TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

5 2015 Số 455

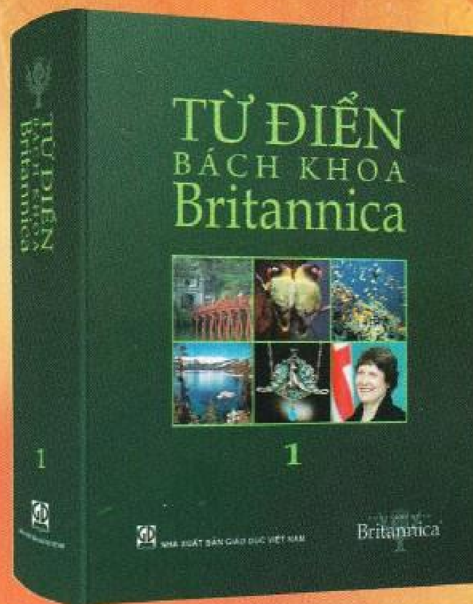
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu

Bộ Từ điển Bách khoa Britannica

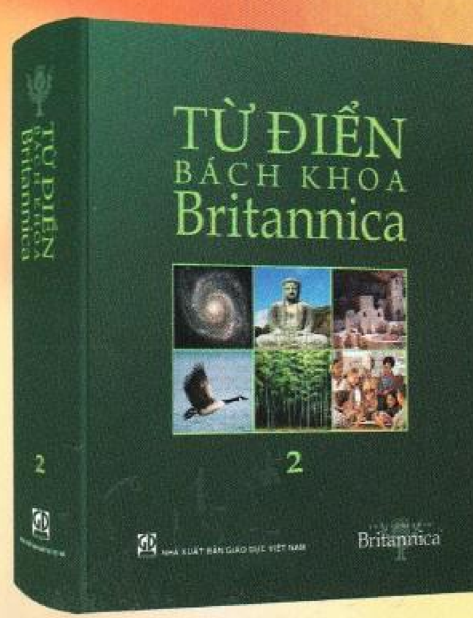
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam vừa cho ra mắt phiên bản tiếng Việt của cuốn Từ điển Bách khoa Britannica của Mỹ.



Từ điển Bách khoa Britannica gồm 25.000 mục từ, 2.500 hình minh họa và bản đồ, 51 lĩnh vực khoa học và đời sống, gần 300 mục từ về Việt Nam do các tác giả Việt Nam biên soạn theo thỏa thuận với phía Mỹ, Công ty Bách khoa thư Britannica Mỹ xét duyệt.

Việc chuyển dịch sang tiếng Việt được thực hiện rất công phu, do 54 dịch giả, 62 chuyên gia (trong đó có các chuyên gia từ điển) hiệu đính, thẩm định, biên tập dưới sự chỉ đạo của Hội đồng biên soạn - biên dịch, do ông Ngô Trần Ái - Chủ tịch Hội đồng thành viên - Tổng giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - làm chủ tịch.

Bộ sách gồm hai tập, tổng cộng 3.056 trang. Hình thức trình bày công phu, trang trọng: in bốn màu toàn bộ, đóng bìa cứng chữ dập chìm, ép nhũ vàng, có bìa áo cho từng cuốn, đặt trong hộp cứng, được phát hành từ ngày 20/11/2014.



Giáo sư, Viện sĩ Phạm Minh Hạc, Nguyên Bộ trưởng Bộ Giáo dục - Đào tạo, đánh giá bộ sách đạt ba tiêu chí: Khách quan, Chính xác, "Quyền uy" và việc phát hành Từ điển Bách khoa Britannica tại Việt Nam có thể được coi là một sự kiện lớn trong đời sống văn hoá - giáo dục nước nhà. Theo Giáo sư, mỗi trường nên có một cuốn để các nhà giáo và các em học sinh tham khảo.

Theo Nguyên Bộ trưởng: "Như *Lời nhà xuất bản* viết: công việc hết sức khó khăn, các dịch giả, người hiệu đính và biên tập viên đã làm việc cật lực trong nhiều năm, tuy thế cũng 'khó tránh khỏi sai sót'.

Bạn đọc có nhu cầu xin liên hệ:
Công ty CP Sách dịch và Từ điển Giáo dục. Tel: 04.38266359 - 0904608096.
Hoặc tìm thêm thông tin tại www.facebook.com/pages/Từ-điển-Bách-khoa-Britannica/
Bộ sách có giá 3 triệu đồng. Giao sách tận nơi, miễn phí.

HÃY ĐẶT MUA TC TH&TT TẠI CƠ SỞ BƯU ĐIỆN GẦN NHẤT !

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

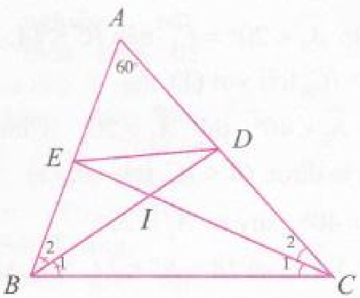
PHƯƠNG PHÁP GIÁN TIẾP TÍNH SỐ ĐO GÓC

VŨ HỮU BÌNH (*Hà Nội*)

Trong các bài toán về tính số đo góc cũng như trong các bài toán chứng minh hình học, có những trường hợp ta gặp khó khăn khi chứng minh trực tiếp bài toán, khi đó có thể dùng phương pháp chứng minh gián tiếp.

1. *Phương pháp chứng minh hai điểm trùng nhau*

Thí dụ 1. *Cho tam giác ABC, $\widehat{BAC}=60^\circ$, đường phân giác CE. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CED}=30^\circ$. Tính số đo góc BDE.*



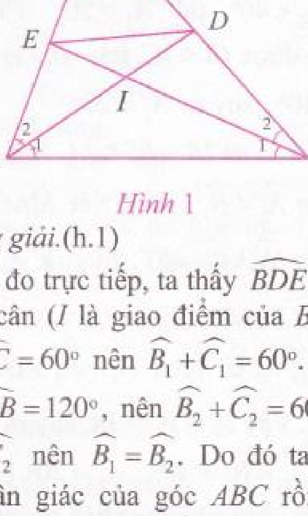
Hình 1

Tìm hướng giải.(h.1)

Bằng cách đo trực tiếp, ta thấy $\widehat{BDE}=30^\circ$, tức là ΔIDE cân (I là giao điểm của BD và CE), khi đó $\widehat{DIC}=60^\circ$ nên $\widehat{B_1}+\widehat{C_1}=60^\circ$. Ta lại có $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=120^\circ$, nên $\widehat{B_2}+\widehat{C_2}=60^\circ$.

Do $\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$ nên $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$. Do đó ta vẽ BD' là đường phân giác của góc ABC rồi đi chứng minh điểm D' trùng với điểm D.

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Kẻ đường phân giác BD' của góc ABC, cắt CE tại I. Ta có

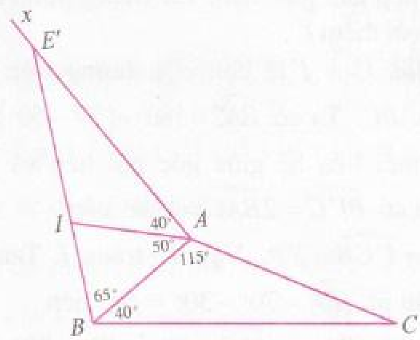
$$\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^\circ-\widehat{BAC}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

nên $\widehat{B_1}+\widehat{C_1}=\dfrac{\widehat{ABC}+\widehat{ACB}}{2}=60^\circ$, suy ra

$$\widehat{BIC}=120^\circ \text{ và } \widehat{I_1}=\widehat{I_2}=60^\circ.$$

Gọi IK là đường phân giác của ΔBIC thì $\widehat{I_3}=\widehat{I_4}=60^\circ$, $\Delta BIE=\Delta BIK$ (g.c.g) $\Rightarrow IE=IK$, $\Delta CID'=\Delta CIK$ (g.c.g) $\Rightarrow ID'=IK$ suy ra $IE=ID'$. Tam giác IED' cân tại I có $\widehat{EID'}=120^\circ$ nên $\widehat{IED'}=\widehat{ID'E}=30^\circ$. Do $D'\in AC$ và $\widehat{CED}=30^\circ$ nên D' trùng D. Vậy $\widehat{BDE}=\widehat{BD'E}=30^\circ$. ❒

Thí dụ 2. *Cho tam giác ABC, $\widehat{BAC}=115^\circ$, $\widehat{ABC}=40^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C, kẻ tia Ax vuông góc với AB. Lấy điểm E trên tia Ax sao cho AE = BC. Tính số đo góc AEB.*



Hình 3

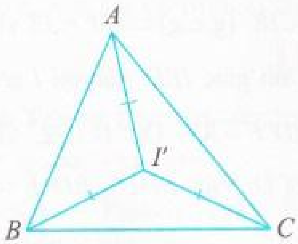
Tìm hướng giải. (h.3)

Bằng cách đo trực tiếp, ta thấy $\widehat{AEB}=25^\circ$, tức là $\widehat{ABE}=65^\circ$. Do đó ta lấy điểm E' trên tia Ax sao cho $\widehat{ABE'}=65^\circ$ rồi chứng minh điểm E' trùng với điểm E.

Lời giải. Trên tia Ax lấy điểm E' sao cho $\widehat{ABE'} = 65^o$. Lấy điểm I trên đoạn BE' sao cho $\widehat{E'AI} = 40^o$ thì $\widehat{BA'I} = 90^o - 40^o = 50^o$. Suy ra $\widehat{AIB} = 180^o - (65^o + 50^o) = 65^o$, do đó ΔAIB cân, $AI = AB$, và $\widehat{AIE'} = 180^o - 65^o = 115^o = \widehat{BAC}$. Ta có $\Delta AIE' = \Delta BAC$ (g.c.g) nên $AE' = BC$. Ta lại có $BC = AE$ nên $AE = AE'$, suy ra E' trùng E. Do đó $\widehat{ABE} = 65^o$, $\widehat{AEB} = 90^o - 65^o = 25^o$. ❒

Thí dụ 3. *Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 70^o$, $\widehat{ACB} = 50^o$, điểm I nằm trong tam giác đó sao cho $\widehat{IBC} = \widehat{ICB} = 30^o$. Tính số đo các góc IAB và góc IAC.*

Tìm hướng giải. (h.4)



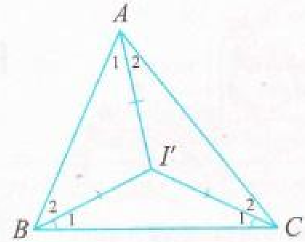
Hình 4

Bằng cách đo trực tiếp, ta thấy $\widehat{IAB} = 40^o$ tức là $IA = IB = IC$, do đó ta vẽ I' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC rồi chứng minh điểm I trùng với điểm I'.

Lời giải. Gọi I' là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có $\widehat{BAC} = 180^o - (70^o + 50^o) = 60^o$. Theo mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm, ta có $\widehat{BI'C} = 2\widehat{BAC} = 120^o$ nên $\widehat{I'BC} = \widehat{I'CB} = 30^o$. Vậy I' trùng I. Tam giác IAB cân có $\widehat{IBA} = 70^o - 30^o = 40^o$ nên $\widehat{IAB} = 40^o$. Suy ra $\widehat{IAC} = 60^o - 40^o = 20^o$. ❒

2. *Phương pháp phản chứng*

Trở lại thí dụ 3 nói trên. Ngoài cách giải bằng cách vẽ tâm I' của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC rồi chứng minh I' trùng I như trên, còn có thể chứng minh bằng phương pháp phản chứng (h.5).



Hình 5

Lời giải. Ta có ΔIBC cân tại I nên $IB = IC$ (1)

$$\widehat{BAC} = 180^o - (70^o + 50^o) = 60^o,$$

$$\widehat{B_2} = \widehat{ABC} - \widehat{B_1} = 70^o - 30^o = 40^o,$$

$$\widehat{C_2} = \widehat{ACB} - \widehat{C_1} = 50^o - 30^o = 20^o.$$

Có thể chứng minh bằng phản chứng theo hai cách:

- *Cách 1.* Giả sử $\widehat{A_1} > 40^o$ thì $\widehat{A_2} < 20^o$. Xét ΔIAB, do $\widehat{A_1} > 40^o = \widehat{B_2}$ nên $IB > IA$. Xét ΔIAC, do $\widehat{A_2} < 20^o = \widehat{C_2}$ nên $IC < IA$. Suy ra $IB > IA > IC$, trái với (1).

Giả sử $\widehat{A_1} < 40^o$ thì $\widehat{A_2} > 20^o$. Chứng minh tương tự ta được $IB < IC$, trái với (1).

Vậy $\widehat{A_1} = 40^o$, suy ra $\widehat{A_2} = 20^o$.

- *Cách 2.* Giả sử $IB = IC < IA$. Xét ΔIAB, do $IB < IA$ nên $\widehat{A_1} < \widehat{B_2} = 40^o$. Xét ΔIAC, do $IC < IA$ nên $\widehat{A_2} < \widehat{C_2} = 20^o$. Suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} < 60^o$, trái với $\widehat{BAC} = 60^o$. Giả sử $IB = IC > IA$. Chứng minh tương tự ta được $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} > 60^o$, trái với $\widehat{BAC} = 60^o$. Vậy $IB = IC = IA$, suy ra

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_2} = 40^o,\ \widehat{A_2} = 20^o. ❒$$

Các bạn thử dùng phương pháp chứng minh gián tiếp để giải các bài tập sau:

Bài 1. Cho tam giác ABC, $\widehat{ABC} = 75^o$, $\widehat{ACB} = 60^o$, điểm I nằm trong tam giác đó sao cho $\widehat{IBC} = \widehat{ICB} = 45^o$. Tính số đo các góc IAB và góc IAC.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABD} = 35^o$, $\widehat{ADB} = 30^o$, $\widehat{ACB} = 60^o$, $\widehat{ACD} = 70^o$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tính số đo góc AOB.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN THPT CHUYÊN BẮC NINH NĂM HỌC 2014 - 2015

(Đề thi đăng trên TH&TT số 454, tháng 4 năm 2015)

Câu 1. 1) Ta có:

$$P=(\sqrt{x}-1)(1+\sqrt{x}+x+\sqrt{x})\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}$$
$$=(\sqrt{x}-1)(1+\sqrt{x})^2\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}=\sqrt{x}-1.$$

2) Ta có $\frac{2}{P}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\sqrt{x}-1$ là ước của 2 gồm: $\pm1,\pm2$. Từ đó tìm được $x\in\{0;4;9\}$.

Câu 2. 1) ĐK: $xyzabc\neq 0$. Ta có:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0\Leftrightarrow\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0$$
$$\Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0;$$
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\Rightarrow\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\frac{cxy+bxz+ayz}{abc}=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2) Ta có $\Delta=4a^2+16a-151$. Để PT có nghiệm nguyên thì $\Delta=n^2$ với $n\in\mathbb{N}$. Khi đó

$$4a^2+16a-151=n^2$$
$$\Leftrightarrow(4a^2+16a+16)-n^2=167$$
$$\Leftrightarrow(2a+4+n)(2a+4-n)=167.$$

Do 167 là số nguyên tố và $2a+4+n\geq 2a+4-n$ nên ta có các trường hợp:

- $\begin{cases}2a+4+n=167\\2a+4-n=1\end{cases}\Rightarrow 4a+8=168\Rightarrow a=40.$
- $\begin{cases}2a+4+n=-1\\2a+4-n=-167\end{cases}\Rightarrow 4a+8=-168\Rightarrow a=-44.$

Với $a=40$ thì PT có hai nghiệm nguyên là $x=0,x=83$.

Với $a=-44$ thì PT có hai nghiệm nguyên là $x=-1,x=-84$.

Câu 3. 1) Từ PT thứ nhất ta có $x=3m-my$, thay vào PT thứ hai ta có $y=2;x=m$. Suy ra $x^2-2x-y=m^2-2m-2=(m-1)^2-3>0$

$$\Leftrightarrow|m-1|>\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1+\sqrt{3}\\m<1-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

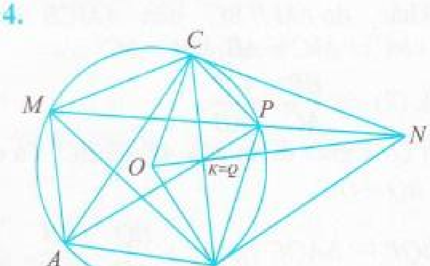
2) Ta chứng minh được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y},\forall x,y>0,$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Từ giả thiết $a+b-c>0,b+c-a>0,c+a-b>0$. Ta có

$$S=\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)\geq\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}$$

Mà $2c+b=abc\Leftrightarrow\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=a$ nên

$S\geq 2a+\frac{6}{a}\geq 4\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$. Vậy min $S=4\sqrt{3}$.

Câu 4.



1) Theo tính chất của tiếp tuyến ta có $NB=NC;\ OB=OC;\ ON$ là trung trực của BC. Gọi K là giao điểm của ON và BC thì K là trung điểm của BC. Ta có

$$\frac{1}{16}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{NC^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{NB^2}=\frac{1}{BK^2}$$
$$\Rightarrow BK^2=16\Rightarrow BK=4\Rightarrow BC=8.$$

2) Ta có $\Delta NBP\backsim\Delta NMB$ (g.g) $\Rightarrow\frac{BP}{MB}=\frac{NB}{NM}$;

$\Delta NCP\backsim\Delta NMC$ (g.g) $\Rightarrow\frac{PC}{MC}=\frac{NC}{NM}$.

Mà $NC=NB$ nên suy ra $\frac{PB}{MB}=\frac{PC}{MC}$ (1)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG ĐHSP TP. HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2014 - 2015

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 (2 *điểm*). Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1$.

b) $\left(x+\sqrt{x}+1\right)^2=2x^2-30x+2$.

Câu 2 (2 *điểm*)

a) Có hay không số nguyên tố p thỏa mãn $8p-1$ và $8p+1$ cũng là các số nguyên tố? Giải thích.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho
$$3^x-2^y=1.$$

Câu 3 (2 *điểm*)

a) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a+b=2$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2\le a^4+b^4$.

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}.$$

Câu 4 (1 *điểm*). Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F. Gọi (d_1) là đường thẳng qua D và vuông góc với BC, (d_2) là đường thẳng qua E và vuông góc với CA, (d_3) là đường thẳng qua F và vuông góc với AB. Chứng minh rằng (d_1), (d_2) và (d_3) đồng quy khi và chỉ khi có đẳng thức sau:
$$\left(DB^2-DC^2\right)+\left(EC^2-EA^2\right)+\left(FA^2-FB^2\right)=0.$$

Câu 5 (2 *điểm*). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi E là điểm trên cung nhỏ AB. Gọi H, K, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên AC, CD, AE, DE. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, HK.

a) Chứng minh rằng AD, PQ, HK đồng quy.

b) Chứng minh rằng MN vuông góc với NB.

Câu 6 (1 *điểm*). Cho một đa giác đều 50 đỉnh. Người ta ghi lên mỗi đỉnh của đa giác số 1 hoặc số 2. Biết rằng có 20 đỉnh ghi số 1, 30 đỉnh ghi số 2 và các số trên 3 đỉnh liên tiếp bất kỳ không đồng thời bằng nhau. Hãy tính tổng của tất cả các tích ba số trên 3 đỉnh liên tiếp của đa giác trên.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

Mặt khác, do $AM // BC$ nên $AMCB$ là hình thang cân $\Rightarrow MC=AB, MB=AC$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{BP}{AC}=\dfrac{CP}{AB}$.

3) Gọi Q là giao điểm của AP và BC. Ta chứng minh $BQ=QC$.

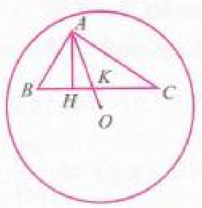
Vì $\Delta BQP \backsim \Delta AQC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BQ}{AQ}=\dfrac{PB}{AC}$ (4)

$\Delta CQP \backsim \Delta AQB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CQ}{AQ}=\dfrac{PC}{AB}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\dfrac{BQ}{AQ}=\dfrac{CQ}{AQ}\Rightarrow BQ=CQ$

$\Rightarrow Q\equiv K$. Vậy BC, ON, AP đồng quy tại K.

Câu 5.



1) Giả sử O nằm ngoài miền tam giác ABC. Không mất tính tổng quát, giả sử A và O nằm về hai phía của đường thẳng BC, đoạn AO cắt đường thẳng BC tại K. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Ta có $AH\le AK<AO<1$.

Suy ra $S_{ABC}=\dfrac{AH.BC}{2}<\dfrac{2.1}{2}=1$ (mâu thuẫn với giả thiết). Suy ra đpcm.

2) Nếu a,b chẵn thì a^2+b^2 là hợp số. Do đó nếu tập con X của A có hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố thì X không thể chỉ chứa các số chẵn. Suy ra $k\ge 9$. Ta chứng tỏ $k=9$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm (nghĩa là trong 9 phần tử bất kỳ của A luôn tồn tại hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố). Thật vậy, ta chia A thành 8 cặp phần tử phân biệt (a, b) thỏa mãn a^2+b^2 là một số nguyên tố như sau: $(1;4),(2;3),(5;8),(6;11),$ $(7;10),(9;16),(12;13),(14;15)$. Theo *nguyên lý Dirichlet* thì trong 9 phần tử bất kỳ của X luôn có hai phần tử cùng thuộc một cặp nêu trên và ta có đpcm.

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh*) ***Sưu tầm***

ỨNG DỤNG TÍNH CHẤT CỦA KHỐI TỨ DIỆN VUÔNG VÀO BÀI TOÁN TÍNH KHOẢNG CÁCH

NGUYỄN NGỌC XUÂN
(GV THPT chuyên Hoàng Văn Thụ , Hòa Bình)

Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu cách tiếp cận bài toán tính khoảng cách trong hình học không gian nhờ áp dụng công thức tính chiều cao của khối tứ diện vuông nhằm giúp các bạn học sinh chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc gia sắp tới.

Bài toán mở đầu. (*Bài 17 trang 103, SGK Hình học Nâng cao lớp 11*). *Cho hình tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc.*

a) Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn.

b) Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm của tam giác ABC.

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Độ dài $OH = h$ ở bài toán trên chính là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC), sử dụng kết quả trên ta có thể tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau một cách tự nhiên và nhanh chóng.

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Bài toán 1. *Cho hình lăng trụ* $ABC.A'B'C'$ *với* $AB=a, BC=2a, \widehat{ABC}=60^\circ$. *Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, góc giữa AA' và mặt đáy bằng* 60°. *Tính* $V_{A'ABC}$ *và khoảng cách từ G đến mặt phẳng* $(A'BC)$.

Lời giải. (h.1, h.2) Áp dụng định lí côsin cho ΔABC có:

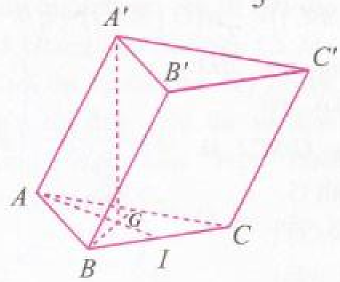
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos 60^\circ$$

$$= a^2 + 4a^2 - 2.a.2a.\frac{1}{2} = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

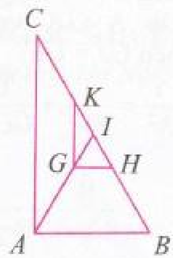
Suy ra $AC^2 + AB^2 = BC^2$ dẫn đến ΔABC vuông tại A. Do $A'G \perp (ABC)$ nên ta thấy

$$(AA';(ABC)) = (AA';AG) = \widehat{A'AG} = 60^\circ;$$

$A'G = AG\tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Do đó $V_{A'ABC} = \frac{a^3}{3}$.



Hình 1



Hình 2

• Đặt $d(G,(A'BC)) = h$.

Kẻ $GH \,//\, AB$, $GK \,//\, AC$ suy ra $GH \perp GK$. Ta có $GH=\frac{1}{3}AB=\frac{a}{3}$ và $GK = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $GA' \perp (GHK)$ nên $G.A'HK$ là tứ diện vuông, suy ra

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{A'G^2}+\frac{1}{GH^2}+\frac{1}{GK^2}=\frac{3}{4a^2}+\frac{9}{a^2}+\frac{3}{a^2}=\frac{51}{4a^2}.$$

Suy ra $h = \frac{2a}{\sqrt{51}}$. □

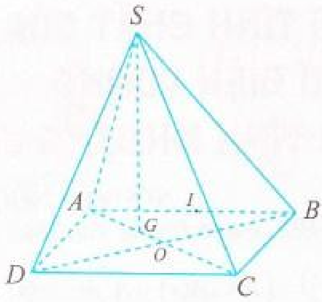
Bài toán 2. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABCD) trùng với trọng tâm G tam giác ABD, cạnh SD tạo với đáy (ABCD) một góc* 60° *.Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ A tới (SBC) theo a.*

Lời giải. (h.3, h.4)

• $S_{ABCD} = a^2$. Gọi G là trọng tâm ΔABD, $SG \perp (ABCD) \Rightarrow (SD,(ABCD)) = \widehat{SDG} = 60^\circ$.

Gọi I là trung điểm AB ta có $DG = \frac{2}{3}DI = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ và $SG = DG\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{3}$, vì thế

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SG.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{9}.$$

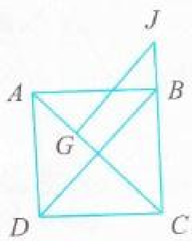


Hình 3

• $\frac{AC}{GC}=\frac{3}{2}\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=\frac{3}{2}d\left(G,(SBC)\right)=\frac{3}{2}h.$

Kẻ GJ song song với BD $(J\in BC)\Rightarrow GJ\perp GC$ mà $SG\perp(GIC)$ suy ra $G.SCJ$ là tam diện vuông đỉnh G.

Do Δ GJC vuông cân tại G nên $GJ=GC$.



Hình 4

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{SG^2}+\frac{1}{GC^2}+\frac{1}{GJ^2}$$

$$=\frac{9}{15a^2}+\frac{1}{\left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{9}{15a^2}+\frac{9}{8a^2}+\frac{9}{8a^2}=\frac{57}{20a^2}\Rightarrow h=\frac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{57}}.$$

Suy ra $d\left(A;(SBC)\right)=\frac{3\sqrt{5}a}{\sqrt{57}}$. ❒

DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Bài toán 3. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, $AB=2a; BD=\sqrt{3}AC$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh A. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AI. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.*

Lời giải. (h.5)

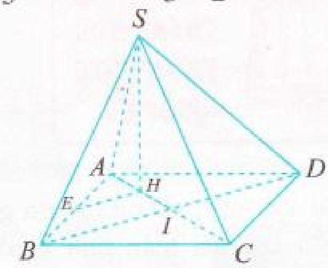
• Tam giác SAB cân tại A suy ra $SA=AB=2a$.

Ta có $BD=\sqrt{3}AC\Rightarrow BI=\sqrt{3}AI=\sqrt{3}x$ với $x=AI\,(x>0)$. Mà $AI^2+BI^2=AB^2$ nên $x^2+3x^2=4a^2$, hay $x=a$.

Từ đó $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=\frac{1}{2}.2a.2\sqrt{3}a=2\sqrt{3}a^2$.

$SH^2=SA^2-AH^2=4a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{15a^2}{4}$ hay $SH=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{15}}{2}.2\sqrt{3}a^2=a^3\sqrt{5}.$$



Hình 5

• Vì $CD\ //\ (SAB)$, dẫn đến

$$d(CD;SB)=d\left(CD;(SAB)\right)=d\left(C;(SAB)\right)$$
$$=4d\left(H;(SAB)\right)=4h\,(h>0).$$

Gọi E là trung điểm của AB, ta có $\overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$; suy ra $AH\perp HE$ và $HE=\frac{1}{2}IB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, dẫn đến $H.SAE$ là khối tứ diện vuông đỉnh H. Ta có

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HA^2}+\frac{1}{HE^2}$$
$$=\frac{1}{\frac{15a^2}{4}}+\frac{1}{\frac{a^2}{4}}+\frac{1}{\frac{3a^2}{4}}=\frac{28}{5a^2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{35}}{14}.$$

Vậy có $d(CD;SB)=\frac{2\sqrt{35}}{7}a$. ❒

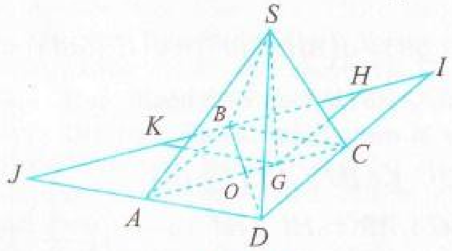
Lời bình. Để giải bài toán trên ta đã sử dụng tính chất quen thuộc: Nếu d_1,d_2 là hai đường thẳng chéo nhau, (P) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 khi đó mọi điểm $M\in d_2$ ta có : $d(d_1;d_2)=d\left(M;(P)\right)$. Như vậy bài toán này sau khi xây dựng mặt phẳng (P) ta lại quy về bài toán dạng 1.

Bài toán 4. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành với $AB=2a$, $BC=a\sqrt{2}$, $BD=a\sqrt{6}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABCD) là trọng tâm G của tam giác BCD, biết $SG=2a$. Tính thể tích V khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB theo a.*

Lời giải. (h.6, h.7)

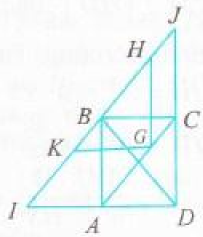
• Vì $CD^2+BC^2=4a^2+2a^2=6a^2=AC^2$ nên

$ABCD$ là hình chữ nhật. $V_{S.ABCD} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}a^3$.



Hình 6

$\bullet$ Kẻ đường thẳng qua B song song với AC cắt DC và DA tại I và J.



Hình 7

Qua G kẻ $GH \,//\, ID\,(H \in BI)$, $GK \,//\, AD\,(K \in BJ)$ suy ra $GH \perp GK$ dẫn đến $G.SKH$ là tứ diện vuông.

Do $AC \,//\, (SIJ)$ và $SB \in (SIJ)$, nên

$d(AC;SB) = d(AC;(SIJ)) = d(G;(SHK)) = h.$

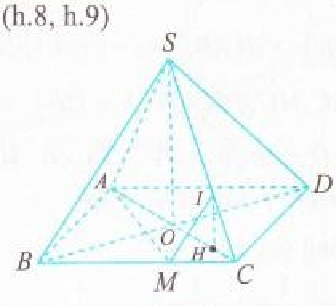
$GH = AB = 2a, GK = BC = a\sqrt{2}$. Từ đó

$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{GS^2} + \dfrac{1}{GH^2} + \dfrac{1}{GK^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{1}{a^2}.$

Vậy có $h = a$, hay $d(AC;SB) = a$. ❒

Bài toán 5. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Điểm I thuộc đoạn SC sao cho SC=3IC. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SB biết rằng AI vuông góc với SC.*

Lời giải. (h.8, h.9)



Hình 8

$\bullet$ Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$ suy ra $SO \perp (ABCD)$. Ta có

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow OC = a$ và

$AI \perp SC \Rightarrow \Delta SOC \sim \Delta AIC \Rightarrow$

$\dfrac{CI}{CO} = \dfrac{CA}{CS} \Rightarrow SC = a\sqrt{6} \Rightarrow SO = a\sqrt{5}.$

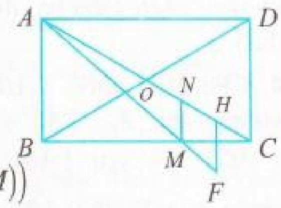
Vì thế $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

$\bullet$ Kẻ $IM \,//\, SB\ (M \in BC) \Rightarrow SB \,//\, (AIM)$, suy ra

$d(SB;AI) = d(SB;(AIM)) = d(B;(AIM)).$

Kẻ $IH \,//\, SO\ (H \in OC)$

$\Rightarrow IH \perp (ABCD)$ và



Hình 9

$\dfrac{HC}{OC} = \dfrac{IC}{SC} = \dfrac{1}{3}$. Ta có

$d(B,(AIM)) = 2d(C;(AIM))$

$= 2.\dfrac{6}{5}d(H;(AIM)) = \dfrac{12}{5}h$. Kẻ

$HE \,//\, AD, HF \,//\, DC\ \ (E, F \in AM)$

$\Rightarrow HE \perp HF$ mà $IH \perp (HEF)$

nên $H.IEF$ là tứ diện vuông tại H.

Ta có $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{HE^2} + \dfrac{1}{HF^2}$ với

$IH = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{5}}{3};$

$HE = \dfrac{5}{6}MC = \dfrac{5}{6}.\dfrac{1}{3}BC = \dfrac{5a\sqrt{3}}{18};$

$HF = \dfrac{5}{4}MN = \dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{3}AB = \dfrac{5}{12}a$. Suy ra

$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{IH^2} + \dfrac{1}{HE^2} + \dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{297}{25a^2} \Rightarrow h = \dfrac{5a}{3\sqrt{33}}.$

Vậy có $d(AB;SB) = \dfrac{12}{5}.\dfrac{5a}{3\sqrt{33}} = \dfrac{4a}{\sqrt{33}}$. ❒

BÀI TẬP

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 60°. Đỉnh A' cách đều các đỉnh A, B, D. M là trung điểm của CD. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BD)$.

2. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a; AA' = 2a; A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh $C'A'$, I là giao điểm của hai đường thẳng AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối chóp $I.ABC$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông với cạnh $2a$, mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Hãy tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB theo a.

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại A; $2AC = BC = 2a$. Mặt phẳng (SAC) tạo với (ABC) một góc 60°. Hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm H của đoạn BC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AH và SB.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$; $AD = 2a$, tam giác SAB cân tại đỉnh S nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng đáy góc 60°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa AB và SD.

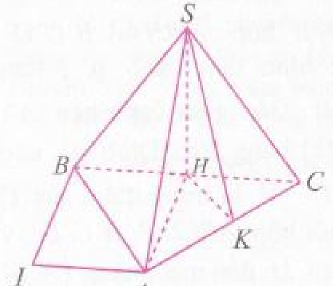
HƯỚNG DẪN GIẢI

1. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$; $d\big(M;(A'BD)\big) = \dfrac{3\sqrt{13}a}{26}$.

2. $V_{IABC} = \dfrac{4}{9}a^3$; $d\big(A;(IBC)\big) = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$

3. $V_{S.ABCD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$; $d(AC;SB) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}a$.

4.



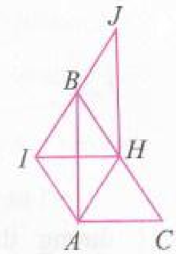
Lấy K là trung điểm AC suy ra $AC \perp (SHK)$ $\Rightarrow AC \perp SK$ nên $\big((SAC);(ABC)\big) = \widehat{SKH} = 60^\circ$.

$SH = HK\tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$. $V_{SABC} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

• Dựng $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{HB} \Rightarrow AH \,//\, BI \Rightarrow AH \,//\, (SBI)$.

Ta có

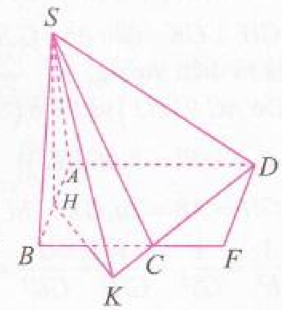
$d(AH;SB) = d\big(AH;(SBI)\big) = d\big(H;(SBI)\big) = h.$



Dễ thấy $AHBI$ là hình bình hành nên H là trung điểm BC suy ra $HI \,//\, AC$. Kẻ $HJ \,//\, AB$ $(J \in IB)$ mà $AC \perp AB \Rightarrow HI \perp HJ$ và $SH \perp (HIJ)$ dẫn đến $H.SIJ$ là tứ diện vuông. Ta có $HI = AC = a$ và $HJ = AB = a\sqrt{3}$ nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HJ^2} \Rightarrow h = \frac{3a}{4}.$$

5.



• Gọi H là trung điểm AB, thì $SH \perp (ABCD)$.

$HK \perp CD$, $\widehat{SKH} = 60^\circ$.

Xét hình thang $ABCD$, giả sử CD cắt AB tại E thì $\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Tam giác ADE vuông cân tại A

$\Rightarrow AC \perp ED \Rightarrow HK \,//\, AC$

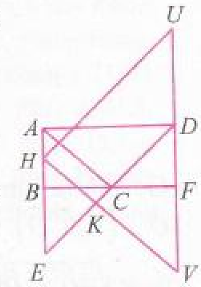
$\Rightarrow HK = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2}2a\sqrt{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

$SH = HK\tan 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{6}a}{4}$. $V_{S.ABCD} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}a^3$.

• Trong $(ABCD)$ dựng $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB}$ suy ra $AB \,//\, (SDF) \Rightarrow d(AB;SD) = d\big(H;(SDF)\big) = h$.

Kẻ $HV \,//\, AC, HU \,//\, CD$ $(U, V \in DF)$

$\Rightarrow HU = ED = 2a\sqrt{2} = HV$. Ta có $HU \perp HV$ và $SH \perp (HUV)$ nên $H.SUV$ là tứ diện vuông suy ra



$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HU^2} + \frac{1}{HV^2} = \frac{16}{54a^2} + \frac{1}{8a^2} + \frac{1}{8a^2} = \frac{59}{108a^2}.$$

Vậy $h = \dfrac{6\sqrt{177}}{59}a$. ❐

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Gọi $M(x_0,y_0)\in(H)$ là tiếp điểm khi đó $y'(x_0)=-\frac{3}{(x_0-2)^2}$. Từ giả thiết, suy ra:

$$\frac{-3}{(x_0-2)^2}=-3\Leftrightarrow x_0\in\{1;3\}.$$

Có hai tiếp tuyến cần tìm với PT lần lượt là:

$$y=-3x+1,\ y=-3x+13.$$

Câu 2. ĐK: $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Phương trình đã cho tương đương với $\log_5|x|+\log_5|x-1|=\log_5 2$

$\Leftrightarrow \log_5|x^2-x|=\log_5 2\Leftrightarrow |x^2-x|=2.$

TH1. $x^2-x=2\Leftrightarrow x\in\{-1;2\}$.

TH2. $x^2-x=-2$ (PT này vô nghiệm).

Câu 3. Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x},\ x=e^2$

$\Rightarrow t=2; x=e^3\Rightarrow t=3.$

$$I=\int_2^3\frac{t-4}{1-t^2}dt=-\frac{3}{2}\int_2^3\frac{dt}{1-t}-\frac{5}{2}\int_2^3\frac{dt}{1+t}$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|1-t|\Big|_2^3-\frac{5}{2}\ln|1+t|\Big|_2^3=-\frac{13}{2}\ln 2+\frac{5}{2}\ln 3.$$

Câu 4. Số cách chọn 6 quả cầu bất kì trong hộp là C_{12}^6. Chọn 3 quả cầu màu trắng trong 6 quả màu trắng có C_6^3 cách. Chọn 2 quả cầu màu đỏ trong 4 quả màu đỏ có C_4^2 cách. Chọn 1 quả cầu màu đen trong 2 quả màu đen có C_2^1 cách. Vậy số cách chọn thỏa mãn là $C_6^3.C_4^2.C_2^1$.

Xác suất cần tìm là $\frac{C_6^3.C_4^2.C_2^1}{C_{12}^6}=\frac{20}{77}$.

Câu 5. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;-3);\overrightarrow{AC}=(4;0;6);$ $\overrightarrow{AD}=(-1;-5;1),\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-12;-24;8)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}=140\neq 0.$

Vậy A,B,C,D là bốn đỉnh một khối tứ diện và

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{70}{3}\ \text{(đvtt)}.$$

Câu 6. Gọi K là trung điểm $A'B'$, vì tam giác $C'A'B'$ cân tại C' nên $C'K$ vuông góc với mặt phẳng $(ABB'A')$ và $\widehat{C'BK}=60^0$. Ta có

$$BK=\sqrt{B'K^2+BB'^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=\frac{a\sqrt5}{2}\Rightarrow C'K=\frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Vậy $S_{C'A'B'}=\frac{1}{2}C'K.A'B'=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{15}}{2}.a=\frac{a^2\sqrt{15}}{4}.$

Do đó $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

Gọi S là giao điểm NP và BB', qua S vẽ đường thẳng song song với BK cắt AB tại T, AM tại R và cắt $A'B'$ tại U; gọi I là giao điểm AM và $A'B'$.

Hai tam giác ABM và $BB'K$ bằng nhau nên

$\widehat{BAM}=\widehat{KBB'}\Rightarrow AM\perp BK\Rightarrow AM\perp(BC'K)$

$\Rightarrow AM\perp(NSR)\Rightarrow d(AM,NP)=d(R,NS).$

Ta có $\frac{BT}{B'U}=\frac{SB}{SB'}=\frac{1}{3}\Rightarrow BT=KU=\frac{1}{4}BA$

$$\Rightarrow PT=\frac{1}{2}C'K=\frac{a\sqrt{15}}{4},$$

$\frac{RT}{RU}=\frac{TA}{UI}=\frac{TA}{B'I+UB'}=\frac{3}{7}\Rightarrow\frac{SR}{ST}=1+\frac{TR}{ST}=\frac{8}{5};$

$TS=\frac{1}{2}BK=\frac{a\sqrt5}{4}$. Kẻ $TH\perp NS$, ta có

$TP\,//\,C'K\Rightarrow TP\perp(ABA'B')\Rightarrow TP\perp ST$

$\Rightarrow\frac{1}{TH^2}=\frac{1}{TP^2}+\frac{1}{TS^2}\Rightarrow d(T,SN)=TH=\frac{a\sqrt{15}}{8}$

$\Rightarrow d(R,NS)=\frac{SR}{ST}d(T,NS)=\frac{a\sqrt{15}}{5}.$

Câu 7. Gọi d là đường thẳng qua M, song song với AB; $N=d\cap BD$, H là trung điểm MN, I là tâm hình chữ nhật $ABCD$ và $P=IH\cap AB$. Tọa độ điểm B thỏa mãn hệ

$\begin{cases}x-y-1=0\\x-3y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}\Rightarrow B(4;3)$. Ta có

PT $MN: x-3y+15=0\Rightarrow N(9;8)$, suy ra tọa độ H là $H(0;5)\Rightarrow$ PT $HI: 3x+y-5=0\Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Do B, D đối xứng nhau qua I nên $D(-1;-2)$. Ta có $P(1;2)$, vì P là trung điểm của AB nên $A(-2;1)$ suy ra $C(5;0)$.

Câu 8. ĐK $x+y\geq 0,\ y\geq 0$.

TH1. $y=0$: không thỏa mãn hệ đã cho.

TH2. $y>0$: biến đổi phương trình đầu thành

$$x^2+xy-2y^2+\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(x+2y)+\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(x+2y+\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}\right)=0\Rightarrow x=y.$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 8

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (2 *điểm*). Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng

$$d: x+7y=0.$$

Câu 2 (1 *điểm*). a) Giải phương trình

$$\sin x+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2.$$

b) Cho số phức $z=3-2i$. Tính mô đun của số phức

$$w=\frac{z^2}{\bar{z}+z}.$$

Câu 3 (0,5*điểm*). Giải phương trình $2^{x-1}+2^{1-x}=\dfrac{5}{2}$.

Câu 4 (1 *điểm*). Giải bất phương trình

$$2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}\le x^2-2x-1.$$

Câu 5 (1 *điểm*). Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}}$.

Câu 6 (1 *điểm*). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC, góc giữa mặt bên $(ABB'A')$ và mặt đáy bằng 60°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC'.

Câu 7 (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $M(-3;1)$ là trung điểm của AB, điểm E thuộc đoạn thẳng BC sao cho $EC=5EB$. Biết rằng $DE: 23x+9y-10=0$ và đỉnh D có hoành độ dương. Tìm tọa độ đỉnh D.

Câu 8 (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x+2y+z-5=0$ và đường thẳng Δ: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm A thuộc đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng 6.

Câu 9 (0,5 *điểm*). Cho tập hợp $E=\{1,2,3,4,5\}$. Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau thuộc E. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc M. Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

Câu 10 (1 *điểm*). Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{a}{b^4+16}+\dfrac{b}{c^4+16}+\dfrac{c}{a^4+16}$.

PHAN VĂN THÁI
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An)

$$x^3-5x^2+14x-4=6\sqrt[3]{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=(8x^2-8x+8)+3\sqrt[3]{8x^2-8x+8}\ (*)$$

Đặt $f(t)=t^3+3t,\ t\in\mathbb{R}$, ta có

$$f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}.$$

PT (*) có dạng $f(x+1)=f\left(\sqrt[3]{8x^2-8x+8}\right)$

$$\Rightarrow x+1=\sqrt[3]{8x^2-8x+8}\Rightarrow x=1.$$

Hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Câu 9. Vì $b=\dfrac{a+c}{1-ac}$, nên $\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{2}{b^2+1}$

$$=2\left[\frac{1}{a^2+1}-\frac{(1-ac)^2}{(a^2+1)(c^2+1)}\right]=\frac{2c\left[c(1-a^2)+2a\right]}{(a^2+1)(c^2+1)}$$

$$\le\frac{2c\sqrt{(1-a^2)^2+4a^2}}{(a^2+1)\sqrt{c^2+1}}=\frac{2c}{\sqrt{c^2+1}}.\ \text{Đặt } t=\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\Rightarrow\frac{1}{t^2}=1+\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow c^2=\frac{t^2}{1-t^2}\ (0<t<1).\ \text{Khi đó } P\le-2t+\frac{3t}{\dfrac{t^2}{1-t^2}+1}$$

$$=-2t+3t(1-t^2)=-3t^3+t=f(t).$$

Khảo sát hàm số $f(t)$, suy ra $\max P=\max f(t)$ $=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$, đạt được khi

$$t=\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}=\frac{1}{3}, c=\frac{1-a^2}{2a}=\frac{b-a}{1+ab}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{2}}{4}, a=\frac{\sqrt{2}}{2}, b=\sqrt{2}.$$

Ngoài cách giải trên học sinh có thể giải câu 6 theo cách sử dụng phương pháp tọa độ như sau

Vẽ tia Kt vuông góc với $A'B'$, với chiều của tia cùng chiều với $\overrightarrow{A'A}$. Chọn hệ trục tọa độ $\left(K;\overrightarrow{KC'},\overrightarrow{KA'},\overrightarrow{Kt}\right)$ thì

$$B'\left(0;-\frac{a}{2};0\right), B\left(0;-\frac{a}{2};a\right), C\left(\frac{a\sqrt{15}}{2};0;a\right), C'\left(\frac{a\sqrt{15}}{2};0;0\right);$$

$$A\left(0;\frac{a}{2};a\right)\Rightarrow M\left(0;-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a\sqrt{15}}{2};0;\frac{a}{2}\right);\ P\left(\frac{a\sqrt{15}}{4};-\frac{a}{4};a\right)$$

suy ra $\overrightarrow{C'B}=\left(-\dfrac{a\sqrt{15}}{2};-\dfrac{a}{2};a\right)$; $\overrightarrow{AM}=\left(0;-a;-\dfrac{a}{2}\right)$;

$\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{a\sqrt{15}}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$. Vậy

$$d(AM,NP)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{C'B}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{C'B}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ VÀ MỘT VÀI ÁP DỤNG

TRẦN HỮU NAM (*Hà Nội*)

Trong bài viết này chúng ta sẽ đưa ra một số áp dụng của BĐT hoán vị, một bất đẳng thức đơn giản nhưng đẹp, dùng nó ta có thể chứng minh được nhiều bất đẳng thức khác.

Xét hai dãy (bộ) các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Nếu ta lấy tất cả các hoán vị $(x_1, x_2, ..., x_n)$ của $(b_1, b_2, ..., b_n)$ thì có tất cả $n! = 1.2...n$ tổng có dạng:

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n. \quad (*)$$

Câu hỏi được đặt ra là: *Trong các tổng có dạng (*), tổng nào là lớn nhất, tổng nào là nhỏ nhất ?*

Trước khi trả lời câu hỏi này chúng ta sẽ cần một vài khái niệm.

1. KHÁI NIỆM. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là hai dãy các số thực. Hai dãy được gọi là *sắp cùng thứ tự* nếu cả hai dãy cùng tăng (tức là $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$) hoặc cùng giảm (tức là $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ và $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$). Hai dãy được gọi *sắp ngược thứ tự* nếu một dãy tăng và một dãy giảm.

Thí dụ. a) $-2; 3; 5$ và $1; 2; 4$ là hai dãy sắp cùng thứ tự, trong khi $-2; 3; 5$ và $4; 2; 1$ là hai dãy sắp ngược thứ tự.

b) Nếu $0 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ thì $a_1, a_2, ..., a_n$ và $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}$ là hai dãy sắp ngược thứ tự, trong khi $a_1, a_2, ..., a_n$ và $\frac{1}{a_{n-1}+a_n}, ..., \frac{1}{a_2+a_3}, \frac{1}{a_1+a_2}$ là hai dãy sắp cùng thứ tự.

c) Nếu $0 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và m là số thực dương thì $a_1, a_2, ..., a_n$ và $a_1^m, a_2^m, ..., a_n^m$ là hai dãy sắp cùng thứ tự, trong khi $a_1, a_2, ..., a_n$ và $\frac{1}{a_1^m}, \frac{1}{a_2^m}, ..., \frac{1}{a_n^m}$ là hai dãy sắp ngược thứ tự.

d) Nếu $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và k là số lẻ thì $a_1, a_2, ..., a_n$ và $a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k$ là hai dãy sắp cùng thứ tự.

2. BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là hai dãy các số thực và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$.

• Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp cùng thứ tự thì

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \quad (I)$$

• Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp ngược thứ tự thì

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \le a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \quad (II)$$

Dấu "=" trong (I) và (II) xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = ... = b_n$ hoặc $(x_1, x_2, ... x_n) = (b_1, b_2, ... b_n)$.

Chứng minh. Xét hai dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ cùng tăng và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Giả sử $x_1 \ge x_2$.

Đặt $S = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n$ và

$$S' = a_1x_2 + a_2x_1 + a_3x_3 + ... + a_nx_n$$

(S' nhận được từ S bằng cách đổi vị trí của x_1 và x_2). Ta có:

$$\begin{aligned} S' - S &= a_1x_2 - a_1x_1 + a_2x_1 - a_2x_2 \\ &= a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_1 - x_2) \\ &= (x_2 - x_1)(a_1 - a_2) \ge 0. \end{aligned}$$

Do đó $S' \ge S$. Như vậy khi đổi vị trí của x_1 và x_2 thì giá trị của S chỉ có thể tăng lên. Do đó nếu chúng ta đổi chỗ tất cả các cặp $(x_i; x_j)$ với $x_i \ge x_j, i < j$ thì tổng chỉ có thể tăng lên. Tổng đạt giá trị lớn nhất khi $(x_1, x_2, ..., x_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$

tức là khi $S = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$.

Khi $a_1 = ... = a_n$ *hoặc* $b_1 = ... = b_n$ thì dấu đẳng thức cũng xảy ra. Lập luận tương tự khi $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ cùng giảm, vậy (I) được chứng minh. (II) được chứng minh tương tự (I).

Từ BĐT hoán vị ta có hai hệ quả sau:

Hệ quả 1. *Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là hoán vị của $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thì*
$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n.$$

Hệ quả 2. *Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là hoán vị của $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thì* $\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + ... + \frac{a_n}{x_n} \geq n$.

Nhận xét. 1) Câu hỏi ở phần đầu: *Khi nào tổng dạng (*) lớn nhất, nhỏ nhất* đã được trả lời qua BĐT hoán vị. Với $n = 3$ thì hệ quả 1 trở thành BĐT quen thuộc:
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$
Hệ quả 2 là một bài toán trong cuộc thi Kuschák của Hungary năm 1935 và là bài 6.2.9 -10.4 trong cuộc thi Moscow Olympiad của Liên Xô năm 1940.

2) Trong chứng minh BĐT và khi sử dụng BĐT hoán vị ta hay dùng một kỹ thuật sau:

Nếu $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ là biểu thức đối xứng đối với $a_1, a_2, ..., a_n$ (tức là $f(a_1, a_2, ..., a_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ với mọi hoán vị $(x_1, x_2, ..., x_n)$ của $(a_1, a_2, ..., a_n)$) thì để chứng minh $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 0$ ta luôn có thể giả thiết rằng $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ hoặc $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Lý do có thể làm được điều này là vì $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ không đổi với mọi hoán vị của $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Sau đây chúng ta sẽ nêu một số thí dụ minh họa áp dụng BĐT hoán vị.

3. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*
$$A = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Lời giải. Với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x > 0, \cos x > 0$.

BĐT đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$ nên ta có thể giả sử $0 < \sin x \leq \cos x$. Khi đó hai dãy $\frac{1}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}$ và $\sin^3 x, \cos^3 x$ sắp ngược thứ tự nên theo (II) ta có:
$$\frac{\sin^3 x}{\sin x} + \frac{\cos^3 x}{\cos x} \leq \frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow 1 = \sin^2 x + \cos^2 x \leq A.$$

Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $A = 1$. Vậy $\min A = 1$. □

Thí dụ 2. *Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng* $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với
$$\frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{a^3c^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

BĐT đối xứng đối với a, b, c nên có thể giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Khi đó hai dãy a^5, b^5, c^5 và $\frac{1}{b^3c^3}, \frac{1}{a^3c^3}, \frac{1}{a^3b^3}$ sắp cùng thứ tự nên theo (I) ta có:
$$\frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{a^3c^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{a^5}{a^3c^3} + \frac{b^5}{a^3b^3} + \frac{c^5}{b^3c^3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{a^3c^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \quad (1)$$

Hai dãy a^2, b^2, c^2 và $\frac{1}{a^3}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{c^3}$ sắp ngược thứ tự nên theo (II) ta có:
$$\frac{a^2}{a^3} + \frac{b^2}{b^3} + \frac{c^2}{c^3} \leq \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BĐT cần chứng minh. □

Thí dụ 3. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*
$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$
$$\Leftrightarrow a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) + c(c^2 + ab) \geq a(b^2 + ca) + b(a^2 + bc) + c(ac + bc) \quad (1)$$

Do BĐT là đối xứng nên có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó $a^2 + bc \geq b^2 + ca$. Áp dụng (I) cho hai dãy sắp cùng thứ tự a, b và $a^2 + bc$, $b^2 + ca$ ta có:

$$a(a^2+bc)+b(b^2+ca)\geq a(b^2+ca)+b(a^2+bc)\ (2)$$

Lại áp dụng (I) cho hai dãy sắp cùng thứ tự b, c và a, c ta có: $ba+c^2\geq bc+ac$

$\Rightarrow c\left(c^2+ab\right)\geq c\left(ac+bc\right)$ (3). Cộng từng vế (2) và (3) suy ra (1) đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. ❐

Nhận xét. 1) Xét cách giải khác cho thí dụ 3. Ta có:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$$

$$\Leftrightarrow a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\leq 3abc\ (4)$$

Theo định lý côsin trong tam giác ABC ta có:

$$(4)\Leftrightarrow 2abc\cos A+2abc\cos B+2abc\cos C\leq 3abc$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\leq \frac{3}{2}\qquad (5)$$

Dễ thấy (5) luôn đúng, suy ra điều phải chứng minh.

2) Kết quả trong thí dụ 2 vẫn đúng khi a, b, c dương. Tuy nhiên khi a, b, c dương thì ta không thể vận dụng cách dùng hệ thức lượng trong tam giác như ở nhận xét 1 được. Lúc này phương pháp dùng BĐT hoán vị cho thấy rõ hiệu quả của nó.

Thí dụ 4 *(IMO 1975). Xét hai dãy các số thực $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n$ và $y_1\geq y_2\geq\ldots\geq y_n$. Gọi $z_1,z_2,\ldots,z_n$ là một hoán vị của $y_1,y_2,\ldots,y_n$. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$.*

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\leq\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i+\sum_{i=1}^{n}z_i^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\geq\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\ (*)\qquad \left(\text{do }\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\sum_{i=1}^{n}z_i^2\right).$$

Nhưng theo (I) ta có ngay BĐT (*). ❐

Thí dụ 5 *(IMO 1978). Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là n số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng*

$$a_1+\frac{a_2}{4}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}\geq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Lời giải. Gọi $b_1,b_2,\ldots,b_n$ là một hoán vị của $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sao cho $b_1<b_2<\ldots<b_n$. Theo giả thiết $a_1,a_2,\ldots,a_n$ nguyên dương phân biệt nên $b_i\geq i$ (1), $\forall i=1,2,\ldots,n$. Do $1>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{n^2}$ nên theo (II) ta có:

$$a_1+\frac{a_2}{4}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}\geq b_1+\frac{b_2}{4}+\ldots+\frac{b_n}{n^2}\overset{do\,(1)}{\geq}1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Thí dụ 6. *Cho A,B,C là ba góc của một tam giác (đo bằng radian) với các cạnh tương ứng a,b,c; p là nửa chu vi. Chứng minh rằng*

$$\frac{A}{p-a}+\frac{B}{p-b}+\frac{C}{p-c}\geq\frac{3\pi}{p}\qquad (1)$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử:

$$A\leq B\leq C\Rightarrow a\leq b\leq c\Rightarrow\frac{1}{p-a}\leq\frac{1}{p-b}\leq\frac{1}{p-c}.$$

Lần lượt áp dụng *BĐT Chebyshev* (thí dụ 10) và *BĐT Cauchy*, ta có :

$$\text{VT}(1)\geq\frac{A+B+C}{3}.\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$$

$$=\frac{\pi}{3p}(p-a+p-b+p-c)\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$$

$$\geq\frac{\pi}{3p}.3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$=\frac{3\pi}{p}.\ ❐$$

Thí dụ 7 *(IMO 1995). Cho a,b,c là các số dương và $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}\qquad (1)$$

Lời giải. Đặt $x=bc=\frac{1}{a},y=ca=\frac{1}{b},z=ab=\frac{1}{c}$.

Khi đó $x,y,z>0$; $xyz=\frac{1}{abc}=1$ và (1) trở thành:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}\qquad (2)$$

BĐT (2) đối xứng đối với x, y, z nên có thể giả sử: $x\geq y\geq z>0$. Suy ra $x^2\geq y^2\geq z^2$ và $\frac{1}{y+z}\geq\frac{1}{z+x}\geq\frac{1}{x+y}$. Theo (I) ta có:

$$\text{VT}(2)\geq\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$$

$$\text{VT}(2)\geq\frac{x^2}{x+z}+\frac{y^2}{y+x}+\frac{z^2}{z+y}.$$

Cộng từng vế hai BĐT trên và sử dụng BĐT $m^2+n^2\geq\frac{(m+n)^2}{2}$, ta được:

$$\text{VT}(2)\geq\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\right)$$

$$\ge \frac{1}{2}\left(\frac{(x+y)^2}{2(x+y)}+\frac{(y+z)^2}{2(y+z)}+\frac{(z+x)^2}{2(z+x)}\right)$$

$$=\frac{x+y+z}{2} \overset{\text{BĐT Cauchy}}{\ge} \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}. \square$$

Thí dụ 8 *(BĐT Nesbitt). Chứng minh rằng nếu a,b,c là ba số dương thì*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Lời giải. BĐT đối xứng theo a, b, c nên có thể giả sử $0<a\le b\le c$. Khi đó a, b, c và $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ là hai dãy sắp cùng thứ tự nên theo (I) ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}.$$

Cộng từng vế 2 BĐT trên ta được

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}\right)=\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. $\square$

Thí dụ 9 *(BĐT hoán vị dạng lũy thừa). Cho $a\ge1, b\ge1, c\ge1$. Chứng minh rằng*

$$a^ab^bc^c\ge a^bb^cc^a \qquad \text{(III)}$$

Lời giải. *Cách 1.* BĐT không đổi qua phép hoán vị vòng quanh nên có thể giả thiết: $a=\max\{a,b,c\}$. Nếu $a\ge b\ge c\ge1$, ta có:

$$\text{(III)}\Leftrightarrow a^{a-b}b^{b-c}\ge c^{a-b}c^{b-c} \qquad (1)$$

BĐT (1) luôn đúng do $a^{a-b}\ge c^{a-b}, b^{b-c}\ge c^{b-c}$.

Bây giờ xét $a\ge c\ge b\ge1$. Ta có:

$$\text{(III)}\Leftrightarrow a^{a-c}a^{c-b}\ge c^{a-c}b^{c-b} \qquad (2)$$

BĐT (2) luôn đúng do $a^{a-c}\ge c^{a-c}, a^{c-b}\ge b^{c-b}$.

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có (III).

Cách 2. BĐT (III) tương đương với

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\ge b\ln a+c\ln b+a\ln c \quad (*)$$

Nếu $a\ge b\ge c\ge1$ thì (a,b,c) và $(\ln a,\ln b,\ln c)$ là hai dãy sắp cùng thứ tự; Nếu $a\ge c\ge b\ge1$ thì (a,c,b) và $(\ln a,\ln c,\ln b)$ là hai dãy sắp cùng thứ tự. Trong cả hai trường hợp theo (I) ta có (*).$\square$

Nhận xét. BĐT (III) vẫn đúng khi a, b, c dương và thí dụ 9 có thể được mở rộng như sau:

Với các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$, ta luôn có:

$$a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}\ge a_1^{a_2}a_2^{a_3}...a_{n-1}^{a_n}a_n^{a_1}.$$

Sử dụng BĐT hoán vị ta có thể chứng minh nhiều BĐT cổ điển khác.

Thí dụ 10 *(BĐT Chebyshev). Cho hai dãy các số thực $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$. Chứng minh rằng :* a) *Nếu hai dãy sắp cùng thứ tự thì*

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{n}\ge\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}.$$

b) *Nếu hai dãy sắp ngược thứ tự thì*

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{n}\le\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}.$$

Lời giải. a) Theo (I) ta có:

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$$

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\ge a_1b_2+a_2b_3+...+a_nb_1$$

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\ge a_1b_3+a_2b_4+...+a_nb_2$$

.....

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\ge a_1b_n+a_2b_1+...+a_nb_{n-1}$$

Cộng từng vế các BĐT trên ta được:

$$n(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)\ge (a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n),$$

ta có BĐT cần chứng minh.

BĐT ở câu b) được chứng minh tương tự. $\square$

Nhận xét. Dấu "=" trong BĐT Chebyshev xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$ hoặc $b_1=b_2=...=b_n$.

Thí dụ 11 *(BĐT Cauchy, còn gọi là BĐT trung bình cộng – trung bình nhân). Chứng minh rằng nếu $a_1,a_2,...,a_n$ là các số không âm thì*

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Lời giải. a) Nếu ít nhất một trong các số $a_1,a_2,...,a_n$ bằng 0 thì BĐT hiển nhiên đúng.

Nếu các số a_i $(i=1,...,n)$ đều dương, đặt

$$M=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n};\ x_1=\frac{a_1}{M}, x_2=\frac{a_1a_2}{M^2}, ..., x_n=\frac{a_1a_2...a_n}{M^n}.$$

Khi đó theo hệ quả 2 ta có:

$$\frac{x_1}{x_n}+\frac{x_2}{x_1}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n-1}}\geq n\Leftrightarrow\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{M}\geq n$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1=\ldots=x_n\Leftrightarrow a_1=\ldots=a_n$. ❒

Thí dụ 12 (*BĐT Bunyakovsky*). *Chứng minh rằng nếu $a_1,a_2,\ldots,a_n$ và $b_1,b_2,\ldots,b_n$ là 2n số thực thì*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$$
$$\leq(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}: a_i=tb_i$ hoặc $b_i=ta_i$.

Lời giải. Nếu $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$ hoặc $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$ thì BĐT hiển nhiên đúng.

Nếu tồn tại $a_i\neq0$ và $b_j\neq0$, ta đặt

$$M=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2},\ N=\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2};$$

$$x_i=\frac{a_i}{M},\ x_{n+i}=\frac{b_i}{N}\ (i=1,\ldots,n).$$

Khi đó theo hệ quả 1 ta có:

$$2=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{M^2}+\frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{N^2}$$
$$=x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2+x_{n+1}^2+\ldots+x_{2n}^2$$
$$\geq x_1x_{n+1}+\ldots+x_nx_{2n}+x_{n+1}x_1+\ldots+x_{2n}x_n$$
$$=\frac{2(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)}{MN}.$$

Suy ra BĐT cần chứng minh. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_i=x_{n+i}\Leftrightarrow a_iN=b_iM\ (i=1,\ldots,n)$. ❒

Thí dụ 13. (*BĐT trung bình cộng – trung bình bình phương) Chứng minh rằng nếu $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số thực thì*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}.$$

Lời giải. Theo hệ quả 1 ta có:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$$
$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1$$
$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq a_1a_3+a_2a_4+\ldots+a_na_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq a_1a_n+a_2a_1+\ldots+a_na_{n-1}.$$

Cộng từng vế các BĐT trên ta được:

$$n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\geq(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2.$$

Suy ra BĐT cần chứng minh. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n$. ❒

Thí dụ 14 (*BĐT TB nhân – TB điều hòa*). *Chứng minh rằng nếu $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số dương thì*

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Lời giải. Đặt $N=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n};x_1=\frac{a_1}{N},x_2=\frac{a_1a_2}{N^2}$, $\ldots,x_n=\frac{a_1a_2\ldots a_n}{N^n}$. Theo hệ quả 2 ta có:

$$n\leq\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1}=\frac{N}{a_1}+\frac{N}{a_2}+\ldots+\frac{N}{a_n}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$x_1=x_2=\ldots=x_n\Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n.$$ ❒

Nhận xét. Kí hiệu A_1,A_2,A_3,A_4 lần lượt là trung bình điều hòa, trung bình nhân, trung bình cộng và trung bình bình phương của các số dương $a_1,a_2,\ldots,a_n$ thì từ các thí dụ 11, 13, 14 ta có:

$$A_1\leq A_2\leq A_3\leq A_4.$$

Qua các thí dụ trên, ta đã thấy tính hiệu quả của BĐT hoán vị trong chứng minh BĐT, nhiều BĐT khó nhưng đã được chứng minh khá đơn giản nhờ BĐT hoán vị. Để luyện tập, các bạn hãy giải các bài tập sau.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng nếu $a>0,\ b>0$ thì

a) $2(a^5+b^5)\geq(a^3+b^3)(a^2+b^2)$.

b) $a^9+b^9\geq a^2b^2(a^5+b^5)$.

c) $a^n+b^n\leq2^{n-1}(a^n+b^n),\ n\in\mathbb{N}^*$.

2. Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số dương thì a) $ab+bc+ca\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$.

b) $\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}$.

4. (*IMO 1983*) Biết rằng a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq0.$$

5. (*USA MO* 1974) Chứng minh rằng nếu $a>0$, $b>0,\ c>0,\ n\in\mathbb{Z}^+$ thì $a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

Tài liệu tham khảo

1. Dragos Hrimiuc. *The Rearrangement Inequality* - π in the sky. PISM, issue 2, page 21 – 23, 2000.
2. Phan Huy Khải và Trần Hữu Nam. *Bất đẳng thức và ứng dụng*. NXBGD Việt Nam, 2009.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/455 (Lớp 6). Tìm số tự nhiên có nhiều hơn 3 chữ số, biết rằng nếu ta bỏ đi 3 chữ số cuối cùng của số đó thì ta được một số mới mà lập phương của nó bằng chính số cần tìm.

VŨ HỒNG LƯỢNG
(GV THPT Yên Dương, Tam Đảo, Vĩnh Phúc)

Bài T2/455 (Lớp 7). Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn điều kiện $a^{2015} - a - 1 = 0$ và $b^{4030} - b - 3a = 0$. Hãy so sánh a và b?

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T3/455. Giải phương trình:

$$x+y+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

NGUYỄN DUY THÁI
(GV THPT Nam Hồng, Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bài T4/455. Trên đường tròn tâm I cho trước, lấy hai điểm B, C cố định và điểm A chuyển động trên đường tròn sao cho tam giác ABC nhọn. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $MA = 3MC$, H là hình chiếu vuông góc của M trên cạnh AB. Chứng minh rằng điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T5/455. Tìm các nguyên tố x, y thỏa mãn

$$(x^2+2)^2 = 2y^4 + 11y^2 + x^2y^2 + 9.$$

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/454. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+y^3=4y^2-5y+3x+4 \\ 2y^3+z^3=4z^2-5z+6y+6 \\ 3z^3+x^3=4y^2-5x+9z+8 \end{cases}.$$

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T7/454. Cho tam giác ABC. Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường các trung tuyến lần lượt ứng với các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 2\sqrt{3}\left(m_a+m_b+m_c\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

DƯƠNG VĂN SƠN
(GV THPT Hà Huy Tập, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T8/455. Xét tam giác nhọn ABC có các góc là A, B, C. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{\tan^2 A+\tan^2 B}{\tan^4 A+\tan^4 B}+\frac{\tan^2 B+\tan^2 C}{\tan^4 B+\tan^4 C}+\frac{\tan^2 C+\tan^2 A}{\tan^4 C+\tan^4 A}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/455. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển

$$(1+x)(1+2x)(1+4x)\ldots(1+2^{2013}x)$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T10/455. Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a_1+\frac{a_2^2}{2}+...+\frac{a_n^n}{n}$.

LÊ VIẾT ÂN *(Thừa Thiên - Huế)*

Bài T11/455. Tìm số thực k lớn nhất thỏa mãn điều kiện: Với 3 số thực a, b, c sao cho $|a|+|b|+|c|<k$ thì hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x^{16}+ax^9+bx^4+cx+15\leq 0 \\ \left|x^{16}-x^9+1\right|+\left|x^4-x+1\right|\leq 2 \end{cases}.$$

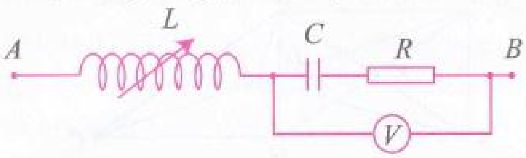
TRẦN TUẤN ANH
(GV Khoa Toán Tin, ĐHKHTN, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T12/454. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AD. Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. Trên đoạn thẳng AD lấy điểm K sao cho $\widehat{BKC}=90^\circ$. G là trọng tâm tam giác ABC, KG cắt OT tại L. Các điểm P, Q thuộc đoạn BC sao cho $LP // OB$, $LQ // OC$. Các điểm E, F lần lượt thuộc đoạn CA, AB sao cho QE, PF cùng vuông góc với BC. Gọi (T) là đường tròn tâm T đi qua B, C. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tiếp xúc với (T).

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/455. Cho đoạn mạch *RLC* như hình dưới; $u_{AB} = 100\sqrt{5}\cos(100\pi t)$ (V).

Biết vôn kế có điện trở vô cùng lớn, tụ điện có dung kháng lớn gấp 3 lần điện trở *R*.



a) Khi độ tự cảm có giá trị $L = L_1$ thì vôn kế chỉ giá trị U_1 và dòng điện trong mạch sớm pha φ_1 so với u_{AB}. Khi $L = L_2 = 2L_1$ thì vôn kế chỉ $U_2 = \frac{1}{2}U_1$ và dòng điện trong mạch trễ pha φ_2 so với u_{AB}.

+ Tìm φ_1 và φ_2.

+ Viết biểu thức $u_V(t)$ của điện áp giữa hai đầu vôn kế ứng với trường hợp $L = L_2$.

b) Biết $R = 20\ \Omega$, cho *L* biến thiên. Tìm giá trị $L = L_3$ để số chỉ của vôn kế đạt cực đại. Viết biểu thức $u_V(t)$ của điện áp giữa hai đầu vôn kế khi đó.

c) Vẫn giữ $R = 20\ \Omega$. Tìm giá trị của *L* để U_L đạt cực đại. Viết biểu thức $u_L(t)$ khi đó.

VIỆT CƯỜNG (*Hà Nội*)

Bài L2/455. Một máy bay bay theo phương ngang với vận tốc v_0 = 320km/h, bất ngờ đổi hướng và bắt đầu chuyển động lên trên theo cung tròn nằm trên mặt phẳng thẳng đứng. Vận tốc của máy bay lúc này thay đổi theo độ cao theo qui luật $v^2 = v_0^2 - 2gy$ và tại điểm cao nhất bằng v_1 = 160km/h. Gia tốc của máy bay bằng bao nhiêu tại điểm cao nhất và tại điểm vận tốc của nó hướng thẳng đứng lên trên?

TRẦN KHÁNH HẢI (*Thừa Thiên - Huế*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/455 (For 6th Grade). Find a natural number with more than 3 digits knowing that if we delete its the last 3 digits, we will get a new number whose cube is exactly equal to that wanted number.

Problem T2/455 (For 7th Grade). Given two positive real numbers *a* and *b* satisfying the following conditions $a^{2015} - a - 1 = 0$ and $b^{4030} - b - 3a = 0$. Compare *a* and *b*.

Problem T3/455. Solve the equation

$$x+y+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Problem T4/455. On a circle centered at the point *I*, fix two points *B* and *C*. A point *A* varies on the circle such that the triangle *ABC* is always acute. On the side *AC*, choose *M* so that *MA* = 3*MC*. Let *H* be the perpendicular projection of *M* on the side *AB*. Prove that *H* always lies on a fixed circle.

Problem T5/455. Find all prime numbers *x* and *y* such that

$$(x^2+2)^2 = 2y^4 + 11y^2 + x^2y^2 + 9.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/454. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} x^3+y^3=4y^2-5y+3x+4 \\ 2y^3+z^3=4z^2-5z+6y+6. \\ 3z^3+x^3=4y^2-5x+9z+8 \end{cases}$$

Problem T7/454. Given a triangle *ABC*. Suppose that the length of the sides are given by *BC* = *a*, *CA* = *b*, *AB* = *c* and m_a, m_b, and m_c are the length of the corresponding medians. Prove that

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 2\sqrt{3}\left(m_a+m_b+m_c\right).$$

When does the equality happen?

(*Xem tiếp trang* 27)

Bài T1/451. *Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$. Tìm giá trị lớn nhất có thể của $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.*

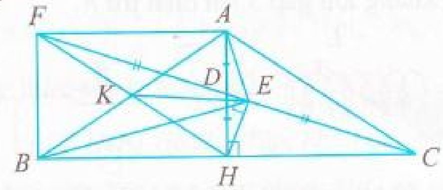
Lời giải. Do vai trò của *a, b, c* như nhau nên giả sử $a \ge b \ge c \ge 1$. Từ điều kiện của giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$ phải có $a \ge b \ge c \ge 2$. Từ đó $S =\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}<1$ nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$, suy ra $a \ge b \ge 3$. Do đó $S \le \frac{1}{a}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}<1$ nên $\frac{1}{a}<\frac{1}{6}$, suy ra $a \ge 7$. Từ đó $S \le \frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ hay $S \le \frac{41}{42}$, suy ra giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{41}{42}$, và giá trị này đạt được khi (*a*; *b*; *c*) bằng (7; 3; 2) hoặc các hoán vị của bộ ba số đó. ❒

Nhận xét. Một số bạn cho kết quả đúng nhưng lập luận không chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Chí Công*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Lê Minh Việt Anh*, 6A, THCS Vĩnh Yên; *Nguyễn Thị Thùy Linh*, *Nguyễn Văn Nam*, *Nguyễn Duy Toán*, *Lê Anh Quân*, *Nguyễn Khắc Tú*, 6A1, THCS Yên Lạc; *Trần Minh Huy*, *Đào Ngọc Hải Đăng*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Kim Oanh*, *Nguyễn Hải Ly*, *Phạm Yến Nhi*, *Phạm Ánh Nguyệt*, *Phạm Hiếu Ngân*, *Phan Lê Vân Nhi*, *Trần Như Quỳnh*, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Duy*, 6A4, THCS Lý Tự Trọng, TP. Kon Tum; **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

Bài T2/451. *Cho tam giác ABC cân tại A, AH là đường cao. Gọi D là trung điểm đoạn thẳng AH. Vẽ HE vuông góc với CD tại E. Chứng minh rằng $\widehat{AEB}=90^0$.*

Lời giải.



Ta có $BH = HC$. Trên tia đối của tia DC lấy điểm F sao cho $DF = DC$. Gọi K là giao điểm của AB và HF. Ta có $\Delta DAF = \Delta DHC$ (c.g.c) $\Rightarrow AF = HC, \widehat{DAF}=\widehat{DHC}=90^o$, do đó $AF \,//\, BH$, $AF = BH\ (= HC)$, suy ra $\Delta KAF = \Delta KBH$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = BK, KF = KH$; $\Delta BAH = \Delta FHA$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = HF$.

Xét ΔHEF vuông tại E ($HE \perp CD$), có EK là đường trung tuyến, nên $EK=\frac{HF}{2}\Rightarrow EK=\frac{AB}{2}$.

Xét ΔEAB có EK là đường trung tuyến ($AK = BK$) và $EK=\frac{AB}{2}$, do đó ΔEAB vuông tại E. Vậy $\widehat{AEB}=90^o$. ❒

Nhận xét. Bài toán tương đối dễ, tất cả các bạn tham gia đều có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả: **Phú Thọ:** *Lê Na*, 7A, Thị trấn II, Yên Lập; *Triệu Quang Mạnh*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, *Đinh Thị Quỳnh Châu*, *Hoàng Thị Bảo Ngọc*, *Thái Bá Bảo*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Lê Hoàng Duyên*, *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng; *Nguyễn Thị Kiều Mẫu*, THCS Nguyễn Kim Vang, *Mai Thị Thu Thảo*, 7C, THCS Thị trấn Sông Vệ, Tư Nghĩa. **Cần Thơ:** *Nguyễn Hoàng Nhi*, 7A6, THCS Thốt Nốt.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/451. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{y}+\dfrac{y^2-1}{x}=3 & (1) \\ x^2-y^2+\dfrac{12}{x}=9 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $xy \ne 0$. Ta có:

$$\text{PT}(2) \Leftrightarrow x^3 - xy^2 - 9x + 12 = 0 \qquad (3)$$

$$\text{PT}(1) \Leftrightarrow x^3 + y^3 - x - y - 3xy = 0$$

$\Leftrightarrow (x+y)^3-(x+y)-3xy(x+y+1)=0$
$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2-1\right]-3xy(x+y+1)=0$
$\Leftrightarrow (x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y)=0.$

• Với $x+y+1=0$ thì $y=-x-1$, thay vào (3) ta được $x^2+5x-6=0$. Từ đó tìm được nghiệm $(x; y)$ của HPT là $(1; -2)$ và $(-6; 5)$.

• Với $x^2+y^2-xy-x-y=0$, kết hợp với (3) ta được

$(x^3-xy^2-9x+12)-2(x^2+y^2-xy-x-y)=0$
$\Leftrightarrow (x+y-3)(x^2-xy+x-2y-4)=0.$

+ Nếu $x+y-3=0$ thì kết hợp với $x^2+y^2=xy+x+y$ ta tìm được nghiệm (x, y) của HPT là $(1; 2)$ và $(2; 1)$.

+ Nếu $x^2-xy+x-2y-4=0$ thì $2x=y^2+y+4$, thế vào $4(x^2+y^2-xy-x-y)=0$ suy ra $y^4+9y^2-6y+8=0 \Leftrightarrow y^4+(3y-1)^2+7=0$, PT vô nghiệm.

Vậy HPT có 4 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(1; -2)$ và $(-6; 5)$. ❒

➤ **Nhận xét.** Bài này cần có kĩ năng biến đổi đại số và phân tích đa thức thành nhân tử. Chỉ có ba bạn có lời giải đúng. **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Hà Tĩnh:** *Hoàng Khánh Trung*, 9A, THCS Hoa Liên, Nghi Xuân; **Phú Thọ:** *Nguyễn Nhật Đăng*, 9C, THCS Phong Châu, TX Phú Thọ.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/451. *Cho hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M bất kì. Từ M kẻ tới đường tròn $(O'; R')$ hai tiếp tuyến MC và MD (C, D là các tiếp điểm và D nằm trong $(O ; R)$. Các đường thẳng AD và AC lần lượt cắt $(O ; R)$ tại P và Q (P, Q khác A). Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên tia đối của tia AB.*

Lời giải.

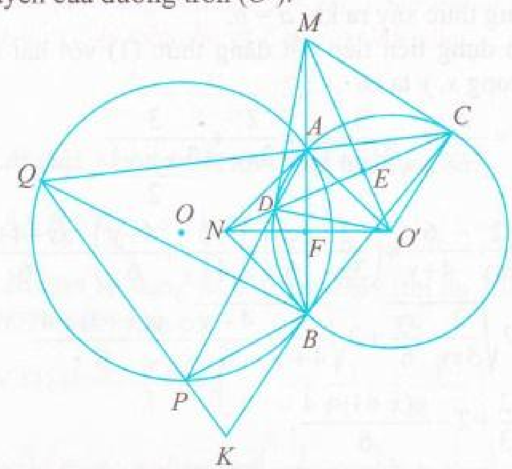
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD và AB; N là giao điểm của $O'F$ và CD.

Dễ thấy $\Delta O'EN \backsim \Delta O'FM$, suy ra

$$O'E.O'M = O'F.O'N.$$

Mặt khác, $O'E.O'M = O'D^2 = O'A^2$.

Suy ra $NA \perp O'A$, do đó NA, NB là các tiếp tuyến của đường tròn (O').



Gọi K là giao điểm của PQ với tiếp tuyến tại B của đường tròn (O). Ta có $\widehat{KQB}=\widehat{PAB}=\widehat{NCB}$;

$\widehat{QKB}=\widehat{QPB}-\widehat{PBK}=\widehat{BAC}-\widehat{KQB}$
$=\widehat{BDC}-\widehat{DBN}=\widehat{CNB}$,

suy ra $\Delta KQB \backsim \Delta NCB$, nên

$$\frac{BQ}{BC}=\frac{BK}{BN} \Rightarrow BK=\frac{BQ}{BC}.BN \quad (1)$$

Do $\Delta KQB \backsim \Delta NCB$, nên $\Delta DBC \backsim \Delta PBQ$. Để ý ΔPBQ và ΔDBC lần lượt nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$, suy ra

$$\frac{BQ}{BC}=\frac{R}{R'} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $BK=\frac{R}{R'}.BN$ (không đổi), do đó điểm K cố định.

Vậy đường thẳng PQ luôn đi qua điểm K cố định khi M thay đổi trên tia đối của tia AB. ❒

Nhận xét. Bài toán này có thể giải bằng cách sử dụng phép vị tự quay. Chỉ có hai bạn tham gia giải bài toán này là bạn *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hoá** và bạn *Hoàng Văn Hiếu*, 9E, THCS Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/451. *Tìm giá trị nhỏ nhất của* $A=\frac{2}{3xy}+\sqrt{\frac{3}{y+1}}$ *trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn* $x+y\le 3$.

Lời giải. Với hai số a, b không âm luôn có $a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$, suy ra

$$a+b\ge 2\sqrt{ab} \qquad (1)$$

đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức (1) với hai số dương x, y ta có

$$A=\frac{2}{3xy}+\frac{3}{\sqrt{3(y+1)}}\ge\frac{2}{3xy}+\frac{3}{\frac{3+y+1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3xy}+\frac{6}{4+y}=\left(\frac{2}{3xy}+\frac{xy}{6}\right)+\left(\frac{6}{4+y}+\frac{4+y}{6}\right)-\frac{xy+4+y}{6}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{2}{3xy}.\frac{xy}{6}}+2\sqrt{\frac{6}{4+y}.\frac{4+y}{6}}-\frac{y(x+1)+4}{6}$$

$$\ge\frac{2}{3}+2-\frac{y(x+1)+4}{6}.$$

Theo giả thiết $0<x+y\le 3$ nên $1<x+y+1\le 4$, suy ra $y(x+1)\le\left(\frac{x+y+1}{2}\right)^2\le\left(\frac{4}{2}\right)^2=4$. Do đó

$A\ge\frac{2}{3}+2-\frac{4+4}{6}=\frac{4}{3}$; $A=\frac{4}{3}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}y+1=3\\ \frac{2}{3xy}=\frac{xy}{6}\\ \frac{6}{4+y}=\frac{4+y}{6}\\ y=x+1\\ x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}.$$

Vậy $\min A=\frac{4}{3}$ khi $x=1, y=2$. ❐

Nhận xét.

1) Đây là bài toán cực trị hai biến có chứa căn thức mà vai trò của x, y không như nhau nên có ít bạn tham gia giải bài.

2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Nguyễn Thảo Chi, Nguyễn Hải Dương, Trần Thị Thu Huyền,* 8A3, *Nguyễn Tiến Long,* 9A1,THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên; **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Thanh*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/451. *Cho các số thực a, b, c với $a\ne 0$ thỏa mãn $145a+144b+144c=0$. Chứng minh rằng nghịch đảo của hai số chính phương khác 0 liên tiếp không thể cùng là nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$.*

Lời giải. Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm là $\frac{1}{n^2}$ và $\frac{1}{(n+1)^2}$ với n là số nguyên dương. Theo định lí Viète, ta có:

$$\begin{cases}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=-\frac{b}{a} & (1)\\ \frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{c}{a} & (2)\end{cases}$$

Từ (1) suy ra $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2+\frac{2}{n(n+1)}=-\frac{b}{a}$

$$\Rightarrow\frac{1}{n^2(n+1)^2}+\frac{2}{n(n+1)}=-\frac{b}{a}.$$

Kết hợp với (2), ta được

$$\frac{2}{n(n+1)}=-\frac{b+c}{a} \qquad (3)$$

Mặt khác từ giả thiết

$$145a+144b+144c=0\Rightarrow\frac{b+c}{a}=-\frac{145}{144} \qquad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $\frac{2}{n(n+1)}=\frac{145}{144}\Rightarrow n(n+1)=\frac{288}{145}$.

Điều này không thể xảy ra vì $n(n+1)\in\mathbb{N}$ còn $\frac{288}{145}\notin\mathbb{N}$. ❐

Vậy nghịch đảo của hai số chính phương khác 0 liên tiếp không thể cùng là nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Có thể suy luận như sau :

Từ (1), (2), (4) có

$$\left(\frac{1}{n^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+1)^2}-1\right)=\frac{b+c}{a}+1=-\frac{1}{144}.$$

Điều này không xảy ra vì với n nguyên dương thì

$$\left(\frac{1}{n^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+1)^2}-1\right)\ge 0>-\frac{1}{144}.$$

Bạn *Hồ Xuân Hùng*, 11T1, THPT Đô Lương I, Đà Sơn, Đô Lương, **Nghệ An** đưa ra bài toán tổng quát : *Cho các số thực a, b, c với $a\ne 0$ thỏa mãn $ka+b+c=0$ $(k>1)$. Chứng minh rằng phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ không thể có hai nghiệm cùng lớn hơn 1 hoặc cùng nhỏ hơn 1.*

Các bạn thử kiểm tra bài toán nhé!

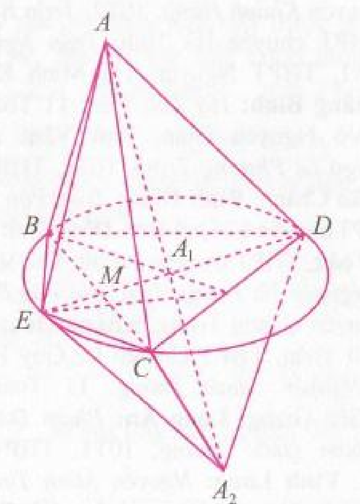
Các bạn sau đây có bài giải tốt:
Hà Nội: *Nguyễn Văn Tiến*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Ngọc Vinh B*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Trần Bảo Trung, Lê Phan Nhật Duy, Nguyễn Văn Thế, Nguyễn Duy Tuấn*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Cao Hữu Đạt, Phan Đức Tiến, Nguyễn Sỹ Mạnh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh, *Hồ Xuân Hùng*, 11T1, THPT Đô Lương I, Đà Sơn, Đô Lương; **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân, Dương Hồng Sơn, Chu Vũ Nguyên Hạnh*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, *Chu Minh Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Đồng Nai:** *Cao Đình Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/451. *Xét tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu (S) cho trước. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 cắt (S) lần lượt tại các điểm A_2, B_2, C_2, D_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{AA_2^2+BB_2^2+CC_2^2+DD_2^2}{AB.CD+AC.BD+AD.BC}.$$

Lời giải.



Gọi E là giao điểm của DA_1 với mặt cầu (S), M là trung điểm của BC. Vì ADA_2E là tứ giác nội tiếp, nên

$$AA_1.A_1A_2=A_1D.A_1E=\frac{2}{3}DM\left(A_1M+ME\right)$$

$$=\frac{2}{3}DM\left(\frac{1}{3}DM+ME\right)=\frac{2}{9}DM^2+\frac{2}{3}DM.ME.$$

Áp dụng công thức đường trung tuyến cho ΔBCD ta có $DM^2=\frac{DB^2+DC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}$.

Mặt khác, do $BECD$ là tứ giác nội tiếp nên $MD.ME=MB.MC=\frac{BC^2}{4}$. Suy ra

$$AA_1.A_1A_2=\frac{2}{9}\left(\frac{DB^2+DC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}\right)+\frac{BC^2}{6}$$

$$=\frac{DB^2+DC^2+BC^2}{9} \quad (1)$$

Từ giả thiết A_1 là trọng tâm ΔBCD, theo *công thức Leibnitz* ta thấy

$$AA_1^2=\frac{AB^2+AC^2+AD^2}{3}-\frac{BC^2+CD^2+DB^2}{9} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thu được

$$AA_1^2=\frac{AB^2+AC^2+AD^2}{3}-AA_1.A_1A_2 \text{ suy ra}$$

$$AA_1\left(AA_1+A_1A_2\right)=\frac{AB^2+AC^2+AD^2}{3}$$

$$\Rightarrow AA_1.AA_2=\frac{AB^2+AC^2+AD^2}{3} \quad (3)$$

Tương tự ta cũng có

$$BB_1.BB_2=\frac{BA^2+BC^2+BD^2}{3} \quad (4)$$

$$CC_1.CC_2=\frac{CA^2+CB^2+CD^2}{3} \quad (5)$$

$$DD_1.DD_2=\frac{DA^2+DB^2+DC^2}{3} \quad (6)$$

Từ (3), (4), (5), (6) suy ra

$$AA_1.AA_2+BB_1.BB_2+CC_1.CC_2+DD_1.DD_2$$

$$=\frac{2\left(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+CD^2+BD^2\right)}{3} \quad (7)$$

Vẫn từ *công thức Leibnitz* ta thấy

$$AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2+DD_1^2$$

$$=\frac{4}{9}\left(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+CD^2+BD^2\right) \quad (8)$$

Sử dụng *bất đẳng thức Bunyakovsky* ta có

$$\left(AA_1.AA_2+BB_1.BB_2+CC_1.CC_2+DD_1.DD_2\right)^2$$

$$\le\left(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2+DD_1^2\right)$$

$$\times\left(AA_2^2+BB_2^2+CC_2^2+DD_2^2\right) \quad (9)$$

Từ (7), (8) và (9) suy ra

$$AA_2^2+BB_2^2+CC_2^2+DD_2^2$$

$$\ge AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+CD^2+BD^2$$

$$\ge 2\left(AB.CD+AC.BD+AD.BC\right).$$

Từ đó $P \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ABCD$ là tứ diện gần đều. Tóm lại $\min P = 2$. □

Nhận xét. Đây là một bài toán tìm cực trị hình học có sử dụng đến hệ thức lượng trong đường tròn, tính chất trọng tâm tam giác, *công thức Leibnitz* và *bất đẳng thức Bunyakovsky*. Rất tiếc không có bạn nào tham gia gửi lời giải cho bài toán này.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/451. *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{a^2+nb^2}{a^3+nb^3}+\frac{b^2+nc^2}{b^3+nc^3}+\frac{c^2+na^2}{c^3+na^3}$ (1) *trong đó* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải. (*Của nhiều bạn*). Trước tiên ta chứng minh BĐT: $\frac{1}{(n+1)a}+\frac{n}{(n+1)b} \geq \frac{a^2+nb^2}{a^3+nb^3}$ (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \frac{b+na}{(n+1)ab} \geq \frac{a^2+nb^2}{a^3+nb^3}$

$\Leftrightarrow a^3b+na^4+nb^4+n^2ab^3 \geq na^3b+a^3b+n^2ab^3+nab^3$

$\Leftrightarrow na^4-na^3b+nb^4-nab^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow n(a-b)^2(a^2+ab+b^2) \geq 0$ (3)

BĐT (3) đúng với mọi a, b dương và $n \geq 2$, nên (2) đúng. Tương tự ta có:

$$\frac{1}{(n+1)b}+\frac{n}{(n+1)c} \geq \frac{b^2+nc^2}{b^3+nc^3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{(n+1)c}+\frac{n}{(n+1)a} \geq \frac{c^2+na^2}{c^3+na^3} \quad (5)$$

Cộng các BĐT (2), (4), (5) ta được BĐT (1)

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Nhận xét. 1) Có thể giải bài này bằng cách dùng *BĐT Bunyakovsky* và *BĐT Schwarz* như sau: Áp dụng *BĐT Bunyakovsky* ta có:

$$(a^2+nb^2)^2=\left(a^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}.n^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq (a^3+nb^3)(a+nb),$$

$$(a+nb)^2=\left(a.1+n^{\frac{1}{2}}b.n^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq (a^2+nb^2)(1+n).$$

Suy ra: $\frac{a^2+nb^2}{a^3+nb^3} \leq \frac{a+nb}{a^2+nb^2} \leq \frac{n+1}{a+nb}$.

Áp dụng *BĐT Schwarz* ta có:

$$\frac{1}{a}+\underbrace{\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}}_{n \text{ số } \frac{1}{b}} \geq \frac{(n+1)^2}{a+nb} \Leftrightarrow \frac{n+1}{a+nb} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{a}+\frac{n}{b}\right).$$

Do đó: $\frac{a^2+nb^2}{a^3+nb^3} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{a}+\frac{n}{b}\right)$ (6)

Tương tự, ta được:

$\frac{b^2+nc^2}{b^3+nc^3} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{b}+\frac{n}{c}\right)$ (7), $\frac{c^2+na^2}{c^3+na^3} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{c}+\frac{n}{a}\right)$ (8)

Cộng (6), (7), (8) ta có (1).

2) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này và đều có lời giải đúng, các cách giải là khá phong phú. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành. **Bắc Giang:** *Nguyễn Văn Nghĩa*, 10A1, THPT Lạng Giang số 3. **Nam Định:** *Trịnh Tuấn Giang*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Thái Nguyên:** *Nguyễn Thanh Tùng*, Toán 11 K25, THPT chuyên Thái Nguyên. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Cẩm Dung*, *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; *Hoàng Văn Hiếu*, 9E, THCS Vĩnh Yên. **Bắc Ninh:** *Lê Huy Cường*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh. **Hà Nội:** *Trần Thiện Nam*, 11A1, THPT Ứng Hòa 2 ; *Nguyễn Văn Cao*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; *Vũ Đức Văn*, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân*, *Nguyễn Phúc Hoàng*, *Chu Vũ Nguyên Hạnh*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Tài*, 11T, *Vũ Duy Mạnh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn. **Nghệ An:** *Trương Nhật Phi*, Lớp A1-K1, Trường PTDTNT THPT Số 2 ; *Cao Hữu Đạt*, *Phan Đức Tiến*, *Nguyễn Sỹ Mạnh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu. **Hà Tĩnh:** *Mai Thị Tú Uyên*, *Ngô Việt Hoàng*, *Phan Nhật Duy*, *Nguyễn Ánh Triều*, 10T1, *Nguyễn Khánh Hưng*, 10T2, *Trần Bảo Trung*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; *Trần Nguyễn Đức Thọ*, 10A1, THPT Nguyễn Thị Minh Khai, Đức Thọ. **Quảng Bình:** *Hồ Anh Tiến*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Phú Yên:** *Hồ Minh Hoàng*, *Ngô Lê Phương Trinh*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh. **Bình Định:** *Trần Văn Thiên*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Đồng Nai:** *Cao Đình Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh. **Bình Phước:** *Nguyễn Võ Trung Hiếu*, *Bùi Văn Bình*, 11A, THPT chuyên Quang Trung. **Khánh Hòa:** *Hà Xuân Khang*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Tiền Giang:** *Nguyễn Minh Thông*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang. **Long An:** *Phạm Đăng Khoa*, 10T2, *Phạm Quốc Thắng*, 10T1, THPT chuyên Long An. **Vĩnh Long:** *Nguyễn Minh Thức*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Sóc Trăng:** *Lê Long Quốc*, 10A1T, *Vương Hoài Thanh*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Bạc Liêu:** *Tần Kim Duyên*, 10T, THPT chuyên Bạc Liêu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T9/451. *Tìm các bộ số nguyên dương (x, y, z, p) trong đó p là số nguyên tố sao cho chúng thỏa mãn:* $p^x+(p-1)^{2y}=(2p-1)^z$.

Lời giải. (Theo bạn *Trần Quang Huy*, 11A, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An** và bạn *Võ Duy Khánh*, 11T1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**).

Trường hợp 1: z lẻ, ta có

$p^x+(p-1)^{2y}\equiv 1\ (\text{mod}p),\ (2p-1)^z\equiv -1\ (\text{mod}p).$

Vậy $1\equiv -1\ (\text{mod}p)\Rightarrow p=2$. Phương trình trở thành $2^x+1=3^z \Leftrightarrow 2^x=2\left(3^{z-1}+...+3+1\right)$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1}=3^{z-1}+...+3+1.$$

Nếu $x>1$ thì vế trái là số chẵn, trong khi vế phải là tổng của z số lẻ do đó là số lẻ. Mâu thuẫn. Do đó $x=1\Rightarrow z=1$. Vậy mọi nghiệm là $(1, k, 1, 2)$ với $k\in\mathbb{N}^*$.

Trường hợp 2: z chẵn, $z=2t,\ t\in\mathbb{N}^*$.

Phương trình trở thành

$$p^x=\left[(2p-1)^t-(p-1)^y\right]\left[(2p-1)^t+(p-1)^y\right]\quad(1)$$

Do p là số nguyên tố nên (1) tương đương với

$$\begin{cases}(2p-1)^t-(p-1)^y=p^a & (2)\\(2p-1)^t+(p-1)^y=p^b & (3)\end{cases}$$

$$b>a\ge 0,\ b+a=x.$$

i) Nếu $a\ge 1\Rightarrow b\ge 2$

Từ (2) và (3) suy ra $\begin{cases}2(2p-1)^t=p^a+p^b & (4)\\2(p-1)^y=p^b-p^a & (5)\end{cases}$

Từ (4) suy ra $p\,|2\Rightarrow p=2$ Thay vào (5) ta được

$$2=2^b-2^a=2^a\left(2^{b-a}-1\right).$$

Suy ra $a=1,\ b-a=1\Rightarrow a=1,\ b=2\Rightarrow x=3$ và $t=1$. Từ đó $z=2$. Vậy ta có nghiệm thứ hai $(3, k, 2, 2)$.

ii) Nếu $a=0,\ b\ge 1$. Từ (4) ta có

$2(2p-1)^t=p^b+1$, suy ra $2(-1)^t\equiv 1\ (\text{mod}\,p)$.

Nếu t chẵn $\Rightarrow 2\equiv 1\ (\text{mod}\,p)$, không xảy ra.

Vậy t lẻ $\Rightarrow -2\equiv 1\ (\text{mod}\,p)\Rightarrow 3\equiv 0\ (\text{mod}\,p)\Rightarrow p=3$.

Khi đó (4) và (5) trở thành

$$\begin{cases}3^b+1=2\,.\,5^t & (6)\\3^b-1=2^{y+1} & (7)\end{cases}$$

Từ (6) ta có $3^b\equiv 4(\text{mod}5)$. Đặt $b=4k+r$, $r\in\{0, 1, 2, 3\}$, ta có $3^r\equiv 4(\text{mod}5)\Rightarrow r=2$.

Vậy $b=4k+2$. Thay vào (7) ta được

$$3^{4k+2}-1=2^{y+1}.$$

Xét đồng dư theo mod16 ta có

$$3^{4k+2}-1=81^k\,.\,9-1\equiv 8\ (\text{mod}16).$$

Vậy $2^{y+1}\equiv 8\ (\text{mod}16)\Rightarrow y+1=3\Rightarrow y=2$.

Khi đó $3^b=9\Rightarrow b=2\Rightarrow\begin{cases}t=1\\x=2\end{cases}\Rightarrow z=2.$

Vậy ta được bộ nghiệm thứ ba là (2, 2, 2, 3)

Thử lại cả ba bộ nghiệm trên đều thỏa mãn.

Đáp số: $(1, k, 1, 2)$; $(3, k, 2, 2)$ và $(2, 2, 2, 3)$. ❐

Nhận xét. Bài này được khá đông các bạn tham gia giải và hầu hết các lời giải là trọn vẹn (tức là tìm được tất cả ba bộ nghiệm nên trên). Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Tĩnh: *Nguyễn Văn Thế*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Nai:** *Cao Đình Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh. **Hà Nội:** *Vũ Bá Sang*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Bình:** *Hồ Anh Tiến*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Định:** *Trần Văn Thiện*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Tiền Giang:** *Nguyễn Minh Thông*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/451. *Tìm hằng số K lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\sqrt{a+K|b-c|^\alpha}+\sqrt{b+K|c-a|^\alpha}+\sqrt{c+K|a-b|^\alpha}\le 2$$

với mọi $\alpha\ge 1$ và a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$.

Lời giải. *Điều kiện cần.* Giả sử K là số thực thỏa mãn bài toán. Lấy $a=1,\ b=c=0,\ \alpha=1$ ta có $\sqrt{1}+\sqrt{K}+\sqrt{K}\le 2\Rightarrow 2\sqrt{K}\le 1\Rightarrow 0\le K\le\frac{1}{4}$.

Điều kiện đủ. Ta sẽ chứng minh $K=\frac{1}{4}$ thỏa mãn bài toán. Thật vậy nếu a, b, c là các số thực không âm, $a+b+c=1$ và α là số thực, $\alpha\ge 1$ ta có $0\le|b-c|, |c-a|, |a-b|\le 1$. Suy ra

$$\sqrt{a+\frac{1}{4}|b-c|^\alpha}+\sqrt{b+\frac{1}{4}|c-a|^\alpha}+\sqrt{c+\frac{1}{4}|a-b|^\alpha}$$

$$\le\sqrt{a+\frac{1}{4}|b-c|}+\sqrt{b+\frac{1}{4}|c-a|}+\sqrt{c+\frac{1}{4}|a-b|}\quad(1)$$

Do vai trò của a, b, c trong bài toán là như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$. *Chú ý*: Với x, y là các số thực không âm, ta có bất đẳng thức Cauchy cho hai số $2\sqrt{xy}\le x+y$. Từ đó

$$\sqrt{a+\frac{1}{4}|b-c|}+\sqrt{b+\frac{1}{4}|c-a|}+\sqrt{c+\frac{1}{4}|a-b|}$$

$$=\sqrt{a+\frac{1}{4}(b-c)}+2\cdot\sqrt{\left(b+\frac{1}{4}(a-c)\right)\cdot\frac{1}{4}}$$
$$+2\cdot\sqrt{\left(c+\frac{1}{4}(a-b)\right)\cdot\frac{1}{4}}$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(a+\frac{b-c}{4}+1\right)+\left(b+\frac{a-c}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(c+\frac{a-b}{4}+\frac{1}{4}\right)$$
$$=a+b+c+1-\frac{b}{8}-\frac{3c}{8}\leq 1+1=2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\sqrt{a+\frac{1}{4}|b-c|^{\alpha}}+\sqrt{b+\frac{1}{4}|c-a|^{\alpha}}+\sqrt{c+\frac{1}{4}|a-b|^{\alpha}}\leq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 0, một số bằng 1 (đúng với một số $\alpha \geq 1$ thì cũng đúng với mọi số $\alpha \geq 1$). ❒

Nhận xét. Đây là bài toán bất đẳng thức hay. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên; *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *Nghiêm Văn Nghĩa*, 10A1, THPT Lạng Giang Số 3; **Hà Nội:** *Hoàng Anh Quân*, *Vũ Đức Văn*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** *Nguyễn Phúc Hoàng*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** *Nguyễn Sỹ Mạnh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Hà Tĩnh:** *Phan Nhật Duy*, 10A1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Long An:** *Nguyễn Lộc Phúc*, 10A1, *Đặng Thành Trung*, 10T2, THPT chuyên Long An; **Phú Yên:** *Huỳnh Nguyễn Như Phương*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/451. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn* $f(x^2+f(y))=4y+\frac{1}{2}f^2(x)$ *với mọi* $x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Thay $x=0$ vào (1) ta thu được

$$f(f(y))=4y+\frac{1}{2}f^2(0)=4y+\frac{1}{2}a^2,\ \forall y\in\mathbb{R} \quad (2)$$

với $a=f(0)$. Vì vế phải là hàm bậc nhất theo y nên suy ra f là song ánh.

Thay $y=0$ vào (1) ta được

$$f(x^2+f(0))=\frac{1}{2}f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Tiếp tục thay x bởi $-x$ trong (3), ta được

$$f(x^2+f(0))=\frac{1}{2}f^2(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $f^2(x)=f^2(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp $f(-x)=f(x)$ chỉ xảy ra khi $-x=x\Leftrightarrow x=0$ (do f là song ánh).

Vậy $f(-x)=-f(x)$ với mọi $x\neq 0$.

Vì f là song ánh nên tồn tại duy nhất số b sao cho $f(b)=0$.

Nếu $b\neq 0$ thì $f(-b)=-f(b)$ và vì vậy $f(b)=f(-b)=0$ nên $b=0$, mâu thuẫn.

Do vậy $f(0)=0$. Vậy $f(-x)=-f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, tức là f là hàm lẻ. Khi đó (2) có dạng

$f(f(x))=4x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (*) và (3) có dạng

$f(x^2)=\frac{1}{2}f^2(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, tức $f(x)\geq 0$ khi $x\geq 0$. Thế vào (1), ta thu được

$$f(x^2+f(y))=f(f(y))+\frac{1}{2}f^2(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

hay $f(u+v)=f(u)+f(v),\ \forall u,v\in\mathbb{R}, u\geq 0$ (5)

Trong (5), thay u bởi $-u$ với $u<0$, v bởi $-v$ và sử dụng tính chất f là hàm lẻ, ta được

$$f(-u-v)=f(-u)+f(-v),\ \forall u<0, v\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow -f(u+v)=-f(u)-f(v),\ \forall u<0, v\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(u+v)=f(u)+f(v),\ \forall u<0, v\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$f(u+v)=f(u)+f(v),\ \forall u,v\in\mathbb{R}. \quad (7)$$

Tiếp theo, sử dụng tính chất $f(x)\geq 0$ khi $x\geq 0$, ta thu được $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng, do vậy nó là hàm đồng biến (vì f là song ánh).

Thật vậy, nếu $x>y$ thì

$$f(x)=f(y+(x-y))=f(y)+f(x-y)\geq f(y).$$

Ta chứng minh $f(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Thật vậy, nếu tồn tại x_0 sao cho $f(x_0)>2x_0$ thì từ (*) suy ra

$$4x_0=f(f(x_0))>f(2x_0)=f(x_0)+f(x_0)>4x_0,$$

vô lý. Tương tự, trường hợp $f(x_0)<2x_0$ không xảy ra. Thử lại ta thấy hàm số $f(x)=2x$ thỏa mãn điều kiện của bài toán. ❒

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11T2, THPT chuyên KHTN, *Vũ Đức Văn*, 10T, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Vũ Bá Sang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11T, THPT chuyên

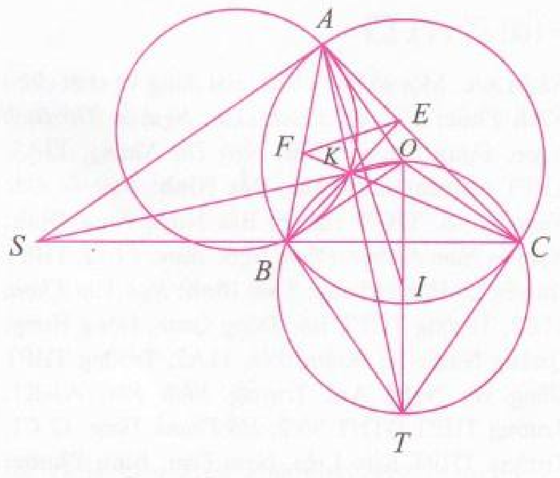
Nguyễn Tất Thành; **Bắc Ninh:** *Lê Huy Cường*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Tài*, *Nguyễn Ngọc Vinh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Duy Tuấn*, *Nguyễn Văn Thế*, *Võ Duy Khánh*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Hồ Minh Phước*, 11T1, THPT chuyên QH Huế; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, *Nguyễn Sỹ Mạnh*, *Hoàng Thị Thảo Hiền*, *Phan Đức Tiến*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Trần Quang Huy*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Bình Phước:** *Bùi Công Minh*, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Bình Thuận:** *Dương Đức Tín*, 10CT, THPT chuyên Trần Hưng Đạo; **Đồng Nai:** *Nguyễn Nam Bình*, *Cao Đình Huy*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Quảng Bình:** *Hồ Anh Tiến*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Tiền Giang:** *Nguyễn Minh Thông*, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** *Phan Lê Nhật Duy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/451. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) cố định, B, C cố định và A di chuyển trên (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại S ; K là hình chiếu của A lên OS ; BK, CK lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định khi A di chuyển.*

Lời giải. (Theo bạn *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B và C; I là trung điểm của OT; $(A, 0)$ là đường tròn tâm A, bán kính bằng không.



Dễ thấy $\widehat{OBT}=\widehat{OCT}=90°$.

Do B, C, O, T cùng thuộc đường tròn đường kính OT, kí hiệu là (I) (1)

Vì SA tiếp xúc với (O) và $AK \perp SO$ nên $\overline{SB}.\overline{SC}=\overline{SA}^2=\overline{SO}.\overline{SK}$. Do đó B, C, O, K cùng thuộc một đường tròn (2).

Từ (1) và (2) suy ra K thuộc (I).

Kết hợp với $AK \perp SO$, suy ra A, K, T thẳng hàng. Do đó $(KA, KB) \equiv (KT, KB) \equiv (OT, OB)$

$$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) \equiv (AC, AB) \equiv (AE, AB) (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Điều đó có nghĩa là EA tiếp xúc với đường tròn (AKB). Vậy $\mathscr{P}_{E/(A,0)}=\overline{EA}^2=\overline{EK}.\overline{EB}=\mathscr{P}_{E/(I)}$ (3)

Tương tự $\mathscr{P}_{F/(A,0)}=\overline{FA}^2=\overline{FK}.\overline{FC}=\mathscr{P}_{F/(I)}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra EF là trục đẳng phương của $(A, 0)$ và (I). Do đó $AI \perp EF$. Nói cách khác đường thẳng qua A vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định (điểm I). ❒

Nhận xét.

1) Không cần giả thiết tam giác ABC nhọn.

2) Có thể kiểm tra dễ dàng rằng S, E, F thẳng hàng.

3) Khá nhiều bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng. Xin nêu tên tất cả các bạn: **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP Yên Bái; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Đình Lương*, 10T, *Nguyễn Tiến Tài*, *Nguyễn Hoài Thu*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hoá; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Đồng Nai:** *Cao Đình Huy*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hoà; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quang Dũng*, 10T1, *Nguyễn Văn Thế*, *Võ Duy Khánh*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Hồ Anh Tiến*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Đà Nẵng:** *Lý Công Phước*, 10T2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Bình Phước:** *Trương Văn Hoàng*, 11A, THPT chuyên Quang Trung, TX Đồng Xoài.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/451. *Ba quả cầu nhỏ đều có bán kính là r, khối lượng như nhau, đặt trong cái bát hình bán cầu cố định. Ba quả cầu đứng yên trong bát. Nếu đặt thêm quả cầu thứ 4 giống hệt 3 quả cầu kia lên trên chúng thì để 4 quả cầu đứng yên thì bán kính cái bát phải thoả mãn điều kiện gì? Bỏ qua mọi ma sát.*

Lời giải. Gọi quả cầu trên là A, ba quả dưới là B, C, D thì đường nối tâm của chúng tạo thành tứ diện đều, cạnh là $2r$

Gọi α là góc giữa đường nối tâm 2 quả cầu A và B với phương thẳng đứng, gọi tâm bát là O, góc giữa đường nối tâm quả cầu B và O với phương thẳng đứng là β, lực mặt bát tác dụng lên ba quả cầu dưới đều có độ lớn là F. Từ điều kiện cân bằng của hệ theo phương thẳng đứng ta có: $3F.\cos\beta = 4mg$ (1)

Xét quả cầu B: Quả cầu B chịu tác dụng của trọng lực mg, lực F của mặt bát và áp lực F_N của quả cầu A. Dựa vào điều kiện cân bằng lực ta có: $\begin{cases} F\cos\beta = mg + F_N\cos\alpha \\ F\sin\beta = F_N\sin\alpha \end{cases}$

Khử F_N ta tìm được: $\tan\alpha = \dfrac{F\sin\beta}{F\cos\beta - mg}$ (2)

Từ (1), (2) khử F ta được: $\tan\beta = \dfrac{\tan\alpha}{4}$ (3)

Vì tâm 4 quả cầu hợp thành đỉnh tứ diện đều có cạnh bằng $2r$ nên ta dễ dàng tìm được:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.2r}{\sqrt{(2r)^2 - (\frac{2\sqrt{3}}{3}.r)^2}} = 0,5$$

Thay vào (3) tìm được: $\tan\beta = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

Vì miệng cái bát có bán kính là R nên:

$$R = BO + r = \frac{BO'}{\sin\beta} + r$$
$$= BO'\sqrt{1 + \cot^2\beta} + r \approx 7,633r.$$

Như vậy bán kính cái bát phải thoả mãn

$$R \le 7,633r. \square$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đắc Nam*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Phùng Văn Lượng*, *Nguyễn Mạnh Dân*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/451. *Đặt điện áp $u = 400\cos 100\pi t$ (V) vào hai đầu mạch điện AB gồm điện trở thuần $R = 50$ (Ω) mắc nối tiếp với đoạn mạch X. Đoạn mạch X gồm điện trở thuần r, cuộn cảm thuần L và tụ điện $C = \dfrac{10^{-4}}{\pi}$ (F) mắc nối tiếp. Cường độ dòng điện hiệu dụng qua mạch điện AB là $I = 2$ (A). Ở thời điểm $t + \dfrac{1}{400}$ (s) cường độ dòng điện tức thời qua mạch điện AB bằng 0 và đang giảm.*

1. Tính công suất tiêu thụ P_x của đoạn mạch X.

2. Tính r, L và điện áp hiệu dụng U_x của đoạn mạch X.

Lời giải. 1) $P_X = P_{AB} - P_R$, mà $P_R = RI^2 = 200$ (W).

• Ở thời điểm t có $u = 400$ (V), suy ra $t = 0$.

• Ở thời điểm $t + \dfrac{1}{400}$ (s), $i = I\cos(\omega t + \varphi) = 0$,

suy ra $(\omega t + \varphi) = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} - (100\pi.\dfrac{1}{400})$

$= \dfrac{\pi}{4}$.

Từ đó $P_{AB} = UI\cos\varphi = \left(\dfrac{400}{\sqrt{2}}\right).2.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 400$ (W).

Do đó $P_X = P_{AB} - P_R = 200$ (W).

2) Vì $P_X = rI^2$ nên $r = \dfrac{200}{2^2} = 50$ (Ω).

Ngoài ra $\tan\varphi = \dfrac{Z_L - Z_C}{R + r}$ mà $Z_C = 100$ (Ω) và

$L = \dfrac{2}{\pi}$ (H).

Ta có: $U_X = I\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} = 2\sqrt{5^2 + 100^2}$

$= 100\sqrt{5}$ (V). $\square$

Nhận xét. Một số bạn có lời giải đúng và chặt chẽ : **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Dân*, *Nguyễn Thị Bích Ngọc*, *Đặng Quang Khải*, *Ngô Thị Nhung*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đắc Nam*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Nguyễn Nam Khánh*, *Phạm Ngọc Nam*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Ngô Văn Khoa*, 11A2, Trường THPT Bắc Đông Quan, Đông Hưng; **Quảng Ninh:** *Vũ Hoàng Yến*, 11A7, Trường THPT Uông Bí; **Nghệ An:** *Trương Nhật Phi*, A1-K1, Trường THPT DTNT Số 2; *Hồ Thanh Tùng*, 12 C1, Trường THPT Kim Liên, Nam Đàn; **Bình Phước:** *Phạm Quang Tuyến*, AK11, THPT chuyên Quang Trung.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

TIN TỨC

THI OLYMPIC TOÁN HÀ NỘI MỞ RỘNG NĂM 2014

Ngày 23/03/2014, tại ba địa điểm Hà Nội, Đăk Lăk, Đồng Tháp đã diễn ra kỳ thi Olympic Toán Hà Nội mở rộng lần thứ 11 năm 2014. Tổng số thí sinh dự thi ở cả 3 hội đồng là 779 thí sinh của 42 tỉnh thành trong toàn quốc, gồm 473 thí sinh lứa tuổi Junior (THCS, sinh sau ngày 01/01/2000) và 306 thí sinh lứa tuổi Senior (THPT, sinh sau ngày 01/01/1998).

Cả hai đội Junior và Senior đều thi cùng vào một thời gian, từ 8h đến 11h30 ngày 23/3/2014. Thí sinh làm Toán bằng tiếng Anh trong 180 phút với 15 câu hỏi, cả trắc nghiệm và tự luận. Thí sinh ở cả ba hội đồng đã làm bài nghiêm túc, tự tin và tận dụng hết thời gian.

Tham gia cuộc thi - một sân chơi trí tuệ do Hội Toán học Hà Nội đề xuất là dịp để học sinh các địa phương đua tài cùng bạn bè trong cả nước, đồng thời cũng là thử sức trong cuộc hội nhập quốc tế về lĩnh vực Toán học phổ thông . Cuộc thi đã nhanh chóng thu hút các tỉnh, thành trong toàn quốc tham dự, từ nơi địa đầu của Tổ quốc Hà Giang cho đến mũi Cà Mau đều có học sinh tham dự kỳ thi này. Kỳ thi HOMC 2014 đã kết thúc tốt đẹp. (Đề thi và đáp án xin xem trên trang Web của Hội Toán học Hà Nội *hms.org.vn*).

THẨM NGỌC KHUÊ
(*Hội Toán học Hà Nội*)

PROBLEMS ...(*Tiếp theo trang 17*)

Problem T8/455. Consider an acute triangle ABC with the angles A, B, and C. Find the maximum value of the expression

$$M=\frac{\tan^2 A+\tan^2 B}{\tan^4 A+\tan^4 B}+\frac{\tan^2 B+\tan^2 C}{\tan^4 B+\tan^4 C}+\frac{\tan^2 C+\tan^2 A}{\tan^4 C+\tan^4 A}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/455. Find the coefficient of x^2 in the expansion of the following expression

$$(1+x)(1+2x)(1+4x)\ldots(1+2^{2013}x).$$

Problem T10/455. Let $a_1, a_2, ..., a_n$ be positive numbers such that

$$a_1+a_2+...+a_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}.$$

Find the minimum value of the expression

$$A=a_1+\frac{a_2^2}{2}+...+\frac{a_n^n}{n}.$$

Problem T11/455. Find the biggest real number k satisfying the condition: for any 3 real numbers a, b, c such that $|a|+|b|+|c|<k$, the following system of inequalities has no solution

$$\begin{cases} x^{16}+ax^9+bx^4+cx+15\le 0 \\ \left|x^{16}-x^9+1\right|+\left|x^4-x+1\right|\le 2 \end{cases}.$$

Problem T12/454. Suppose that ABC is an acute triangle inscribed in the circle (O) and AD is an altitude. The tangent lines at B, C of (O) intersect at T. On the line segment AD, choose K such that $\widehat{BKC}=90^o$. Let G be the centroid of ABC. Suppose that KG intersects OT at L. Choose the point P, Q on the side BC so that $LP \parallel OB$, $LQ \parallel OC$. Choose the points E and F respectively on the sides CA and AB such that QE, PF are both perpendicular to BC. Let (T) be the circle centered at T and containing B and C. Prove that the circle circumscribing the triangle AEF is tangent to (T).

Translated by ***NGUYEN PHU HOANG LAN***
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

BẠN CÓ BIẾT?

NHỮNG SỐ NGẪU NHIÊN CỦA BÀI TOÁN COLLATZ

Năm 1930 nhà Toán học Đức *Lothar Collatz* đã đề ra một bài toán đơn giản: *Xuất phát từ số tự nhiên n khác không. Áp dụng phép toán sau:*

+ Nếu n là số chẵn, thì chia n cho 2, có $\frac{n}{2}$.

+ Nếu n là số lẻ, thì nhân n với 3, cộng 1, rồi chia cho 2, tức có $\frac{3n+1}{2}$.

Rồi lại bắt đầu áp dụng phép toán đó với số mới thu được. Ví dụ, bắt đầu từ 28, ta có dãy: 28 – 14 – 7 – 11 – 17 – 26 – 13 – 20 – 10 – 5 – 8 – 4 – 2 – 1.

Khi đến 1 rồi thì sẽ có một dãy số chỉ gồm có 1 và 2: 1 – 2 – 1 – 2 – 1 ...

Giả thuyết của Collatz (còn gọi là bài toán Collatz) được phát biểu như sau:

"Dù xuất phát từ số $n \in \mathbb{N}^*$ nào bất kỳ, rốt cuộc rồi cũng đi đến con số 1".

Thật không có bài toán nào mà đầu đề đơn giản như vậy, học sinh lớp 3 cũng hiểu được.

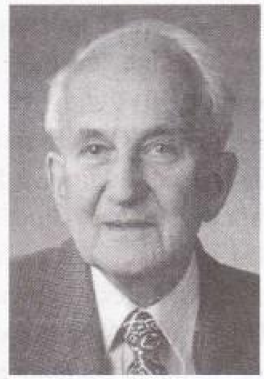
Và cũng thật là một điều kỳ lạ, đến nay chưa ai chứng minh được mệnh đề ấy có đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ không, hay có số $n \in \mathbb{N}^*$ nào mà mệnh đề đó không đúng hay không?

Nhiều nhà toán học cho rằng mệnh đề đó đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nhưng đáng tiếc thay, cho đến nay việc chứng minh mệnh đề đó vẫn tiến bộ rất chậm.

Chưa hết! Một vấn đề mới lại nảy ra: Xuất phát từ 28 thì qua 13 bước đến số 1, nhưng nếu xuất phát từ 27 thì phải qua 71 bước mới đến số 1. Vậy số bước liên hệ với số xuất phát theo quy luật nào?

Theo nhà toán học *Paul Erdös*, thì toán học hiện nay chưa đủ công cụ để giải quyết bài toán này.

Có một giai thoại rất "kỳ quái": "Bài toán này do KGB (Cơ quan tình báo Liên Xô) đặt ra để làm các nhà toán học Phương Tây tổn hao tâm lực, mà không giải quyết được"!



Lothar Collatz
(1910 - 1990)

Jeffrey Lagarias và *Kannan Soundararajan* ở Đại học Michigan lại quan tâm đến sự phân bố thống kê của những chữ số đầu của danh sách những số tạo thành bằng *quy tắc Collatz*. Ví dụ như trong dãy sinh ra bởi 28 trên kia thì dãy các chữ số đầu là: 2 – 1 – 7 – 1 – 1 – 2 – 1 – 2 – 1 – 5 – 8 – 4 – 2 – 1.

Các nhà toán học đã chứng minh rằng nếu đi từ một số rất lớn và nhìn vào các chữ số đầu của phần đầu của danh sách mà thôi, thì người ta sẽ thấy rằng tần số thống kế của sự xuất hiện của mỗi chữ số là không giống nhau:

Số 1 xuất hiện thường xuyên hơn số 2, số 2 xuất hiện nhiều hơn số 3,...Nói một cách chính xác họ đã chứng tỏ rằng luật thống kê mô tả tốt nhất sự kiện đó chính là "*Luật Benford*" (số càng nhỏ tần số xuất hiện càng nhiều). *Luật Benford* đã được xác nhận trên thực tế khi quan sát giá bán hàng hóa in trong catalogue (catalô).

Điều đáng nói ở đây là luật Benford cũng được kiểm nghiệm cho các chữ số đầu của *dãy số Collatz*. Vậy phải chăng dãy chữ số đó cũng là một dãy "có mang tính ngẫu nhiên"? tuy được sinh ra bằng một quy tắc chính xác, không ngẫu nhiên chút nào (*Quy tắc Collatz*).

Đó phải chăng là một bước đầu trong quá trình tìm hiểu cấu trúc toán học của một "*bài toán con*" của "*bài toán mẹ Collatz*" chưa giải quyết được?

PHAN THANH QUANG

(*Theo Benirt Ritlaud, trong La Recherche*)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

ĐẶNG THANH HẢI - PHẠM THỊ PHƯƠNG THÚY
(GV Học viện PK – KQ, Sơn Tây, Hà Nội)

Trong những năm gần đây, bài toán tính giá trị của một biểu thức lượng giác mà không dùng bảng số, máy tính xuất hiện khá nhiều. Bài viết xin trình bày một số phương pháp cơ bản để giải các bài toán này.

***Phương pháp* 1: Dùng các công thức biến đổi lượng giác, đưa biểu thức cần tính về hàm số lượng giác của các góc đặc biệt**

Bài toán 1. *(ĐHQG Hà Nội năm 2001, khối A). Không dùng bảng số, máy tính hãy tính giá trị của biểu thức:*

$$P=\cos 12^\circ+\cos 18^\circ-4\cos 15^\circ\cos 21^\circ\cos 24^\circ.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}P&=2\cos 15^\circ\cos 3^\circ-4\cos 15^\circ\cos 21^\circ\cos 24^\circ\\&=2\cos 15^\circ\left[\cos 3^\circ-2\cos 21^\circ\cos 24^\circ\right]\\&=2\cos 15^\circ\left[\cos 3^\circ-\cos 45^\circ-\cos 3^\circ\right]\\&=-2\cos 15^\circ\cos 45^\circ\\&=-\left(\cos 60^\circ+\cos 30^\circ\right)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}.\ \square\end{aligned}$$

Bài toán 2. *Không dùng bảng số, máy tính hãy tính giá trị của biểu thức:*

$$P=\sin 10^\circ.\sin 20^\circ...\sin 80^\circ.$$

Lời giải. Sử dụng công thức góc nhân ba ta có:

$$\begin{aligned}\sin 3x&=3\sin x-4\sin^3 x=4\sin x\left(\frac{3}{4}-\sin^2 x\right)\\&=4\sin x\left[\frac{3}{4}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-\sin^2 x\right]\\&=4\sin x\left(\frac{3}{4}\cos^2 x-\frac{1}{4}\sin^2 x\right)\\&=4\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)\\&=4\sin x.\sin\left(60^\circ-x\right).\sin\left(60^\circ+x\right)\qquad(1)\end{aligned}$$

Áp dụng công thức (1) với $x=30^\circ; x=60^\circ$ ta có:

$$\begin{cases}\sin 30^\circ=4\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ\\ \sin 60^\circ=4\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ\end{cases}.$$

Từ đó $P=\frac{1}{16}\left[\sin 30^\circ.\sin 60^\circ\right]^2=\frac{3}{256}$. $\square$

***Phương pháp* 2: Dùng các phép biến đổi tương đương để tính giá trị của các biểu thức lượng giác**

Bài toán 3. *(ĐH Cảnh sát PCCC năm 2001, khối A). Không dùng bảng số máy tính, hãy tính giá trị của biểu thức:*

$$P=4\sin 18^\circ\sin 54^\circ.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}P.\cos 18^\circ&=4\sin 18^\circ\cos 18^\circ\sin 54^\circ\\&=2\sin 36^\circ\sin 54^\circ\\&=2\sin 36^\circ\cos 36^\circ\\&=\sin 72^\circ=\cos 18^\circ\Rightarrow P=1.\ \square\end{aligned}$$

Bài toán 4. *(ĐH An ninh năm 2001, khối A). Không dùng bảng số, máy tính hãy tính giá trị của biểu thức:*

$$P=\sin^2 50^\circ+\sin^2 70^\circ-\cos 50^\circ\cos 70^\circ.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}P&=\frac{1-\cos 100^\circ}{2}+\frac{1-\cos 140^\circ}{2}-\cos 50^\circ\cos 70^\circ\\&=1-\cos 120^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\left[\cos 120^\circ+\cos 20^\circ\right]\\&=1+\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos 20^\circ\right)=\frac{5}{4}.\ \square\end{aligned}$$

Bài toán 5. *Không dùng bảng số, máy tính hãy tính giá trị của biểu thức:*

$$S=\tan\frac{3\pi}{11}+4\sin\frac{2\pi}{11}.$$

Lời giải. Đặt $\alpha=\frac{\pi}{11}$. Ta có

$$S^2=\left(\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}+4\sin 2\alpha\right)^2$$

$$\Rightarrow S^2=\frac{1}{\cos^2 3\alpha}\left[\sin^2 3\alpha+16\cos^2 3\alpha\sin^2 2\alpha +8\sin 3\alpha\cos 3\alpha\sin 2\alpha\right]\ (1)$$

Trong đó:

$$\sin^2 3\alpha+16\cos^2 3\alpha\sin^2 2\alpha+8\sin 3\alpha\cos 3\alpha\sin 2\alpha$$

$$=1-\cos^2 3\alpha+16\cos^2 3\alpha\left(1-\cos^2 2\alpha\right)+4\sin 6\alpha\sin 2\alpha$$

$$=11\cos^2 3\alpha+1+4\cos^2 3\alpha-16\cos^2 3\alpha\cos^2 2\alpha+2\left(\cos 4\alpha-\cos 8\alpha\right)$$

$$=11\cos^2 3\alpha+1+2(1+\cos 6\alpha)-16\left[\frac{1+\cos 6\alpha}{2}\cdot\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right]+2\left(\cos 4\alpha-\cos 8\alpha\right)$$

$$=11\cos^2 3\alpha-1+2\cos 6\alpha-4\left(\cos 6\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha\cos 4\alpha\right)+2\left(\cos 4\alpha-\cos 8\alpha\right)$$

$$=11\cos^2 3\alpha-1-2\left(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cos 8\alpha+\cos 10\alpha\right)$$

$$=11\cos^2 3\alpha-1-\frac{2}{\sin\alpha}\left[\left(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cos 8\alpha+\cos 10\alpha\right)\sin\alpha\right]$$

$$=11\cos^2 3\alpha-1-\frac{1}{\sin\alpha}(\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha+\sin 7\alpha-\sin 5\alpha+\sin 9\alpha-\sin 7\alpha+\sin 11\alpha-\sin 9\alpha)$$

$$=11\cos^2 3\alpha-1-\frac{1}{\sin\alpha}\left(-\sin\alpha+\sin 11\alpha\right)$$

$$=11\cos^2 3\alpha-\frac{\sin 11\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=11\cos^2 3\alpha\ \left(\text{do } \sin 11\alpha=\sin 11\frac{\pi}{11}=\sin\pi=0\right).$$

Từ (1) suy ra $S^2=\frac{1}{\cos^2 3\alpha}.11\cos^2 3\alpha=11$.

Vậy $S=\sqrt{11}$ (do $S>0$). ❐

***Phương pháp* 3: Tìm phương trình đại số dạng đa thức nhận biểu thức lượng giác làm nghiệm**

Bài toán 6. *Không dùng bảng số, máy tính hãy tính giá trị của* $\sin 18^\circ$.

Lời giải. Đặt $t=\sin 18^\circ\Rightarrow 0<t<1$.

Ta có $\sin 54^\circ=\cos 36^\circ\Rightarrow 3t-4t^3=1-2t^2$

$\Leftrightarrow 4t^3-2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow(t-1)\left(4t^2+2t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t-1=0\\4t^2+2t-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (do $0<t<1$).

Vậy $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. ❐

Bài toán 7. *Không dùng bảng số, máy tính hãy tính giá trị của biểu thức:*

$$S=\tan^4 10^\circ+\tan^4 50^\circ+\tan^4 70^\circ.$$

Lời giải. Ta có nhận xét sau

$$\tan^2 30^\circ=\tan^2 150^\circ=\tan^2 210^\circ=\frac{1}{3}.$$

Từ đó suy ra $x=10^\circ; x=50^\circ; x=70^\circ$ là các nghiệm của phương trình:

$$\tan^2 3x=\frac{1}{3}\qquad(1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow\left(\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}\right)^2=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3\left(\tan^6 x-6\tan^4 x+9\tan^2 x\right)=1+9\tan^4 x-6\tan^2 x$

$\Leftrightarrow 3\tan^6 x-27\tan^4 x+33\tan^2 x-1=0.$

Đặt $t=\tan^2 x\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 3t^3-27t^2+33t-1=0\ (2)$

Từ đó suy ra $t_1=\tan^2 10^\circ; t_2=\tan^2 50^\circ; t_3=\tan^2 70^\circ$ là các nghiệm của phương trình (2). Áp dụng định lí Viète cho phương trình (2) ta có:

$$\begin{cases}t_1+t_2+t_3=9\\t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=11\end{cases}.$$

Khi đó ta nhận được:

$$S=t_1^2+t_2^2+t_3^2=\left(t_1+t_2+t_3\right)^2-2\left(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3\right)$$

$$=9^2-2.11=81-22=59.$$ ❐

Mời các bạn luyện tập các bài toán sau:

1. Không dùng bảng số, máy tính hãy tính giá trị của biểu thức:

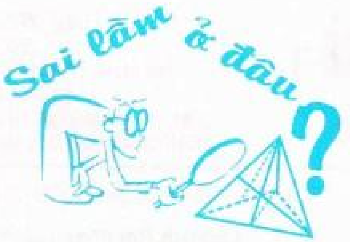
$$S=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^2\frac{3\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^2\frac{5\pi}{7}}.$$

2. Không dùng bảng số, máy tính hãy tính giá trị của biểu thức:

$$S=\tan 1^\circ\left(2\sin 2^\circ+4\sin 4^\circ+...+178\sin 178^\circ\right).$$

3. Không dùng bảng số, máy tính hãy tính giá trị của biểu thức:

$$S=\frac{1}{\cos 20^\circ}\left(\tan 30^\circ+\tan 40^\circ+\tan 50^\circ+\tan 60^\circ\right).$$



GIẢI ĐÁP:

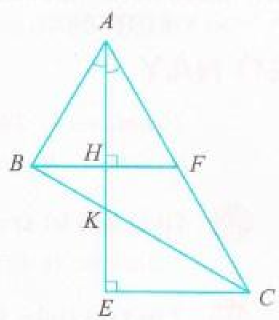
BÀI TOÁN CÓ HAI NGHIỆM HÌNH?

(Đề đăng trên TH&TT số 445, tháng 7 năm 2014)

Lưu ý rằng với đẳng thức $4AB^2 = AC^2$ thì vẫn có thể xảy ra khả năng ba điểm *A*, *B*, *C* thẳng hàng. Bạn *Hùng* do không thử lại nên đã để thừa ra một nghiệm hình, đó là

$$A\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right);\, B(1;\,2);\, C(0;\,-5).$$

Rõ ràng đối với nghiệm này ta thấy *A*, *B*, *C* đều thuộc đường thẳng có PT: $7x - y - 5 = 0$



Vậy nghiệm này không thỏa mãn đề bài. Sau đây là một lời giải đúng của bạn *Vương Hoài Thanh*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng**:

Theo cách giải bạn *Hùng*, ta có *C*(0; –5) (1). Gọi *F* là điểm đối xứng của *B* qua *AK* thì *F* thuộc *AC*. Khi đó PT *BF*: $x - 2y + 3 = 0$. Tọa độ *H* là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right).$$

Do *H* là trung điểm *BF*, nên $F\left(-\frac{7}{5};\frac{4}{5}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra PT *AC*: $29x + 7y + 35 = 0$. Khi đó tọa độ *A* là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 29x+7y+35=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{14}{5};\frac{33}{5}\right).$$

Vậy $A\left(-\frac{14}{5};\frac{33}{5}\right);\, C(0;\,-5)$. ❒

Nhận xét: Ngoài bạn *Thanh*, các bạn sau cũng có đáp án đúng: *Nguyễn Triều Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**; *Kim Văn Hùng*, 12A1, THPT Mỹ Đức B, **Hà Nội**; *Nguyễn Hữu Hoàng Hải*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**. ❒

NGỌC HIỀN (*Hà Nội*)

LỜI GIẢI MANG ĐẬM CHẤT KỸ THUẬT?

Trong tiết ôn tập lớp 12 thầy giáo yêu cầu học sinh của lớp thử sức với bài toán sau: Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(2; 5; 3) và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$.

Viết phương trình mp(α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến mp(α) lớn nhất.

Trong lúc cả lớp đang loay hoay giải thì bạn *Long* nói " *Thưa thầy em giải ra rồi!*" và thầy giáo đã yêu cầu *Long* lên bảng trình bày. Sau đây là lời giải của *Long*.

***Bài giải của Long*:**

Ta có vectơ chỉ phương của *d* là $\vec{u} = (2;1;2)$.

Lấy $M(1;\,0;\,2) \in d$ và gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ là vectơ pháp tuyến của (α).

Do mp (α) chứa đường thẳng *d*, nên ta có *M* (1; 0; 2) $\in (\alpha)$ và $\vec{n} \perp \vec{u}$. Do đó phương trình mặt phẳng

$$(\alpha): ax + by + cz - a - 2c = 0 \qquad (1)$$

và $2a + b + 2c = 0$.

Từ $2a + b + 2c = 0 \Rightarrow b = 2(a + b + c)$, khi đó

$$d\left(A;(\alpha)\right) = \frac{|a+5b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|9(a+b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Ta có $|a+b+c| \le \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2},\ \forall a,b,c.$

Suy ra $d\left(A;(\alpha)\right) \le 9\sqrt{3}$.

Do đó $d(A, (\alpha))$ lớn nhất khi $a = b = c$, mà $a^2+b^2+c^2>0$ nên $a=b=c\neq 0$. Khi đó chia hai vế PT (1) cho *c* ta có phương trình mặt phẳng (α) là $x + y + z - 3 = 0$.

Các bạn có nhận xét gì về lời giải mang đậm chất kỹ thuật của Long? Cách giải của bạn như thế nào?

NGUYỄN ANH VŨ

(*GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 455 (5.2015)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1: *Ông Chử Xuân Dũng, Phó Giám đốc Sở GD - ĐT Hà Nội, phát biểu trong lễ khai mạc kỳ thi học sinh giỏi toán học Hà Nội mở rộng năm 2015.*

TIN TỨC - HOẠT ĐỘNG

Ngày 2 tháng 4 năm 2015, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ cùng một số Công ty thành viên của NXBGD Việt Nam đã đến tham dự, chúc mừng Hội nghị tổng kết công tác Phát hành Sách giáo dục - Thiết bị - Thư viện trường học năm 2014 và triển khai công tác Phát hành Sách giáo dục năm học 2015 - 2016 của Công ty Cổ phần Phát hành sách và Thiết bị trường học Hưng Yên. Đại diện cho NXBGD Việt Nam có ông *Hoàng Lê Bách*, Phó TGĐ NXBGDVN kiêm GĐ NXBGD tại TP. Hà Nội; bà *Đỗ Thị Phương*, Phó GĐ; ông *Nguyễn Quốc Hồng*, Phó GĐ. Về phía Tạp chí TH&TT có ông *Trần Hữu Nam*, Tổng biên tập Tạp chí; ông *Nguyễn Anh Quân*, Trưởng ban Biên tập; ông *Nguyễn Khoa Điềm*, phụ trách phát hành. Cùng đoàn còn có bà *Nguyễn Thị Mơ*, TGĐ Công ty CP Sách và Thiết bị giáo dục Miền Bắc; bà *Trần Thị Như Hà*, Phó TGĐ Công ty CP Đầu tư và Phát triển giáo dục Hà Nội; ... Tại buổi lễ, NXBGD Việt Nam, Tạp chí TH&TT và các Công ty Thành viên đều có những phát biểu chúc mừng, những ý kiến đóng góp chân thành cho hội nghị.

Đến dự và chỉ đạo buổi lễ có ông *Nguyễn Văn Phê*, Phó GĐ Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Hưng Yên và Trưởng, Phó các Phòng, Ban chuyên môn; lãnh đạo của các trường THPT và các Phòng GD-ĐT trong toàn Tỉnh. Tại buổi lễ, ông *Nguyễn Văn Luận*, Chủ tịch HĐQT kiêm GĐ công ty đã tổng kết công tác phát hành trong năm 2014, nêu ra những thuận lợi, khó khăn chung của ngành cũng như tình hình cụ thể của đơn vị, đề ra phương hướng, chỉ tiêu, nhiệm vụ của năm 2015. Các đơn vị phát hành trong tỉnh cũng có nhiều ý kiến xây dựng, những kinh nghiệm của các đơn vị điển hình. Cuối chương trình là lễ tuyên dương, khen thưởng các đơn vị phát hành có thành tích xuất sắc nhất, Sở GD-ĐT đã tặng Giấy khen cho 8 tập thể và 4 cá nhân thuộc các Phòng GD-ĐT, các trường THPT trong toàn tỉnh làm tốt công tác Phát hành Sách giáo dục - Thiết bị - Thư viện trường học năm 2014.

Lễ tổng kết đã thành công tốt đẹp trong không khí ấm cúng của một đại gia đình. Một lần nữa, NXBGD Việt Nam chúc mừng thành công của Công ty trong năm 2014, chúc Công ty tiếp tục có những bước phát triển vững chắc trong năm 2015 và những năm tới.

Ông *Nguyễn Văn Phê* - PGĐ Sở GD-ĐT Hưng Yên phát biểu chỉ đạo Hội nghị.

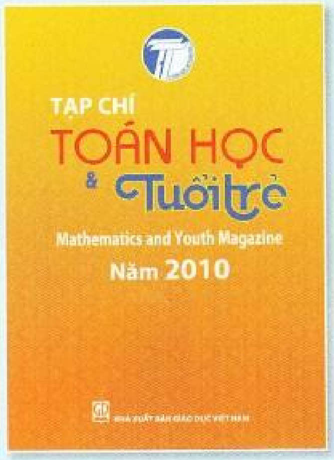
Ông *Hoàng Lê Bách* – Phó TGĐ NXBGD Việt Nam kiêm GĐ NXBGD tại Hà Nội tặng hoa chúc mừng các tập thể, cá nhân có thành tích xuất sắc.

Ông *Trần Hữu Nam* - Tổng biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tặng hoa chúc mừng ông *Nguyễn Văn Luận* - Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc CTCP Phát hành sách và Thiết bị trường học Hưng Yên.

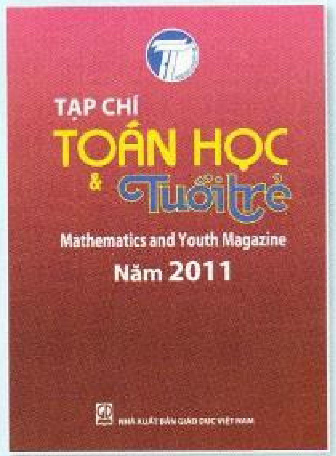
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC

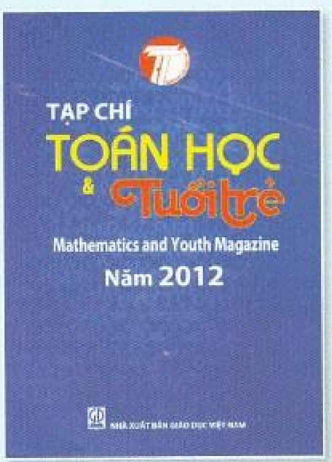
BỘ ĐÓNG TẬP
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



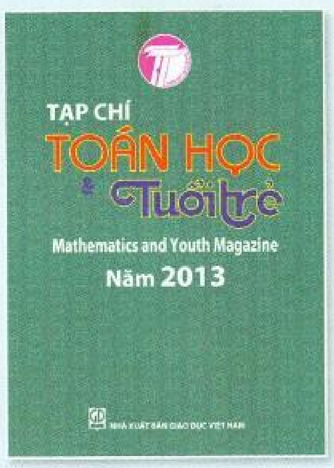
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



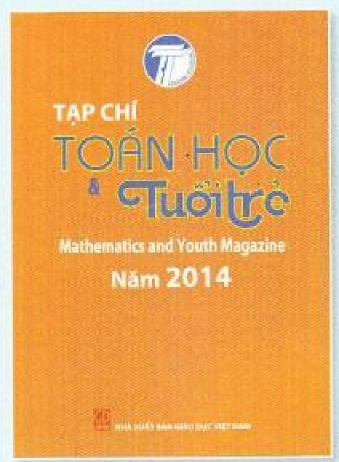
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B GIẢNG VÕ, ĐỐNG ĐA, HÀ NỘI
- Điện thoại – Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT5M5
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2015
Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng