số liên tiếp dạng 0, 1, 0. Giả sử b_n là số các bộ nhị phân độ dài n không chứa 4 số liên tiếp dạng 0, 0, 1, 1 hoặc 1, 1, 0, 0. Chứng minh rằng $b_{n+1} = 2a_n$ với mỗi số nguyên dương n.

Bài 5. Tam giác ABC có tính chất : tồn tại điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle PAB = 10^o$, $\angle PBA = 20^o$, $\angle PCA = 30^o$ và $\angle PAC = 40^o$. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân.

Bài 6. Tồn tại chăng tập con X của tập hợp các số nguyên có tính chất sau : với mỗi số nguyên n thì có đúng một cặp số a, b (a và b đều thuộc X) thỏa mãn $a + 2b = n$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 36

Problem. Derive a test for the divisibility of a positive number by 11 ?

Solution. Let $N = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ be the given number N. Let

$$M = a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^n a_n$$

be the alternating sum of the digits of N. To test the divisibility of N by 11 we only need to check the divisibility of this sum by 11. In fact, if we write the given number N in the form

$$N = a_0 + a_1 10 + ... + a_{n-1}10^{n-1} + a_n 10^n,$$

then we obtain the following formula for the difference between N and M :

$$N-M = a_1(10+1)+a_2(10^2-1) + ... + a_n(10^n + (-1)^n).$$

Each term of this difference is divisible by 11 because the division of $10^k = (11-1)^k$ by 11 gives the remainder -1 for odd k and 1 for even k (for instance, $10 + 1 = 11$, $10^2 - 1 = 9.11$, ...). Thus, N and M are simultaneously divisible or not divisible by 11, hence our claim.

Từ mới :

derive = thiết lập, rút ra (động từ)
test = phép thử, sự kiểm tra
divisibility = tính chia hết
given = đã cho, cho trước (tính từ)
alternating = đan dấu (tính từ)
check = thử, kiểm tra (động từ)
form = dạng (danh từ)
following = tiếp theo, sau đây
formula = công thức
term = hạng tử
division = phép chia
odd = lẻ
even = chẵn
for instance = ví dụ như
thus = như vậy, vì vậy
simultaneously = đồng thời (trạng từ)
claim = điều đòi hỏi

GS NGÔ VIỆT TRUNG

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(K41, Toán – Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

Các bạn đều biết một bất đẳng thức quen thuộc : với mọi số thực a, b, x ta có

$$|a\sin x + b.\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2} \qquad (1)$$

Trong bài báo này tôi muốn giới thiệu với các bạn một trong các phương pháp giải bài toán lượng giác dựa vào bất đẳng thức (1).

Trước hết bất đẳng thức (1) được phát biểu dưới dạng hai bất đẳng thức :

a) $a.\sin x + b.\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$ (2)

b) $a.\sin x + b.\cos x \ge -\sqrt{a^2+b^2}$ (3)

Dễ dàng thấy rằng :

• (2) trở thành đẳng thức
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0,\ x=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sg}n(a)\ (a\neq 0)\\ a=b=0\ (\forall x\in R)\\ b\neq 0,\ \mathrm{tg}x=\frac{a}{b},\ a\sin x\ge 0.\end{array}\right.$$

• (3) trở thành đẳng thức
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0,\ a\neq 0,\ x=-\frac{\pi}{2}\mathrm{sg}n(a)\\ a=b=c\ (\forall x\in R)\\ b\neq 0,\ \mathrm{tg}x=\frac{a}{b},\ a\sin x\le 0\end{array}\right.$$

với kí hiệu $\mathrm{sg}n(a)=\begin{cases}1 & \text{nếu } a>0\\ -1 & \text{nếu } a<0\end{cases}$

Bài toán 1. *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Xét các số x, y, z thỏa mãn điều kiện :* $x+y+z=\frac{\pi}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$F(x,y,z)=\frac{\sin x}{a}+\frac{\sin y}{b}+\frac{\sin z}{c}$$

Bài toán này đã được đề cập trên tạp chí THTT (T7/199), lời giải T7/199 ở THTT số 203 (5/1994). Ở lời giải đã sử dụng một phép biến đổi đưa hàm $F(x, y, z)$ về dạng :

$$abcF(x,y,z)=bc.\cos(\frac{\pi}{2}-x)+ca.\cos(\frac{\pi}{2}-y)+ab.\cos(\frac{\pi}{2}-z)$$

$$=(a^2+b^2+c^2)-\left[a\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-b\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2-\left[b\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+a\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-c\right]^2$$

rồi suy ra $F(x,y,z)\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

Lời giải này rất gọn và đơn giản nhưng không làm tôi hài lòng vì nó có vẻ không "tự nhiên" lắm.

Sau đây là một lời giải khác của bài toán này có sử dụng BĐT (2).

Lời giải. Biến đổi $F(x, y, z)$ như sau :

$$F(x,y,z)=\frac{\sin x}{a}+\frac{\sin y}{b}+\frac{\cos(x+y)}{c}$$
$$=\frac{\sin x}{a}+\frac{\sin y}{b}+\frac{\cos x.\cos y-\sin x.\sin y}{c}$$
$$=\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{\sin y}{c}\right)\sin x+\frac{\cos y}{c}.\cos x\right]+\frac{\sin y}{b}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (2) đối với x ta được : $F(x,y,z)\le$

$$\le\sqrt{\left(\frac{1}{a}-\frac{\sin y}{c}\right)^2+\left(\frac{\cos y}{c}\right)^2}+\frac{\sin y}{b}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{a^2}-2.\frac{\sin y}{a.c}+\frac{1}{c^2}}+\frac{\sin y}{b} \qquad (4)$$

Đặt $M=\sqrt{\frac{1}{a^2}-2.\frac{\sin y}{a.c}+\frac{1}{c^2}}+\frac{\sin y}{b}$

$$\Rightarrow\left(M-\frac{\sin y}{b}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}-2\frac{\sin y}{a.c}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{b^2}\sin^2y+2\left(\frac{1}{ac}-\frac{M}{b}\right)\sin y+M^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}=0$$

Đây là một tam thức bậc hai đối với siny, vì vậy ta có $\Delta'\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{ac}-\frac{M}{b}\right)^2-\frac{1}{b^2}\left(M^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}\ge 2.\frac{M}{abc}$$
$$\Leftrightarrow M\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta nhận được

$$F(x, y, z) \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

Việc xác định khi nào xảy ra đẳng thức xin dành cho các bạn.

Vậy $\max F(x, y, z) = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

Chú ý. Có thể tìm $\max M$ dựa trên khảo sát sự biến thiên của M trên $[-1, 1]$ với biến số $t = \sin y$

Bài toán 2. *A, B, C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Đây là bài toán quen thuộc với nhiều lời giải. Sau đây là một lời giải có sử dụng BĐT (2) :

Lời giải: Ta có

$VT = \cos A + \cos B - \cos(A+B) =$

$= \cos A + \cos B - \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$

$= [(1 - \cos B).\cos A + \sin B.\sin A] + \cos B$

$\leq \sqrt{(1 - \cos B)^2 + \sin^2 B} + \cos B$

$= \sqrt{2 - 2\cos B} + \cos B$

$= 2 . \sin\frac{B}{2} + (1 - 2.\sin^2\frac{B}{2})$

$= \frac{3}{2} - 2(\sin\frac{B}{2} - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{3}{2} = VP$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Sau đây là một thí dụ khác nữa.

Bài toán 3. *Cho α, β, λ là 3 số thực thỏa mãn : $\alpha + \beta + \lambda = 2\pi$. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta có bất đẳng thức*

$$xy\cos\lambda + yz\cos\alpha + zx\cos\beta \geq -\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Lời giải :

Biến đổi $VT = yz\cos\alpha + zx\cos\beta + xy\cos(\alpha+\beta)$

$= [(yz + xy\cos\beta)\cos\alpha + (-xy\sin\beta)\sin\alpha] + zx\cos\beta$

$\geq -\sqrt{(yz + xy\cos\beta)^2 + (-xy\sin\beta)^2} + zx\cos\beta$ (áp dụng bất đẳng thức (3))

$= zx\cos\beta - \sqrt{y^2(x^2+z^2) + 2xy^2z\cos\beta}$

Cũng giống như lời giải bài toán 1, đặt $M = zx\cos\beta - \sqrt{y^2(x^2 + z^2) + 2xy^2z\cos\beta}$ rồi đưa về tam thức bậc hai đối với $\cos\beta$. Từ đó rút ra

$$M \geq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

Các bạn tự xét lấy khi nào thì đẳng thức xảy ra.

Cuối cùng xin mời các bạn giải một số bài toán sau đây theo cách trình bày ở trên :

Bài 1. Cho ΔABC. Chứng minh rằng với mọi $n \in N$ thì

a) $|\sin nA + \sin nB + \sin nC| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 2nA + \cos 2nB + \cos 2nC \geq -\dfrac{3}{2}$

c) $\cos(2n+1)A + \cos(2n+1)B + \cos(2n+1)C \leq \dfrac{3}{2}$

Bài 2. Cho 3 góc A, B, C thỏa mãn hệ thức $A + B + C = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k \in Z)$. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta có bất đẳng thức :

$(x^2+y^2+z^2)\sqrt{3} \geq 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$

Bài 3. Cho $\Delta A'B'C'$ cố định và một tam giác ABC tùy ý (di động). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$M = \frac{\cos A}{\sin A'} + \frac{\cos B}{\sin B'} + \frac{\cos C}{\sin C'}$$

(*Đáp số:* $M_{max} = \cot A' + \cot B' + \cot C'$)

Bài 4. Cho 3 góc A, B, C thỏa mãn $A+B+C = k\pi$ $(k \in Z)$. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta có bất đẳng thức :

$x^2 + y^2 + z^2 \geq$

$(-1)^{k-1}(2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B)$

Ngoài ra còn có rất nhiều bài toán khác nữa cùng dạng này. Mong được trao đổi cùng các bạn.

MỘT CÁCH CHỨNG MINH...

(Tiếp trang 9)

giải của chúng công thức Crelle tỏ ra có hiệu lực một cách đặc biệt.

Bài toán 2. *Cho tam giác đều ABC, tâm O. Hai điểm M, N không nằm trong mặt phẳng (ABC) và đối xứng với nhau qua O. Chứng minh rằng :*

$$S(MA, MB, MC) = S(NA, NB, NC)$$

Ở đây, $S(MA, MB, MC)$ và $S(NA, NB, NC)$ theo thứ tự là diện tích của các tam giác có độ dài ba cạnh là MA, MB, MC và NA, NB, NC. Sự tồn tại của các tam giác này đã được khẳng định trong bài toán 1.

Bài toán 3: *Cho tứ diện ABCD, thể tích V. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của tứ diện. Chứng minh rằng :*

$$AB.AC.AD.BC.BD.CD \geq 24\frac{R}{r}V^2$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN
VÀO TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI - KHỐI A - NĂM 2000

I. PHẦN CHUNG (*Dành cho tất cả thí sinh*)

Câu 1. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 - (m+1)x + 4m^2 - 4m - 2}{x - (m-1)},$$

trong đó m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho với $m = 2$.

2. Tìm các giá trị của m để hàm số xác định và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 2. 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$$

2. Tìm m để mọi x thuộc đoạn $[0; 2]$ đều thỏa mãn bất phương trình

$$\log_2\sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \le 5$$

Câu 3. 1. Tìm các nghiệm của phương trình

$$\sin x\cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2}$$

thỏa mãn điều kiện $|x-1| < 3$.

2. Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức :

$$\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} - \left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$
$$= \cot gA + \cot gB + \cot gC.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 4. Trong không gian, cho các điểm A, B, C theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một sao cho $OA = a$ $(a > 0)$, $OB = a\sqrt{2}$, $OC = c$ $(c > 0)$. Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật $AOBD$ và M là trung điểm của đoạn BC. (P) là mặt phẳng đi qua A, M và cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AM.

1. Gọi E là giao điểm của (P) với đường thẳng OC; tính độ dài đoạn thẳng OE.

2. Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AOBD$ bởi mặt phẳng (P).

3. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P).

II. Phần riêng (*Dành cho từng loại thí sinh*)

Câu 5a. (*Dành cho thí sinh thi theo chương trình chưa phân ban*)

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = |x| + 5$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Câu 5b. (*Dành cho thí sinh thi theo chương trình chuyên ban*)

Trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-28/15}\right)^n$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc x, biết rằng

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. Bạn đọc tự giải.

2. *Đáp số* : $\frac{2-\sqrt{7}}{3} \le m \le 1$.

Câu 2. 1. Xem TH&TT số 278 (8.2000)

2. Điều kiện $x^2 - 2x + m \ge 1$.

Đặt $t = \sqrt{\log_4(x^2-2x+m)}$, $t \ge 0$.

Khi đó bất phương trình trở thành $t^2 + 4t - 5 \le 0$
$\Leftrightarrow -5 \le t \le 1$, kết hợp $t \ge 0$ ta có $0 \le t \le 1$
$\Leftrightarrow 0 \le \log_4(x^2 - 2x + m) \le 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \ge 1 \\ x^2 - 2x + m \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \ge 1 - m \\ x^2 - 2x \le 4 - m \end{cases}$$

Bất phương trình đúng $\forall x \in [0, 2]$ khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{0\le x\le 2}(x^2 - 2x) \ge 1 - m \\ \max\limits_{0\le x\le 2}(x^2 - 2x) \le 4 - m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \ge 1 - m \\ 0 \le 4 - m \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le m \le 4.$$

Câu 3. $\sin x\cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 4x - \frac{1 - \cos 4x}{2} = 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = -2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\cos 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in Z) \end{array}\right.$$

Điều kiện $|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$.

• Với $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, đk $\Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$

• Với $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, đk $\Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$

Đáp số : $x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$.

2) Dễ dàng chứng minh được :

$$\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}.$$

Mặt khác $\cot g\frac{A}{2} - \cot gA = \dfrac{\sin(A - \frac{A}{2})}{\sin\frac{A}{2}\sin A} = \dfrac{1}{\sin A}$

nên giả thiết bài toán $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Lại có $\sin A + \sin B = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le 2\cos\frac{C}{2}$, do đó theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \ge \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}} \ge \frac{2}{\frac{\sin A + \sin B}{2}} \ge \frac{2}{\cos\frac{C}{2}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B$.

Từ đó các bạn dễ dàng giải tiếp.

Câu 4. (Bạn đọc tự vẽ hình). Chọn $Oxyz$ làm hệ tọa độ trong không gian thì $A\ (a, 0, 0)$; $B\ (0, a\sqrt{2}, 0)$; $D(a, a\sqrt{2}, 0)$; $C\ (0, 0, c)$; $M\ (0, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{c}{2})$.

1. Vectơ chỉ phương $\vec{\alpha} = (u, v, w) \ne 0$ của giao tuyến của (P) và (OCD) phải thỏa mãn :

a) $\vec{\alpha}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ đồng phẳng tức là $\vec{\alpha} = s.\overrightarrow{OC} + t.\overrightarrow{OD} = (ta, ta\sqrt{2}, sa)\ (s, t \in \mathbf{R})$.

b) $\vec{\alpha}.\overrightarrow{AM} = 0$ mà $\overrightarrow{AM} = \left(-a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{c}{2}\right)$ nên

$-ta^2 + ta\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} + s.\frac{ac}{2} = s\frac{ac}{2} = 0$, vậy $s = 0$ và ta có thể coi $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OD} = (a, a\sqrt{2}, 0)$

Mặt phẳng (P) qua $A(a, 0, 0)$ với hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{\alpha}$ nên có véctơ pháp tuyến

$\vec{n} = (x, y, z) \ne \vec{0}$ mà $\begin{cases} -ax + \frac{a\sqrt{2}}{2}y + \frac{c}{2}z = 0 \\ ax + a\sqrt{2}y = 0 \end{cases}$,

vậy có thể chọn $\vec{y} = (c\sqrt{2} - c, 3a\sqrt{2})$. Từ đó (P) có phương trình

$$c\sqrt{2}(x - a) - cy + 3a\sqrt{2}z = 0$$

(P) cắt trục Oz tại $E(0, 0, z)$ mà $-ac\sqrt{2} + 3a\sqrt{2}z = 0$

$\Leftrightarrow E(0, 0, \frac{c}{3})$; $OE = \frac{c}{3}$.

2. Vì $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, giao tuyến EF của (P) với (OCD) song song với OD ($F \in CD$), nên

$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Ta có tỉ số thể tích :

$$\frac{V_{CAEF}}{V_{CAOD}} = \frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

$$\frac{V_{CMEF}}{V_{CBOD}} = \frac{CM}{CB}.\frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Vậy $V_{CAEMF} = \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right).\frac{1}{2}V_{CAOBD} = \frac{1}{3}V_{CAOBD}$, từ đó tỉ số thể tích hai khối đa diện là 1/2 (hay 2).

3. Khoảng cách từ điểm $C(0, 0, c)$ đến mặt phẳng (P) có phương trình trên là :

$$\frac{|-ac\sqrt{2} + 3a\sqrt{2}c|}{\sqrt{2c^2 + c^2 + 18a^2}} = \frac{2ac\sqrt{6}}{3\sqrt{c^2 + 6a^2}}.$$

Câu 5a: (Bạn đọc tự vẽ hình).

Xác định hình phẳng :

$$|x^2 - 1| = |x| + 5$$

a) $x > 1$ thì $x^2 - 1 = x + 5 \Rightarrow x = 3$.

b) $x < -1$ thì $x^2 - 1 = -x + 5 \Rightarrow x = -3$.

Do tính đối xứng của hình qua Oy nên diện tích cần tính là :

$$S = 2\int_0^3 [(|x| + 5) - |x^2 - 1|]dx$$

$$= \int_0^{30}(x + 5)dx - \int_0^1(1 - x^2)dx - \int_1^3(x^2 - 1)dx$$

$$= 2\left(\frac{39}{2} - \frac{2}{3} - \frac{20}{3}\right) = \frac{73}{3}\ \text{(đvdt)}.$$

Câu 5b. $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -13 \text{ (loại)} \end{cases}$

Ta có $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-28/15}\right)^{12} =$

$$= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k\left(x^{4/3}\right)^k.\left(x^{-18/15}\right)^{12-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{\frac{48}{15}k - \frac{112}{5}}.$$

Số hạng không phụ thuộc $x \Leftrightarrow \frac{48}{15}k - \frac{112}{5} = 0$.

$\Leftrightarrow k = 7$. Vậy số hạng không phụ thuộc x là $C_{12}^7 = 792$.

Hướng dẫn giải

DOÃN MINH CƯỜNG
(ĐHSP Hà Nội)

Một cách chứng minh công thức CRELLE

BÙI VIẾT LỘC
(12A, PTCT ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Trong hình học không gian có một bài toán do nhà toán học Corenlơ(*) nêu ra.

Bài toán 1. *Cho tứ diện ABCD có thể tích V và bán kính mặt cầu ngoại tiếp R.*

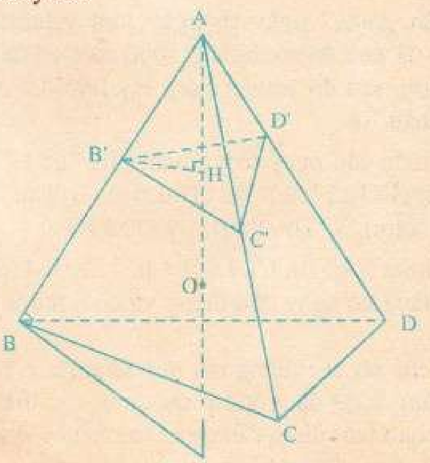
a) Chứng minh rằng các số AB.CD, AC.DB, AD.BC là số đo độ dài ba cạnh của một tam giác.

b) Gọi S là diện tích tam giác nói trong câu a, chứng minh rằng :

$$S = 6VR$$

Hệ thức các số đo $S = 6VR$ được gọi là công thức Crelle. Cách chứng minh thông thường của công thức Crelle có thể tìm thấy trong nhiều tài liệu (chẳng hạn báo THTT số 191 tháng 5 năm 1993 với bài "Ẩn sau định lí Ptôlêmê" của tác giả Lê Quốc Hán). Tuy nhiên, chứng minh ở đó quá dài và phức tạp. Bài viết này sẽ giới thiệu một cách chứng minh khác, vẽ hình phụ đơn giản hơn cho bài toán 1 và công thức Crelle.

a) Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, A' là điểm xuyên tâm đối của A, H là trung điểm của AO. Gọi (α) là mặt phẳng qua H và vuông góc với AO. Gọi B', C', D' lần lượt là giao điểm của (α) với AB, AC, AD. Dễ thấy các tam giác vuông AHB', ABA' đồng dạng. Suy ra :



$$\frac{AB'}{AH} = \frac{AA'}{AB} \Rightarrow AB.AB' = AH.AA' = \frac{1}{2}R.2R = R^2$$

Tương tự như vậy ta có :

$$AB.AB' = AC.AC' = AD.AD' = R^2 \quad (1)$$

Từ đó suy ra : các tam giác ABC và $AC'B'$ đồng dạng.

$$\Rightarrow B'C' = \frac{BC.AC'}{AB} = \frac{BC.AC'.AC.AD}{AB.AC.AD} = \frac{AD.BC.R^2}{AB.AC.AD} \text{ (theo (1))}$$

$$\Rightarrow \frac{B'C'}{AD.BC} = \frac{R^2}{AB.AC.AD}$$

Tương tự như vậy, ta có :

$$\frac{B'C'}{AD.BC} = \frac{C'D'}{AB.CD} = \frac{D'B'}{AC.DB} = \frac{R^2}{AB.AC.AD}$$

Suy ra :

$AB.CD$, $AC.DB$, $AD.BC$ là độ dài ba cạnh của một tam giác và tam giác này đồng dạng với tam giác $B'C'D'$ với tỉ số đồng dạng là $\frac{AB.AC.AD}{R^2}$.

b) Theo câu a, chú ý $AH = R/2$ ta có :

$$S = \left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2 . S(B'C'D')$$

$$= \left(\frac{AB.AC.AD}{R^2}\right)^2 . \frac{3V(AB'C'D')}{AH}$$

$$= \frac{6(AB.AC.AD)^2}{R^5} . \frac{V(AB'C'D')}{V(ABCD)} V(ABCD)$$

$$= \frac{6(AB.AC.AD)^2}{R^5} . \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} . V$$

$$= \frac{6AB.AC.AD.AB'.AC'.AD'}{R^5} . V = \frac{6R^6}{R^5} . V = 6VR \text{ (theo (1))}$$

Công thức Crelle đã được chứng minh với một phương pháp mới. Để kết thúc xin giới thiệu với bạn đọc một vài bài tập mà trong lời

(Xem tiếp trang 6)

(*) Crelle A.L. (1780-1855) là nhà toán học Đức, từ 1834 là viện sĩ thông tấn của Viện Hàn lâm Khoa học Pêtecbua (Nga). Năm 1826 sáng lập *Tạp chí Toán học thuần túy và Toán học ứng dụng.*

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

TÍNH TUẦN HOÀN TRONG DƯƠNG LỊCH

NGUYỄN VIỆT HẢI

Từ xưa con người đã thiết lập hệ thống đo thời gian dựa vào sự chuyển động mặt của mặt trời, mặt trăng, quả đất, từ đó xuất hiện các đơn vị đo : năm, tháng, ngày.

Khoảng 4000-5000 năm trước đây người Babilon và người Ai Cập đã tính 1 năm là 360 ngày, chia ra 12 tháng, mỗi tháng 30 ngày. Sau đó người Ai Cập thấy dự báo mùa lũ sai so với thực tế đã sửa lại thành 1 năm có 365 ngày, đến TK III trước CN, người Ai Cập và người La Mã đã biết một năm có 365 ngày và 4 năm có thêm 1 ngày nhuận.

Lịch chính thức đầu tiên được sử dụng năm 45 trước Công nguyên thời nhà độc tài La Mã Giuliuts Xêda (Julius César hoặc Caesar) do nhà thiên văn Ai Cập Sôsigien soạn thảo. Lịch Julius lấy năm trung bình là 365,25 ngày và quy định mỗi năm có 365 ngày, năm nào có số năm chia hết cho 4 là năm nhuận có 366 ngày, tháng lẻ có 31 ngày, tháng chẵn có 30 ngày, riêng tháng Hai có 28 ngày (hoặc 29 ngày nếu ở năm nhuận).

Hoàng đế La Mã Aogutxtuts (Augustus : 63 trước CN - 14 sau CN) nhận thấy thực tế có nhiều năm nhuận so với lịch Julius nên đã sửa lại một số ngày và đổi lại các tháng 8, 10, 12 có 31 ngày, còn các tháng 9, 11 có 30 ngày. Qua nhiều năm nhận thấy lịch không phù hợp thời tiết, năm 1582 Giáo hoàng Grêgôriuts (Gregorius) lập Hội đồng lịch pháp để sửa lịch.

Lịch Gregorius chọn năm Thiên chúa giáng sinh làm năm thứ nhất của Công nguyên, lấy 1 năm trung bình bằng 365,2425 ngày = $365\frac{97}{400}$ ngày, nghĩa là cứ 400 năm thì có 97 năm nhuận, được tính như sau : những năm có số năm chia hết cho 4 là năm nhuận (366 ngày), trừ những năm có số năm chẵn trăm, mà không chia hết cho 400. Như vậy từ năm 1600 đến 2000 có 3 năm không nhuận là 1700, 1800, 1900.

Bảng thiên văn do Niucôm (Newcomb S.0 công bố ở Oasinhtơn (Hoa Kì) năm 1895 xác định Năm Mặt trời trung bình bằng 365,24220 ngày = 365 ngày 5 giờ 48 phút 46 giây. Các phân số gần đúng tốt nhất (với mẫu số tăng dần thì sai số càng nhỏ) của $\frac{24220}{100000}$ là $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{132}{545}, \dots$

Chẳng hạn $\frac{8}{33} \approx 0,242424$, nghĩa là trong 33 năm cần có 8 năm nhuận.

Do sự sai lệch của lịch Gregorius không lớn lắm : 0,0003 ngày $\approx \frac{1}{3300}$ nghĩa là 3300 năm mới sai 1 ngày nên việc sửa lại lịch chưa thật cấp bách.

Theo lịch Gregorius có thể thiết lập *Bảng dương lịch dùng cho nhiều năm* với các đơn vị thời gian là năm, tháng, tuần, ngày. Kí hiệu A là tháng có 31 ngày, B là tháng có 3 ngày, C là tháng có 29 ngày, D là tháng có 28 ngày ta có bảng 1 :

Bảng 1

Tháng	1	2	3	4	5	6
Kí hiệu	*A*	*C, D*	*A*	*B*	*A*	*B*

Tháng	7	8	9	10	11	12
Kí hiệu	*A*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*

Tuần gồm 7 ngày (6 ngày làm việc, 1 ngày nghỉ) đã xuất hiện khoảng 3000 năm trước đây ở Babilon, sau đó truyền sang Hy Lạp, La Mã rồi đến châu Âu.

Kí hiệu các ngày trong tuần như sau : C (Chủ Nhật), H (Thứ Hai), Ba (Thứ Ba), T (Thứ Tư), N (Thứ Năm), S (Thứ Sáu), By (Thứ Bảy)

Kí hiệu : Ai, Bi, Ci, Di (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) là các tháng có ngày đầu tháng và cuối tháng như ở Bảng 2.

Ta chỉ xét các tháng nối tiếp nhau theo bảng 1. Từ bảng 2 dễ dàng kiểm tra được các tháng nối tiếp nhau tuân theo các *quy tắc chuyển* với i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (mod 7) :

$Ai \to A3{+}i$, $Ai \to B3{+}i$, $Ai \to C3{+}i$, $Ai \to D3{+}i$, và $Bi \to A2{+}i$, $Ci \to A1{+}i$, $Di \to Ai$.

Theo quy tắc đó, mỗi năm có 12 tháng tuân theo 14 lịch (14 lịch được in đầy đủ trong *Số lịch*

2001 Toán học Tuổi trẻ) được ghi bằng kí hiệu **L1**, **L2**, ..., **L14** trong bảng 3.

Trong bảng 3, những năm không nhuận ứng với các Lịch số **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,** những năm nhuận ứng với các Lịch số **8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.**

Sử dụng *quy tắc chuyển* và Bảng 3 có tính đến năm nhuận ta xác định được các năm kế tiếp nhau theo Lịch nào. Chẳng hạn bắt đầu từ Lịch số **1**. Tháng 12 của Lịch **1** là $A5 \to A1$ là tháng 1 của Lịch **2**. Tháng 12 của Lịch **2** là $A6 \to A2$ là tháng 1 của Lịch **3**. Tháng 12 của Lịch **3** là $A0 \to A3$ là tháng 1 của Lịch **11** (năm nhuận). Tháng 12 của Lịch **11** là $A2 \to A5$ là tháng 1 của Lịch **6**. Tiếp tục suy luận như thế ta có dãy tuần hoàn các Lịch với chu kì 28 như sau (năm nhuận được in đậm và chỉ xuất hiện 1 lần trong chu kì) :

1, 2, 3, **11**, 6, 7, 1, **9**, 4, 5, 6, **14**, 2, 3, 4, **12**, 7, 1, 2, **10**, 5, 6, 7, **8**, 3, 4, 5, **13**.

Bảng 2

	C	H	Ba	T	N	S	By
A0, B0, C0, D0	1,29	30	31				28
A1, B1, C1, D1	28	1,29	30	31			
A2, B2, C2, D2		28	1,29	30	31		
A3, B3, C3, D3			28	1,29	30	31	
A4, B4, C4, D4				28	1,29	30	31
A5, B5, C5, D5	31				28	1,29	30
A6, B6, C6, D6	30	31				28	1,29

Nếu biết năm 2000 ứng với Lịch **14** thì có thể suy ra lịch ứng với những năm sau và những năm trước đó trong khoảng từ 1901 đến 2099. Riêng năm 1900 không là năm nhuận nên tính được 1900 ứng với Lịch **2**, còn từ năm 1899 (ứng với Lịch **1**) trở về trước đến 1801 lại tuần hoàn theo chu kì 28, trong đó Lịch **11** ứng với các năm 1812, 1840, 1868, 1896.

Sử dụng *Bảng lịch dùng nhiều năm* bạn hãy sáng tạo ra nhiều bài toán đố vui.

Bảng 3

Tháng	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
L1	*A0*	*D3*	*A3*	*B6*	*A1*	*B4*	*A6*	*A2*	*B5*	*A0*	*B3*	*A5*
L2	*A1*	*D4*	*A4*	*B0*	*A2*	*B5*	*A0*	*A3*	*B6*	*A1*	*B4*	*A6*
L3	*A2*	*D5*	*A5*	*B1*	*A3*	*B6*	*A1*	*A4*	*B0*	*A2*	*B5*	*A0*
L4	*A3*	*D6*	*A6*	*B2*	*A4*	*B0*	*A2*	*A5*	*B1*	*A3*	*B6*	*A1*
L5	*A4*	*D0*	*A0*	*B3*	*A5*	*B1*	*A3*	*A6*	*B2*	*A4*	*B0*	*A2*
L6	*A5*	*D1*	*A1*	*B4*	*A6*	*B2*	*A4*	*A0*	*B3*	*A5*	*B1*	*A3*
L7	*A6*	*D2*	*A2*	*B5*	*A0*	*B3*	*A5*	*A1*	*B4*	*A6*	*B2*	*A4*
L8	*A0*	*C3*	*A4*	*B0*	*A2*	*B5*	*A0*	*A3*	*B6*	*A1*	*B4*	*A6*
L9	*A1*	*C4*	*A5*	*B1*	*A3*	*B6*	*A1*	*A4*	*B0*	*A2*	*B5*	*A0*
L10	*A2*	*C5*	*A6*	*B2*	*A4*	*B0*	*A2*	*A5*	*B1*	*A3*	*B6*	*A1*
L11	*A3*	*C6*	*A0*	*B3*	*A5*	*B1*	*A3*	*A6*	*B2*	*A4*	*B0*	*A2*
L12	*A4*	*C0*	*A1*	*B4*	*A6*	82	*A4*	*A0*	*B3*	*A5*	*B1*	*A3*
L13	*A5*	*C1*	*A2*	*B5*	*A0*	*B3*	*A5*	*A1*	*B4*	*A6*	*B2*	*A4*
L14	*A6*	*C2*	*A3*	*B6*	*A1*	*B4*	*A6*	*A2*	*B5*	*A0*	*B3*	*A5*

SỐ TẠP CHÍ ĐẦU TIÊN CỦA THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Tất nhiên số tạp chí này phải tưng bừng như... Tết ! Không phải là Tết thường mà là Tết đầu tiên của thiên niên kỉ mới.

Nhìn lại *Kì thi học sinh giỏi Quốc gia* và nhìn sang *Olympic của Liên bang Đức*. Ai sẽ là người may mắn nhất trong các hội viên của Câu lạc bộ "Gặp nhau qua ngày sinh" ? Cuộc chơi mới cho năm 2001 chắc sẽ hấp dẫn chứ ? Các bạn chuẩn bị thi Đại học sẽ được hệ thống *một số lớp tích phân đặc biệt*. Các bạn học sinh giỏi sẽ tìm hiểu thêm về *song ánh và các bài toán giải tích tổ hợp*.

Còn nhiều điều thú vị mà trong những ngày Tết các bạn sẽ không thể đọc hết được.

Hãy đặt mua TH&TT của quý I năm 2001 kẻo quên và lỡ !

TH&TT

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/282. Tìm tất cả cặp số nguyên dương x, y sao cho $\frac{x^3+x}{xy-1}$ là số nguyên dương

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài T2/282. Cho các số thực dương x, y, z, t thỏa mãn $xyzt = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^3(yz+zt+ty)}+\frac{1}{y^3(xz+zt+tx)}+\frac{1}{z^3(xt+ty+yx)}+\frac{1}{t^3(xy+yz+zx)}\geq\frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T3/282. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên và thỏa mãn hai điều kiện sau :

a) $P(x) > x$ với mọi số tự nhiên x

b) Với mỗi số nguyên dương d tùy ý thì trong dãy số (b_k) $(k = 1, 2, ...)$ xác định bởi $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ với mọi $k = 1, 2, ...$, bao giờ cũng tìm được số hạng chia hết cho d.

PHẠM NGỌC BỘI
(GV khoa Toán ĐHSP Vinh)

Bài T4/282. Cho tam giác ABC vuông ở A và $\angle ABC = 60^\circ$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\angle MCB = \angle NBA = 20^\circ$. Gọi số đo bằng độ của các góc AMN, ANM, CMN tương ứng là α, β, γ. Chứng minh rằng $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

Bài T5/282. Tam giác ABC có chu vi $2p$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R. Gọi D, E, F lần lượt là tâm các đường tròn bàng tiếp tam giác tương ứng với các góc đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng diện tích tam giác DEF bằng $2pR$.

VI QUỐC DŨNG
(ĐHSP Thái Nguyên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/282. Hai dãy số (a_n) và (b_n) $(n = 1, 2, 3,...)$ được xác định bởi : $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2$ và $b_{n+1} = 2a_nb_n$ với mọi $n = 1, 2, 3,...$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{b_n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{a_1a_2\ldots a_n}$

HẠ VŨ ANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T7/282. Cho các số nguyên dương k, n và các số thực dương $a_1, a_2,..., a_k$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_k \geq k$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n}{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1}}$$

ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

Bài T8/282. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa mãn các điều kiện :

a) $f(x) \geq e^x$ với mọi $x \in \mathbf{R}$

b) $f(x+y) \geq f(x).f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$.

ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học viện Phòng không – Không quân Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T9/282. Cho tam giác ABC. Các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần nữa tại A', B', C'. Chứng minh rằng :

$$AB + BC + CA \leq A'B' + B'C' + C'A'$$

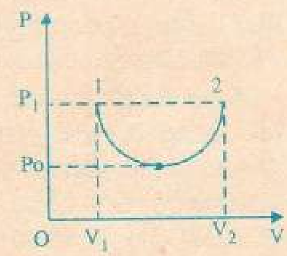
NGUYỄN MINH HÀ
(GV PTCT ĐHSP Hà Nội)

Bài T10/282. Tìm điều kiện cần và đủ đối với tứ diện $ABCD$ sao cho tổng khoảng cách từ một điểm M bất kì nằm trong tứ diện đến các mặt của nó là không đổi.

VŨ ĐỨC SƠN
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/282. Một mol khí lí tưởng đơn nguyên tử thực hiện một quá trình biến đổi : 1 – 2 được biểu diễn trên đồ thị P–V như hình vẽ.

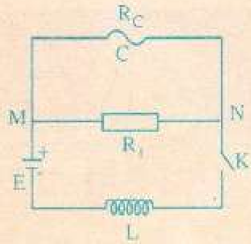


Tính nhiệt lượng mà mol khí nhận vào trong quá trình trên theo P_1, P_o, V_1, V_2.

(Đường biểu diễn 1 – 2 là một nửa vòng tròn).

NGUYỄN XUÂN QUANG
(*Vĩnh Phúc*)

Bài L2/282. Một mạch điện có sơ đồ như hình bên. Nguồn điện không đổi có suất điện động $E = 10V$; cuộn cảm có độ tự cảm $L = 5H$ và điện trở $R_1 = 15\Omega$. Các đại lượng sau được coi như nhỏ không đáng kể so với R_1 : điện trở R_C của cầu chì, điện trở trong của nguồn điện, điện trở thuần của cuộn cảm, điện trở của khóa K và của các dây dẫn nối. Tại thời điểm $t=0$ người ta đóng khóa K. Hỏi sau bao lâu cầu chì C sẽ bị đứt, biết rằng cầu chì chỉ chịu được một dòng điện lớn nhất là $I = 3A$.



NGUYỄN QUANG HẬU
(*Hà Nội*) sưu tầm

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/282. Find all pairs of positive integers x, y such that $\dfrac{x^3+x}{xy-1}$ is a positive integer.

T2/282. The positive real numbers x, y, z, t satisfy the condition $xyzt = 1$. Prove that :

$$\frac{1}{x^3(yz+zt+ty)}+\frac{1}{y^3(xz+zt+tx)}+\frac{1}{z^3(xt+ty+yx)}+\frac{1}{t^3(xy+yz+zx)}\ge\frac{4}{3}.$$

When does equality occur ?

T3/282. Find all polynomials $P(x)$ with integer-coefficients satisfying the two following conditions :

i) $P(x) > x$ for every natural number x,

ii) for every positive integer d, the sequence (b_k) $(k = 1, 2, ...)$ defined by $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ $(k = 1, 2, ...)$ has a term divisible by d.

T4/282. Let ABC be a right triangle with $\angle BAC = 90°$, $\angle ABC = 60°$. Take the points M and N respectively on the sides AB and AC so that $\angle MCB = \angle NBA = 20°$. Denote the measures in degrees of $\angle AMN$, $\angle ANM$, $\angle CMN$ respectively by α, β, γ. Prove that
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

T5.282. The triangle ABC has perimeter $2p$ and circumradius R. Let D, E, F be the centers of its escribed circles respectively in the angles A, B, C. Prove that the area of triangle DEF is equal to $2pR$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/282. The two sequences of numbers (a_n), (b_n) $(n = 1, 2, 3,...)$ are defined by :
$a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2$ and $b_{n+1} = 2a_nb_n$ (for all $n = 1, 2, 3, ...$). Find $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{b_n}$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_1a_2...a_n}$

T7/282. The positive integers k, n and the positive real numbers a_1, a_2, ..., a_k satisfy the condition : $a_1 + a_2 + ... + a_k \ge k$. Find the greatest value of the expression

$$\frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n}{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1}}$$

T8/282. Find all functions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfying the conditions :

i) $f(x) \ge e^x$ for all $x \in \mathbf{R}$,

ii) $f(x + y) \ge f(x).f(y)$ for all $x, y \in \mathbf{R}$.

T9/282. Let ABC be a triangle. The medians issued from A, B, C cut the circumcircle of ΔABC respectively at A', B', C'. Prove that :

$AB + BC + CA \le A'B' + B'C' + C'A'$.

T10/282. Find a necessary and sufficient condition on the tetrahedron $ABCD$ so that the sum of the distances from an arbitrary point M inside the tetrahedron to its faces does not depend on the position of M.

Bài T1/278. *Viết tổng* $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+...+\frac{2^n}{n}$ *thành phân số tối giản* $\frac{p}{s}$. *Chứng minh rằng p chia hết cho 8 với mọi n > 3.*

Lời giải. Trong đề bài toán đã thay điều kiện $n \geq 3$ bởi $n > 3$, vì với $n = 3$ ta có $\frac{p}{s} = \frac{20}{3}$ mà 20 không chia hết cho 8.

Nhận xét. Nếu phân số tối giản $\frac{a}{b}$ là tổng của những phân số tối giản mà tử số của mỗi phân số đó chia hết cho 2^k thì a cũng chia hết cho 2^k. (1).

Thực vậy do 2^k và mẫu số của các phân số tối giản là nguyên tố cùng nhau nên 2^k và mẫu số chung b của chúng cũng nguyên tố cùng nhau, lấy 2^k làm thừa số chung, suy ra a chia hết cho 2^k.

– Với $n = 4$ ta có

$$\frac{p}{s}=\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}=\frac{32}{3} \Rightarrow p \vdots 8$$

– Với $n = 5$ ta có

$$\frac{p}{s}=\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\frac{2^5}{5}=\frac{256}{15} \Rightarrow p \vdots 8.$$

– Với $n \geq 6$ ta có

$$\frac{p}{s}=\frac{256}{15}+\frac{2^6}{6}+\frac{2^7}{7}+...+\frac{2^n}{n}.$$

Đặt $\frac{2^6}{6}+\frac{2^7}{7}+...+\frac{2^n}{n} = \frac{x}{y}$

$(x, y \in N, (x, y) = 1)$

Các phân số $\frac{2^6}{6}, \frac{2^7}{7}, ..., \frac{2^n}{n}$ đều có dạng

$$\frac{2^m}{m}=\frac{2^3\,2^{m-3}}{m}$$

Với $m \geq 6$, $m \in N$ dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng $2^{m-3} > m$ nên phân số $\frac{2^m}{m}$ sau khi rút gọn thành phân số tối giản thì tử số của phân số tối giản ấy cũng chia hết cho 2^3. Áp dụng nhận xét (1) ta có $x \vdots 2^3$.

Lại áp dụng nhận xét (1) với $\frac{p}{s}=\frac{256}{15}+\frac{x}{y}$ ta có p chia hết cho 8 với mọi $n \geq 4$.

Nhận xét. 1. Tất cả các lời giải tốt đều đưa ra đính chính cho đề bài là $n \geq 4$ chứ không phải $n \geq 3$.

2. Bạn *Doãn Trọng Hoàn*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Thanh Hóa có chú thích rằng : Đây là bài toán của chương I. Tuyển tập các bài toán hay lớp 9 của Lê Hải Châu.

3. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Nam Định** : *Đặng Đình Trường*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Bắc Ninh:** *Phạm Thái Sơn*, 8A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Tx Bắc Ninh; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, **Yên** Thủy; *Lê Thái Hoàng*, 9A1, THCS Hữu Nghị, **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Hoài Lê*, 9A, THCS Vĩnh Tường, **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Nam, Phạm Thành Trung*, 9A, THPT NK Nguyễn Trãi; *Phạm Huy Hoàng*, THCS Lê Quý Đôn, Tp Hải Dương; **Thanh Hóa:** *Doãn Trọng Hoàn*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Trần Thị Như Ngọc*, 9A, THCS thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc, **Kon Tum:** *Nguyễn Lương Thùy Viên*, 8A, TH chuyên Kon Tum; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Khuông*, 9A1, THCS Ngô Tất Tố, Phú Nhuận.

TÔ NGUYÊN

Bài T2/278. *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn a + b + c = d và d ≤ 1. Chứng minh rằng mỗi tổng a+b, b+c, c+d đều không nhỏ hơn 16abcd.*

Lời giải. Ta có $1 \geq d^2 = [(a+b) + c]^2 \geq 4(a+b)c \Rightarrow a+b \geq 4(a+b)^2c \geq 4.4abc \geq 16abcd$ (vì $0 \leq d \leq 1$). Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a+b=c \end{array}\right. \\ a=b \\ abc=abcd \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0;\, d=c \\ \left\{\begin{array}{l} a=b=1/4 \\ c=1/2 \\ d=1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Hoàn toàn tương tự ta có $b+c \geq 16abcd$.

Vì $d = a+b+c \Rightarrow d \geq b \Rightarrow d+c \geq b+c \geq 16abcd$.

Lưu ý : $d+c = 16abcd \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn làm quá phức tạp và quên trường hợp $a = b = 0$; $d = c$ để $a+b = 16abcd$.

2) Bạn *Nguyễn Thành Nam*, 9A, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** bình luận đúng : "Bài T2/278 *thực ra chỉ là* bài T2/211 *phát biểu khác đi một chút*". Cảm ơn bạn.

3) Bạn *Phạm Thị Thanh Hạnh*, lớp 6/4, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn, **Quảng Ngãi** cũng nhận xét đúng : "Bài T2/278 là tương tự với bài toán quen thuộc : Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{x+y}{xyz}$".

4) Các bạn cho lời giải đầy đủ và ngắn gọn là :

Hà Nội: *Nguyễn Thanh Tùng*, 7A1, THCS Láng Thượng; **Hòa Bình:** *Lê Thái Hoàng*, 9A1, THCS Hữu Nghị, *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy; **Khánh Hòa:** *Võ Thống Thái*, lớp 8/3, TH Ngô Gia Tự, *Vo Xuân Ninh*, 9^1, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Hải Dương:** *Phạm Huy Hoàng*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, *Phạm Thành Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Phạm Văn Tuyến*, 8A, THCS Hưng Lâm, Hưng Nguyên; **Hà Tĩnh:** *Thái Tuấn Anh*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Yên Bái:** *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, thị xã Yên Bái; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tiến Dương*, 8A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên; **Hà Tây:** *Nguyễn Đức Thuận*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Phú Thọ:** *Nguyễn Công Hiệp*, 9AI, THPT Phong Châu, Phù Ninh;...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/278. *Cho các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ với $n \geq 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x_1^2+x_2x_3}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2+x_3x_4}{x_2(x_3+x_4)}+\dots+\frac{x_{n-1}^2+x_nx_1}{x_{n-1}(x_n+x_1)}+\frac{x_n^2+x_1x_2}{x_n(x_1+x_2)}\geq n.$$

Lời giải. (của *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**).

Đặt $A = \frac{x_1^2+x_2x_3}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2+x_3x_4}{x_2(x_3+x_4)}+\dots+\frac{x_{n-1}^2+x_nx_1}{x_{n-1}(x_n+x_1)}+\frac{x_n^2+x_1x_2}{x_n(x_1+x_2)}$

ta có

$$A+n=\left(\frac{x_1^2+x_2x_3}{x_1(x_2+x_3)}+1\right)+\left(\frac{x_2^2+x_3x_4}{x_2(x_3+x_4)}+1\right)+\dots+\left(\frac{x_{n-1}^2+x_nx_1}{x_{n-1}(x_n+x_1)}+1\right)+\left(\frac{x_n^2+x_1x_2}{x_n(x_1+x_2)}+1\right)$$

$$=\frac{(x_1+x_2)(x_1+x_3)}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{(x_2+x_3)(x_2+x_4)}{x_2(x_3+x_4)}+\dots+\frac{(x_{n-1}+x_n)(x_{n-1}+x_1)}{x_{n-1}(x_n+x_1)}+\frac{(x_n+x_1)(x_n+x_2)}{x_n(x_1+x_2)}$$

Mỗi số hạng trong tổng trên đều dương. Do đó ta có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số hạng ấy ; sau đó rút gọn thì được :

$$A+n\geq n\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_3)(x_2+x_4)\dots(x_{n-1}+x_1)(x_n+x_2)}{x_1x_2\dots x_{n-1}x_n}} \quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$(x_1+x_3)(x_2+x_4)\dots(x_{n-1}+x_1)(x_n+x_2)$$
$$\geq 2\sqrt{x_1x_3}.2\sqrt{x_2x_4}\dots 2\sqrt{x_{n-1}x_1}.2\sqrt{x_nx_2}$$
$$\geq 2^n x_1x_2\dots x_n \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra :

$$A+n\geq 2n \Leftrightarrow A\geq n.$$

Nhận xét. 1) Trong số gần 70 bài giải gửi đến tòa soạn, có 52 bài giải đúng. Hầu hết các bài giải chưa đúng đều mắc sai lầm cho rằng các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ có vai trò như nhau nên đã cho thêm giả thiết.

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n.$$

Nhớ rằng giả thiết đó chỉ có thể cho thêm mà không làm mất tính tổng quát của bài toán nếu các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ *đôi một* có vai trò như nhau. Trong bài toán này, điều đó không xảy ra. Chẳng hạn nếu thay x_1 bởi x_2 và x_2 bởi x_1 thì vế trái của bất đẳng thức không còn như cũ nữa.

2. Bài toán không đòi hỏi tìm điều kiện để xảy ra đẳng thức. Tuy vậy, đa số các bài giải đều quan tâm vấn đề này. Đáng tiếc rằng số đông đều kết luận vội vàng rằng đẳng thức xảy ra *khi và chỉ khi* $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$. Thực ra đây chỉ là *một điều kiện đủ* để xảy ra đẳng thức. Điều kiện cần và đủ để xảy ra đẳng thức là $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$ và $x_2 = x_4 = x_6 = \dots$ Cụ thể hơn, điều kiện ấy là :

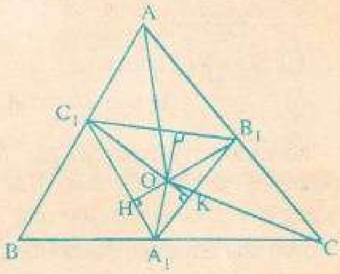
- Khi n chẵn : $\begin{cases} x_1 = x_3 = x_5 = \dots = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = x_6 = \dots = x_n \end{cases}$
- Khi n lẻ : $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$.

3. Các bạn có lời giải tốt là :

Vĩnh Phúc: *Phạm Văn Hoàng*, 8B, THCS Yên Lạc; *Hoàng Minh Hải*, 9C, THCS Tam Đảo, Tam Dương; **Phú Thọ:** *Lê Thanh Tùng*, 8C, THCS Việt Trì; **Hà Nội:** *Lê Hùng Việt Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, *Nguyễn Đức Tâm*, 8C, THCS Giảng Võ, *Đỗ Trung Tiến*, 9C, Hà Nội - Amsterdam; **Hải Dương:** *Đỗ Quang Trung*, 9B, THPT Nguyễn Trãi; *Phạm Thành Trung*, 9A, PTNK Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Lương Hữu Long*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Bùi Việt Hùng*, 11A, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Đặng Thành Dũng*, 9B, THCS Bạc Liêu, Yên Thành; **Hà Tĩnh:** *Phan Vũ Diễm Hằng*, 7G, THCS Hương Khê; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Viết Việt*, 9B, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố.

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài T4/278. *Hai tam giác đồng dạng ABC và $A_1B_1C_1$ thỏa mãn điều kiện : điểm A_1 nằm trên tia CB, điểm B_1 nằm trên tia AC, điểm C_1 nằm trên tia BA. Chứng minh rằng trực tâm của $\Delta A_1B_1C_1$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*



Lời giải. Xét tam giác nhọn ABC và A_1, B_1, C_1 thuộc 3 cạnh tam giác. Gọi O là trực tâm $\Delta A_1B_1C_1$. Từ C_1K và B_1H là đường cao ΔA_1B_1C suy ra tứ giác A_1HOK nội tiếp.

Từ đó suy ra

$\angle B_1OC_1 = \angle HOK = 180^o - \angle A_1 = 180^o - \angle A$.

Do đó tứ giác B_1OC_1A nội tiếp.

Nên $\angle OAC = \angle OC_1B_1 = 90^o - \angle C_1B_1A_1 = 90^o - \angle B$.

Tương tự $\angle OCA = 90^o - \angle B$ tức là ΔOAC cân, suy ra $OA = OC$. Chứng minh tương tự được $OC = OB$. Vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Nhận xét: Giải tốt bài này có các bạn :

Yên Bái: *Nguyễn Minh Ngọc*, 9I, THCS Lê Hồng Phong, *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, **Bắc Ninh:** *Lê Duy Cường*, 9B, THCS Yên Phong; **Hà Tây:** *Vũ Ánh Dương*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, 9A, PT Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** *Lê Hùng Việt Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, *Nguyễn Thanh Tùng*, 7A1, THCS Láng Thượng; **Nam Định:** *Ngô Huy Hoàng*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Phú Nhuận.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/278. *Ở 6 đỉnh của một hình lục giác lồi có ghi 6 số chẵn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Ta thay đổi các số như sau : mỗi lần chọn một cạnh bất kì rồi cộng mỗi số ở hai đỉnh thuộc cạnh đó với cùng một số nguyên nào đó. Hỏi sau một số lần thay đổi như thế nào thì 6 số mới ở các đỉnh lục giác có thể bằng nhau không ?*

Lời giải. (của bạn *Vũ Minh Triều*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**)

Gọi các số chẵn ghi ở 6 đỉnh của lục giác lúc đầu theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Ta có :

$$(a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5) = 6.$$

Mỗi lần thay đổi thì hai số kề nhau (theo thứ tự trên, coi a_6 kề với a_1) đều cộng thêm cùng một số nên hiệu của hai tổng trên không đổi và luôn bằng 6. Nếu 6 số mới ở các đỉnh lục giác đều bằng nhau thì hiệu trên bằng 0, nên điều này không thể xảy ra.

Nhận xét. Nhiều bạn làm dài hơn khi thay các số a_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) bằng các số chẵn liên tiếp rồi tính toán để dẫn đến mâu thuẫn. Rất tiếc rằng có một số bạn lập luận đúng hướng nhưng tính toán sai. Các bạn sau cũng có lời giải đúng :

Phú Thọ: *Trần Mạnh Hùng*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, *Lê Thanh Tùng*, 8C, THCS Việt Trì; **Hà Nội:** *Phạm Ngọc Diệp*, 9A, *Lê Hùng Việt Bảo*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Hà Tây:** *Dương Minh Sơn*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyến*, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy; **Hải Phòng:** *Vương Anh Quyền, Bùi Tuấn Anh, Trần Xuân Dũng*, 8A, THPT NK Trần Phú; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Công Anh*, 6C, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Nam Định:** *Nguyễn Đức Tâm*, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh; **Ninh Bình:** *Trịnh Mỹ Châu*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, Tx Ninh Bình; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đình Dũng*, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trần Quang Vũ*, 9B, THCS Sông Hiếu, Thái Hòa, Nghĩa Đàn, *Phạm Văn Tuyến*, 8A, THCS Hưng Lam, Hưng Nguyên, *Đặng Song Toàn*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Phạm Văn Chiến*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Đăk Lăk:** *Ngô Thị Huyền Trang*, 7A1, THCS Trần Hưng Đạo, Tp Buôn Ma Thuột; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9/15, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Q. Phú Nhuận.

VIỆT HẢI

Bài T6/278. *Dãy số (u_n) (n = 0, 1, 2, ...) được xác định bởi $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = 1999u_{n+1} - u_n$*

Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho u_n là số nguyên tố.

Lời giải. (của bạn Nguyễn Thanh Mai, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**).

Trước hết bằng quy nạp ta dễ chứng minh được : $u_n \in N^*$ và $u_{n+1} \geq 1998u_n$ với mọi $n \geq 1$.

Tiếp theo ta có :

$$1999 = \frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n}$$

$\Rightarrow u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 =$ hằng số $= u_0u_2 - u_1^2 = -1$.

Vậy $u_nu_{n+2} = (u_{n+1} - 1)(u_{n+1} + 1)$ (1)

Với $n \leq 2$ thì $u_2 = 1999$ là số nguyên tố.

Ta chứng minh với $n \geq 3$ thì không tồn tại n để u_n là số nguyên tố : Thật vậy giả sử u_n là số nguyên tố với $n \geq 3$. Từ (1) ta có $u_nu_{n-2} = (u_{n-1} - 1)(u_{n-1} + 1)$

$\Rightarrow (u_{n-1} - 1)(u_{n-1} + 1) \vdots u_n$.

Vì $u_{n-1}+1 < 1998u_{n-1} < u_n$ nên $(u_{n-1}-1) \vdots u_n$

Mà với $n \geq 3$ thì $u_{n-1} - 1 \in N^* \Rightarrow u_{n-1} - 1 \geq u_n$ nhưng $u_n > 1998u_{n-1}$ dẫn đến mâu thuẫn.

Đáp số : $n = 2$.

Nhận xét. Các bạn gửi lời giải đến đều giải đúng. Lời giải tốt có các bạn : *Nguyễn Xuân Trường, Nguyễn Văn Giáp*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**; *Hoàng Ngọc Minh*, 10A1, chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**; *Trần Ngọc Diệp*, 12T1, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tây**; *Đỗ Đình Trúc*, 11T, Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Tô Minh Hoàng*, 12T, THPT NK Nguyễn Trãi, **Hải Dương**, *Phạm Văn Thắng*, 10 Toán, ĐHQG, Tp Hồ Chí Minh,

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/278. *Chứng minh rằng*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải. *Cách 1.* (dựa vào bất đẳng thức trong tam giác $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (*))

Nếu 1 trong 3 số hạng của $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ nhỏ thua hoặc bằng 0 thì $f(x) \leq 2 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Vì $f(x)$ là một hàm tuần hoàn chu kì 2π nên chỉ cần xét $x \in (0, 2\pi]$. Khi $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ thì $\sin 3x \leq 0$; khi $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ thì $\sin 2x \leq 0$ và khi $x \in [\pi, 2\pi]$ thì $\sin x \leq 0$.

Do vậy, chỉ cần xét $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ và $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin(\pi - 3x)$, ta được bài toán quen thuộc (*), dấu "=" không xảy ra.

Cách 2.

$f(x) \leq \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x + 2\sin 2x\cos x$
$= \sin 2x + 4\sin x\cos^2 x \leq 1 + 4\sin x\cos^2 x$ (1)

Áp dụng BĐT Côsi :

$$1 = \sin^2 x + \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^2 x}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\sin^2 x\cos^4 x}{4}}$$

$$\Rightarrow \sin x\cos^2 x \leq |\sin x|\cos^2 x \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có : $f(x) \leq 1 + \frac{8\sqrt{3}}{9} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Nhận xét. Đây là một bài toán cơ bản và dễ, vì vậy số lượng bài gửi đến tòa soạn lên tới gần 200 bài và đa số lời giải đều đúng. Một số bạn sử dụng BĐT Côsi nhưng không chú ý điều kiện các số hạng phải không âm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/278. *Tìm mọi hàm số $f : R \to R$ thỏa mãn các điều kiện :*

a) $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in R$.

b) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi $x \in R$.

c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ với mọi $x \neq 0$.

Lời giải. (của hầu hết các bạn trong số gần 250 bạn gửi lời giải tới tòa soạn). Giả sử $f(x)$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Từ a) với $x = 0$, $f(0) = -f(0)$ suy ra $f(0) = 0$.

Từ b) với $x = -1$, $f(0) = f(-1) + 1$ suy ra $f(-1) = -1$.

Xét với $x \in R$, $x \neq 0$ và $x \neq -1$. Ta có

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \frac{f(x)}{x^2} + 1. \quad (1)$$

Mặt khác

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 f\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 f\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2\left(1 - f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{x+1}{x}\right)^2\left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}f(x+1)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left((x+1)^2 - f(x) - 1\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$f(x) + x^2 = x^2 + 2x - f(x).$$

Tức là $f(x) = x$.

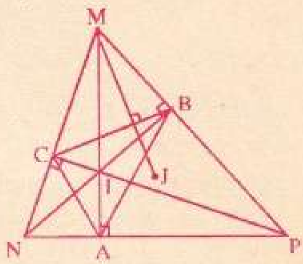
Ta thấy ngay hàm số $f(x) \equiv x$ thỏa mãn các điều kiện a), b), c).

Bởi vậy hàm số $f(x) \equiv x$ là hàm số duy nhất cần tìm.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn THCS sau đã tham gia và giải tốt bài toán này : **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Sơn*, 9A, THCS Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** *Nguyễn Trung Kiên*, 9D, THCS Bến Thủy, *Trần Thị Như Ngọc*, 9A, THCS Quán Hành, *Trần Đình Trung*, 9A, THCS Hermann Gmeiner; **Quảng Ngãi:** *Ngô Ngọc Khiêm*, 9/2, THCS Nguyễn Tự Tân.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/278. *Cho tam giác ABC có chu vi không đổi 2p. Gọi M, N, P lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với các góc A, B, C của ΔABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔMNP.*



Lời giải. *Cách 1.* (của bạn *Đỗ Thị Ngọc Quỳnh*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**) Giống như lời giải bài T9/274 THTT 8/2000.

Dễ thấy NP, PM, MN là phân giác ngoài các góc A, B, C và AM, BN, CP là phân giác trong các góc A, B, C, suy ra ΔMNP nhọn với các đường cao MA, NB, PC. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP thì $S(MNP) =$

$$= \frac{1}{2}(BC.JM + CA.JN + AB.JP) = pR',$$ ở đây

R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP. Gọi r' là bán kính đường tròn nội tiếp ΔMNP. Theo bất đẳng thức quen biết $R' \geq 2r'$. Ta có :

$$\frac{1}{2}r'(MN+NP+PM) = S(MNP) = pR' \geq 2pr'$$

Suy ra : $MN + NP + PM \geq 4p$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔMNP đều $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Tóm lại : chu vi ΔMNP nhỏ nhất khi ΔABC đều và giá trị nhỏ nhất đó bằng $4p$.

Cách 2. (của bạn *Phạm Đức Hiệp*, 10T, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**). Với những nhận xét như cách giải 1. Gọi I là tâm và r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Ta có :

$$MN = CM + CN = CI\text{tg}\angle CIM + CI\text{tg}\angle CIN =$$

$$= CI\left(\text{tg}\frac{A+C}{2} + \text{tg}\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= CI\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{A}{2}\right) = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$= 4R\cos\frac{C}{2} \ \left(\text{vì } r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

Lại có : $\sin A + \sin B \leq 2\cos\frac{C}{2}$.

Vậy : $MN \geq 2R(\sin A + \sin B) \Rightarrow MN \geq a+b$

Tương tự : $NP \geq b+c$; $PM \geq c+a$

Vậy : $MN + NP + PM \geq 2(a+b+c) = 4p$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Từ đó ta có kết luận của bài toán.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, tuy nhiên vẫn có bạn giải sai do tính toán nhầm lẫn.

2) Nhiều bạn nhận ra sự gần gũi giữa bài toán này và bài T9/274. Tuy nhiên, ngay cả các bạn đó cũng cho lời giải dài.

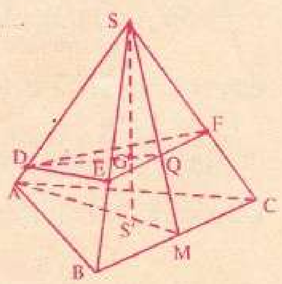
3) Bài toán này có thể được suy ra một cách trực tiếp từ định lí Fagnano. Tuy nhiên cách giải này không hay vì ta đã phải dựa vào một kết quả mạnh.

4) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Nghệ An:** *Trần Thanh Tuấn*, 10T, THPT Diễn Châu III; **Buôn Mê Thuột:** *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Tiền Giang:** *Đoàn Đăng Khoa*, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Thanh Hóa:** *Mai Văn Hà*, 10T, THPT Lam Sơn, **Hà Nội:** *Đào Tuấn Sơn*, 11T, THPT Hà Nội, Amsterdam.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/278. *Cho hình tứ diện SABC với SA = SB = SC = 1. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.*

$$p = \frac{1}{SD.SE} + \frac{1}{SE.SF} + \frac{1}{SF.SD}.$$



Lời giải. *Cách 1.* (của *Lê Mạnh Hùng*, 12A, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** và một số bạn khác). Vì G là trọng tâm của tứ diện $SABC$ nên đường thẳng SG đi qua trọng tâm S' của tam giác đáy ABC và ta có các hệ thức : $\overrightarrow{SG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SS'}$, hay là :

$$4\overrightarrow{SG} = 3\overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$$

Từ đó ta được :

$$4\overrightarrow{SG}=\frac{SA}{SD}\overrightarrow{SD}+\frac{SB}{SE}\overrightarrow{SE}+\frac{SC}{SF}\overrightarrow{SF}$$

Theo giả thiết $SA = SB = SC = 1$ nên

$$\overrightarrow{SG}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{SD}\overrightarrow{SD}+\frac{1}{SE}\overrightarrow{SE}+\frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}\right)$$

Lại vì D, E, F, G đồng phẳng nên ta có :

$$\frac{1}{4SD}+\frac{1}{4SE}+\frac{1}{4SF}=1\;;\qquad (*)$$

Từ (*) suy ra : $\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SF.SD}$

$$\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}\right)^2=\frac{16}{3}$$

Vậy ta được :

$p_{\max}=\frac{16}{3}\Leftrightarrow SD=SE=SF=\frac{3}{4};$

$\Leftrightarrow G\in\alpha(DEF)\,//\,mp(ABC)$.

Cách 2. (của *Phạm Đức Hiệp*, 10CT, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**). Ta sử dụng hệ tọa độ Đềcác *xiên góc Sxyz* bằng cách chọn đỉnh S của tứ diện $SABC$ làm gốc tọa độ, nghĩa là $S(0, 0, 0)$ và $A\in Sx$, $B\in Sy$, $C\in Sz$ với $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. Trong hệ tọa độ này, trọng tâm G của tứ diện $SABC$ có tọa độ $G\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ vì ta có hệ thức $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$.

Giả sử mặt phẳng $\alpha(DEF)$ có phương trình :

$$ax+by+cz+d=0$$

và các điểm D, E, F có các tọa độ: $D(x_o, 0, 0)$, $E(0, y_o, 0)$, $F(0, 0, z_o)$.

Từ đó suy ra : $ax_o = by_o = cz_o = \frac{1}{4}(a+b+c)$.

Vậy : $\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}=\frac{1}{x_o}+\frac{1}{y_o}+\frac{1}{z_o}=4.$

Từ đó ta cũng thu được kết quả ($P\max=\frac{16}{3}$) như cách giải 1 ở trên.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn vẽ thiết diện DEF không đúng, cách xác định các điểm M, Q, E, F được chỉ ra trên hình vẽ.

2) Một số bạn còn sử dụng phương pháp tính tỉ số thể tích $\frac{v(S.DEG)}{v(S.ABS')}$ và $\frac{v(S.DEG)}{v(S.ABC)}$ rồi tính tỉ số thể tích của hai chóp tam giác $S.DEG$ và $S.ABC$.

$$\frac{v(S.DEG)}{v(S.ABC)}=\frac{1}{4}(SD.SE+SE.SF+SF.SD)=SD.\,SE.SF$$

Từ đó cũng thiết lập được hệ thức (*) như cách giải 1

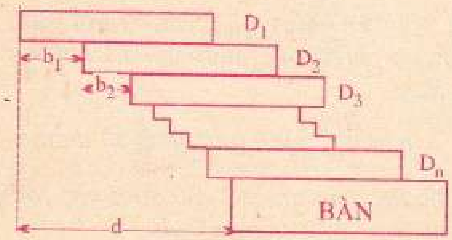
3) Tuy chỉ có duy nhất bạn *Phạm Đức Hiệp* giải bài toán trên bằng phương pháp tọa độ, nhưng việc trình bày cách giải 2 muốn giới thiệu việc sử dụng *hệ tọa độ Đềcác xiên góc* cũng tỏ ra có hiệu quả rõ rệt, đặc biệt là những bài toán afin (chỉ liên quan đến quan hệ liên thuộc giữa điểm và đường thẳng, mặt phẳng; sự đồng quy, thẳng hàng, đồng phẳng và tương quan song song của đường thẳng và mặt phẳng).

4) Ngoài các bạn được nêu tên ở trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt, hoặc đề xuất và giải bài toán tổng quát hơn bằng cách thay chóp tam giác $S.ABC$ bởi chóp n-giác $SA_1A_2...A_n$ tùy ý :

Hà Nội: *Bùi Đức Hiệp*, 11P, THPT DL Marie Curie; **Bắc Giang:** *Dương Mạnh Hồng*, *Ngô Quang Vịnh*, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, *Bùi Quang Nha*, *Trần Thanh Hải*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, *Võ Quang Đức*, 12T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Nam Định:** *Lê Xuân Quyến*, 10A, THPT Xuân Trường; **Thanh Hóa:** *Mai Văn Chế*, 11A THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn, *Nguyễn Thị Thanh Hà*, 11A (K40), THPT Hà Trung; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Du Thái*, 11CT, khối PTCT - ĐHKH Huế ; **Khánh Hòa:** *Lê Thị Khánh Hiền*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Gia Lai:** *Lê Hoàng An*, 12G, THPT Hùng Vương, Plây-Ku; **Đắc Lắc:** *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Hoàng*, 11T, *Trần Võ Huy*, 10T, PTNK-ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 10T1, *Đỗ Quang Trí*, 11T1, *Lê Trung Hiếu*, 11T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai; **Đồng Tháp:** *Trần Minh Tùng*, *Nguy Đức Thuận*, 11T, TH chuyên ban Cao Lãnh, Đồng Tháp; **An Giang:** *Nguyễn Bình Tây*, 12T, THPT Thoại Ngọc Hầu.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/278. *Một chồng gạch gồm n viên D_1, D_2,..., D_n giống hệt nhau, mỗi viên có bề dài 2a. Chúng được đặt liên tiếp chồng lên nhau trên bàn sao cho viên gạch thứ i tính từ trên xuống nhô ra so với viên gạch thứ i+1 một đoạn b_i ($i = 1, 2, ..., n-1$) và viên gạch thứ D_n nhô ra khỏi mép bàn một đoạn b_n. Các viên gạch không được gắn với nhau.*



1) Hỏi b_i có thể có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu so với a để chồng gạch không bị đổ ?

2) Xác định khoảng cách lớn nhất d giữa mép bàn và mép viên gạch thứ nhất.

Hướng dẫn giải.

1) Xét một phần chồng gạch gồm i viên tính từ trên xuống. Mặt chân đế của một viên nào đó là phần diện tích của nó tựa lên viên gạch nằm kề ở dưới. Muốn phần chồng gạch đó không bị đổ thì véctơ trọng lực P_i của hệ i viên phải có phương đi qua mặt chân đế của viên thứ i. b_i có giá trị lớn nhất khi P_i có phương đi qua mép của viên thứ $i+1$. Áp dụng quy tắc mômen (hay quy tắc hợp lực song song của trọng lực $i-1$ viên ở trên và trọng lực viên thứ i), ta có :

$$P(a-b_i)\ [(i-1)p]b_i \Rightarrow b_i = \frac{a}{i}.$$

2) Ta có

$$d = \sum_{i=1}^{n} b_i = a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Quảng Nam: *Lê Quốc Thành*, 11/1, THCB Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn, *Hoàng Anh Vũ*, 12, THPT Trần Cao Vân, Tam Kì; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Quốc Duy*, 10A2, THPT Sơn Tịnh I; **Phú Yên:** *Lê Ngọc Thiên*, 11 Lí, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Hà Nội:** *Trần Xuân Anh*, B0 10A, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Ngọc Duẩn*, 11A Toán, chuyên toán-tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội ; **Vĩnh Phúc:** *Dương Quốc Huy*, 11A3, *Nguyễn Kim Thắng*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Hoàng Trung Trí*, 10 Lí, *Nguyễn Thanh Phúc*, *Nguyễn Huy Sơn*, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Phú Thọ:** *Nguyễn Kim Ngọc*, 10B1, THPT chuyên Hùng Vương; **Nam Định:** *Phạm Bắc Phú*, 10A3, THPT A Hải Hậu; **Nghệ An:** *Lưu Anh Tú*, 10A3, THPT Phan Bội Châu; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 10 Lí, THPT NK Hàn Thuyên; **Bắc Giang:** *Ngô Minh Định*, 12A1, THPT Lạng Giang; **Hải Phòng:** *Trần Vũ Quang*, 10 Lí, THPT NK Trần Phú; **Hà Nam:** *Trần Gia Phương*, 12 Lí, THPT chuyên Hà Nam.

MAI ANH

Bài L2/278. *Một quả cầu trong suốt bán kính R, có chiết suất phụ thuộc bán kính r theo công thức :*

$$n = \frac{R+a}{r+a} \text{ với a là hằng số dương.}$$

Chiếu tia sáng tới quả cầu dưới góc tới φ, tia sáng bị khúc xạ trong quả cầu.

Hãy xác định khoảng cách nhỏ nhất từ tâm quả cầu đến tia khúc xạ.

Hướng dẫn giải. Chia quả cầu thành các lớp cầu rất mỏng bằng những mặt cầu đồng tâm O sao cho trong mỗi lớp cầu, như lớp cầu giới hạn bởi 2 mặt cầu bán kính r và $r+dr$ chẳng hạn, chiết suất có cùng giá trị $n(r)$ và phần tia khúc xạ trong lớp cầu đó xem như một đoạn thẳng AB. Áp dụng định luật khúc xạ ánh sáng và định luật hàm số sin trong tam giác OAB trong các lớp cầu kế tiếp từ ngoài vào trong rút ra hệ thức

$nR\sin\varphi = n_1(r_1)r_1\sin\varphi_1 = n_2(r_2)r_2\ \sin\varphi_2 = n(r)r\sin\varphi_r = \ldots$ (1) trong đó φ_1, φ_2... là góc tới tại các lớp cầu kế tiếp (tại các mặt cầu bán kính r_1, r_2...). Theo đề bài, $n_o = 1 < n_1 < n_2 \ldots$ nên $\varphi < \varphi_1 < \varphi_2 \ldots$, tia khúc xạ uốn cong về phía tâm O, và tới khi $\varphi_r = 90^o$ thì tia khúc xạ lại tiếp tục truyền theo hướng ngày càng xa tâm O, và do tính đối xứng, cuối cùng tia khúc xạ ló ra khỏi quả cầu với góc ló bằng góc tới φ. Tại điểm mà $\varphi_r = 90^o$ khoảng cách từ tâm quả cầu đến tia khúc xạ là nhỏ nhất và bằng bán kính tại đó :

$d_{min} = r($ khi $\varphi_r = 90^o)$.

Theo (1) ta có :

$$R\sin\varphi = n(d_{min}).d_{min}.\sin 90^o$$

$$\Rightarrow R\sin\varphi = \left(\frac{R+a}{d_{min}+a}\right)d_{min}$$

$$\Rightarrow d_{min} = \frac{aR\sin\varphi}{a+R(1-\sin\varphi)}$$

Nhận xét. Đa số các bài gửi đến đều có đáp số đúng nhưng lập luận chưa thật chặt chẽ và chính xác. Một số bạn có lời giải và hình vẽ đúng :

Yên Bái: *Hoàng Trọng Huy*, 12A2, THPT chuyên Yên Bái; **Nghệ An:** *Lưu Anh Tú*, 10A3, THPT Phan Bội Châu; **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Sơn*, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Tuấn*, 10 Lí, THPT Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Lê Thế Trọng*, 12A4, THPT Bỉm Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Dương Quốc Huy*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Bắc Giang:** *Ngô Minh Định*, 12A1, THPT Lạng Giang; **Phú Thọ:** *Trần Đức Dũng*, 12A9, THPT Việt Trì; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Vũ*, 12, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Tháp:** *Châu Hoàng Huy*, 12T, THCB thị xã Cao Lãnh; **Phú Yên:** *Đàm Văn Thành*, 10T2, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa.

MAI ANH

Diễn đàn
DẠY VÀ HỌC TOÁN

Tiếp tục bàn về ĐIỀU KIỆN ĐỂ TỨ GIÁC NỘI TIẾP

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp Hồ Chí Minh)

Trên tạp chí THTT số 252 (6/1998) và số 268 (10/1999) thầy giáo Lê Quốc Hán đã nêu 10 khẳng định tương đương về tứ giác nội tiếp. Khẳng định số 6 cũng đã được chứng minh trong THTT số 258 (12/1998).

Bài này góp thêm một tiêu chuẩn nữa để tứ giác nội tiếp được.

Bài toán: Về phía ngoài một tứ giác lồi *ABCD* vẽ các hình bình hành sao cho mỗi hình bình hành có một cạnh là cạnh của tứ giác và có cạnh kề với nó bằng cạnh đối của cạnh nói trên của tứ giác và hai hình bình hành có chung đỉnh thì hai góc của chúng tại đỉnh đó bù nhau.

Chứng minh rằng tứ giác *ABCD* nội tiếp một đường tròn khi và chỉ khi tứ giác có các đỉnh là tâm của bốn hình bình hành nói trên cũng là hình bình hành.

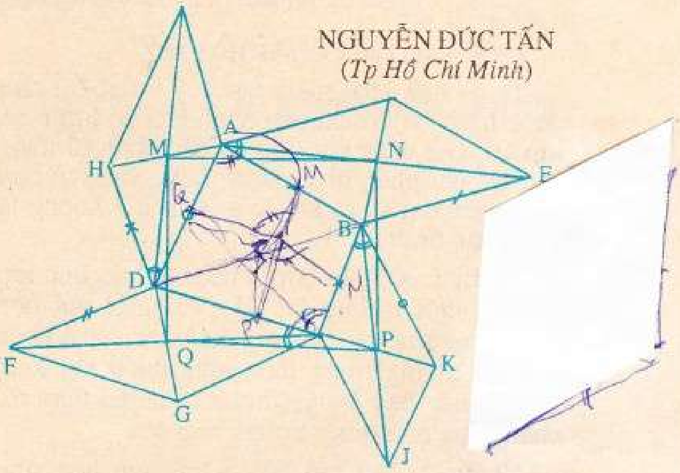
Lời giải. Ta kí hiệu như trên hình vẽ.

Từ giả thiết dễ dàng chứng minh được :

$\Delta ABE = \Delta FDC$ (c-g-c) $\Rightarrow AN = CQ$ và $\angle NAB = \angle DFC = \angle QCG$

Tương tự ta có : $AM = CP$, $BN = DQ$, $BP = DM$ và $\angle MAD = \angle PCJ$, $\angle QDC = \angle NBE$, $\angle MDA = \angle PBK$ (*)

Từ (*) chứng minh được : Tứ giác *ABCD* nội tiếp



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \angle DAB + \angle DCB = 180^o \\ \angle ABC + \angle ADC = 180^o \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \angle DAB = \angle QCJ \\ \angle EBK = \angle ADC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle MAN = \angle PCQ \\ \angle NBP = \angle QDM \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta MAN = \Delta PCQ \\ \Delta NBP = \Delta QDM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MN = PQ \\ NP = QM \end{cases}$$

$\Leftrightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

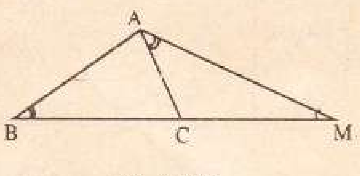
Chú ý : Kết luận vẫn đúng khi *M, A, N* hoặc *N, B, P* thẳng hàng.

SAI LẦM Ở ĐÂU ? *(Tiếp bìa 3)*

BÀI TOÁN HAY, LỜI GIẢI SAI ?

Trong cuốn "Toán chọn lọc cấp II" (NXB Hải Phòng - 1994) có bài toán như sau : Cho tam giác *ABC* có góc *A* tù. Tìm quỹ tích những điểm *M* nằm trên đường thẳng *BC* sao cho $AM = \sqrt{BM.CM}$" (Bài số 80. Phần III. Trong vườn hoa Hình học). Nguyên văn cách giải và lời bình của tác giả như sau :

"Trước hết ta rút M ở bên phải của cạnh *BC* kéo dài (hình 102). Thế thì từ giả thiết $AM = \sqrt{BM.CM}$ ta có



Hình 102

$\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{CM}{AM}$, $\angle AMC = \angle BMA$ và ta được hai tam giác đồng dạng *AMC* và *BMA*.

Từ đó $\angle CAM = \angle ABM$ và chỉ có một điểm *M* thỏa mãn hệ thức đã cho.

Tương tự cũng chỉ có một điểm *M* thỏa mãn khi điểm *M* ở bên trái của cạnh *BC* kéo dài.

Chú ý. Ta thấy ngay là nếu *M* nằm giữa *B* và *C* thì không có điểm *M* nào thỏa mãn hệ thức đã cho (!)

Do $\angle A > \angle B + \angle C$ nên có hai điểm M_1 và M_2 với M_1 ở bên trái M_2 sao cho $BM_1 = AM_1$ và $AM_2 = CM_2$.".

Chúng tôi đã loay hoay khá lâu để tìm hiểu cái hay của cách giải nhưng cuối cùng thất vọng, vì có thể chỉ ra một thí dụ nhỏ để chứng tỏ cách giải trên là không đúng.

Ý kiến của các bạn như thế nào ?

NGUYỄN VŨ SƠN

GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP HỢP MỜ

NGUYỄN HẢI THANH
(GV trường ĐH Nông nghiệp Hà Nội)

1. TẠI SAO LẠI CÓ TẬP HỢP MỜ

Ta đã biết khái niệm tập hợp (cổ điển) như được trình bày ở chương trình Đại số lớp 6 và lớp 10. Gọi X là tập hợp cả các phần tử đang xét. Để chỉ phần tử x của X thuộc vào tập hợp A, ta viết $x \in A$ và viết $x \notin A$, nếu x không là một phần tử thuộc A.

Ví dụ 1. Xét tập hợp A các em học sinh lớp 10 của một trường PTTH. Với mỗi em học sinh x của trường, chỉ có thể xảy ra $x \in A$ hoặc $x \notin A$. Nhưng trong thực tiễn nhiều khi khái niệm *thuộc* hay *không thuộc* chưa thể thấy rõ, chẳng hạn như trong trường hợp sau.

Ví dụ 2. Xét tập hợp $\tilde{A}$ các em học sinh ngoan của trường. Lúc này, đối với mỗi em học sinh x của trường, việc xác định $x \in \tilde{A}$ hay $x \notin \tilde{A}$ không còn là việc hiển nhiên. Đó là vì khái niệm "ngoan" ở đây không thể hiểu một cách chính xác tuyệt đối. Hơn nữa, nói một cách khái quát, đối với mỗi em học sinh, tính chất "ngoan" không phải là luôn chắc chắn, xác định, và khó mà mô tả chính xác được. Ngoài ra, để mô tả độ "ngoan" cần có nhiều dữ liệu chi tiết, đôi khi vượt quá khả năng hiện tại cho phép.

Trong thực tế, cũng còn nhiều ví dụ tương tự như thế : tập hợp các em học sinh yêu thích toán của trường, tập hợp các phân số gần đúng của số thực π, tập hợp các phương án sản xuất đáp ứng được nhu cầu của thị trường. Những tập hợp như vậy có thể được mô tả có hiệu quả hơn bởi tập hợp mờ, hay "tập mờ", nếu nói một cách vắn tắt. Ở đó, không có một sự phân tách rõ ràng : "thuộc" hay "không thuộc".

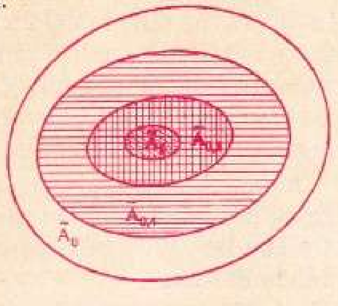
2. TẬP HỢP MỜ LÀ GÌ ?

Năm 1965, nhà toán học Mĩ L.A. Zadeh lần đầu tiên đưa ra khái niệm tập mờ. Quay lại ví dụ 2, ta thấy rằng có thể gán cho mỗi học sinh x của trường một độ ngoan nhất định, kí hiệu là $\mu_{\tilde{A}}(x)$ với $0 \le \mu_{\tilde{A}}(x) \le 1$. Khi $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, ta nói học sinh x hoàn toàn ngoan. Còn khi $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$, ta nói x hoàn toàn không ngoan. Một hàm số $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0, 1]$ được định nghĩa như vậy, được gọi là hàm hội viên (membership function), hay vắn tắt hơn là *hàm thuộc* của $\tilde{A}$. Sau khi xác định hàm thuộc $\mu_{\tilde{A}}$, tập hợp $\tilde{A}$ các em học sinh ngoan của trường sẽ trở thành một tập mờ.

Một cách tổng quát, một tập mờ $\tilde{A}$ là tập hợp tất cả các cặp $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$, trong đó $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0, 1]$ là hàm thuộc của $\tilde{A}$. Các cặp $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$ với $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$, thường được bỏ qua mà không cần liệt kê hay mô tả.

Rõ ràng rằng, việc xác định và gán cho mỗi học sinh x của trường một độ ngoan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ không phải là dễ dàng. Điều này phải được tiến hành dựa vào dữ liệu chi tiết về quản lí học sinh, vào các đánh giá chủ quan của thầy, cô giáo v.v... Dù sao, với khái niệm tập mờ, việc phân loại học sinh (ngoan hay không ngoan) của trường cũng trở thành linh hoạt và sát với thực tế hơn.

Cho tập mờ $\tilde{A}$. Với mỗi số thực $\alpha \in [0; 1]$, ta có thể định nghĩa tập mức $\tilde{A}_\alpha$ của $\tilde{A}$ như sau : $\tilde{A}_\alpha = \{x \ / \ \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\}$. Trên hình 1, ta minh họa các tập mức $\tilde{A}_0; \tilde{A}_{0,4}; \tilde{A}_{0,8}; \tilde{A}_1$ của $\tilde{A}$. Dễ thấy, các tập mức là những tập hợp cổ điển thông thường, và $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_{0,8} \subset \tilde{A}_{0,4} \subset \tilde{A}_0$.



Hình 1

Nếu hàm thuộc $\mu_{\tilde{A}}$ chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1, thì $\tilde{A}$ trở thành một tập hợp theo nghĩa thông thường, và nó chỉ có hai tập mức $\tilde{A}_0$ và $\tilde{A}_1$. Trên hình 1, độ đậm, mô tả mức độ thuộc của $x \in X$ vào tập mờ $\tilde{A}$, mờ dần từ trong ra ngoài, từ $\tilde{A}_1$ tới $\tilde{A}_0$.

Ví dụ 3. Một tập mờ $\tilde{A}$ các số thực gần bằng 10 được định nghĩa bởi hàm thuộc $\mu_{\tilde{A}}(x) = (1 + (x-10)^2)^{-1}$, có đồ thị cho trên hình 2. Một tập mờ $\tilde{B}$ các số nguyên gần bằng 10 có thể được cho bởi cách liệt kê như sau :

$\tilde{B} = \{(7;0,1), (13;0,1), (8;0,5), (12;0,5), (9;0,8), (11;0,8), (10;1)\}$

Sự liệt kê này xác định hàm $\mu_{\tilde{B}}$

Hình 2

3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC TẬP MỜ

Cho hai tập mờ $\tilde{A}$ và $\tilde{B}$. Lúc đó các phép toán cơ bản trên $\tilde{A}$ và $\tilde{B}$ có thể được định nghĩa như sau :

i) Giao $\tilde{C}$ của $\tilde{A}$ và $\tilde{B}$ là $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ với $\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ \forall x$.

ii) Hợp $\tilde{D}$ của $\tilde{A}$ và $\tilde{B}$ là $\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ với $\mu_{\tilde{D}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ \forall x$.

iii) Phần bù $C_{\tilde{A}}$ của $\tilde{A}$ có hàm thuộc là $\mu_{C\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\ \forall x$.

Câu hỏi 1. Cho $\tilde{A} = \{(3;0,2), (4;0,4), (5;0,6), (7;1), (8;1)\}$ và $\tilde{B} = \{(1;0,2), (2;0,5), (3;0,8), (5;0,7), (6;0,3)\}$. Hãy xác định $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, $\tilde{A} \cup \tilde{B}$. Chứng tỏ rằng $\tilde{A} \cap C_{\tilde{A}}$ không phải là tập hợp rỗng (theo nghĩa thông thường).

Câu hỏi 2. Hai tập mờ $\tilde{A}$ và $\tilde{B}$ được coi là đồng nhất, nếu $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)\ \forall x$. Hãy kiểm nghiệm các đẳng thức sau (với các phép toán trên tập mờ đã ở trên) :

i) $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$, $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$.

ii) $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$, $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$.

iii) $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$, $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$.

4. ỨNG DỤNG CỦA TOÁN HỌC MỜ.

Việc nghiên cứu tập mờ đã trở thành một lĩnh vực của Toán học và Tin học, gọi là Toán học mờ (Fuzzy Mathematics). Hiện nay, Hội Toán học mờ quốc tế, do nhà toán học người Pháp D. Dubois làm chủ tịch, là một tổ chức rộng lớn bao gồm rất nhiều nước hội viên như Mĩ, Pháp, Trung Quốc, Nhật Bản, Australia v.v... Mỗi nước hội viên cũng có hội Toán học mờ của mình. Hàng năm, hàng nghìn công trình, bao gồm các chuyên khảo và các bài báo khoa học được công bố trong các lĩnh vực Toán học mờ và ứng dụng, như Tôpô mờ, Độ đo mờ, Thông tin mờ, Lôgic mờ, Ngôn ngữ mờ, Trí tuệ nhân tạo, Lí thuyết khả năng, Vận trù học, Hệ quản trị mờ v.v... Nhà toán học người Đức H.J. Zimmermann là một trong những người đầu tiên áp dụng lí thuyết tập mờ và hệ thống mờ vào quy hoạch tối ưu và lí thuyết quyết định. Nhà toán học người Nhật Bản M. Sakawa có rất nhiều công trình về các phương pháp đối thoại giữa người ra quyết định và máy tính (interactive methods) để giải các bài toán tối ưu nhiều mục tiêu phi tuyến trong môi trường mờ. Lí thuyết tập mờ và hệ thống mờ cũng được ứng dụng rất hiệu quả vào các lĩnh vực công nghệ, kinh tế, quản lí, môi trường, tin học, y học, công nghiệp, nông nghiệp. Sự "bùng nổ toán học mờ" bắt đầu từNhật Bản đang lan rộng khắp thế giới. Có hai nhà toán học người Việt Nam là Nguyễn H.T (ở Canada) và Phạm T.D (ở Australia) đã có những công trình được đánh giá cao trong lĩnh vực này.

Các nhà toán học Việt Nam nghiên cứu Toán học mờ đã thành lập Phân hội Toán học mờ thuộc Hội Toán học VN và bước đầu có một số công trình về suy luận xấp xỉ, ứng dụng Toán học mờ trong y học phương Đông (TS Nguyễn Hoàng Phương, Viện Công nghệ Thông tin), nhận dạng mờ, điều khiển mờ (TS Nguyễn Thanh Thủy, ĐH Bách Khoa Hà Nội), lôgic mờ (TS Bùi Công Cường, Viện Toán học VN), tối ưu mờ (TS Nguyễn Hải Thanh, trường ĐH Nông nghiệp Hà Nội) v.v...

HỘI NGHỊ TOÁN HỌC CHÂU Á LẦN THỨ BA

Từ ngày 23 đến ngày 27 tháng 10 năm 2000, tại Manila (Philipin) đã diễn ra Hội nghị toán học châu Á lần thứ ba. Hội nghị lần thứ nhất họp tại Hồng Kông năm 1990, lần thứ hai tại Chiềng Mai (Thái Lan) năm 1995.

Hội nghị lần này quy tụ hơn 500 nhà toán học đến từ các nước châu Á và một số nước khác như Nga, Mỹ, Pháp, Đức, Italia, Tây Ban Nha... Mục tiêu của Hội nghị là tăng cường trao đổi và hợp tác giữa các nhà toán học trên thế giới, thúc đẩy sự phát triển toán học, đặc biệt là ở khu vực châu Á.

Trong 5 ngày, Hội nghị đã nghe 8 báo cáo toàn thể, 52 báo cáo mời và hơn 100 thông báo ngắn tại các tiểu ban. Các báo cáo toàn thể và báo cáo mời do Hội đồng khoa học của Hội nghị lựa chọn trên cơ sở của Hội toán học các nước giới thiệu. Các thông báo ngắn do những người tham dự tự đăng kí. Chỉ có 6 nhà toán học Việt Nam tham dự hội nghị, mặc dù so với tương quan trong khu vực thì có lẽ con số các nhà toán học Việt Nam có mặt tại Hội nghị phải lớn hơn. (Lí do đơn giản : trong khi hầu hết các nhà toán học tham dự Hội nghị đều do nước họ đài thọ thì toàn bộ đoàn Việt Nam do Ban tổ chức tài trợ !) Tuy nhiên, các nhà toán học Việt Nam có đóng góp không nhỏ vào thành công của Hội nghị : GS Đinh Dũng (Viện Công nghệ Thông tin) đọc báo cáo toàn thể, GS Nguyễn Hữu Công (ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), GS Hà Huy Khoái, GS Đỗ Long Vân (Viện Toán học) đọc báo cáo mời, TS Đặng Quang Á (Viện Công nghệ thông tin) đọc thông báo ngắn.

Ngoài các buổi họp chính thức, các nhà toán học tham dự hội nghị có nhiều buổi tiếp xúc, trao đổi các kết quả nghiên cứu mới. Hội nghị cũng tổ chức để các nhà toán học nước ngoài có dịp tìm hiểu về văn hóa và lịch sử của nước Philipin.

Hội nghị toán học châu Á lần thứ tư sẽ được tiến hành tại Singgapo năm 2004.

HÀ HUY KHOÁI

GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Một ngày sinh thật dễ nhớ : *ngày đầu, tháng đầu của năm dương lịch* là ngày sinh thật may mắn ! Mặc dù quá nhiều bạn sinh vào ngày này nhưng CLB vẫn quyết định gửi tặng phẩm chúc mừng các bạn :

1) *Lê Đình Tuấn*, năm 1985, khu tập thể Hạt kiểm lâm thị trấn Ba Ngòi, Cam Ranh, Khánh Hòa.

2) *Nguyễn Kim Huy*, năm 1978, Quảng Mỹ, Hòa Mỹ Tây, Tuy Hòa, Phú Yên.

3) *Nguyễn Anh Hoàng*, 1980, lớp K3, Anh Văn, trường CĐSP Vĩnh Phúc.

4) *Đào Ngọc Minh*, năm 1983, lớp 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang.

5) *Lê Công Phương*, lớp 12B, trường cấp 2-3 Trị An, thị trấn Vĩnh An, Vĩnh Cửu, Đồng Nai.

6) *Mai Xuân Chính*, năm 1985, lớp 9B, THCS Hải Hậu, Nam Định

7) *Vũ Ngọc Thái*, năm 1958, Vũ Thượng, Ái Quốc, Nam Sách, Hải Dương.

8) *Bùi Anh Tuấn*, năm 1984, lớp 10 Toán, THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình.

9) *Tạ Quỳnh Trang*, năm 1985, lớp 10 Toán 4, trường chuyên Lê Quý Đôn, Tp Vũng Tàu

10) *Phương Văn Bình*, năm 1983, F103, Nhà B8, tập thể Mai Động, Q. Hai Bà Trưng, Hà Nội.

11) *Bùi Hồng Ngọc*, năm 1989, số 2/269, Lê Lợi, Ngô Quyền, Hải Phòng

12) *Thiều Văn Tài*, năm 1983, 11A3, THPT Đông Sơn I, Thanh Hóa

13) *Nguyễn Phan Bính*, năm 1988, 6A4, THCS Phong Châu, Phú Thọ.

14) *Trịnh Anh Tuấn*, năm 1983, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

15) *Ngô Nhật Phương*, năm 1987, 32/C3 Hàn Thuyên, Tp Nha Trang, Khánh Hòa

16) *Ninh Văn Thành*, năm 1983, Đội 20, Đồng Tâm, Hải Nhân, Tĩnh Gia, Thanh Hóa.

Vì số bạn thích ngày sinh 1 tháng 1 quá nhiều nên CLB không kể hết tên của các bạn. Xin cảm ơn và mong thông cảm.

CLB

THÔNG BÁO ĐẶC BIỆT

- Câu lạc bộ "Gặp nhau qua ngày sinh" sẽ bốc thăm chọn *1 hội viên may mắn nhất năm 2000* để trao phần thưởng đặc biệt. Kết quả công bố vào số tạp chí tháng 1 năm 2001.
- Một cuộc chơi đầu thiên niên kỉ cực kì thú vị sẽ bắt đầu. Cuộc chơi gì vậy ? Các bạn hãy đọc ở số tạp chí tháng tới và *phiếu tham gia cuộc chơi chỉ có ở ở số tạp chí này*. Hãy đừng để lỡ các bạn nhé !

THAY SỐ BỞI CÁC CHỮ SỐ

ANPHA "tắc thở" giữa hàng chồng bài giải gửi về. Ai bảo cho đề "dễ" (?), lại còn không "bắt" lí luận ? Sau khi tự hô hấp để thanh thản... lồng ngực, ANPHA xem cẩn thận từng bài thì mới thấy rằng : Ai bảo là "dễ" nào ?

Nhiều bạn thay được một cách đã vội "khoái trí" gửi về. Đây là bài toán mở, có nhiều cách giải nên đương nhiên phải đếm số cách nhiều từ trên xuống để trao giải. Ai thua thì đành... rút hi vọng lần này thôi !

Có 32 bạn trình bày 8 cách thay số mà phần thưởng chỉ được 25% nên ANPHA đành quyết định lấy từ lớp dưới lấy lên để trao giải (mong các liền anh, liền chị nhường cho các em nhé !)

1) *Nguyễn Toàn Thắng*, 5B, trường tiểu học Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ, Thái Bình

2) *Nguyễn Lan Phương*, 7A, THCS Hoàng Long, Phú Xuyên, Hà Tây.

3) *Trần Thị Hồng Hạnh*, 7B, THCS thị trấn Lam Sơn, Thọ Xuân, Thanh Hóa

4) *Bùi Mạnh Nghĩa*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, Mê Linh, Vĩnh Phúc.

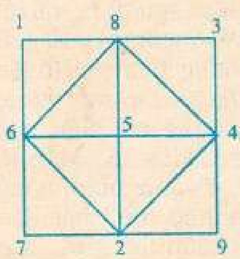
5) *Phan Dương Khởi*, 8A, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc.

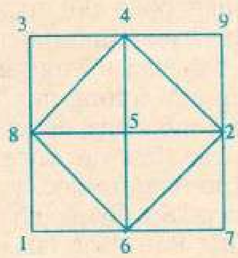
6) *Trần Hoàng Tùng*, 8A, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc.

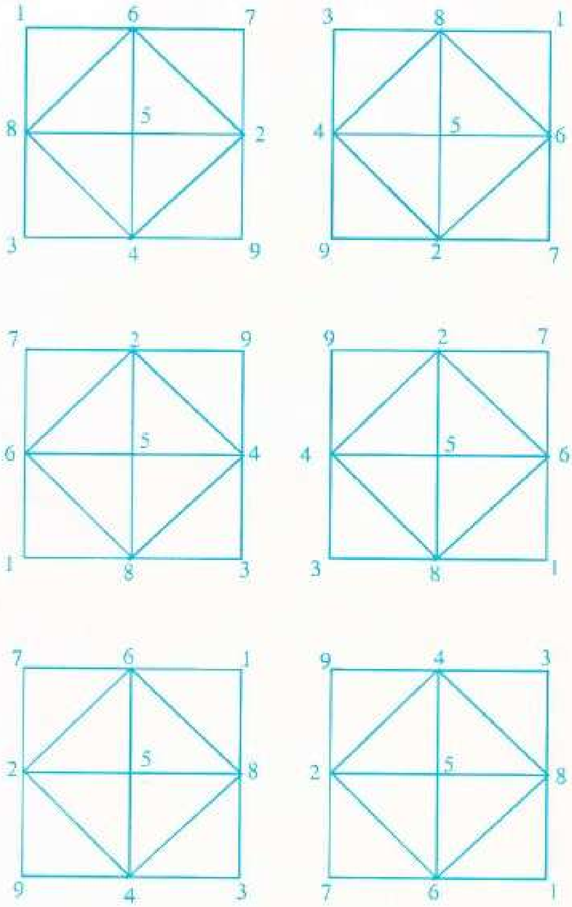
7) *Nguyễn Thế Tùng*, 9^4, THCS Nam Lý, Đồng Hới, Quảng Bình.

8) *Vũ Tấn Phúc*, 9, TH chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tx. Vĩnh Long, Vĩnh Long .

Dưới đây là 8 cách thay chữ cái bởi chữ số :







ANPHA

THƠ VÀ TOÁN

Bài thơ dưới đây là của tác giả Nguyễn Bá Thái viết năm 1943, do bạn Lê Khắc Vĩnh, 11B1 trường Quốc học Huế gửi về :

NGƯU LANG CHỨC NỮ

Cầu ô tuân ý cao - xa
Ngân-giang lẻ phượng đậm-đà bắc ngang
Tưng-bừng nghinh-đón cô-nương
Chàng-Ngưu vui tỏ nỗi thương-ai tràn
Thường là chuyện khóc khó can
Hóa-thành mưa lũ miên-man tháng-ngày

Các bạn có biết bài thơ liên quan gì đến toán không ? Bạn có thể gửi về một bài thơ.. "tương tự" được không ?

Năm tặng phẩm dành cho 5 bạn trả lời đúng và có thơ hay... "tương tự" !

CLB

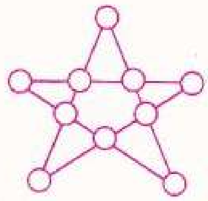
Giải đáp bài

NIÊU CƠM THẠCH SANH

Giả sử niêu cơm Thạch Sanh có x bát cơm ($x > 2$). Như vậy theo giả thiết thì $\frac{x}{2} > 1$. Sau lần chia thứ nhất niêu cơm còn $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ bát. Số này vẫn nhiều hơn 2 bát. Bây giờ gọi số bát là y ($y>2$). Ta quay lại như giả thiết ban đầu. Vậy Thạch Sanh có thể chia cơm vô hạn lần.

BÍNH NAM HÀ

ĐIỀN SỐ HÌNH SAO



Bạn hãy điền đủ các số từ 0 đến 9 vào các vòng tròn trên hình sao để khi lấy tổng các số trên mỗi hàng ta được 5 số tự nhiên liên tiếp.

VŨ HOÀNG THÁI

CÓ SƠ HỞ GÌ KHÔNG ?

Tất cả các bạn đều phát hiện ra việc nhân từng vế của 3 bất đẳng thức là không được vì các vế phải chắc gì đã không âm ! Tuy nhiên, các bạn bằng cách phân chia các khả năng vẫn chứng minh được : $xyz \geq (1-2x)(1-2y)(1-2z)$ và tiếp tục như lời giải đã công bố để đạt được kết quả.

Một số bạn chữa lời giải mà lại mắc sai lầm. Các bạn phân tích và sửa chữa tốt hơn là : *Ngô Ngọc Khiêm,* 10A9, THPT Bình Sơn, Bình Sơn, Quảng Ngãi; *Nguyễn Xuân Hòa, Phạm Thành Trung,* 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương; *Phan Quốc Hưng,* 11B, THPT Hải Lăng, Quảng Trị; *Phạm Thái Sơn,* 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Tx Bắc Ninh, Bắc Ninh, *Hoàng Đắc Thanh,* 10 Toán, NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh, *Dương Vũ Minh,* 11A Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

Cảm ơn các bạn và mời các bạn cho ý kiến về "bài toán hay, lời giải sai" ở trang 21.

KIHIVI

MÁI TRƯỜNG LỊCH SỬ

Hiệu trưởng Võ Tuấn Tài

Sinh ra và trưởng thành trên xứ Nghệ, trường THPT Huỳnh Thúc Kháng là một trong số ít các trường THPT trong cả nước có bề dày lịch sử 80 năm.

Tiền – thân của trường là trường Quốc học Vinh thành lập ngày 1 tháng 9 năm 1920 dành cho học sinh 3 tỉnh Thanh Hóa, Nghệ An, Hà Tĩnh. Năm học 1943-1944 trường đổi tên là Quốc học Nguyễn Công Trứ. Sau năm 1945 trường đổi tên là Trường trung học Nguyễn Công Trứ, chủ yếu là học sinh của tỉnh Nghệ An. Năm 1950 thực hiện chủ trương cải cách giáo dục lần thứ nhất, trường sáp nhập với trường chuyên khoa Huỳnh Thúc Kháng (một bộ phận của trường Khải Định ở Huế dời ra từ 1947 do mặt trận Bình Trị Thiên bị vỡ) thành trường cấp 3 Huỳnh Thúc Kháng. Đến năm học 1962-1963 ở Nghệ An bắt đầu có nhiều trường cấp 3, trường đổi tên là trường phổ thông cấp 3 Vinh. Năm học 1976-1977 ở Vinh có thêm 2 trường cấp 3 nên trường lại đổi tên là trường phổ thông cấp 3 Vinh I. Từ năm học 1985-1986 đến nay trường mang tên trường THPT Huỳnh Thúc Kháng.

Trong 80 năm qua dù trong thời kì nào, trong hoàn cảnh nào nhưng nhà trường vẫn luôn giữ vững chất lượng dạy và học, đào tạo cho đất nước nhiều thế hệ học sinh, trong đó có nhiều nhân tài trên các lĩnh vực chính trị, quân sự, khoa học kĩ thuật, văn học nghệ thuật, ... Tính đến nay nhà trường đã đào tạo trên 4 vạn học sinh, trong số đó đã có trên 200 Giáo sư, Tiến sĩ ; có 2 ủy viên Bộ chính trị và trên 10 ủy viên Trung ương Đảng cộng sản Việt Nam, 2 Phó Thủ tướng, 2 Phó Chủ tịch Quốc hội và trên 20 Bộ trưởng ; 7 sĩ quan cấp tướng từ Thiếu tướng đến Thượng tướng, gần 30 nhà văn, nhà thơ thuộc Hội nhà văn Việt Nam ; có 3 người là anh hùng lao động...

Phát huy truyền thống các thế hệ đi trước, ngày nay trường THPT Huỳnh Thúc Kháng vẫn là một trong các trường có chất lượng hàng đầu của tỉnh Nghệ An. Hàng năm tỉ lệ tốt nghiệp THPT từ 98% - 100%, trong 10 năm qua đã có 3050 học sinh đậu vào các trường Đại học, Cao đẳng, 623 học sinh giỏi cấp tỉnh và học sinh giỏi quốc gia. Nhà trường liên tục nhiều năm là trường tiên tiến và tiên tiến xuất sắc cấp tỉnh, được UBND tỉnh, Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng nhiều bằng khen. Ngày 10 tháng 11 năm 2000 Chủ tịch nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam tặng thưởng Nhà trường Huân chương Độc lập hạng 3. Đây là phần thưởng cao quý cho các thế hệ giáo viên, học sinh của trường THPT Huỳnh Thúc Kháng.

Công cuộc đổi mới của đất nước đang trên đà phát triển tốt đẹp nhưng cũng còn nhiều khó khăn, thách thức. Nhiệm vụ của các nhà trường nói chung cũng như của trường THPT Huỳnh Thúc Kháng là phải hoàn thành tốt sự nghiệp "Nâng cao dân trí, đào tạo nhân lực, bồi dưỡng nhân tài" đáp ứng yêu cầu của thời kì Công nghiệp hóa - Hiện đại hóa đất nước. Tự hào với truyền thống 80 năm, chúng ta tin rằng trường THPT Huỳnh Thúc Kháng mãi mãi đi lên trong sự nghiệp trồng người.

GS. TSKH. Nguyễn Cảnh Toàn (nguyên là học sinh cũ và giáo viên cũ của trường) trong một dịp về thăm trường

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT84M0

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2000

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng