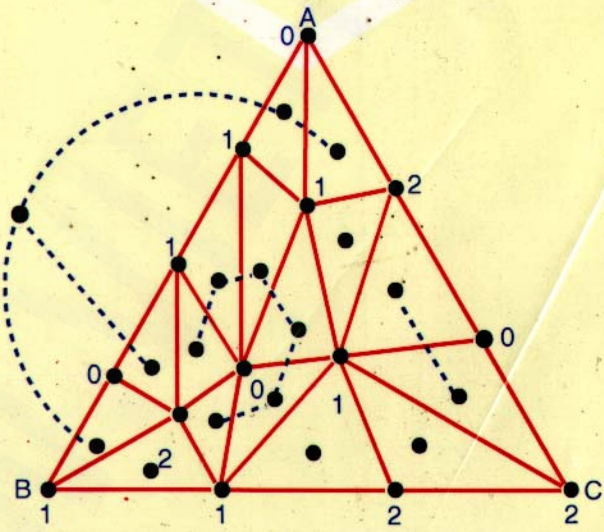
LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Sách dùng cho Sinh Viên các trường Đại học

NGÀNH TIN HỌC



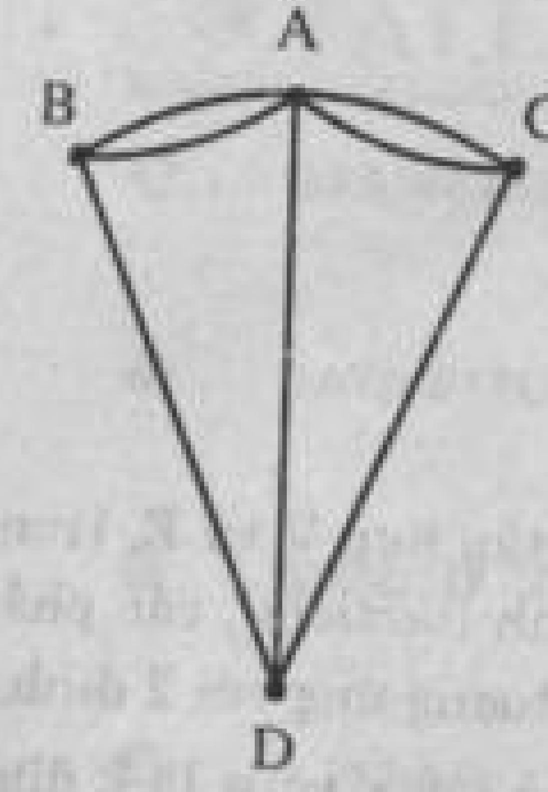
MỤC LỤC

1.2 BIỂU ĐỒ

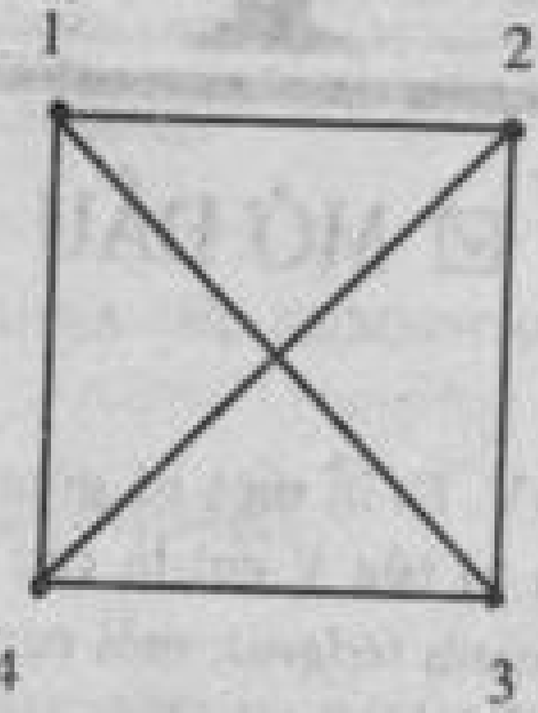
Một đồ thị thường được biểu diễn bằng một biểu đồ như sau:.

Mỗi đỉnh biểu diễn thành 1 điểm và mỗi cạnh biểu diễn thành 1 đoạn nối 2 đỉnh tương ứng với nó.

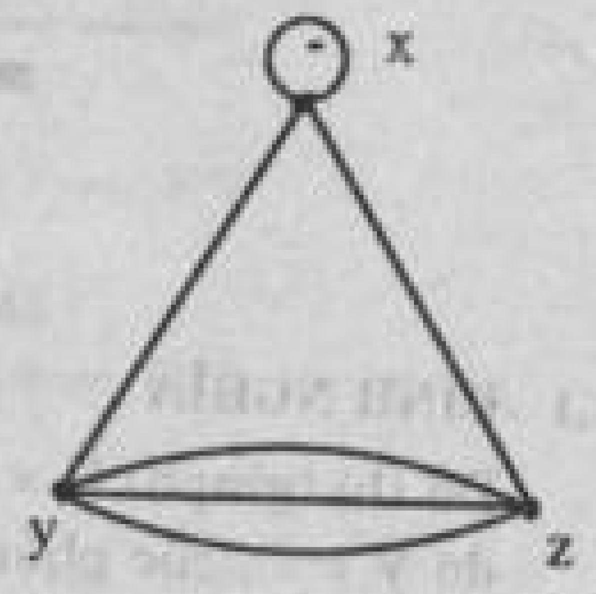
THÍ DỤ 1: Dưới đây là biểu đồ của vài đồ thị.



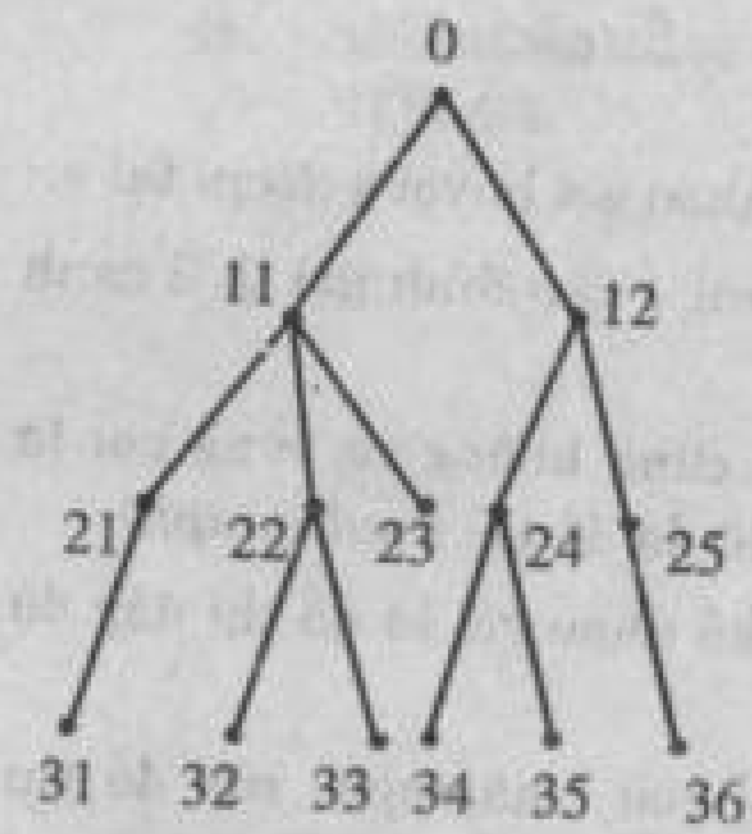
G_1



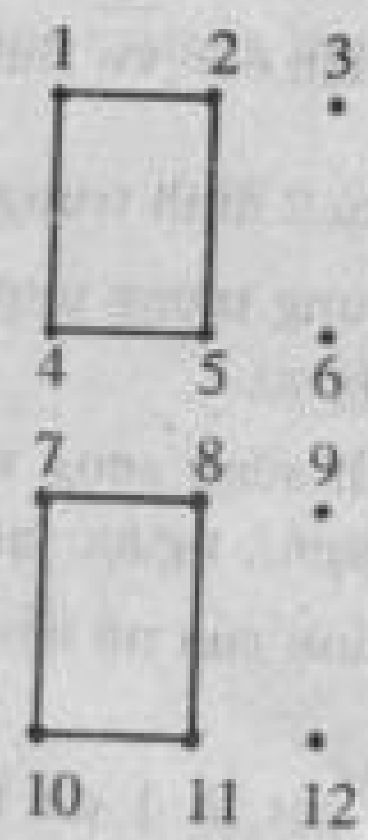
G_2



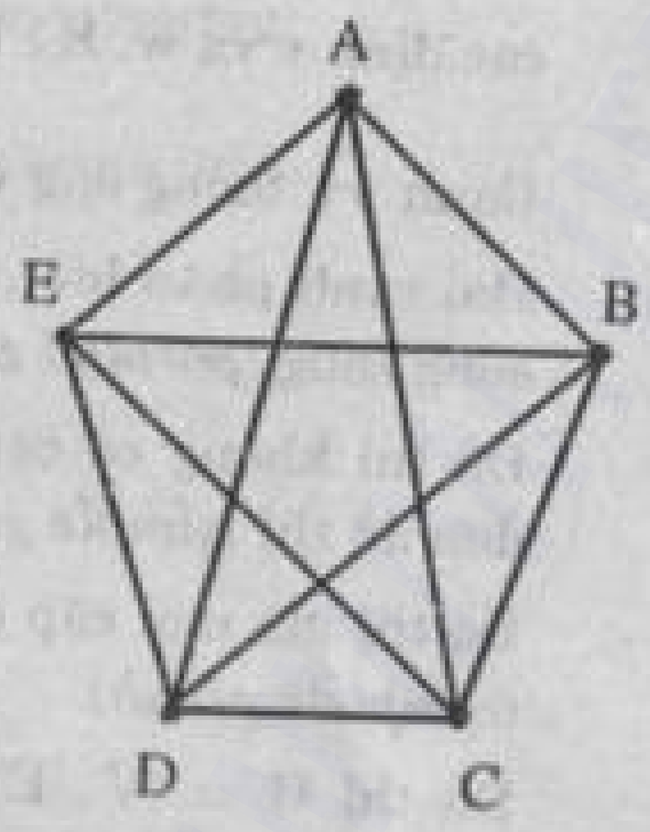
G_3



G_4

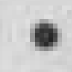


G_5

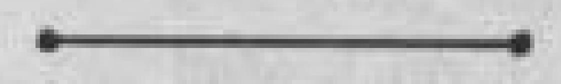


G_6 □

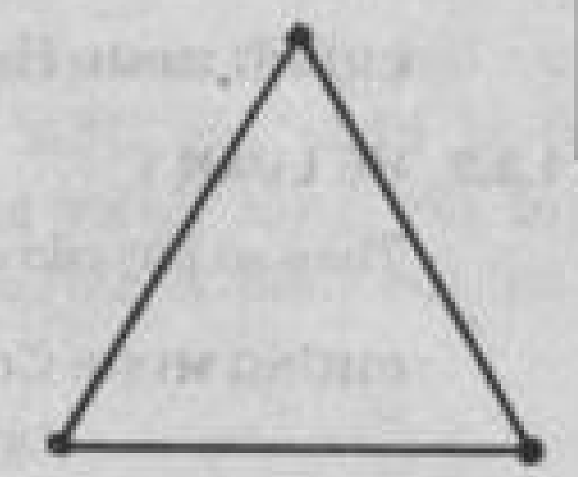
THÍ DỤ 2: Ta dùng ký hiệu K_n để chỉ đơn đồ thị đầy đủ có n đỉnh. Biểu đồ của K_n với $1 \le n \le 5$ như sau :



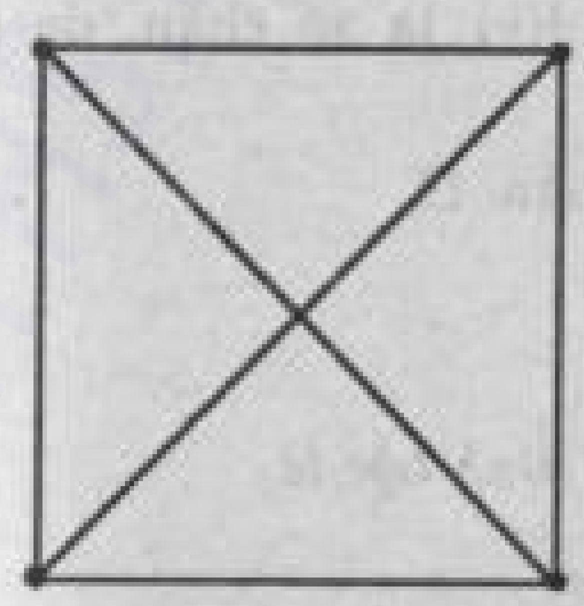
K_1



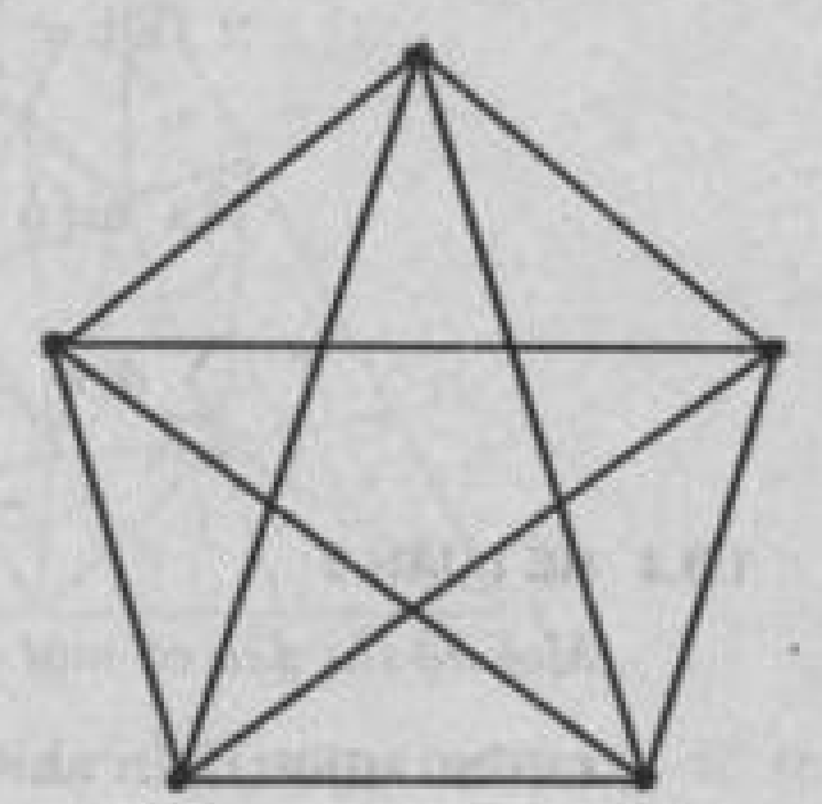
K_2



K_3



K_4



K_5 □

1.3 BẬC CỦA MỘT ĐỈNH

Xét một đỉnh v trong đồ thị G. Số cạnh tới v, trong đó mỗi vòng tại v được kể là 2 cạnh tới v, gọi là bậc *(degree)* của v và ký hiệu là d(v).

Đỉnh có bậc 0 gọi là đỉnh cô lập *(isolated vertex)*.

Đỉnh có bậc 1 gọi là đỉnh treo *(pendant vertex)*, cạnh tới đỉnh treo gọi là cạnh treo *(pendant edge)*.

Đồ thị mà mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập gọi là đồ thị rỗng *(null graph)*.

1.3.1 ĐỊNH LÝ

Với mọi đồ thị G = (V, E), ta có: $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

CHỨNG MINH: Hiển nhiên vì mỗi cạnh đều tới 2 đỉnh . □

1.3.2 HỆ LUẬN 1

Tổng số bậc của các đỉnh bậc lẻ trong 1 đồ thị là 1 số chẵn.

CHỨNG MINH: Coi đồ thị G = (V, E). Gọi V_0 và V_e lần lượt là tập hợp các đỉnh bậc lẻ và tập hợp các đỉnh bậc chẵn của G. Ta có :

$$2\,|E| = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V_0} d(v) + \sum_{v\in V_e} d(v)$$

Mà hiển nhiên $\sum_{v\in V_e} d(v)$ là số chẵn, do đó $\sum_{v\in V_0} d(v)$ cũng là số chẵn. □

1.3.3 HỆ LUẬN 2

Mọi đồ thị đều có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

1.3.4 HỆ LUẬN 3

Đồ thị K_n có $\frac{1}{2}n(n-1)$ cạnh.

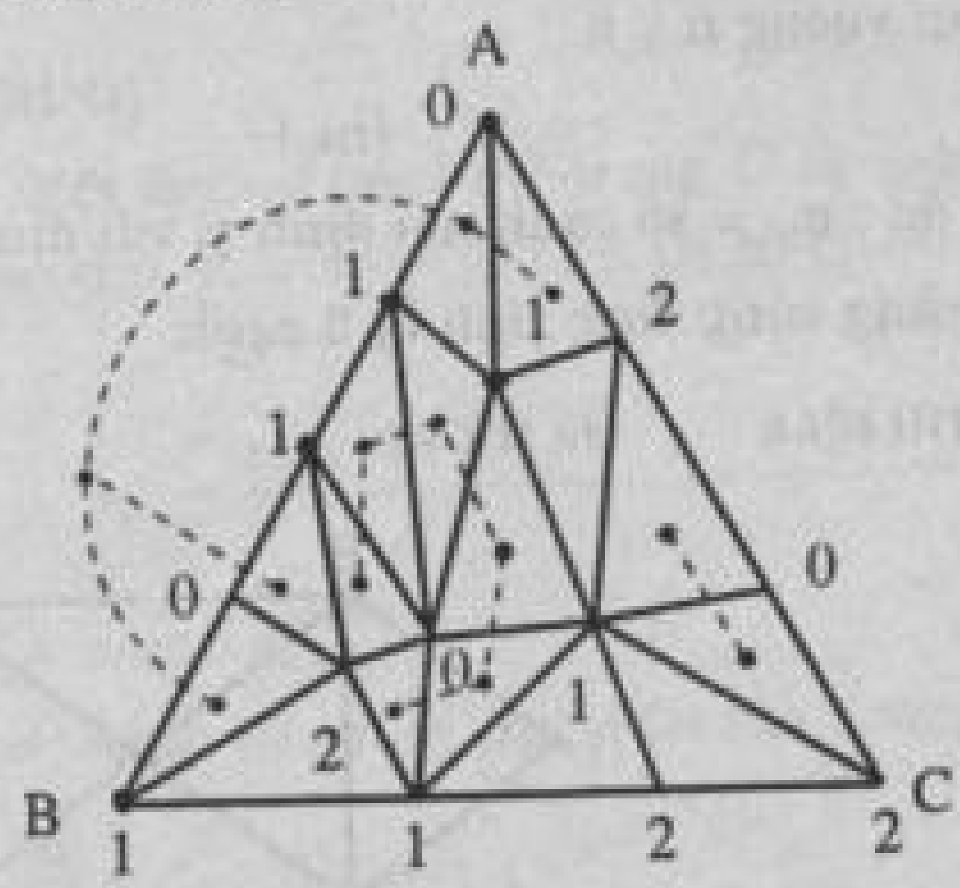
CHỨNG MINH: Mọi đỉnh của K_n đều có bậc là n – 1. □

THÍ DỤ 3: Một đồ thị G = (V, E) có 24 cạnh và mỗi đỉnh của G đều có bậc là 4. Tìm số đỉnh G.

Ta có : $2.24 = 4.|V| \Rightarrow |V| = 12$. □

THÍ DỤ 4: Xét tam giác có 3 đỉnh là A, B, C được ghi nhãn lần lượt là 0, 1, 2. Chia ABC thành nhiều tam giác nhỏ và ghi nhãn cho các đỉnh mới theo điều kiện sau : Các đỉnh mới nằm trên cạnh AB được ghi nhãn 0 hoặc 1, các đỉnh mới nằm trên cạnh BC được ghi nhãn 1 hoặc 2, các đỉnh mới nằm trên cạnh CA được

ghi nhãn 2 hoặc 0, còn các đỉnh mới [redacted] bên trong tam giác ABC ghi nhãn là [redacted] hoặc 2 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 tam giác nhỏ mà 3 đỉnh của nó có nhãn là 0, 1 và 2.



Để giải bài toán này, ta lập mô hình đồ thị sau : Chọn trong mỗi tam giác nhỏ 1 điểm làm đỉnh, và thêm 1 đỉnh ở bên ngoài tam giác ABC, 2 đỉnh sẽ được nối với nhau bằng 1 cạnh nếu 2 tam giác nhỏ tương ứng có 2 đỉnh chung là 0 và 1. Dễ thấy rằng :

- Đỉnh ở ngoài tam giác ABC có bậc lẻ vì các đỉnh trên cạnh AB được ghi nhãn thay đổi giữa 0 và 1 một số lẻ lần.
- Tam giác nhỏ có 3 đỉnh ghi nhãn khác nhau thì đỉnh tương ứng có bậc 1.
- Tam giác nhỏ có 3 đỉnh ghi nhãn không đôi một khác nhau thì đỉnh tương ứng có bậc 0 hay bậc 2.

Vì số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn nên phải tồn tại 1 tam giác nhỏ có 3 đỉnh ghi nhãn khác nhau. □

1.4 MA TRẬN LIÊN KẾT

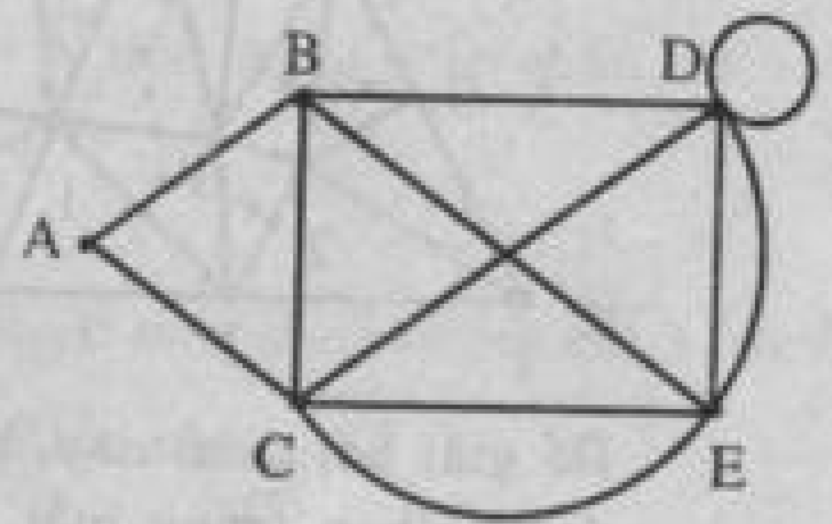
Cho đồ thị G có n đỉnh là $v_1, v_2, ..., v_n$. Ma trận liên kết *(adjacency matrix)* của G, với thứ tự các đỉnh là $v_1, v_2, ..., v_n$ là ma trận vuông $n \times n$

$$[m_{ij}]$$

trong đó , m_{ij} = số cạnh nối đỉnh v_i với đỉnh v_j $(1 \le i, j \le n)$.

Lưu ý rằng vòng được tính là 2 cạnh.

THÍ DỤ 5: Đồ thị sau :



có ma trận liên kết là :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.4.1 ĐỊNH LÝ

Tổng các phần tử trên hàng (hoặc cột) thứ i của ma trận liên kết bằng bậc của đỉnh v_i, nghĩa là :

$$d(v_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}$$

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

1.5 ĐƯỜNG VÀ CHU TRÌNH

Cho một đồ thị G. Một đường *(path)* P trong G là một dãy các đỉnh $v_0, v_1, ..., v_k$ sao cho $e_i = \overline{v_{i-1}v_i}$ $(1 \le i \le k)$ là các cạnh đôi một khác nhau.

Ta ký hiệu : $P = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_k} v_k$

hay $P = v_0v_1...v_k$

Số k (là số cạnh tạo thành P) gọi là chiều dài của đường P.

Ký hiệu : $l(P) = k$

Ta nói đường P nối 2 đỉnh v_0 và v_k, các đỉnh v_i $(0 \le i \le k)$ và các cạnh e_i $(1 \le i \le k)$ gọi là nằm trên đường P.

Một đỉnh xem là một đường có chiều dài bằng 0.

Một chu trình *(cycle/circuit)* trong G là một đường trong G có dạng $c = v_0v_1...v_{k-1}v_0$ với $l(c) \ge 1$.

Ta không cần chú ý đến đỉnh nào là đỉnh bắt đầu (và cũng là đỉnh kết thúc) của chu trình, nói cách khác, các chu trình $v_0v_1...v_{i-1}v_iv_{i+1}...v_{k-1}v_0$ và $v_iv_{i+1}...v_{k-1}v_0v_1...v_{i-1}v_i$ được đồng nhất với nhau là một.

Một đường (hay chu trình) gọi là đơn giản *(simple)* nếu nó không đi qua đỉnh nào quá một lần.

1.6 SỰ LIÊN THÔNG

Một đồ thị gọi là liên thông *(connected)* nếu mọi cặp đỉnh của nó đều được nối với nhau bởi một đường.

Xét một đồ thị G = (V, E). Trên tập hợp V, ta định nghĩa hệ thức ~ như sau :

$\forall v, w \in V,\ v \sim w \Leftrightarrow$ *có 1 đường trong G nối v và w*

Dễ thấy rằng ~ là 1 hệ thức tương đương trên V và hệ thức ~ phân cát V thành các lớp tương đương. Mỗi lớp tương đương này tương ứng với 1 đồ thị con liên thông của G gọi là 1 thành phần liên thông *(connected component)* của G. Hai thành phần liên thông khác nhau của G thì cách biệt, nghĩa là chúng không có đỉnh chung.

Hiển nhiên G liên thông $\Leftrightarrow$ G có đúng 1 thành phần.

THÍ DỤ 6: Chứng minh kết quả sau :

Một đơn đồ thị G có n đỉnh và k thành phần thì có tối đa là $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ cạnh.

Gọi n_i và c_i ($1 \le i \le k$) lần lượt là số đỉnh và số cạnh của thành phần thứ i của G. Ta có :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)^2 \le (n-k)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i^2 \le (n-k)^2 + 2n - k$$

Vì G là đơn đồ thị nên giữa 2 đỉnh, có nhiều nhất 1 cạnh nối chúng, do đó nếu gọi c là số cạnh của G thì :

$$c = \sum_{i=1}^{k} c_i \le \sum_{i=1}^{k}\binom{n_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(n_i^2 - n_i)$$

$$\le \frac{1}{2}\left[(n-k)^2 + 2n - k - n\right] = \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

1.7 SỰ ĐẲNG HÌNH

Hai đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$ gọi là đẳng [redacted] *(isomorphic)* với nhau nếu có 1 phép tương ứng 1-1 (song ánh) giữa hai tập hợp V, V' và có 1 phép tương ứng 1-1 giữa hai tập hợp E, E' sao cho nếu cạnh $e = \overline{vw} \in E$ tương ứng với cạnh $e' = \overline{v'w'} \in E'$ thì cặp đỉnh $v, w \in V$ cũng là tương ứng của cặp đỉnh $v', w' \in V'$.

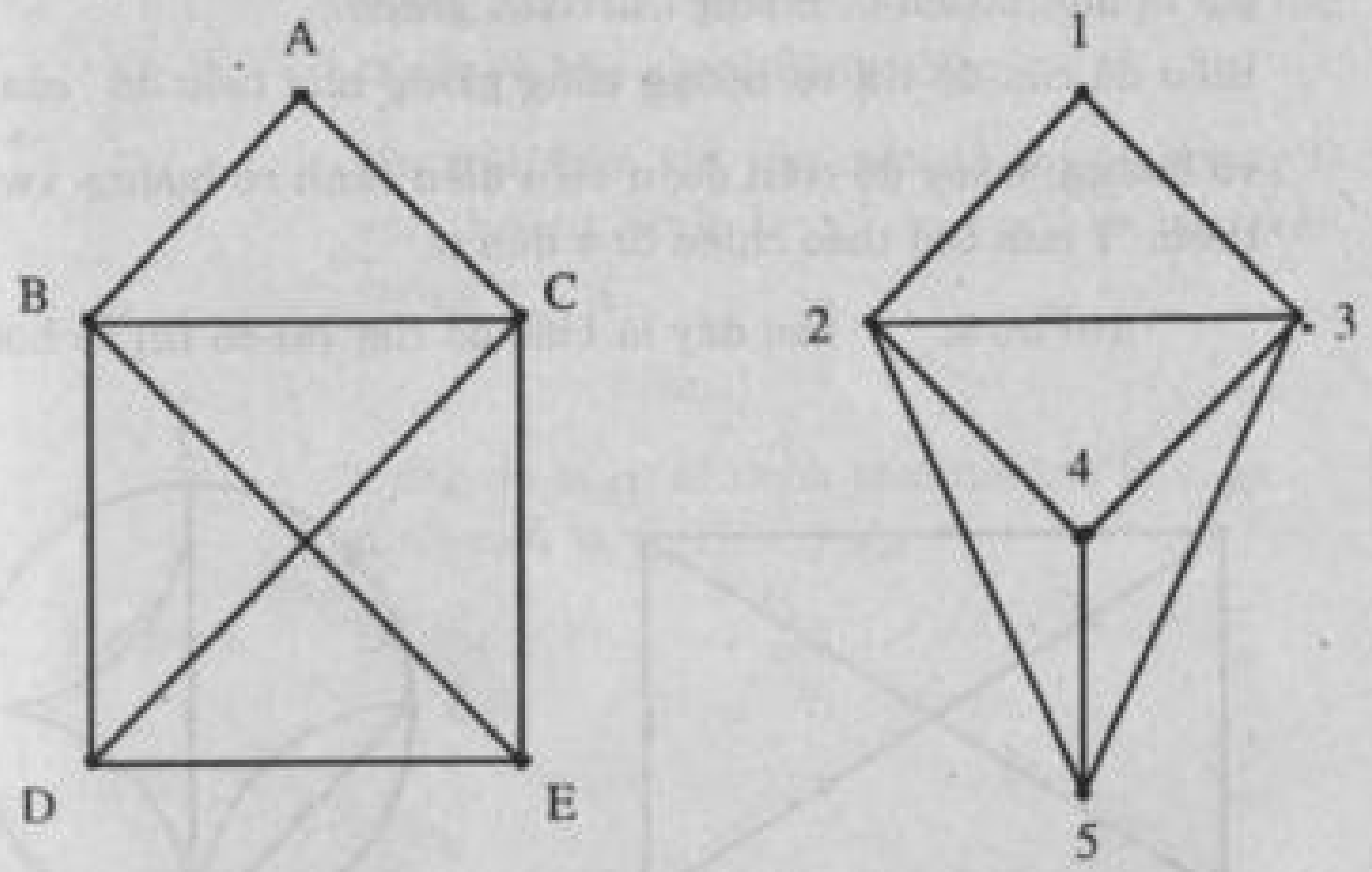
Hiển nhiên nếu 2 đồ thị đẳng hình với nhau thì chúng phải có :

- Cùng số đỉnh.
- Cùng số đỉnh bậc k, $\forall$k nguyên ≥ 0.
- Cùng số cạnh.
- Cùng số thành phần.

Nếu hai đồ thị có ma trận liên kết (theo 1 thứ tự đỉnh nào đó) bằng nhau thì chúng đẳng hình với nhau.

THÍ DỤ 7: Các cặp đồ thị sau đẳng hình với nhau :

a)



5. Tìm đơn đồ thị mà mọi đỉnh của nó đều có bậc 3 và có :

a) 4 đỉnh c) 6 đỉnh

b) 5 đỉnh d) 8 đỉnh.

6. Tìm số đỉnh của đồ thị G biết rằng G có :

a) 12 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc 2.

b) 15 cạnh , 3 đỉnh bậc 4 và các đỉnh còn lại bậc 3.

c) 6 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc bằng nhau.

7. Một đồ thị có 19 cạnh và mỗi đỉnh đều có bậc ≥ 3. Đồ thị này có tối đa là bao nhiêu đỉnh ?

8. Biết rằng mọi đỉnh của một đồ thị G đều có bậc bằng số lẻ p. Chứng minh rằng số cạnh của G là một bội số của p.

9. Có thể có 1 nhóm 9 người trong đó mỗi người đều chỉ quen biết đúng 5 người khác trong nhóm hay không ?

10. Coi đơn đồ thị G = (V, E) với :

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{và } E = \{\overline{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, \; i \neq j, \; i + j \text{ chẵn}\}$$

Chứng minh rằng G không liên thông. Xác định số thành phần của G.

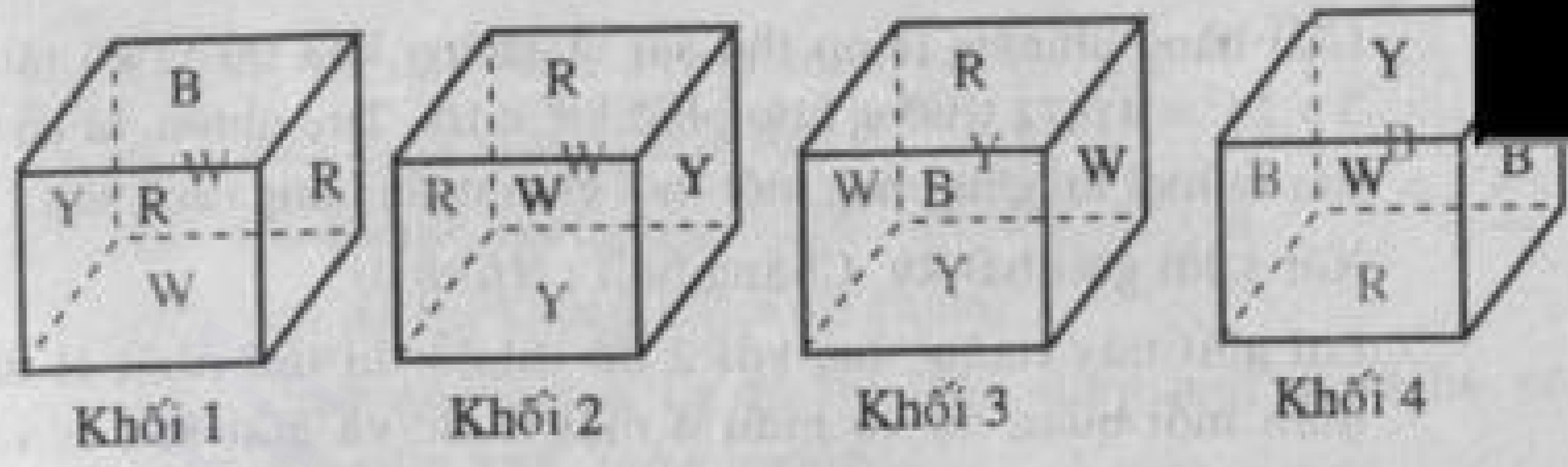
11. Coi đơn đồ thị G = (V, E) với $V = \{2, 3, \ldots, 41\}$

và $E = \{\overline{ij} \mid 2 \leq i, j \leq 41, \; i \neq j$, i và j không nguyên tố cùng nhau$\}$.

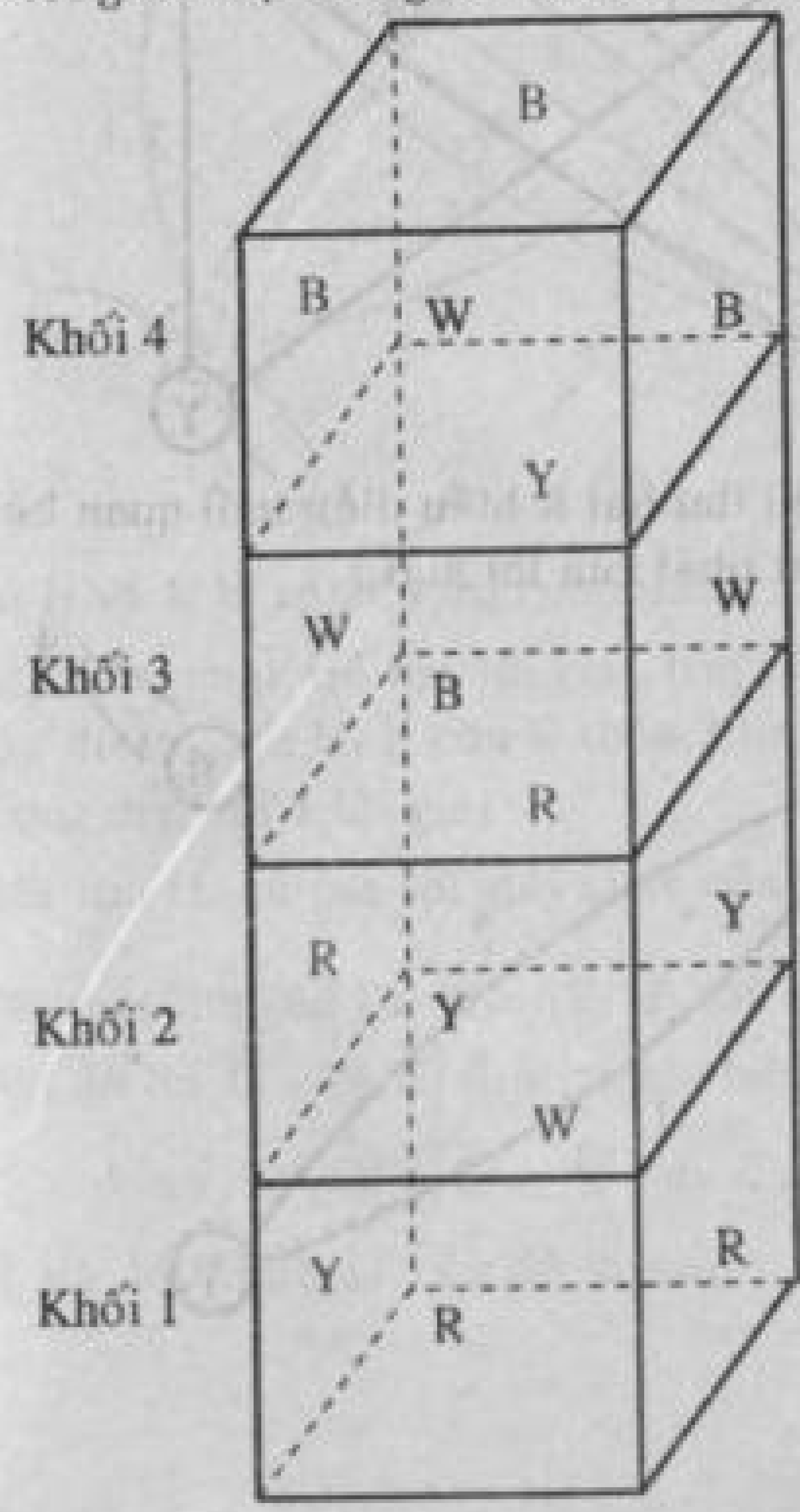
G có mấy thành phần ?

12. *(Instant Insanity Puzzle)*

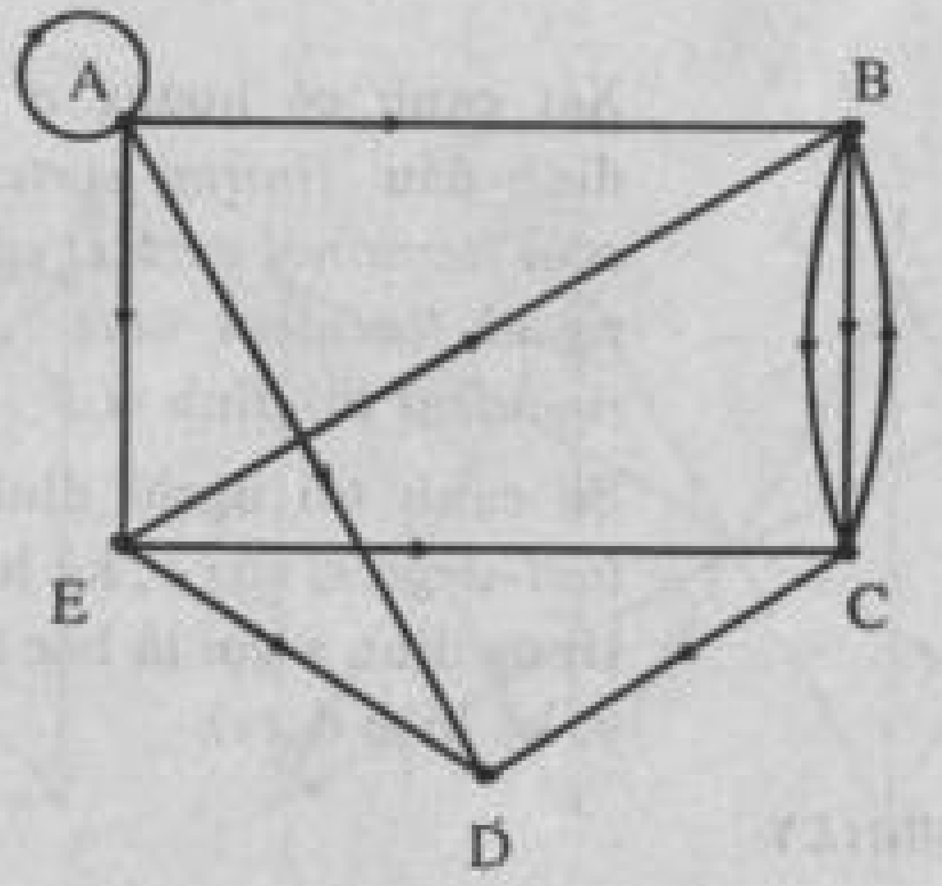
Có 4 khối lập phương, mỗi mặt của các khối này được tô bằng một trong 4 màu :đỏ (R), xanh (B), vàng (Y), trắng (W)



Tìm cách xếp 4 khối này thành một hình hộp, khối này nằm trên khối kia sao cho trên mỗi mặt xung quanh của hình hộp đều xuất hiện đủ 4 màu. Hiển nhiên, tùy theo cách tô màu 4 khối lập phương mà bài toán có thể không có lời giải hoặc cũng có thể có nhiều lời giải.



(Hình a)



có ma trận liên kết là :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \square$$

1.8.2 ĐỊNH LÝ

Tổng số các phần tử trên hàng (cột) thứ i của ma trận liên kết của đồ thị có hướng G bằng bậc ngoài (trong) của đỉnh v_i, nghĩa là :

$$d_{out}(v_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \quad \text{và} \quad d_{in}(v_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}$$

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

Một đường trong 1 đồ thị có hướng G là một dãy hữu hạn các đỉnh $v_0v_1...v_k$ sao cho $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ là các cạnh đôi một khác nhau của G.

Một chu trình trong G là một đường trong G có dạ[redacted] $v_0v_1...v_{k-1}v_0$.

Một đồ thị có hướng G gọi là liên thông mạnh *(strongly connected)* nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt v, w luôn luôn tồn tại 1 đường nối v với w.

Đồ thị có hướng G gọi là liên thông nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông.

Một đồ thị có hướng G gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là đầy đủ.

■ BÀI TẬP

Trừ bài tập 16, đồ thị nói đến trong tất cả các bài tập còn lại đều là vô hướng.

1. Vẽ 1 đơn đồ thị có 4 đỉnh với bậc các đỉnh là 3, 2, 2, 1.

2. Vẽ 1 đơn đồ thị mà mọi đỉnh của nó đều có bậc là k ($1 \le k \le 5$).

3. Có bao nhiêu đồ thị cùng nhận V = {1, 2,...,n} là tập hợp đỉnh và thỏa điều kiện :

a) là đơn đồ thị.

b) không có vòng và có nhiều nhất 2 cạnh song song giữa mỗi cặp đỉnh.

c) có nhiều nhất 1 vòng tại mỗi đỉnh và không có cạnh song song.

d) là đơn đồ thị và tập hợp cạnh $\subset \{\overline{ij} \mid 1 \le i, j \le n,\ i + j \text{ lẻ}\}$

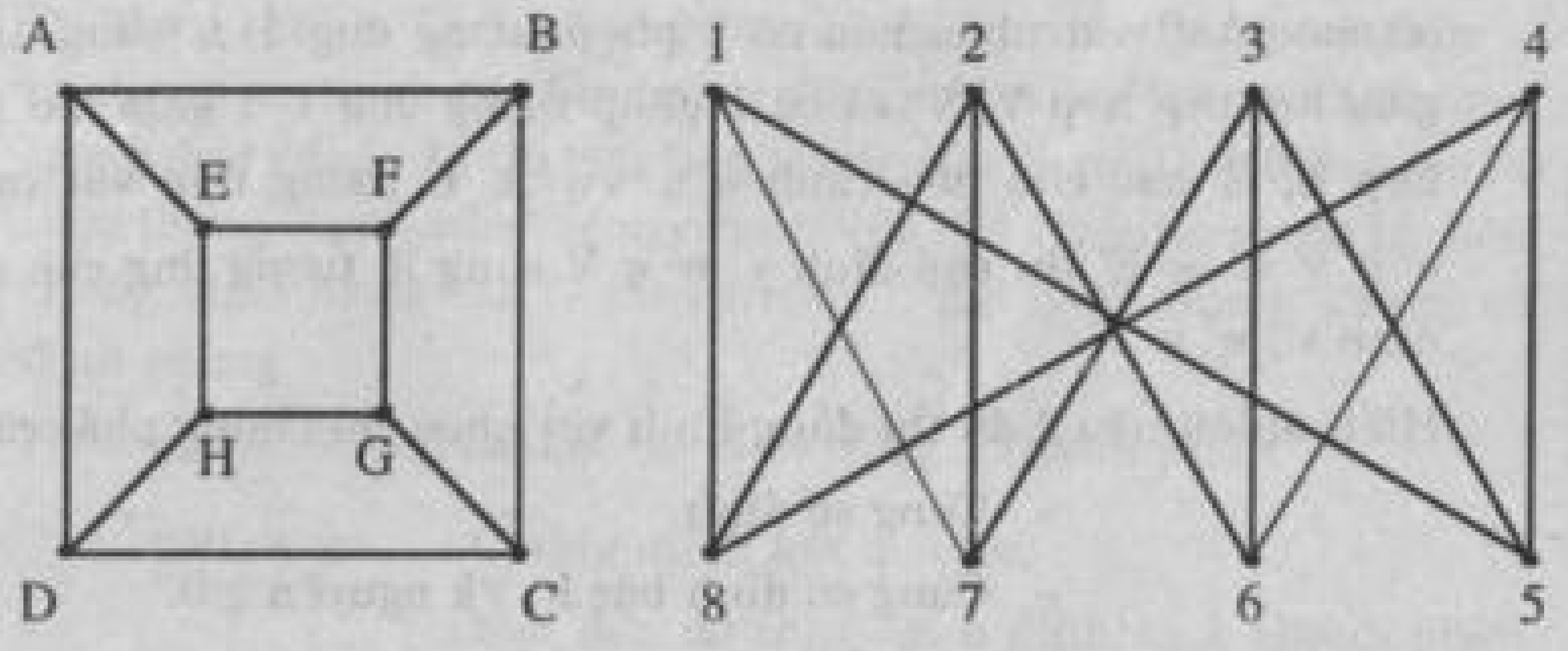
4. Vẽ đơn đồ thị có 6 đỉnh , trong đó có :

a) 3 đỉnh bậc 3 và 3 đỉnh bậc 1.

b) bậc các đỉnh là 1, 2, 3, 3, 4, 5.

c) bậc các đỉnh là 2, 2, 4, 4, 4, 4.

b)

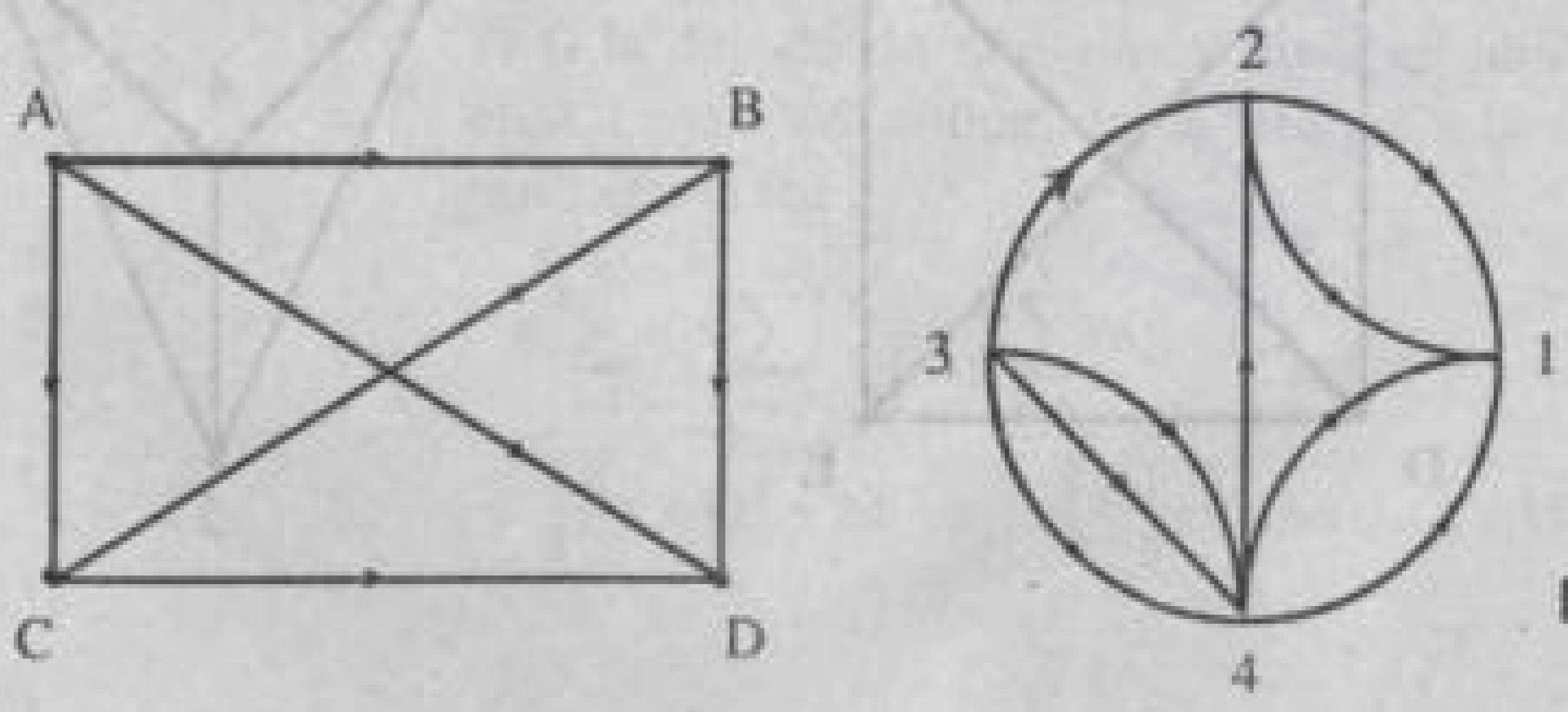


1.8 ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Đồ thị như đã định nghĩa ở trên gọi là đồ thị vô hướng *(undirected graph)*. Nếu bây giờ, mỗi cạnh $e \in E$ được cho tương ứng với 1 cặp thứ tự (v, w) của 2 đỉnh $v, w \in V$ thì ta nói e là 1 cạnh có hướng từ v đến w, ký hiệu $e = \overrightarrow{vw}$, và đồ thị nhận được gọi là một đồ thị có hướng *(directed graph)*.

Biểu đồ của đồ thị có hướng cũng giống như biểu đồ của đồ thị vô hướng, trong đó trên đoạn biểu diễn cạnh có hướng $\overrightarrow{vw}$, ta vẽ thêm 1 mũi tên theo chiều từ v đến w.

THÍ DỤ 8: Sau đây là biểu đồ của vài đồ thị có hướng:



□

Xét cạnh có hướng $e = \overrightarrow{vw}$. Đỉnh v gọi [redacted] đỉnh đầu *(initial vertex)* và đỉnh w là đỉnh cuối *(terminal vertex)* của e, ta nói cạnh e tới ngoài *(incident out)* đỉnh v và tới trong *(incident in)* đỉnh w.

Số cạnh tới ngoài đỉnh v gọi là bậc ngoài *(out-degree)* của v, ký hiệu $d_{out}(v)$; số cạnh tới trong đỉnh v gọi là bậc trong *(in-degree)* của v, ký hiệu $d_{in}(v)$.

1.8.1 ĐỊNH LÝ

Trong một đồ thị có hướng G, tổng các bậc trong và tổng các bậc ngoài của các đỉnh thì bằng nhau và cùng bằng số cạnh của G.

CHỨNG MINH: Hiển nhiên vì mỗi cạnh đều tới trong 1 đỉnh và tới ngoài 1 đỉnh. □

Một đồ thị có hướng gọi là cân bằng *(balanced)* nếu mọi đỉnh của nó đều có bậc trong và bậc ngoài bằng nhau.

Ma trận liên kết của một đồ thị có hướng G với thứ tự đỉnh là $v_1, v_2, \dots, v_n$ là ma trận vuông $n \times n$

$$[m_{ij}]$$

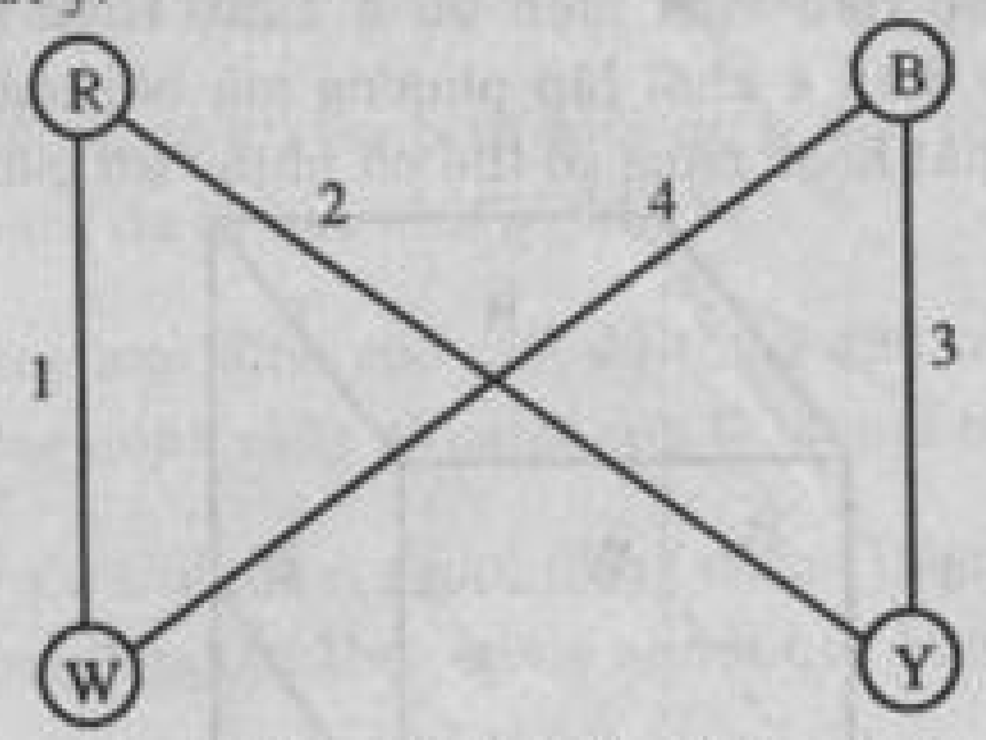
trong đó m_{ij} = số cạnh có đỉnh đầu là v_i và đỉnh cuối là v_j $(1 \le i, j \le n)$

THÍ DỤ 9: Đồ thị :

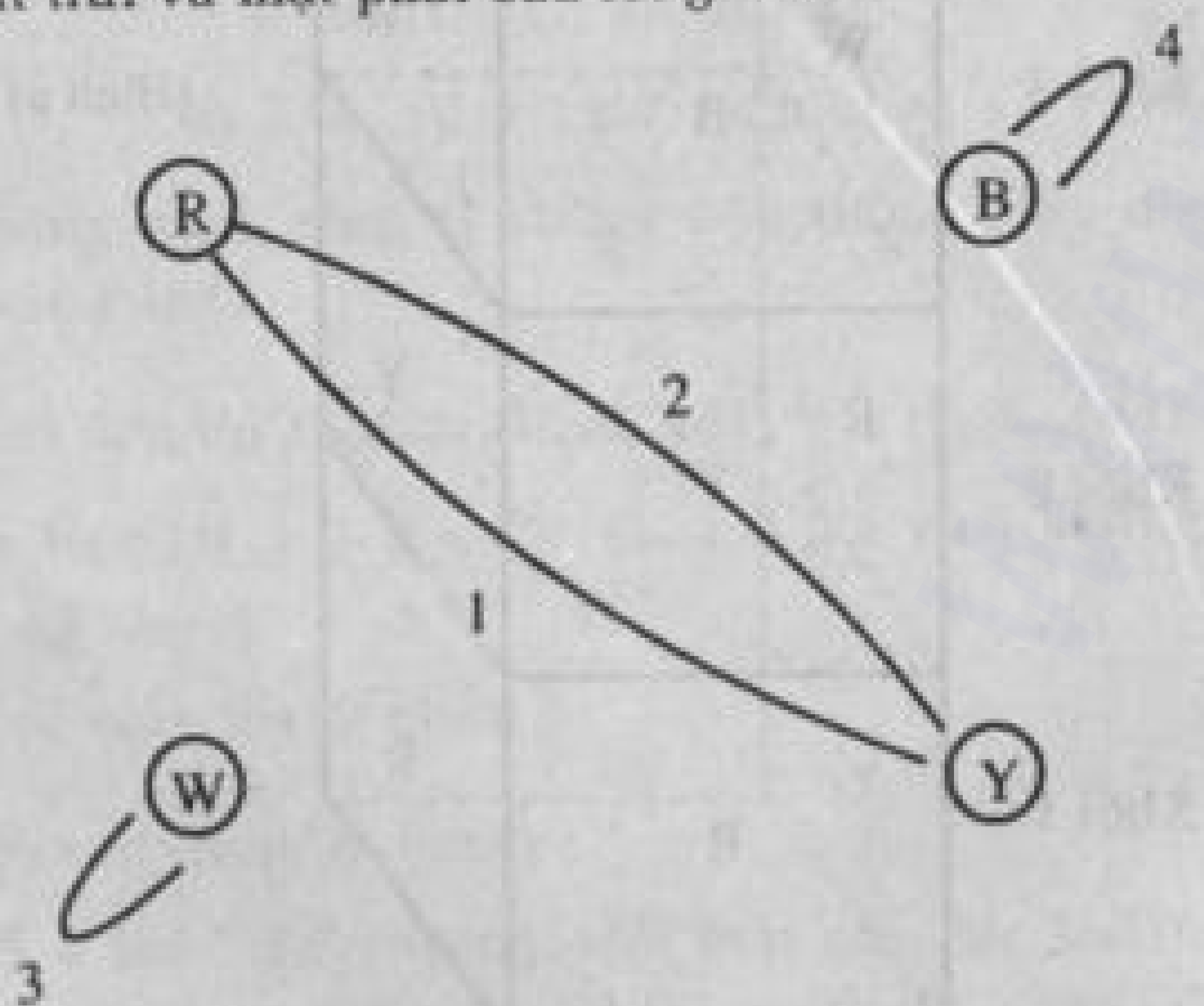
Giải bằng phương pháp thử sai là không khả thi vì có tất cả $3 \times 24^3 = 41472$ trường hợp phải kiểm tra. Tuy nhiên, ta có thể tìm ra mọi lời giải trong một thời gian ngắn bằng cách sau :

Xét 1 lời giải bất kỳ. Chẳng hạn : *(Hình a)*

Lời giải này tương ứng với 2 đồ thị,đồ thị thứ nhất H biểu diễn mối quan hệ về màu ở mặt trước và mặt sau của lời giải : đồ thị có 4 đỉnh là 4 màu, nếu khối lập phương i có màu của mặt trước và mặt sau là x và y thì có cạnh nhãn i nối x với y.



Tương tự, đồ thị thứ hai K biểu diễn mối quan hệ về màu ở mặt trái và mặt phải của lời giải :



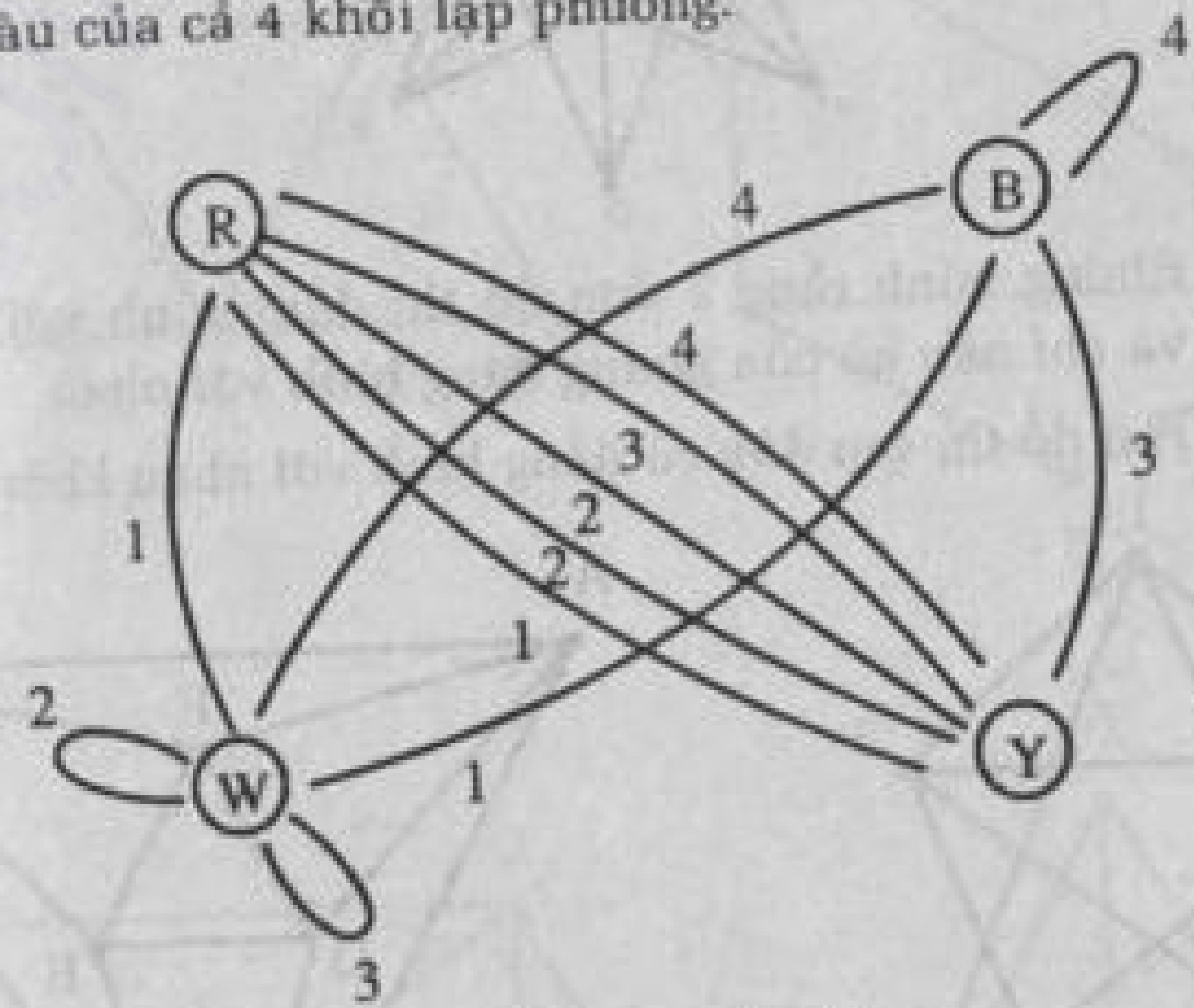
Hai đồ thị này thỏa 3 tính chất sau :

(i) Mỗi đỉnh đều có bậc là 2.

(ii) Có 4 cạnh mang nhãn lần lượt là 1, 2, 3, 4.

(iii) Hai đồ thị không có cạnh chung.

Mặt khác nếu gọi G là đồ thị biểu diễn mối quan hệ về màu của cả 4 khối lập phương.



thì H và K là các đồ thị con của G.

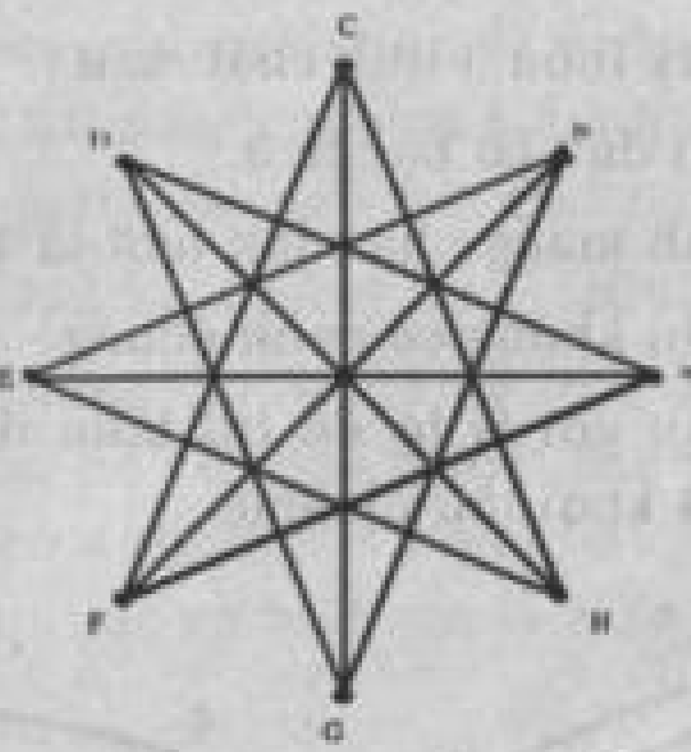
Vậy tổng quát, để tìm lời giải, trước hết ta vẽ đồ thị G. Mỗi cặp đồ thị con H, K của G thỏa 3 tính chất (i)-(iii) nêu trên tương ứng với 1 lời giải.

Hãy tìm tất cả các lời giải khác của bài toán cụ thể trên.

13. Xét một đơn đồ thị G = (V, E). Bù *(complement)* của G là đơn đồ thị $\overline{G} = (V, \overline{E})$ định nghĩa bởi:

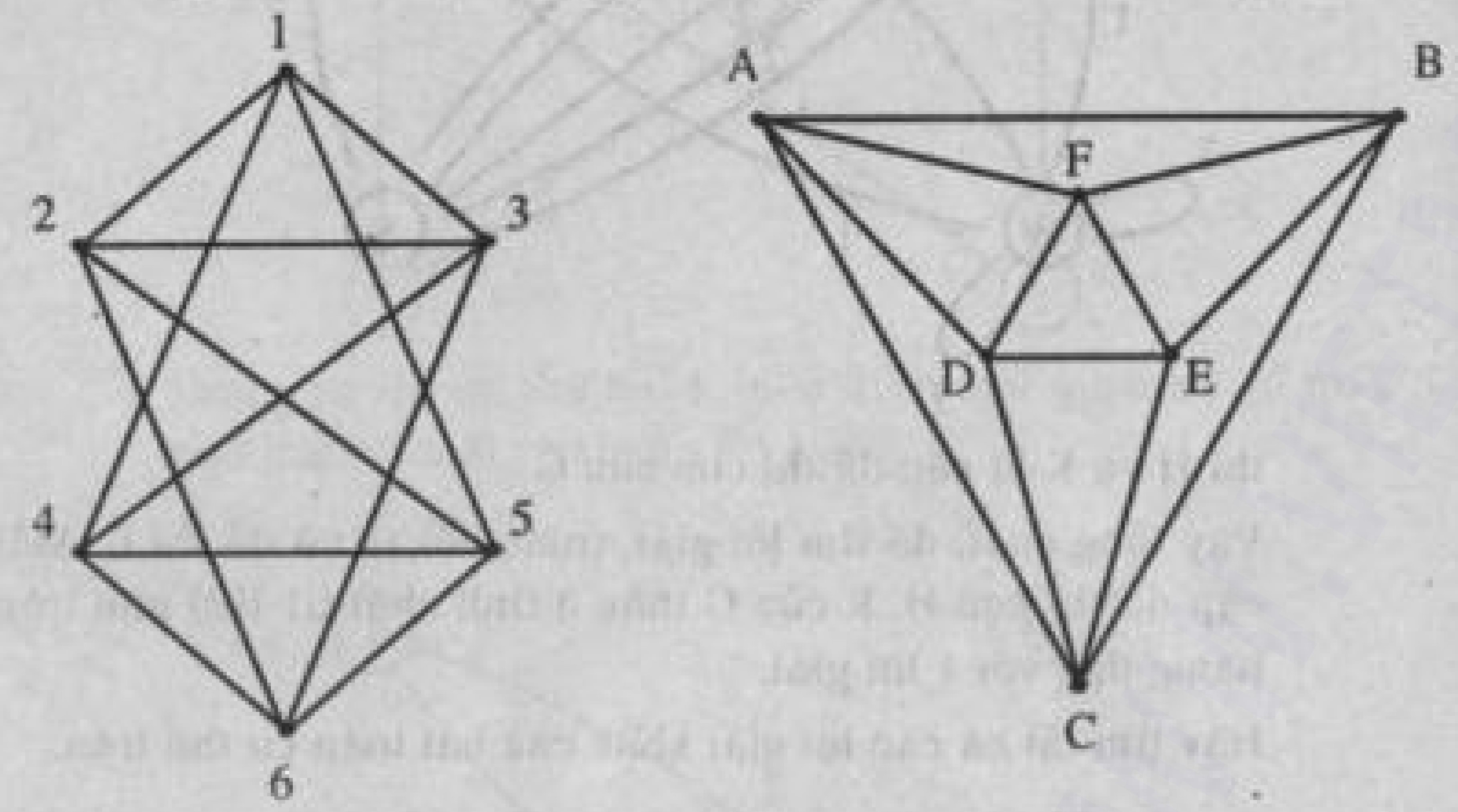
$$\forall v, w \in V,\ \overline{vw} \in \overline{E} \iff \overline{vw} \notin E$$

a) Vẽ đồ thị bù $\overline{G}$ của đồ thị sau :



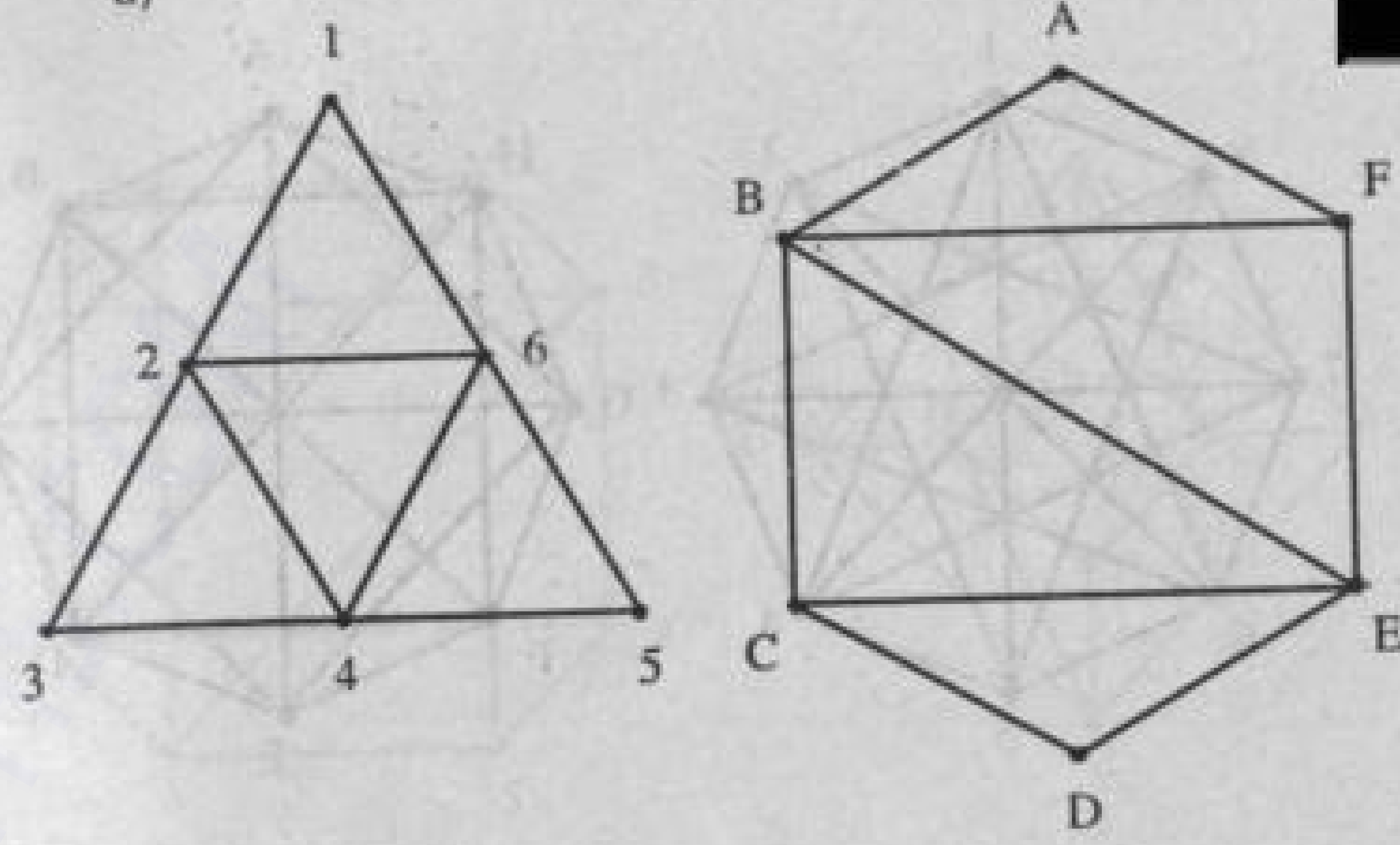
b) Chứng minh rằng 2 đơn đồ thị đẳng hình với nhau nếu và chỉ nếu bù của chúng đẳng hình với nhau.

c) Hai đồ thị sau đây có đẳng hình với nhau không ?

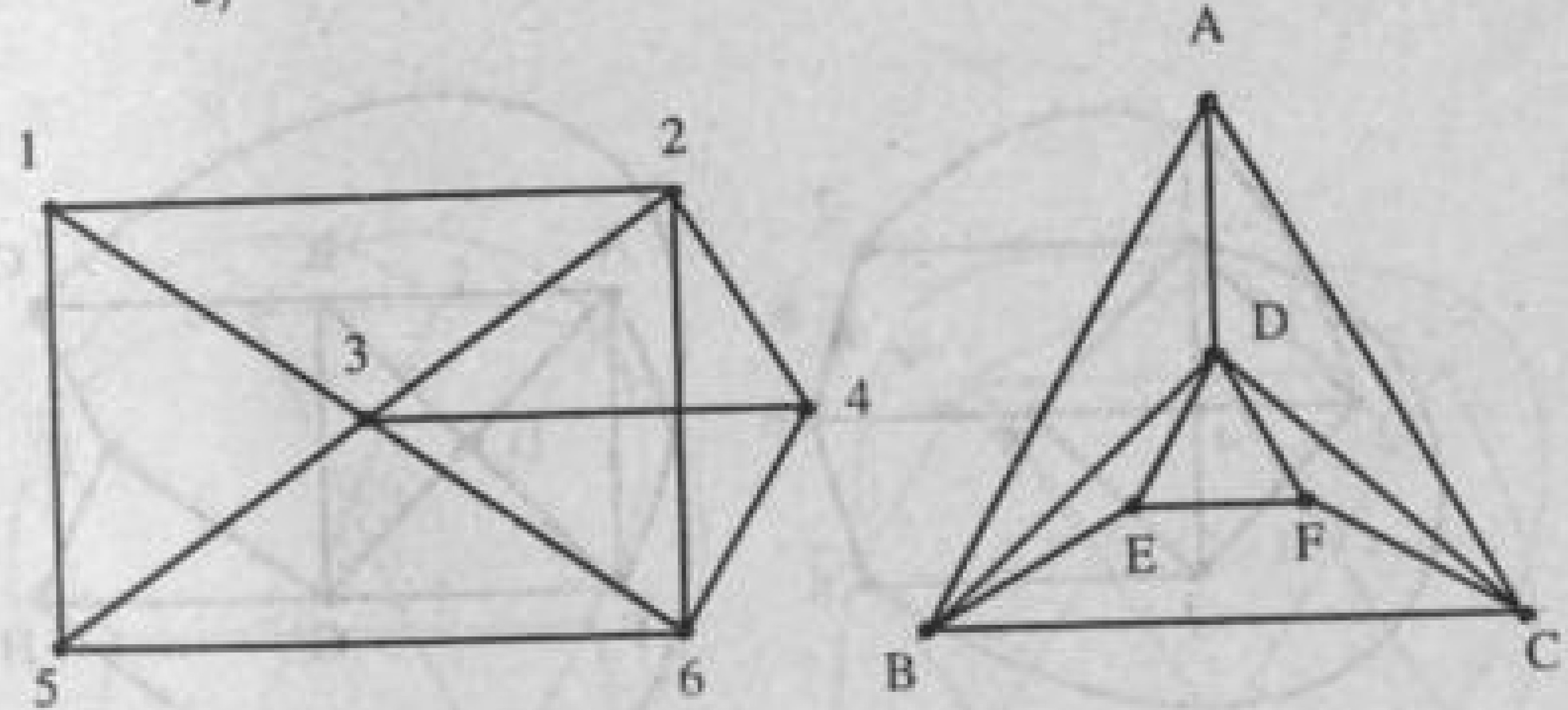


14. Các cặp đồ thị sau có đẳng hình với nhau không ? Giải thích.

a)



b)



- $\forall i = 1,\ldots,k-1,\ \overrightarrow{v_i x} \in E$

$$\Rightarrow \overrightarrow{xv_{i+1}} \notin E \Rightarrow \overrightarrow{v_{i+1}x} \in E \qquad (2)$$

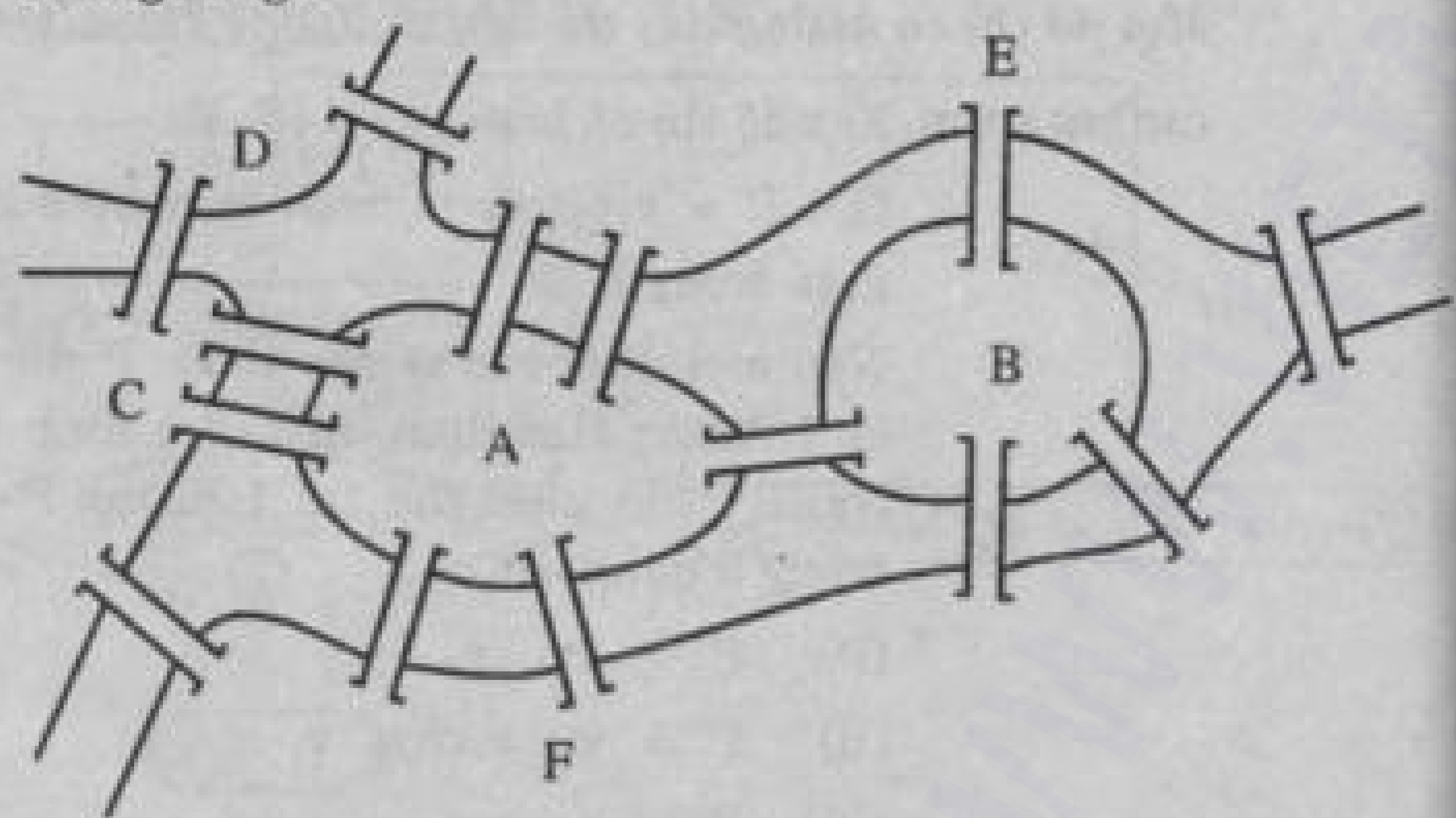
(1) và (2) cho $\overrightarrow{v_k x} \in E$

Vậy tồn tại đường P' ở dạng (iii).

Như thế, bắt đầu bằng một đường gồm 1 đỉnh, ta có thể mở rộng dần thành một đường mới chứa nhiều đỉnh hơn đường cũ và vẫn chỉ đi qua mỗi đỉnh không quá 1 lần, cứ thế cuối cùng ta sẽ có đường Hamilton. □

■ BÀI TẬP

1. Xem hình vẽ sau tương tự hình vẽ của bài toán 7 cầu ở Königsburg :



a) Vẽ đồ thị G tương ứng.

b) G có chu trình Euler hoặc đường Euler không ? Tại sao?

2. Tìm chu trình Euler hoặc đường Euler (nếu có) của đồ thị với ma trận liên kết sau :

a)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & & & & 1 & & & & \\
1 & & 1 & & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & & & & 1 & 1 & \\
 & & 1 & & 1 & & & & 1 & 1 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \\
1 & 1 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & & & & 1 &
\end{array}\right]
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & & & 1 & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}\right]
\end{array}$$

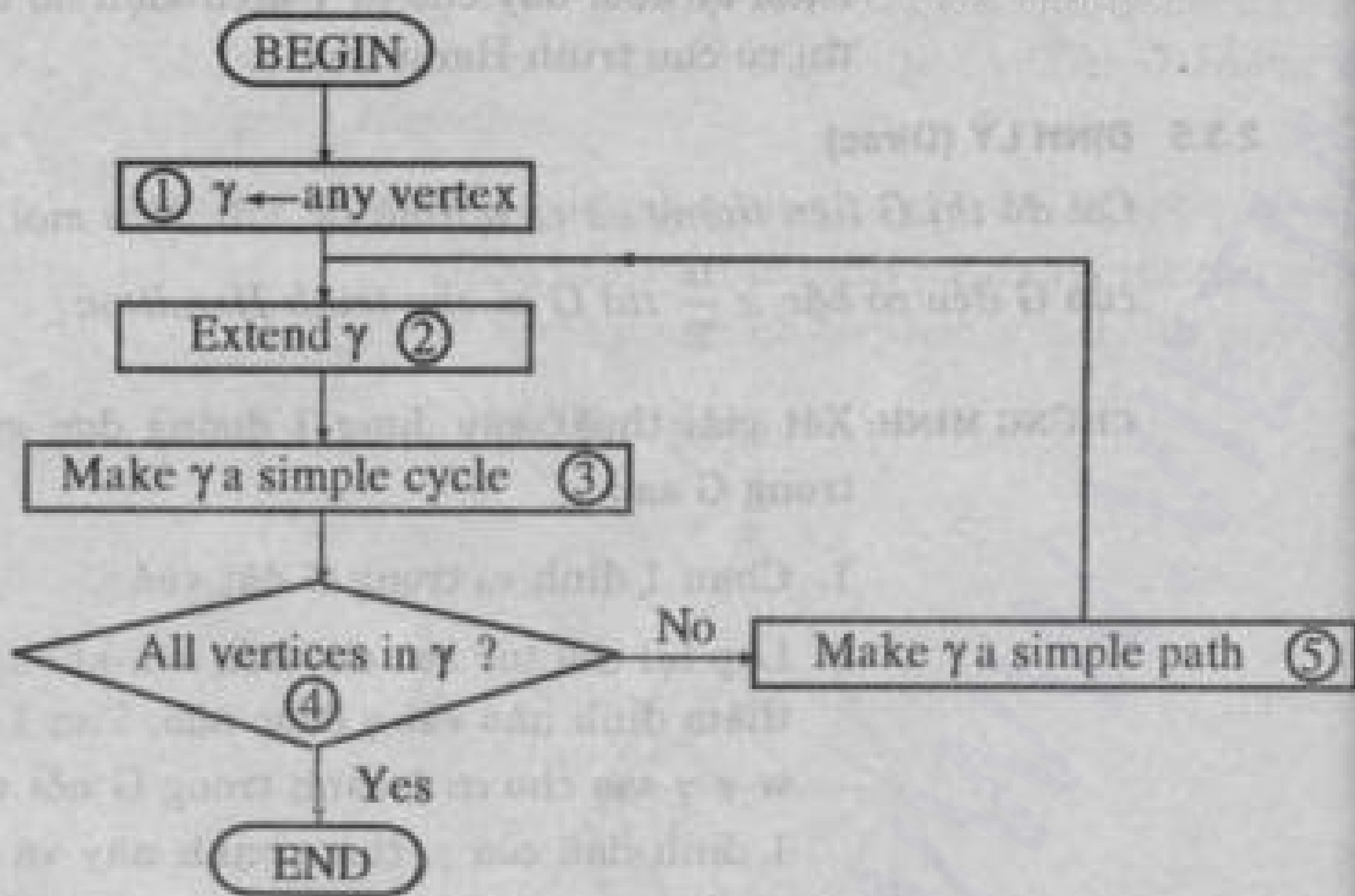
c)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\
\begin{array}{c} A\\B\\C\\D\\E\\F\\G \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 1 & & 1 & 1 & \\
1 & & 1 & & & 1 & \\
1 & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
1 & & & 2 & & 1 & \\
1 & 1 & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}\right]
\end{array}$$

$a = \overline{uu'}$ trong $\gamma = v_1...uu'....v_2$ với tính chất là tồn tại các cạnh trong G là $b = \overline{v_1u'}$, $c = \overline{uv_2}$, thêm các cạnh b, c vào γ và loại bỏ cạnh a khỏi γ.

4. Nếu mọi đỉnh của G đều nằm trong γ thì dừng.
5. Nếu không, thực hiện thủ tục sau để biến đổi γ thành 1 đường đơn giản: tìm 1 cạnh $\overline{vw}$ trong G sao cho $v \in \gamma$ và $w \notin \gamma$. Loại bỏ 1 cạnh tới v trong γ và thêm cạnh $\overline{vw}$ vào γ. Trở về bước 2.

Sơ đồ khối của giải thuật này là :



Nhận xét rằng γ luôn luôn là 1 đường đơn giản hoặc chu trình đơn giản ở mọi bước của giải thuật.

Ta chỉ cần chứng minh là bước 3 và bước 5 của giải thuật luôn luôn thực hiện đượ[redacted] thấy do tính chất liên thông của G nên [redacted] 5 thực hiện được.

Xét bước 3. Giả sử $\gamma = v_1...uu'...v_2$, và không thể mở rộng γ ở đầu v_1 cũng như v_2, nghĩa là không có cạnh nào nối v_1 hoặc v_2 với 1 đỉnh ở ngoài γ. Hơn nữa giả sử cũng không có cạnh nào nối v_1 với v_2. Đặt $|\gamma| = k$.

Nếu với mọi $\overline{uu'}$ trên γ, không có đồng thời trong G 2 cạnh $\overline{v_1u'}$ và $\overline{uv_2}$ thì phải có :

$$d(v_1) + d(v_2) \le k - 1 < n$$

Vô lý vì $d(v_1) + d(v_2) \ge \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ □

2.3.6 ĐỊNH LÝ (Konig)

Mọi đồ thị có hướng đầy đủ đều có đường Hamilton.

CHỨNG MINH: Xét đồ thị có hướng G = (V, E)

Gọi $P = v_1v_2...v_k$ ($k \ge 0$) là một đường đơn giản trong G.

Nếu mọi đỉnh của G đều thuộc P thì P chính là 1 đường Hamilton, nếu có 1 đỉnh x không thuộc P thì phải tồn tại 1 đường P' thuộc 1 trong 3 dạng sau :

(i) $P' = xv_1...v_k$

(ii) $P' = v_1...v_ixv_{i+1}...v_k$

(iii) $P' = v_1...v_kx$

Thực vậy, nếu trong G không có đường nào có dạng (i) hoặc (ii) thì ta có :

- $\overrightarrow{xv_1} \notin E$ và do đó $\overrightarrow{v_1x} \in E$ (1)

Vậy G không có chu trình Hamilton.

Lưu ý rằng đồ thị này có đường Hamilton là DEGJFBACHK. □

2.3.3 ĐỊNH LÝ

Mọi đồ thị đầy đủ đều có chu trình Hamilton.

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

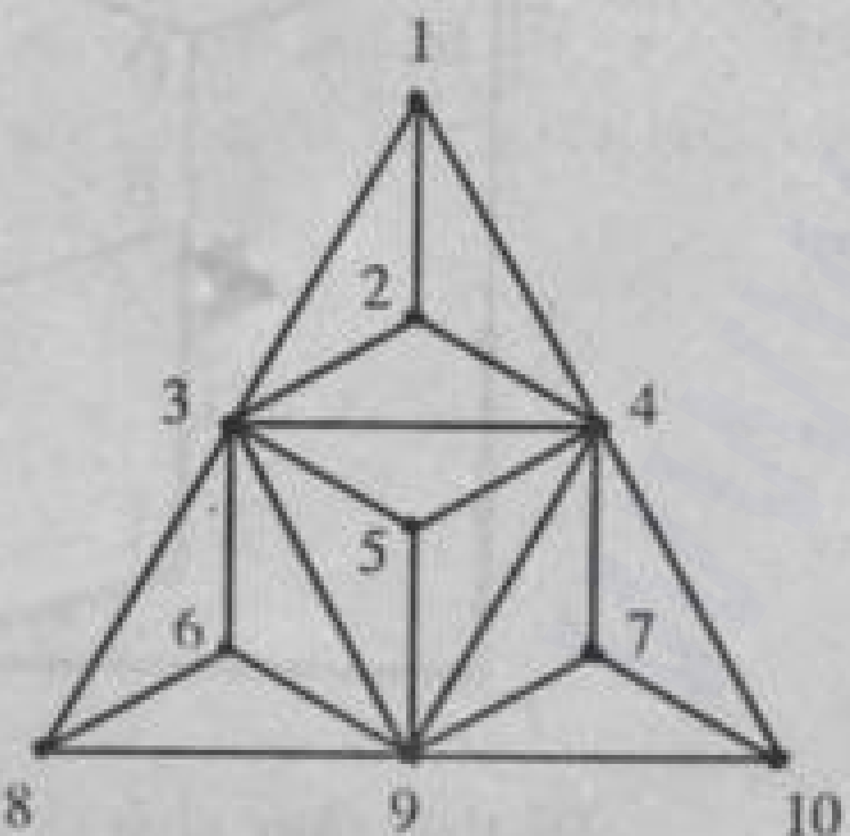
Để chứng minh một đồ thị không có chu trình Hamilton, ta có thể dùng kết quả sau :

2.3.4 ĐỊNH LÝ

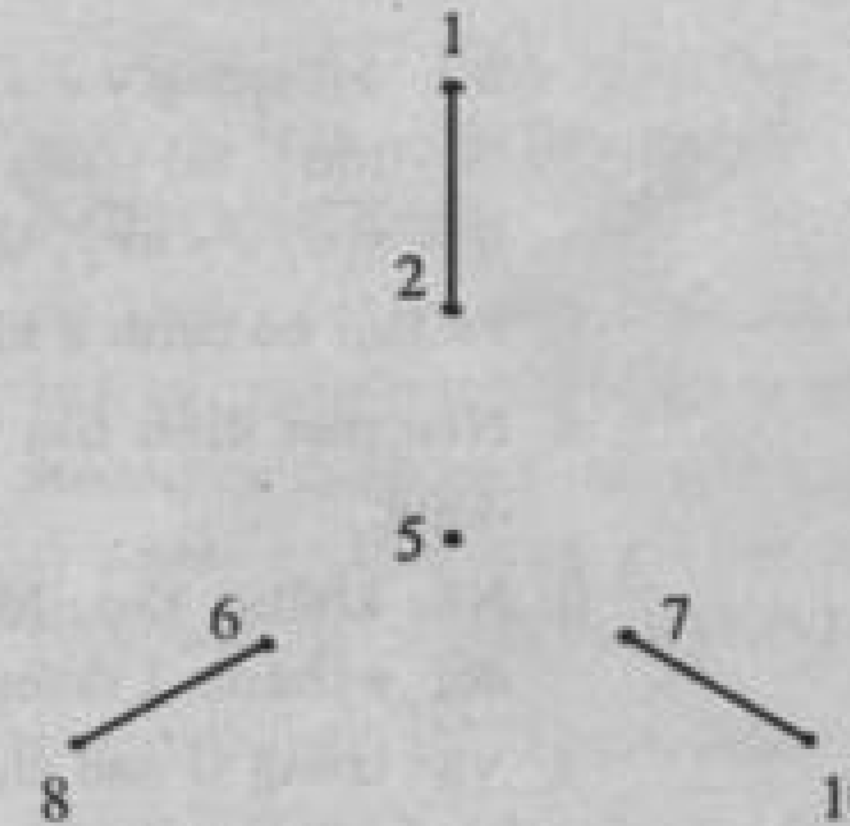
Cho 1 đồ thị G. Giả sử có k đỉnh của G sao cho nếu xóa k đỉnh này cùng với các cạnh liên kết với chúng khỏi G thì đồ thị nhận được có hơn k thành phần. Thì G không có chu trình Hamilton.

CHỨNG MINH: Nhận xét rằng trong 1 chu trình, nếu hủy đi k đỉnh cùng với các cạnh tới chúng thì chu trình sẽ bị cắt thành nhiều nhất là k thành phần. □

THÍ DỤ 5: Xét đồ thị G sau :



Nếu hủy đi 3 đỉnh 3, 4, 9 cùng với các cạnh tới chúng thì ta còn lại đồ thị sau :



Đồ thị này có 4 thành phần. Vậy G không có chu trình Hamilton. □

Định lý dưới đây cho ta 1 điều kiện đủ để đồ thị có chu trình Hamilton.

2.3.5 ĐỊNH LÝ (Dirac)

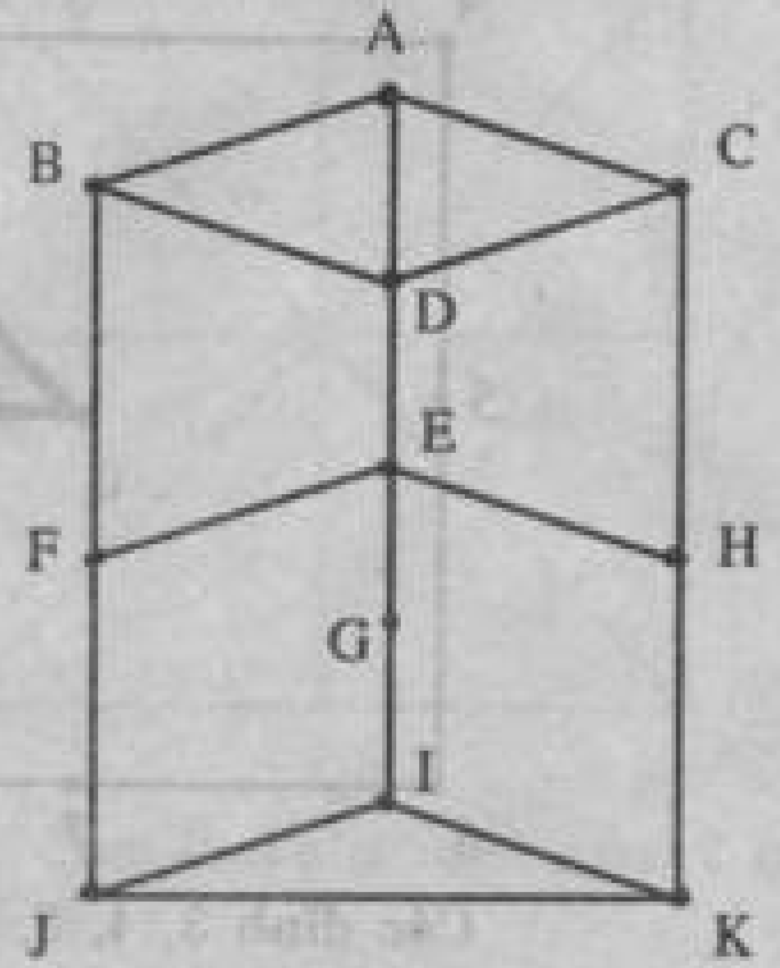
Coi đồ thị G liên thông và có n đỉnh ($n \geq 3$). Nếu mọi đỉnh của G đều có bậc $\geq \frac{n}{2}$ thì G có chu trình Hamilton.

CHỨNG MINH: Xét giải thuật xây dựng 1 đường đơn giản γ trong G sau :

1. Chọn 1 đỉnh v_0 trong G đặt vào γ.
2. Lặp lại thủ tục sau cho đến khi không thể thêm đỉnh nào vào γ được nữa: Tìm 1 đỉnh $w \notin \gamma$ sao cho có 1 cạnh trong G nối w với 1 đỉnh đầu của γ, thêm cạnh này và đỉnh w vào γ.
3. Thực hiện thủ tục sau để biến đổi γ thành 1 chu trình đơn giản:

   Nếu có cạnh nối 2 đỉnh đầu của γ thì thêm cạnh này vào γ', nếu không, tìm 1 cạnh chứa 2 cạnh tới đỉnh 0 tạo với nhau góc 45°. □

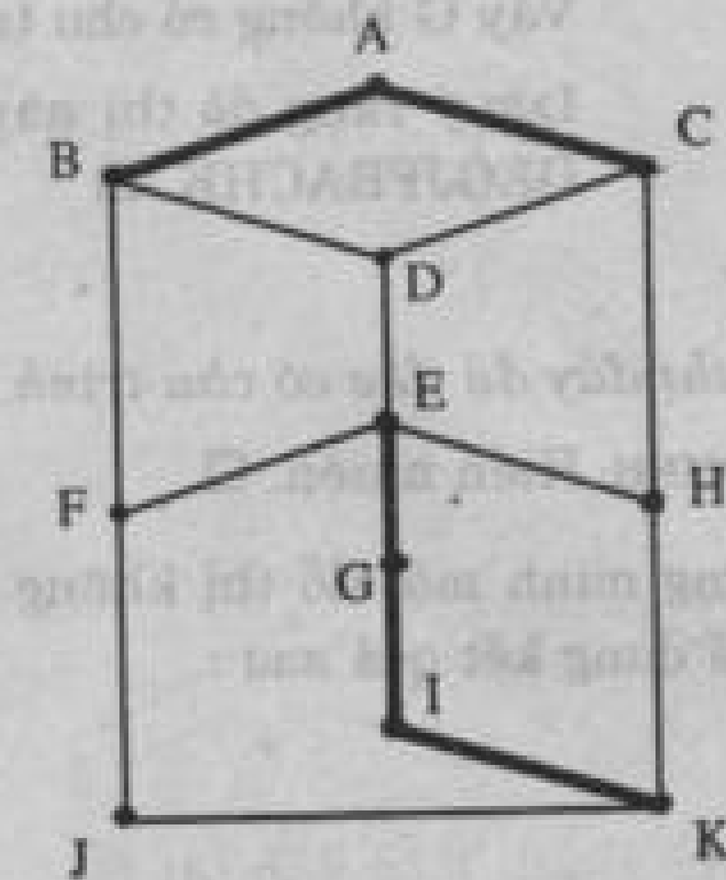
THÍ DỤ 4: Chứng minh rằng đồ thị G sau đây không có chu trình Hamilton.



Giả sử G có 1 chu trình Hamilton là (γ).

Vì d(A) = d(G) = 2 nên (γ) phải chứa các cạnh $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{GE}$ và $\overline{GI}$.

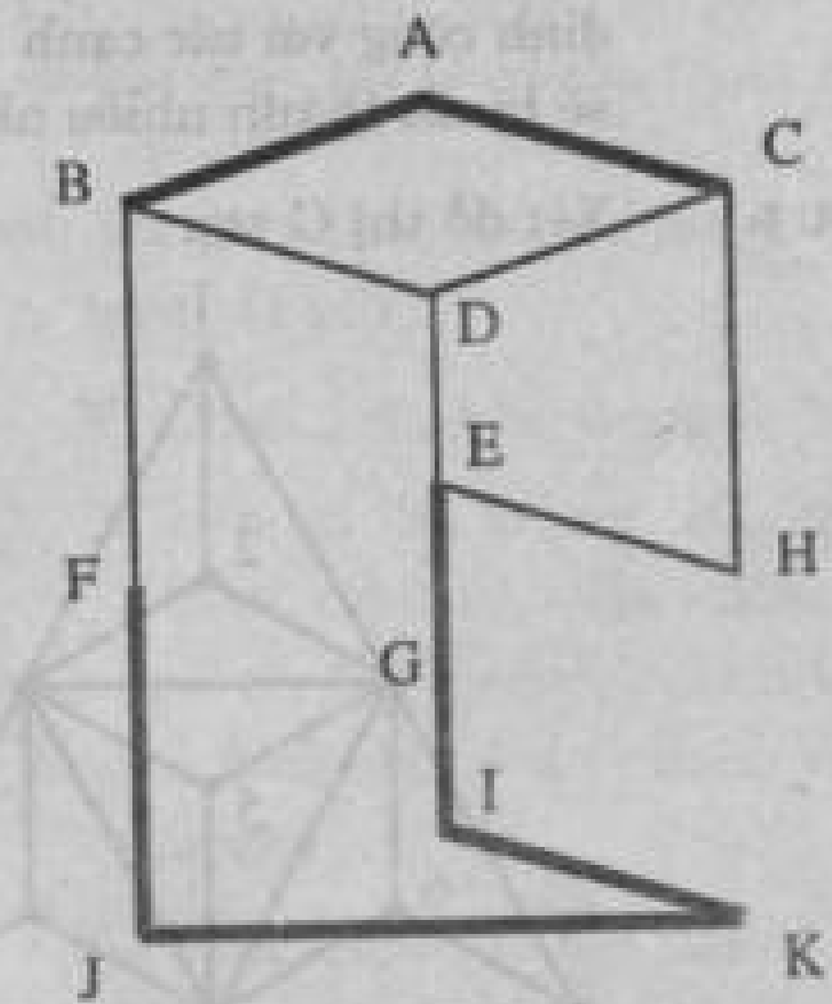
Xét đỉnh I. Do tính chất đối xứng của hình vẽ, có thể giả sử $\overline{IK} \in (\gamma)$. Dùng qui tắc 4 xóa bớt cạnh $\overline{IJ}$, ta còn lại đồ thị :



Đỉnh J bây giờ trở thành bậc 2, vậy $\overline{JF}$ và $\overline{JK} \in (\gamma)$.

Xóa tiếp được cạnh $\overline{KH}$. Ngoài ra cũng xóa được cạnh $\overline{FE}$ (do qui tắc 3).

Đồ thị bây giờ trở thành :

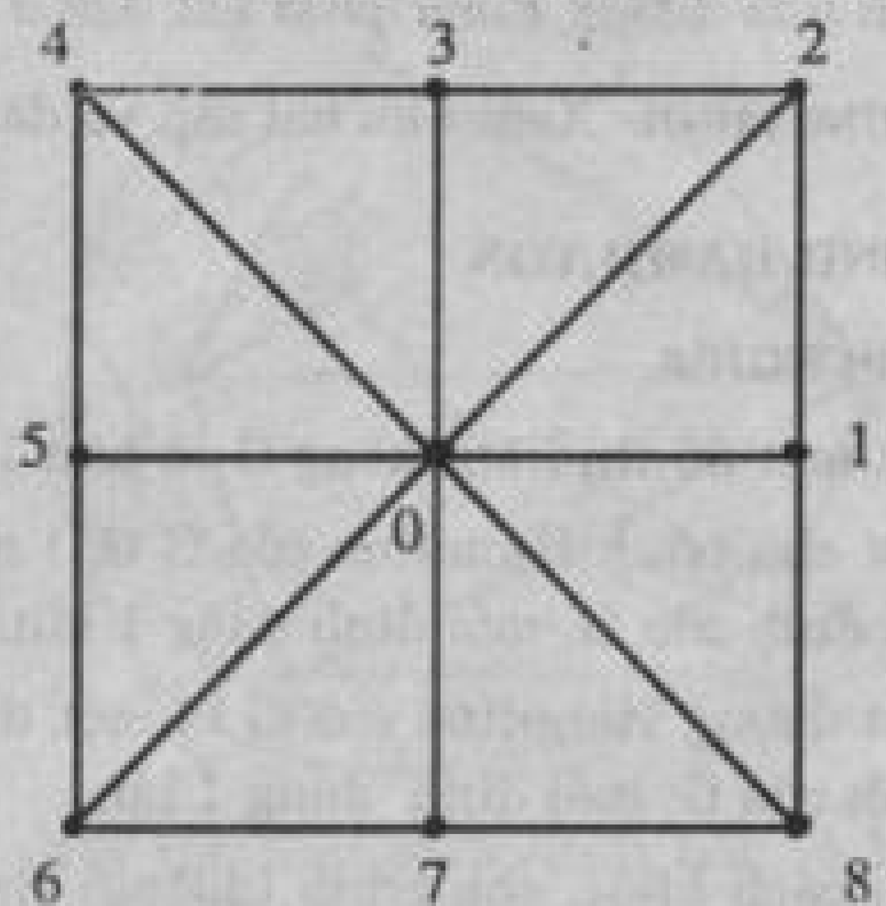


Dễ thấy rằng phải có $\overline{FB}, \overline{HE}, \overline{HC} \in (\gamma)$.

Ta nhận được 1 chu trình con thực sự trong (γ) : vô lý.

nữa, do đó có thể xóa mọi cạnh còn lại tới x.

THÍ DỤ 3: Tìm chu trình Hamilton của đồ thị sau :

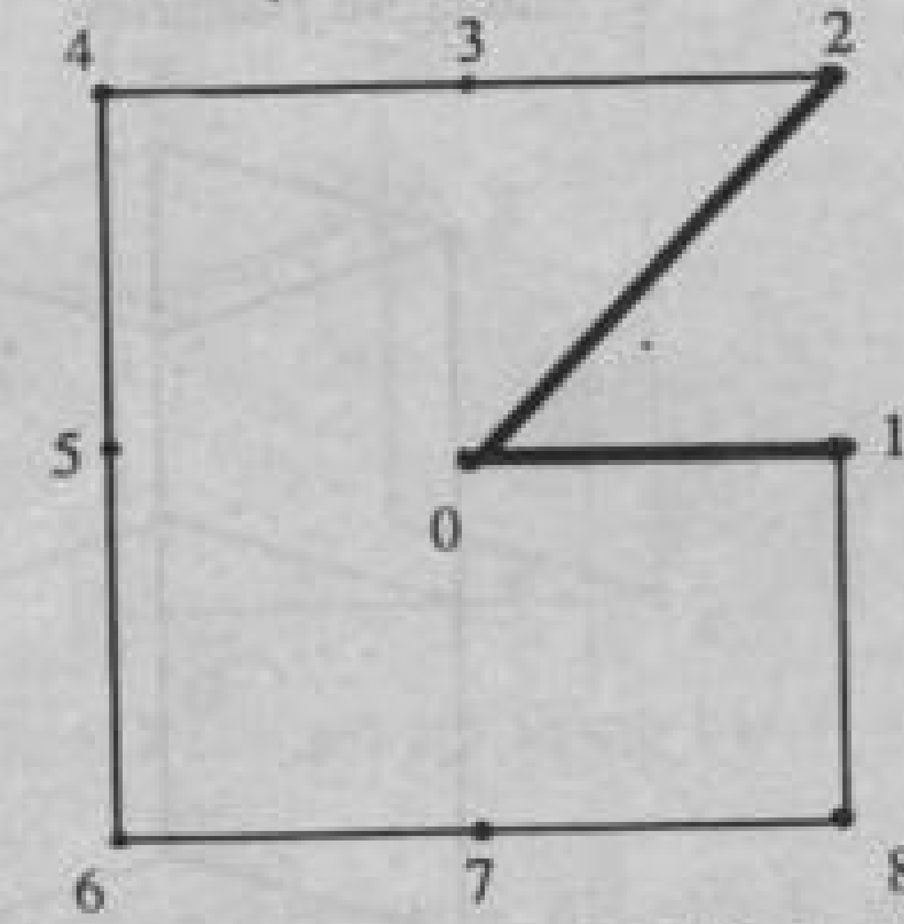


Xét đỉnh 0. Ta có thể chọn 2 cạnh tới đỉnh này là :

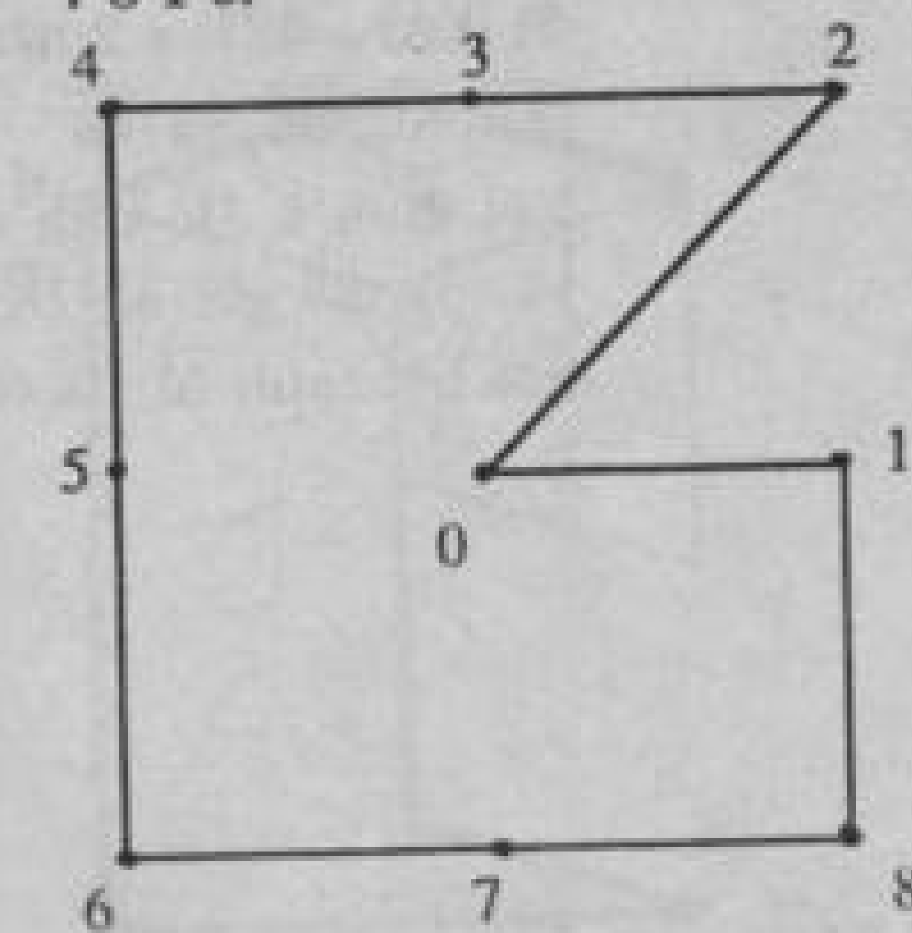
a) $\overline{01}$ và $\overline{05}$: Xóa các cạnh tới 0 khác (theo qui tắc 4) ta còn lại đồ thị :

Các đỉnh 2, 3, 4 còn lại bậc 2. Vậy phải lấy các cạnh $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{45}$ nhưng như vậy tạo ra chu trình con thực sự : vô lý.

b) $\overline{01}$ và $\overline{02}$: Xóa các cạnh tới 0 khác (th[redacted] qui tắc 4) và xóa cạnh $\overline{12}$ (theo qui tắc 3[redacted] ta còn lại đồ thị :



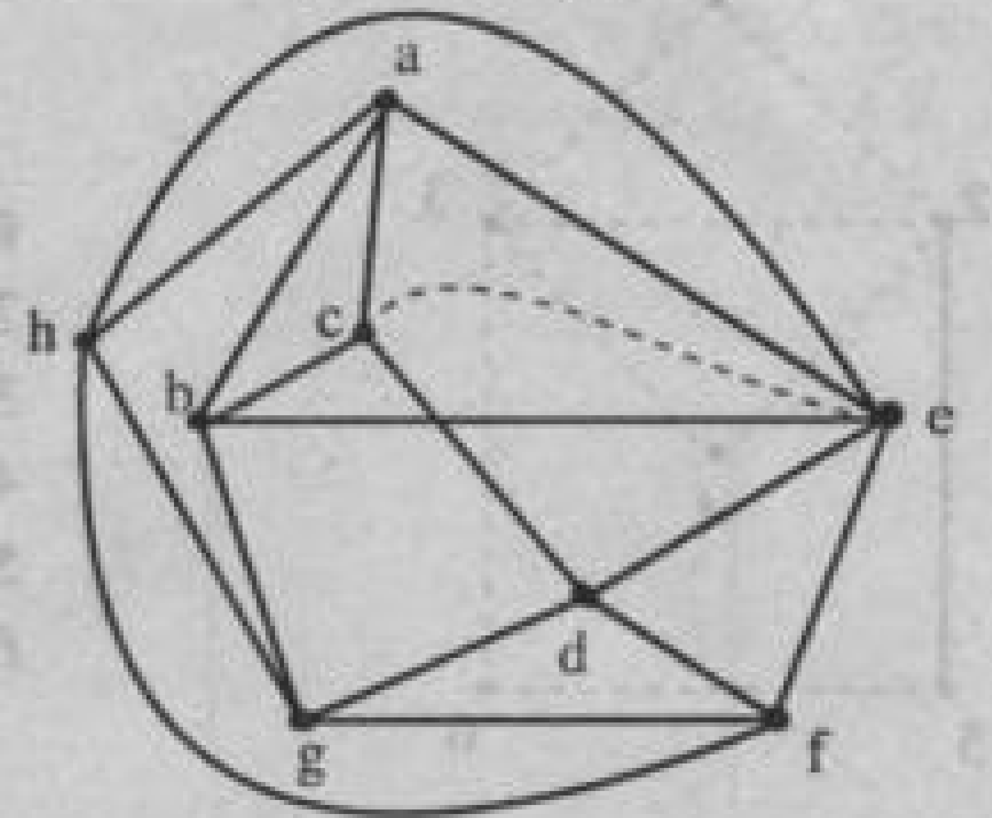
Các đỉnh 3, 4, 5, 6, 7, 8 còn lại bậc 2 ta nhận được chu trình Hamilton: 0 2 3 4 5 6 7 8 1 0.



c) Lập luận tương tự, các trường hợp chọn $\overline{01}$ và $\overline{03}$, $\overline{01}$ và $\overline{04}$ đều không được.

Tóm lại mọi chu trình Hamilton của G đều phải

THÍ DỤ 2: Xét đồ thị G sau đây :



Đồ thị này có 2 đỉnh bậc lẻ là c và e, các đỉnh còn lại đều có bậc chẵn, vậy có đường Euler.

Vẽ thêm cạnh tưởng tượng nối c với e, ta được đồ thị G'.

Ta tìm được 1 chu trình Euler cho G' là gdcedfehabcaebgfhg.

Hủy cạnh tưởng tượng ce khỏi chu trình này ta nhận được 1 đường Euler của G: edfehabcaebgfhgdc. □

2.2.4 ĐỊNH LÝ EULER 3

Cho đồ thị có hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có chu trình Euler nếu và chỉ nếu G cân bằng.

CHỨNG MINH: Tương tự trường hợp vô hướng. □

2.2.5 ĐỊNH LÝ EULER 4

Cho đồ thị có hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có đường Euler nếu và chỉ nếu trong G có 2 đỉnh a, b thỏa :

$$d_{out}(a) = d_{in}(a) + 1$$

$$d_{in}(b) = d_{out}(b) + 1$$

và mọi đỉnh còn lại đều cân bằng.

Hơn nữa đường Euler phải bắt đầu ở a và kết thúc ở b.

CHỨNG MINH: Xem như bài tập và dành cho độc giả. □

2.3 CHU TRÌNH HAMILTON

2.3.1 ĐỊNH NGHĨA

Xét một đồ thị liên thông G có hơn 1 đỉnh.

Một chu trình Hamilton của G là 1 chu trình đi qua tất cả các đỉnh của G, mỗi đỉnh đúng 1 lần.

Một đường Hamilton của G là một đường đi qua tất cả các đỉnh của G, mỗi đỉnh đúng 1 lần.

Nói cách khác, chu trình (đường) Hamilton là 1 chu trình (đường) đơn giản đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị.

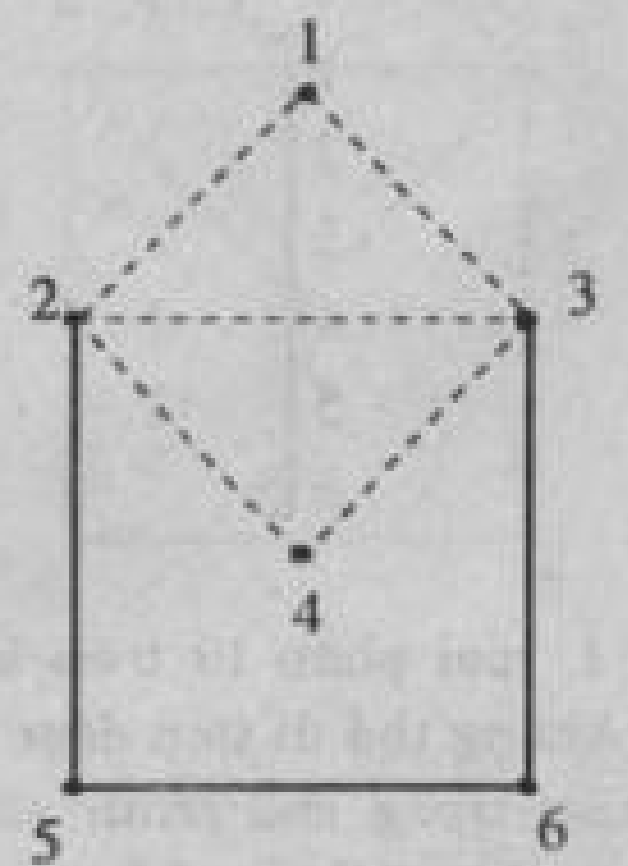
Hiển nhiên nếu G có chu trình Hamilton thì G cũng có đường Hamilton : ta chỉ cần hủy đi 1 cạnh trong chu trình Hamilton thì sẽ nhận được 1 đường Hamilton. Tuy nhiên lưu ý rằng điều đảo lại không đúng : có những đồ thị có đường Hamilton nhưng không có chu trình Hamilton.

Dựa vào nhận xét là mỗi đỉnh trong chu trình Hamilton đều liên kết với đúng 2 cạnh trong chu trình này, ta suy ra các qui tắc sau :

2.3.2 QUI TẮC TÌM CHU TRÌNH HAMILTON

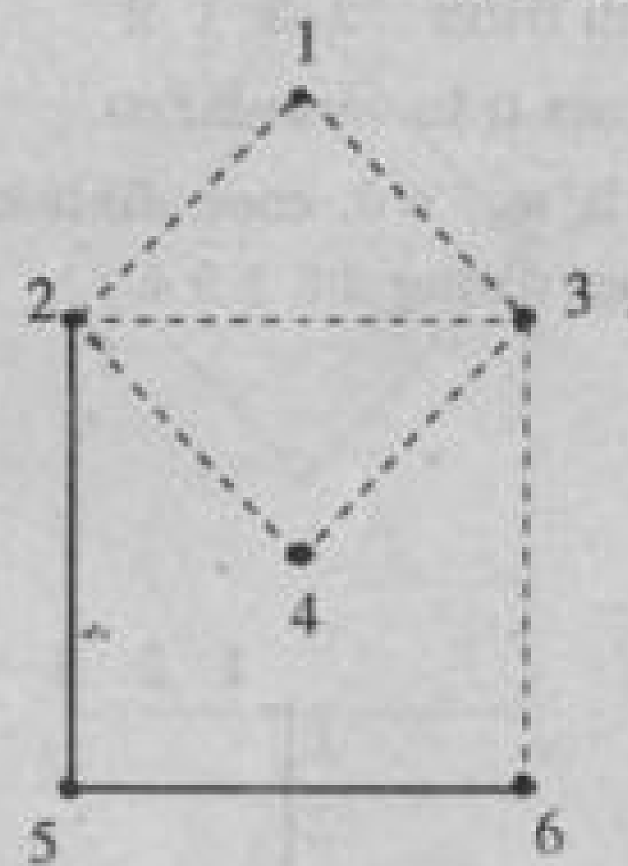
1. Nếu tồn tại 1 đỉnh của G có bậc ≤ 1 thì G không có chu trình Hamilton.
2. Nếu đỉnh x có bậc là 2 thì cả 2 cạnh tới x đều phải thuộc chu trình Hamilton.
3. Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào.
4. Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh tới 1 đỉnh x đặt vào chu trình Hamilton rồi thì không thể lấy thêm cạnh nào tới x

- Xét hàng 4, $m_{43} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 3 và có được đường 2 3 1 2 4 3.



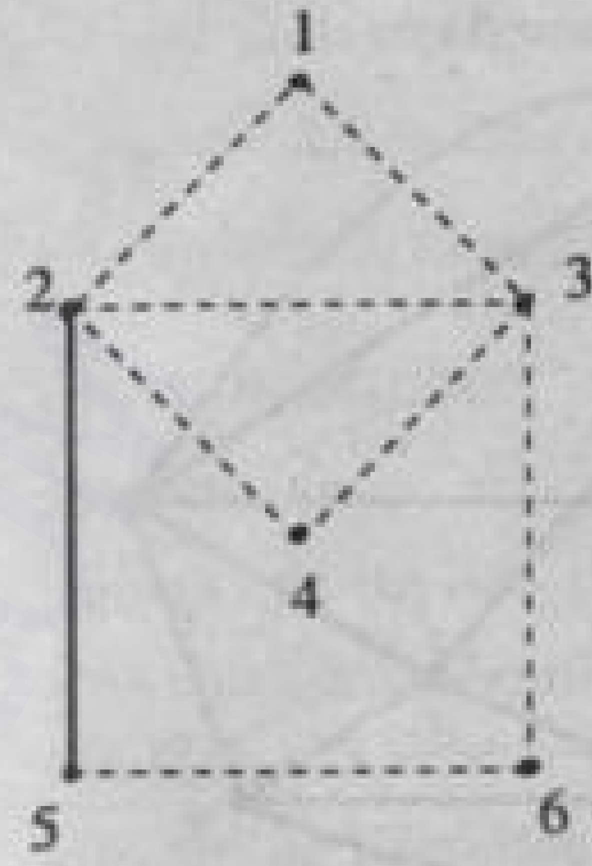
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4&5&6\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix}\end{array}$$

- Xét hàng 3, $m_{36} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 6 và có được đường 2 3 1 2 4 3 6.



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4&5&6\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & & & 1 & \end{bmatrix}\end{array}$$

- Xét hàng 6, $m_{65} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 5 và có được đường 2 3 1 2 4 3 6 5.



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4&5&6\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}\end{array}$$

- Xét hàng 5, $m_{52} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 2 và có được đường 2 3 1 2 4 3 6 5 2.
  Ma trận đổi thành ma trận không: giải thuật kết thúc và ta có chu trình Euler 2 3 1 2 4 3 6 5 2. □

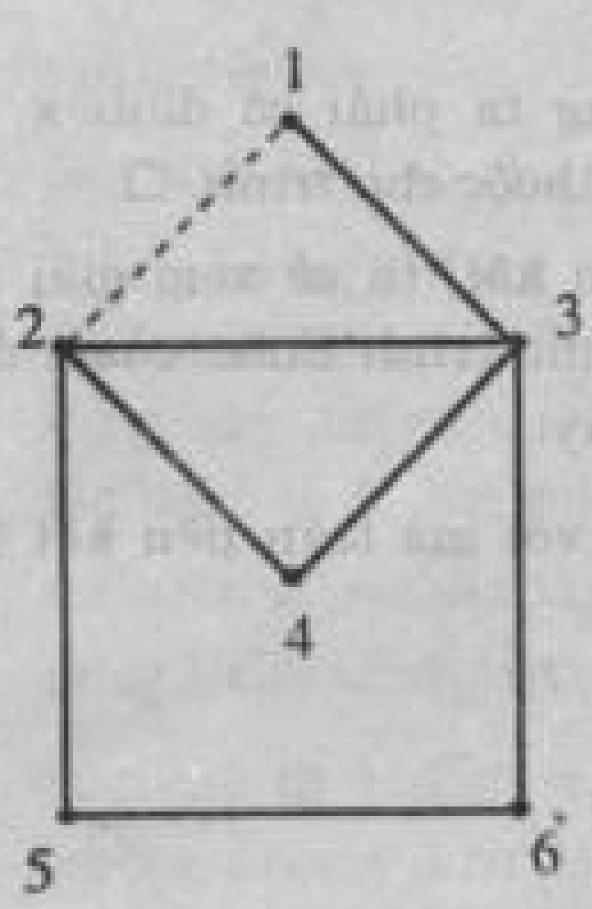
2.2.3 ĐỊNH LÝ EULER 2

Cho 1 đồ thị vô hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có đường Euler nếu và chỉ nếu G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

CHỨNG MINH:

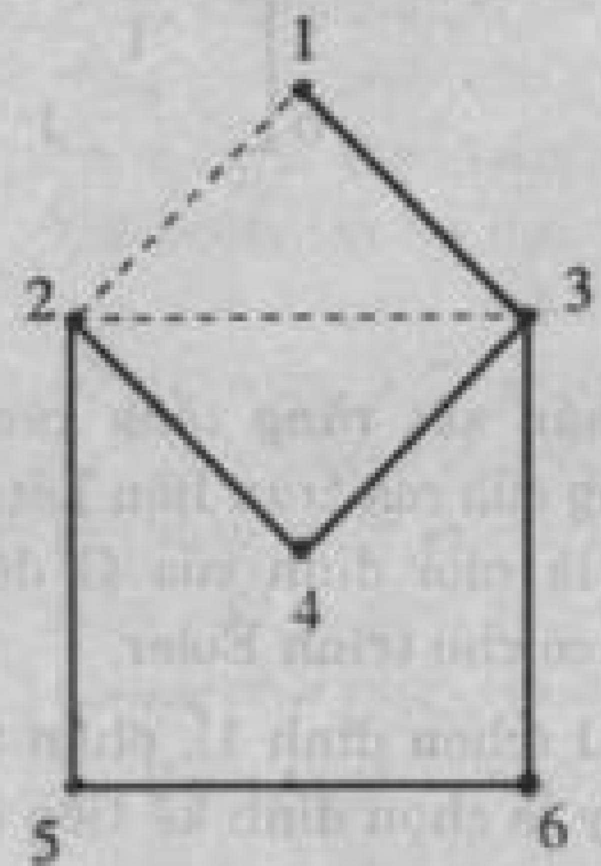
(⇒) Giả sử G có đường Euler nối đỉnh a với đỉnh b. Lập luận giống phần chứng minh trong định lý Euler 1 với nhận xét thêm rằng riêng 2 đỉnh a và b, số lần động tử rời khỏi a (đi đến b) nhiều hơn số lần động tử đi đến a (rời khỏi b) là 1. Vậy các đỉnh a và b có bậc lẻ, còn mọi đỉnh khác đều có bậc chẵn.

(⇐) Giả sử G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ là a và b. Thêm vào G một cạnh tưởng tượng nối a với b, ta nhận được đồ thị mới G' mà mọi đỉnh của G' đều có bậc chẵn. Vậy G' có 1 chu trình Euler P'. Loại bỏ cạnh tưởng tượng $\overline{ab}$ ra khỏi P', ta nhận được P là 1 đường Euler trong G. □



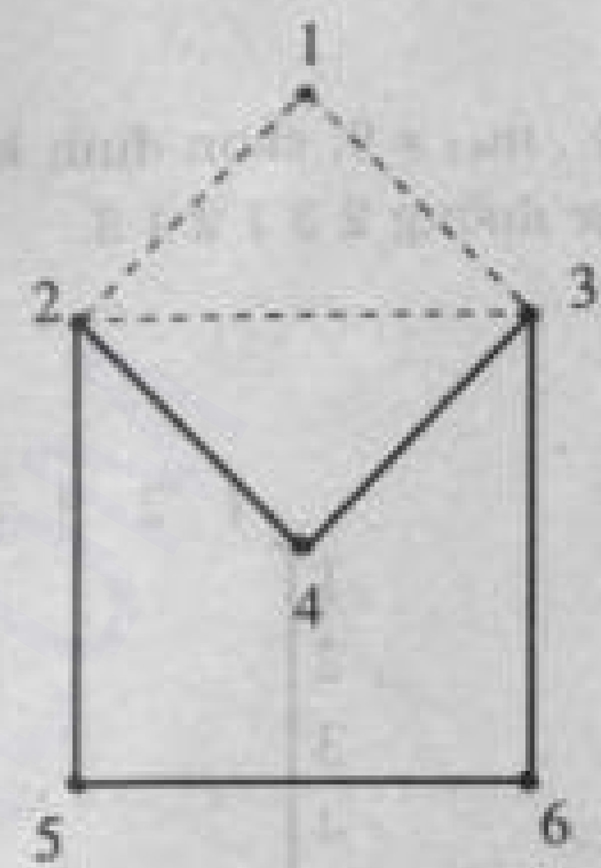
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

– Xét hàng 2, $m_{23} \neq 0$, vậy chọn đỉnh kế tiếp là 3 và có được đường 1 2 3. Đồ thị và ma trận trở thành



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ 1 & & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

– Xét hàng 3, $m_{31} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 1 và có được đường 1 2 3 1. Đồ thị và ma trận trở thành



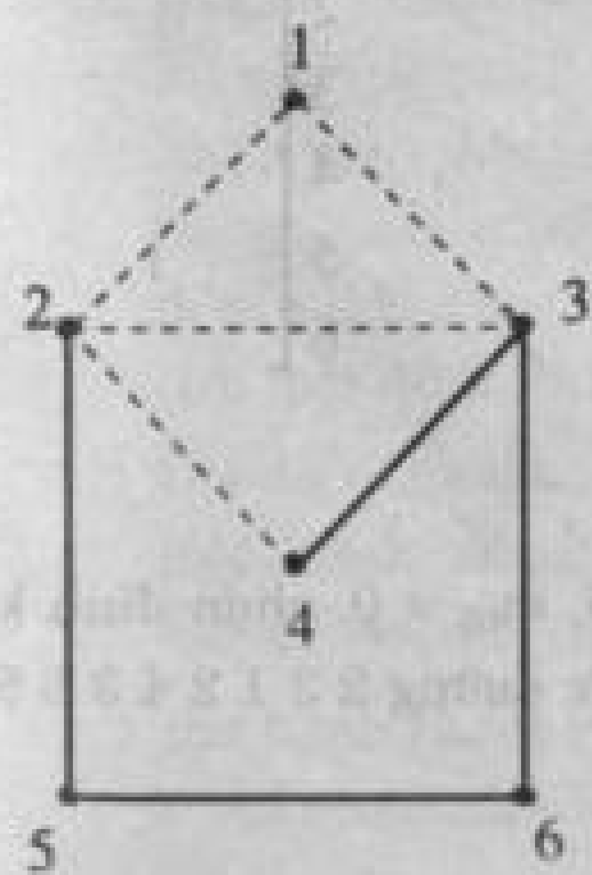
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

– Xét hàng 1, mọi phần tử trên hàng này đều là 0 : không thể đi tiếp được nữa. Xét đỉnh kế tiếp trong chu trình vừa tạo là đỉnh 2. Trên hàng 2, có phần tử $m_{24} \neq 0$. Vậy ta mở rộng chu trình *(breakout)* từ đỉnh 2.

Viết lại chu trình : 2 3 1 2

Đồ thị và ma trận vẫn như cũ.

– Xét hàng 2, $m_{24} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 4 và có được đường 2 3 1 2 4.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

CHỨNG MINH:

($\Rightarrow$) Giả sử G có chu trình Euler. Xét đỉnh x.

Tưởng tượng 1 động tử khởi hành từ x, đi trên các cạnh theo chu trình Euler và dừng lại tại x sau khi đã hoàn tất chu trình Euler này. Rõ ràng số lần động tử này rời khỏi x cũng bằng số lần động tử đi đến x. Do đó d(x) chẵn.

($\Leftarrow$) Giả sử mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn. Xét giải thuật xây dựng 1 chu trình trong G như sau :

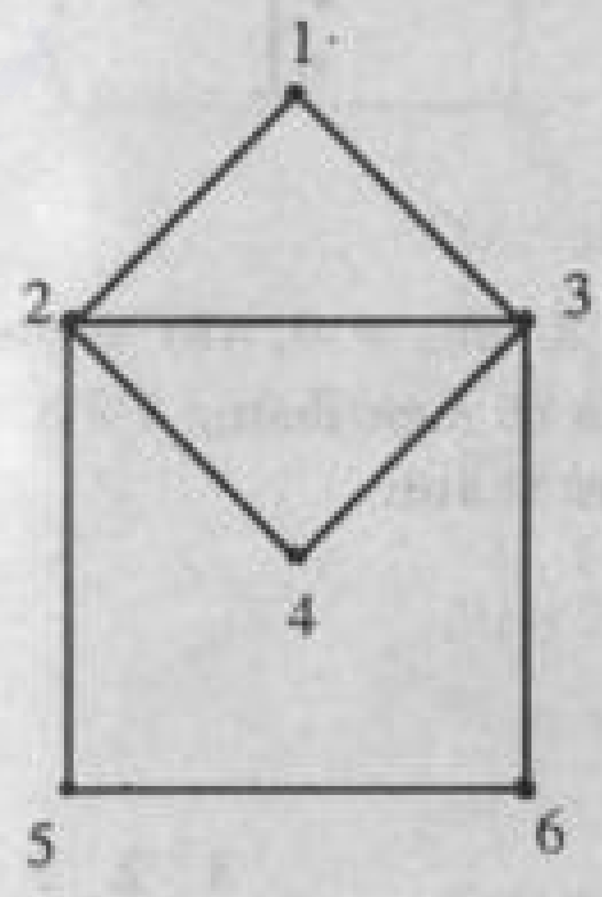
Bắt đầu từ 1 đỉnh a, đi theo các cạnh 1 cách ngẫu nhiên nhưng không được lập lại cạnh nào đã đi qua cho đến khi không thể đi tiếp được, phải dừng ở 1 đỉnh b. Lúc này mọi cạnh tới b đều đã đi qua, nếu a ≠ b thì dễ thấy rằng số lần đi đến b nhiều hơn số lần rời khỏi b là 1 : vô lý vì d(b) chẵn. Vậy phải có b = a. Nói cách khác khi không thể đi tiếp được là động tử đã tạo nên 1 chu trình. Nếu có 1 đỉnh c trong chu trình này là đỉnh đầu của 1 cạnh chưa đi qua thì ta sẽ mở rộng *(breakout)* chu trình này thành 1 chu trình lớn hơn bằng cách khởi hành lại từ c, đi theo chu trình cũ cho đến khi hoàn tất nó ở c, rồi tiếp tục đi theo cạnh tới c chưa đi qua nói ở trên cho đến khi không thể đi tiếp được nữa, ta sẽ tạo được 1 chu trình mới chứa chu trình cũ. Cứ tiếp tục thủ tục này : thành lập chu trình, mở rộng nó...cho đến khi được một chu trình mà không thể mở rộng được nữa, điều này xảy ra khi mọi đỉnh trong chu trình hiện có đều không còn cạnh tới nào chưa đi qua.

Ta chỉ còn phải chứng minh rằng lúc đó, chu trình hiện có chính là 1 chu trình Euler của G, nghĩa là mọi cạnh của G đều thuộc chu trình này. Thực vậy, coi cạnh $e = \overline{xy}$. Vì G liên thông nên có 1 đường nối đỉnh a với đỉnh x: $aa_1a_2....x$. Cạnh $\overline{aa_1}$ phải thuộc chu trình, vì không còn cạnh tới a nào chưa đi qua. Suy ra đỉnh a_1 phải thuộc chu trình. Lại lập luận tương tự, cạnh $\overline{a_1a_2}$ phải thuộc chu trình, suy ra a_2

thuộc chu trình,...,cuối cùng ta phải có đỉnh x thuộc [redacted] trình và do đó cạnh e cũng thuộc chu trình. □

Bây giờ dùng ma trận liên kết, ta sẽ xem giải thuật nêu trên được áp dụng để tìm chu trình Euler của 1 đồ thị như thế nào trong thí dụ sau đây:

THÍ DỤ 1: Xét đồ thị G với ma trận liên kết (các vị trí trống là số 0):



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

Trước hết nhận xét rằng tổng các phần tử trên mỗi hàng của ma trận liên kết đều là số chẵn (nghĩa là mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn), vậy G có chu trình Euler.

- Xét hàng 1 (chọn đỉnh 1), phần tử ở cột 2 khác 0 vậy ta chọn đỉnh kế tiếp là 2 và có được đường 12.

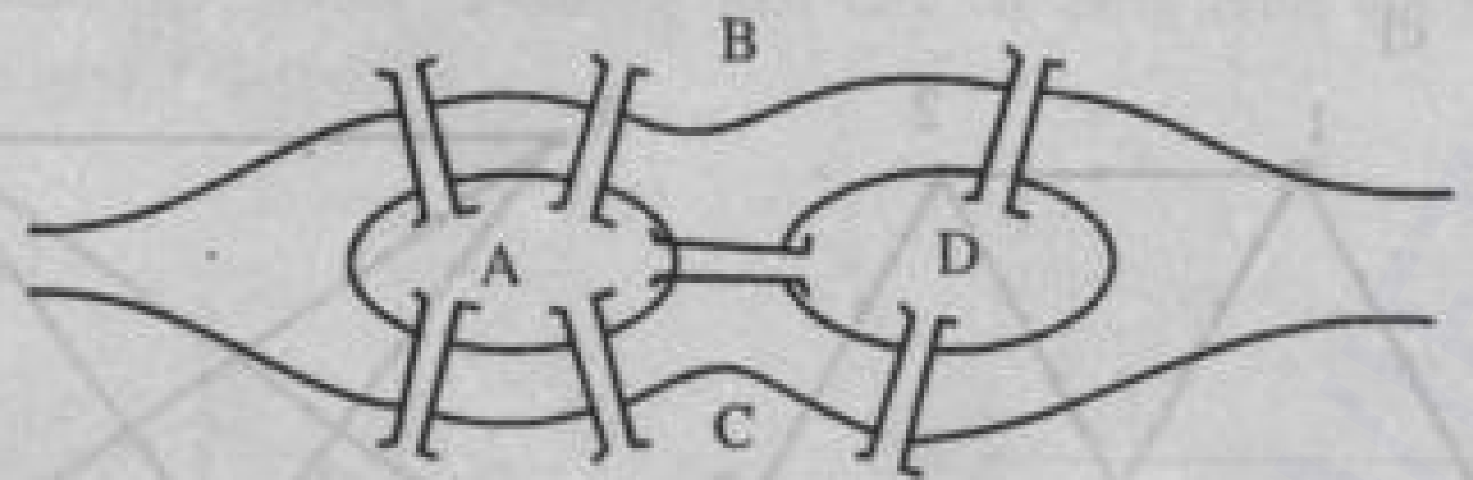
  Giảm 1 ở phần tử m_{12} (hàng 1 cột 2) và m_{21} (xóa cạnh 12 vừa đi qua). Đồ thị và ma trận trở thành

2

☑ CÁC BÀI TOÁN VỀ CHU TRÌNH

2.1 EULER VÀ BÀI TOÁN 7 CẦU Ở KÖNIGSBURG

Ở thành phố Königsburg *(Lithuania)* có 7 cây cầu bắc ngang con sông Pregel như hình vẽ sau :

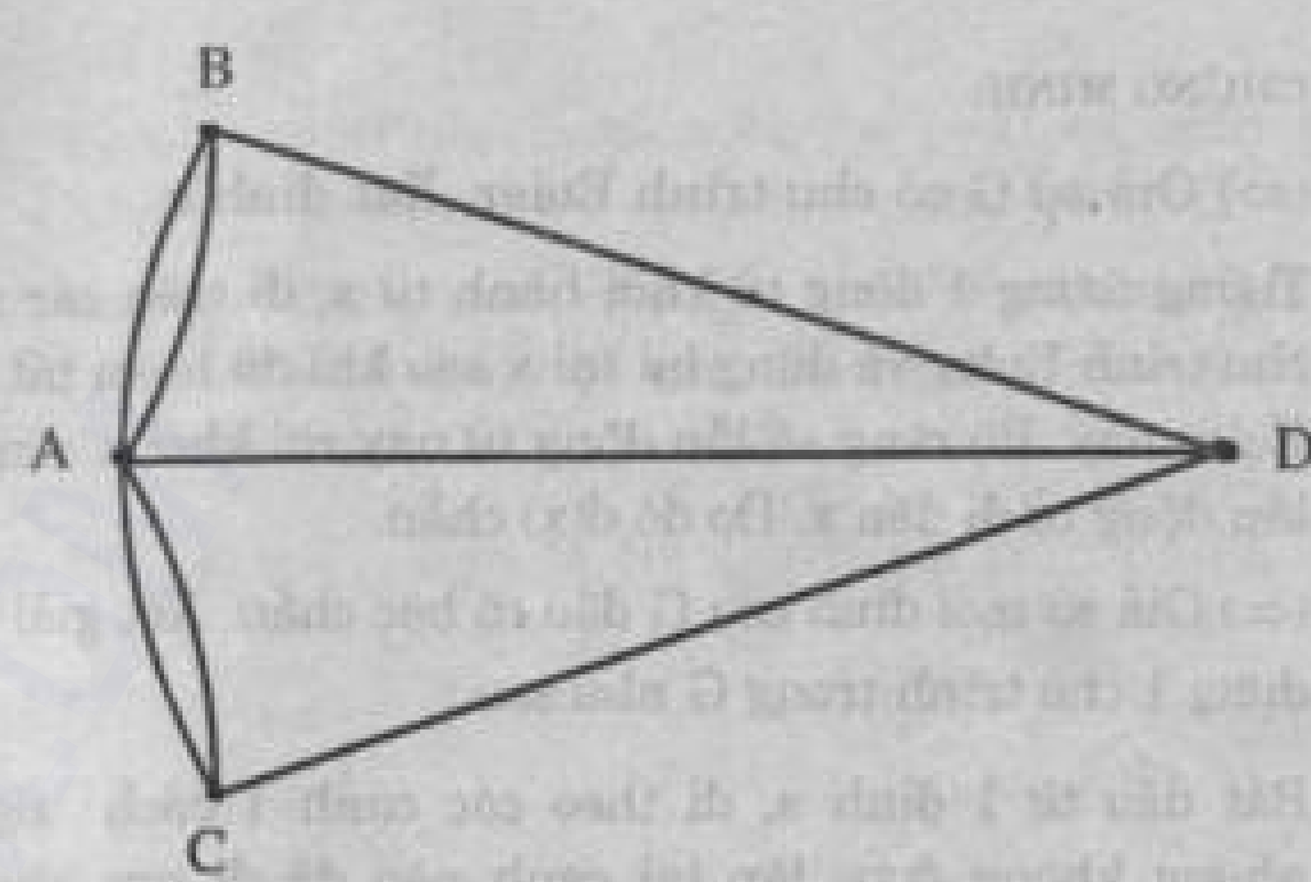


Người ta đặt câu đố:

Tìm cách đi qua tất cả 7 cây cầu này, mỗi cái đúng 1 lần rồi quay về điểm xuất phát.

Năm 1736, Leonhard Euler (1707-1783) đã chứng minh không thể có 1 đường đi như thế bằng lập luận sau :

Biểu diễn 4 miền đất A, B, C, D bằng 4 điểm trong mặt phẳng, mỗi cầu nối 2 miền được biểu diễn bằng 1 đoạn nối 2 điểm tương ứng, ta sẽ có đồ thị



Bây giờ, một đường đi qua 7 cây cầu, mỗi cái đúng 1 lần rồi quay về điểm xuất phát sẽ có số lần đi đến A bằng số lần rời khỏi A, nghĩa là phải sử dụng đến 1 số chẵn cây cầu nối với A. Vì số cầu nối với A là 5 (lẻ) nên không thể có đường đi nào thỏa điều kiện của bài toán .

Ý tưởng trên của Euler đã khai sinh ngành Toán học quan trọng có nhiều áp dụng là Lý thuyết Đồ thị.

Dưới đây ta sẽ tổng quát hóa bài toán trên.

2.2 CHU TRÌNH EULER

2.2.1 ĐỊNH NGHĨA

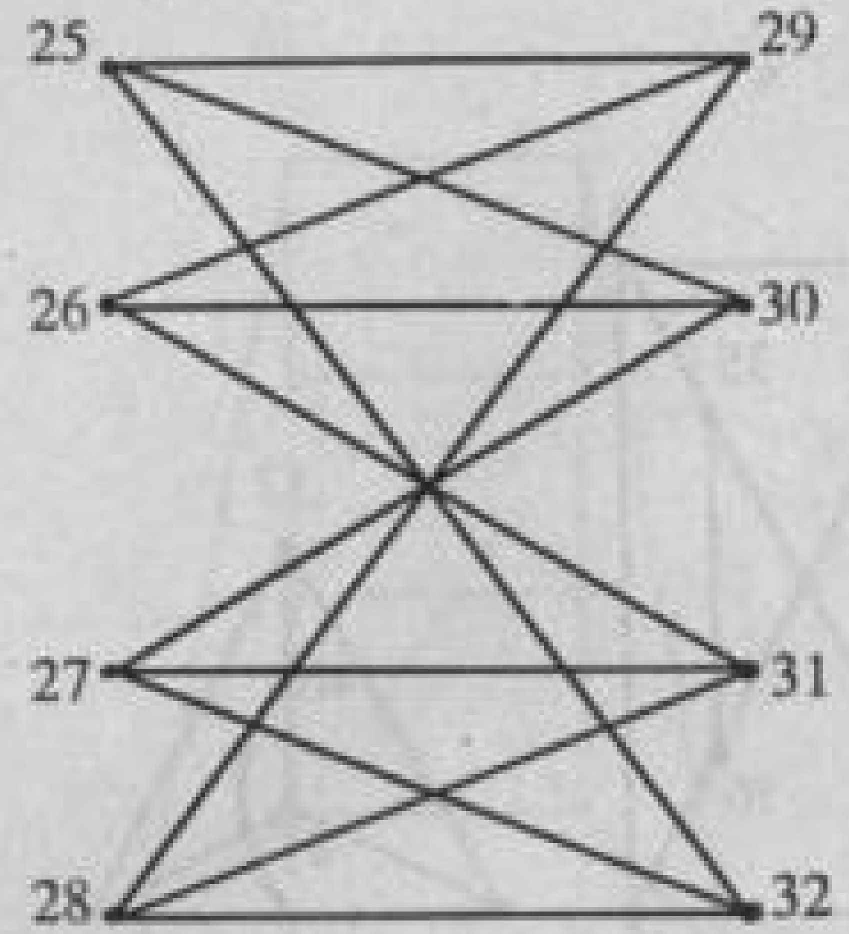
Xét 1 đồ thị liên thông G.

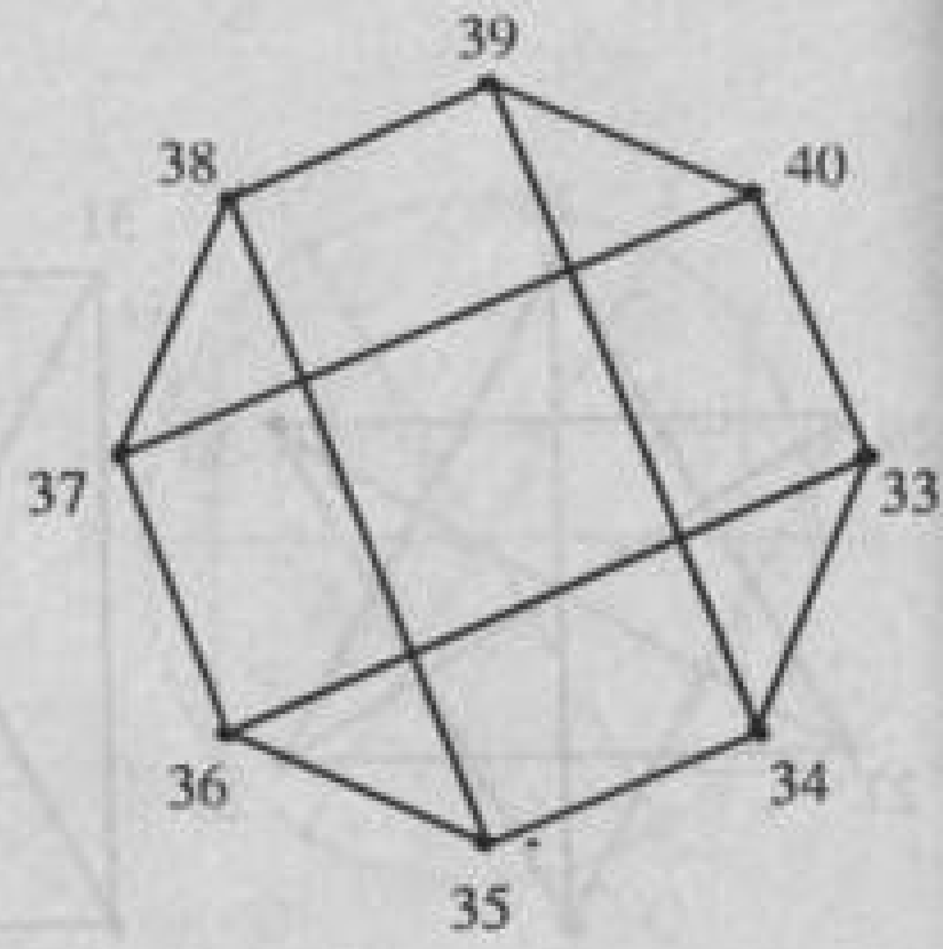
Một chu trình Euler của G là 1 chu trình đi qua tất cả các cạnh của G.

Một đường Euler của G là 1 đường có đỉnh bắt đầu khác đỉnh kết thúc và đi qua tất cả các cạnh của G.

2.2.2 ĐỊNH LÝ EULER 1

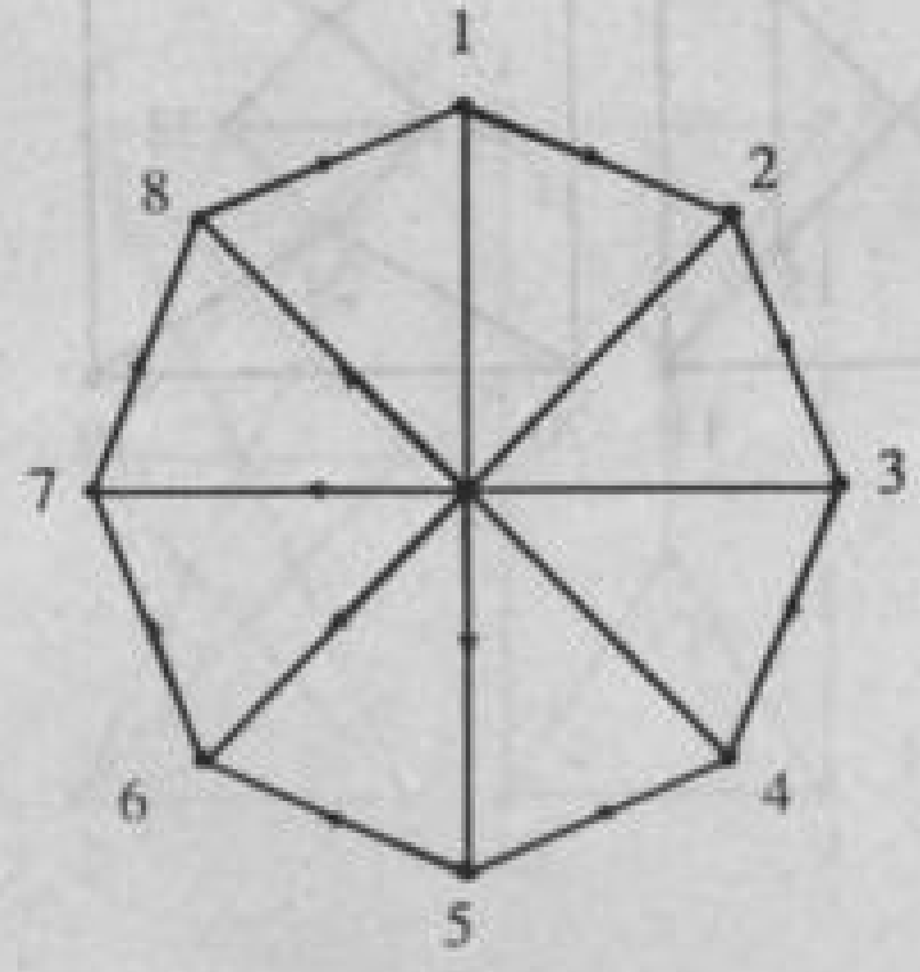
Cho 1 đồ thị vô hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có chu trình Euler nếu và chỉ nếu mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

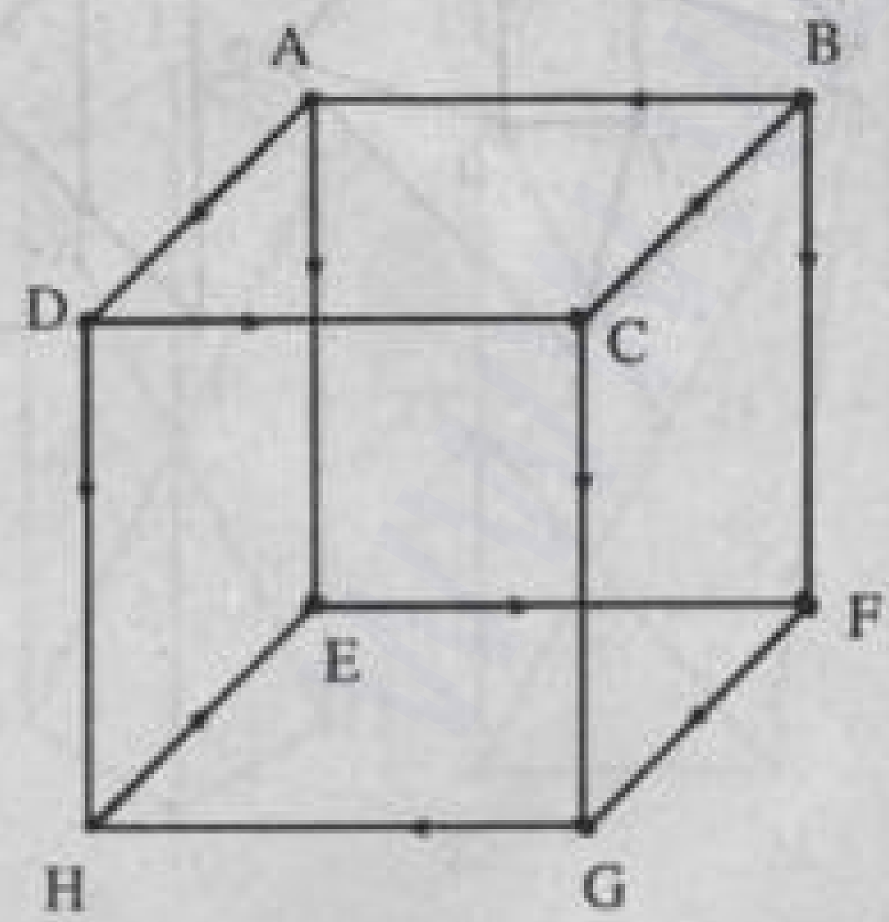




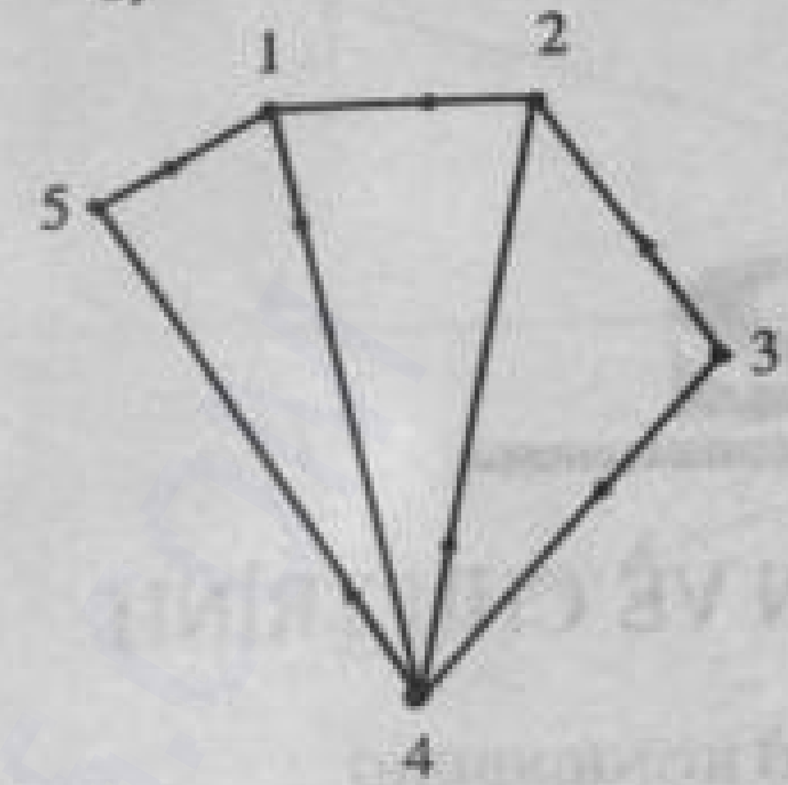
16. Các cặp đồ thị có hướng dưới đây có đẳng hình với nhau không ? Giải thích.

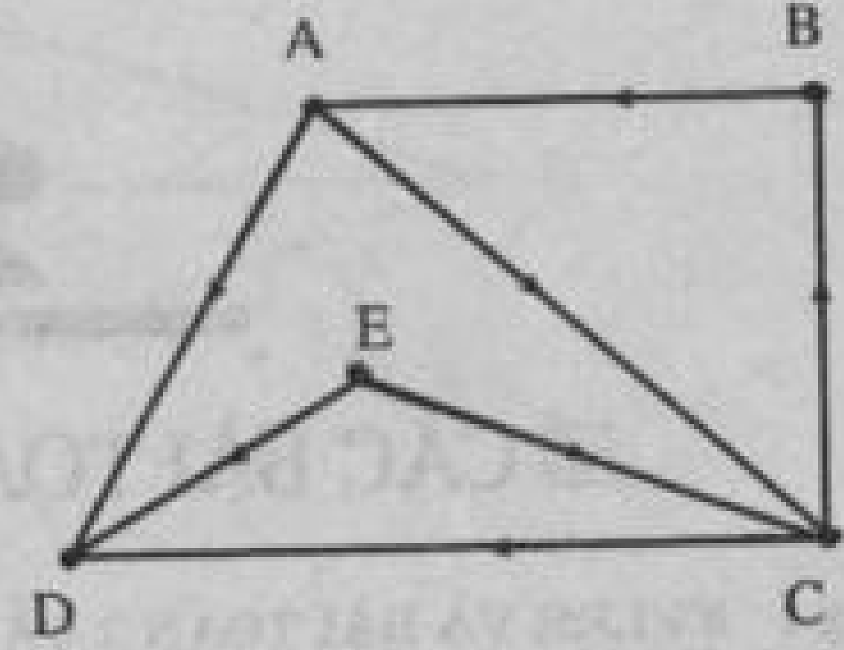
a)



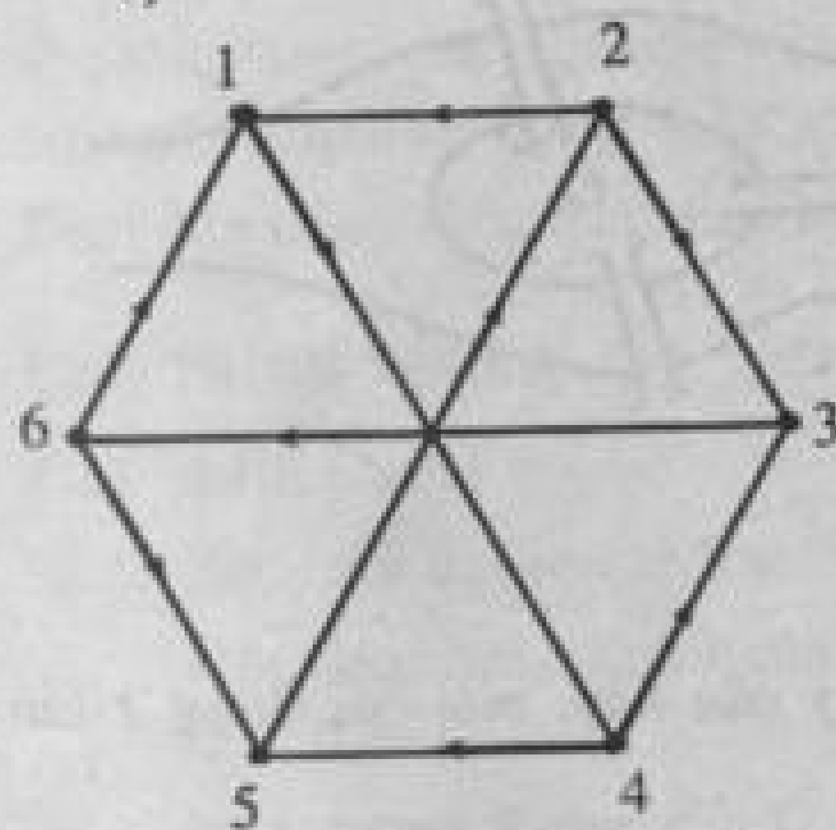


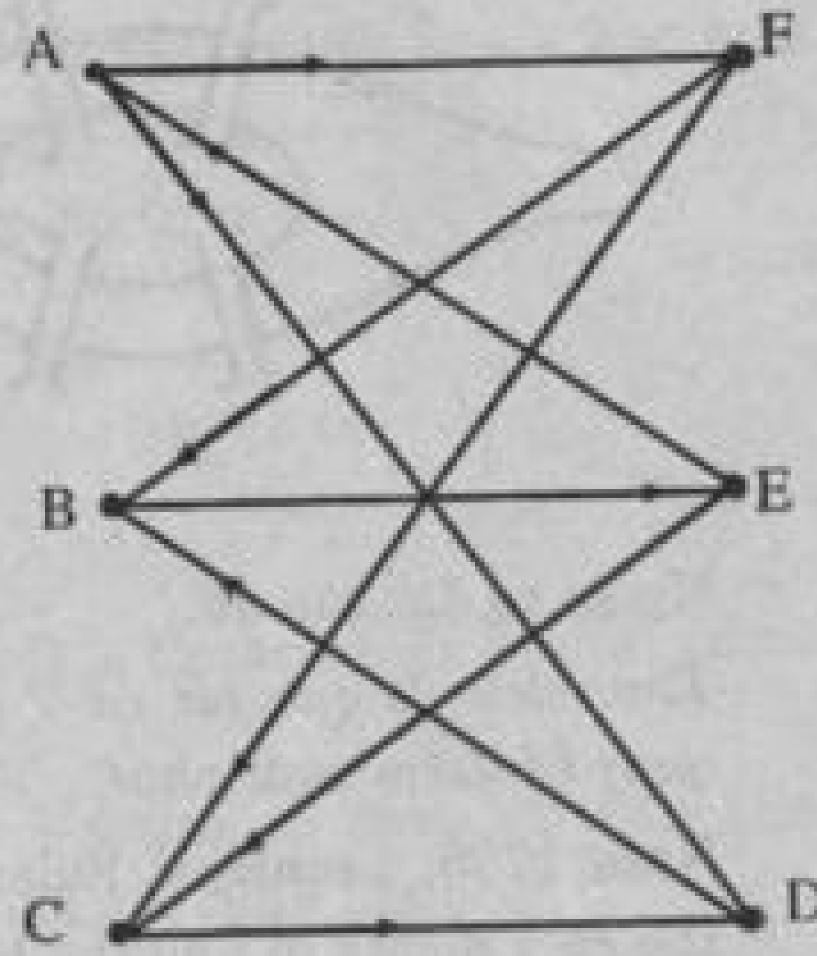
b)



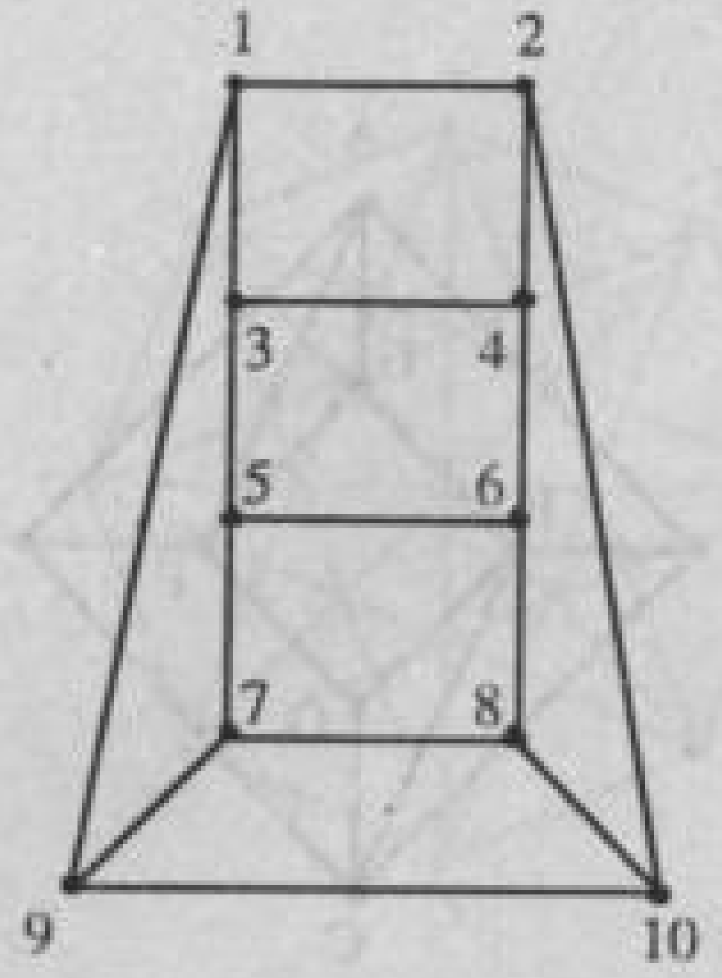


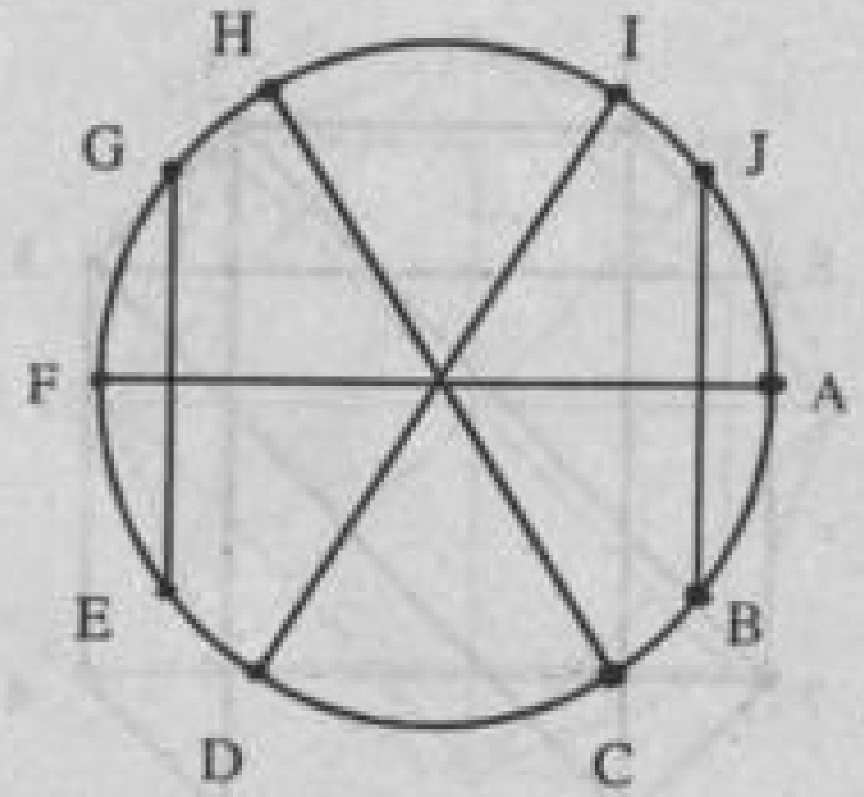
c)





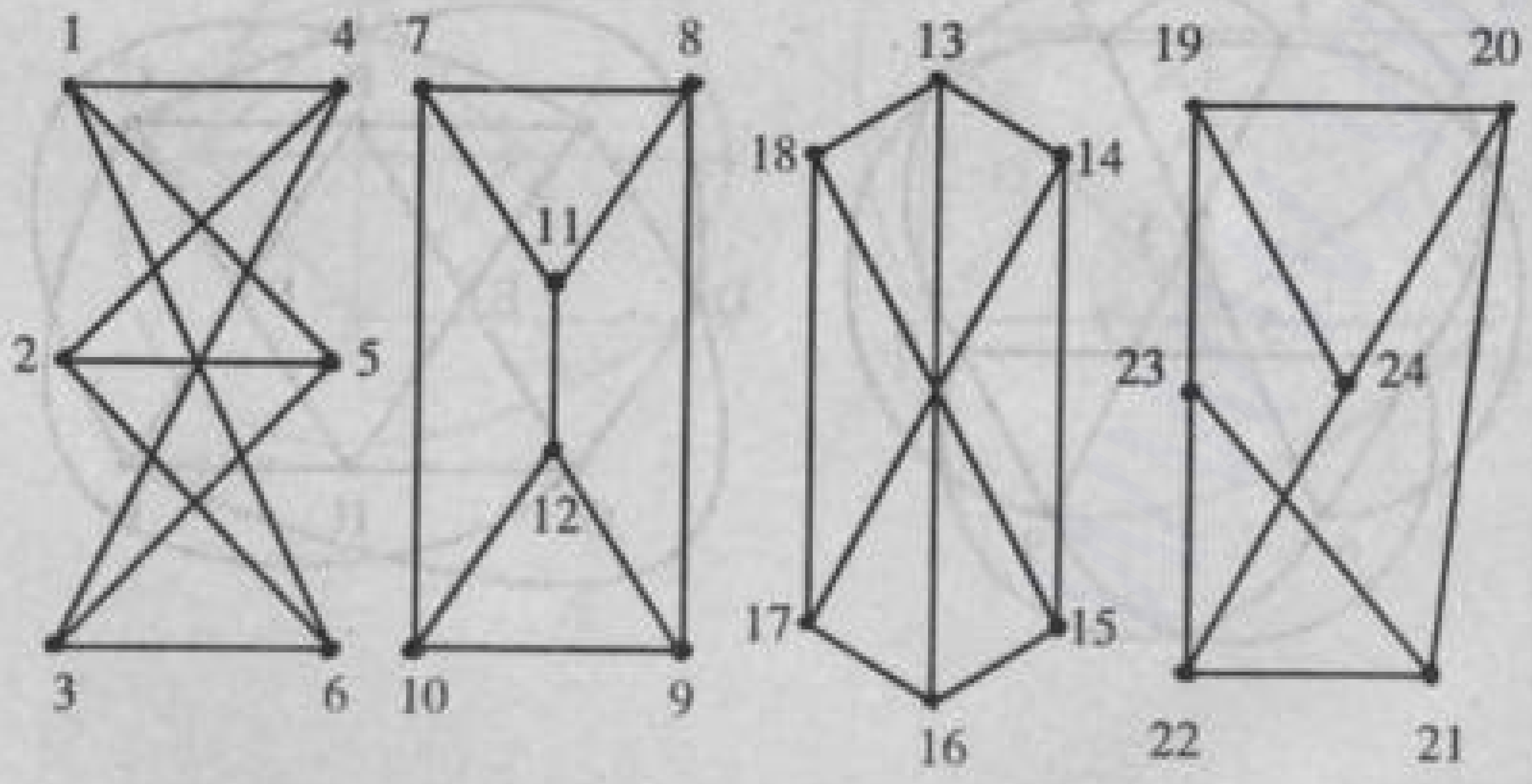
g)

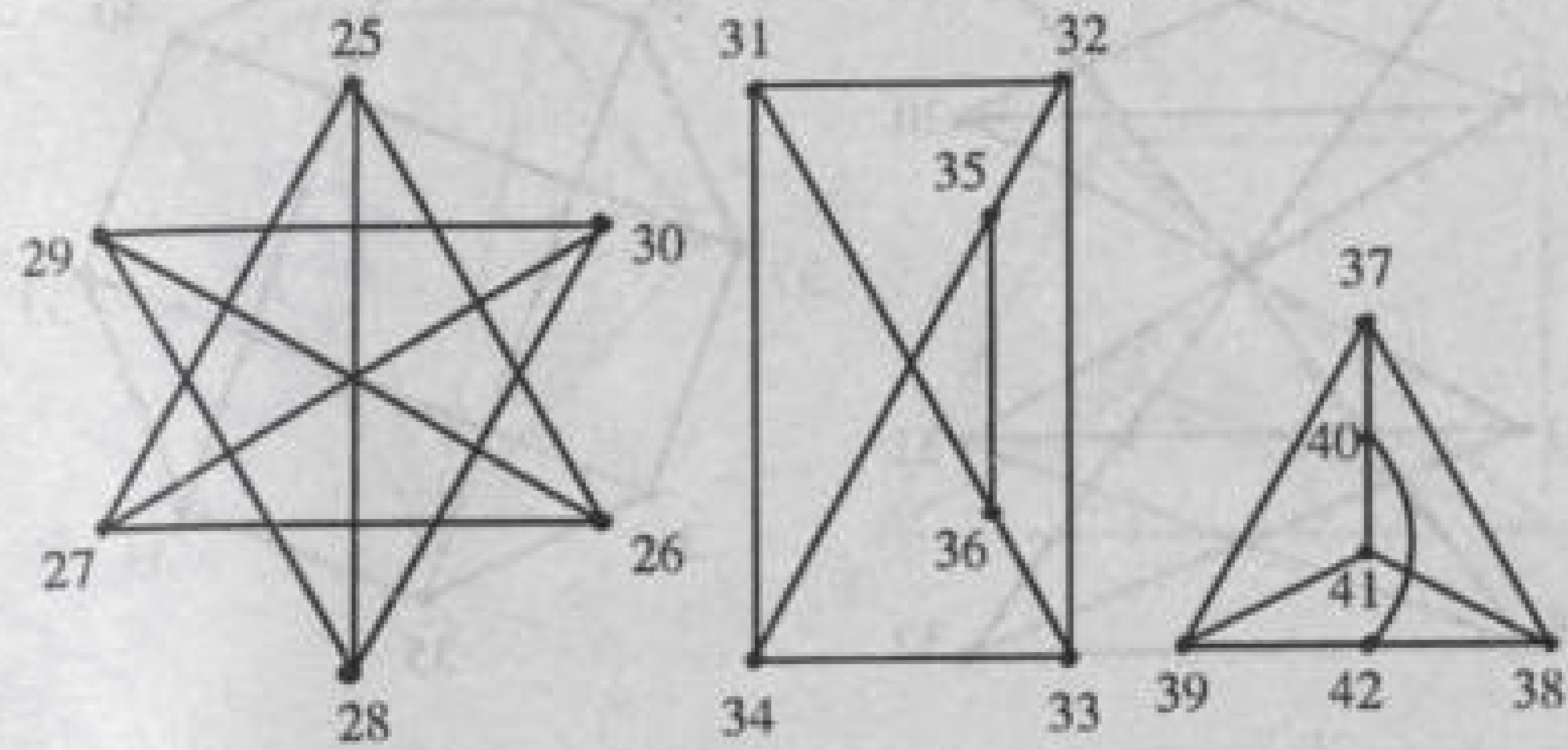




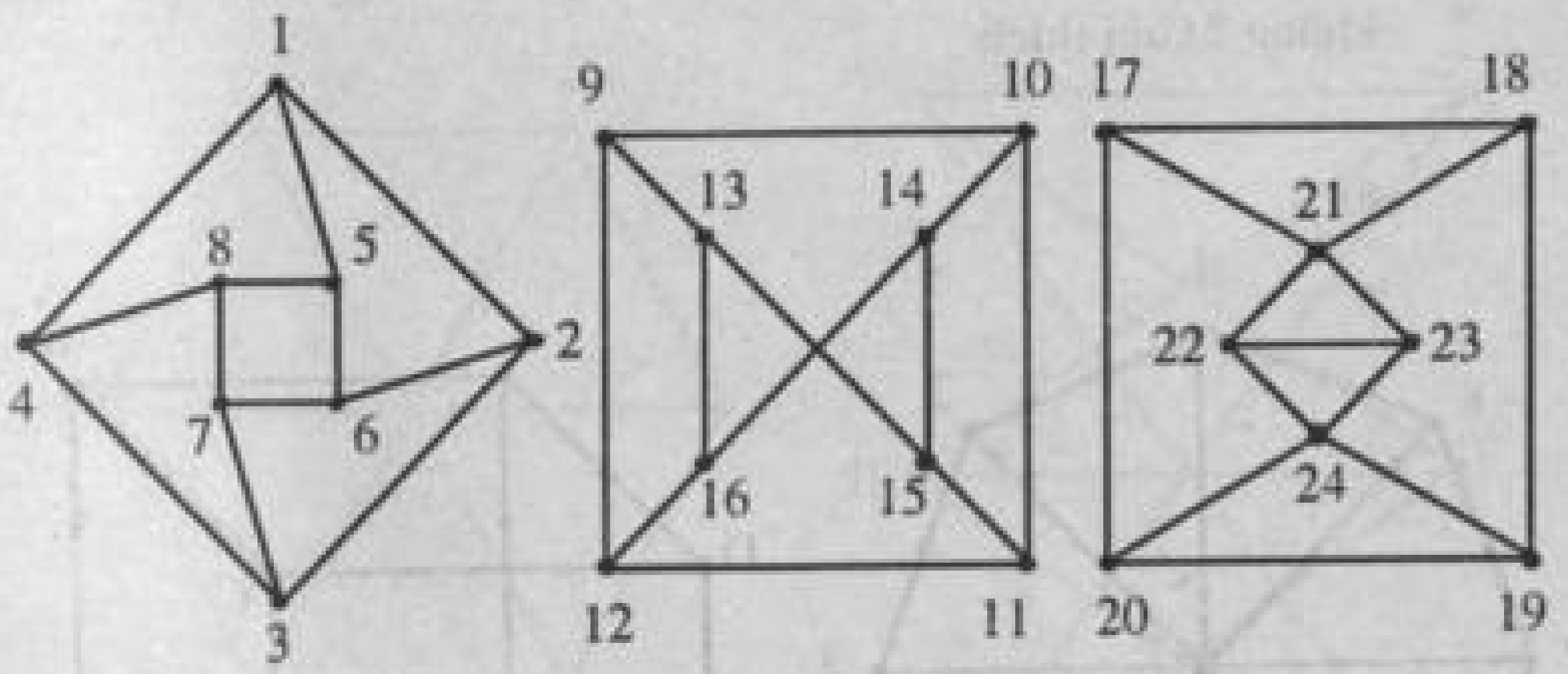
15. Tìm các cặp đồ thị đẳng hình với nhau trong các đồ thị sau:

a)

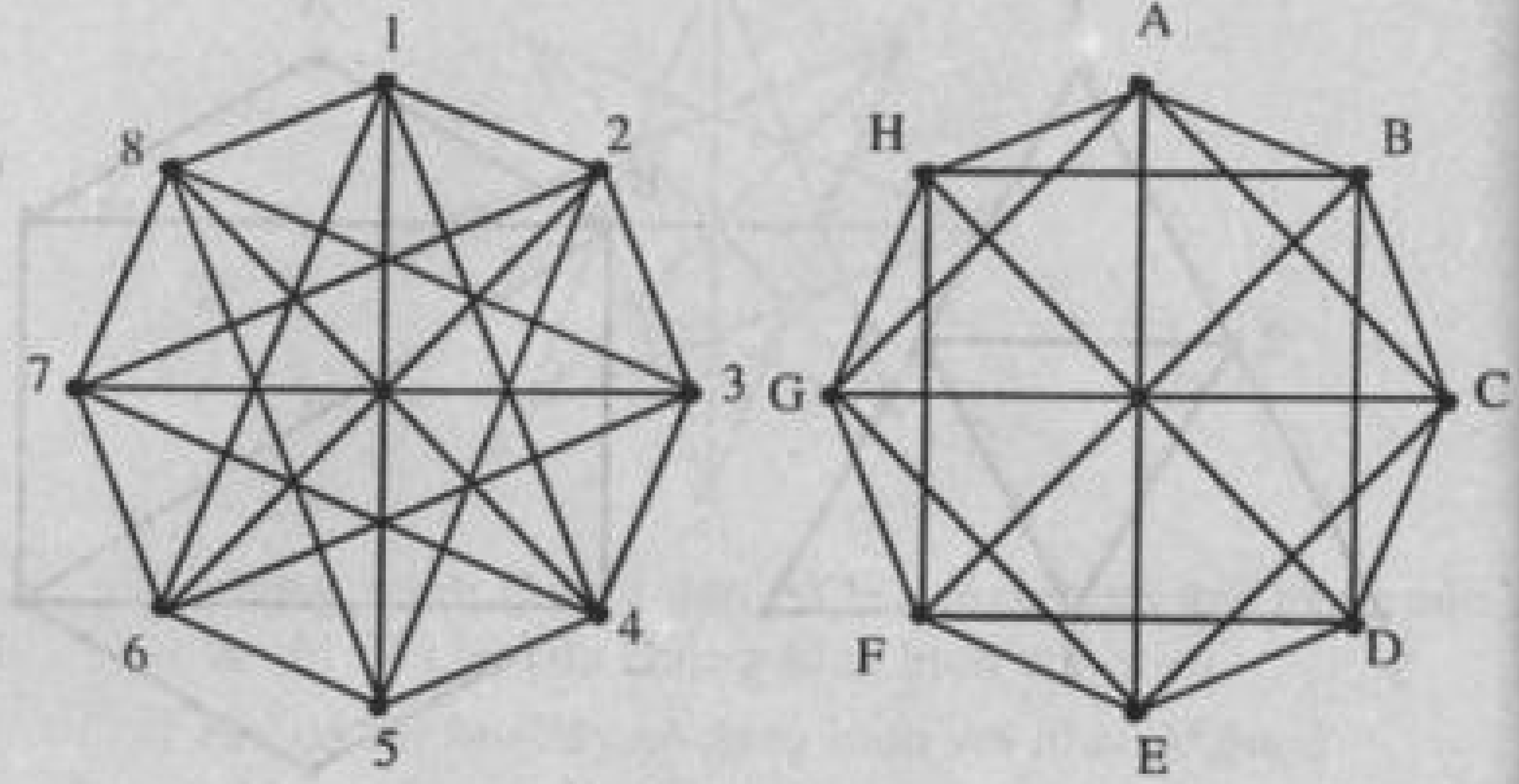




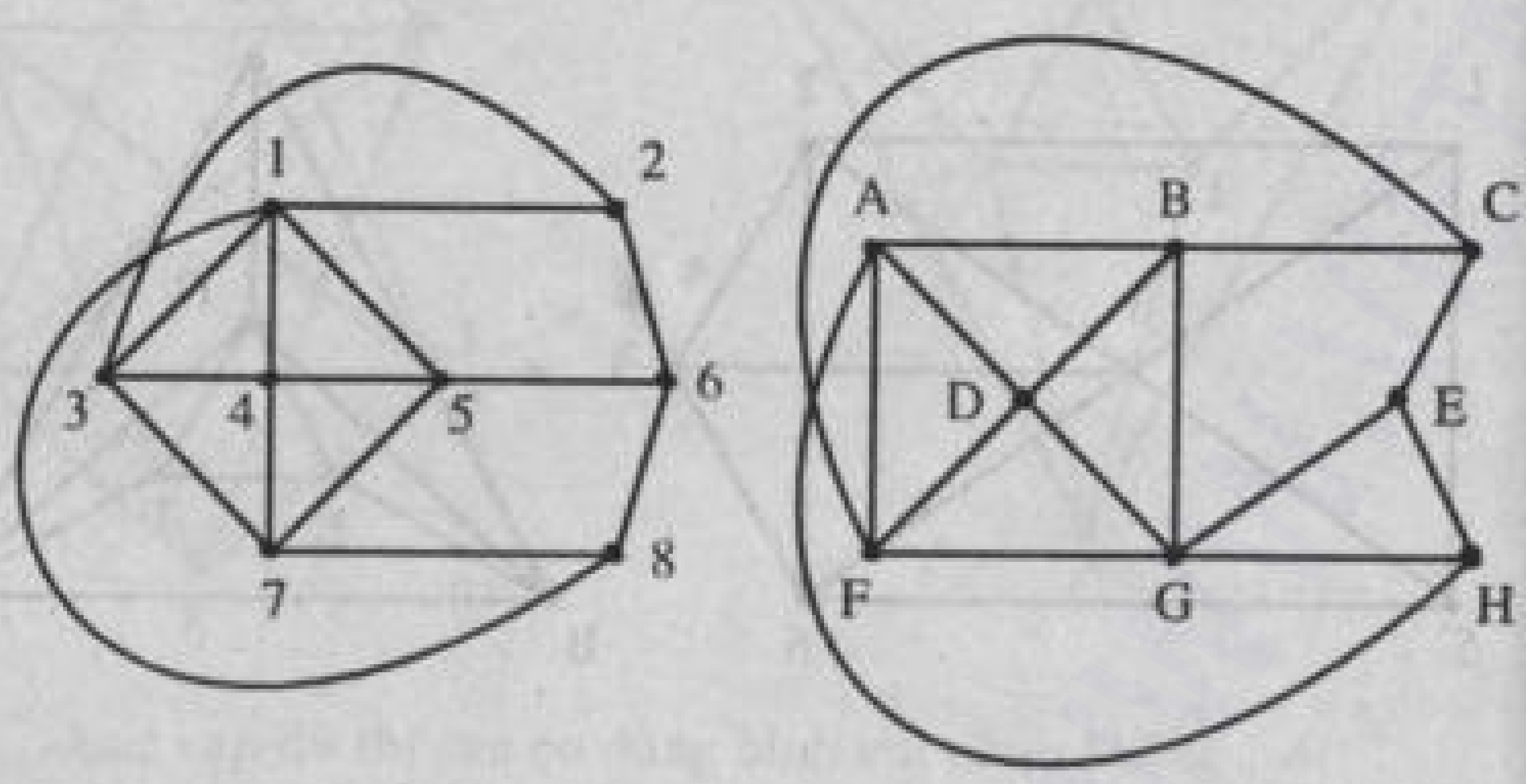
b)



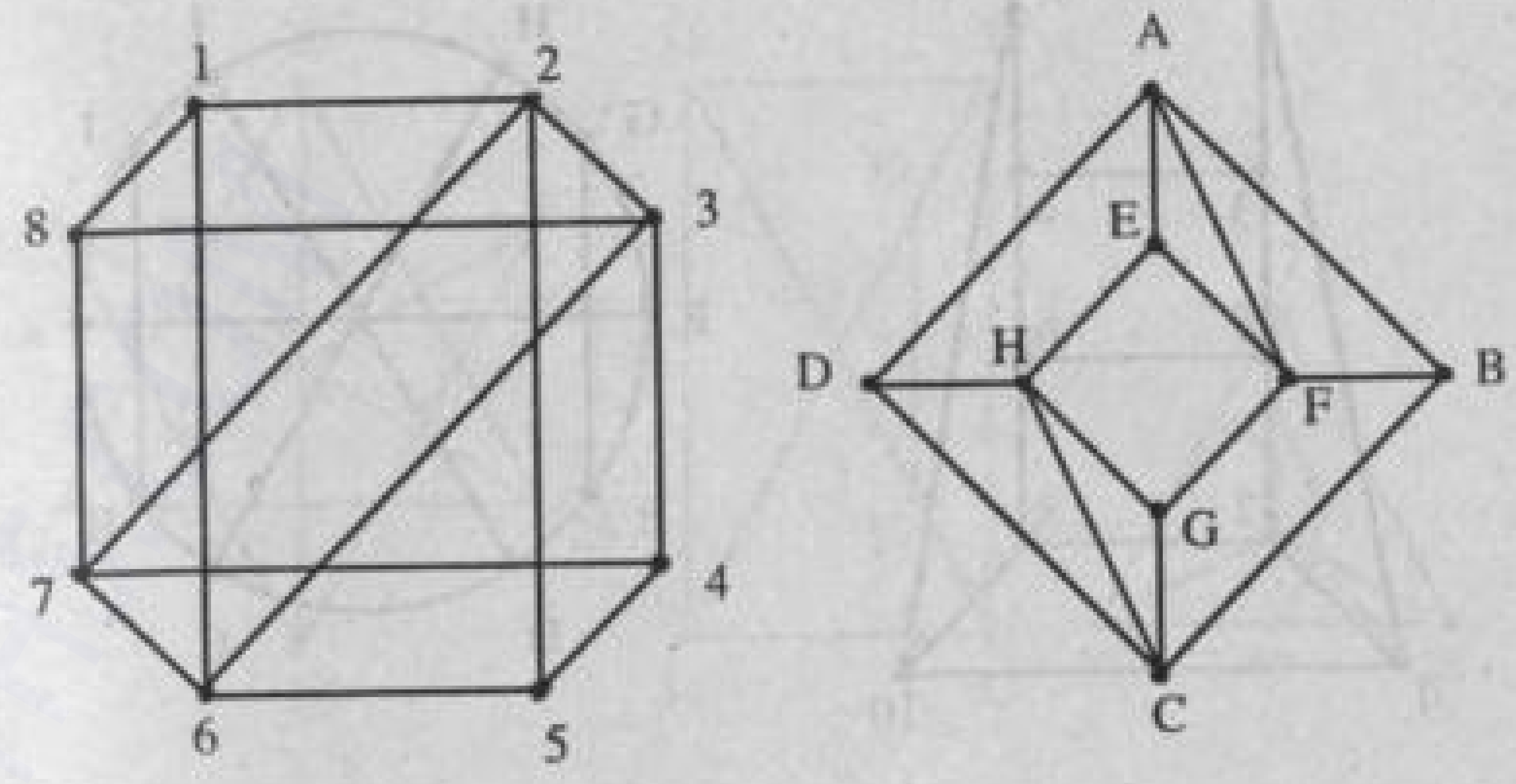
c)


1
2
3
4
5
6
7
8
A
B
C
D
E
F
G
H

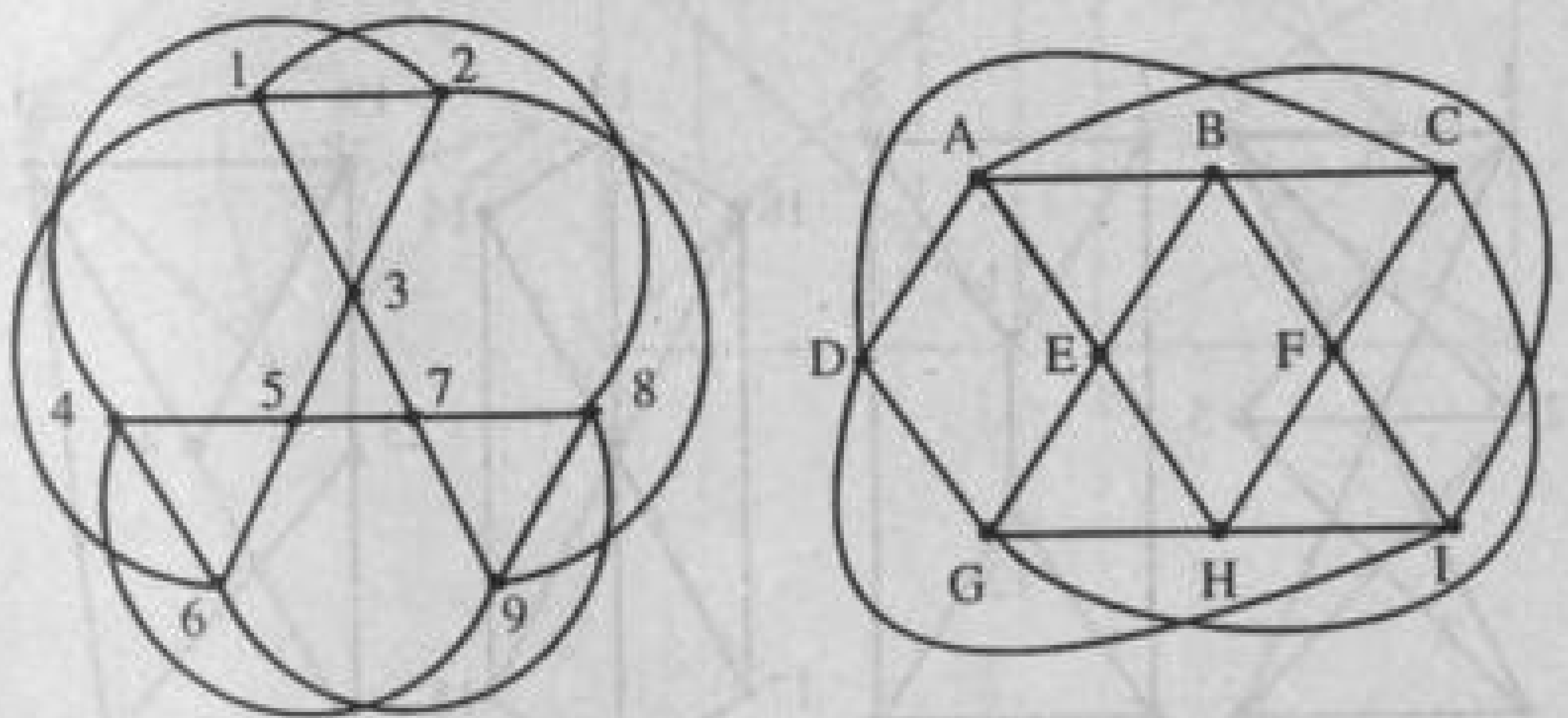
d)


1
2
3
4
5
6
7
8
A
B
C
D
E
F
G
H

e)


1
2
3
4
5
6
7
8
A
B
C
D
E
F
G
H

f)


1
2
3
4
5
6
7
8
9
A
B
C
D
E
F
G
H
I

d)

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	2	1			1			
B	1		1	1	1			
C		1			1	2		
D		1				1	1	1
E	1	1	1				1	
F			2	1			1	
G				1	1	1		1
H				1			1	2

3. Tìm chu t ình Euler hoặc đường Euler (nếu có) của đồ thị có hướng với ma trận liên kết sau :

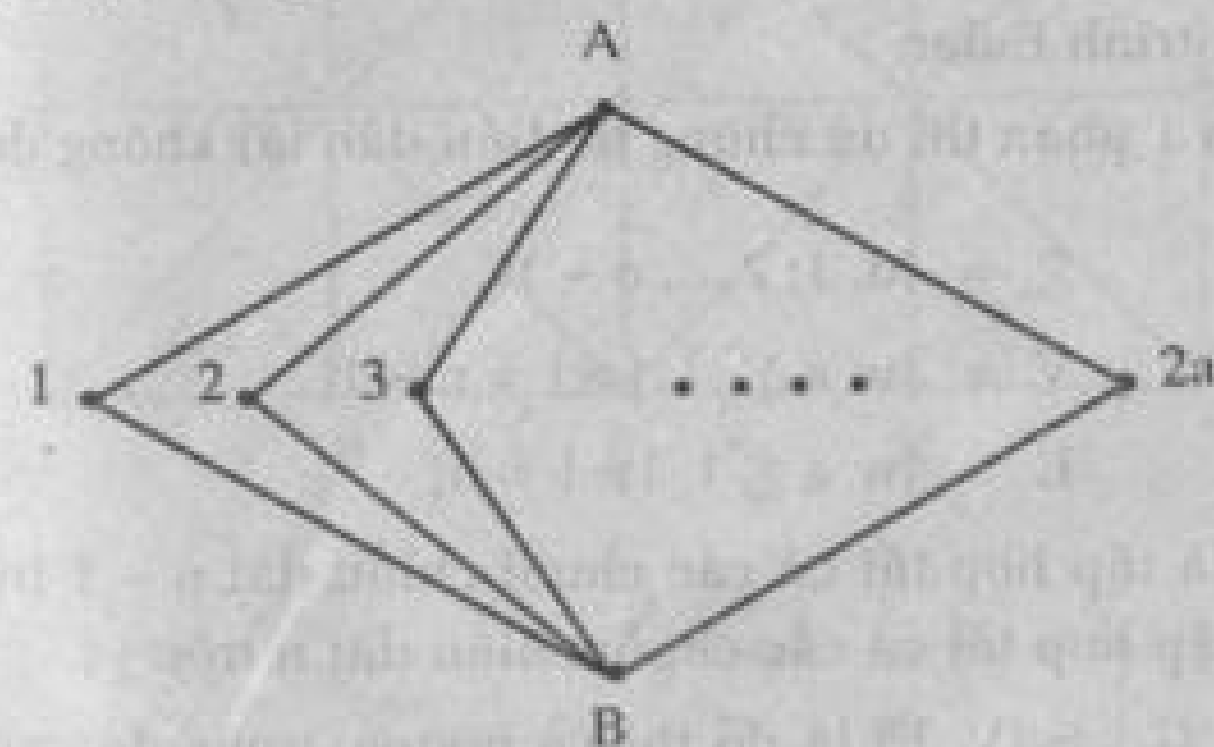
a)

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1				1			
1	1				1			
2		1				1		
3		1				1		
4			1				1	
5			1				1	
6				1				1
7				1				1

b)

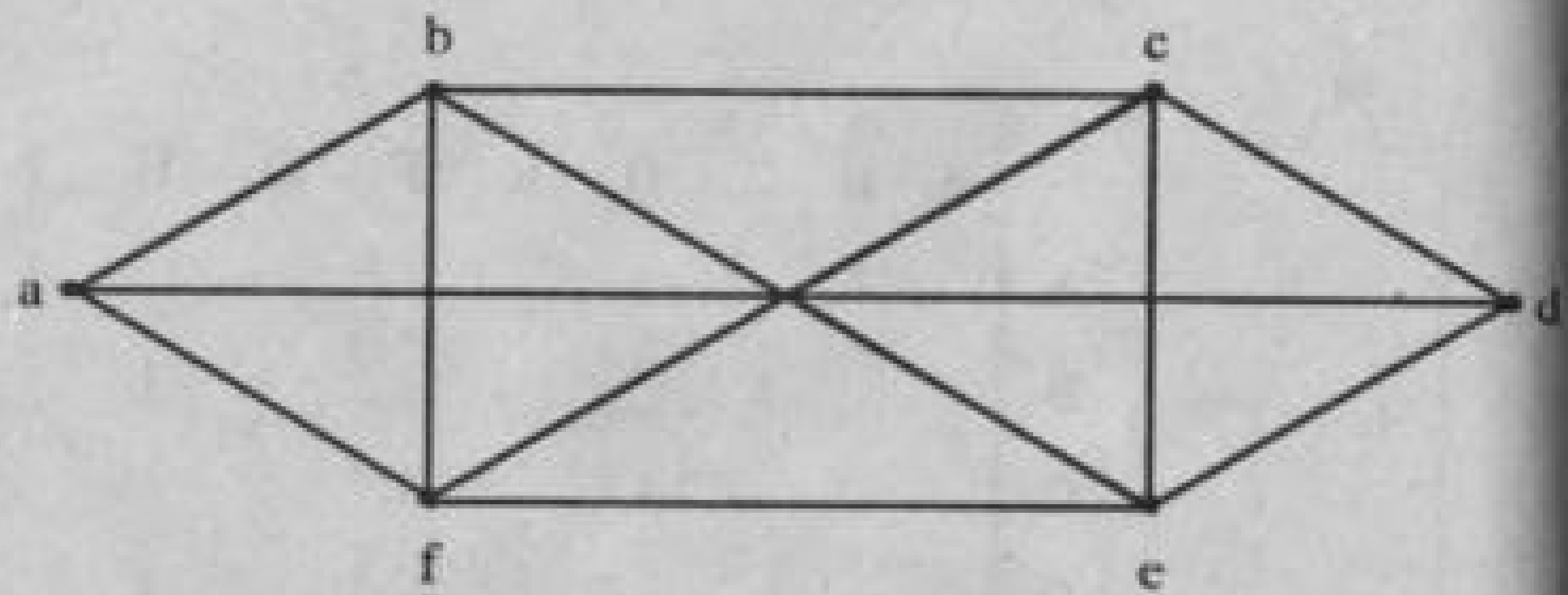
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	[redacted]
A		1							1	1
B			1					1		
C				1		1				
D								1		1
E				1				1		
F					1		1			
G					1	1				
H	1						1		1	
I			1							1
J	1	1								

4. Đồ thị sau đây có bao nhiêu chu trình Euler ?

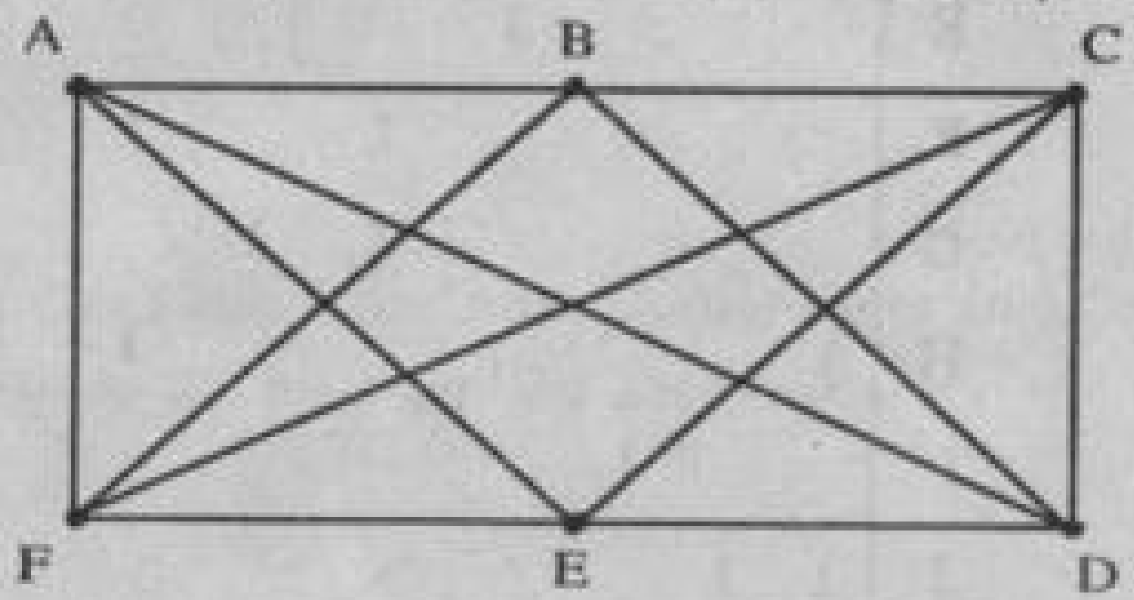


5. Đồ thị đường *(line graph)* L(G) của 1 đồ thị G là đồ thị có tập hợp đỉnh là tập hợp các cạnh của G, và có cạnh nối 2 đỉnh e_1, e_2 trong L(G) nếu và chỉ nếu 2 cạnh e_1 và e_2 tương ứng trong G là cùng tới 1 đỉnh trong G.

a) Vẽ L(G) của đồ thị G sau :



b) Viết ma trận liên kết của L(G) với đồ thị G sau :



6. Chứng minh rằng nếu G có chu trình Euler thì L(G) cũng có chu trình Euler.

Tìm 1 phản thí dụ chứng tỏ điều đảo lại không đúng.

7. Đặt $\Sigma = \{0, 1, 2, ..., \sigma - 1\}$

$V = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = n - 1\}$

$E = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = n\}$

(V là tập hợp tất cả các chuỗi chiều dài n − 1 trên Σ, và E là tập hợp tất cả các chuỗi chiều dài n trên Σ).

Gọi $G_{\sigma,n} = (V, E)$ là đồ thị có hướng, trong đó cạnh $b_1b_2...b_n$ có đỉnh đầu là $b_1b_2...b_{n-1}$ và đỉnh kết thúc là $b_2...b_n$ $(b_1, b_2, ..., b_n \in \Sigma)$.

a) Vẽ $G_{2,3}$, $G_{2,4}$, $G_{3,2}$, $G_{4,2}$.

b) Chứng minh rằng $G_{\sigma,n}$ có chu trình Euler.

c) Một chuỗi De Bruijn là 1 chuỗi (tuần hoàn) trên Σ

$$a_0a_1...a_{r-1}$$

sao cho với mọi $w \in E$, tồn tại duy nhất 1 chỉ số (mod r) để : $w = a_ia_{i+1}...a_{i+n-1}$

Dễ thấy rằng nếu chuỗi De Bruijn tồn tại thì $r = \sigma^n$.

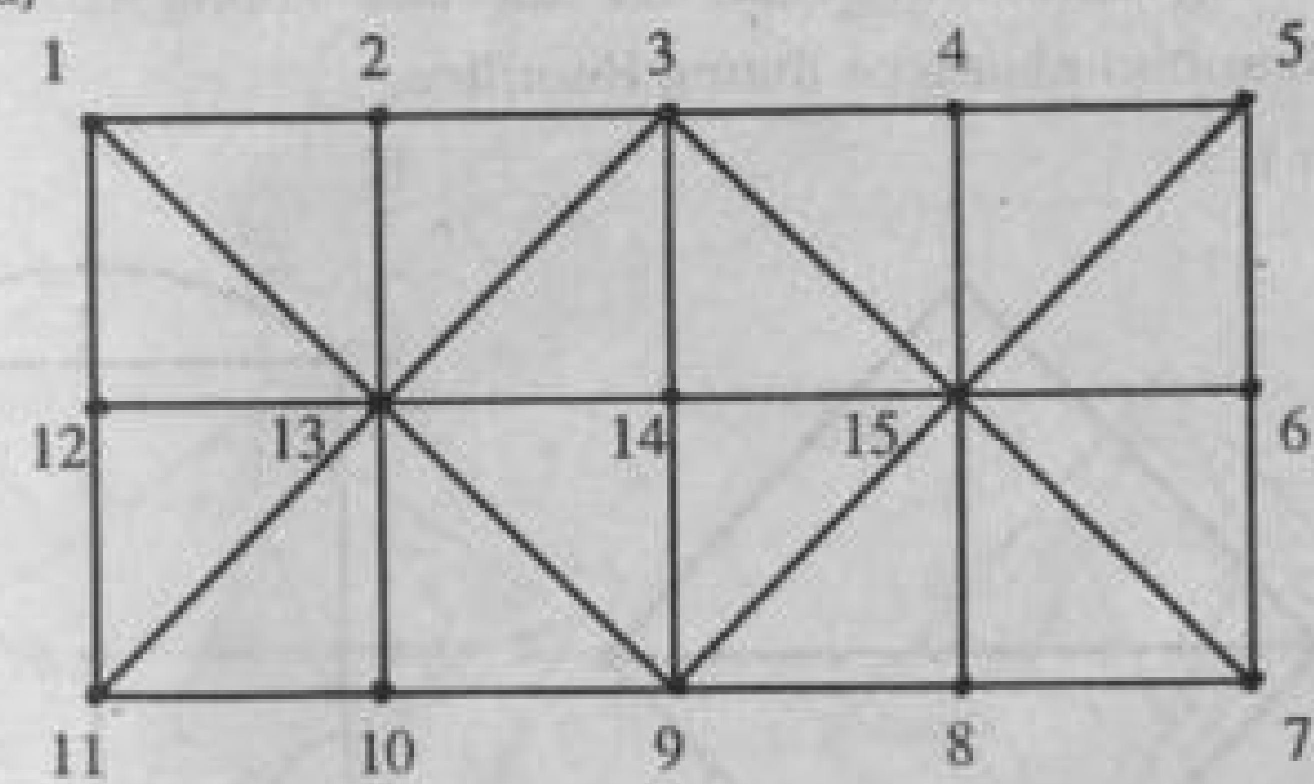
Dùng kết quả của phần b) để suy ra rằng với mọi σ, n luôn luôn tồn tại chuỗi De Bruijn.

8. a) Tìm một đồ thị có chu trình Hamilton nhưng không có chu trình Euler.

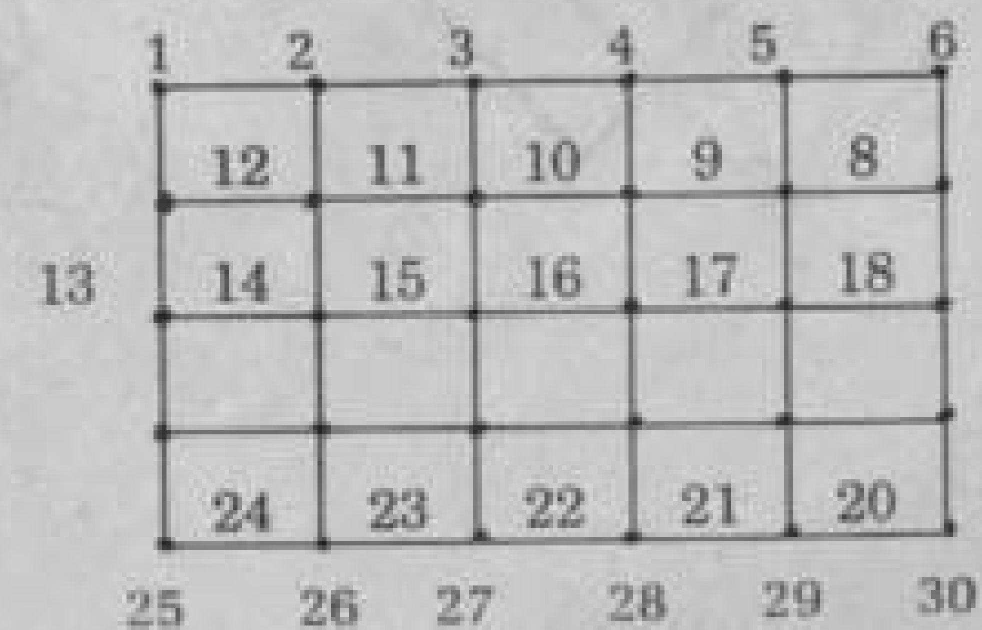
b) Tìm 1 đồ thị có chu trình Euler nhưng không có chu trình Hamilton.

9. Tìm một chu trình Hamilton của đồ thị sau :

a)



b)



gọi là một rừng *(forest)*.

Mỗi đỉnh x của cây T là gốc một cây con của T gồm x và các đỉnh sau của nó. Như vậy, nếu hủy gốc khỏi cây T, ta sẽ được một rừng.

Bây giờ ta xét một cây tự do T.

Độ lệch tâm *(eccentricity)* của đỉnh x, ký hiệu là E(x), là khoảng cách lớn nhất từ x đến một đỉnh bất kỳ của T:

$$E(x) = \max_{y \in T} \delta(x, y)$$

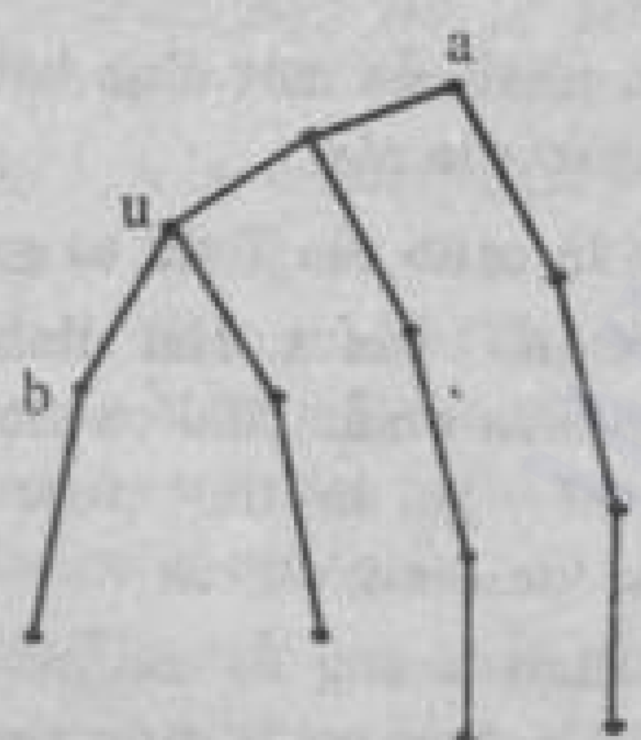
Đỉnh có độ lệch tâm nhỏ nhất trong T được gọi là tâm *(center)* của T, độ lệch tâm của tâm được gọi là bán kính *(radius)* của T.

Nhận xét rằng nếu ta chọn tâm làm gốc thì cây có gốc tương ứng sẽ có chiều cao nhỏ nhất (bằng bán kính của cây)

4.1.3.2 ĐỊNH LÝ

Một cây tự do có nhiều nhất 2 tâm.

CHỨNG MINH: Trước hết ta chứng minh rằng nếu a, b là 2 tâm của T thì chúng được nối với nhau bởi một cạnh. Thực vậy, chọn a làm gốc. Giả sử δ(a,b) > 1 thì có một đỉnh u đứng trước b và đứng sau a. Với mọi x trong cây,



- Nếu x đứng sau hay trùng với u thì

$$\delta(u, x) = \delta(a, x) - \delta(a, u) < E(a)$$

- Nếu x không đứng sau và không trùng với u thì

$$\delta(u, x) = \delta(b, x) - \delta(b, u) < E(b)$$

Suy ra $E(u) < E(a) = E(b)$: vô lý

Bây giờ nếu a, b, c là 3 tâm đôi một khác nhau của cây thì :

$$\delta(a, b) = \delta(b,c) = \delta(c, a) = 1$$

Điều này đưa đến cây có chu trình abca. Vô lý

Vậy, cây có nhiều nhất 2 tâm. □

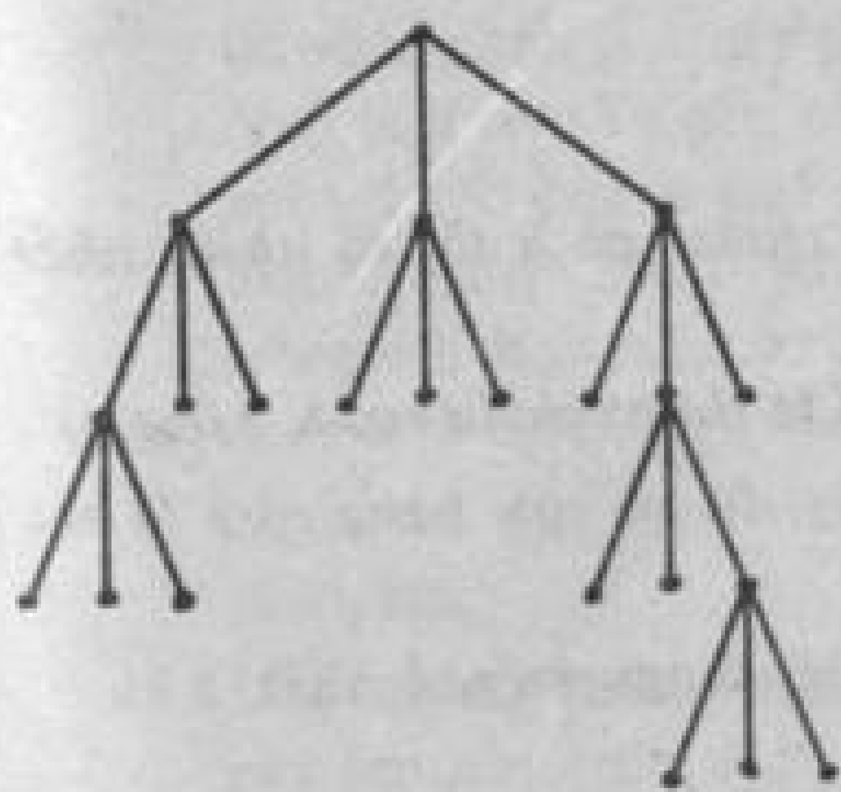
4.1.4 CÂY m-PHÂN

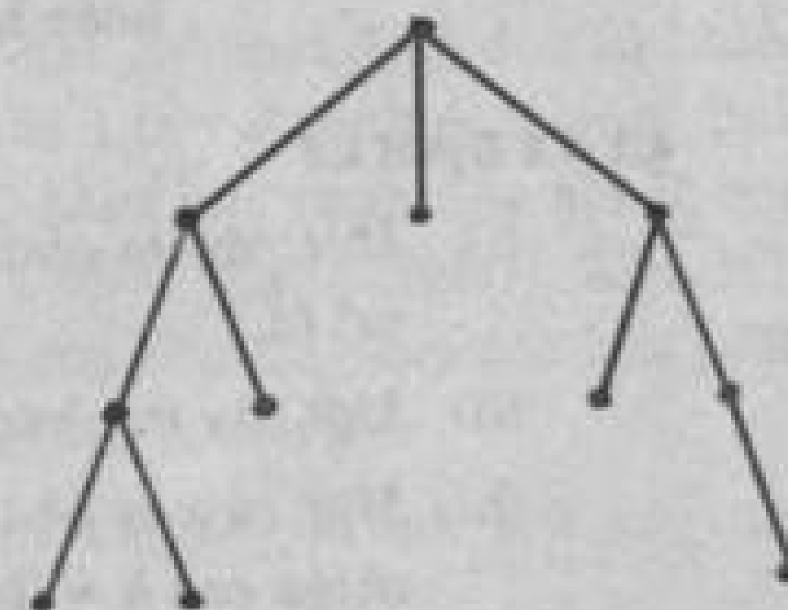
4.1.4.1 ĐỊNH NGHĨA

Cho một cây có gốc T.

Nếu số con tối đa của một đỉnh trong T là m và có ít nhất một đỉnh có đúng m con thì T gọi là một cây m–phân *(m-ary tree)*.

Nếu mọi đỉnh trong của T đều có đúng m con thì T gọi là một cây m-phân đầy đủ *(complete m-ary tree)*.





4.1.2 ĐỊNH LÝ (Daisy Chain Theorem)

Giả sử T là một đồ thị có n đỉnh, thì 6 mệnh đề sau đây tương đương :

(ii) T là một cây.

(ii) T không có chu trình và có n – 1 cạnh.

(iii) T liên thông và nếu hủy bất kỳ một cạnh nào của nó cũng làm mất tính liên thông.

(iv) Giữa 2 đỉnh bất kỳ của T, luôn luôn tồn tại một đường duy nhất nối chúng.

(v) T không có chu trình, và nếu thêm một cạnh mới nối 2 đỉnh bất kỳ của T thì sẽ tạo ra một chu trình.

(vi) T liên thông và có n–1 cạnh.

CHỨNG MINH:

(i) ⇒ (ii) : do định lý 4.1.1.2

(ii) ⇒ (iii): Mỗi thành phần liên thông của T đều là cây vì T không có chu trình. Trong mỗi cây này, số cạnh + 1 bằng số đỉnh. Mà theo giả thiết trong T có số cạnh + 1 = số đỉnh, vậy T chỉ có thể có một thành phần, nghĩa là T liên thông.

Bây giờ hủy đi một cạnh của T, ta nhận được một đồ thị T' có n đỉnh và n – 2 cạnh, hơn nữa T' cũng không có chu trình. Nếu T' liên thông thì T' là một cây: vô lý.

(iii) ⇒ (iv): Gọi x, y là 2 đỉnh bất kỳ của T. Vì T liên thông nên tồn tại một đường nối chúng. Giả sử có 2 đường khác nhau cùng nối x với y, thì khi đó, nếu ta hủy đi một cạnh nằm trên đường thứ nhất nhưng không nằm trên đường thứ hai thì sẽ không làm mất tính chất liên thông của đồ thị : mâu thuẫn với giả thiết.

(iv) ⇒ (v): Nếu T có một chu trình, gọi v, w là 2 đỉnh phân biệt của chu trình này, rõ ràng, ta có 2 đường khác nhau nối v và w trên chu trình này: vô lý, vậy T không có chu trình.

Bây giờ, thêm vào T cạnh mới nối đỉnh x với đỉnh y. Theo giả thiết , có một đường trong T (không chứa cạnh mới) nối x với y. Rõ ràng đường này thêm cạnh mới sẽ tạo thành một chu trình.

(v) ⇒ (vi): Xét 2 đỉnh bất kỳ x, y của T. Thêm vào T cạnh mới nối x với y thì ta tạo được một chu trình. Hủy cạnh mới này khỏi chu trình, ta được một đường trong T nối x với y. Vậy T liên thông. Mà theo giả thiết, T không có chu trình nên T là cây có n đỉnh. Vậy T có n – 1 cạnh.

(vi) ⇒ (i): Giả sử T có chu trình. Hủy một cạnh trong chu trình này không làm mất tính liên thông. Nếu đồ thị nhận được vẫn còn có chu trình thì ta lại hủy một cạnh trong chu trình mới, cứ thế cho đến khi ta nhận được đồ thị liên thông và không có chu trình. Đồ thị này là một cây có n đỉnh nhưng số cạnh < n – 1: vô lý.

Vậy T không có chu trình, nghĩa là T là một cây. □

4.1.3 TÂM VÀ BÁN KÍNH CỦA CÂY

4.1.3.1 ĐỊNH NGHĨA

Xét một cây có gốc T.

Mức *(level)* của một đỉnh v trong T là khoảng cách từ gốc đến v.

Mức lớn nhất của một đỉnh bất kỳ trong cây gọi là chiều cao *(height)* của cây.

Nếu $\overline{xy}$ là cạnh của T thì ta gọi x là cha *(parent)* của y, y là con *(child)* của x. Hai đỉnh cùng cha gọi là anh em *(siblings)* của nhau. Nếu có một đường (có hướng) đi từ v đến w thì v gọi là đỉnh trước *(ancestor)* của w, w gọi là đỉnh sau *(descendant)* của v.

Những đỉnh không có con gọi là lá *(leaves)*, những đỉnh không là lá được gọi là đỉnh trong *(internal vertices)*.

Một tập hợp gồm nhiều cây đôi một không có đỉnh chung

4

☑ CÂY

4.1 KHẢO SÁT TỔNG QUÁT

4.1.1 ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

4.1.1.1 ĐỊNH NGHĨA

Cây *(tree)* còn gọi là cây tự do *(free tree)* là một đồ thị liên thông không có chu trình.

4.1.1.2 ĐỊNH LÝ

Cho T là một cây, thì giữa hai đỉnh bất kỳ của T luôn luôn tồn tại một và chỉ một đường trong T nối chúng.

CHỨNG MINH: Gọi x, y là 2 đỉnh trong cây T. Vì T liên thông nên có ít nhất một đường trong T nối x và y. Giả sử có 2 đường khác nhau cùng nối x và y :

$P_1 = a_0a_1...a_n$; $P_2 = b_0b_1...b_n$

trong đó $a_0 = b_0 = x$ và $a_n = b_n = y$

Gọi i là chỉ số nhỏ nhất sao cho $\overline{a_ia_{i+1}} \neq \overline{b_ib_{i+1}}$

Gọi j là chỉ số nhỏ nhất $\geq$ i sao cho có $k > i$ để $b_k = a_j$.

Dễ thấy i, j, k tồn tại và $a_ia_{i+1}...a_jb_{k-1}...b_i$ là chu trình trong T : vô lý. □

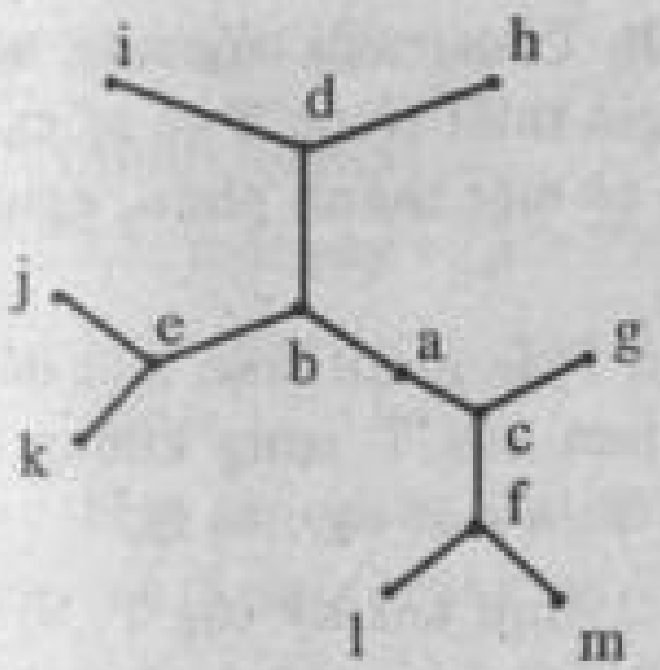
Chiều dài của đường (duy nhất) nối 2 đỉnh x, y trong T gọi là khoảng cách *(distance)* giữa 2 đỉnh x, y và được ký hiệu là $\delta(x, y)$.

Cây có gốc *(rooted tree)* là 1 cây có hướng trên đó đã chọn một đỉnh là gốc *(root)* và các cạnh được định hướng sao cho với mọi đỉnh, luôn luôn có 1 đường có hướng từ gốc đi đến đỉnh đó.

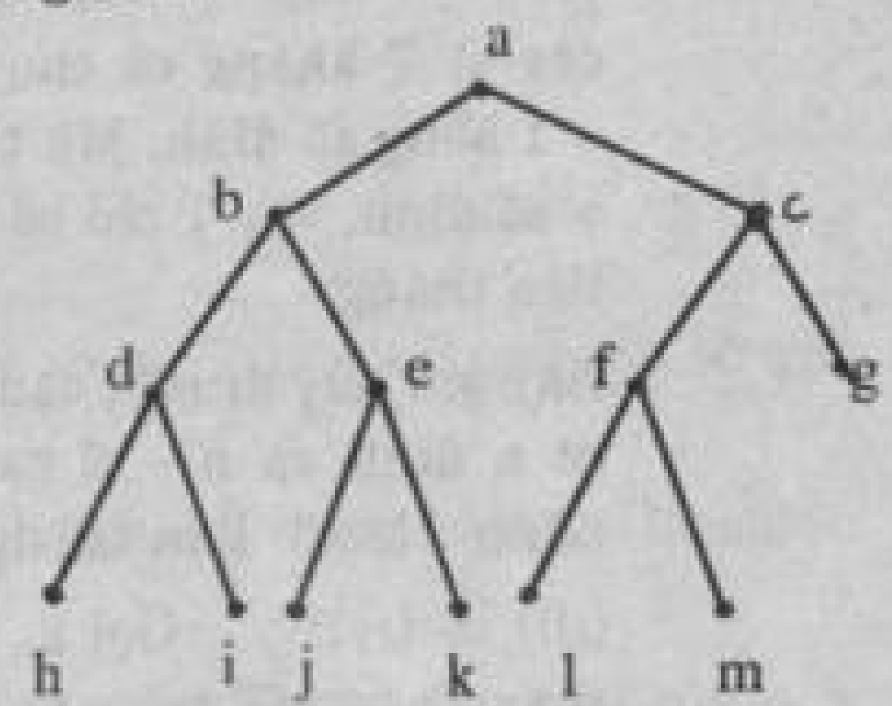
Hiển nhiên, gốc của cây là duy nhất.

Do định lý 4.1.1.1, ta thấy ngay mọi cây tự do đều có thể chọn bất kỳ một đỉnh của nó làm gốc để trở thành 1 cây có gốc.

THÍ DỤ 1: Với cây tự do T sau, chọn đỉnh a làm gốc thành cây có gốc T'.



T



T' □

4.1.1.3 ĐỊNH LÝ

Nếu cây có n đỉnh thì có n – 1 cạnh.

CHỨNG MINH: Ta có thể giả sử là cây có gốc. Mỗi đỉnh khác gốc đều có bậc trong bằng 1, còn gốc có bậc trong bằng 0. Mà ta có tất cả n – 1 đỉnh khác gốc, vậy có n – 1 cạnh. □

10. Chứng minh rằng :

a) K_n phẳng $\Leftrightarrow$ $n \leq 4$.

b) $K_{m,n}$ phẳng $\Leftrightarrow$ $m \leq 2$ hay $n \leq 2$.

11. Đồ thị tam phân đầy đủ *(complete tripartite graph)* $K_{m,n,r}$ là một đơn đồ thị có $m + n + r$ đỉnh được phân cát thành 3 tập hợp cách biệt V_1 gồm m đỉnh, V_2 gồm n đỉnh và V_3 gồm r đỉnh. Ngoài ra có cạnh nối 2 đỉnh nếu và chỉ nếu 2 đỉnh này không cùng trong một V_i $(1 \leq i \leq 3)$.

a) Vẽ $K_{1,2,3}$, $K_{2,2,3}$.

b) Tìm số cạnh và đai của $K_{m,n,r}$.

c) Với giá trị nào của m, n, r thì $K_{m,n,r}$ phẳng ?

12. Ký hiệu L(G) là đồ thị đường của G.

a) Chứng minh rằng $L(K_5)$ và $L(K_{3,3})$không phẳng. Suy ra rằng nếu G không phẳng thì L(G) cũng không phẳng.

b) Tìm đồ thị phẳng G sao cho L(G) không phẳng.

13. Gọi G là 1 đơn đồ thị.

a) Giả sử G phẳng. Chứng minh rằng tồn tại 1 đỉnh của G có bậc ≤ 5.

b) Suy ra rằng nếu mọi đỉnh của G đều có bậc ≥ 6 thì G không phẳng.

14. Một đồ thị Platon *(platonic graph)* là 1 đồ thị phẳng liên thông mà mọi đỉnh đều có cùng bậc d_1 $(d_1 \geq 3)$ và mọi mặt đều có d_2 cạnh biên $(d_2 \geq 3)$.

Xét một đồ thị Platon có số đỉnh , số cạnh và số mặt lần lượt là V, E, F.

a) Chứng minh rằng $E = \frac{1}{2}d_1V$ và $F = \frac{d_1}{d_2}V$.

b) Chứng minh rằng $(2d_1 + 2d_2 - d_1d_2)V = 4d_2$

Suy ra bất đẳng thức $(d_1 - 2)(d_2 - 2) < 4$

c) Tìm tất cả các cặp (d_1, d_2) có thể có và vẽ các đồ thị Platon tương ứng.

15. Bất đẳng thức EV có còn đúng trong trường hợp đồ thị G không liên thông không ?

e)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} & 1 & & & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & 1 & \\ & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 & & \\ 1 & & 1 & & 1 & & \end{bmatrix} \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{array} & \begin{bmatrix} & 1 & & & 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & & & & 1 & \\ 1 & & & & & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ 1 & & & 1 & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Gọi G là đồ thị có các đỉnh là các ô trong 1 bàn cờ 4 × 4, và các cạnh là các đoạn nối giữa 2 đỉnh sao cho có thể đi từ đỉnh này đến đỉnh kia bằng 1 nước đi của quân mã.

a) Vẽ G.

b) G có phẳng không ?

5. Một đơn đồ thị phẳng liên thông có 10 mặt, tất cả các đỉnh đều có bậc 4. Tìm số đỉnh của đồ thị.

6. Chứng minh công thức Euler cho đồ thị phẳng không liên thông.

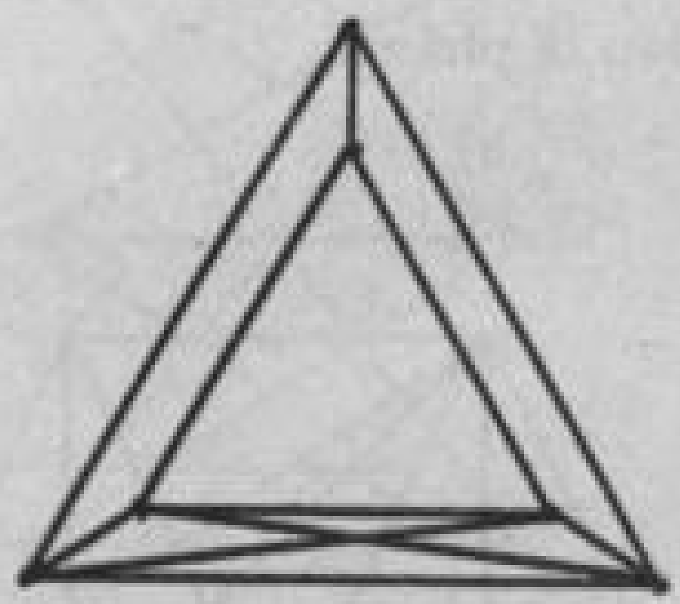
7. Đơn đồ thị phẳng liên thông G có 9 đỉnh, bậc các đỉnh là 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Tìm số cạnh và số mặt của G.

8. Chứng minh rằng nếu gọi E là số cạnh ($E \geq 1$) và F là số mặt của 1 đơn đồ thị phẳng liên thông thì $3F \leq 2E$.

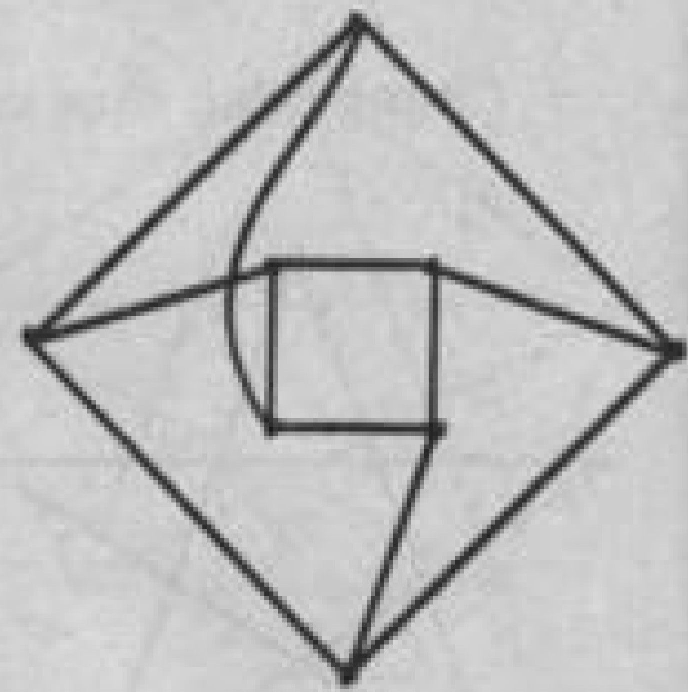
9. Tìm V, E và g của :

a) K_n; b) $K_{m,n}$

c)



d)



3. Các đồ thị sau đây có phẳng không ?

a)

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & A & B & C & D & E & F & G & H & I & J \\
\hline
A & & 1 & & & 1 & & & & & \\
B & 1 & & 1 & & & & & & 1 & \\
C & & 1 & & 1 & & & & 1 & & \\
D & & & 1 & & & 1 & & & & \\
E & 1 & & & & & 1 & 1 & & & \\
F & & & & 1 & 1 & & & & & 1 \\
G & & & & & 1 & & & 1 & & \\
H & & & 1 & & & & 1 & & 1 & \\
I & & 1 & & & & & & 1 & & 1 \\
J & & & & & & 1 & & & 1 &
\end{array}
$$

b)

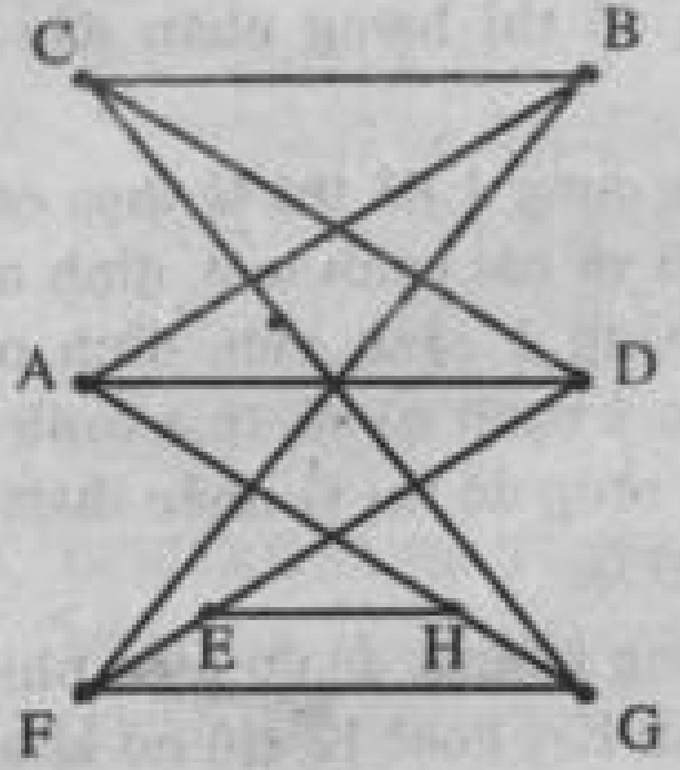
$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & A & B & C & D & E & F \\
\hline
A & & & 1 & 1 & 1 & \\
B & & & & 1 & 1 & 1 \\
C & 1 & & & & 1 & 1 \\
D & 1 & 1 & & & & 1 \\
E & 1 & 1 & 1 & & & \\
F & & 1 & 1 & 1 & &
\end{array}
$$

c)

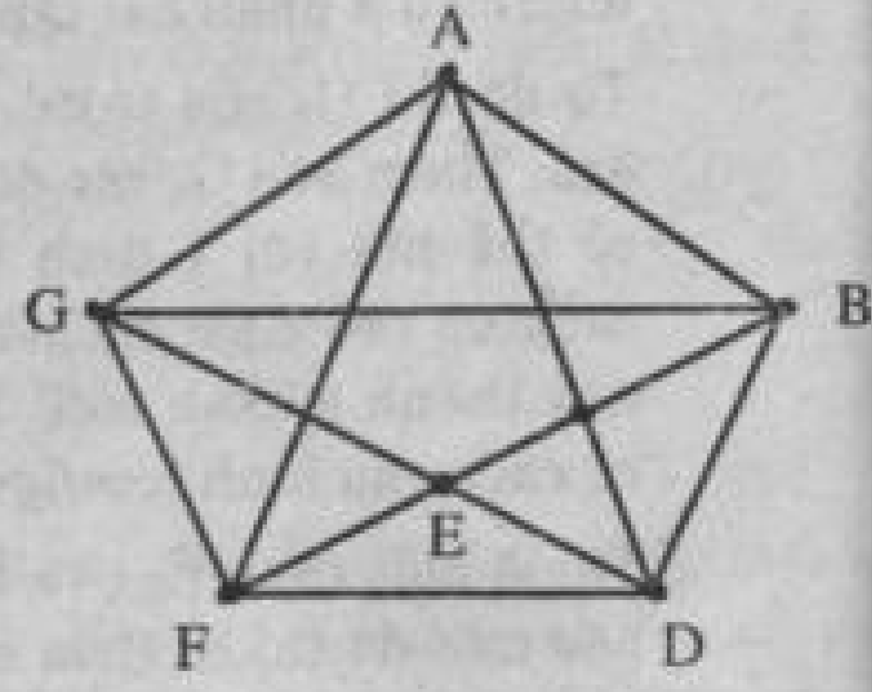
$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & A & B & C & D & E & F & G & H \\
\hline
A & & 1 & & 1 & 1 & & & \\
B & 1 & & 1 & & & 1 & & \\
C & & 1 & & 1 & & & & 1 \\
D & 1 & & 1 & & & & 1 & \\
E & 1 & & & & & 1 & & 1 \\
F & & 1 & & & 1 & & 1 & \\
G & & & & 1 & & 1 & & 1 \\
H & & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & A & B & C & D & E & F & G & H \\
\hline
A & & 1 & & 1 & & 1 & 1 & \\
B & 1 & & 1 & & 1 & & & 1 \\
C & & 1 & & 1 & & 1 & 1 & \\
D & 1 & & 1 & & 1 & & & 1 \\
E & & 1 & & 1 & & 1 & 1 & \\
F & 1 & & 1 & & 1 & & & 1 \\
G & 1 & & 1 & & 1 & & & 1 \\
H & & 1 & & 1 & & 1 & 1 &
\end{array}
$$



G_1



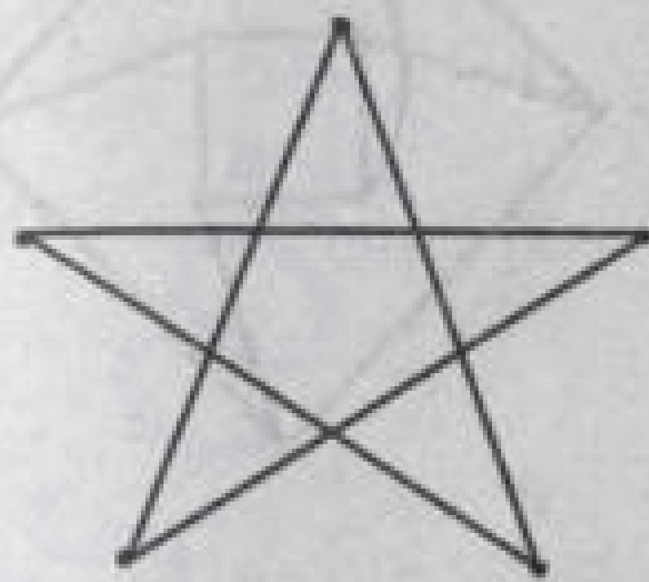
G_2

G_1 chứa cấu hình $K_{3,3}$, G_3 chứa cấu hình K_5, do đó chúng không phẳng. □

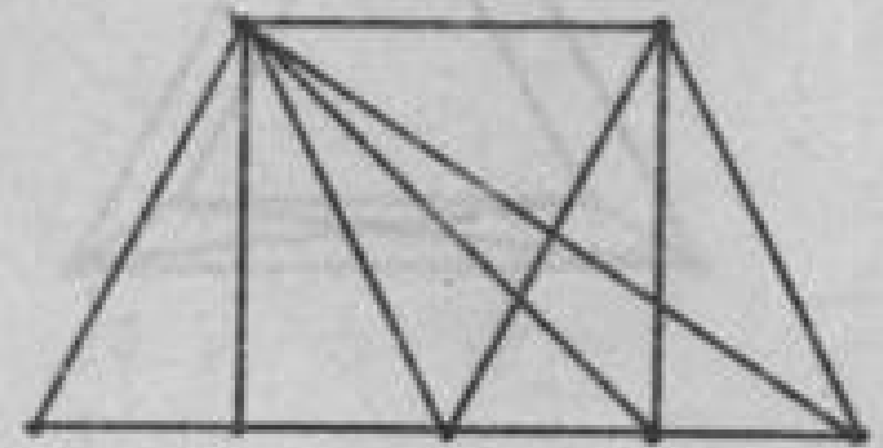
■ BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng các đồ thị sau là phẳng:

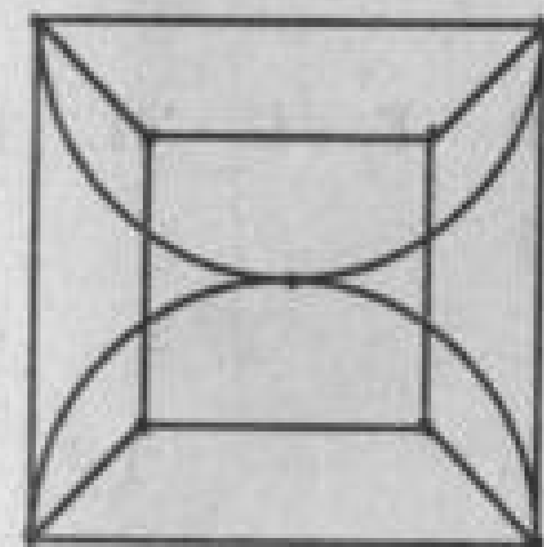
a)



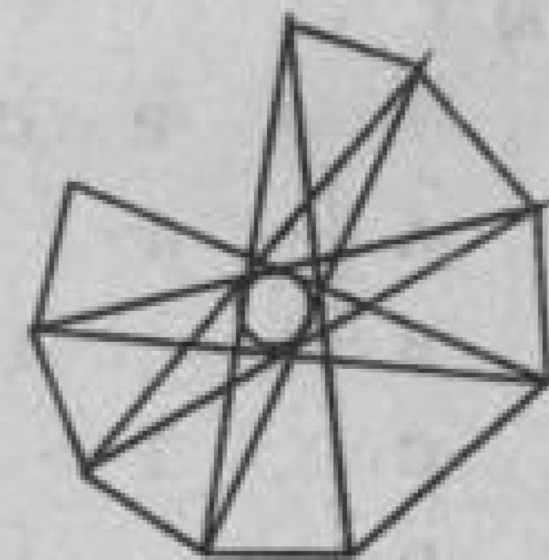
b)



c)

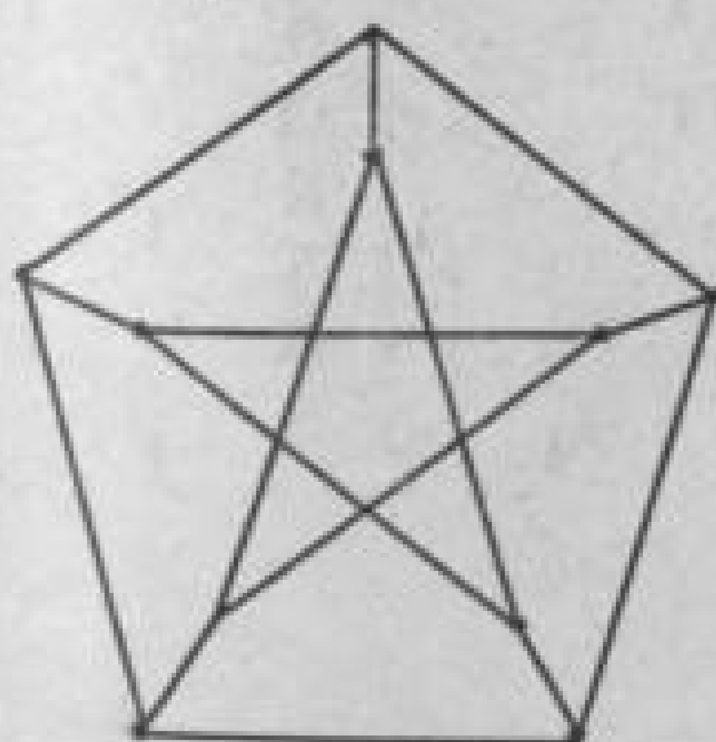


d)

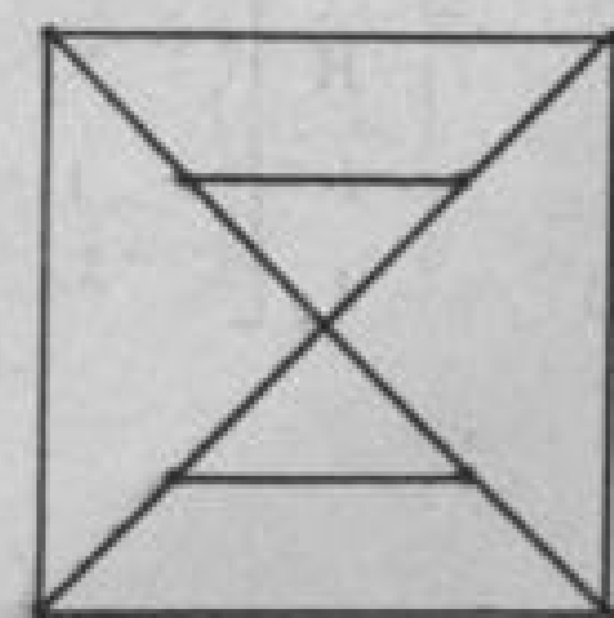


2. Chứng minh rằng các đồ thị sau không phẳng :

a)



b)



3.3.3 ĐỊNH LÝ

Cho G là một đơn đồ thị liên thông có V đỉnh, E cạnh với $E \geq 3$. Nếu G phẳng thì ta có bất đẳng thức :

$$E \leq 3(V - 2) \qquad (4)$$

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

3.4 ĐỊNH LÝ KURA TOWSKI

Một cách tổng quát, việc khảo sát tính chất phẳng của một đồ thị là một bài toán không dễ. Định lý Kuratowski đưa ra một điều kiện ắt có và đủ để một đồ thị là phẳng.

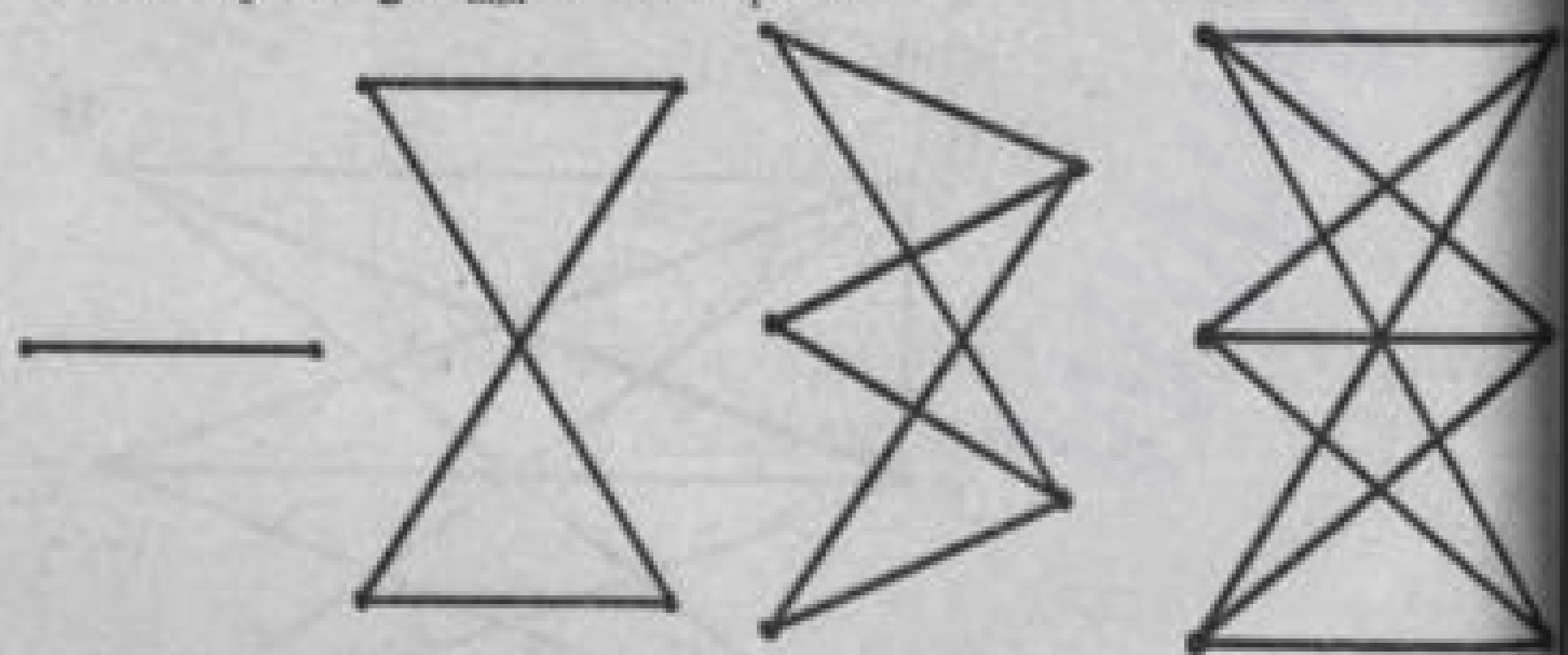
3.4.1 ĐỊNH NGHĨA

Nhắc lại rằng đơn đồ thị đầy đủ có n đỉnh được ký hiệu là K_n và có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cạnh.

Dễ thấy K_1, K_2, K_3, K_4 đều phẳng. Hơn nữa, thí dụ 4 ở trên chứng tỏ rằng K_n ($n \geq 5$) không phẳng.

Đồ thị lưỡng phân đầy đủ *(complete bipartite graph)* $K_{m,n}$ là 1 đơn đồ thị có m + n đỉnh gồm m đỉnh "bên trái" và n đỉnh "bên phải" sao cho mỗi đỉnh bên trái đều có cạnh nối đến mọi đỉnh bên phải.

Dễ thấy rằng $K_{m,n}$ có mn cạnh.



$K_{1,1}$ $\qquad$ $K_{2,2}$ $\qquad$ $K_{3,2}$ $\qquad$ $K_{3,3}$

Do thí dụ 3, $K_{m,n}$ ($m, n \geq 3$) không phẳng. Kết quả tổng quát về tính chất phẳng của đồ thị lưỡng phân đầy được nêu ở phần bài tập.

Từ đồ thị G_0 cho trước, ta xây dựng 1 đồ thị G theo cách sau: Thêm vào G_0 các đỉnh mới và các cạnh mới, đỉnh mới có thể nối với 1 đỉnh khác bằng 1 cạnh mới, đỉnh mới cũng có thể được đặt nằm trên 1 cạnh cũ và chia cạnh cũ này thành 2 cạnh mới. Ta nói rằng đồ thị G nhận được là có chứa cấu hình *(configuration)* G_0.

Ta đã biết rằng $K_{3,3}$ và K_5 không phẳng, do đó hiển nhiên nếu một đồ thị có chứa cấu hình $K_{3,3}$ hoặc K_5 thì nó không phẳng. Điều đảo lại cũng đúng và là khẳng định của định lý Kuratowski :

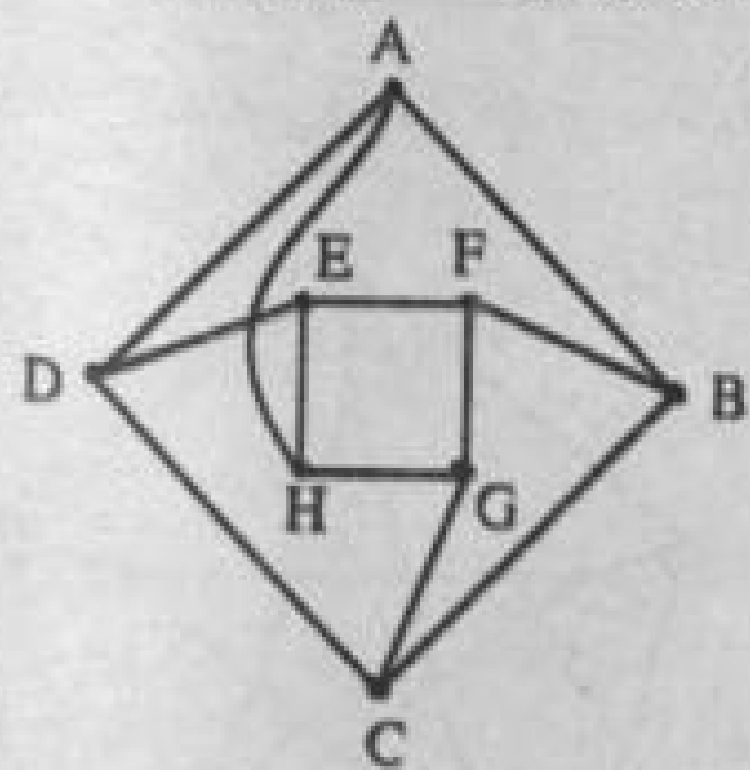
3.4.2 ĐỊNH LÝ (Kuratowski)

Đồ thị G phẳng nếu và chỉ nếu G không chứa cấu hình $K_{3,3}$ cũng như K_5.

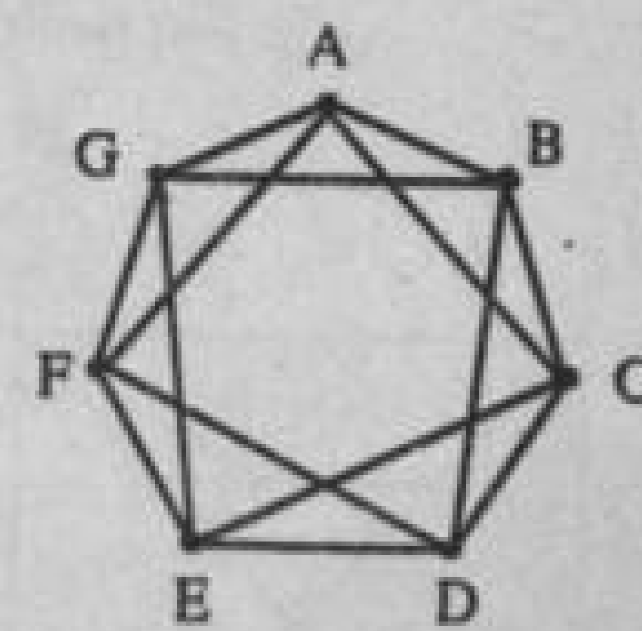
Phần chứng minh của định lý này khá phức tạp và sẽ không trình bày ở đây. Độc giả có thể tham khảo trong [1]

Ta có thể dùng định lý Kuratowski để chứng minh 1 đồ thị là không phẳng.

THÍ DỤ 6: Xét các đồ thị sau :



G_1



G_2

Ta vẽ lại chúng như sau :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } e_i \text{ là cạnh biên của mặt } f_j \\ 0 & \text{nếu } e_i \text{ không là cạnh biên của mặt } f_j \end{cases}$$

Xét hàng thứ i. Vì cạnh e_i là cạnh biên của nhiều nhất là 2 mặt nên tổng các phần tử trên hàng này ≤ 2:

$$\sum_{j=1}^{F} m_{ij} \leq 2$$

Suy ra: $$\sum_{\substack{1\leq i\leq E\\1\leq j\leq F}} m_{ij} = \sum_{i=1}^{E}\sum_{j=1}^{F} m_{ij} \leq 2E \qquad (1)$$

Lại xét cột thứ j. Vì mặt f_j có ít nhất g cạnh biên nên tổng các phần tử trên cột này $\geq g$.

$$\sum_{i=1}^{E} m_{ij} \geq g$$

Suy ra : $$\sum_{\substack{1\leq i\leq E\\1\leq j\leq F}} m_{ij} = \sum_{j=1}^{F}\sum_{i=1}^{E} m_{ij} \geq gF \qquad (2)$$

Hơn nữa theo định lý Euler 3.2.1, ta có :

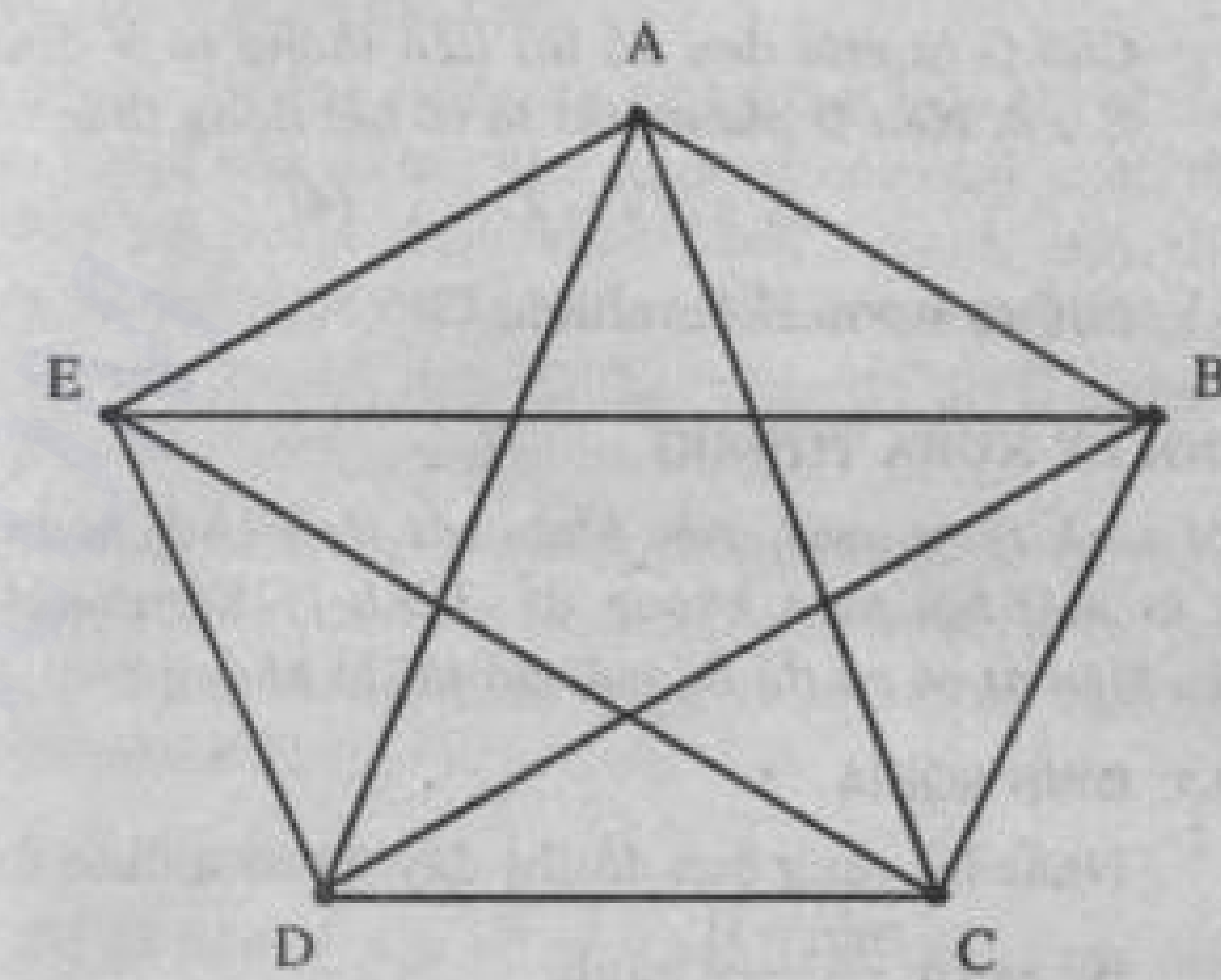
$$F = E - V + 2 \qquad (3)$$

(1), (2) và (3) cho :

$$E \leq \frac{g}{g-2}(V-2)$$ □

Lưu ý : Giả thiết $g \geq 3$ cho thấy G phải là đơn đồ thị có ít nhất 3 cạnh.

THÍ DỤ 4: Xét đồ thị K_5:



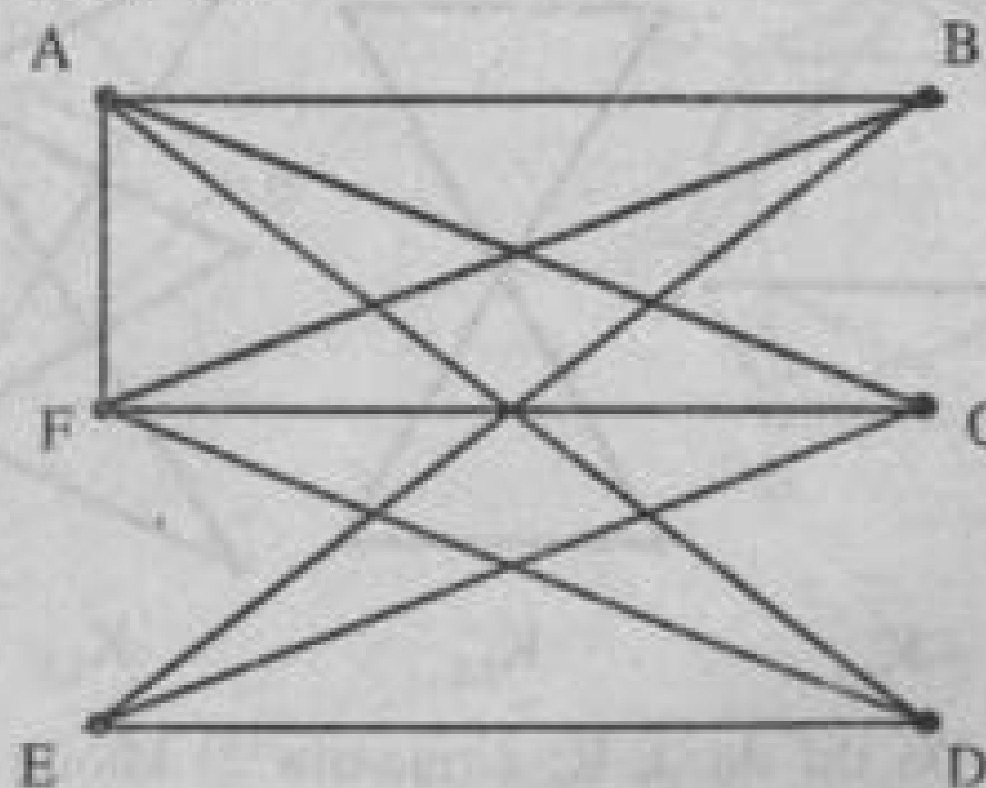
Đồ thị này có : V = 5, E = 10, g = 3.

Mà : $\frac{g}{g-2}(V-2) = 9 < 10 = E$

Vậy K_5 không phẳng. □

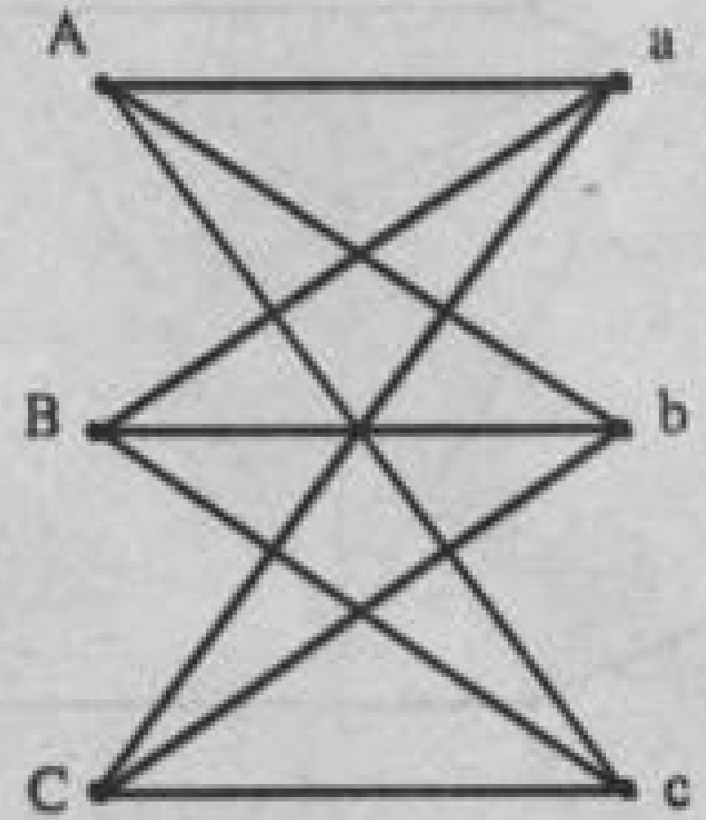
Lưu ý : Có những đồ thị không phẳng nhưng vẫn thỏa bất đẳng thức EV.

THÍ DỤ 5: Đồ thị sau không phẳng nhưng thỏa bất đẳng thức EV:



□

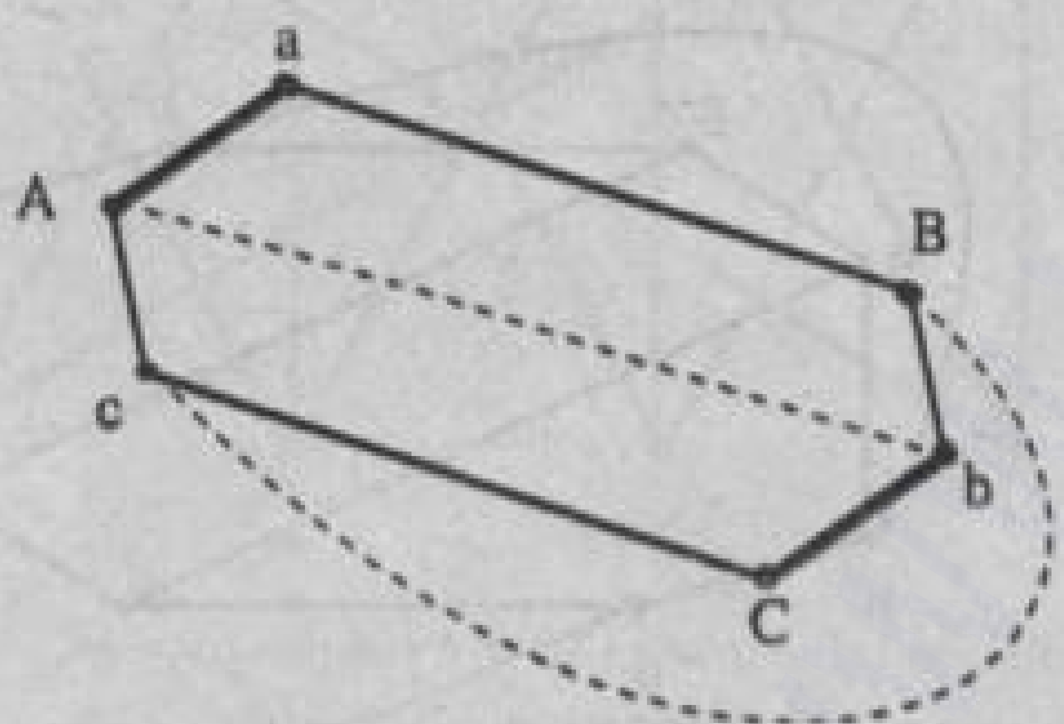
THÍ DỤ 3: Xét đồ thị G:



Ta chứng minh rằng đồ thị này không phẳng

Nhận xét rằng G có 1 chu trình chứa 6 đỉnh là AaBbCcA.

Nếu có thể vẽ đồ thị thành 1 biểu đồ phẳng thì chu trình trên sẽ có dạng lục giác.



Ta còn phải vẽ 3 cạnh $\overline{Ab}$, $\overline{Bc}$, và $\overline{Ca}$. Nếu vẽ $\overline{Ab}$ ở bên trong lục giác thì cạnh $\overline{Bc}$ phải được vẽ bên ngoài lục giác, nhưng khi đó cạnh $\overline{Ca}$ dù vẽ bên trong hay bên ngoài lục giác cũng đều cắt hoặc $\overline{Ab}$ hoặc $\overline{Bc}$. Lập luận tương tự trong

trường hợp vẽ cạnh $\overline{Ab}$ ở bên ngoài lục giác. Suy ra đồ thị trên không phẳng. □

3.3.1 ĐỊNH LÝ

Giả sử H là đồ thị con của đồ thị G. Thì :

(i) Nếu G phẳng thì H phẳng.

(ii) Nếu H không phẳng thì G không phẳng.

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

Định lý sau đây cho ta 1 điều kiện đủ để đồ thị không phẳng. □

3.3.2 ĐỊNH LÝ BẤT ĐẲNG THỨC EV (The Edges–Vertices Inequality)

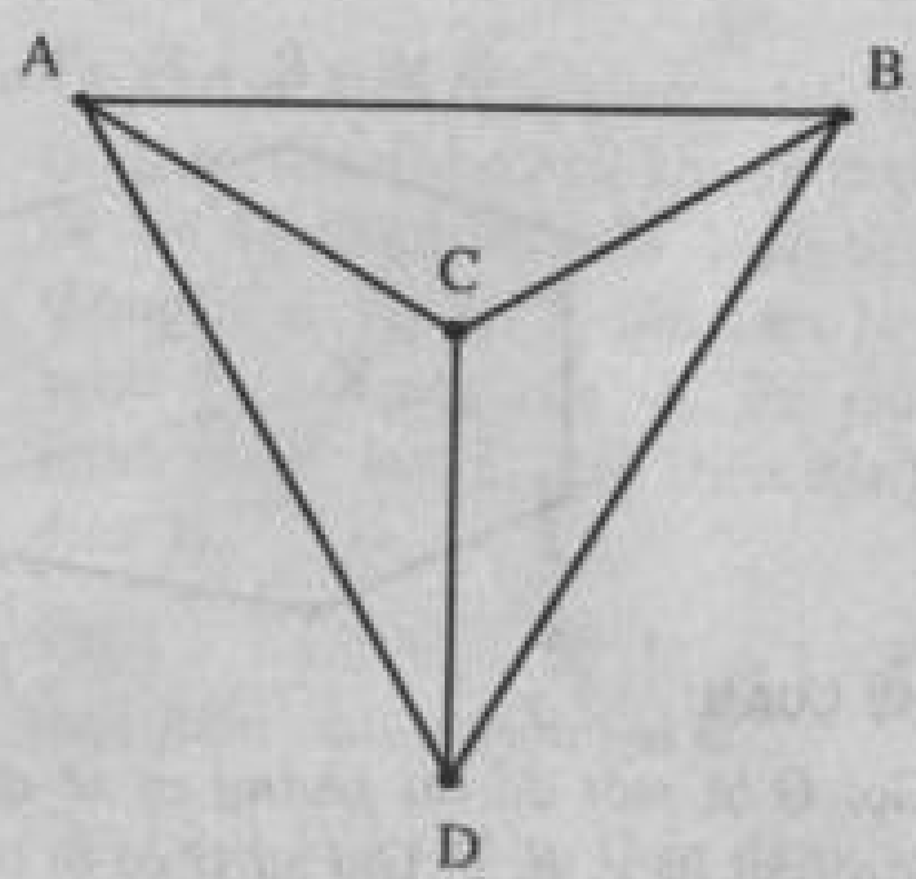
Cho G là 1 đồ thị liên thông có V đỉnh, E cạnh và đai là $g \geq 3$. Nếu G phẳng thì ta có bất đẳng thức :

$$E \leq \frac{g}{g-2}(V-2) \qquad (3)$$

CHỨNG MINH: Gọi e_i $(1 \leq i \leq E)$ là các cạnh và f_j $(1 \leq j \leq F)$ là các mặt của đồ thị phẳng liên thông G. Xét ma trận cạnh mặt *(edge-face incident matrix)* của G sau đây:

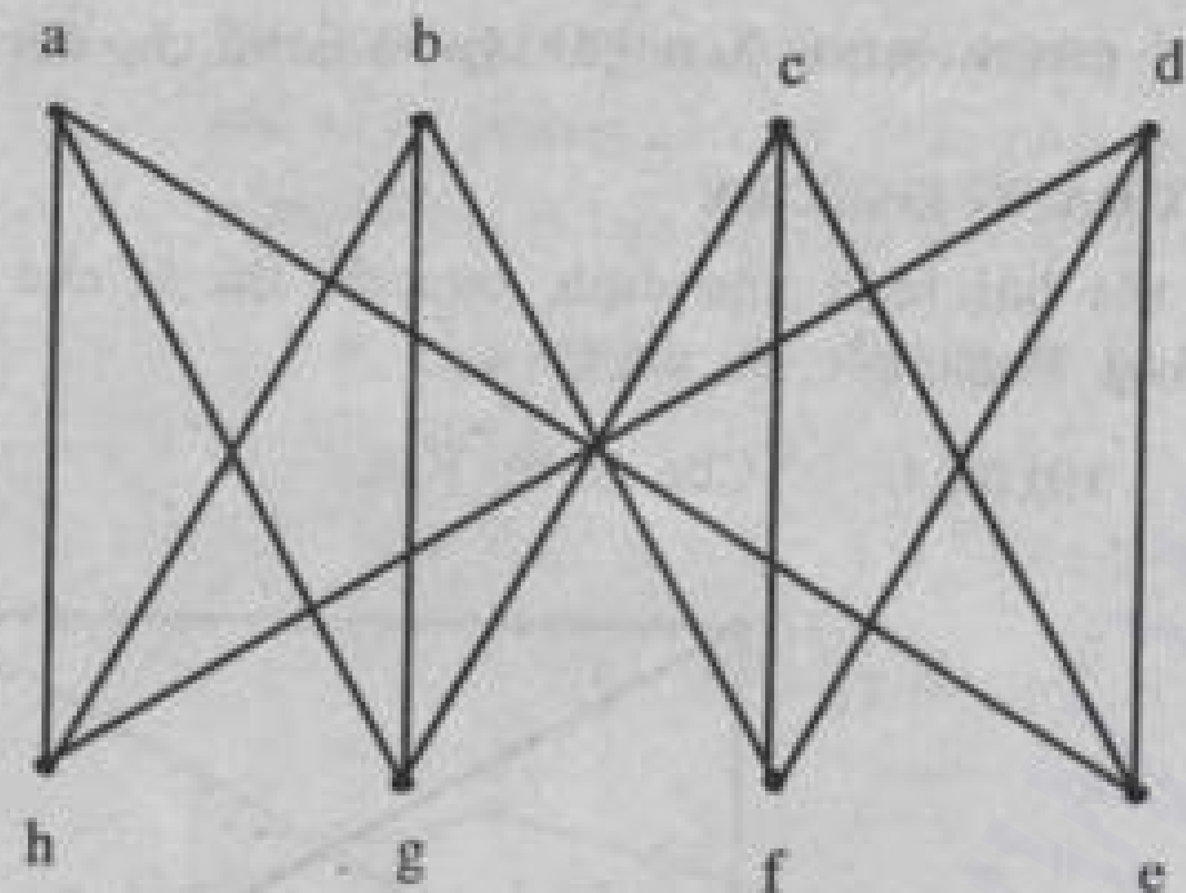
$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_E \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_j & \cdots & f_F \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc} & & & \cdot & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & m_{ij} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

trong đó phần tử ở hàng i cột j là :

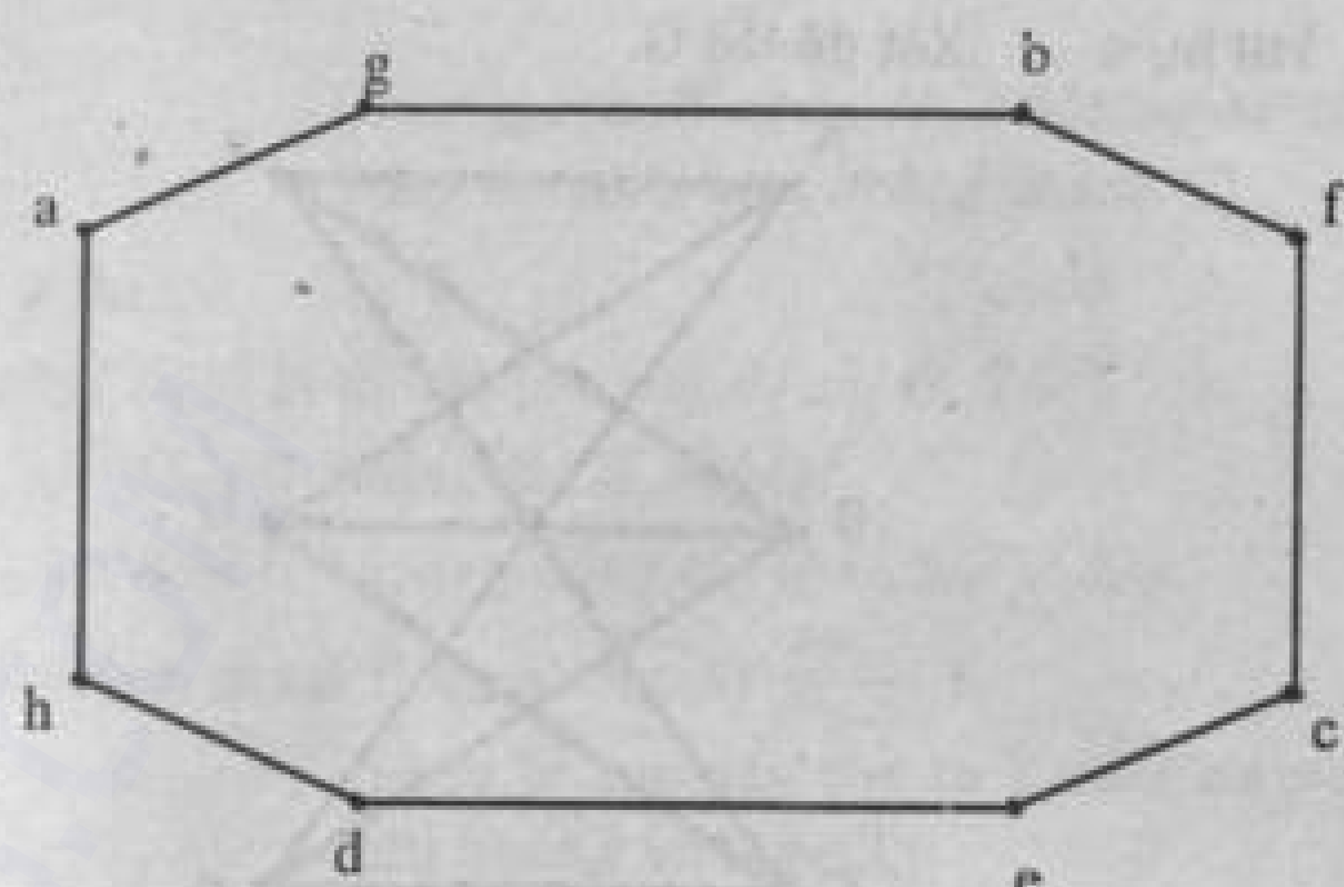


Vậy K_4 phẳng. □

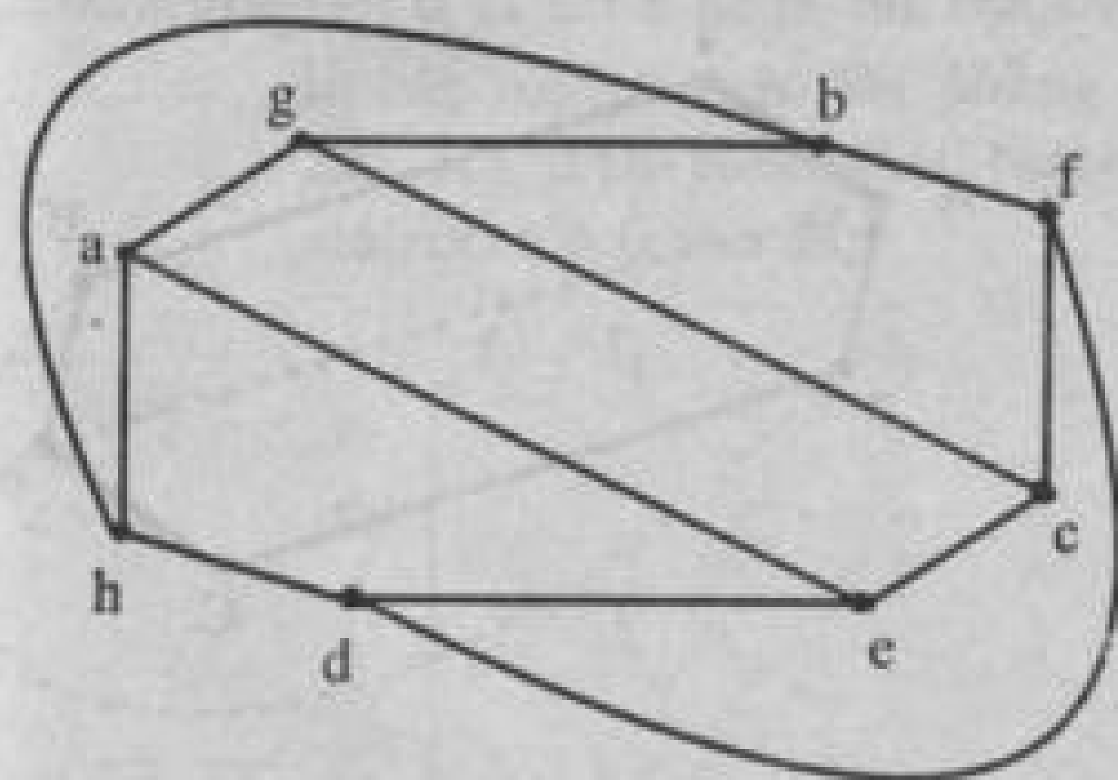
THÍ DỤ 2: Cho đồ thị G sau :



Ta tìm cách vẽ lại G thành 1 biểu đồ phẳng (các cạnh đôi một không cắt nhau). Chú ý đến chu trình agbfcedha chứa tất cả 8 đỉnh của đồ thị. Trong bất kỳ cách biểu diễn phẳng nào của G, chu trình trên cũng đều có dạng "đa giác" như sau :



Ta còn phải vẽ thêm các cạnh $\overline{ae}$, $\overline{gc}$, $\overline{bh}$ và $\overline{fd}$. Dễ thấy rằng G phẳng vì có thể biểu diễn như sau :



□

CHỨNG MINH: Ta hãy vẽ biểu đồ phẳng của G lần lượt từng cạnh một sao cho sau khi vẽ được i cạnh thì đồ thị G_i nhận được là 1 đồ thị phẳng liên thông. Gọi V_i, E_i, F_i lần lượt là số đỉnh, số cạnh và số mặt của G_i. Ta chỉ cần chứng minh rằng mọi G_i đều thỏa đẳng thức trong định lý.

Với i = 1 thì $V_1 = 2$, $E_1 = 1$, $F_1 = 1$, đẳng thức hiển nhiên thỏa với G_1.

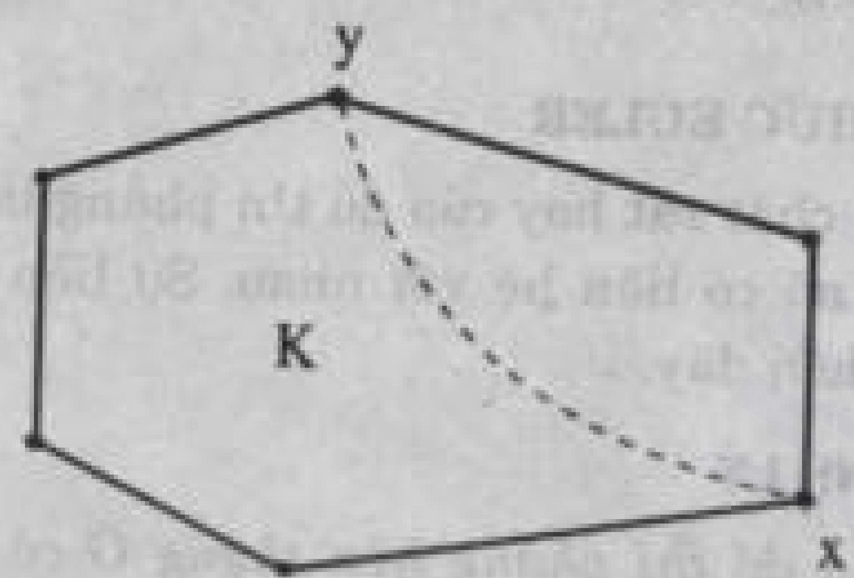
Cho $i \geq 2$. Giả sử G_{i-1} thỏa đẳng thức.

Gọi $\overline{xy}$ là cạnh được vẽ thêm vào G_{i-1} để có G_i. Hiển nhiên phải có ít nhất 1 trong 2 đỉnh của cạnh này nằm trong G_{i-1}, thí dụ x. Hơn nữa vì G_i phẳng nên $\overline{xy}$ phải nằm hoàn toàn trong 1 mặt K của G_{i-1}. Có 2 trường hợp :

a) $y \in G_{i-1}$: cạnh $\overline{xy}$ chia mặt K thành 2 mặt, vậy :

$$V_i = V_{i-1},\ E_i = E_{i-1} + 1,\ F_i = F_{i-1} + 1$$

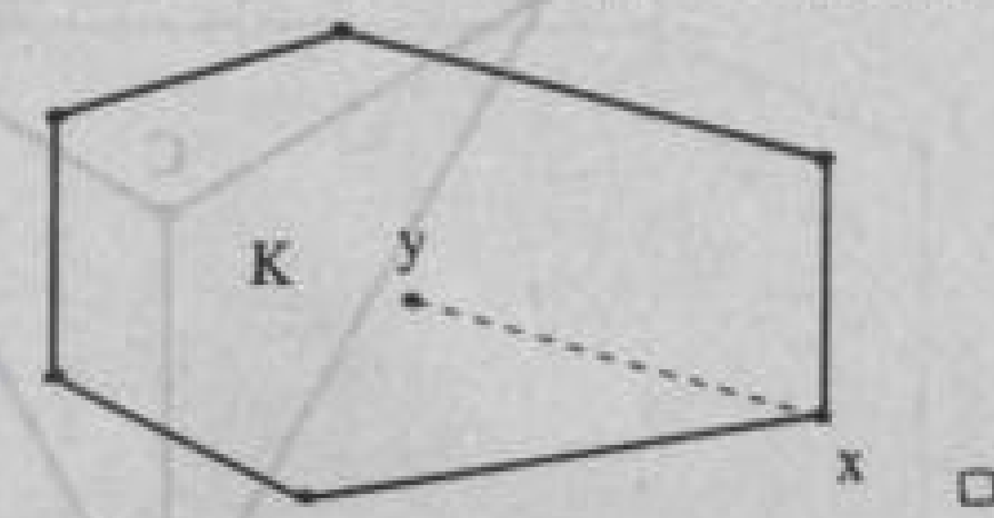
$$\Rightarrow V_i - E_i + F_i = V_{i-1} - E_{i-1} + F_{i-1} = 2$$



b) $y \notin G_{i-1}$: cạnh $\overline{xy}$ là cạnh treo với y là đỉnh treo của G_i, do đó :

$$V_i = V_{i-1} + 1,\ E_i = E_{i-1} + 1,\ F_i = F_{i-1}$$

$$\Rightarrow V_i - E_i + F_i = V_{i-1} - E_{i-1} + F_{i-1} = 2$$



□

3.2.2 HỆ LUẬN

Gọi G là một đồ thị phẳng có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt là V, E, F. Giả sử G có m thành phần. Thì :

$$V - E + F = m + 1 \qquad (2)$$

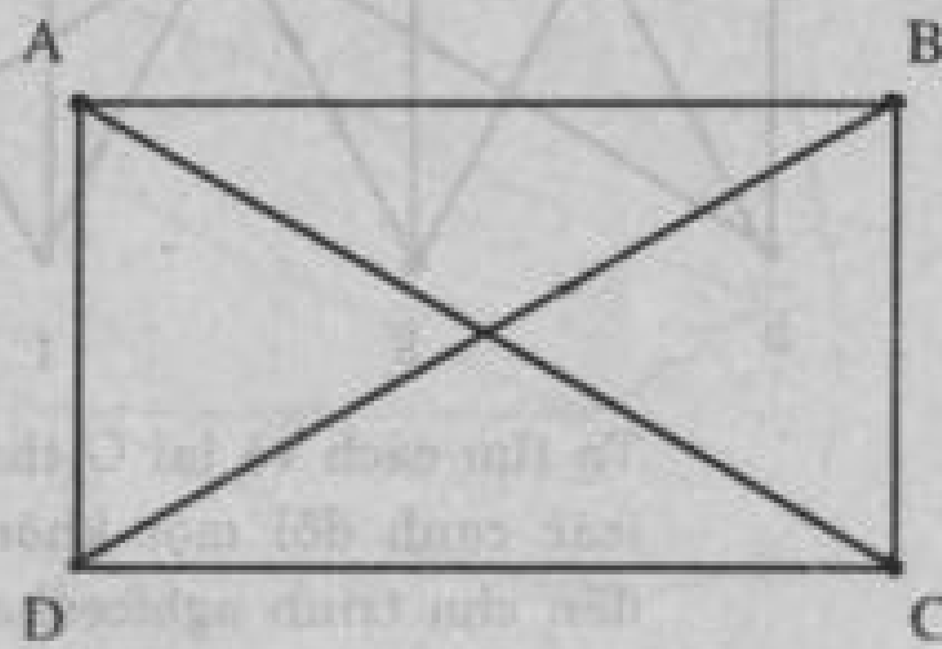
(2) gọi là công thức Euler cho đồ thị phẳng bất kỳ.

CHỨNG MINH: Xem bài tập và dành cho độc giả. □

3.3 BẤT ĐẲNG THỨC EV

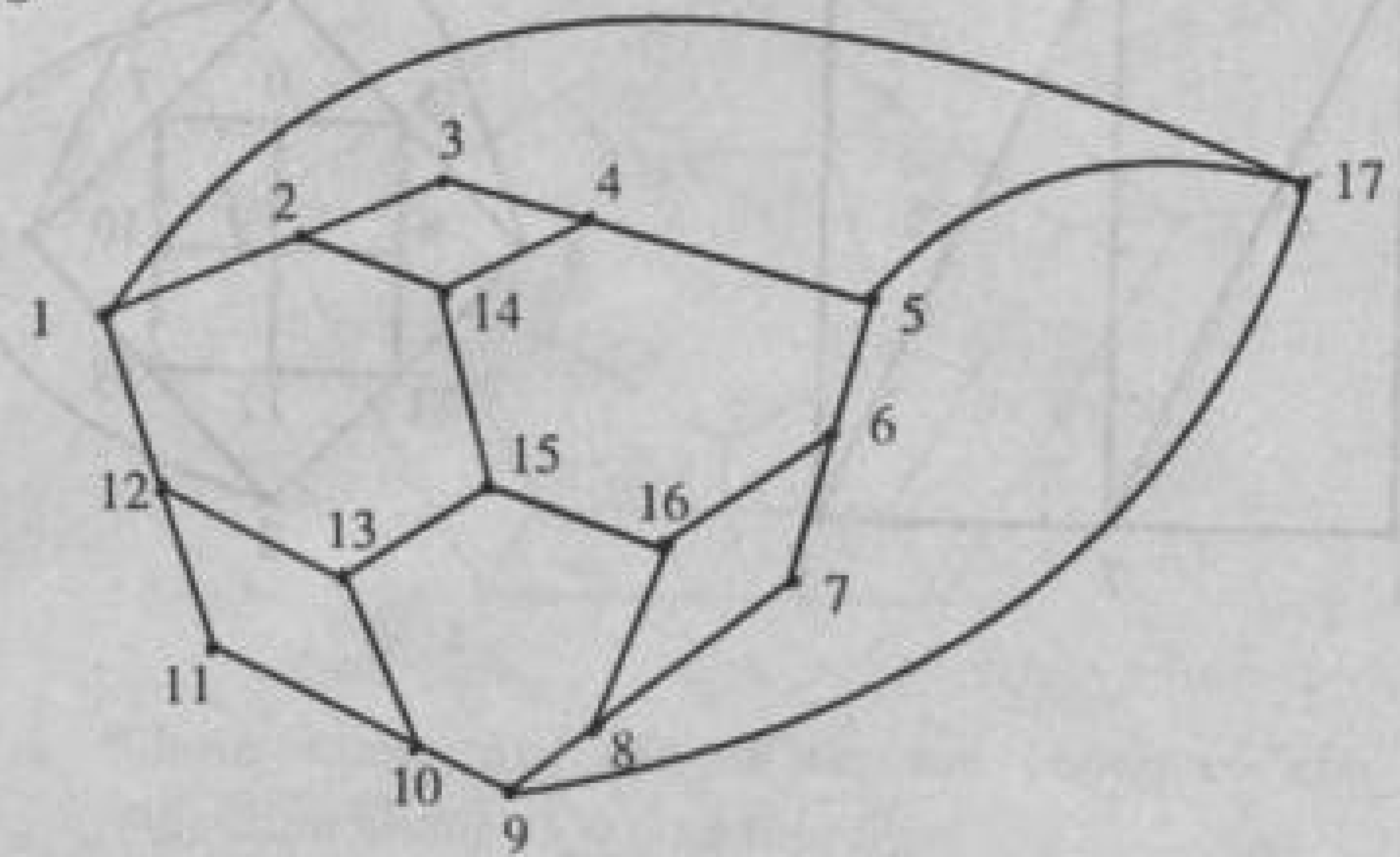
Ta xét bài toán xác định xem đồ thị G cho trước có phẳng không. Trước hết, coi vài thí dụ.

THÍ DỤ 1: Cho đồ thị K_4 :



Có thể vẽ lại K_4 thành :

g)



3

☑ ĐỒ THỊ PHẲNG

(Đồ thị xét trong chương này là đồ thị vô hướng)

3.1 ĐỊNH NGHĨA

Một đồ thị G gọi là đồ thị phẳng *(planar graph)* nếu có thể biểu diễn G bằng một biểu đồ trong mặt phẳng sao cho các cạnh đôi một không cắt nhau. Khi đó, các cạnh của G chia mặt phẳng thành nhiều miền, mỗi miền gọi là một mặt *(face)* của G (trong các mặt này, luôn luôn có 1 và chỉ 1 mặt vô hạn). Những cạnh nằm bên trong mặt f hoặc là cạnh giới hạn của mặt f với 1 mặt khác gọi là cạnh biên của mặt f *(boundary edge)*.

Cho 1 đồ thị G. Số g = chiều dài của chu trình ngắn nhất trong G gọi là đai *(girth)* của G. Trường hợp nếu G không có chu trình thì ta đặt g = số cạnh của G.

3.2 CÔNG THỨC EULER

Một tính chất rất hay của đồ thị phẳng là số đỉnh, số cạnh và số mặt của nó có liên hệ với nhau. Sự liên hệ này được nêu trong định lý dưới đây.

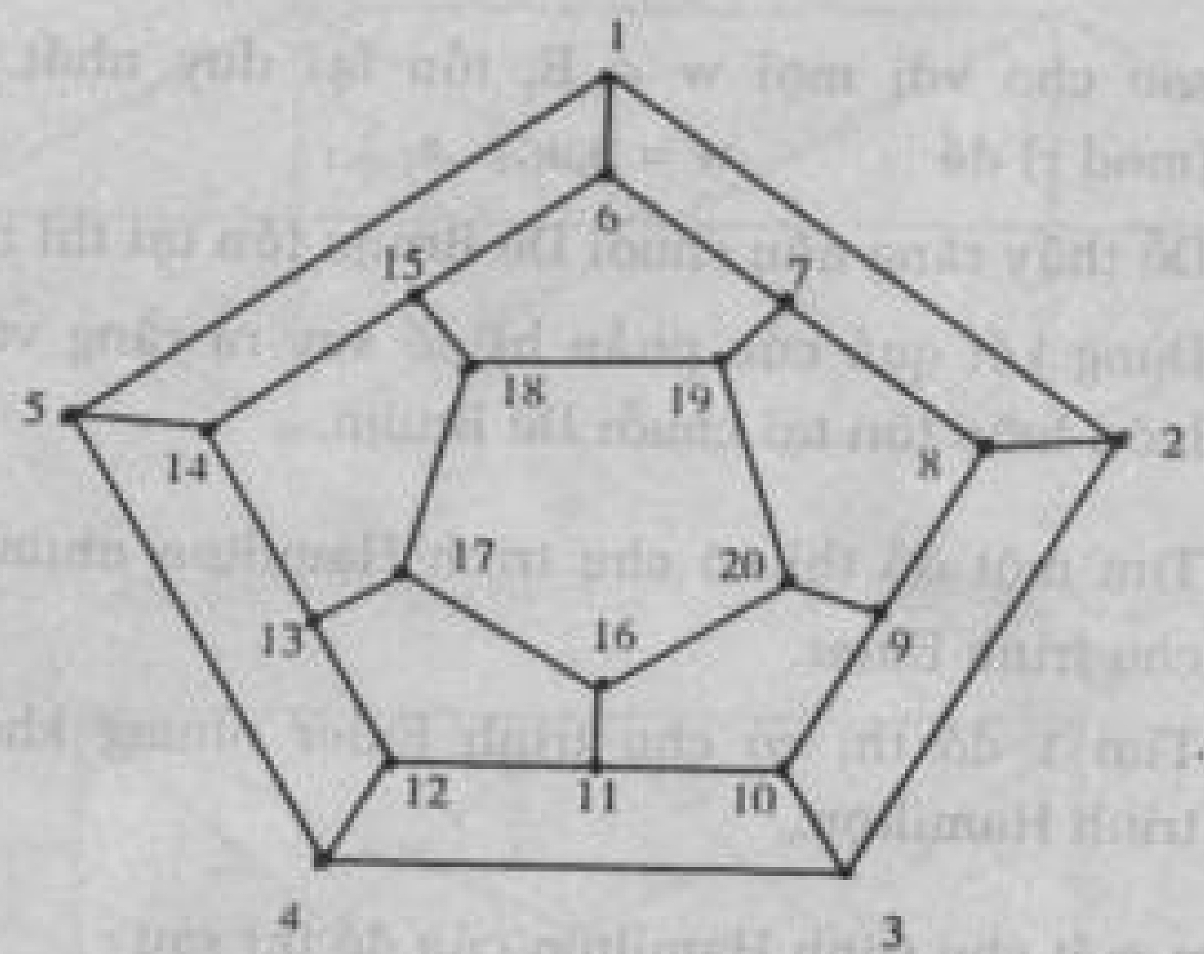
3.2.1 ĐỊNH LÝ

Cho đồ thị phẳng liên thông G có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt là V, E và F. Thì :

$$V - E + F = 2 \qquad (1)$$

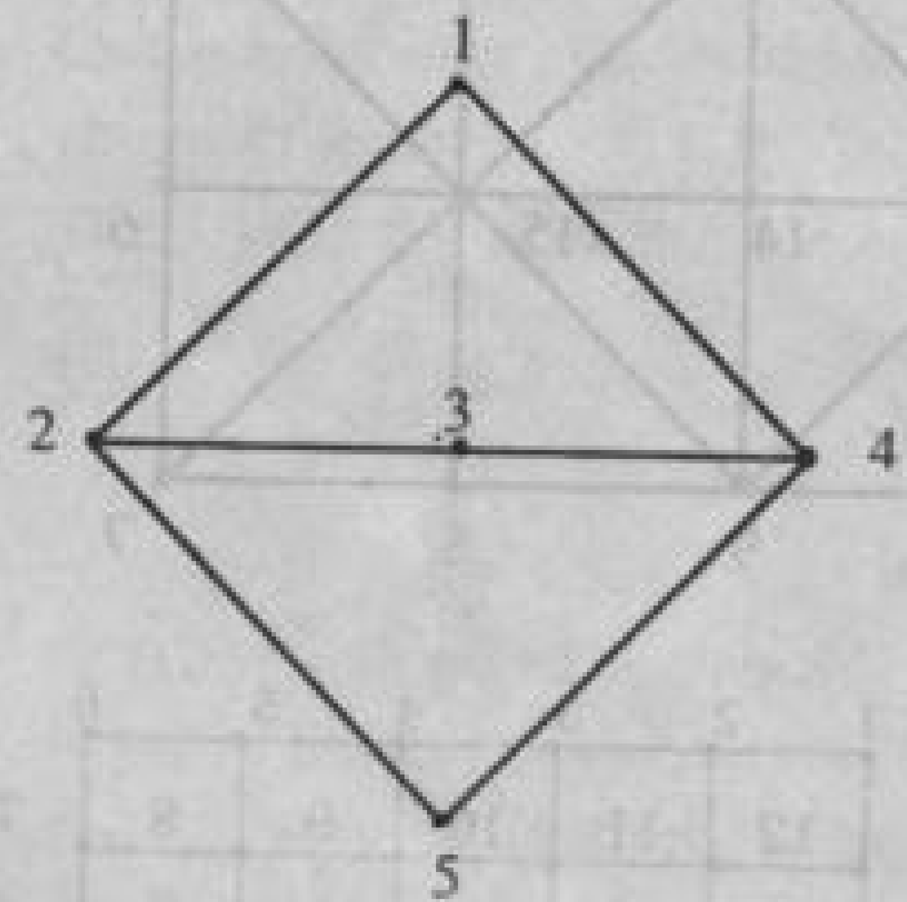
(1) gọi là công thức Euler cho đồ thị phẳng liên thông.

c)

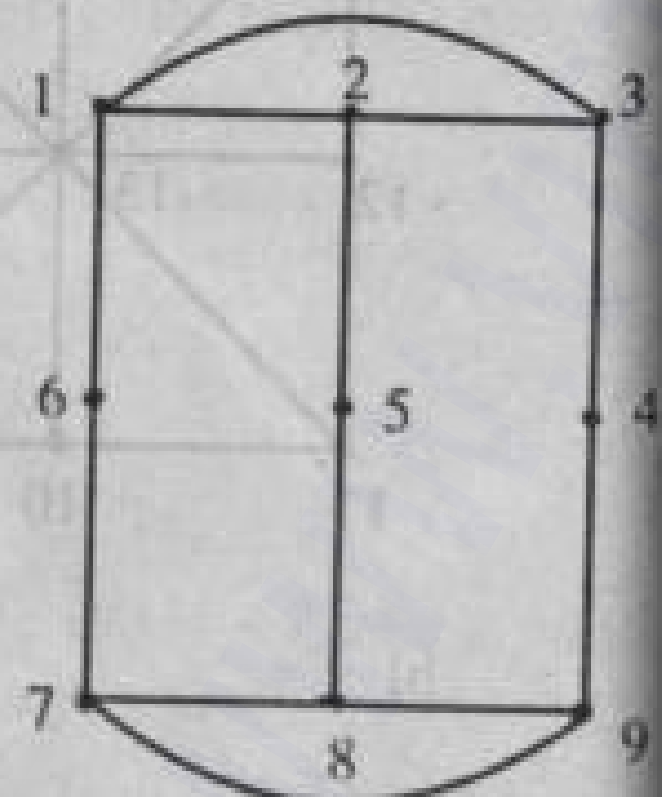


10. Chứng minh rằng các đồ thị sau không có chu trình Hamilton nhưng có đường Hamilton.

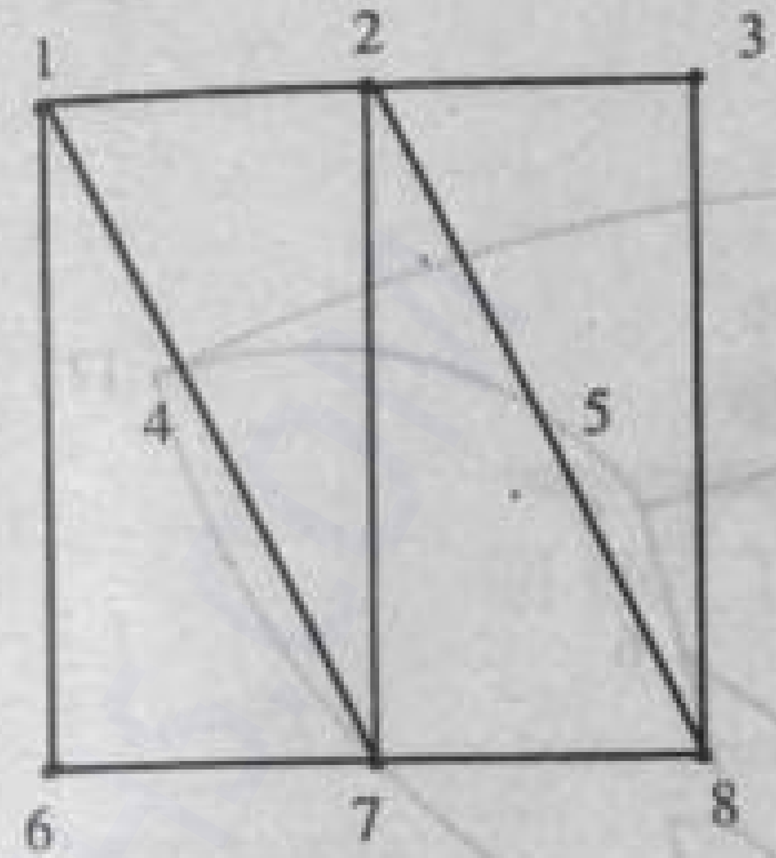
a)



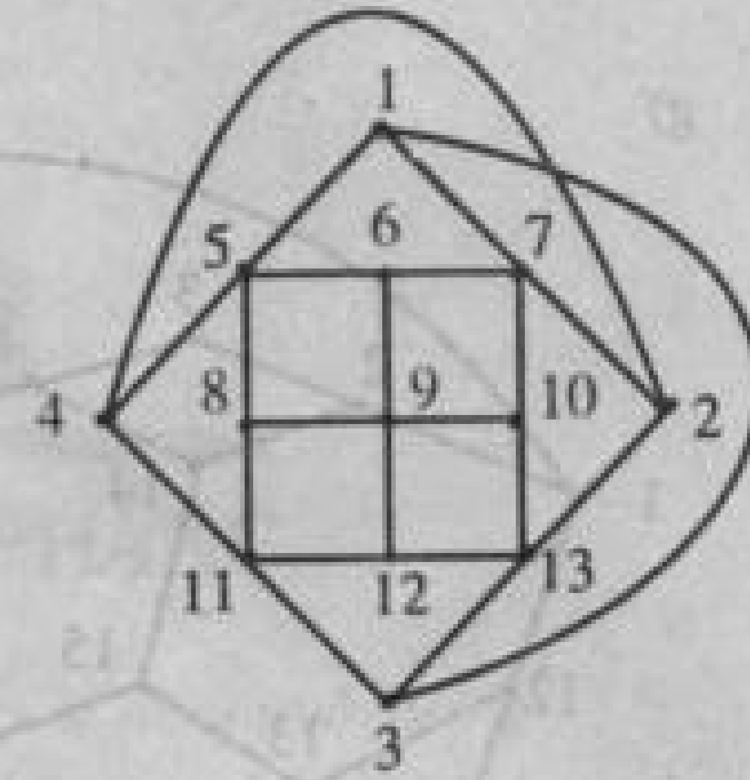
b)



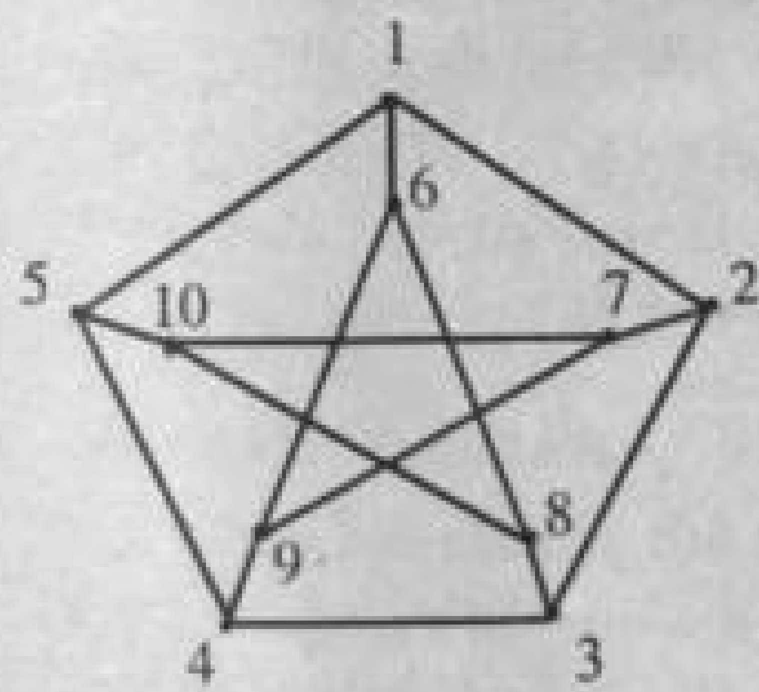
c)



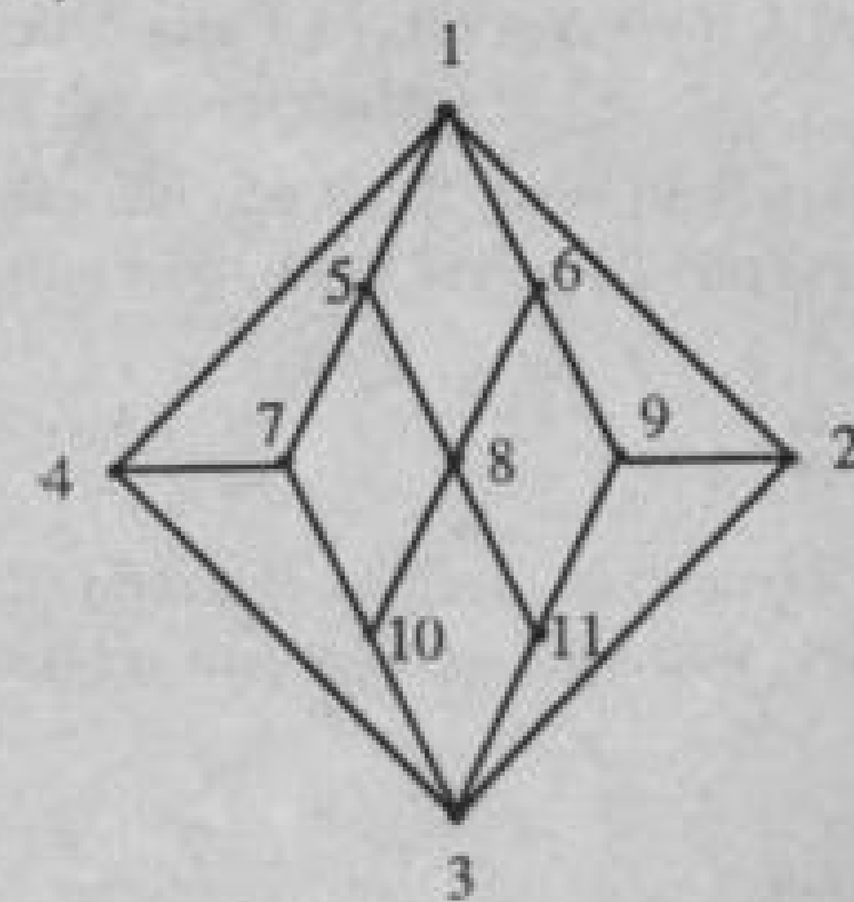
d)



e)



f)



4.1.4.2 ĐỊNH LÝ

Một cây m-phân đầy đủ có i đỉnh trong thì có mi + 1 đỉnh.

CHỨNG MINH: Mọi đỉnh trong đều có bậc ngoài là m, còn lá có bậc ngoài là 0, vậy số cạnh của cây là mi và do đó, số đỉnh của cây là mi + 1. □

4.1.4.3 HỆ LUẬN

Cho T là một cây m-phân đầy đủ thì :

(i) T có i đỉnh trong $\Rightarrow$ *T có* $l = (m-1)i + 1$ *lá.*

(ii) T có l lá $\Rightarrow$ *T có* $i = \dfrac{l-1}{m-1}$ *đỉnh trong.*

và $n = \dfrac{ml-1}{m-1}$ *đỉnh.*

(iii) T có n đỉnh $\Rightarrow$ *T có* $i = \dfrac{n-1}{m}$ *đỉnh trong*

và $l = \dfrac{(m-1)n+1}{m}$ *lá.*

CHỨNG MINH: Do định lý trên và đẳng thức $n = i + l$. □

Một cây có chiều cao h gọi là cân bằng *(balanced)* nếu mọi lá của nó đều ở mức h hoặc h – 1.

4.1.4.4 ĐỊNH LÝ

(i) Một cây m-phân có chiều cao h thì có nhiều nhất là m^h *lá.*

(ii) Một cây m-phân có l lá thì có chiều cao $h \geq \lceil \log_m l \rceil$

(iii) Một cây m-phân đầy đủ và cân bằng có l lá thì có chiều cao $h = \lceil \log_m l \rceil$

[Ở đây, ký hiệu $\lceil r \rceil$ chỉ số nguyên nhỏ nhất $\geq r$].

CHỨNG MINH: (i) Dùng qui nạp trên h.

Định lý hiển nhiên đúng khi h = 1.

Cho $h \geq 2$. Giả sử mọi cây có chiều cao $k \leq h - 1$ đều có nhiều nhất là m^{k-1} ($\leq m^{h-1}$) lá. Xét cây T có chiều cao là h. Hủy gốc khỏi cây ta được 1 rừng gồm không quá m cây con, mỗi cây con này có chiều cao $\leq h - 1$. Do giả thiết qui nạp, mỗi cây con này có nhiều nhất là m^{h-1} lá. Mà lá của những cây con này cũng là lá của T, vậy T có nhiều nhất là $m.m^{h-1} = m^h$ lá.

(ii) Nhận xét rằng :

$h \geq \lceil \log_m l \rceil \Leftrightarrow l \leq m^h$.

(iii) Nhận xét rằng :

$h = \lceil \log_m l \rceil \Leftrightarrow m^{h-1} < l \leq m^h$. □

4.2 CÂY NHỊ PHÂN VÀ PHÉP DUYỆT CÂY

4.2.1 ĐỊNH NGHĨA

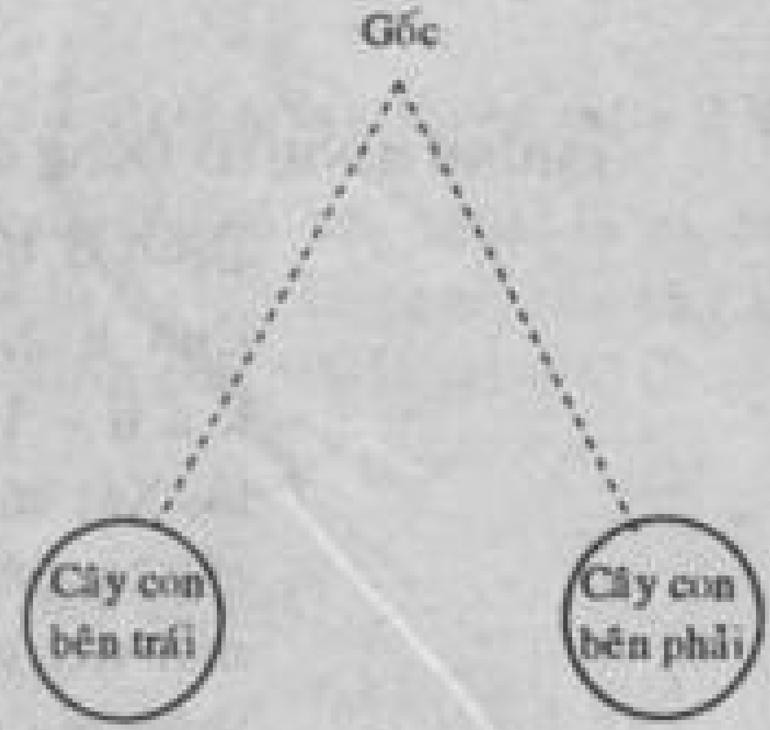
Ta nhắc lại định nghĩa của cây nhị phân *(binary tree)* :

Cây nhị phân là 1 cây có gốc sao cho mọi đỉnh đều có nhiều nhất là 2 con. Từ gốc, có thể có 1 hay 2 cạnh đi xuống, đỉnh nối với gốc ở phía trái (phải) bằng các cạnh này gọi là con bên trái *(left child)* (con bên phải *(right child)*). Mỗi một trong các đỉnh con này lại có con bên trái hay con bên phải của nó và cứ thế cho đến cuối cùng là các lá.

Người ta còn dùng dạng định nghĩa đệ qui của cây nhị phân sau :

Một cây nhị phân hoặc là tập rỗng, hoặc gồm 1 gốc với hai cây con nhị phân cách biệt gọi là cây con bên trái và cây con bên phải *(left subtree and right subtree)*.

Cây nhị phân = ∅ hay



4.2.2 PHÉP DUYỆT CÂY

Duyệt cây *(tree searching)* là đưa ra 1 danh sách liệt kê tất cả các đỉnh của cây, mỗi đỉnh 1 lần.

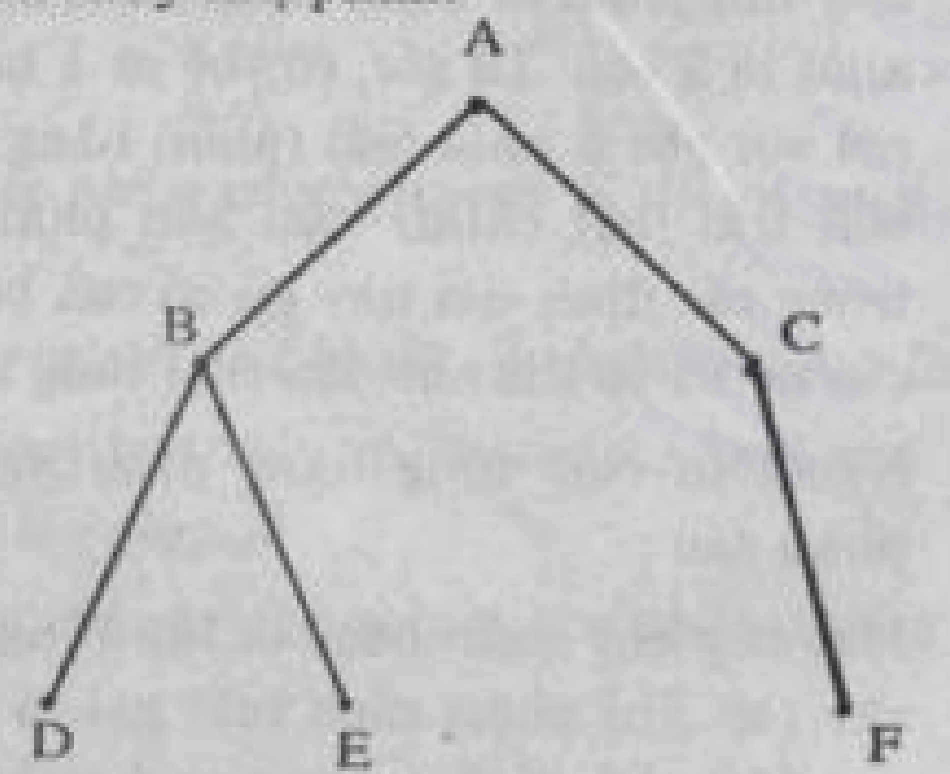
Có 3 giải thuật thường dùng để duyệt cây nhị phân là Preorder Search, Inorder Search và Postorder Search.

Có 3 giải thuật vừa nêu đều đệ qui.

GIẢI THUẬT PREORDER SEARCH

1. Đến gốc.
2. Đến cây con bên trái, dùng Preorder
3. Đến cây con bên phải, dùng Preorder

THÍ DỤ 2: Xét cây nhị phân:



Giải thuật Preorder cho ta thứ tự các đỉnh là:

A, [cây con bên trái], [cây con bên phải]

Trong đó, thứ tự các đỉnh của cây con bên trái của A là : B D E

và thứ tự các đỉnh của cây con bên phải của A là : C F

Vậy kết quả : A B D E C F. □

GIẢI THUẬT INORDER SEARCH

1. Đến cây con bên trái, dùng Inorder
2. Đến gốc.
3. Đến cây con bên phải, dùng Inorder

THÍ DỤ 3: Vẫn xét cây trong thí dụ trên

Giải thuật Inorder cho ta thứ tự các đỉnh là:

[cây con bên trái], A, [cây con bên phải]

Trong đó, thứ tự các đỉnh của cây con bên trái của A là : D B E

và thứ tự các đỉnh của cây con bên trái của A là : C F

Vậy kết quả : D B E A C F. □

GIẢI THUẬT POSTORDER SEARCH

1. Đến cây con bên trái, dùng Postorder
2. Đến cây con bên phải, dùng Postorder
3. Đến gốc.

THÍ DỤ 4: Vẫn xét cây trong thí dụ trên.

Giải thuật Postorder cho ta thứ tự các đỉnh là :

[cây con bên trái], [cây con bên phải], A

Trong đó, thứ tự các đỉnh của cây con bên trái của A là : D E B

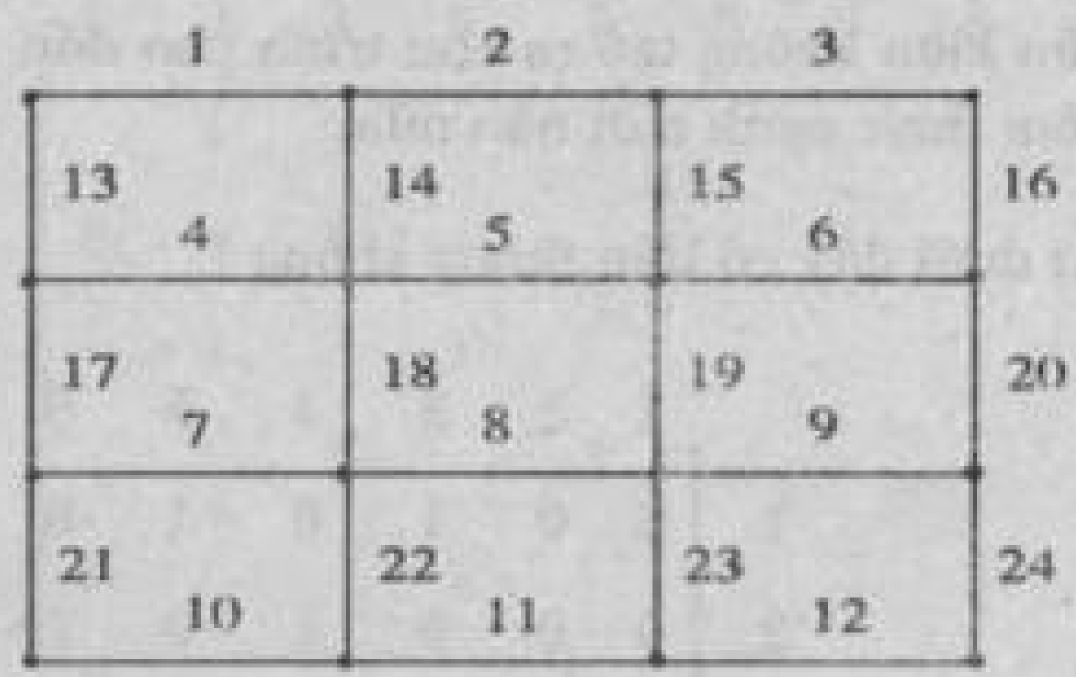
20. Chứng minh rằng nếu đồ thị G có duy nhất 1 cây bao trùm thì G là 1 cây.

21. a) Cho đồ thị liên thông G và 1 đỉnh a của G. Chứng minh rằng chiều cao của cây bao trùm tạo theo bề sâu với gốc a luôn luôn lớn hơn hay bằng chiều cao của một cây bao trùm tạo theo bề rộng cũng với gốc a.

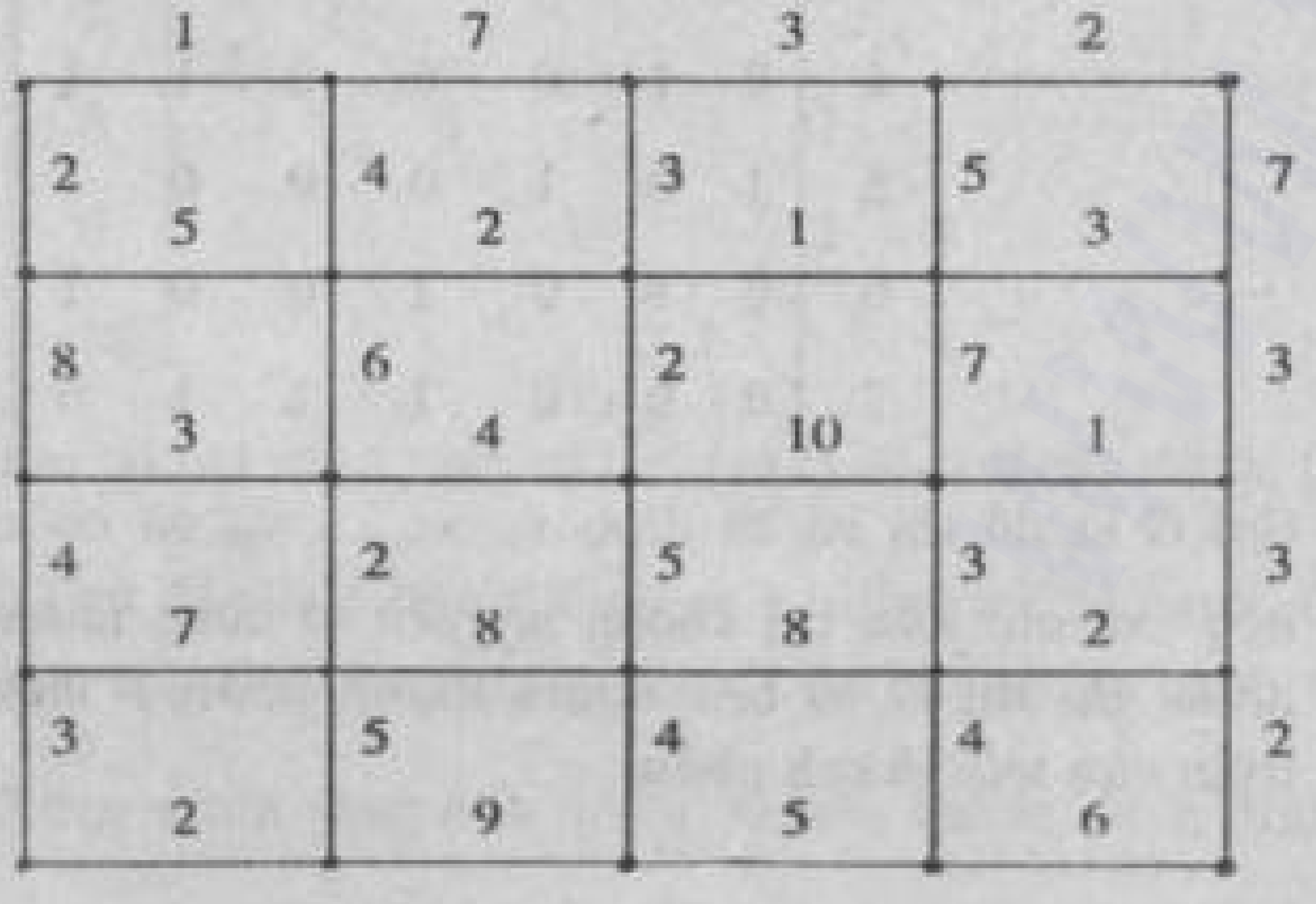
b) Tìm 1 thí dụ chứng tỏ kết quả ở phần a) sai nếu cho các gốc khác nhau.

22. Tìm MST của đồ thị sau :

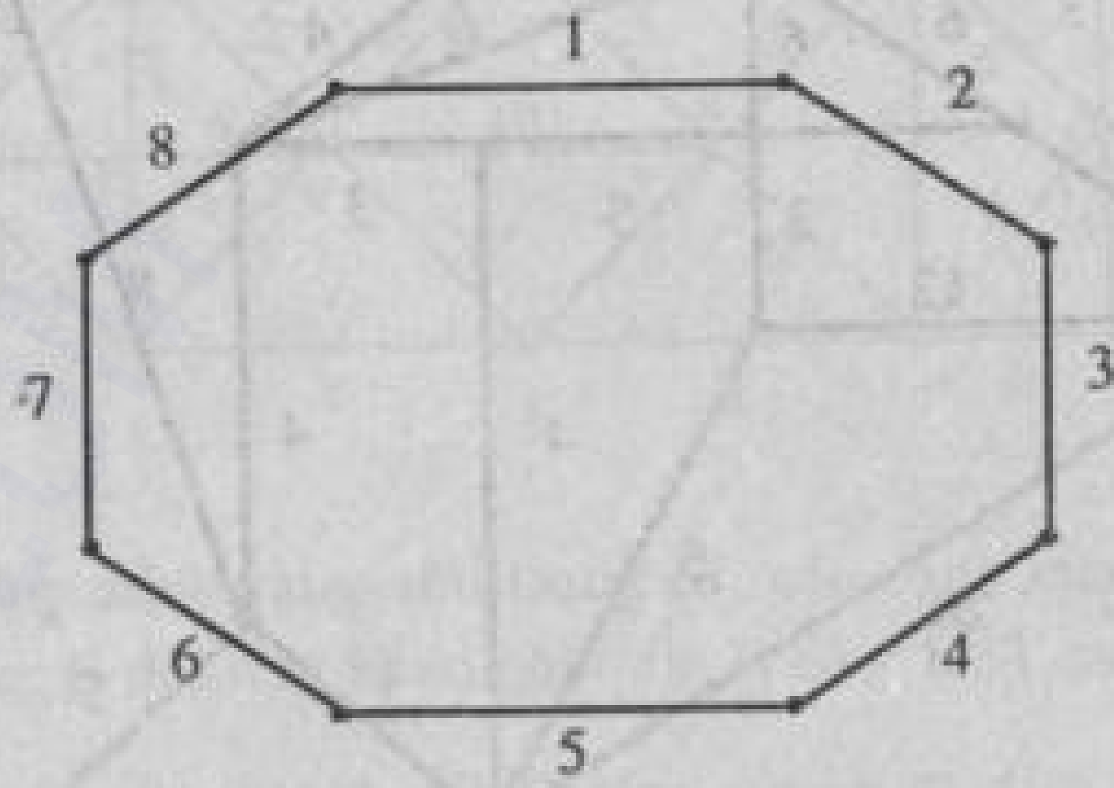
a)



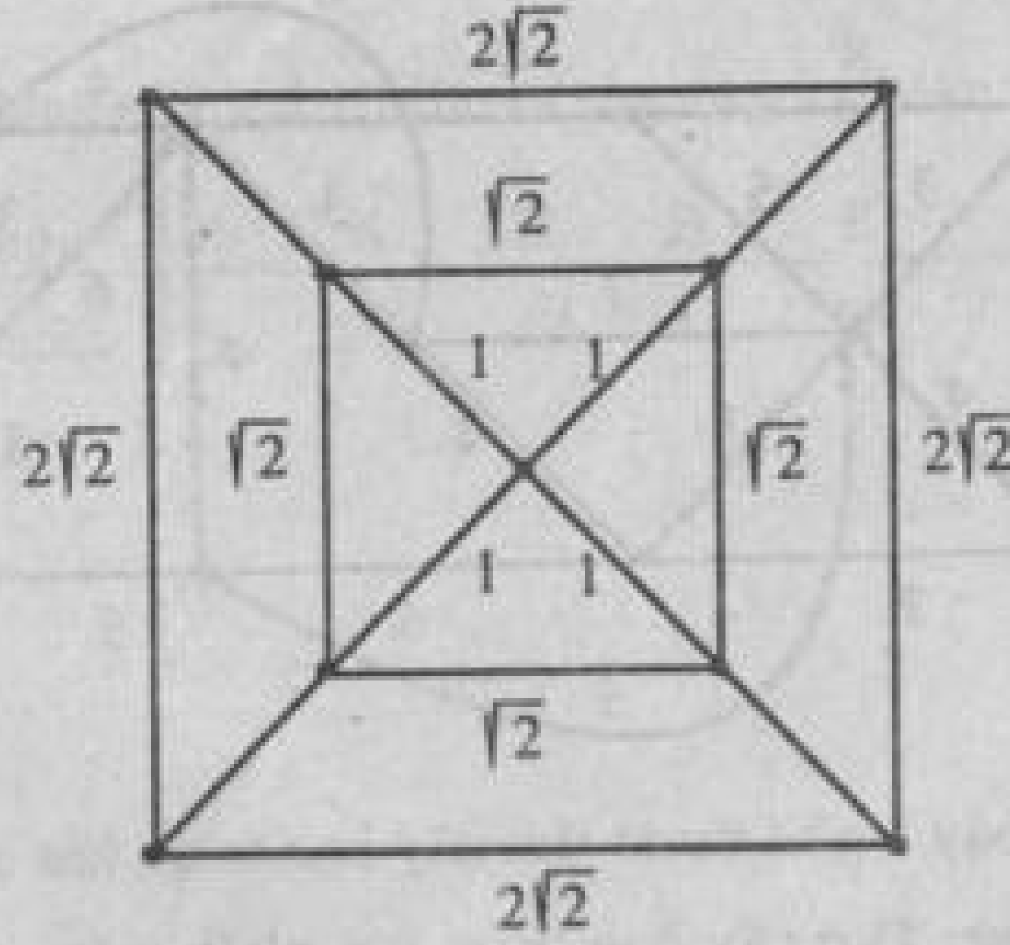
b)



c)



d)



c)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} & 1 & & & 1 \\ 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 \\ 1 & & & 1 & \end{array}\right] \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccccc} & 1 & & & 1 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & 1 & & & & 1 & \\ 1 & & & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & 1 & 1 & \\ & 1 & & & & & & & 1 & 1 \\ & & 1 & & & 1 & & & & 1 \\ & & & 1 & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & 1 & & \end{array}\right] \end{array}$$

14. Làm lại bài tập 13 nhưng bây giờ chọn tâm của đồ thị làm gốc.

15. Giả sử đồ thị G liên thông, có 13 đỉnh và 20 cạnh. Cây bao trùm của G có bao nhiêu đỉnh ? Có bao nhiêu cạnh ?

16. Chứng minh rằng nếu đồ thị G liên thông, có n đỉnh và có chu trình thì G có ít nhất n cạnh. Kết quả này có còn đúng khi bỏ giả thiết về tính liên thông của G không ?

17. Dưới đây là 1 số giải thuật tìm cây bao trùm của 1 đồ thị liên thông G cho trước. Hãy cho biết các giải thuật này có đúng không :

a) Bắt đầu với G. Nếu G có chu trình, hủy 1 cạnh thuộc chu trình này khỏi G, lặp lại thủ tục này đến khi đồ thị nhận được không còn chu trình.

b) Bắt đầu bằng 1 cạnh, thêm dần mỗi lần 1 cạnh mới cho đến khi đồ thị nhận được có n – 1 cạnh.

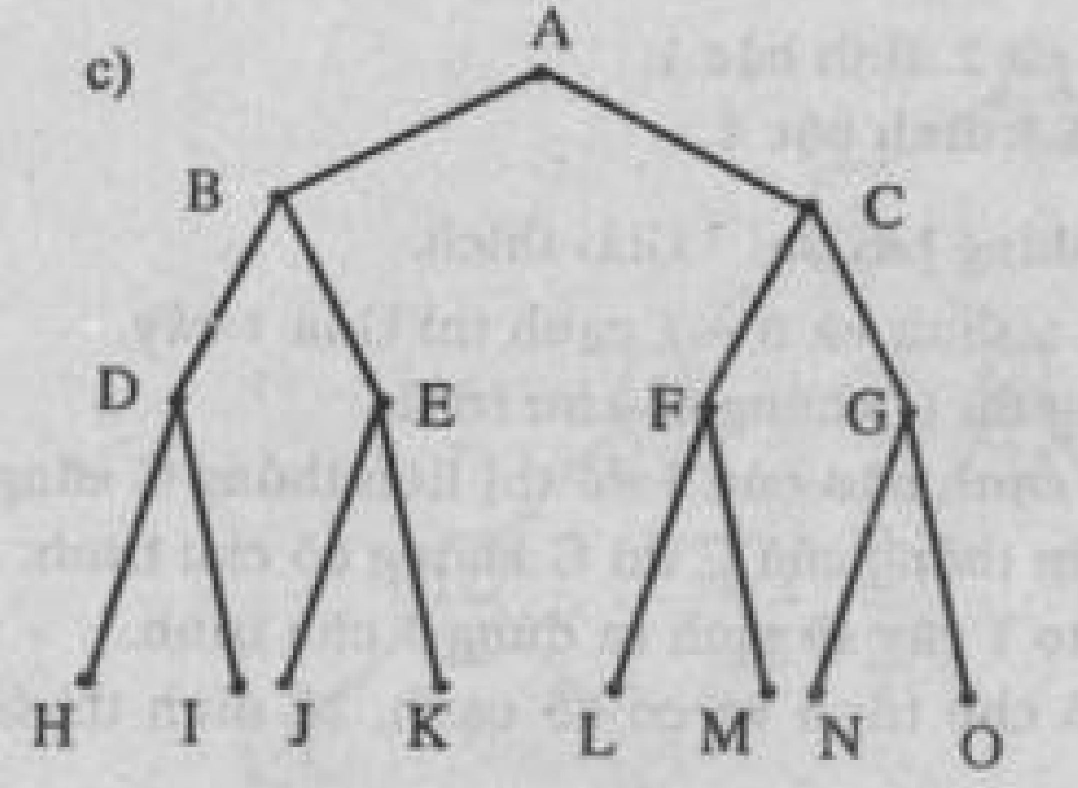
c) Bắt đầu bằng 1 cạnh, thêm dần mỗi lần 1 cạnh mới với điều kiện không tạo ra chu trình cho đến khi không thể thêm được cạnh mới nào nữa.

18. Đồ thị dưới đây có liên thông không ?

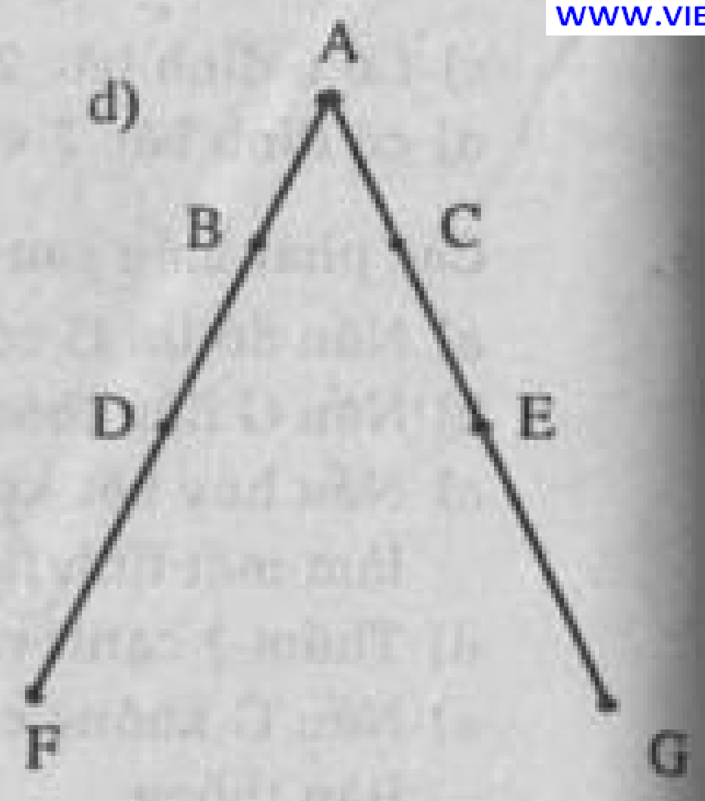
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

19. Gọi G là đồ thị có 25 đỉnh $x_2, x_3, \ldots, x_{26}$ và có cạnh $\overline{x_i x_j}$ nếu và chỉ nếu i, j không nguyên tố cùng nhau và khác nhau. Đồ thị G có bao nhiêu thành phần ? Tìm cây bao trùm của mỗi thành phần.

c)



d)



9. Ta định nghĩa phép duyệt cây nhị phân "X-order" như sau:

Giải thuật X-order Search.

1) Đến gốc.

2) Đến cây con bên phải, dùng X-order.

3) Đến cây con bên trái, dùng X-order.

Dùng giải thuật này , hãy duyệt các cây ở bài tập 8.

10. Giả sử 1 cây nhị phân có danh sách các đỉnh khi duyệt theo giải thuật Preorder là A, B, D, E, C, F, G và khi duyệt theo giải thuật Inorder là D, B, E, A, F, G, C. Hãy vẽ cây này.

11. Viết biểu diễn bằng RPN của các biểu thức sau :

a) $((A - B) * C) + (D \wedge E)$ b) $(A \div (B * (C - D))) + E$

c) $((A - D) * C)\wedge((A + B) + D)$ d) $A\left(B + \dfrac{C}{D^2} - E\right)$

e) $\left(\left(N^N\right)^N\right)^N (MN - Q)$ f) $\dfrac{(A + B)(C + D)}{(A - B)C + D} + \dfrac{A^2 + BD}{C^2 - BD}$

12. Tính giá trị các biểu thức RPN sau :

a) 5 3 + 12 4 ÷ * 6 2 * +

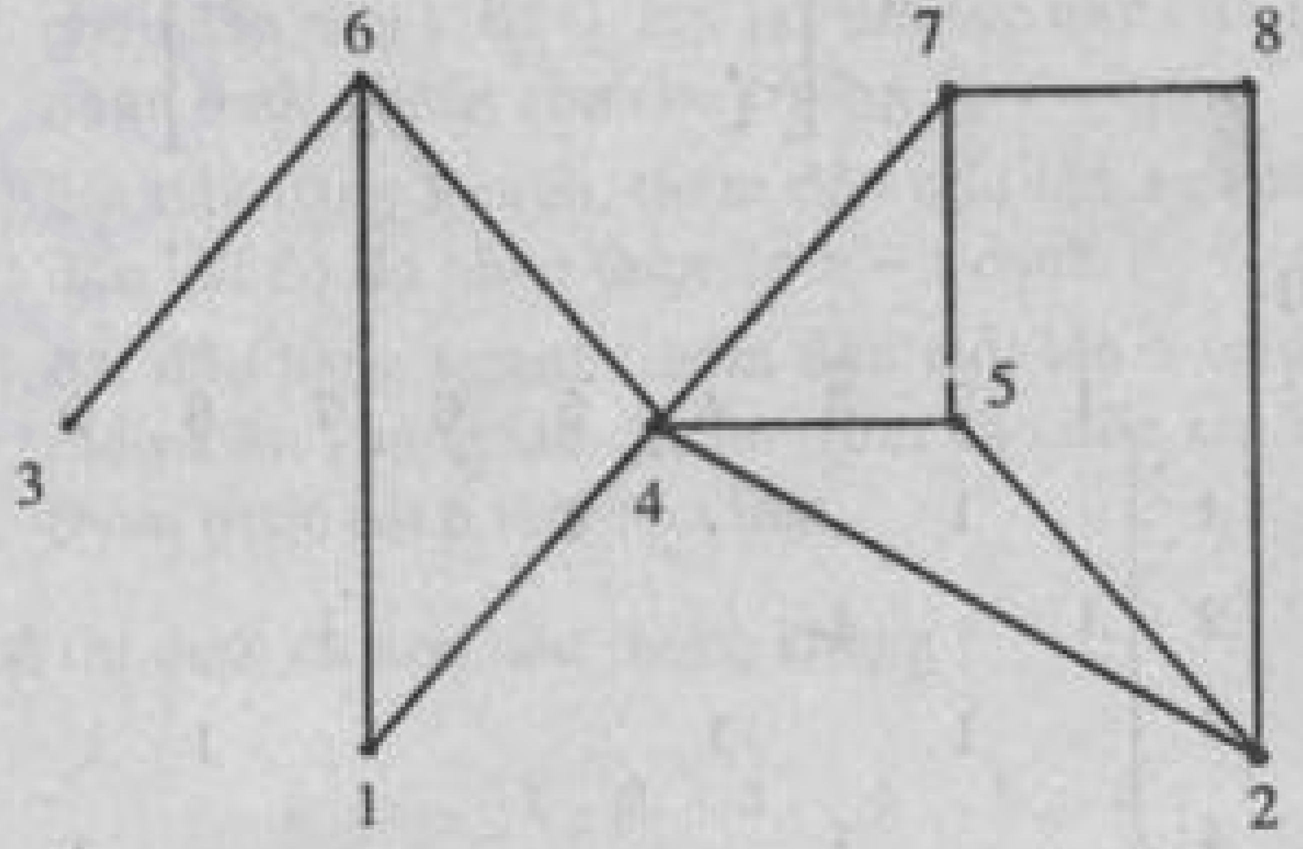
b) 4 2 ^ 4 + 10 ÷ 16 +

c) 3 6 * 5 2 ^ + 2 3 + −

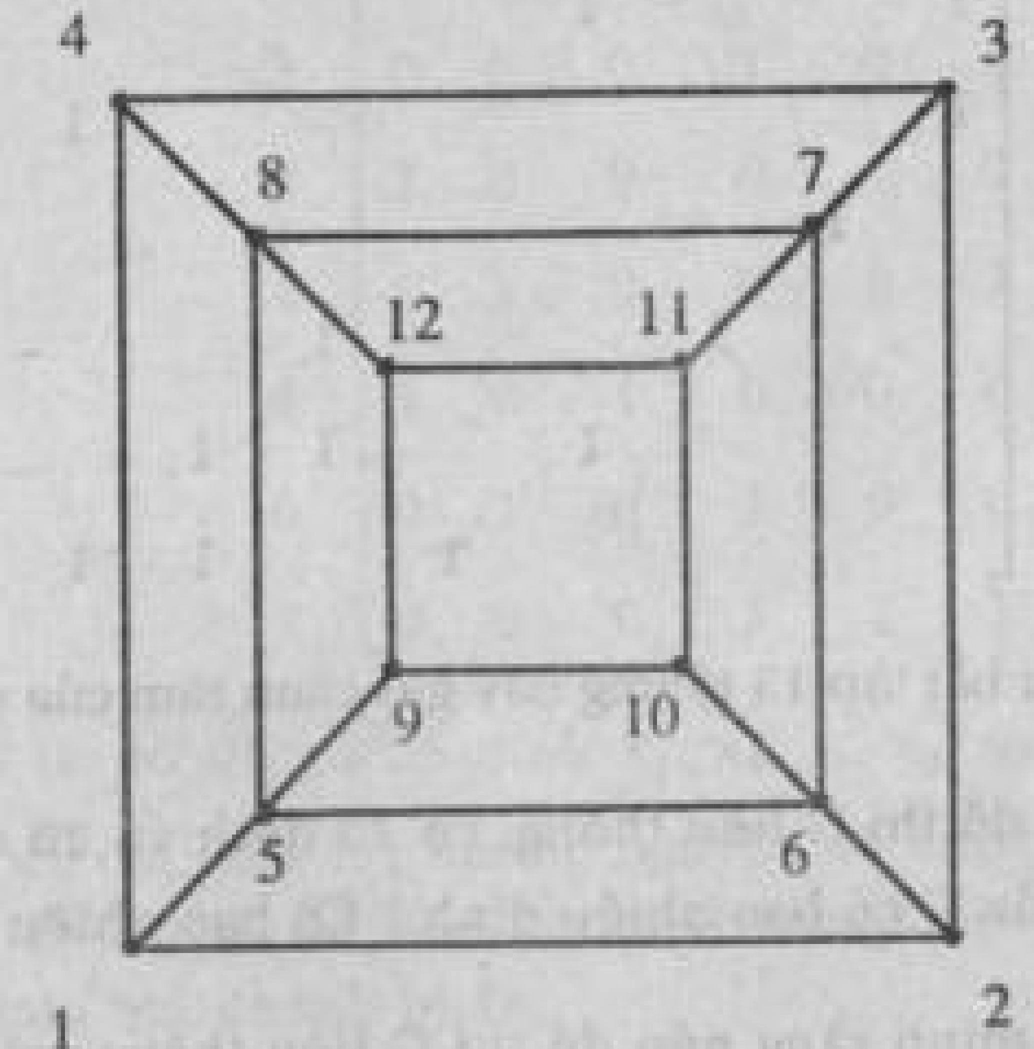
d) 2 2 ^ 2 ^ 2 ^ 2 ^

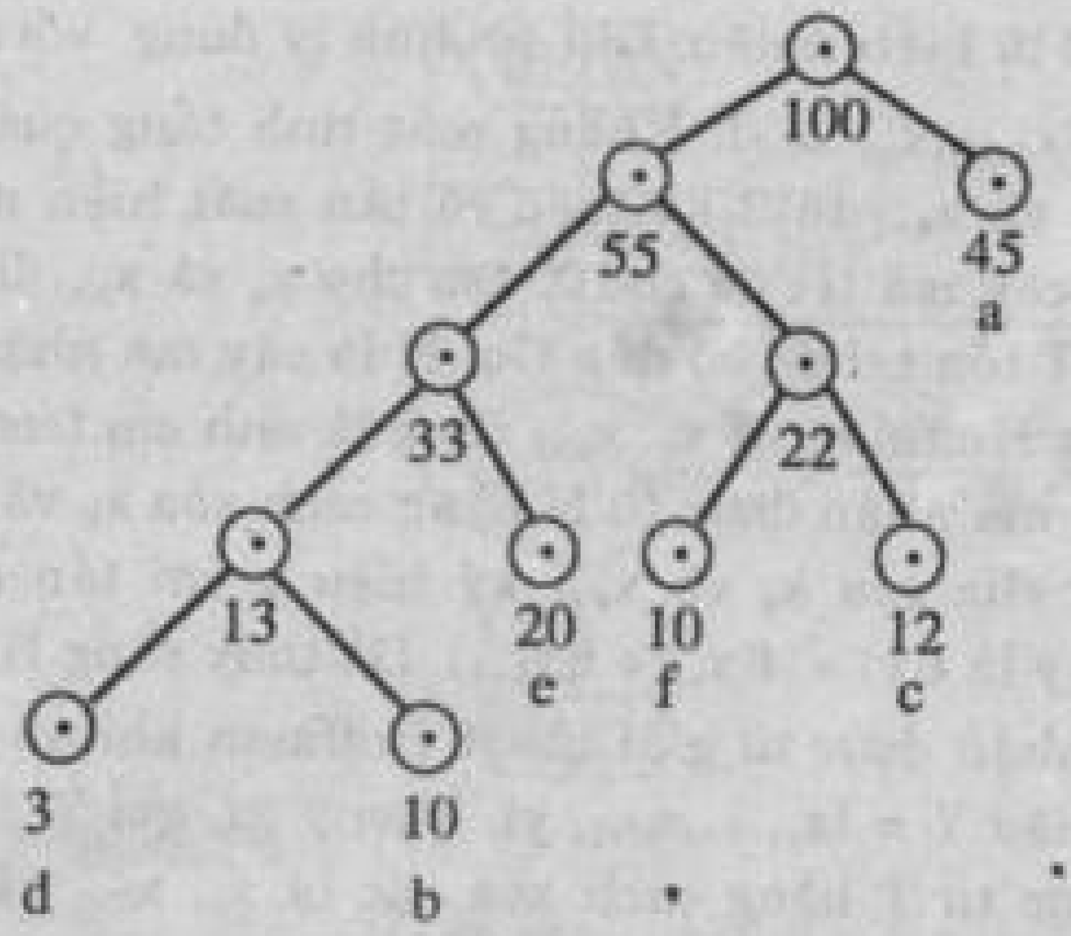
13. Tìm cây bao trùm của các đồ thị sau lần lượt bằng DFS rồi BFS, chọn đỉnh 1 làm gốc.

a)



b)





Ta có cách mã tối ưu sau :

Ký hiệu	a	b	c	d	e	f
Mã Huffman	1	0001	011	0000	001	010

Với cách mã này, chiều dài chuỗi mã của bản tin là :

$10^5(1.45\%+4.10\%+3.12\%+4.3\%+3.20\%+3.10\%)$

$= 223\ 000$ □

■ BÀI TẬP

1. Vẽ tất cả các cây (không đẳng hình với nhau) có :

a) 4 đỉnh; b) 5 đỉnh; c) 6 đỉnh

2. Tìm số tối đa các đỉnh của 1 cây m-phân có chiều cao h.

3. Có thể tìm được 1 cây có 8 đỉnh và thỏa điều kiện dưới đây hay không ? Nếu có, vẽ cây đó ra, nếu không, giải thích tại sao :

a) Mọi đỉnh đều có bậc 1.

b) Mọi đỉnh đều có bậc 2.

c) Có 6 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 1.

d) có đỉnh bậc 7 và 7 đỉnh bậc 1.

4. Các phát biểu sau đúng hay sai ? Giải thích.

a) Nếu đồ thị G có n đỉnh và n – 1 cạnh thì G là 1 cây.

b) Nếu G liên thông thì G không có chu trình.

c) Nếu hủy bất kỳ cạnh nào của 1 đồ thị liên thông G cũng làm mất tính liên thông của G thì G không có chu trình.

d) Thêm 1 cạnh vào 1 cây sẽ sinh ra đúng 1 chu trình.

e) Nếu G không có chu trình và có 25 cạnh, 26 đỉnh thì G liên thông.

f) Nếu G có 32 cạnh và 28 đỉnh thì G không là cây.

g) Nếu G liên thông, có 10 cạnh và 10 đỉnh thì G có ít nhất 1 chu trình.

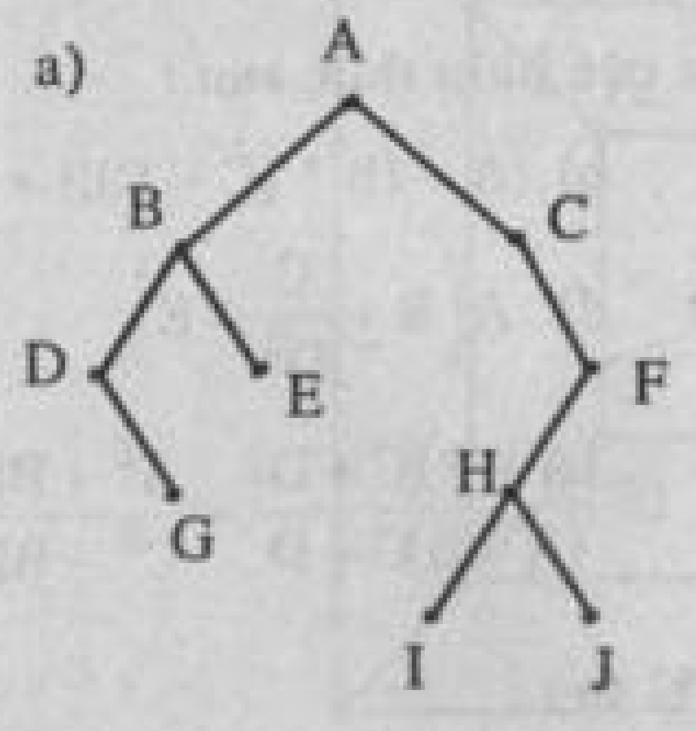
5. Giả sử đồ thị G có số cạnh bằng số đỉnh. Chứng minh rằng G có ít nhất 1 chu trình.

6. Đồ thị G là 1 rừng gồm T cây và có n đỉnh. Tìm số cạnh của G

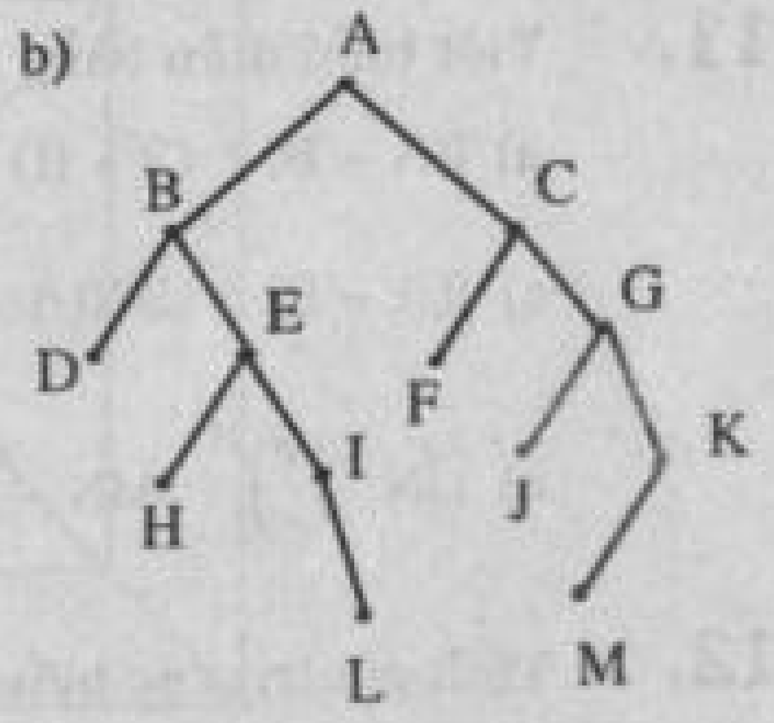
7. Chứng minh rằng mọi cây có gốc đều có lá.

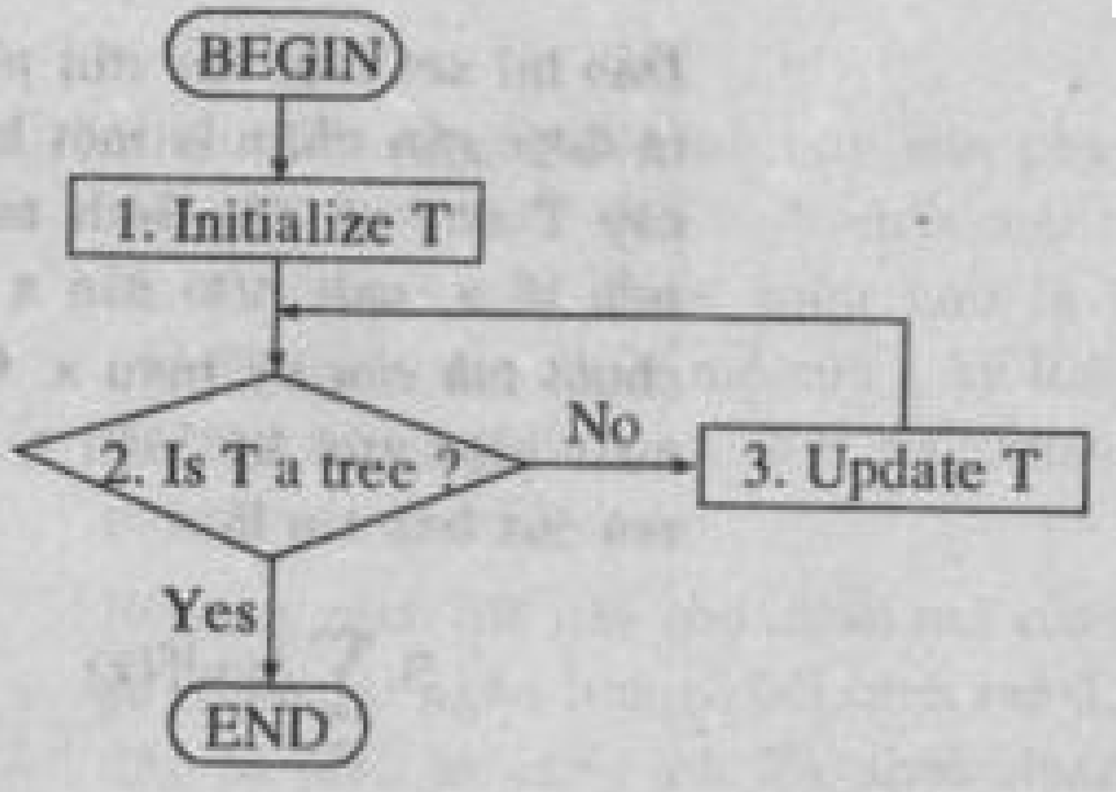
8. Duyệt các cây sau đây lần lượt bằng các giải thuật Preorder, Inorder và Postorder.

a)



b)





4.3.5 ĐỊNH LÝ

Khi giải thuật Huffman kết thúc, cây mã nhận được là tối ưu.

Trước hết ta chú ý tính chất sau của cây mã tối ưu:

Bổ đề : *Gọi X là tập hợp các ký hiệu và x, y là 2 ký hiệu c… tần suất xuất hiện nhỏ nhất. Thì có một cây mã tối ưu T cho X sao cho x và y là 2 lá anh em trong T.*

Chứng minh bổ đề: Gọi T_0 là 1 cây mã tối ưu cho X. Nế… x, y không là anh em, gọi u là lá có mức lớn nhất trong T_0… Thì phải có một lá v là anh em với u. Thực vậy, nếu … không có anh em, gọi w là cha của u. Xóa đỉnh u và coi … là lá tương ứng với ký hiệu u, ta nhận được cây mã mới T'_0 với $E(T'_0) < E(T_0)$: vô lý.

Bây giờ, nếu x không cùng mức với u, v thì $\Delta(x) < \Delta(u)$ v… bằng cách hoán đổi giữa x và u, ta nhận được 1 cây mã mới T_1 với :

$$E(T_1) = E(T_0) - \Delta(x)f(x) - \Delta(u)f(u) + \Delta(x)f(u) + \Delta(u)f(x)$$
$$= E(T_0) - (\Delta(u) - \Delta(x))(f(u) - f(x)) < E(T_0)$$

Điều này mâu thuẫn với tính tối ưu của T_0. Vậy x và tương tự y, có cùng mức với u và v. Bằng cách hoán đổi x với u và y với v, ta nhận được cây mã T với $E(T) = E(T_0)$, nghĩa là T cũng tối ưu. □

Chứng minh định lý: Dùng qui nạp trên n = |X|. Trường hợp n = 2 là hiển nhiên. Giả sử định lý đúng với n.

Coi $X = \{x_1,\dots,x_n, x_{n+1}\}$. Không mất tính tổng quát , cóthể giả sử x_k và x_{k+1} là 2 ký hiệu có tần suất hiện nhỏ nhất. Gọi T là cây mã tối ưu cho X sao cho x_k và x_{k+1} là anh em trong T (T tồn tại do bổ đề). Gọi H là cây mã nhận được từ giải thuật Huffman và x_k, x_{k+1} cũng là anh em trong H. Gọi H' là cây mã nhận được từ H bằng cách xóa x_k và x_{k+1}, gán cho đỉnh cha của x_k và x_{k+1} ký hiệu y với tần suất xuất hiện của y là $f(y) = f(x_k) + f(x_{k+1})$. Dễ thấy rằng H' chính là cây mã nhận được từ giải thuật Huffman khi áp dụng vào tập ký hiệu $Y = \{x_1, \dots, x_{k-1}, y\}$. Tương tự, gọi T' là cây mã nhận được từ T bằng cách xóa các lá x_k, x_{k+1} và gán cho đỉnh cha của x_k và x_{k+1} ký hiệu y với tần suất xuất hiện của y là $f(y) = f(x_k) + f(x_{k+1})$ thì T' là 1 cây mã cho tập Y. Do giả thiết qui nạp, ta có $E(H') \le E(T')$. Vậy :

$$\begin{aligned} E(H) &= E(H') + f(x_k) + f(x_{k+1}) \\ &\le E(T') + f(x_k) + f(x_{k+1}) \\ &= E(T) \end{aligned}$$

Vì T tối ưu nên E(H) = E(T), nghĩa là H tối ưu. □

THÍ DỤ 11: Cây mã Huffman cho tập hợp X trong thí dụ 1 là :

= 230 000

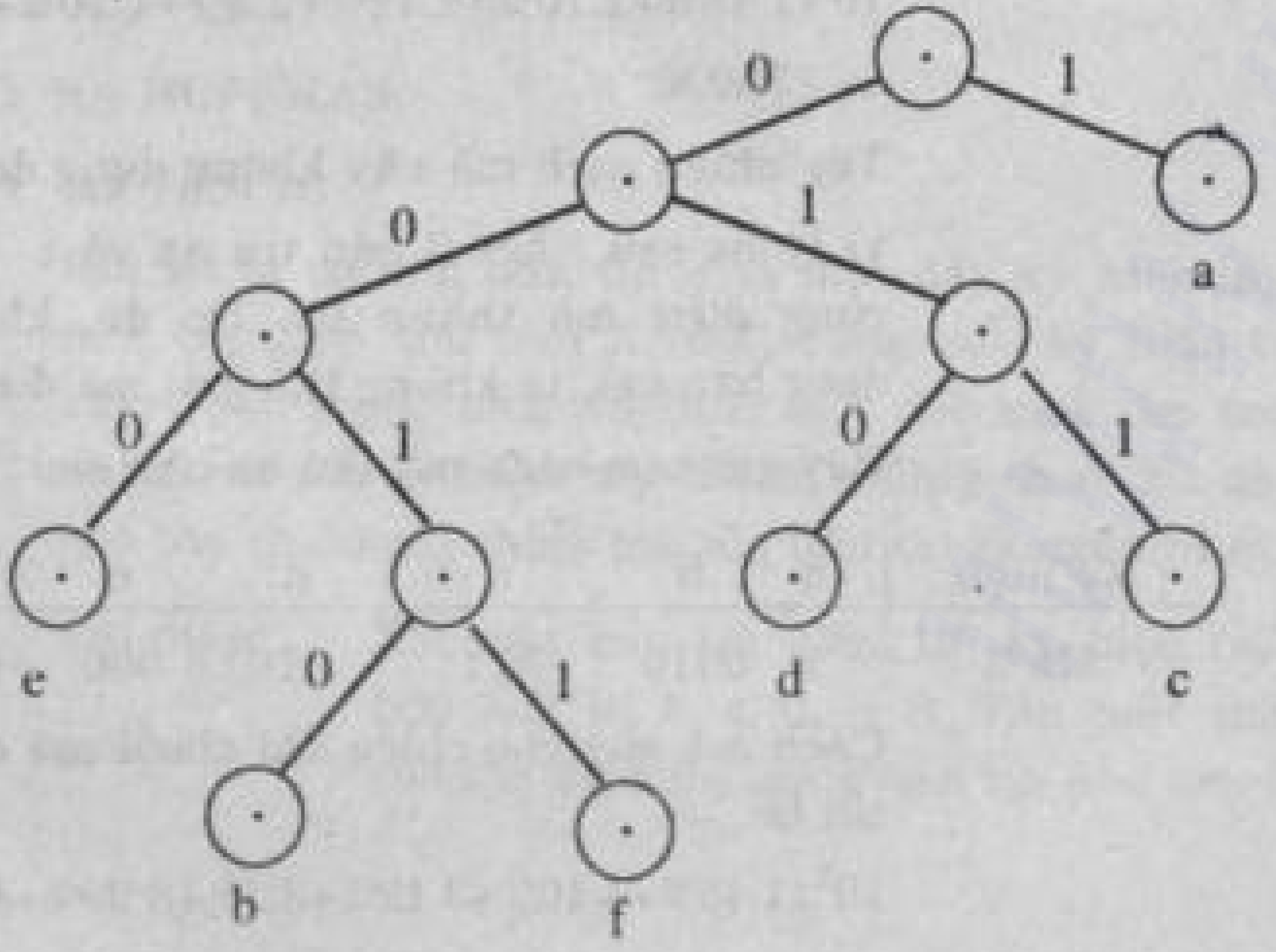
Nhận xét rằng cách mã này cho phép ta c thể giải mã được nhờ tính chất sau : không có chuỗi mã của 1 ký hiệu nào là tiền tố *(prefix)* của một chuỗi mã của 1 ký hiệu khác Cách mã nào thỏa tính chất này, được gọi là mã tiền tố *(prefix code)* .

Rõ ràng cách mã này cho chuỗi mã của bản tin có chiều dài ngắn hơn so với cách mã 1, nhưng đây có phải là cách mã tốt nhất chưa ? Giải thuật Huffman sẽ trả lời câu hỏi này.

4.5.2 GIẢI THUẬT HUFFMAN

Với mỗi cách mã tiền tố, ta có thể xây dựng một cây nhị phân sao cho mỗi ký hiệu tương ứng với một lá và đường đi từ gốc đến lá sẽ xác định mã của ký hiệu tương ứng theo cách sau : cạnh đi xuống con bên trái ứng với bit 0 và cạnh xuống con bên phải ứng với bit 1.

THÍ DỤ 10: Cây nhị phân của mã tiền tố (cách mã 3 trong thí dụ trên là:



□

Đảo lại xét một cây nhị phân T, trên đó mỗi lá được gán nhãn là một ký hiệu trong X. Thì cây T này sẽ xác định một mã tiền tố. Với mỗi lá x, mức Δ(x) của x chính là chiều dài chuỗi mã của ký hiệu x. Gọi f(x) là tần suất xuất hiện của ký hiệu x thì chiều dài chuỗi mã của bản tin là :

$$S.\sum_{x} \Delta(x)f(x)$$

trong đó S là số ký hiệu trong bản tin.

Cây mã T là tối ưu khi :

$$E(T) = \sum_{x} \Delta(x)f(x)$$

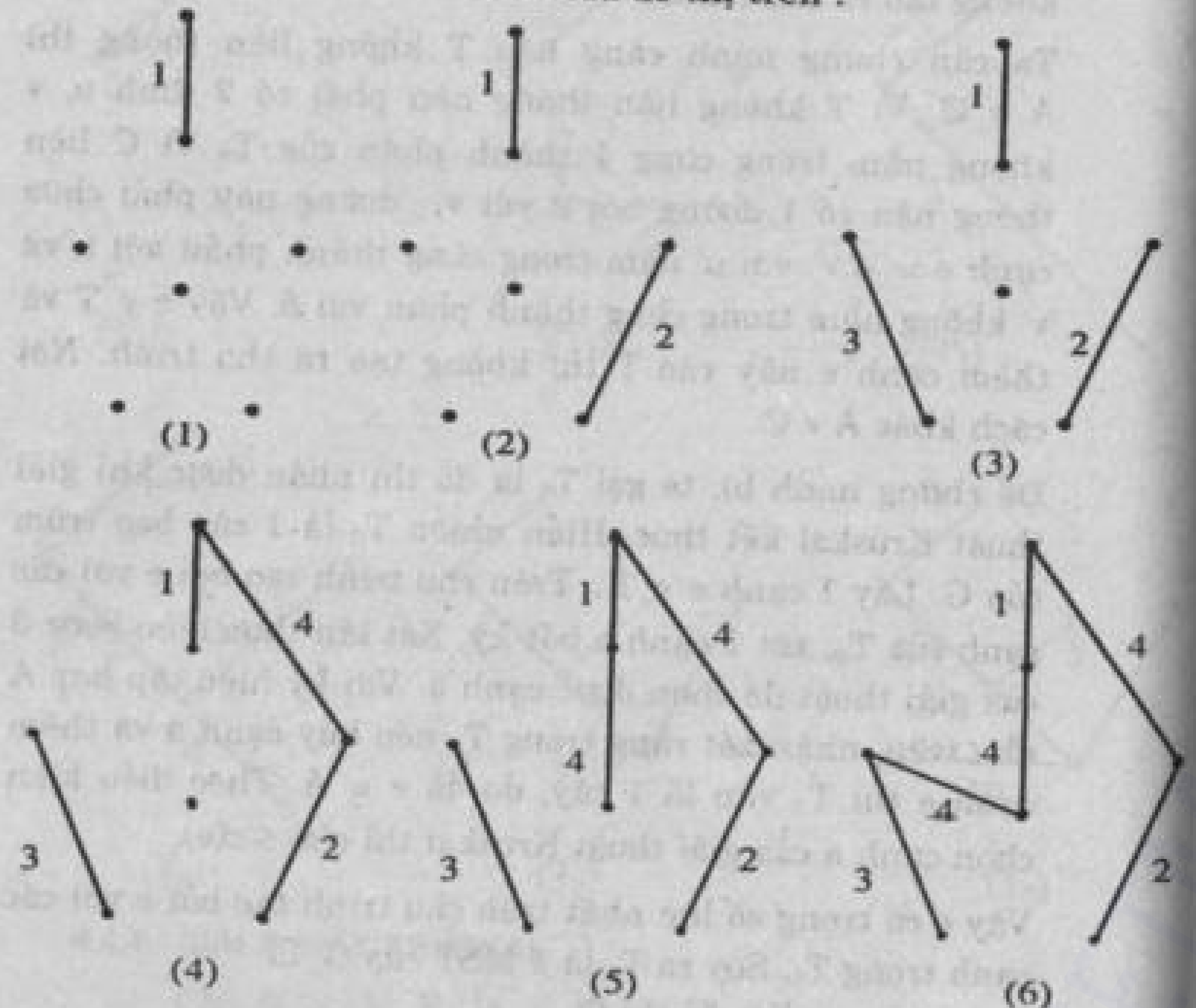
đạt giá trị nhỏ nhất và khi đó, chiều dài chuỗi mã của bản tin là ngắn nhất.

Giải thuật Huffman xây dựng cây mã T cho tập hợp X như sau :

GIẢI THUẬT HUFFMAN

1. T là rừng có |X| cây, mỗi cây có đúng 1 đỉnh (vừa là gốc vừa là lá) tương ứng với 1 ký hiệu trong X. Gán cho mỗi gốc x một nhãn là f(x).
2. Nếu T là cây thì dừng, nếu không, qua bước 3.
3. Tìm 2 cây trong T sao cho gốc của chúng (gọi là y và z) có nhãn nhỏ nhất. Nối y và z với 1 đỉnh mới u để thành 1 cây mới gốc u (các cây gốc y và z trở thành cây con bên trái và cây con bên phải của cây mới). Gán nhãn cho u là tổng nhãn của y và z. Trở về bước 2.

1 MST của đồ thị trên :



4.5 CÂY MÃ HUFFMAN

4.5.1 MÃ TIỀN TỐ

Giả sử ta có một bản tin gồm một dãy ký hiệu lấy trong một tập hợp hữu hạn X. Biết rằng mỗi ký hiệu trong X xuất hiện trong bản tin theo một xác suất cho trước. Ta muốn mã các ký hiệu này thành những chuỗi bit nhị phân sao cho chiều dài chuỗi mã của bản tin là ngắn nhất.

THÍ DỤ 9: Xét một bản tin gồm 10^5 ký hiệu trong tập hợp X = {a, b, c, d, e, f}. Tần suất xuất hiện của các ký hiệu trong bản tin như sau :

Ký hiệu	a	b	c	d	e	f
Tần suất xuất hiện (%)	45	10	12	3	20	10

Có 6 ký hiệu khác nhau nên với cách mã có chiều dài cố định cần tối thiểu 3 bit cho mỗi ký hiệu ($2^3 \geq 6$). Chẳng hạn :

Ký hiệu	a	b	c	d	e	f
Mã 1	000	001	010	011	100	101

Cách mã này cho chiều dài chuỗi mã của bản tin là $3.10^5 = 300\,000$.

Xem cách mã thứ hai như sau :

Ký hiệu	a	b	c	d	e	f
Mã 2	0	01	00	11	1	10

Cách mã này cho chiều dài chuỗi mã của bản tin là :

$10^5(1.45\%+2.10\%+2.12\%+2.3\%+1.20\%+2.10\%)$

$= 135000$

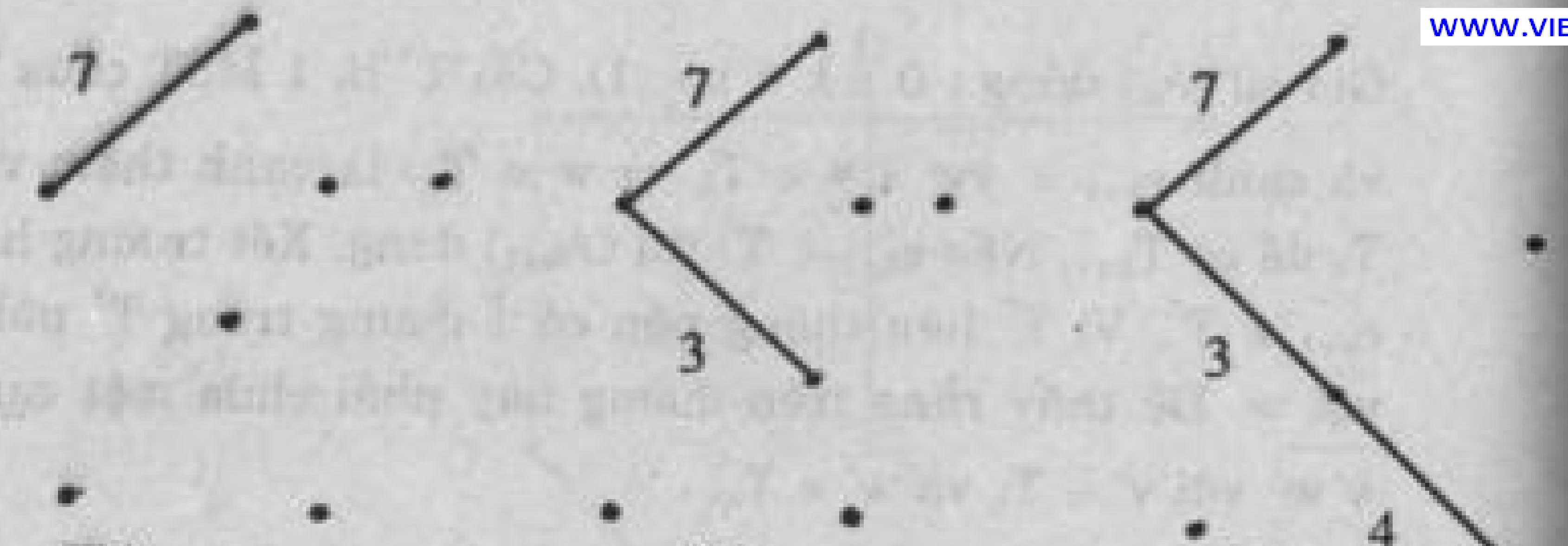
Tuy nhiên cách mã này không dùng được vì lý do sau : Xét 2 bản tin aa và c . Chúng cùng được mã thành 00. Do đó, khi nhận được bản mã, ta không thể giải mã được.

Bây giờ xem cách mã thứ ba như sau :

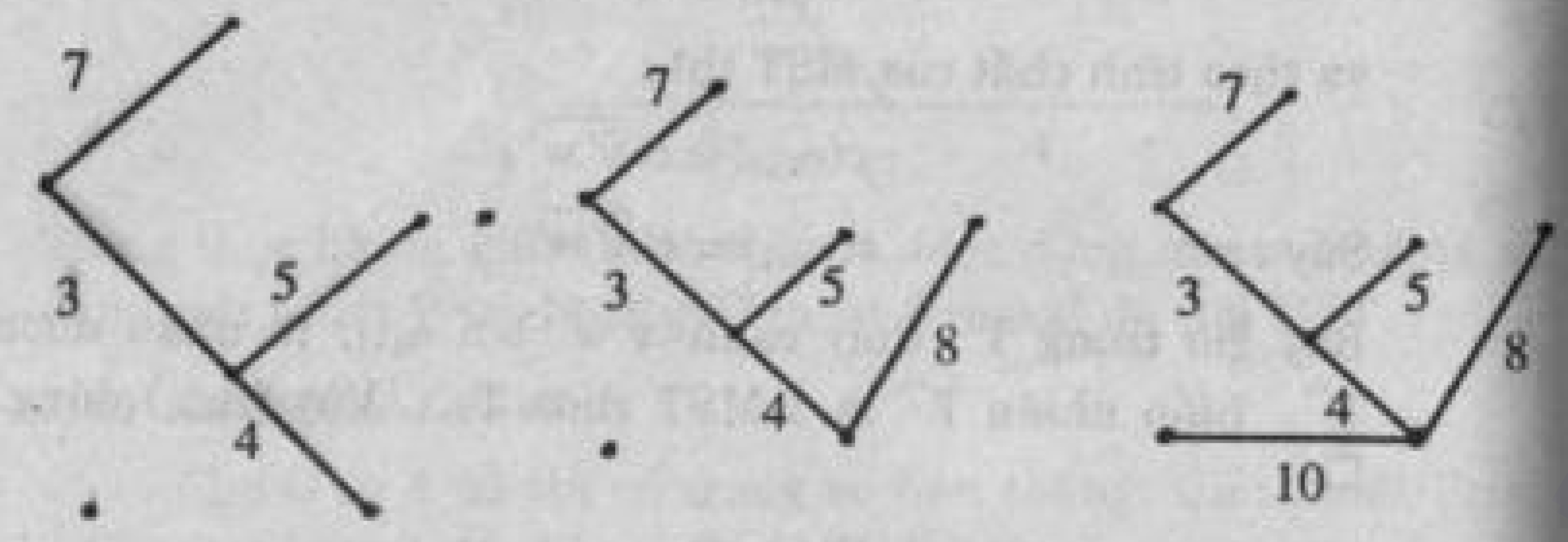
Ký hiệu	a	b	c	d	e	f
Mã 3	1	0010	011	010	000	0011

Cách mã này cho chiều dài chuỗi mã của bản tin là :

$10^5.(1.45\%+4.10\%+3.12\%+3.3\%+3.20\%+4.10\%)$



(T_1) (T_2) (T_3)



(T_4) (T_5) (T_6)

4.4.4 GIẢI THUẬT KRUSKAL

Cho G = (V, E) là 1 đồ thị có trọng số liên thông. Giải thuật Kruskal xây dựng 1 đồ thị con T của G như sau :

1. T = (V, ∅).
2. Nếu T liên thông thì dừng.
3. Nếu không, chọn 1 cạnh có trọng số nhỏ nhất không trong T sao cho khi thêm cạnh này vào T thì không tạo ra chu trình. Đặt cạnh này vào T. Trở về bước 2.

Ta sẽ chứng minh rằng giải thuật Kruskal cho ta 1 MST của đồ thị G. Chỉ cần chứng minh 2 điều :

a) Bước 3 là khả thi.

b) Khi giải thuật kết thúc thì đồ thị T là 1 MST của G.

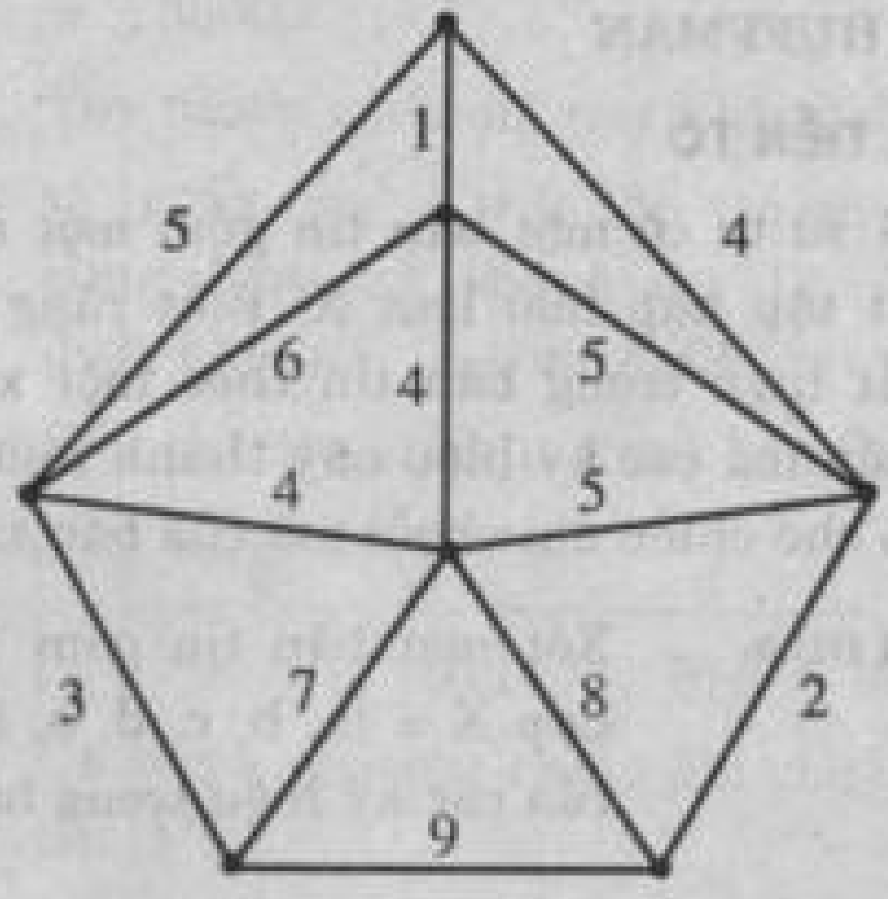
Để chứng minh a), đặt : A = {cạnh e ∉ T | thêm e vào T thì không tạo ra chu trình}.

Ta cần chứng minh rằng nếu T không liên thông thì A ≠ ∅. Vì T không liên thông nên phải có 2 đỉnh u, v không nằm trong cùng 1 thành phần của T. Vì G liên thông nên có 1 đường nối u với v, đường này phải chứa cạnh e = $\overline{u'v'}$ với u' nằm trong cùng thành phần với u và v' không nằm trong cùng thành phần với u. Vậy e ∉ T và thêm cạnh e này vào T thì không tạo ra chu trình. Nói cách khác A ≠ ∅.

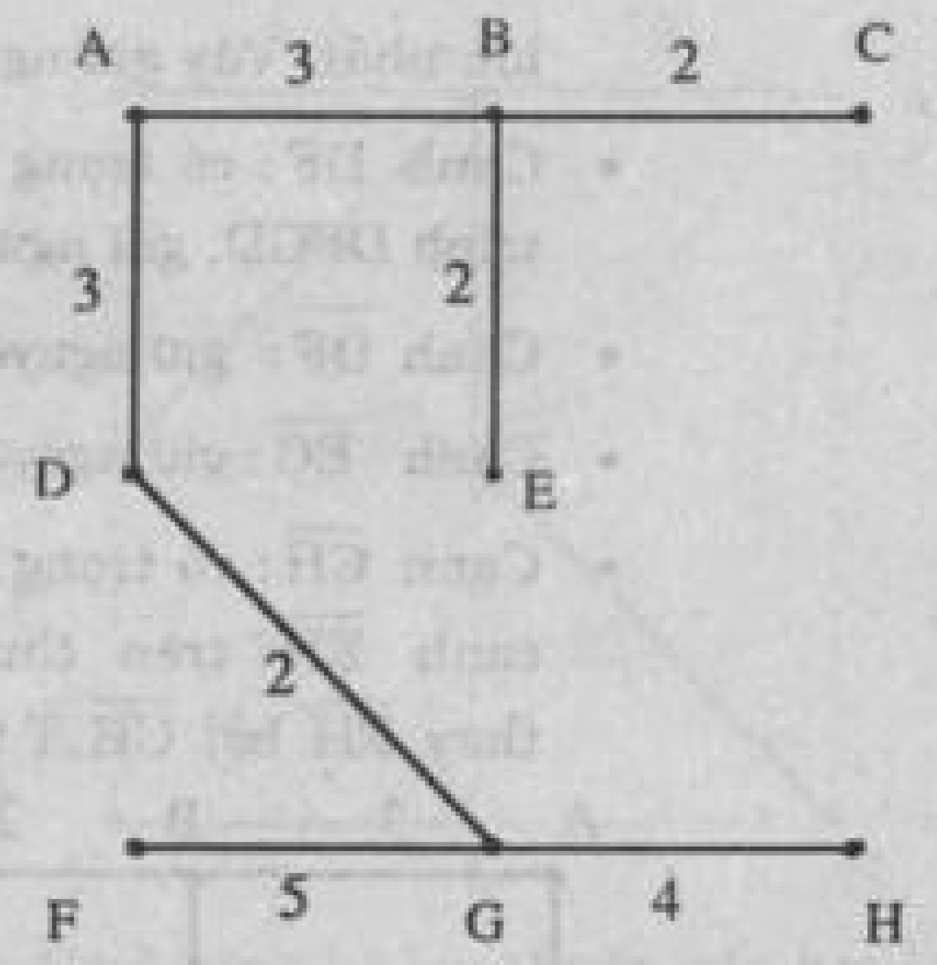
Để chứng minh b), ta gọi T_0 là đồ thị nhận được khi giải thuật Kruskal kết thúc. Hiển nhiên T_0 là 1 cây bao trùm của G. Lấy 1 cạnh e ∉ T_0. Trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T_0, xét 1 cạnh a bất kỳ. Xét lần thực hiện bước 3 của giải thuật để chọn được cạnh a. Với ký hiệu tập hợp A như trên, nhận xét rằng trong T_0 nếu hủy cạnh a và thêm cạnh e thì T_0 vẫn là 1 cây, do đó e ∈ A. Theo điều kiện chọn cạnh a của giải thuật Kruskal thì c(a) ≤ c(e).

Vậy e có trọng số lớn nhất trên chu trình tạo bởi e với các cạnh trong T_0. Suy ra T_0 là 1 MST của G. □

THÍ DỤ 8: Xét đồ thị G



Áp dụng giải thuật Kruskal, ta xây dựng dần



□

Trong thực hành, giải thuật trên ít được dùng mà ta thường sử dụng giải thuật Prim hoặc giải thuật Kruskal để tìm MST.

4.4.3 GIẢI THUẬT PRIM

Cho G là 1 đồ thị có trọng số liên thông. Giải thuật Prim xây dựng 1 đồ thị con T của G như sau :

1. Chọn tùy ý 1 đỉnh của G đặt vào T.
2. Nếu mọi đỉnh của G đều đã nằm trong T thì dừng.
3. Nếu không, tìm 1 cạnh có trọng số nhỏ nhất nối 1 đỉnh trong T với 1 đỉnh ngoài T. Thêm cạnh này vào T. Trở về bước 2.

Ta sẽ chứng minh rằng giải thuật Prim cho ta 1 MST của đồ thị G.

Giả sử G có n đỉnh và T_k ($0 \le k \le n-1$) là đồ thị gồm k cạnh và k + 1 đỉnh nhận được khi thực hiện bước 3 lần thứ k.

Xét mệnh đề

(A_k): Các cạnh của T_k nằm trong 1 MST.

Ta chứng minh rằng (A_{n-1}) đúng. Dùng qui nạp.

(A_0) hiển nhiên đúng.

Giả sử (A_k) đúng ($0 \le k < n-1$). Gọi T^* là 1 MST chứa T_k và cạnh $e_{k+1} = \overline{vw}$ ($v \in T_k$ và $w \notin T_k$) là cạnh thêm vào T_k để có T_{k+1}. Nếu $e_{k+1} \in T^*$ thì (A_{k+1}) đúng. Xét trường hợp $e_{k+1} \notin T^*$. Vì T^* liên thông nên có 1 đường trong T^* nối v với w. Dễ thấy rằng trên đường này phải chứa một cạnh $\overline{v'w'}$ với $v' \in T_k$ và $w' \notin T_k$.

Theo điều kiện chọn cạnh e_{k+1} của giải thuật Prim thì :

$$c(e_{k+1}) \le c(\overline{v'w'})$$

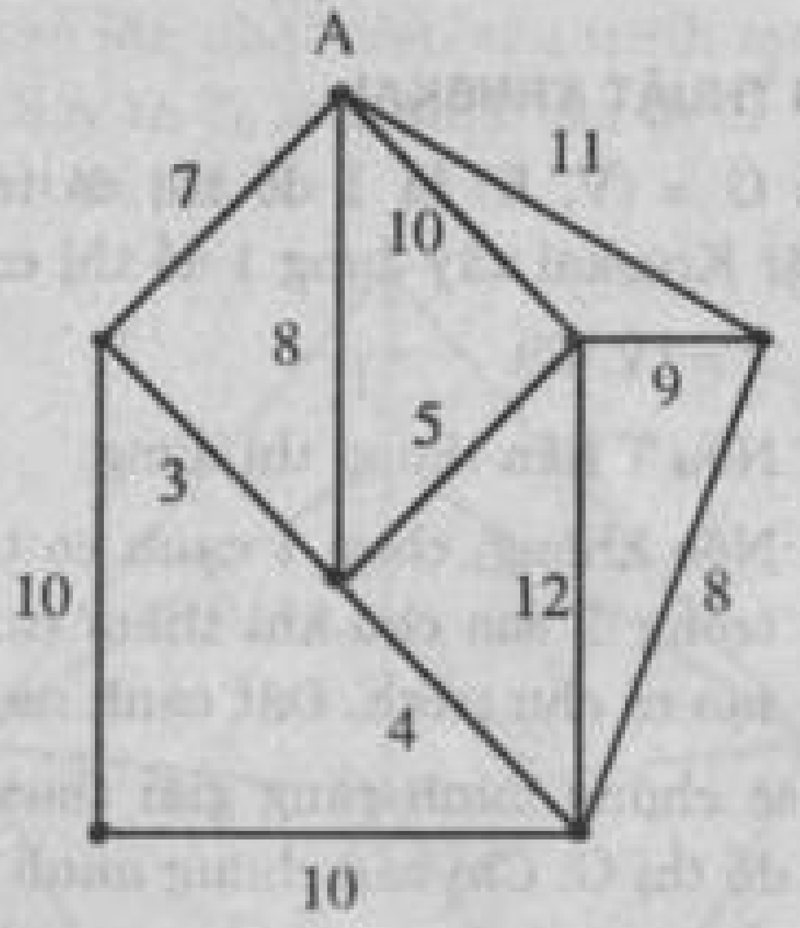
và theo tính chất của MST thì :

$$c(e_{k+1}) \ge c(\overline{v'w'})$$

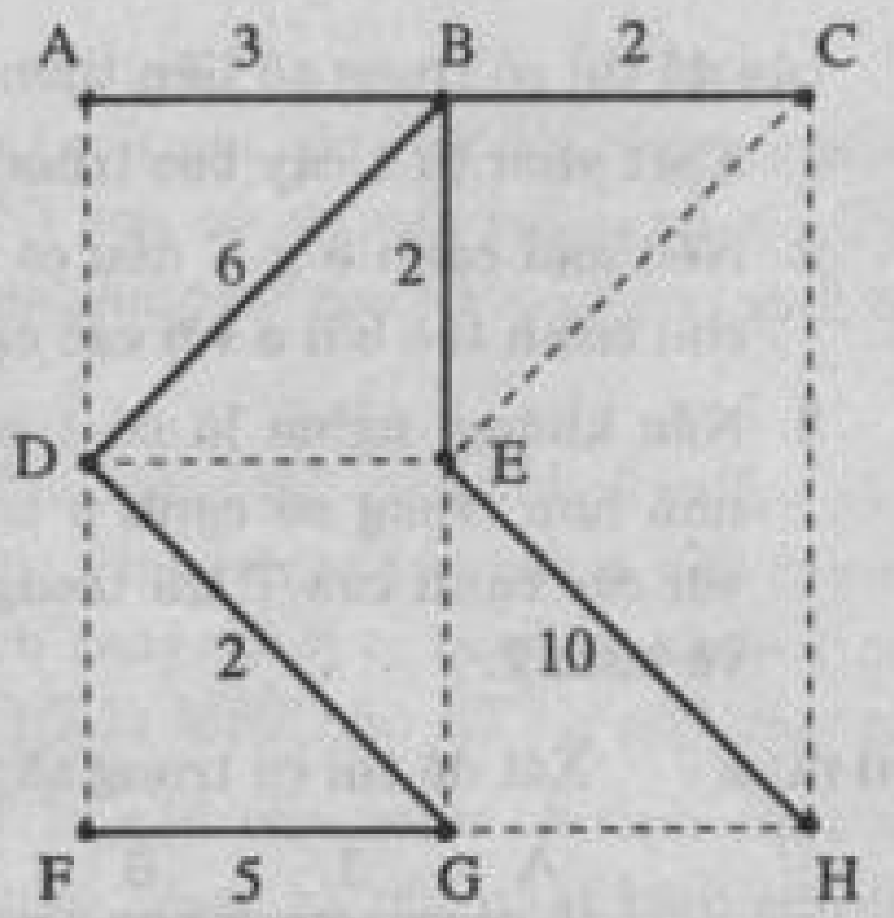
Suy ra : $c(e_{k+1}) = c(\overline{v'w'})$

Bây giờ trong T^*, thay cạnh $\overline{v'w'}$ bởi e_{k+1}, ta nhận được T^{**}, hiển nhiên T^{**} là 1 MST chứa T_{k+1}. Vậy (A_{k+1}) đúng. □

THÍ DỤ 7: Xét đồ thị sau :

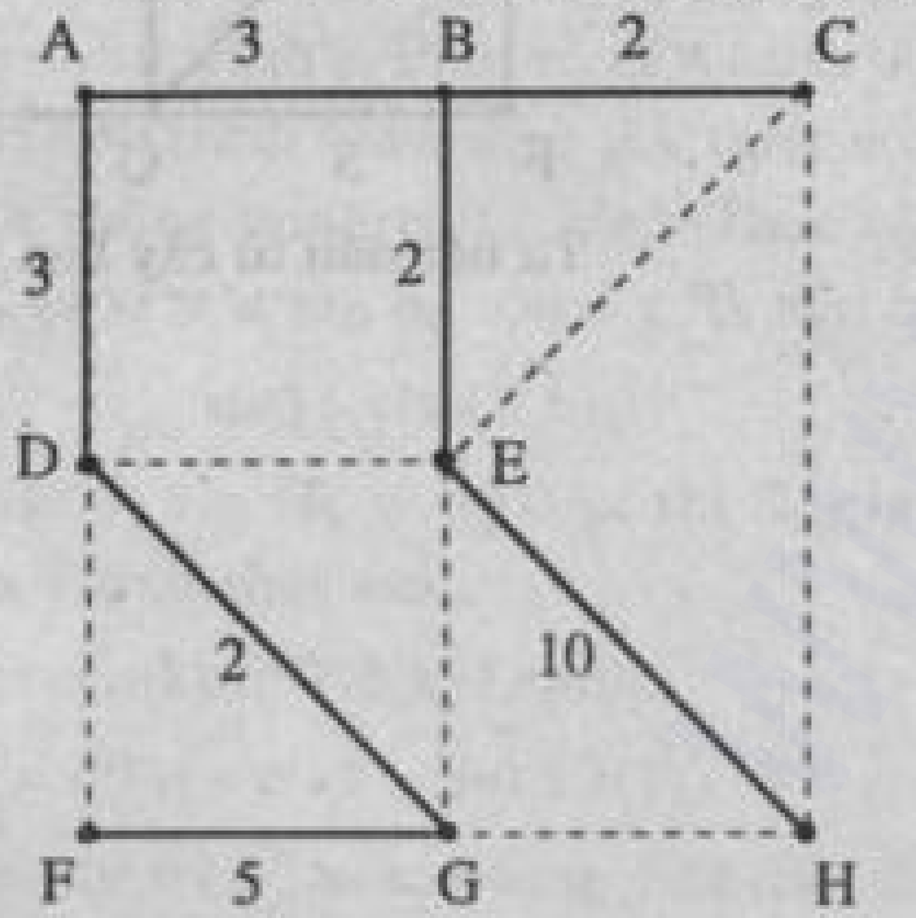


Áp dụng giải thuật Prim, bắt đầu từ đỉnh A, ta xây dựng dần 1 MST của đồ thị trên



Có 7 cạnh không thuộc cây bao trùm là $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{DF}$, $\overline{EG}$, $\overline{EC}$, $\overline{CH}$, $\overline{GH}$. Ta kiểm tra dần từng cạnh.

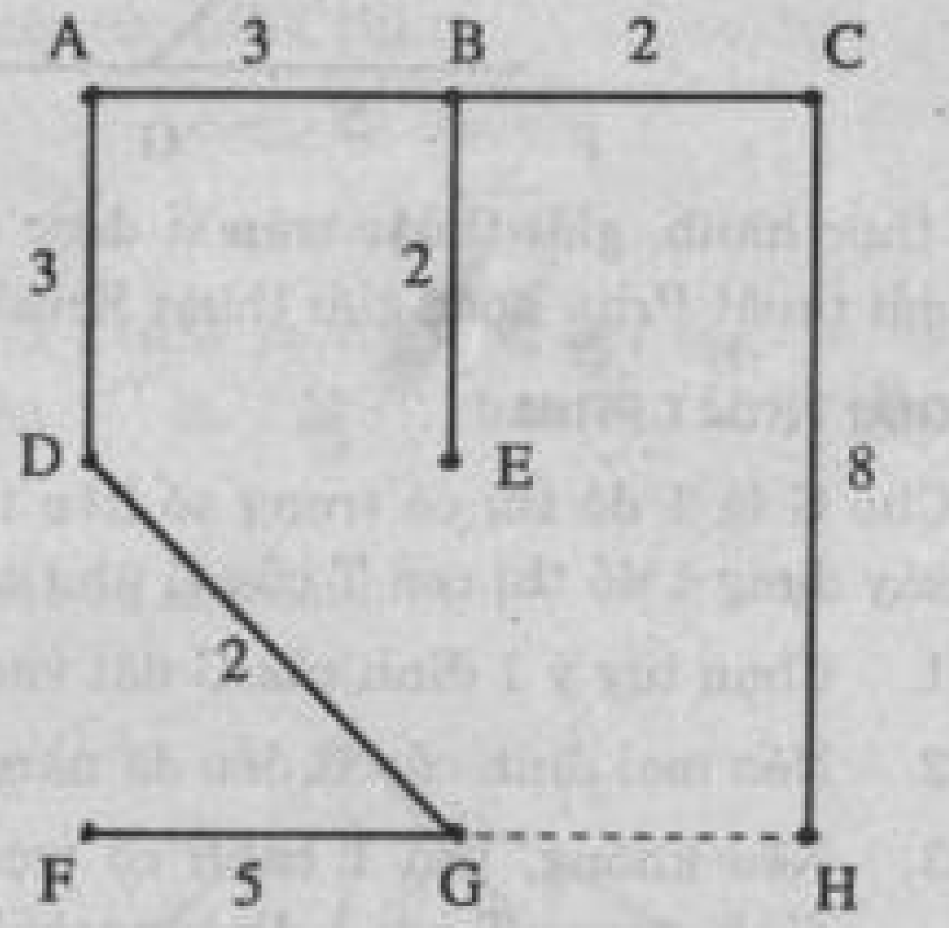
- Cạnh $\overline{AD}$: Thêm vào T thì tạo ra chu trình ADBA gồm 3 cạnh có trọng số là 3, 3, 6. Vậy thay $\overline{DB}$ (có trọng số 6) bởi cạnh $\overline{AD}$ (có trọng số 3). Bây giờ T là :



- Tiếp tục đến cạnh $\overline{DE}$: Tạo ra chu trình DEBA, trên chu trình này $\overline{DE}$ có trọng số

lớn nhất. Vậy giữ nguyên T.

- Cạnh $\overline{DF}$: có trọng số lớn nhất trên chu trình DFGD, giữ nguyên T.
- Cạnh $\overline{DF}$: giữ nguyên T.
- Cạnh $\overline{EC}$: giữ nguyên T.
- Cạnh $\overline{CH}$: có trọng số nhỏ hơn trọng số cạnh $\overline{EH}$ trên chu trình BCHEB, vậy thay $\overline{EH}$ bởi $\overline{CH}$.T trở thành :



- Cuối cùng, cạnh $\overline{GH}$: có trọng số là 4 nhỏ hơn trọng số $\overline{CH}$ trên chu trình GHCBADG, vậy thay $\overline{CH}$ bởi $\overline{GH}$.

Ta tìm được 1 MST của G là :

4.4.2 ĐỊNH LÍ

Gọi T là 1 cây bao trùm của 1 đồ thị có trọng số liên thông G. Thì T là 1 MST nếu và chỉ nếu mỗi cạnh $e \notin T$ đều có trọng số lớn nhất trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T.

CHỨNG MINH

($\Rightarrow$) Giả sử T là một MST và cạnh $e \notin T$. Xét cạnh $u \in T$ nằm trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T. Bằng cách thay u bởi e, ta nhận được 1 cây bao trùm mới T'. Vì T là MST nên $c(T') \geq c(T)$. Suy ra $c(e) \geq c(u)$.

($\Leftarrow$) Giả sử T là cây bao trùm có tính chất là mỗi cạnh $e \notin T$ đều có trọng số lớn nhất trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T.

Gọi $e_1, e_2, \dots, e_n$ là các cạnh của T sắp theo thứ tự trọng số tăng dần, nghĩa là :

$$c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_n)$$

Gọi T_k là một cây bao trùm bất kỳ có k cạnh khác T.

Gọi e_j là cạnh có chỉ số nhỏ nhất mà không thuộc T_k, nghĩa là $e_1, e_2, \dots, e_{j-1} \in T \cap T_k$ và $e_j \in T \setminus T_k$. Thì $T_k \cup \{e_j\}$ có chu trình γ. Phải có một cạnh $u \in \gamma \setminus T$. Thì $T \cup \{u\}$ có chu trình Γ và theo giả thiết c(u) lớn nhất trên Γ. Ta chứng minh $c(u) \geq c(e_j)$. Thực vậy, có cạnh $w \in \Gamma \setminus T_k$ và vì $w \notin \{e_1, e_2, \dots, e_{j-1}\} \subset T_k$ nên ta có :

$$c(e_j) \leq c(w) \leq c(u)$$

Bây giờ đặt $T_{k-1} = (T_k \cup \{e_j\}) \setminus \{u\}$ thì T_{k-1} là 1 cây bao trùm thỏa 2 tính chất sau :

- T_{k-1} chỉ còn khác T ở k–1 cạnh.
- $c(T_{k-1}) = c(T_k) + c(e_j) - c(u) \leq c(T_k)$

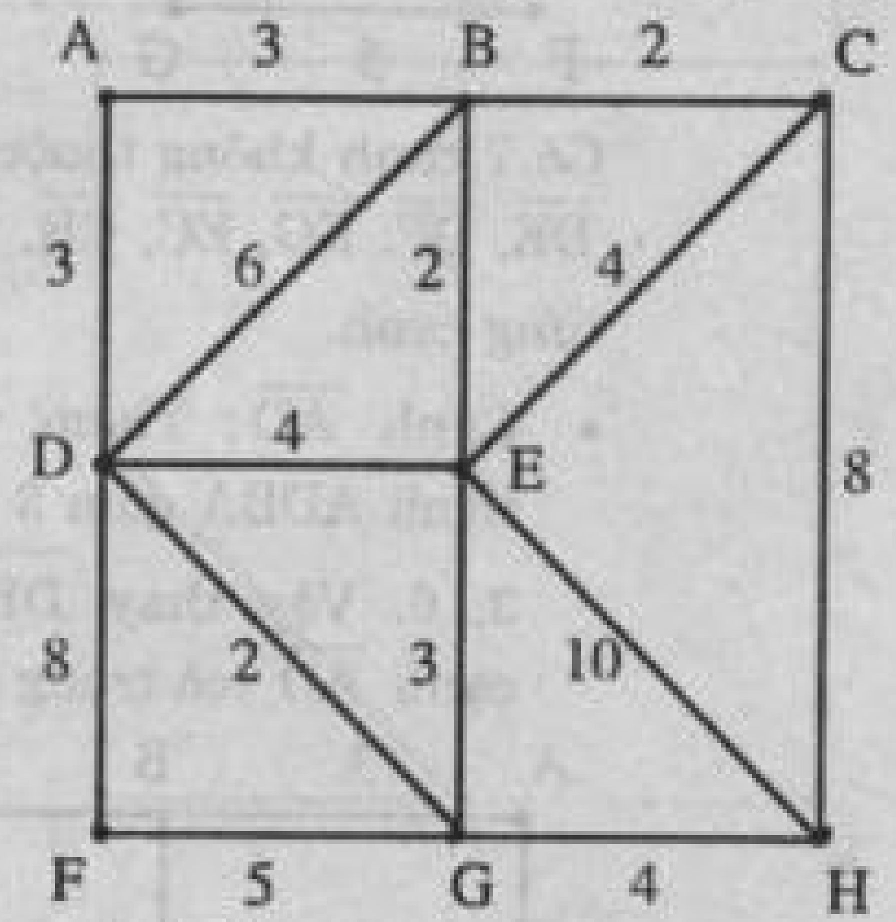
Lập lại thủ tục trên , ta xây dựng được dãy cây bao trùm $T_{k-1}, T_{k-2}, \dots, T_0 = T$ với $c(T) = c(T_0) \leq c(T_1) \dots \leq c(T_k)$
□

Từ chứng minh trên, ta suy ra 1 giải thuật tìm MST

của đồ thị có trọng số liên thông G như sau :

1. Xuất phát từ 1 cây bao trùm T bất kỳ của G.
2. Nếu mọi cạnh $e \notin T$ đều có trọng số lớn nhất trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T thì dừng.
3. Nếu không, nghĩa là có 1 cạnh $e \notin T$ có trọng số nhỏ hơn trọng số cạnh u trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T thì trong T, thay u bằng e. Trở về bước 2.

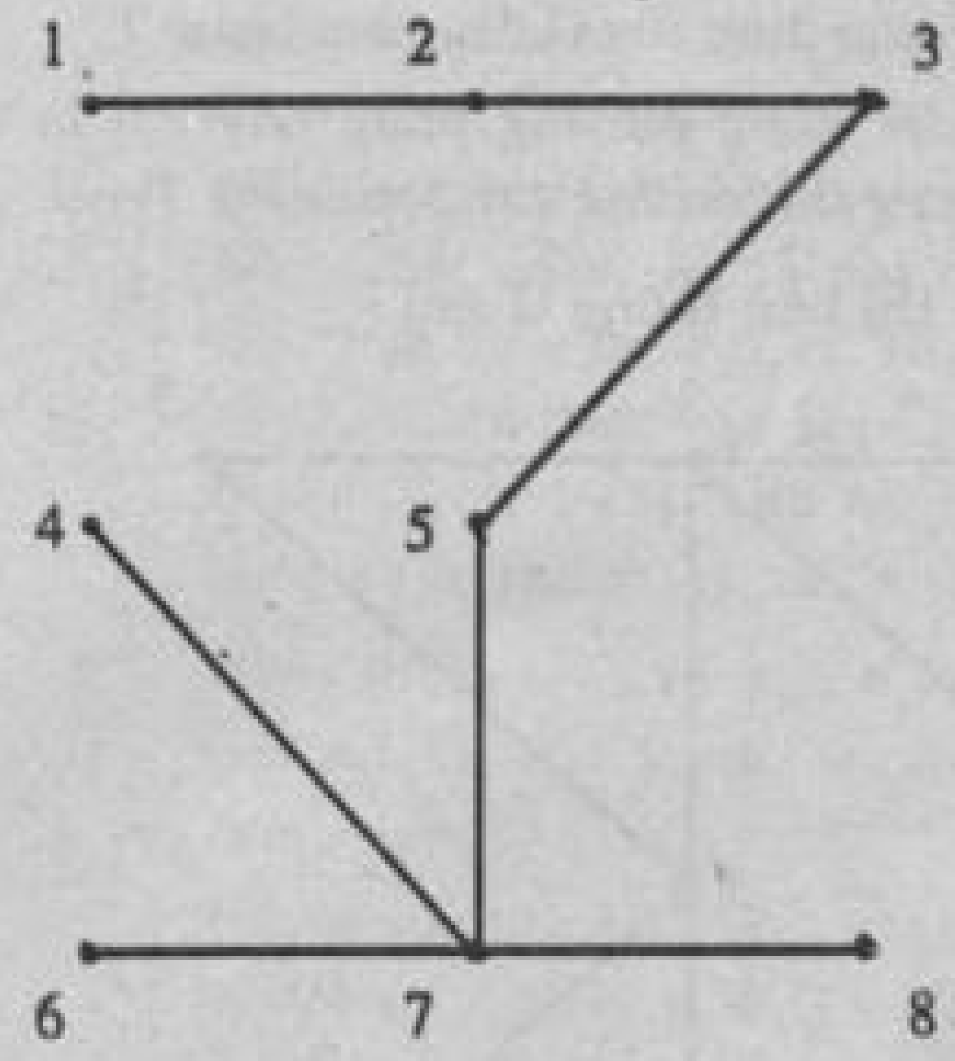
THÍ DỤ 6: Xét đồ thị có trọng số G sau đây:



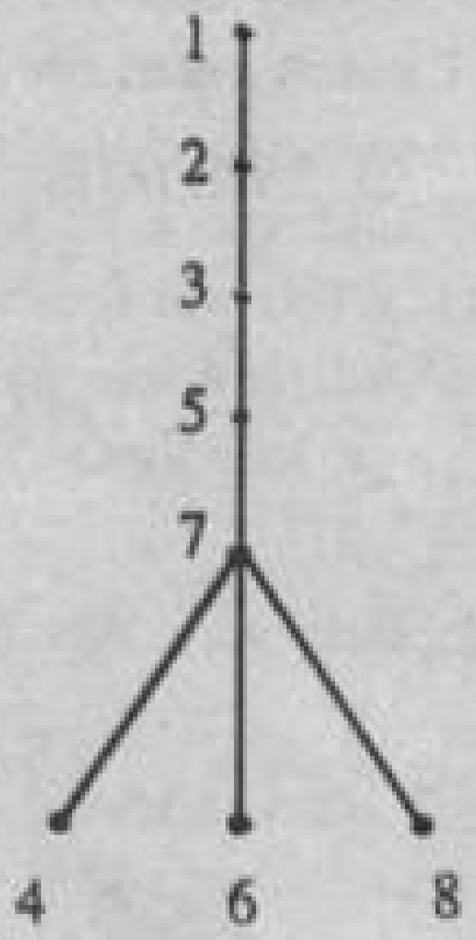
Ta bắt đầu từ cây bao trùm sau của G:

Lấy đỉnh 1 làm gốc,

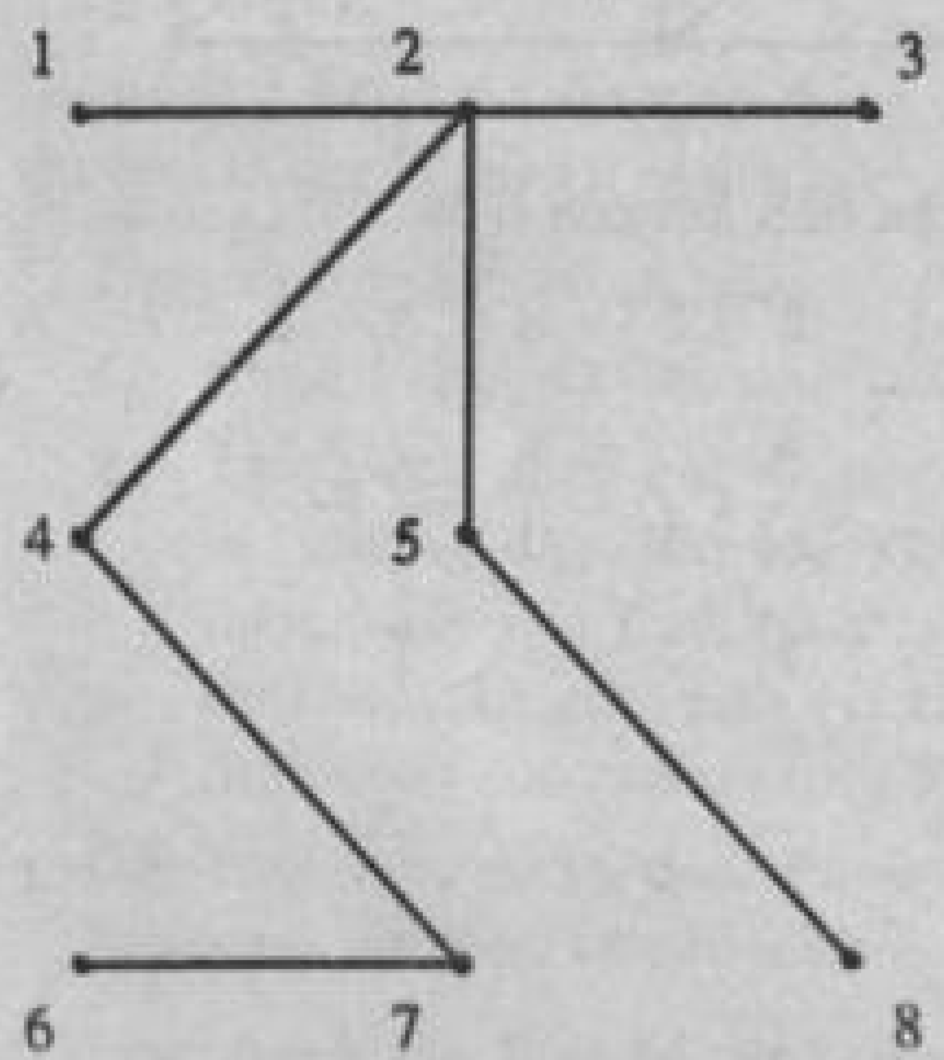
Cây bao trùm tạo theo bề sâu là



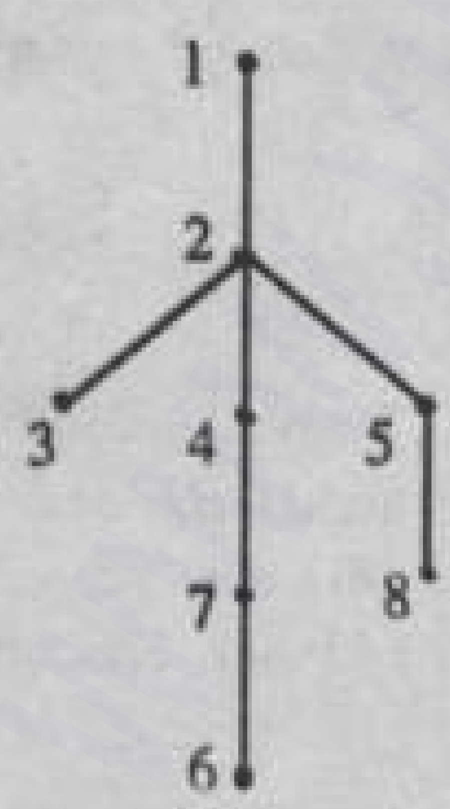
hay



Cây bao trùm tạo theo bề rộng là :



hay



□

Định lý sau đây cho ta tính chất cơ bản, mặc dù đơn giản nhưng rất quan trọng của cây bao trùm.

4.3.4 ĐỊNH LÝ

Coi một cây bao trùm T của đồ thị G.

Thêm vào T một cạnh của G (không thuộc T), ta được 1 chu trình trong T. Hủy 1 cạnh bất kỳ trên chu trình này khỏi T, ta nhận được 1 cây bao trùm mới của G.

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

Ta suy ra được ngay kết quả sau :

4.3.5 GIẢI THUẬT KIỂM TRA TÍNH LIÊN THÔNG

Xét 1 đồ thị G.

Áp dụng giải thuật tìm cây bao trùm đã trình bày ở trên vào G. Khi giải thuật dừng,

- Nếu T chứa mọi đỉnh của G (nghĩa là điều kiện dừng nêu ở bước 2 thỏa) thì G liên thông (và T là 1 cây bao trùm của G).
- Nếu T không chứa mọi đỉnh của G (nghĩa là ở lần sau cùng thực hiện bước 2, không tìm được cạnh nào nối 1 đỉnh trong T với 1 đỉnh ngoài T) thì G không liên thông (và T là cây bao trùm của 1 thành phần của G).

4.4 CÂY BAO TRÙM NHỎ NHẤT

4.4.1 ĐỊNH NGHĨA

Cho 1 đồ thị G. Giả sử mỗi cạnh của G được gán với 1 số gọi là trọng số *(weight)* của cạnh ấy. Thì G được gọi là một đồ thị có trọng số *(weighted graph)*.

Tổng trọng số tất cả các cạnh của 1 đường (chu trình, đồ thị con) gọi là trọng số của đường (chu trình, đồ thị con) ấy.

Ta ký hiệu trọng số của cạnh e (đồ thị G) là c(e) (c(G)).

Bài toán đặt ra là đi tìm 1 cây bao trùm có trọng số nhỏ nhất *(minimal spanning tree : MST)* của 1 đồ thị có trọng số liên thông.

ở ngoài T. Vì T liên thông nên tồn tại 1 đường trong G nối v với w, đường này nối $v \in T$ với $w \notin T$ nên phải chứa ít nhất 1 cạnh có tính chất mong muốn, nghĩa là nó nối 1 đỉnh $v' \in T$ với đỉnh $w' \notin T$. Vậy bước 3 luôn luôn thực hiện được cho đến khi mọi đỉnh của G đều nằm trong T.

Để chứng minh b), ta chỉ cần chứng minh rằng sau mỗi lần thực hiện bước 3, đồ thị T nhận được 1 cây. Gọi T_k là đồ thị nhận được sau khi thực hiện bước 3 lần thứ k. Hiển nhiên T_0 là 1 cây. Giả sử T_k là cây và sau khi thực hiện bước 3 lần thứ k + 1, ta đã thêm vào T_k cạnh mới $\overline{v_k w_{k+1}}$ trong đó $v_k \in T_k$ và $w_{k+1} \notin T_k$.

Giả sử T_{k+1} có 1 chu trình thì chu trình này phải chứa cạnh $\overline{v_k w_{k+1}}$.

Hủy cạnh này khỏi chu trình, ta được 1 đường trong T_k nối v_k với w_{k+1}: vô lý vì $w_{k+1} \notin T_k$. Vậy T_{k+1} không có chu trình. Hơn nữa dễ thấy rằng T_{k+1} có k + 1 cạnh và k + 2 đỉnh. Vậy T_{k+1} là 1 cây. □

4.3.3 DFS VÀ BFS

Giải thuật nêu trên được áp dụng để tìm cây bao trùm của 1 đồ thị liên thông G theo 2 cách :

1. Phép duyệt theo bề sâu *(Depth-First Search)*:
   1. Chọn 1 đỉnh bất kỳ của G làm gốc của T.
   2. Tạo 1 đường từ gốc đi qua các đỉnh không trong T, kéo dài đường này đến khi không thể kéo dài thêm. Đặt đường này vào T rồi quay trở về đỉnh ngay trước đó, xem đỉnh này là gốc. Lập lại thủ tục này cho đến khi mọi đỉnh của G đều nằm trong T.

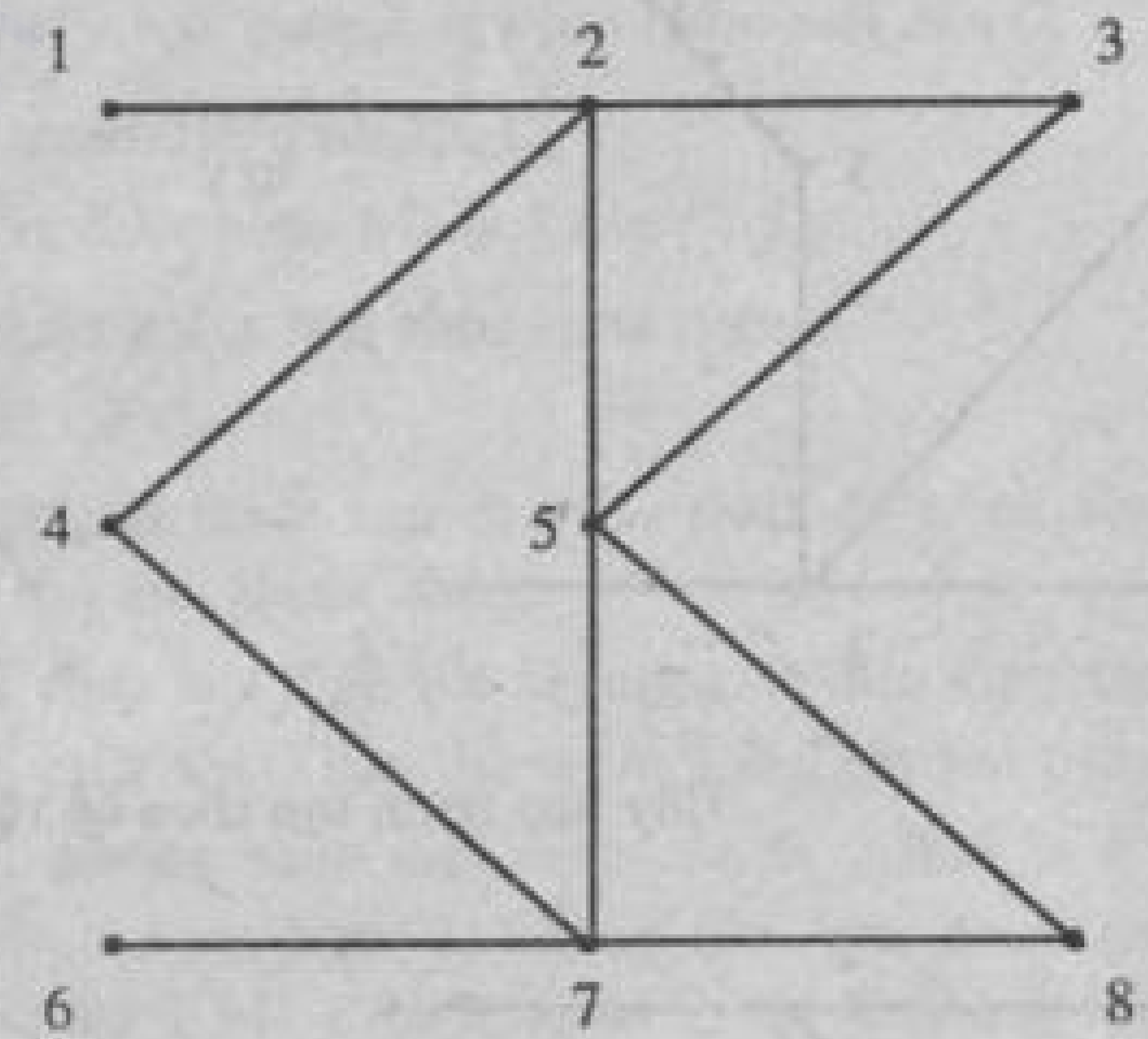
   Cây bao trùm nhận được bằng phương pháp này gọi là cây bao trùm tạo theo bề sâu *(Depth-First Spanning Tree)*.

2. Phép duyệt cây theo bề rộng *(Breadth-First Search)*:
   1. Chọn 1 đỉnh bất kỳ của G làm gốc của T.

   2. Đặt mọi cạnh nối gốc với 1 đỉnh ngoài T vào T. Lần lượt xét từng đỉnh con của gốc, xem đỉnh này là gốc mới. Lập lại thủ tục này cho đến khi mọi đỉnh của G đều nằm trong T.

   Cây bao trùm nhận được bằng phương pháp này gọi là cây bao trùm tạo theo bề rộng *(Breadth-First Spanning Tree)*.

THÍ DỤ 5: Coi đồ thị liên thông G sau :



Ma trận liên kết của G là :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & & & & & \\
1 & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & & 1 & \\
 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 1 &
\end{array}\right]
\end{array}$$

và thứ tự các đỉnh của cây con bên phải của A là : F C

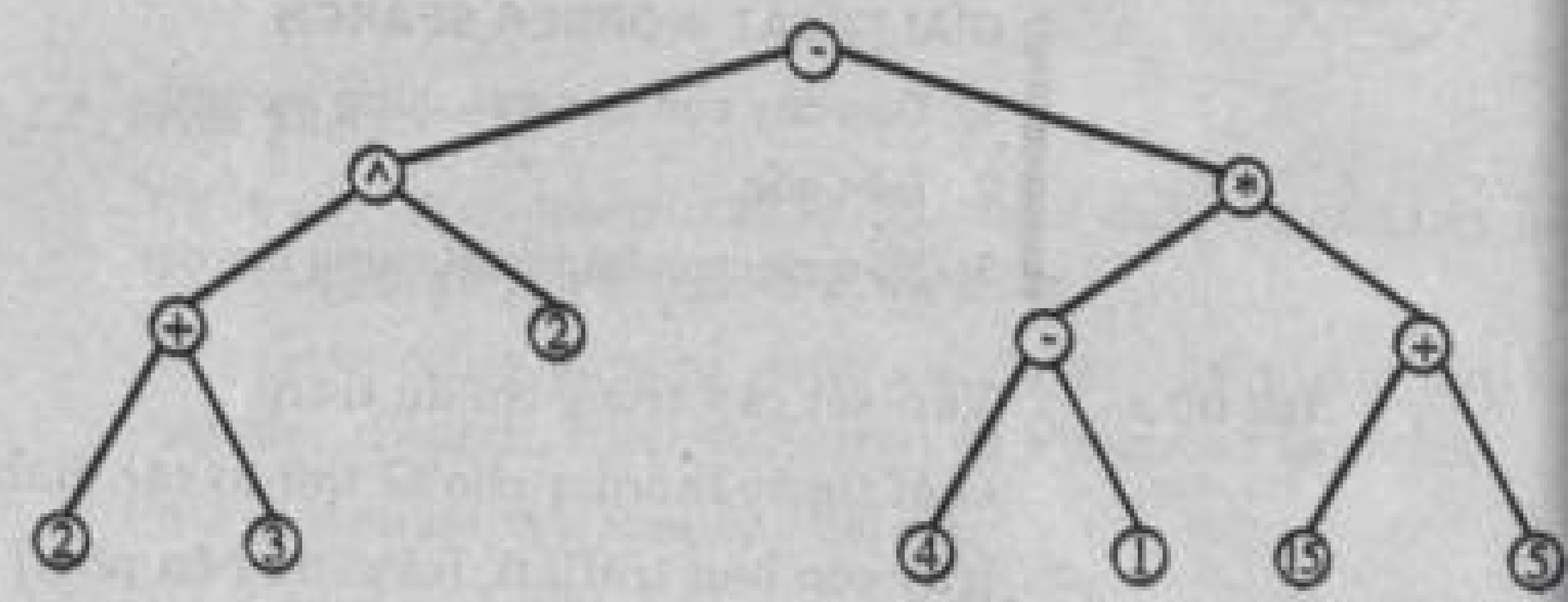
Vậy kết quả : D E B F C A. □

4.2.3 KÝ PHÁP NGHỊCH ĐẢO BA LAN

Xét biểu thức đại số sau :

$$E = (2 + 3)\text{^}2 - (4 - 1) * (15 + 5)$$

Cây nhị phân sau đây cho ta thấy cách tính trị của E:



Trên 1 máy tính sử dụng logic RPN, để tính trị của E, ta phải đưa vào máy các dữ liệu theo thứ tự sau :

2 3 + 2^4 1 – 15 5 + * –

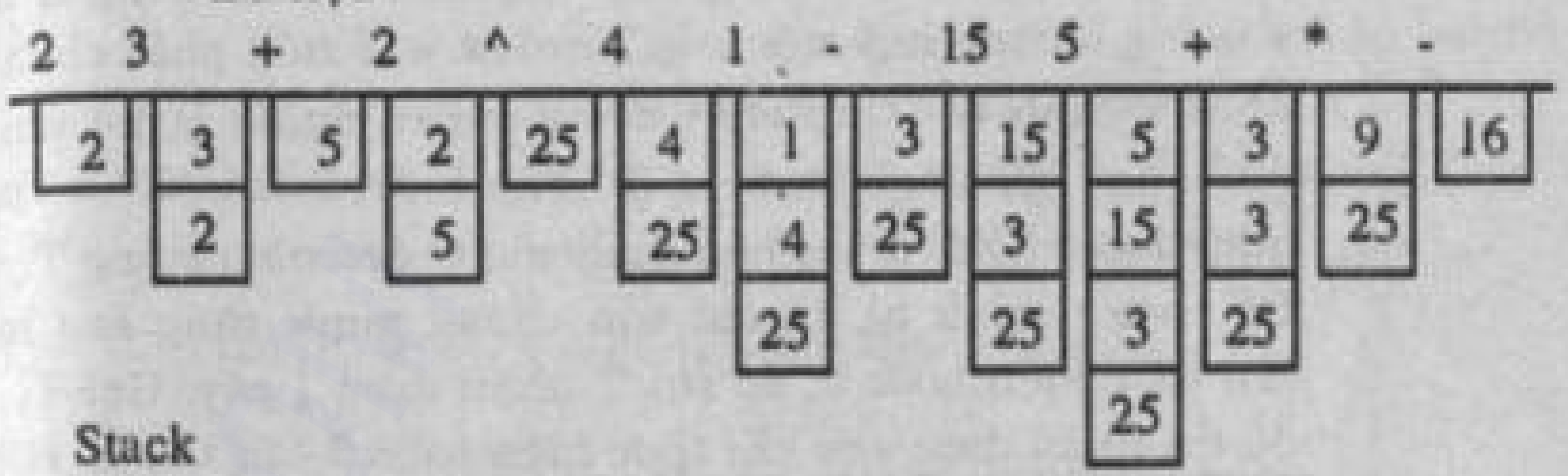
Dạng thức trên gọi là ký pháp nghịch đảo Balan *(Reverse Polish notation)*, gọi tắt là RPN của biểu thức của E.

Nhận xét rằng nếu áp dụng giải thuật Postorder search vào cây vẽ ở trên thì được kết quả chính là biểu thức RPN của E.

Ta hãy xem máy tính đã tính ra trị của E như thế nào:

Máy lưu giữ các con số trong stack, mỗi khi 1 phép toán được đưa vào máy thì máy sẽ thực hiện phép toán này với 2 toán hạng là 2 số lấy từ stack ra rồi lại đẩy kết quả vào stack, cứ như thế cho đến khi có kết quả sau cùng.

Hình vẽ sau đây minh họa cách làm của máy:



4.3 CÂY BAO TRÙM

4.3.1 ĐỊNH NGHĨA

Cho 1 đồ thị vô hướng G. Một cây T gọi là 1 cây bao trùm *(spanning tree)* của G nếu T là 1 đồ thị con chứa mọi đỉnh của G.

4.3.2 ĐỊNH LÝ

Đồ thị G có cây bao trùm nếu và chỉ nếu G liên thông.

CHỨNG MINH

Phần thuận là hiển nhiên.

Ta chứng minh phần đảo. Coi đồ thị liên thông G.

Xét giải thuật xây dựng đồ thị con T của G sau đây :

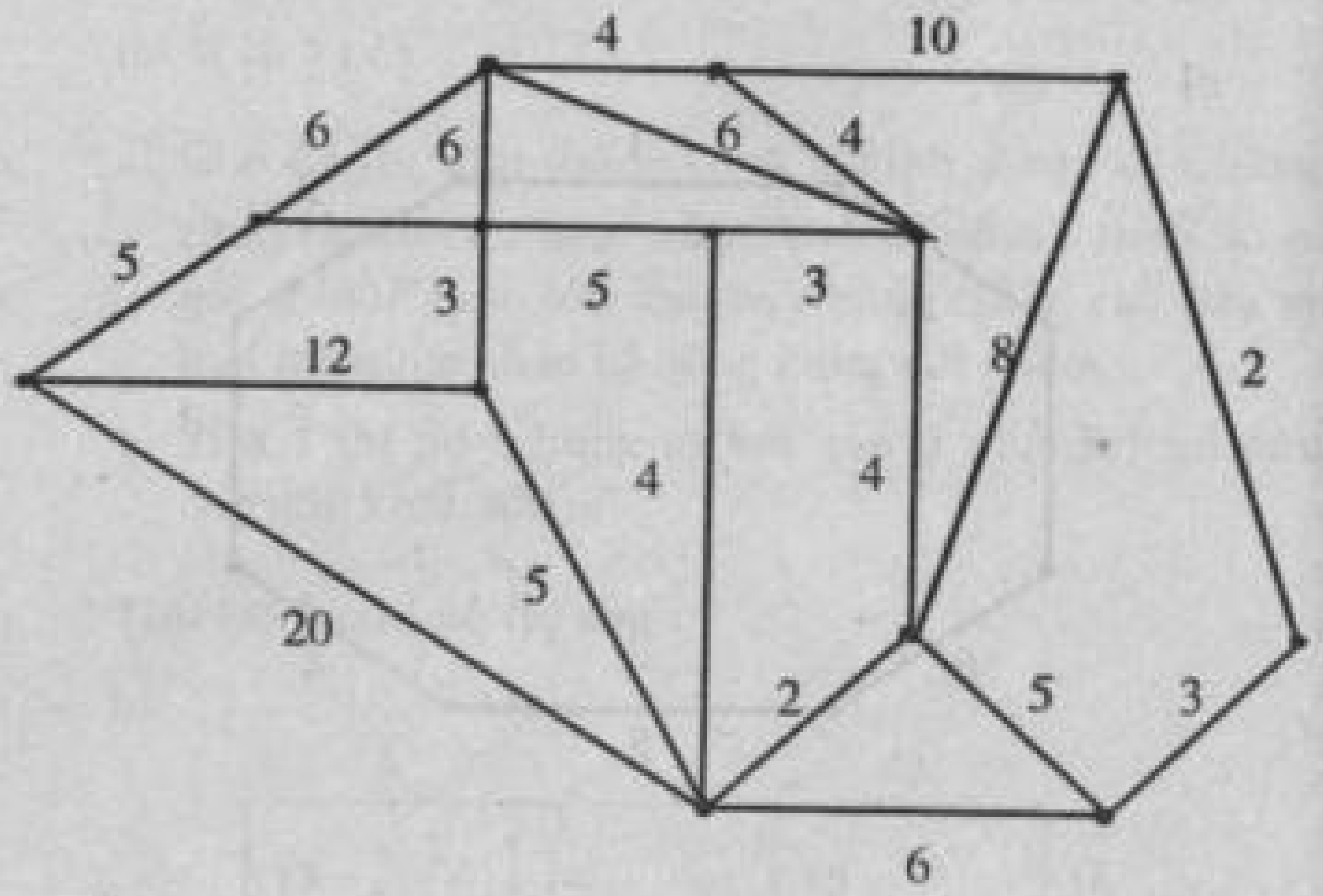
1. Chọn tùy ý 1 đỉnh của G đặt vào T.
2. Nếu mọi đỉnh của G đều đã nằm trong T thì dừng.
3. Nếu không, tìm 1 đỉnh của G không nằm trong T mà có thể nối nó với 1 đỉnh của T bằng 1 cạnh. Thêm đỉnh và cạnh này vào T. Trở về bước 2.

Ta sẽ chứng minh 2 điều :

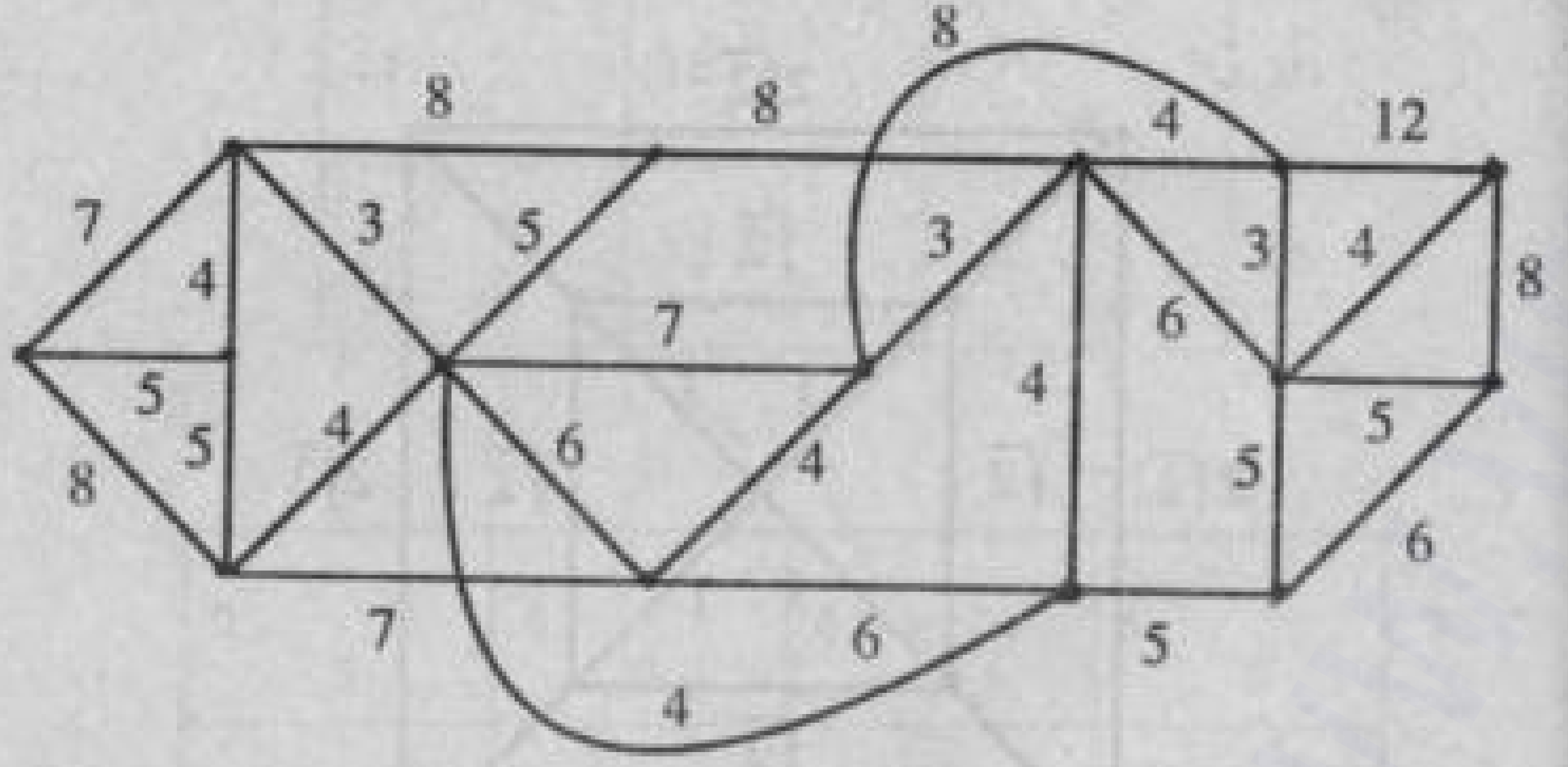
a) Bước 3 khả thi, nghĩa là nếu T chưa chứa hết mọi đỉnh của G, ta luôn luôn tìm được 1 cạnh nối 1 đỉnh trong T với 1 đỉnh ở ngoài T.

b) Khi giải thuật kết thúc thì T là 1 cây bao trùm của G.

Để chứng minh a), gọi v là 1 đỉnh ở trong T và w là 1 đỉnh e)



f)



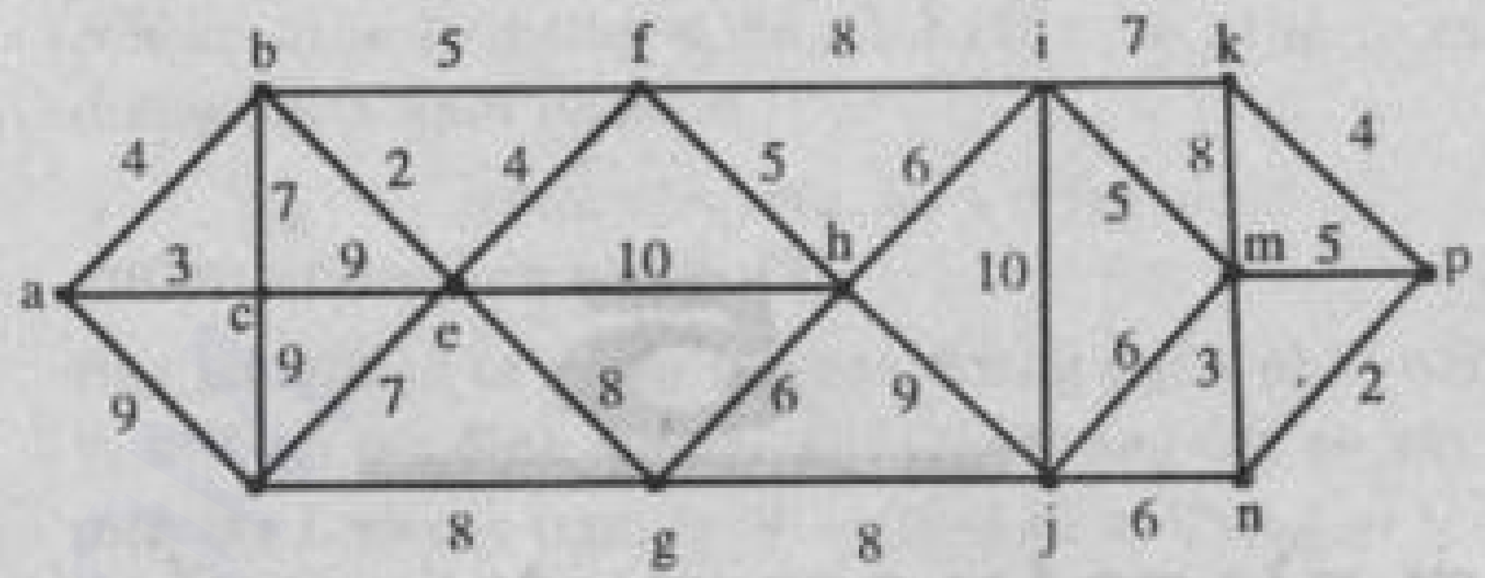
23. Trình bày 1 giải thuật tìm cây bao trùm lớn nhất.

Áp dụng: Tìm cây bao trùm lớn nhất của các đồ thị ở bài tập 1.

24. Trình bày 1 giải thuật tìm cây bao trùm nhỏ nhất chứa 1 cạnh cho trước.

Áp dụng : Tìm cây bao trùm nhỏ nhất chứa cạnh $\overline{km}$ của

đồ thị sau :



25. Chứng minh rằng nếu trọng số các cạnh của 1 đồ thị liên thông G đôi một khác nhau thì G có 1 MST duy nhất.

26. Xét đơn đồ thị đầy đủ G gồm n đỉnh {0, 1, 2, ..., n – 1}. Giả sử trọng số của cạnh $\overline{ij}$ là $|i - j|$. Tìm 1 MST của G.

27. Làm lại bài tập 26, với trọng số của cạnh $\overline{ij}$ bây giờ là $i + j$.

28. Xây dựng cây mã Huffman cho tập ký hiệu sau :

Ký hiệu	A	B	C	D	E	F	G	H
Tần suất	6	25	20	8	10	19	3	9

5

☑ BÀI TOÁN CON ĐƯỜNG NGẮN NHẤT

5.1 GIỚI THIỆU BÀI TOÁN

Cho một đơn đồ thị có hướng liên thông có trọng số $G = (V, E)$, trọng số của mỗi cạnh ở đây được giả sử ≥ 0 và được xem như chiều dài của cạnh ấy.

Bài toán đặt ra là đi tìm con đường ngắn nhất nối 2 đỉnh cho trước của đồ thị.

Xét 2 đỉnh $u, v \in V$. Nếu có cạnh $e = \overrightarrow{uv} \in E$ nối u với v thì ta đặt

$$c(u, v) = c(e) = \text{chiều dài cạnh } e$$

Nếu không có cạnh nào nối u với v thì ta đặt $c(u, v) = \infty$

Lưu ý rằng $c(u,u) = \infty$ với mọi $u \in V$.

Đặt $c^*(u, v)$ =chiều dài con đường ngắn nhất (gồm ít nhất một cạnh) nối u với v.

Nhận xét rằng :

$c^*(u, u) < \infty \Leftrightarrow$ có 1 chu trình trong G chứa u.

$c^*(u, u) = \infty \ \forall u \in V \Leftrightarrow$ G không có chu trình.

5.2 GIẢI THUẬT DIJKSTRA

Trước hết , ta chú ý đến một tính chất rất quan trọng của con đường ngắn nhất nêu trong định lý sau :

5.2.1 ĐỊNH LÝ

Nếu u...w...v là đường ngắn nhất thì v...w và w...v cũng là đường ngắn nhất và ta có :

$$c^*(u, v) = c^*(u, w) + c^*(w, v)$$

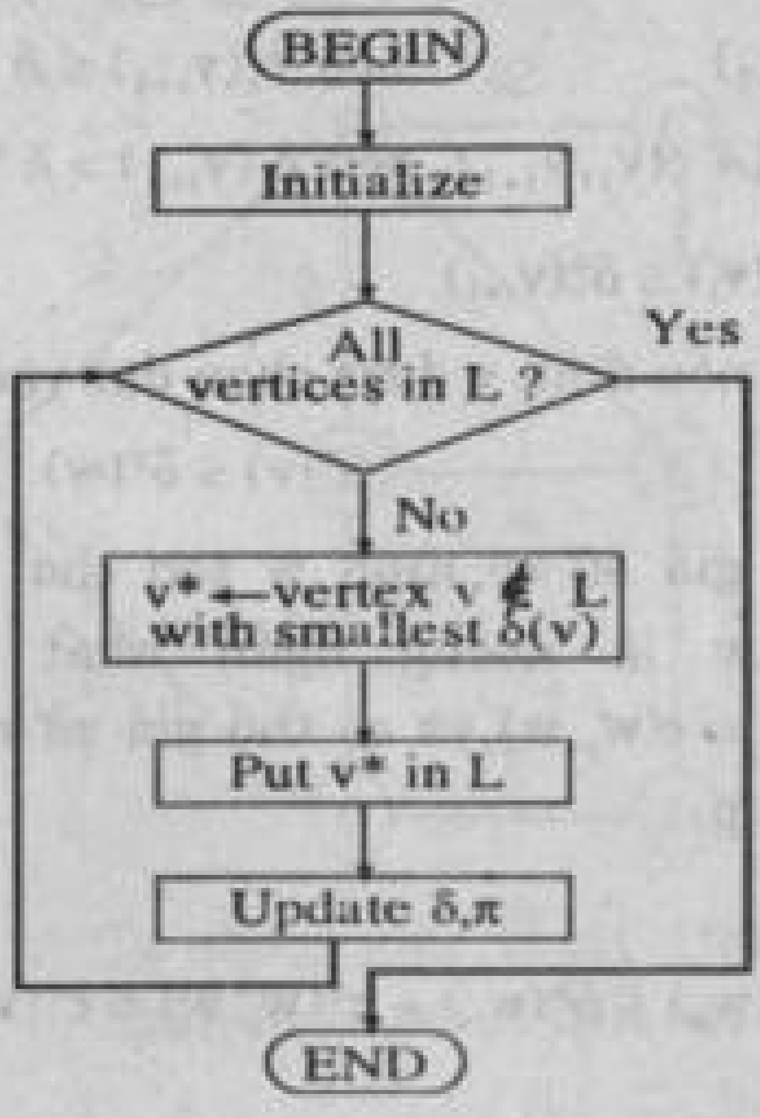
CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

Bây giờ giả sử ta muốn tìm con đường ngắn nhất nối đỉnh $v_0 \in V$ với các đỉnh còn lại. Giải thuật sau đây sẽ xây dựng một cây L và các hàm δ: $V \to [0,\infty]$ và π: $V \backslash \{v_0\} \to V$

5.2.2 GIẢI THUẬT DIJKSTRA

1. Đặt $L = \{v_0\}$, $\delta(v_0) = 0$. Với $v \in V - \{v_0\}$
   đặt $\delta(v) = c(v_0, v)$ và $\pi(v) = v_0$
2. Nếu mọi đỉnh của G đều thuộc L thì dừng.
3. Nếu không, chọn $v \notin L$ sao cho $\delta(v)$ nhỏ nhất.
   Đặt $v^* = v$. Đưa thêm đỉnh v^* và cạnh $\overrightarrow{\pi(v^*)v^*}$ vào L
4. Với mọi $w \in V \backslash L$, nếu $\delta(w) > \delta(v^*) + c(v^*,w)$
   thì đặt $\delta(w) = \delta(v^*) + c(v^*,w)$ và $\pi(w) = v^*$
   Trở về bước 2.

Sơ đồ khối của giải thuật Dijkstra là :



6.1.5 HỆ LUẬN

Với mọi hàm tải φ và mọi phép cắt a – z $(P, \overline{P})$, trong mạng G
$|\varphi| = c(P, \overline{P})$ nếu và chỉ nếu 2 điều kiện sau thỏa :

i) $\forall e \in (\overline{P}, P), \quad \varphi(e) = 0$

ii) $\forall e \in (P, \overline{P}), \quad \varphi(e) = c(e)$

Hơn nữa, khi $|\varphi| = c(P, \overline{P})$ thì φ là hàm tải có tải trọng lớn nhất và $(P, \overline{P})$ là phép cắt a – z có trọng số nhỏ nhất.

Một dây chuyền *(chain)* a–z trên mạng G là 1 đường vô hướng nối a với z.

Cho 1 hàm tải φ trên mạng G.

Với mỗi cạnh e trong G, đặt $s(e) = c(e) - \varphi(e)$ và gọi đại lượng này là độ lệch tải *(slack)* của e đối với φ.

Nếu $s(e) = 0$ thì ta nói cạnh e bão hòa *(saturated)* đối với φ.

Xét một dây chuyền a-z K trên G. Ta định nghĩa hàm :

$$\varphi_K : E \to \{-1, 0, 1\}$$

như sau :

$$\varphi_K(e) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } e \notin K \\ 1 & \text{nếu } e \in K \text{ và có hướng từ a đến z} \\ -1 & \text{nếu } e \in K \text{ và có hướng từ z đến a} \end{cases}$$

Giải thuật sau đây xây dựng một hàm tải tối đại trên một mạng G.

6.1.6 GIẢI THUẬT FORD-FULKERSON (Augmenting Flow Algorithm)

Bắt đầu bằng một hàm tải φ trên G (chẳng hạn có thể đặt $\varphi(e) = 0$ với mọi cạnh e).

1. Mọi đỉnh đều chưa xét *(scan)* và chưa có nhãn *(label)*.
   Gán nhãn cho đỉnh a là $(-, \Delta(a))$ với $\Delta(a) = \infty$.

Đặt $p_0 = a$.

2. Xét p_0. Thực hiện thủ tục ghi nhãn cho các đỉnh kề với p_0 như sau :

   a) Với mỗi cạnh $e = \overrightarrow{p_0 q}$ sao cho q chưa có nhãn và $s(e) > 0$ thì gán nhãn cho đỉnh q là $(p_0^+, \Delta(q))$, trong đó $\Delta(q) = \min(\Delta(p_0), s(e))$.

   b) Với mỗi cạnh $e = \overrightarrow{q p_0}$ sao cho q chưa có nhãn và $\varphi(e) > 0$ thì gán nhãn cho đỉnh q là $(p_0^-, \Delta(q))$, trong đó $\Delta(q) = \min(\Delta(p_0), \varphi(e))$.

3. Nếu đỉnh z đã được ghi nhãn thì qua bước 4, nếu không thì qua bước 5.

4. Dùng thành phần thứ nhất của nhãn để tìm dây chuyền a–z K bằng cách đi ngược *(backtracking)* từ z về a.

   $$\text{Đặt } \varphi = \varphi + \Delta(z).\varphi_K$$

   Quay về bước 1.

5. Tìm 1 đỉnh p đã có nhãn nhưng chưa xét. Nếu tồn tại một đỉnh p như vậy thì đặt $p_0 = p$. Quay về bước 2.

   Nếu không tồn tại đỉnh p nào như vậy thì đặt P là tập hợp gồm tất cả các đỉnh đã có nhãn (và đã xét), ta sẽ có phép cắt a–z $(P, \overline{P})$. Dừng giải thuật.

   Sơ đồ khối của giải thuật Ford–Fulkerson là :

trong đó $\overline{P} = V \setminus P$.

Phép cắt $(P, \overline{P})$ gọi là 1 phép cắt a – z nếu $a \in P$ và $z \in \overline{P}$.

6.1.2 ĐỊNH LÝ

Gọi φ là 1 hàm tải trên mạng G và $P \subset V \setminus \{a,z\}$

Thì :

$$\sum_{e \in (\overline{P},P)} \varphi(e) = \sum_{e \in (P,\overline{P})} \varphi(e)$$

CHỨNG MINH

Ta có :

$$\sum_{x \in P} \sum_{e \in In(x)} \varphi(e) = \sum_{x \in P} \sum_{e \in Out(x)} \varphi(e)$$

Nếu cạnh e có 2 đỉnh cùng nằm trong P thì số hạng $\varphi(e)$ xuất hiện ở cả hai vế của đẳng thức trên. Đơn giản các số hạng $\varphi(e)$ như thế đi, ta còn lại đẳng thức

$$\sum_{e \in (\overline{P},P)} \varphi(e) = \sum_{e \in (P,\overline{P})} \varphi(e) \qquad \square$$

6.1.3 ĐỊNH LÝ

Với mọi hàm tải φ trên mạng G, lượng tải khỏi a bằng lượng tải vào z, nghĩa là :

$$\sum_{e \in Out(a)} \varphi(e) = \sum_{e \in In(z)} \varphi(e)$$

CHỨNG MINH

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử G không chứa cạnh $\overrightarrow{az}$. Đặt $P = V \setminus \{a, z\}$, thì :

$$\sum_{e \in Out(a)} \varphi(e) = \sum_{e \in (\overline{P},P)} \varphi(e) = \sum_{e \in (P,\overline{P})} \varphi(e) = \sum_{e \in In(z)} \varphi(e) \qquad \square$$

Ta định nghĩa tải trọng *(value)* $|\varphi|$ của hàm tải φ là lượng tải khỏi a (và cũng là lượng tải vào z).

Ta sẽ khảo sát bài toán đi tìm hàm tải có tải trọng lớn nhất.

Hiển nhiên: $|\varphi| \le \sum_{e \in Out(a)} c(e) = \sum_{e \in In(a)} c(e)$

Với mỗi phép cắt $(P,\overline{P})$, ta định nghĩa trọng số *(capacity)* của phép cắt này là :

$$c(P, \overline{P}) = \sum_{e \in (P,\overline{P})} c(e)$$

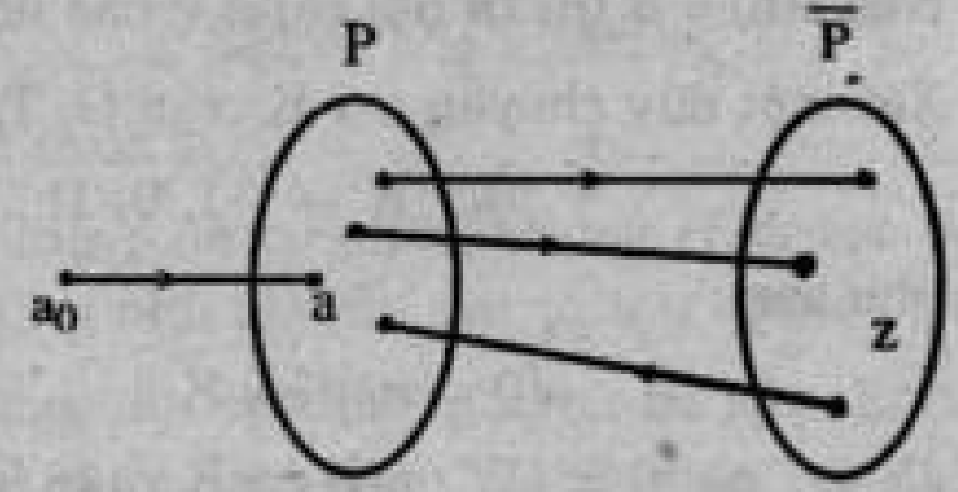
6.1.4 ĐỊNH LÝ

Với mọi hàm tải φ và với mọi phép cắt a – z $(P, \overline{P})$ trong mạng G, ta có : $|\varphi| \le c(P, \overline{P})$

CHỨNG MINH

Thêm vào G đỉnh mới a_0 và cạnh mới $\overrightarrow{a_0a}$ với $c(\overrightarrow{a_0a}) = \infty$ thành mạng G' (với đỉnh phát a_0 và đỉnh thu z).

Trong G', đặt : $\varphi'(\overrightarrow{a_0a}) = |\varphi|$ và $\varphi'(e) = \varphi(e)$, $\forall e \in E$.



Ta có :

$$|\varphi| = |\varphi'| \le \sum_{e \in (\overline{P} \cup \{a_0\},P)} \varphi'(e) = \sum_{e \in (P,\overline{P} \cup \{a_0\})} \varphi'(e) = \sum_{e \in (P,\overline{P})} \varphi(e)$$

$$\le \sum_{e \in (P,\overline{P})} c(e) = c(P,\overline{P}) \qquad \square$$

Suy ra ngay kết quả sau :

7. Tìm một phản thí dụ chứng tỏ chiều đảo của định lý 5.2.1 sai.

8. Tìm một thí dụ chứng tỏ định lý 5.2.1 sai nếu không có điều kiện trọng số tất cả các cạnh của đồ thị đều ≥ 0. Suy ra rằng giải thuật Dijkstra không áp dụng được cho những đồ thị có trọng số bất kỳ.

9. Tìm ma trận khả liên R của đồ thị có ma trận liên kết sau :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6

☑ MỘT SỐ ÁP DỤNG

6.1 BÀI TOÁN MẠNG

6.1.1 ĐỊNH NGHĨA

Mạng *(network)* là một đơn đồ thị có hướng có trọng số G = (V, E) trên đó đã chọn 1 đỉnh a gọi là đỉnh phát *(source vertex)* và 1 đỉnh z gọi là đỉnh thu *(sink vertex)*.

Xét một mạng G = (V, E) với đỉnh phát a và đỉnh thu z. Gọi c(e) là trọng số của cạnh e ($c(e) \in N$). Với mỗi đỉnh x, đặt

$$\mathrm{In}(x) = \{e \in E \mid e \text{ tới trong } x\}$$

$$\mathrm{Out}(x) = \{e \in E \mid e \text{ tới ngoài } x\}$$

Một hàm tải *(flow funtion)* trên G là một hàm

$$\varphi: E \to N$$

thỏa các điều kiện sau :

(i) $\varphi(e) \le c(e), \ \forall e \in E.$

(ii) $\varphi(e) = 0 \ , \ \forall e \in \mathrm{In}(a) \cup \mathrm{Out}(z)$

(iii) $\displaystyle\sum_{e \in \mathrm{In}(x)} \varphi(e) = \sum_{e \in \mathrm{Out}(x)} \varphi(e) \ , \ \forall x \in V \setminus \{a,z\}$

Một phép cắt *(cut)* xác định bởi 1 tập hợp con P của V, ký hiệu $(P, \overline{P})$ là tập hợp :

$$(P, \overline{P}) = \{\overrightarrow{xy} \mid x \in P \text{ và } y \in \overline{P}\}$$

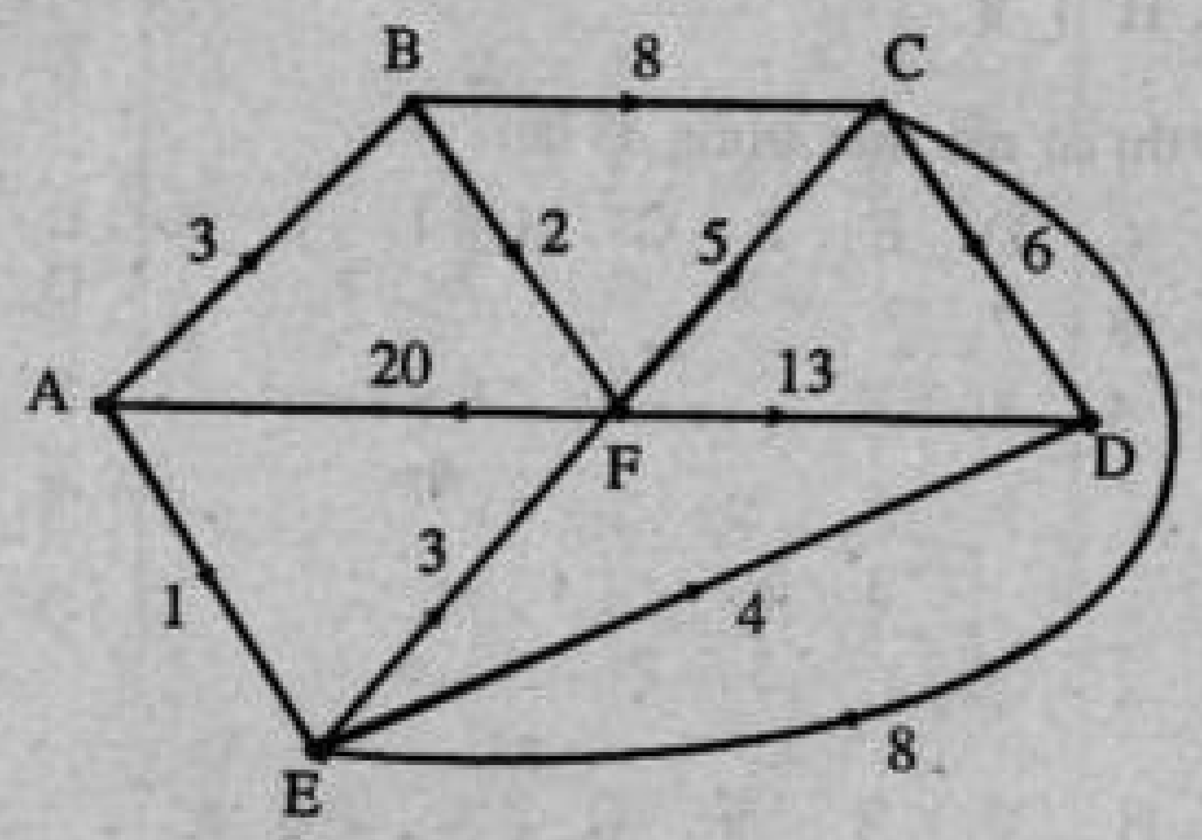
5. Gọi W_k là ma trận xây dựng được ở bước k theo giải thuật Floyd ($1 \le k \le n$).

a) Chứng minh rằng hàng k và cột k trong 2 ma trận W_{k-1} và W_k giống hệt nhau.

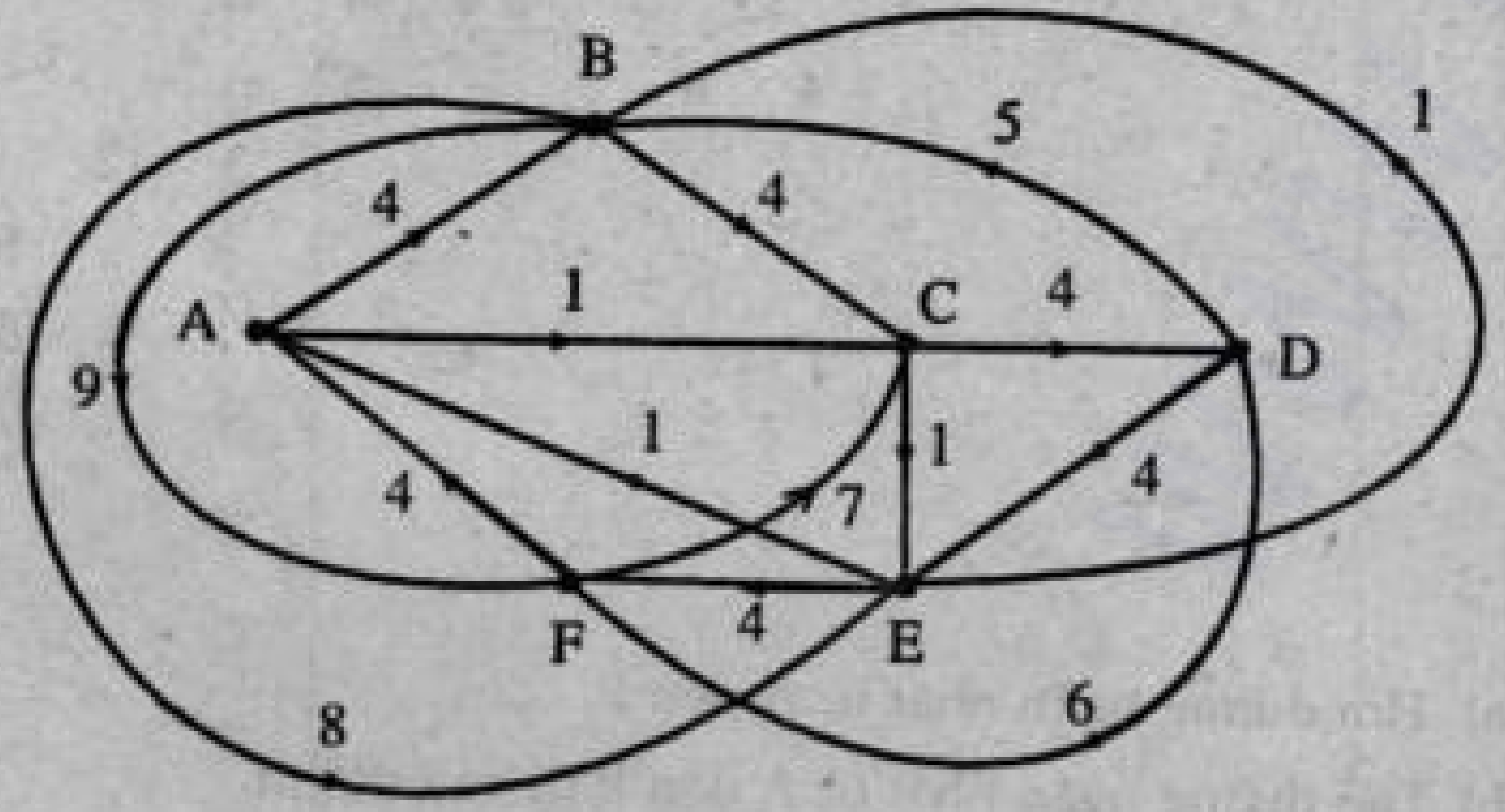
b) Chứng minh rằng nếu trên hàng k (cột k) của W_k có phần tử bằng ∞ thì cột (hàng) chứa phần tử đó trong 2 ma trận W_{k-1} và W_k giống hệt nhau.

6. Áp dụng giải thuật Floyd vào các đồ thị sau để tìm W^* và P^* :

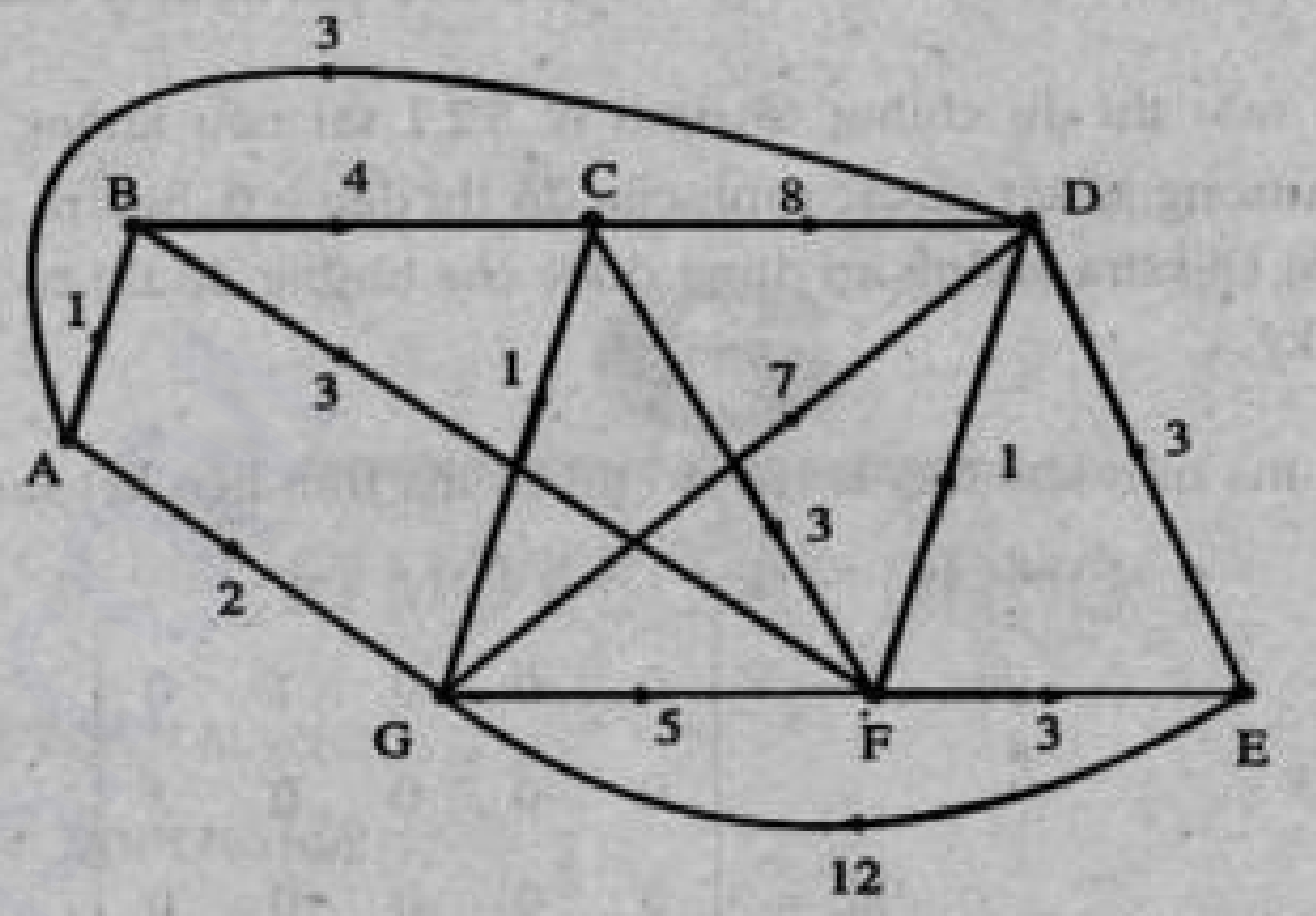
a)



b)



c)



d)

	A	B	C	D	E
A	–	5	8	13	6
B	4	–	7	10	9
C	6	3	–	2	7
D	8	4	5	–	4
E	12	8	13	3	–

e)

	A	B	C	D	E	F
A	–	7	15	8	10	–
B	–	–	8	12	13	15
C	4	10	–	8	8	6
D	8	5	9	–	–	8
E	7	3	–	9	–	9
F	10	8	9	6	3	–

b) Tìm đường ngắn nhất từ A đến Z có chứa cạnh $\overline{HG}$.

c) Tìm đường ngắn nhất từ A đến Z có chứa đỉnh K.

d) Tìm đường ngắn nhất từ A đến Z có chứa cạnh $\overline{IJ}$.

3. Tìm đường ngắn nhất từ B đến các đỉnh khác của đồ thị có ma trận trọng số là (các ô trống là ∞):

a)

	A	B	C	D	E	F	G
A		3	6				
B	3		2	4			
C	6	2		1	4	2	
D		4	1		2		4
E			4	2		2	1
F			2		2		4
G				4	1	4	

b)

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		2	2	2	4			
B	2					1		
C	2				3			1
D	2				4	3		
E	4		3	4			7	
F		1		3			5	
G					7	5		6
H			1				6	

c)

	A	B	C	D	E	F	G	H
A							12	13
B	31				4			
C							4	1
D			3				8	
E						3		
F	2			8				
G								6
H	2							

4. Cho đồ thị có ma trận trọng số là :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P
A		5	8	7											
B			5	4											
C					4				7						
D					3	8									
E						5	7		6						
F								8							
G								3	4	8					
H										4	4	6			
I							4	6			6				
J												3	12		
K														5	
L													4	5	5
M															8
N															9
P															

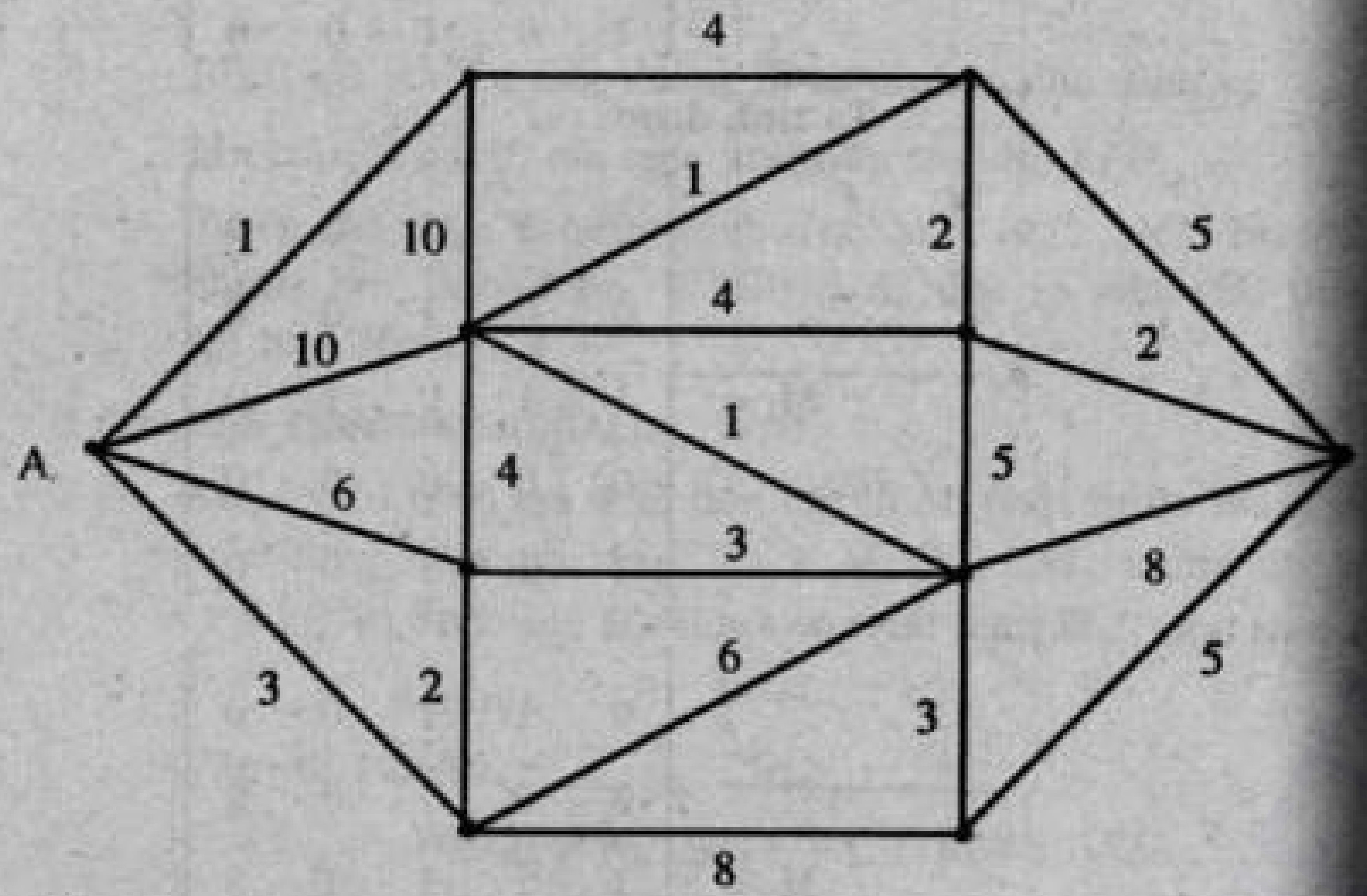
a) Tìm đường ngắn nhất từ A đến P.

b) Tìm đường ngắn nhất từ A đến P đi qua đỉnh I.

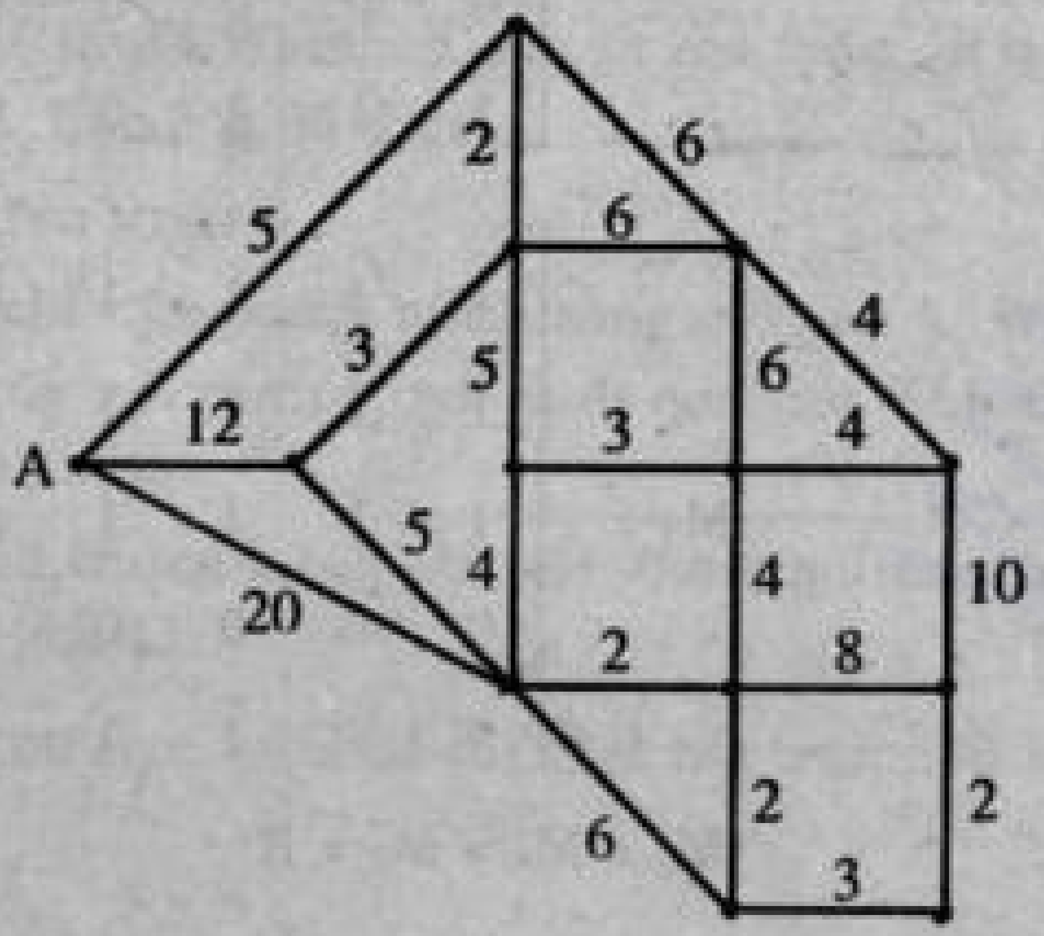
■ BÀI TẬP

1. Dùng giải thuật Dijkstra tìm đường ngắn nhất từ đỉnh A đến các đỉnh còn lại trên các đồ thị sau:

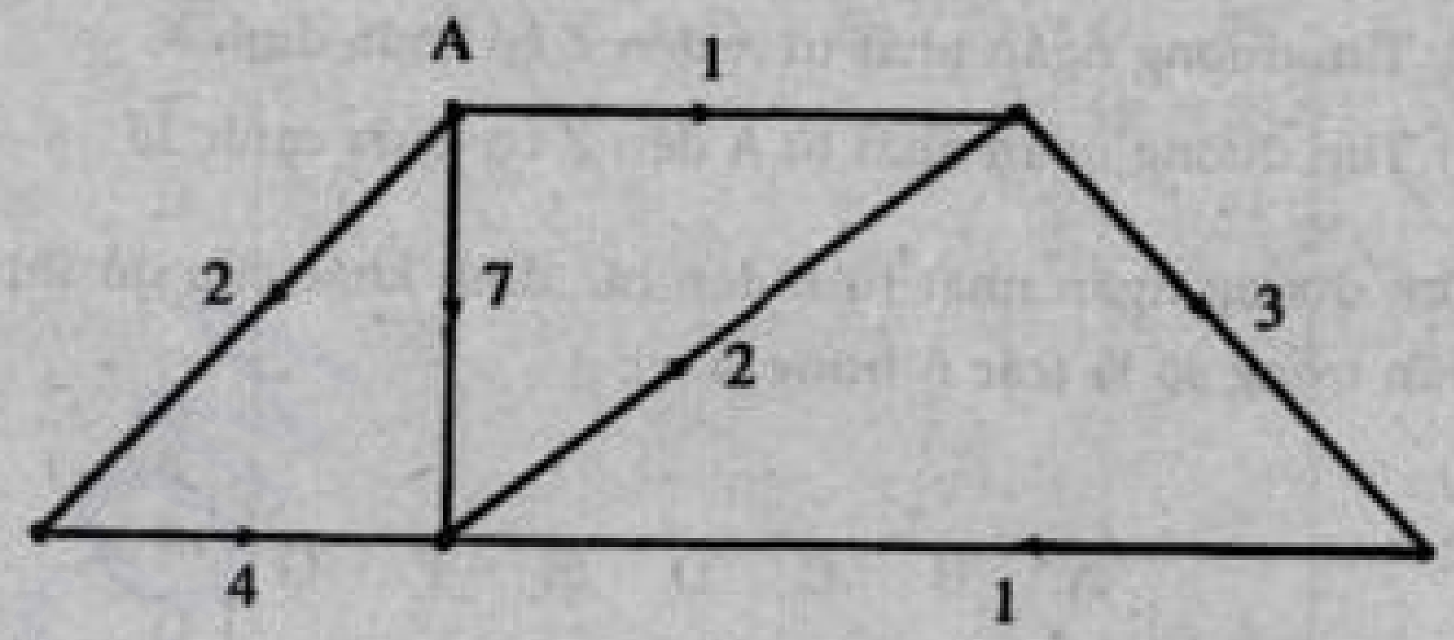
a)



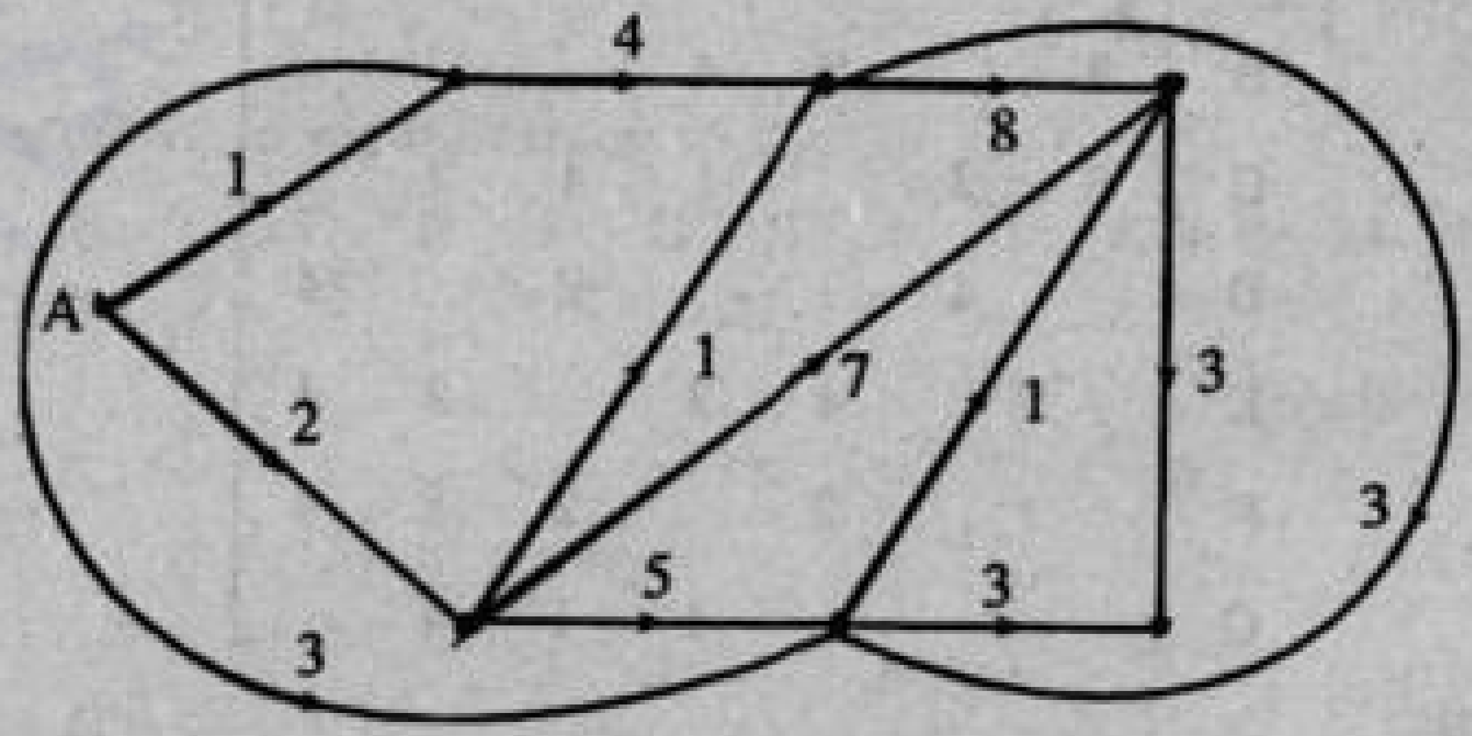
b)



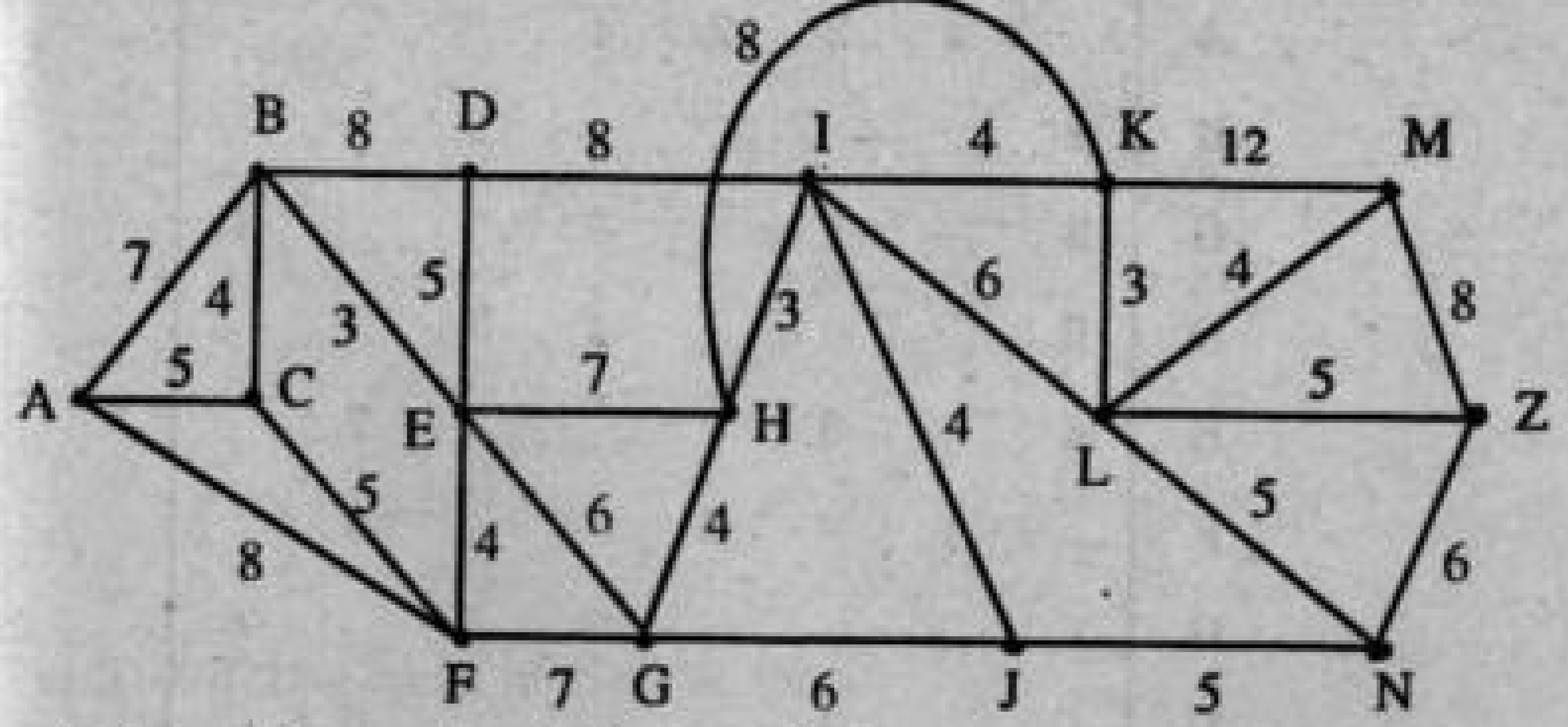
c)



d)



2. Cho đồ thị :



a) Tìm đường ngắn nhất từ A đến Z.

v_k và hơn nữa G lại có cạnh $\overrightarrow{v_k v_j}$. Vậy, có đường chiều dài k+1 đi từ v_i đến v_j. □

Bây giờ, ta đặt: $R = M + M^{(2)} + \ldots + M^{(n)}$

nghĩa là : $R[i,j] = \sum_{k=1}^{n} M^{(k)}[i,j]$ thì hiển nhiên.

$R[i,j] = 1 \Leftrightarrow$ có một đường đi từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j.

Ma trận R gọi là ma trận khả liên của đồ thị G.

Ta có thể tìm R bằng cách tính $M^{(2)}, M^{(3)}, \ldots, M^{(n)}$ rồi cộng chúng lại. Tuy nhiên, Warshall đã đưa ra một giải thuật tốt hơn để tính R.

5.4.3 GIẢI THUẬT WARSHALL

Xét đồ thị G có ma trận liên kết là M. Giải thuật Warshall xây dựng dãy ma trận $W_0 \equiv M, W_1, \ldots, W_n$ trong đó W_k $(1 \le k \le n)$ được xác định dựa vào ma trận W_{k-1} như sau:

Với i từ 1 đến n.

Với j từ 1 đến n

$$W_k[i,j] = W_{k-1}[i,j] + W_{k-1}[i,k].W_{k-1}[k,j]$$

5.4.4 ĐỊNH LÝ

Giải thuật Warshall cho ta ma trận $R = W_n$ là ma trận khả liên của đồ thị G.

CHỨNG MINH

Ta chỉ cần chứng minh rằng với mọi k, $W_k[i,j] = 1 \Leftrightarrow$ có đường nối đỉnh v_i với v_j đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

Phần chứng minh chi tiết (dùng qui nạp trên k) dành cho độc giả. □

THÍ DỤ 6: Coi đồ thị G có ma trận liên kết sau:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta tính được :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$M_3 = M_4 = M_5 = R$ □

Ta tìm được :

$$W^{*}=W_6=\begin{bmatrix} \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dễ thấy rằng đồ thị này không liên thông mạnh (vì có phần tử không nằm trên đường chéo của W^* bằng ∞), nhưng có chu trình (vì có phần tử trên đường chéo của W^* hữu hạn). □

5.4 GIẢI THUẬT WARSHALL

5.4.1 QUAN HỆ KHẢ LIÊN

Xét đơn đồ thị G có tập hợp đỉnh là $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Đỉnh v_j gọi là khả liên *(reachable)* từ đỉnh v_i nếu có một đường đi từ v_i đến v_j. Gọi $M = [m_{ij}]$ là ma trận liên kết của G thì M là một ma trận Boole nghĩa là mỗi phần tử của M đều là 0 hay 1:

$$m_{ij} = 1 \Leftrightarrow \text{có cạnh } \overrightarrow{v_i v_j} \text{ trong G.}$$

Ký hiệu $M^{(2)}$ là tích của ma trận M với chính nó nhưng phép cộng và nhân ở đây là những phép toán trong đại số Boole B = {0, 1} định nghĩa như sau :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

THÍ DỤ 5: Coi:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có $M^{(2)}[i,j] = \sum_{k=1}^{4} m_{ik}.m_{kj}$, và :

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tương tự, ta cũng ký hiệu $M^{(k+1)} = M^{(k)}.M$

5.4.2 ĐỊNH LÝ

Gọi M là ma trận liên kết của một đơn đồ thị G. Thì :

$M^{(k)}[i,j] = 1 \Leftrightarrow$ có một đường chiều dài k đi từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j.

CHỨNG MINH

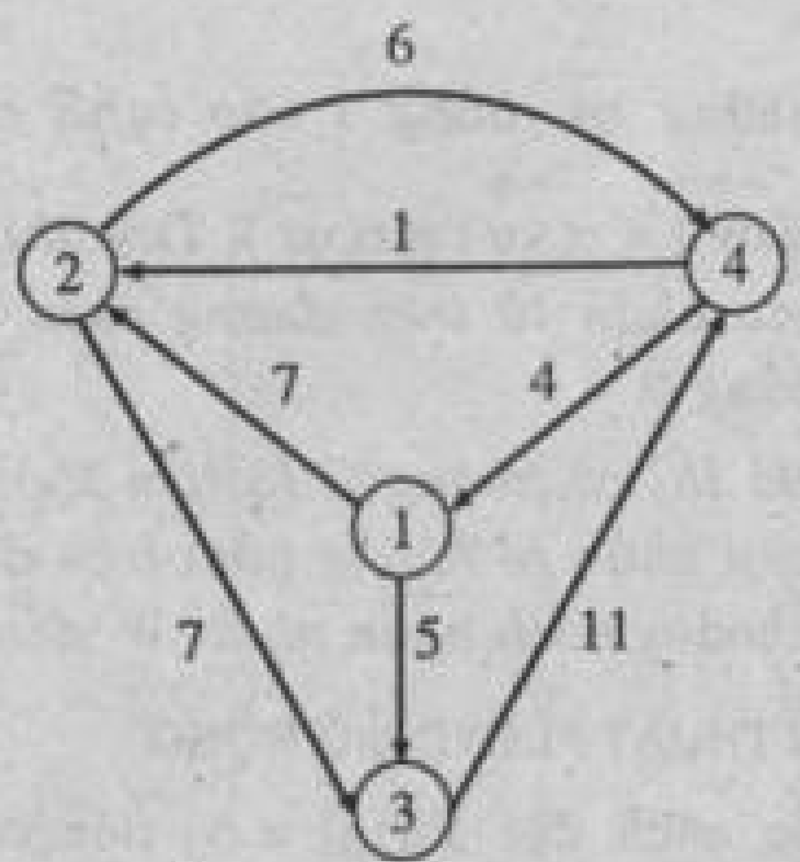
Dùng qui nạp trên k. Kết quả hiển nhiên đúng với k = 1. Giả sử kết quả đúng với k. Ta có :

$$M^{(k+1)}[i,j] = \sum_{k=1}^{n} M^{(k)}[i,k].m_{kj}$$

Rõ ràng $M^{k+1}[i,j] = 1$ nếu và chỉ nếu có ít nhất 1 số hạng trong tổng trên bằng 1, nghĩa là :

$$\exists k,\ M^{(k)}[i,j] = 1 \text{ và } m_{kj} = 1$$

Do giả thiết qui nạp, có một đường chiều dài k đi từ v_i đến



Ta tìm được :

$$W_0 = \begin{bmatrix} & 7 & 5 & \\ & & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 11 & \end{bmatrix} \qquad P_0 = \begin{bmatrix} & 2 & 3 & \\ & & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 3 & \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} & 7 & 5 & \\ & & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 9 & \end{bmatrix} \qquad P_0 = \begin{bmatrix} & 2 & 3 & \\ & & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 1 & \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} & 7 & 5 & 13 \\ & & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} & 2 & 3 & 2 \\ & & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} & 7 & 5 & 13 \\ & & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & 2 & 3 & 2 \\ & & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W^* = W_4 = \begin{bmatrix} 17 & 7 & 5 & 13 \\ 10 & 7 & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad P^* = P_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \square$$

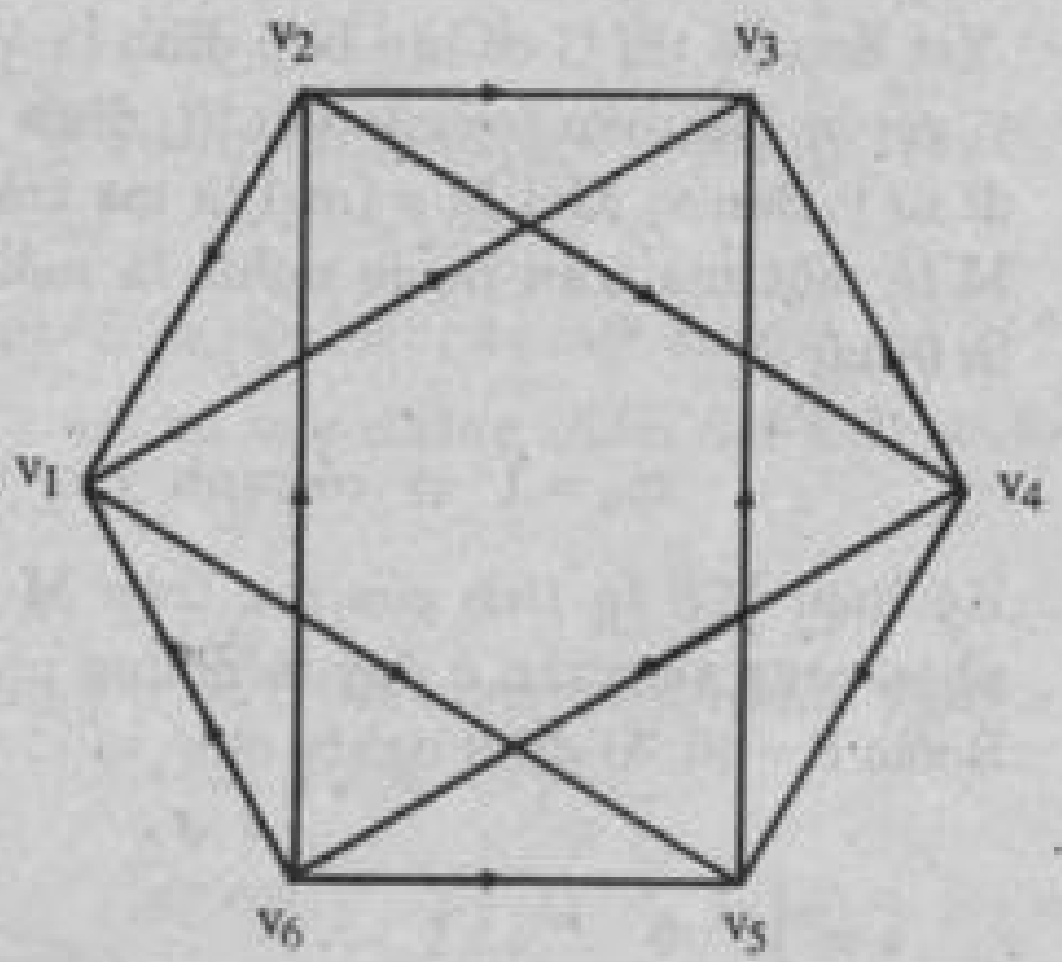
Giải thuật Floyd cũng có thể dùng để tìm quan hệ khả liên *(reachability relation)* của một đồ thị có hướng G: chỉ cần đặt trọng số mỗi cạnh đều là 1, khi đó ma trận W^* tìm được sẽ cho ta biết có đường nối giữa 2 đỉnh hay không:

$$W^*[i,j] < \infty \iff \text{có đường nối từ } v_i \text{ đến } v_j$$

Đặc biệt, $W^*[i,i] < \infty \iff$ có chu trình trong G chứa v_i.

Như vậy ta cũng có thể kiểm tra xem đồ thị có hướng G có chu trình hay không bằng giải thuật Floyd.

THÍ DỤ 4: Áp dụng giải thuật Floyd vào đồ thị



$$W_4 = \begin{bmatrix} & 6 & 10 & 2 & 7 & 13 \\ & & 4 & & 1 & 7 \\ & & & & & 3 \\ & 4 & 8 & & 5 & 11 \\ 2 & 8 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ & 1 & 5 & & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$W_5 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 9 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & 9 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ & & & & & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 10 \\ 2 & 8 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$W^* = W_6 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 9 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Chú ý :

i) Giải thuật Flod có thể áp dụng cho đồ thị vô hướng cũng như đồ thị có hướng: ta chỉ cần thay mỗi cạnh

hướng $\overline{uv}$ bằng 1 cặp cạnh có hướng $\overrightarrow{uv}$ và $\overrightarrow{vu}$ với $c(\overrightarrow{uv}) = c(\overrightarrow{vu}) = c(\overline{uv})$. Tuy nhiên trong trường hợp này, các phần tử trên đường chéo của ma trận W cần đặt bằng 0.

ii) Đồ thị có hướng G là liên thông mạnh nếu và chỉ nếu mọi phần tử không nằm trên đường chéo trong ma trận khoảng cách ngắn nhất W^* đều hữu hạn.

5.3.3 GIẢI THUẬT FLOYD MỞ RỘNG

Bằng cách đặt $P_0[i,j] = v_j$ nếu có cạnh nối v_i với v_j, và $P_0[i,j]$ không xác định nếu không, và xem giải thuật Floyd mở rộng sau :

Xác định W_k và P_k dựa vào W_{k-1} và P_{k-1} như sau :

Với i = 1 đến n

Với j = 1 đến n

- Nếu $W_{k-1}[i,j] > W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j]$ thì đặt :

  $W_k[i,j] = W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j]$

  và $P_k[i,j] = P_{k-1}[i,k]$

- Nếu không, $W_k[i,j] = W_{k-1}[i,j]$

  và $P_k[i,j] = P_{k-1}[i,j]$

Dễ thấy rằng khi giải thuật này kết thúc, ngoài ma trận khoảng cách ngắn nhất $W^* = W_n$ cho ta biết chiều dài đường ngắn nhất nối 2 đỉnh của đồ thị, ta còn có thêm ma trận $P^* = P_n$ cho ta xác định đường ngắn nhất này : đường ngắn nhất đi từ v_i đến v_j xác định bởi dãy:

$$i,\ P^*[i,j],\ P^*[P^*[i,j],j],\ P^*[P^*[P^*[i,j],j],j], \ldots, j$$

THÍ DỤ 3: Xét đồ thị:

theo giả thiết qui nạp,

$$W_{k-1}[i,j] = \text{chiều dài } \gamma \le W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j]$$

Do đó theo định nghĩa của W_k thì $W_k[i,j] = W_{k-1}[i,j]$

ii) Mọi đường chiều dài ngắn nhất nối v_i với v_j và đi qu
các đỉnh trung gian trong $\{v_1,\ldots,v_k\}$ đều chứa v_k.

Gọi $\gamma = v_i \ldots v_k \ldots v_j$ là 1 đường ngắn nhất như thế th
$v_i \ldots v_k$ và $v_k \ldots v_j$ cũng là những đường ngắn nhất đi qu
các đỉnh trung gian trong $\{v_1,\ldots v_{k-1}\}$ và :

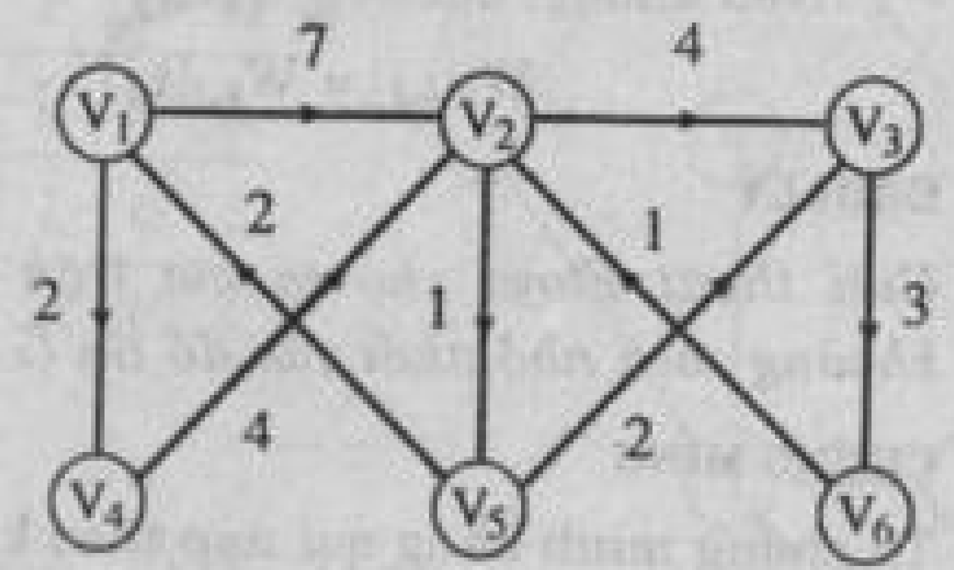
$$W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j] = \text{chiều dài } (v_i \ldots v_k) + \text{chiều dài}(v_k \ldots v_j)$$

$$= \text{chiều dài } (\gamma) < W_{k-1}[i,j]$$

Do đó theo định nghĩa của W_k thì :

$$W_k[i,j] = W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j]$$ □

THÍ DỤ 2: Xét đồ thị G sau :



Áp dụng giải thuật Floyd, ta tìm được (các ô
trống là ∞)

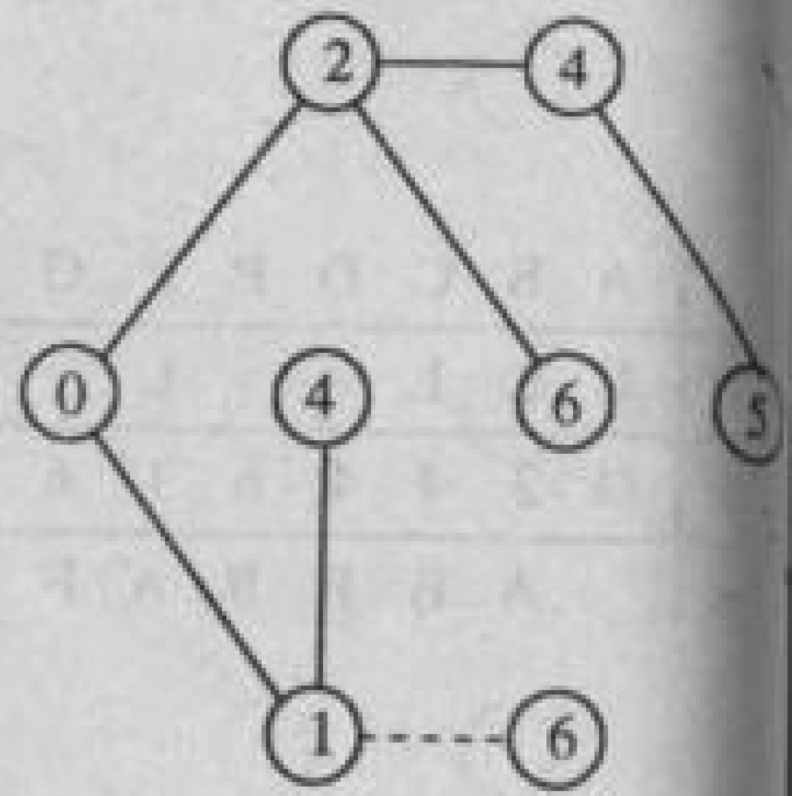
$$W = W_0 = \begin{bmatrix} & 7 & & 2 & & \\ & & 4 & & 1 & \\ & & & & & 3 \\ & 4 & & & & \\ 2 & & 2 & & & \\ & 1 & & & & \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} & 7 & & 2 & & \\ & & 4 & & 1 & \\ & & & & & 3 \\ & 4 & & & & \\ 2 & 9 & 2 & 4 & & \\ & 1 & & & & \end{bmatrix}$$

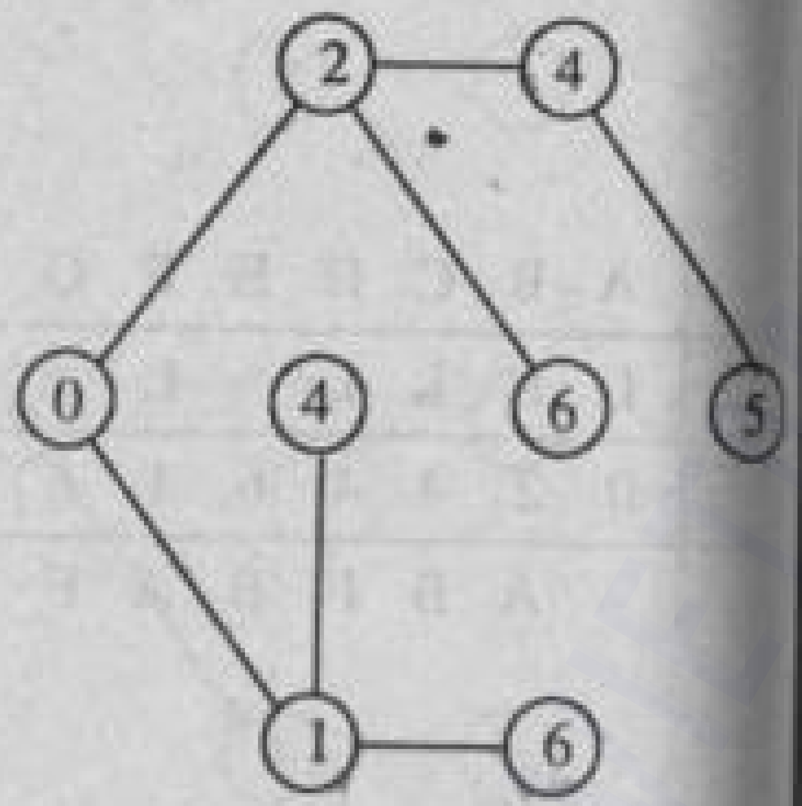
$$W_2 = \begin{bmatrix} & 7 & 11 & 2 & 8 & \\ & & 4 & & 1 & \\ & & & & & 3 \\ & 4 & 8 & & 5 & \\ 2 & 9 & 2 & 4 & 10 & \\ & 1 & 5 & & 2 & \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} & 7 & 11 & 2 & 8 & 14 \\ & & 4 & & 1 & 7 \\ & & & & & 3 \\ & 4 & 8 & & 5 & 11 \\ 2 & 9 & 2 & 4 & 10 & 5 \\ & 1 & 5 & & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L	L	L	L		L
δ	0	2	4	4	6	1	6	5
π		A	B	F	B	A	F	C



	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L	L	L	L	L	L
δ	0	2	4	4	6	1	6	5
π		A	B	F	B	A	F	C



Giải thuật chấm dứt và bảng lập được sau cùng cho ta con đường ngắn nhất nối A đến các đỉnh khác.

Chẳng hạn đường ngắn nhất nối A đến H là ABCH và chiều dài đường ngắn nhất này là 5. □

Nhận xét rằng khi giải thuật Dijkstra kết thúc, ta sẽ nhận được cây bao trùm L của G và đường ngắn nhất nối v_0 đến một đỉnh khác chính là đường duy nhất trong L nối v_0 với đỉnh đó. Ta gọi L là cây bao trùm Dijkstra gốc v_0 của G.

5.3 GIẢI THUẬT FLOYD

Xét 1 đồ thị có hướng có trọng số G.

Để tìm con đường ngắn nhất giữa mọi cặp đỉnh của G, ta có thể áp dụng giải thuật Dijkstra nhiều lần hoặc áp dụng một giải thuật đơn giản là giải thuật Floyd được trình bày dưới đây.

Giả sử G có tập hợp các đỉnh là $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ và có ma trận khoảng cách là $W \equiv W_0$.

Giải thuật Floyd xây dựng dãy các ma trận $n \times n$ W_k $(0 \le k \le n)$ như sau :

5.3.1 GIẢI THUẬT FLOYD

Xác định ma trận W_k dựa vào ma trận W_{k-1} $(1 \le k \le n)$ như sau :

Với i = 1 đến n,

Với j = 1 đến n

Nếu $W_{k-1}[i,j] > W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j]$ thì đặt

$$W_k[i,j] = W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j]$$

Nếu không, đặt

$$W_k[i,j] = W_{k-1}[i,j]$$

5.3.2 ĐỊNH LÝ

Giải thuật Floyd cho ta ma trận $W^* = W_n$ là ma trận khoảng cách nhỏ nhất của đồ thị G.

CHỨNG MINH

Ta chứng minh bằng qui nạp theo k mệnh đề sau :

$W_k[i,j]$ là chiều dài đường ngắn nhất trong những đường nối đỉnh v_i với đỉnh v_j đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, v_2, \ldots v_k\}$.

Trước hết mệnh đề hiển nhiên đúng với k = 0.

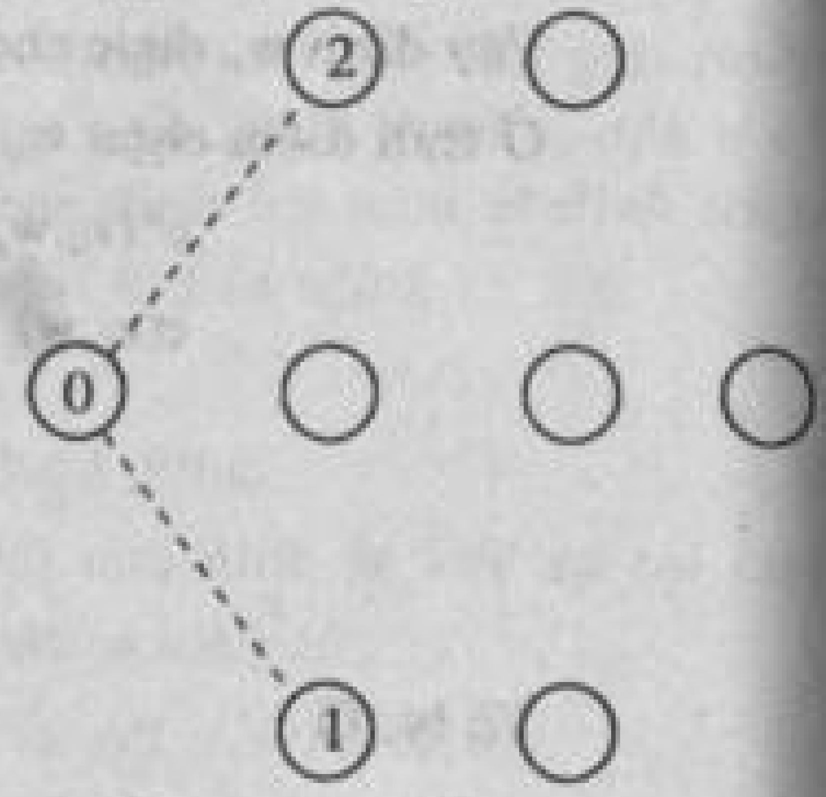
Giả sử mệnh đề đúng với k – 1.

Xét $W_k[i,j]$. Có hai trường hợp :

i) Trong những đường chiều dài ngắn nhất nối v_i với v_j và đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, \ldots, v_k\}$, có một đường γ sao cho $v_k \notin \gamma$. Thì γ cũng là đường ngắn nhất nối v_i với v_j đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, nên

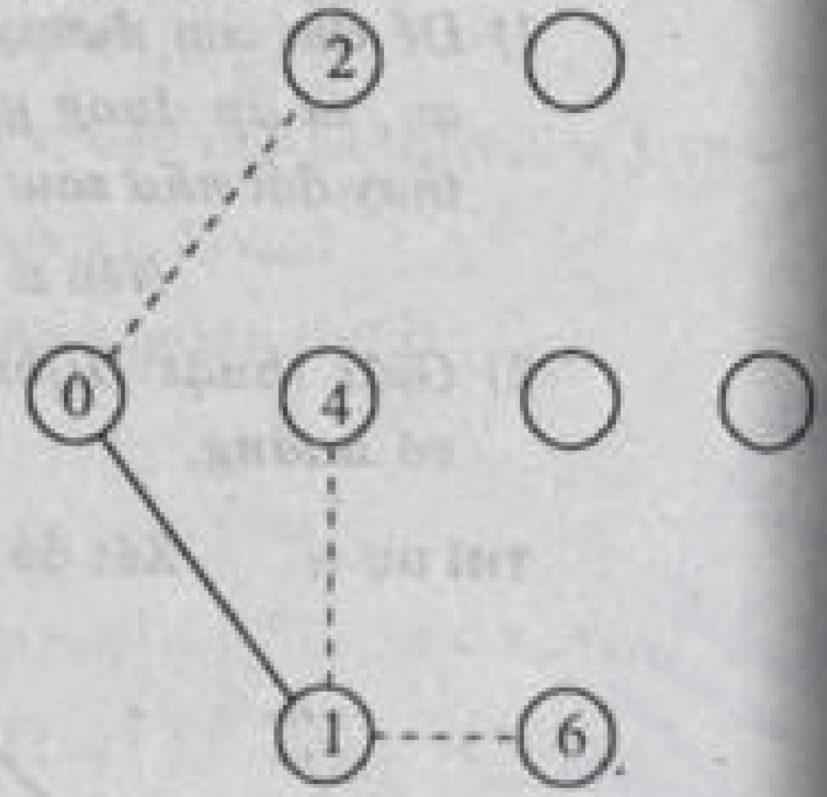
Ở bước thứ 1, ta lập được bảng sau :

	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L							
δ	0	2	∞	∞	∞	1	∞	∞
π		A	A	A	A	A	A	A



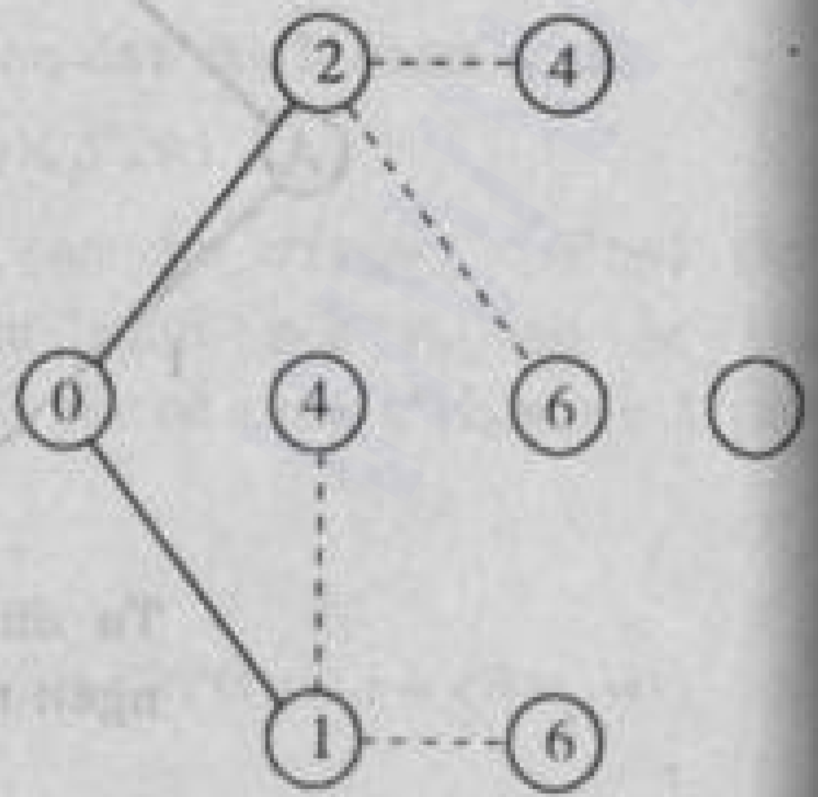
Chọn được đỉnh F đặt vào L và ta có bảng sau :

	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L					L		
δ	0	2	∞	4	∞	1	6	∞
π		A	A	F	A	A	F	A

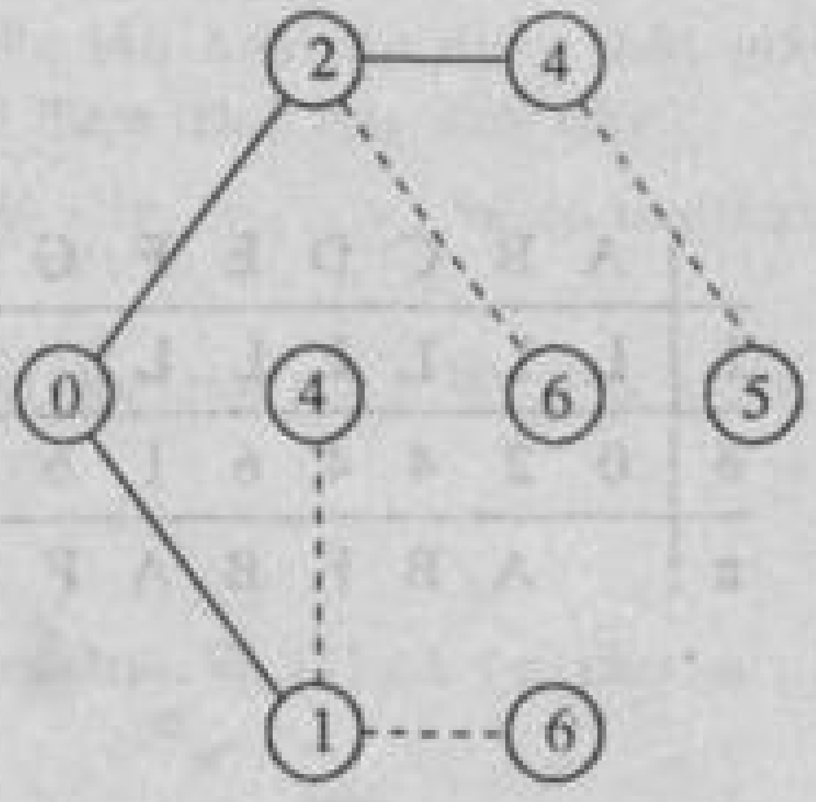


Cứ tiếp tục như trên, ta có lần lượt :

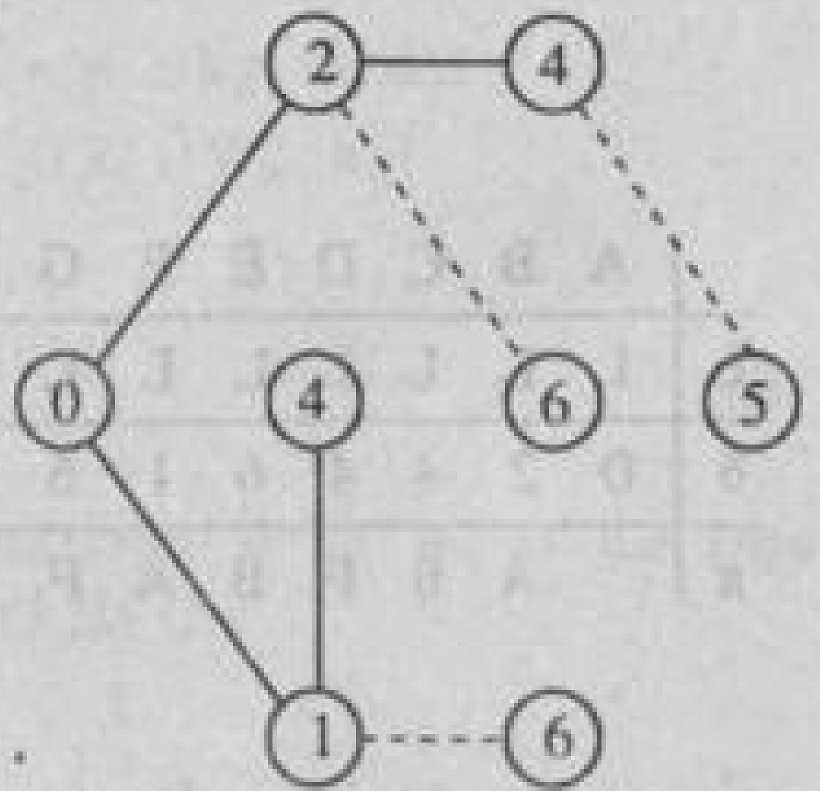
	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L				L		
δ	0	2	4	4	6	1	6	∞
π		A	B	F	B	A	F	A



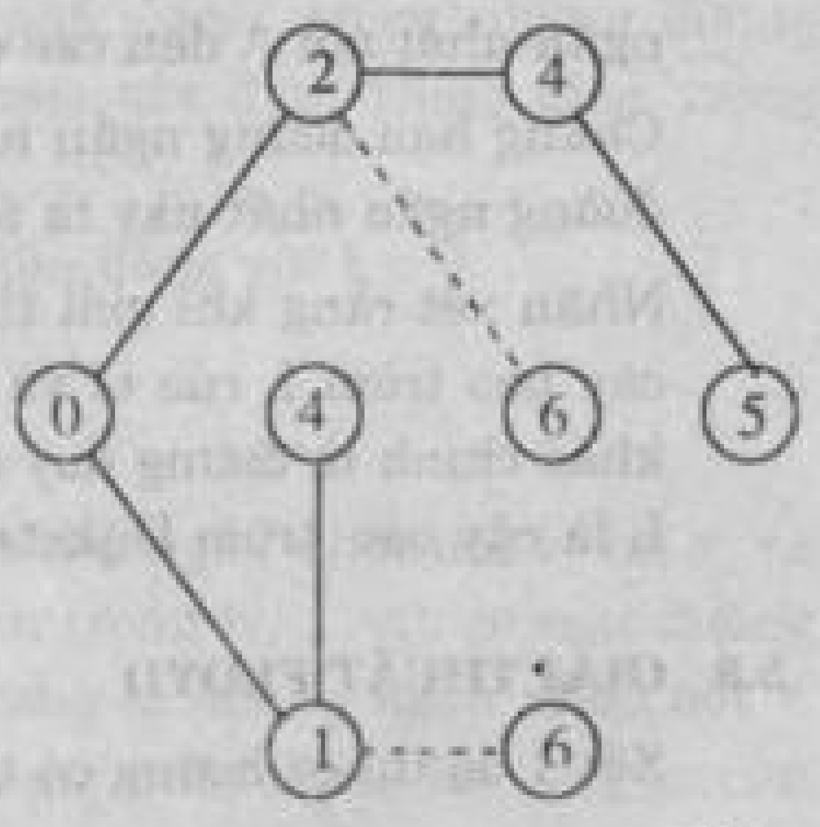
	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L			L		
δ	0	2	4	4	6	1	6	5
π		A	B	F	B	A	F	C



	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L	L		L		
	0	2	4	4	6	1	6	5
		A	B	F	B	A	F	C



	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L	L		L		L
δ	0	2	4	4	6	1	6	5
π		A	B	F	B	A	F	C



5.2.3 ĐỊNH LÝ

Đặt $\delta^*(v)$ và $\pi^*(v)$ là trị số của $\delta(v)$ và $\pi(v)$ khi giải thuật Dijkstra dừng. Thì con đường ngắn nhất đi từ v_0 đến w có chiều dài là $\delta^*(w)$ và được xác định bởi hàm π^*:đỉnh trước 1 đỉnh v trên đường ngắn nhất này là $\pi^*(v)$.

CHỨNG MINH

Hiển nhiên giải thuật luôn luôn dừng.

Trước hết nhận xét rằng với mọi đỉnh $w \in V$ và tại mọi thời điểm thực hiện giải thuật ta luôn có :

$$c^*(v_0, w) \le \delta(w) \Rightarrow c^*(v_0, w) \le \delta^*(w)$$

Giả sử thứ tự chọn các đỉnh đặt vào L là $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

Ta chứng minh rằng $\delta^*(v_i) \le \delta^*(v_{i+1})$, $\forall i$.

Ở vòng lặp thứ i (chọn đỉnh v_i đặt vào L) thì $v_{i+1} \notin L$ nên

$$\delta^*(v_i) = \delta_i(v_i) \le \delta_i(v_{i+1})$$

(δ_i là hàm δ ở vòng lặp thứ i)

Ở vòng lặp thứ i + 1 ta có :

$\delta^*(v_{i+1}) = \delta_{i+1}(v_{i+1})$.

$$= \begin{cases} \delta_i(v_{i+1}) & \text{nếu } \delta_i(v_{i+1}) \le \delta^*(v_i) + c(v_i, v_{i+1}) \\ \delta^*(v_i) + c(v_i, v_{i+1}) & \text{nếu } \delta_i(v_{i+1}) > \delta^*(v_i) + c(v_i, v_{i+1}) \end{cases}$$

do đó $\delta^*(v_i) \le \delta^*(v_{i+1})$

Như thế nếu đỉnh v được chọn đặt vào L trước w thì

$$\delta^*(v) \le \delta^*(w)$$

Bây giờ giả sử có đỉnh w sao cho $c^*(v_0,w) < \delta^*(w)$. Gọi $v_0w_1 \ldots w_pw$ là đường ngắn nhất nối v_0 với w, thì $c^*(w_p,w) = c(w_p,w)$ và có thể giả sử rằng $c^*(v_0,w_i) = \delta^*(w_i)$ $\forall i = 1,\ldots,p$.

Ta có :

$$\delta^*(w_p) \le \delta^*(w_p) + c^*(w_p,w) = c^*(v_0,w_p) + c^*(w_p,w)$$

$$= c^*(v_0,w) < \delta^*(w)$$

Vậy đỉnh w_p được chọn đặt vào L trước đỉnh w.

Ở thời điểm chọn w_p đặt vào L thì :

$$\begin{aligned} c^*(v_0,w_p) &= \delta^*(w_p) \\ c(v_0,w) &= c^*(v_0,w_p) + c^*(w_p,w) \\ &= \delta^*(w_p) + c(w_p,w) \\ &\ge \delta(w) \\ &\ge \delta^*(w) \end{aligned}$$

Vô lý. □

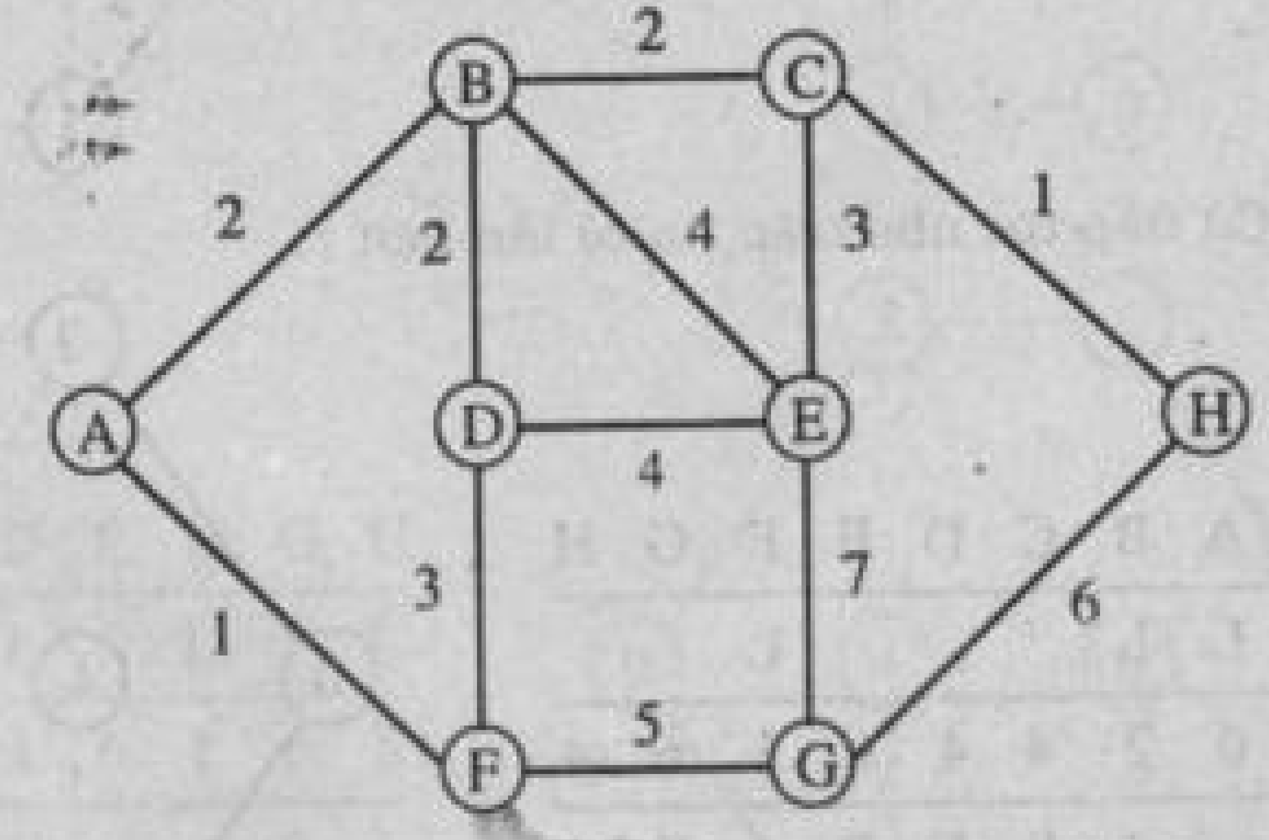
Lưu ý:

1) *Để tìm con đường ngắn nhất nối đỉnh v_0 với một đỉnh w , ta áp dụng giải thuật Dijkstra với điều kiện dừng thay đổi như sau:*

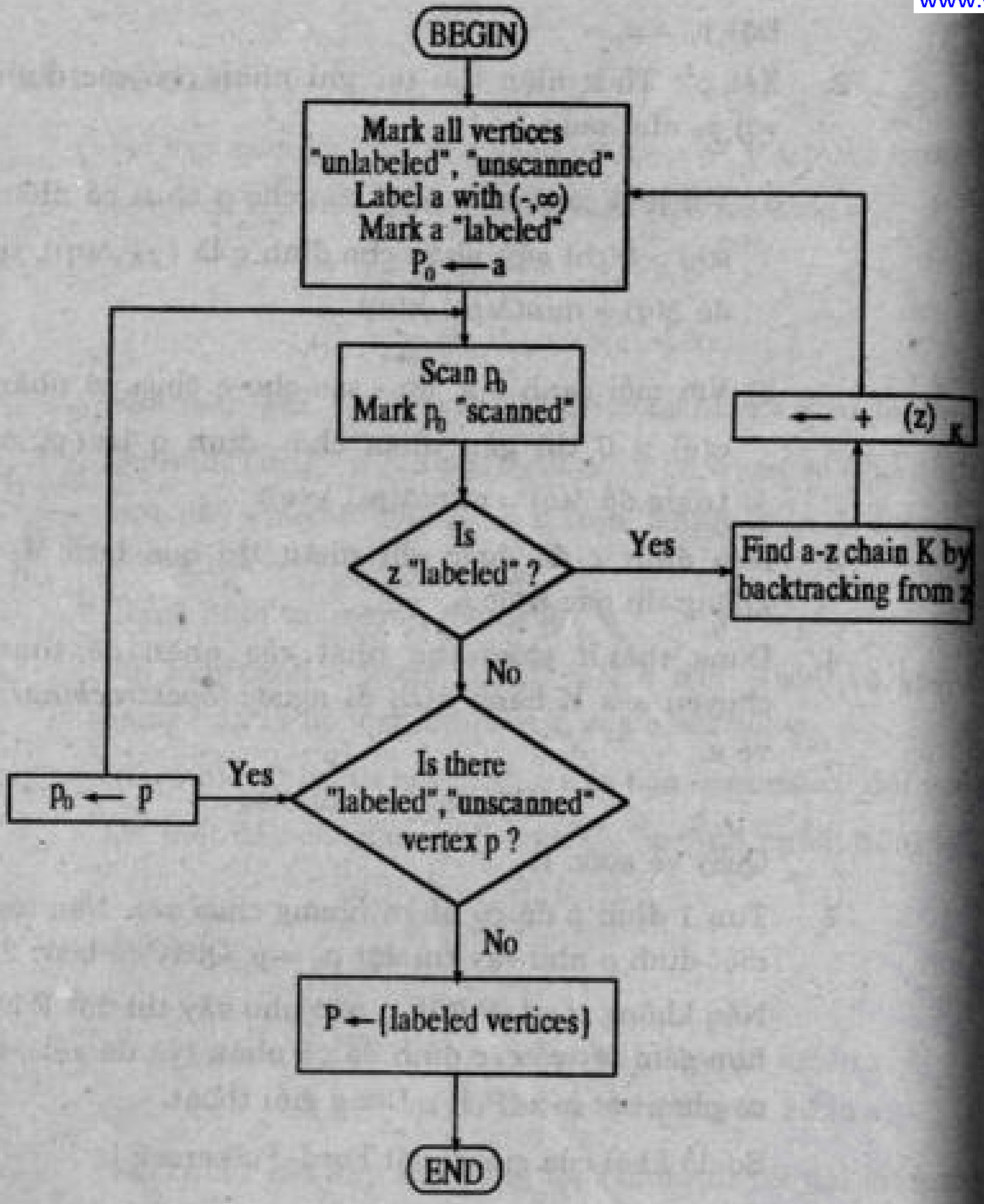
Nếu $w \in L$ thì giải thuật dừng.

2) *Giải thuật Dijkstra cũng áp dụng được cho đồ thị vô hướng.*

THÍ DỤ 1: Xét đồ thị :



Ta dùng giải thuật Dijkstra để tìm đường ngắn nhất nối A đến các đỉnh khác.



6.1.7 ĐỊNH LÝ

Áp dụng giải thuật Ford-Fulkerson vào mạng G. Khi giải thuật kết thúc thì φ là 1 hàm tải tối đại và $(P, \overline{P})$ là 1 phép cắt a–z tối tiểu của G.

CHỨNG MINH

Mỗi lần áp dụng giải thuật, ta lại tìm được 1 hàm φ mới có tải trọng lớn hơn tải trọng của hàm cũ, do đó giải thuật

phải dừng sau một số hữu hạn lần áp dụng giải thuật.

Trước hết ta chứng minh φ là một hàm tải. Dùng qui nạp.

Hiển nhiên φ có giá trị nguyên. Gọi φ_1 là hàm tải cũ và $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta(z)\,\varphi_K$ là hàm tải mới. Cả φ_1 và φ_K cùng thỏa (ii) và (iii) trong định nghĩa hàm tải, do đó φ_2 cũng thỏa (ii) và (iii).

Nhận xét rằng với mọi đỉnh v trên dây chuyền K, ta luôn luôn có $\Delta(z) \le \Delta(v)$.

Với $e = \overrightarrow{uv}$ trong G.

- nếu $e \notin K$ thì $\varphi_K(e) = 0$, mà $\varphi_2(e) = \varphi_1(e)$

$$\Rightarrow 0 \le \varphi_2(e) \le c(e)$$

- nếu $e \in K$ và e có hướng từ a đến z thì

$$\begin{aligned}\Delta(z)\,\varphi_K(e) &= \Delta(z)\\ &\le \Delta(v) = \min(\Delta(u), s(e))\\ &\le s(e) = c(e) - \varphi_1(e)\end{aligned}$$

mà $\varphi_2(e) = \varphi_1(e) + \Delta(z)$

$$\Rightarrow 0 \le \varphi_2(e) \le c(e)$$

- nếu $e \notin K$ và e có hướng từ z đến a thì

$$\begin{aligned}\Delta(z)\varphi_K(e) &= -\Delta(z)\\ &\ge -\Delta(u)\\ &= -\min(\Delta(v), \varphi_1(e))\\ &= \max(-\Delta(v), -\varphi_1(e))\\ &\ge -\varphi_1(e)\end{aligned}$$

mà $\varphi_2(e) = \varphi_1(e) - \Delta(z)$

$$\Rightarrow 0 \le \varphi_2(e) \le c(e)$$

Vậy φ_2 thỏa (i) $\Rightarrow$ φ_2 là hàm tải.

Bây giờ gọi P là tập hợp xác định được khi giải thuật dừng. Hiển nhiên $(P, \overline{P})$ là 1 phép cắt a–z.

Với $e = \overrightarrow{uv}$ trong G :

- nếu $e \in (P, \overline{P})$ thì vì đỉnh v không thể ghi nhãn nên:

$$s(e) = 0 \Rightarrow \varphi(e) = c(e)$$

- nếu $e \in (\overline{P}, P)$ thì vì đỉnh u không thể ghi nhãn nên $\varphi(e) = 0$

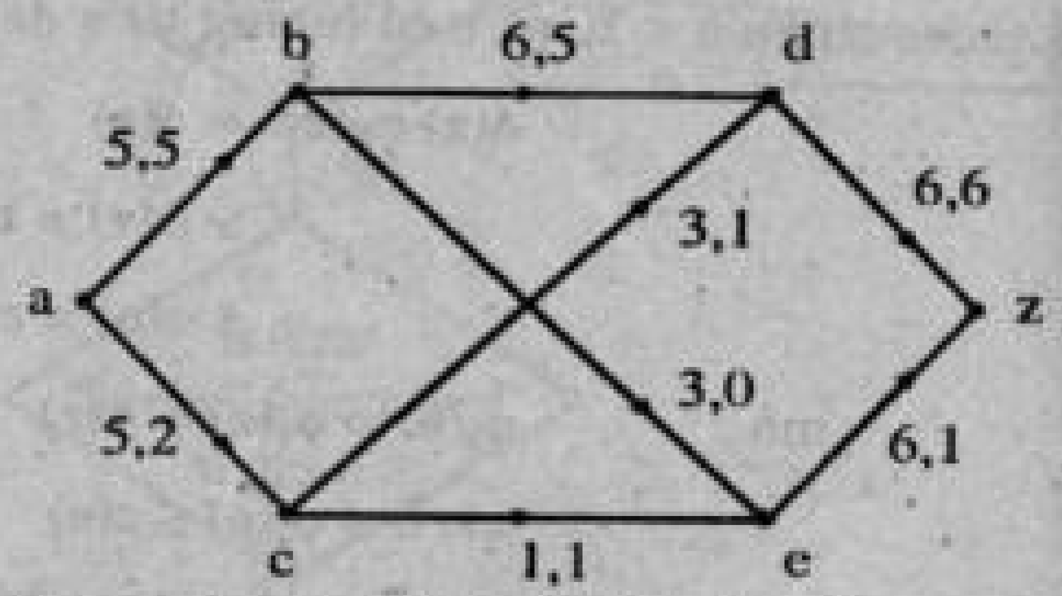
Do hệ luận 6.1.5 $(P, \overline{P})$ là 1 phép cắt a–z tối tiểu và φ là 1 hàm tải tối đại. □

6.1.8 ĐỊNH LÝ (Max Flow–Min Cut Theorem)

Trong 1 mạng G, tải trọng của 1 hàm tải tối đại bằng trọng số của 1 phép cắt a–z tối tiểu.

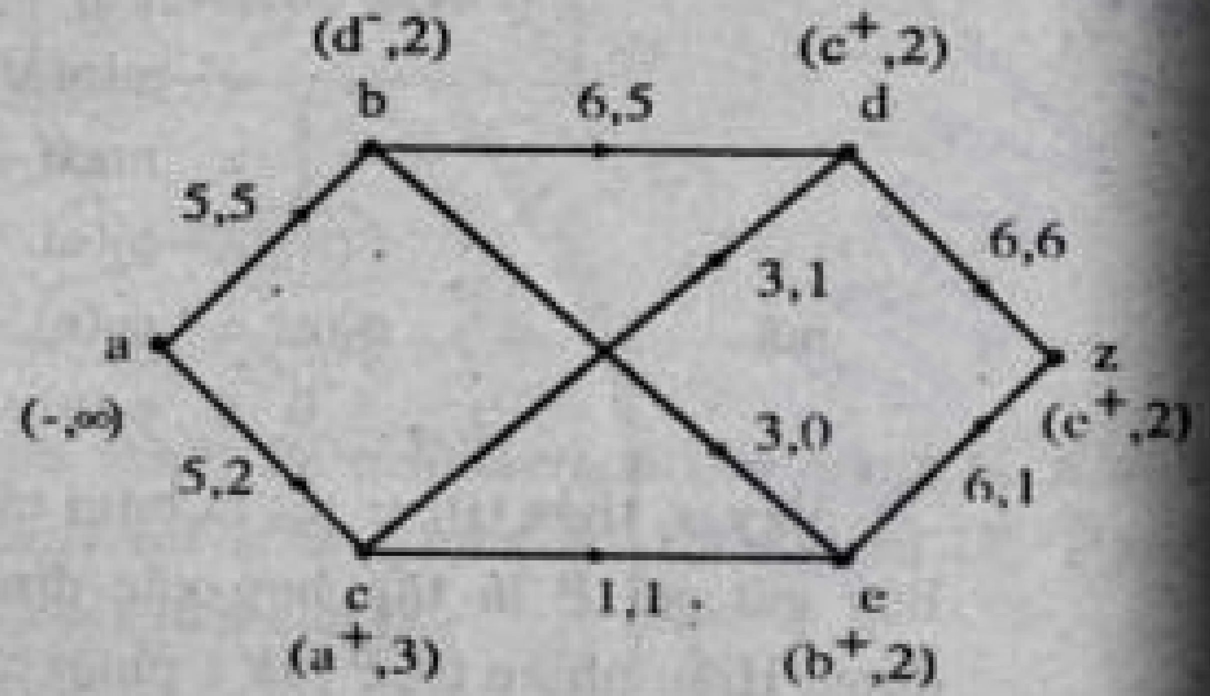
CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

THÍ DỤ 1: Xét mạng G với hàm tải trên G sau :



Ta áp dụng giải thuật Ford–Fulkerson.

Gán nhãn (–, ∞) cho đỉnh a.



Xét đỉnh a. Thực hiện thủ tục ghi nhãn tại a. Không có cạnh nào tới trong a cả, có 2 cạnh

tới ngoài a là $\overrightarrow{ab}$ và $\overrightarrow{ac}$.

Coi đỉnh b. Vì $s(\overrightarrow{ab}) = 0$ nên không gán nhãn cho b được.

Coi đỉnh c. Vì $\Delta(a) = \infty$ và $s(\overrightarrow{ac}) = 3$ nên ta gán nhãn $(a^+, 3)$ cho c.

Xét đỉnh c. Đặt nhãn cho d là $(c^+, 2)$

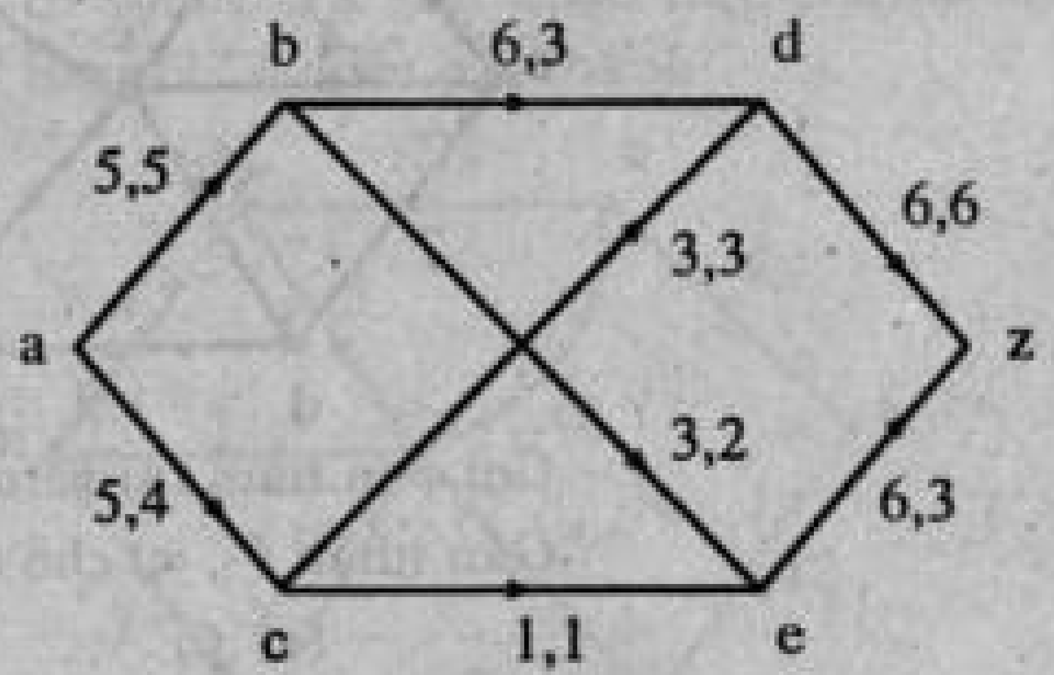
Xét đỉnh d. Đặt nhãn cho b là $(d^-, 2)$

Xét đỉnh b. Đặt nhãn cho e là $(b^+, 2)$

Xét đỉnh e. Đặt nhãn cho z là $(e^+, 2)$

Bây giờ đỉnh z đã có nhãn.

Bằng phương pháp đi ngược *(backtracking)* từ z, ta tìm được dây chuyền K = acdbez và hàm tải φ được sửa thành

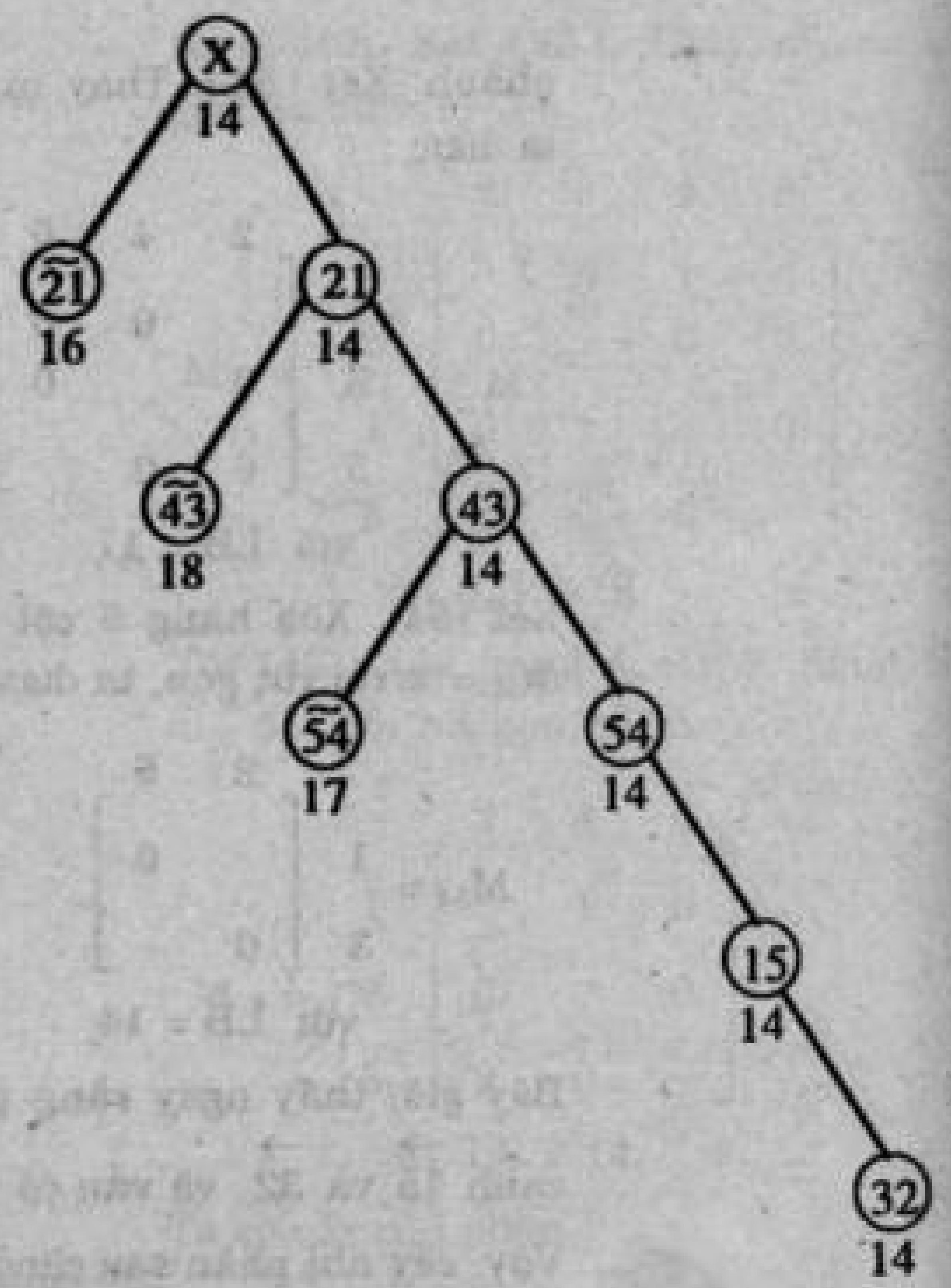


Lặp lại giải thuật trên .

Lại gán nhãn (–, ∞) cho a.

Xét đỉnh a. Đặt nhãn cho c là $(a^+, 1)$.

Xét đỉnh c. Thấy ngay rằng không thể gán nhãn cho đỉnh nào khác.



Ta tìm được chu trình Hamilton ngắn nhất (có chiều dài bằng 14) là :

1 5 4 3 2 1 □

6.2.3 MỘT GIẢI THUẬT KHÁC ĐỂ GIẢI GẦN ĐÚNG BÀI TOÁN DU LỊCH

Giải thuật "rẽ nhánh và chặn" luôn luôn cho ta tìm được lời giải của bài toán du lịch, tuy nhiên nó khá phức tạp và có thời gian thực hiện tương đối lớn.

Đối với các đồ thị vô hướng (nghĩa là có ma trận trọng số đối xứng) và thỏa bất đẳng thức tam giác :

$$m_{ik} \le m_{ij} + m_{jk} \quad , \forall i, j, k \text{ đôi một khác nhau.}$$

Ta có thể áp dụng giải thuật đơn giản sau đây để tìm 1 lời giải gần đúng cho bài toán du lịch.

6.2.3.1 Giải thuật tìm nhanh chu trình Hamilton (Quick Traveling Salesman Tour Algorithm)

1. Chọn 1 đỉnh a đặt vào Γ.
2. Nếu mọi đỉnh của G đều thuộc Γ thì dừng.
3. Nếu không, chọn đỉnh z ở ngoài Γ gần 1 đỉnh v trong Γ = a...uv...a nhất. Chen z vào ngay trước v để thành chu trình mới Γ = a...uzv...a.

   Trở về bước 2.

Hiển nhiên giải thuật này luôn luôn thực hiện được và khi giải thuật kết thúc thì Γ là 1 chu trình Hamilton.

6.2.3.2 Định lý

Chu trình Γ tìm được bằng giải thuật trên có trọng số nhỏ hơn 2 lần trọng số của chu trình Hamilton nhỏ nhất.

CHỨNG MINH

Gọi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ là các chu trình gồm 1, 2,...n đỉnh mà ta lần lượt xây dựng được khi áp dụng giải thuật vào đồ thị G gồm n đỉnh.

Gọi Γ^* là chu trình Hamilton nhỏ nhất và đặt $S_1 = \Gamma^* - \{e^*\}$, e^* là một cạnh có trọng số lớn nhất trong Γ^*.

Với i = 1, 2,...,n−1, xét Γ_i = a...uv...a. Gọi z là đỉnh được chọn chen vào ngay trước v trong Γ_i để thành Γ_{i+1} = a...uzv...a

Tồn tại 1 đường trong S_i nối z với đỉnh $w \in \Gamma_i$. Trên đường này gọi $\overline{w'w}$ là cạnh cuối cùng, $w' \notin \Gamma_i$. Đặt $S_{i+1} = S_i \setminus \{\overline{w'w}\}$

Ta ký hiệu trọng số bởi chữ c thì :

$$c(\Gamma_{i+1}) - c(\Gamma_i) = c(\overline{uz}) + c(\overline{zv}) - c(\overline{uv})$$

Theo điều kiện chọn đỉnh z của giải thuật thì :

rẽ nhánh. Xét $(\widetilde{43})$. Thay $m_{43} = \infty$ rồi rút gọn, ta được :

$$M_{\widetilde{43}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \end{array}\right] \end{array}$$

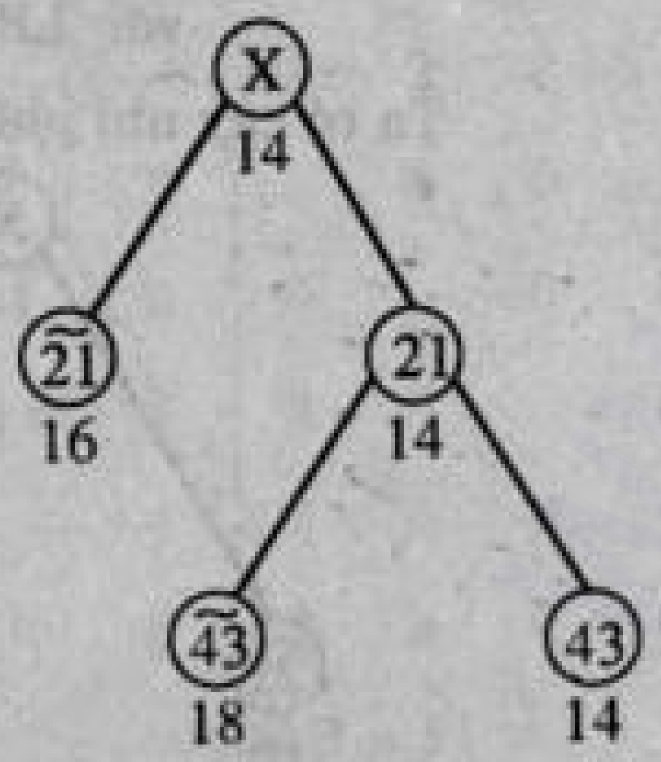
với LB = 18

Xét (43). Xóa hàng 4 cột 3, đồng thời thay $m_{34} = \infty$ rồi rút gọn, ta có :

$$M_{43} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 2 & 0 & \end{array}\right] \end{array}$$

với LB = 14

Ta có cây nhị phân :



Từ (43), chọn $\overrightarrow{54}$ để thực hiện thủ tục rẽ

nhánh. Xét $(\widetilde{54})$. Thay $m_{54} = \infty$ rồi rút gọn, ta được :

$$M_{\widetilde{54}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{array}\right] \end{array}$$

với LB = 17

Xét (54). Xóa hàng 5 cột 4, đồng thời thay $m_{35} = \infty$ rồi rút gọn, ta được :

$$M_{54} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} & 0 \\ 0 & \end{array}\right] \end{array}$$

với LB = 14

Bây giờ, thấy ngay rằng phải chọn tiếp các cạnh $\overrightarrow{15}$ và $\overrightarrow{32}$, và vẫn có LB = 14.

Vậy, cây nhị phân sau cùng là :

trình con thực sự sẽ được thay bằng ∞.

Sau đó ta rút gọn ma trận M để tìm LB (mới) của (ij):

LB (mới) = LB(cũ) + tổng các phần tử rút gọn

Xét ($\widetilde{ij}$). Đặt $m_{ij} = \infty$. Rút gọn M để tìm LB (mới) của ($\widetilde{ij}$)

Ta có được cây nhị phân gốc X, các lá của cây này là kết quả của thủ tục rẽ nhánh.

Lập lại thủ tục rẽ nhánh tại lá có LB nhỏ nhất cho đến khi tìm được lời giải của bài toán.

THÍ DỤ 3: Xét đồ thị G có ma trận khoảng cách sau : (Các vị trí trống là ∞).

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & \end{bmatrix} \end{array}$$

Thực hiện thủ tục rút gọn ma trận, ta có:

$$M_X = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \end{array}$$

với LB = 14

Chọn $\overrightarrow{21}$ để thực hiện thủ tục rẽ nhánh.

Xét ($\widetilde{21}$). Thay m_{21} bằng ∞ rồi rút gọn, ta được:

$$M_{\widetilde{21}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \end{array}$$

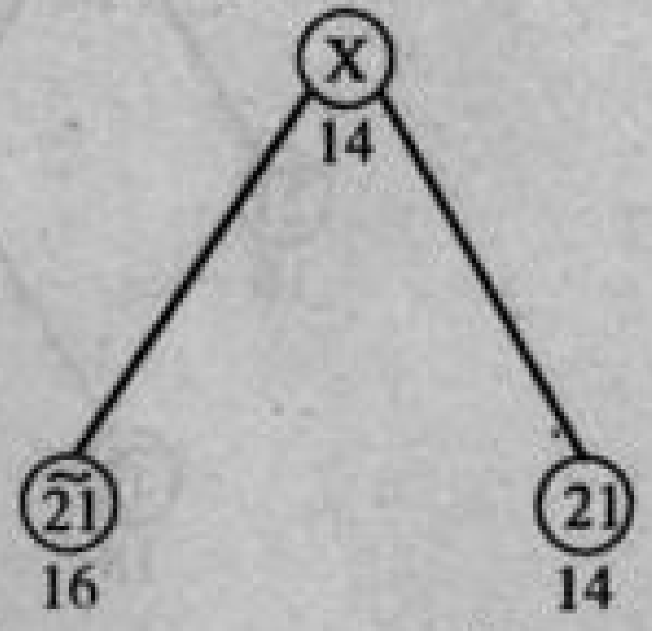
với LB = 16

Xét (21). Xóa hàng 2 cột 1 và thay $m_{12} = \infty$ rồi rút gọn, ta có :

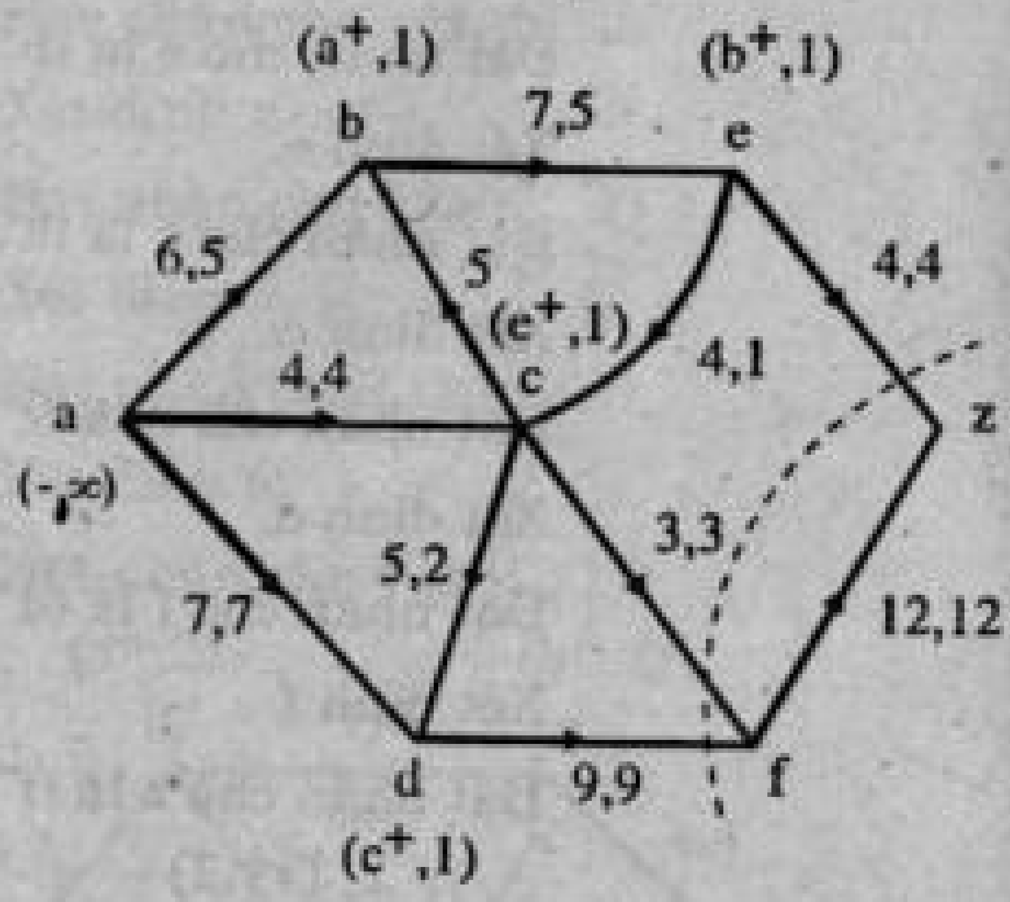
$$M_{21} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \\ 4 & 0 & & 4 \\ 2 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \end{array}$$

với LB = 14

Ta có cây nhị phân :



Từ (21), chọn cạnh $\overrightarrow{43}$ để thực hiện thủ tục



Xét đỉnh a.

Đặt nhãn cho b là $(a^+, 2)$

Xét đỉnh b.

Đặt nhãn cho e là $(b^+, 1)$

Xét đỉnh e.

Đặt nhãn cho c là $(e^+, 1)$

Xét đỉnh c.

Đặt nhãn cho d là $(c^+, 1)$

Đến đây, ta không thể đặt nhãn cho bất kỳ đỉnh nào nữa, mà z chưa có nhãn. Vậy hàm tải cuối cùng này là tối đại và phép cắt a-z ({a, b, c, d, e}, {f, z}) là tối tiểu. □

6.2 BÀI TOÁN DU LỊCH

6.2.1 GIỚI THIỆU BÀI TOÁN

Cho 1 đồ thị có hướng đầy đủ có trọng số G. Ta muốn tìm 1 chu trình Hamilton có trọng số nhỏ nhất của G.

Bài toán này gọi là bài toán du lịch *(Traveling Salesman Problem)* của đồ thị G và lời giải chính xác của nó được

tìm bằng giải thuật rẽ nhánh và chặn *(Branch and Bound algorithm)* sau :

6.2.2 GIẢI THUẬT RẼ NHÁNH VÀ CHẶN

Giả sử tập hợp các đỉnh của G là {1, 2,...,n} và ma trận trọng số của G là $M = [m_{ij}]$ với :

$$m_{ij} = \text{trọng số của cạnh } \overrightarrow{ij}$$

Nhận xét rằng trên mỗi dòng (cột) của M, một chu trình Hamilton dùng đến 1 và chỉ 1 phần tử.

Trước hết ta thực hiện thủ tục rút gọn M: Trừ mỗi phần tử trên mỗi dòng (cột) cho phần tử nhỏ nhất (gọi là phần tử rút gọn) của dòng (cột) đó.

Đặt LB = tổng các phần tử rút gọn.

Dễ thấy rằng mọi chu trình Hamilton đều có trọng số lớn hơn hay bằng LB.

Tiếp theo, chọn 1 cạnh $\overrightarrow{ij}$ với $m_{ij} = 0$ để thực hiện thủ tục rẽ nhánh sau : Gọi X là tập hợp gồm mọi chu trình Hamilton có trọng số nhỏ nhất (nghĩa là mọi lời giải). Chia X thành 2 tập hợp con cách biệt là (ij) gồm các lời giải có chứa cạnh $\overrightarrow{ij}$ và $(\widetilde{ij})$ gồm các lời giải không chứa cạnh $\overrightarrow{ij}$.

Xét (ij). Mọi chu trình trong (ij) đều không dùng đến bất kì phần tử nào (ngoài m_{ij}) trên hàng i và trên cột j, do đó ta có thể xóa hàng i và cột j trong M.

Lại để ý rằng cạnh $\overrightarrow{ij}$ cũng sẽ không dùng đến, vậy đặt $m_{ij} = \infty$ (nghĩa là xóa cạnh $\overrightarrow{ij}$).

Ngoài ra vì chu trình Hamilton không chứa chu trình con thực sự nên những phần tử nếu dùng đến thì tạo ra chu

Xét đỉnh b.

Đặt nhãn cho e là (b^+, 2)

Xét đỉnh c.

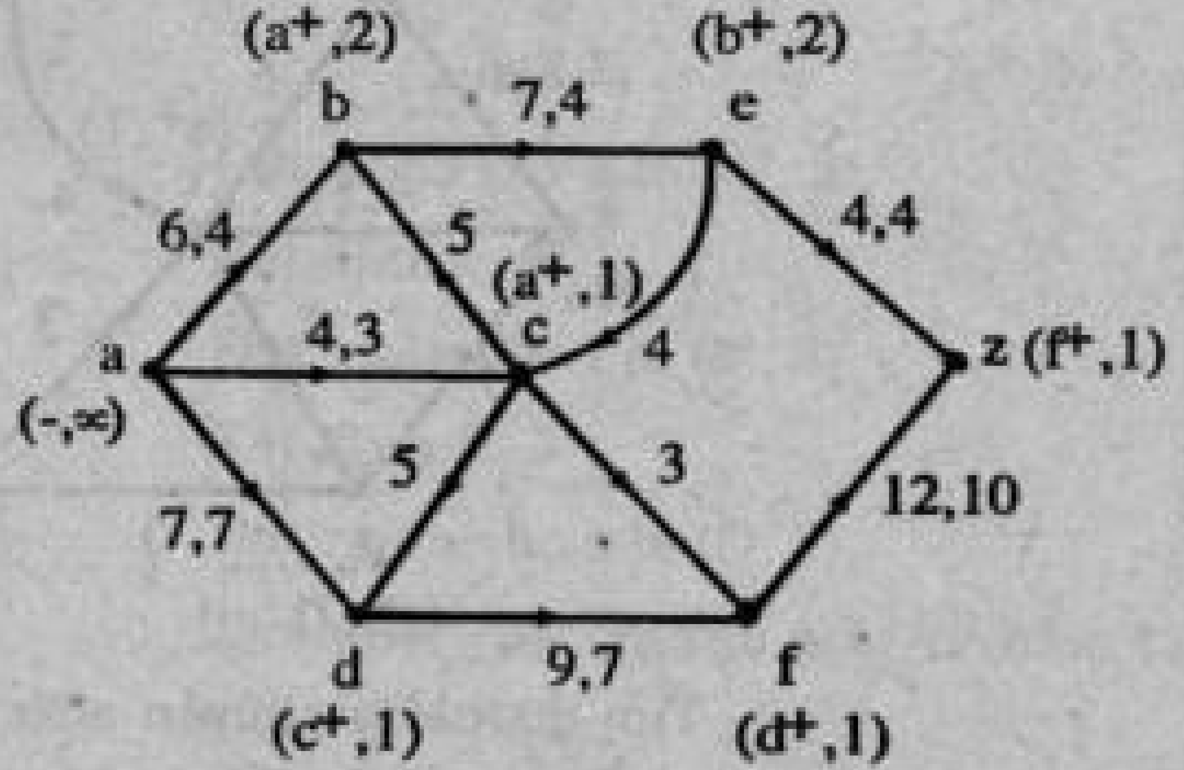
Đặt nhãn cho d là (c^+, 1)

Xét đỉnh d.

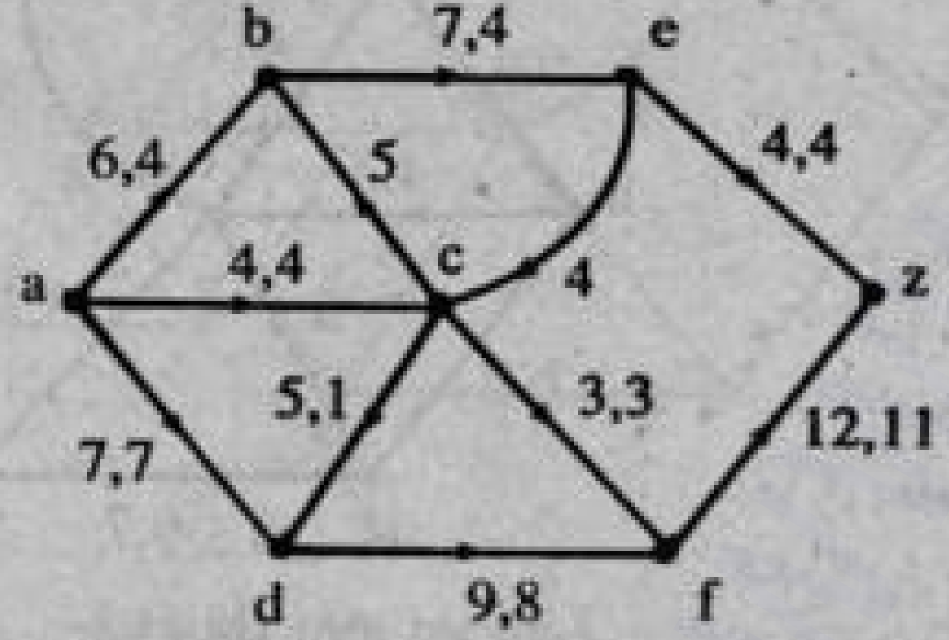
Đặt nhãn cho f là (d^+, 1)

Xét đỉnh f.

Đặt nhãn cho z là (f^+, 1)



Tìm được dây chuyền acdfz và hàm tải φ được sửa thành



Lặp lại giải thuật.

Xét đỉnh a.

Đặt nhãn cho b là (a^+, 2)

Xét đỉnh b.

Đặt nhãn cho e là (b^+, 2)

Xét đỉnh e.

Đặt nhãn cho c là (e^+, 2)

Xét đỉnh c.

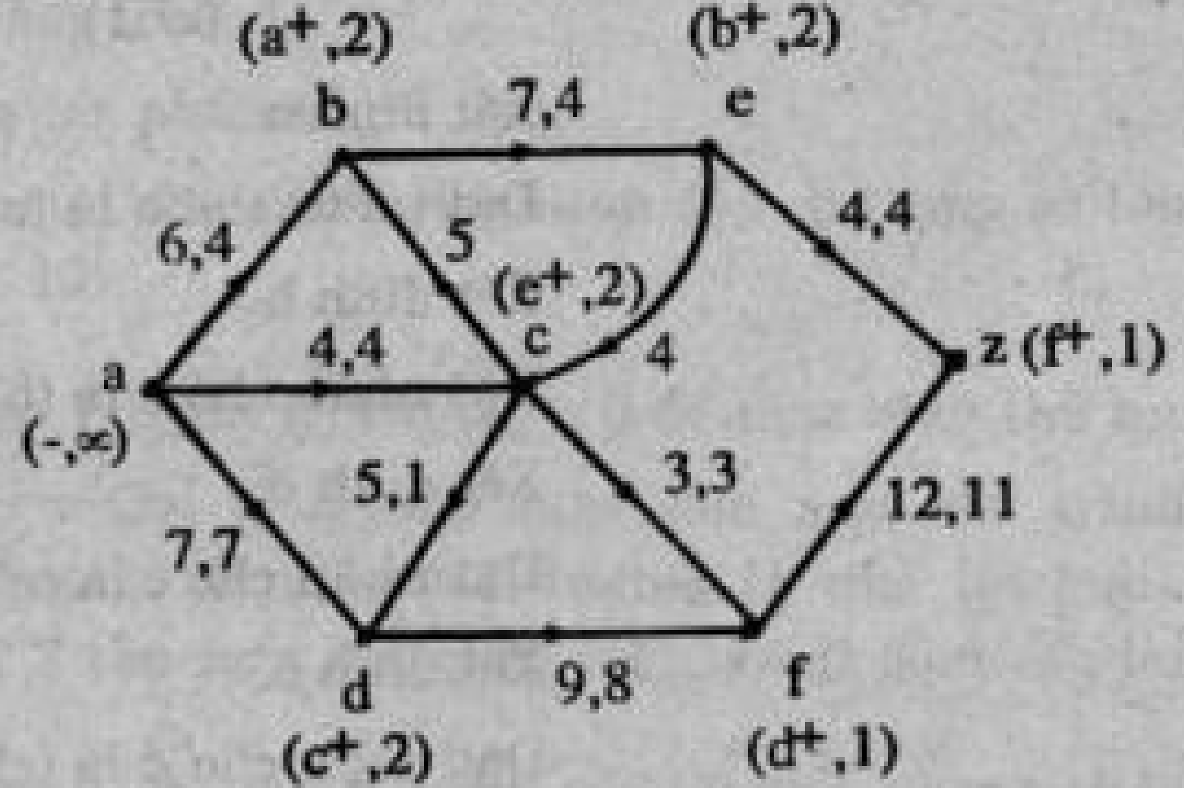
Đặt nhãn cho d là (c^+, 2)

Xét đỉnh d.

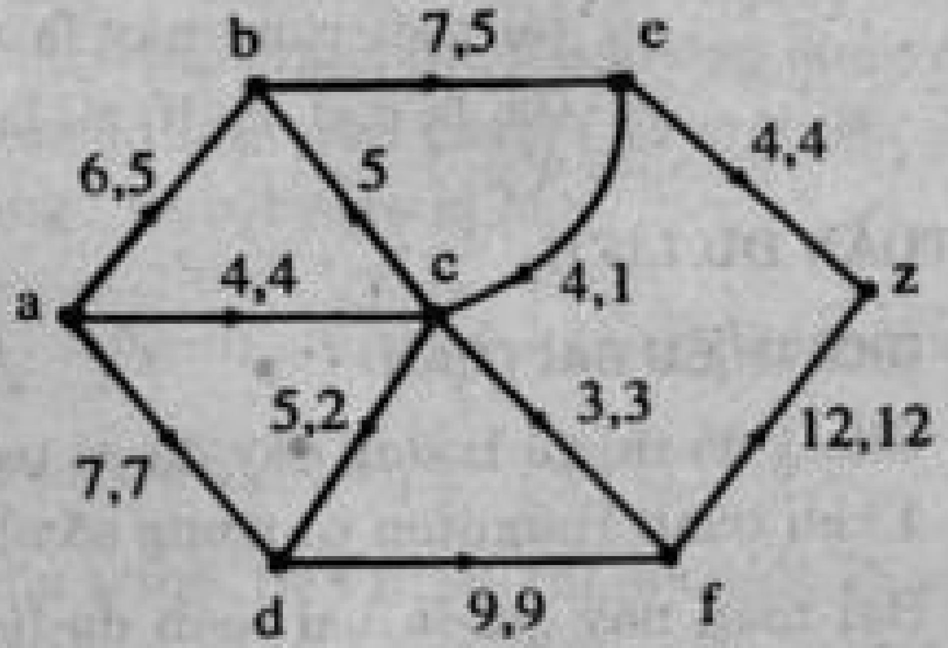
Đặt nhãn cho f là (d^+, 1)

Xét đỉnh f.

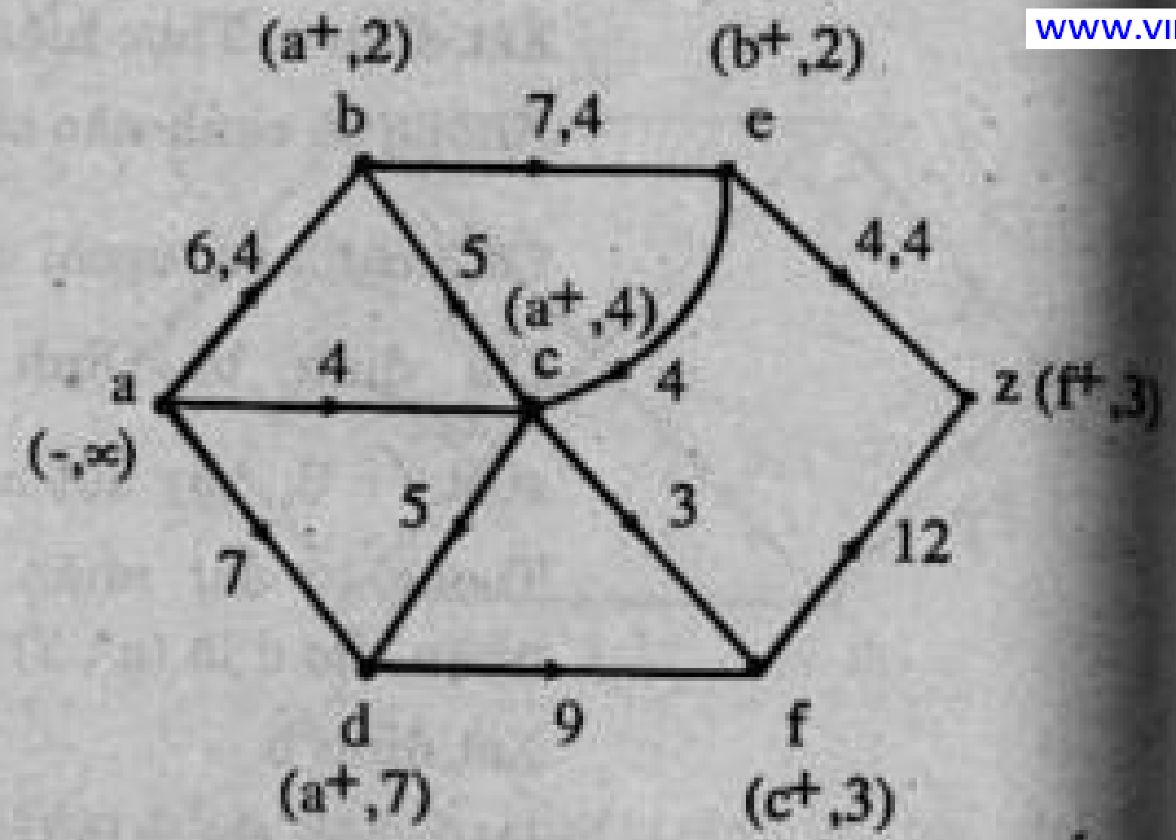
Đặt nhãn cho z là (f^+, 1)



Tìm được dây chuyền abecdfz và hàm tải φ sửa thành



Lặp lại giải thuật.



Đặt nhãn cho e là (b⁺, 2).

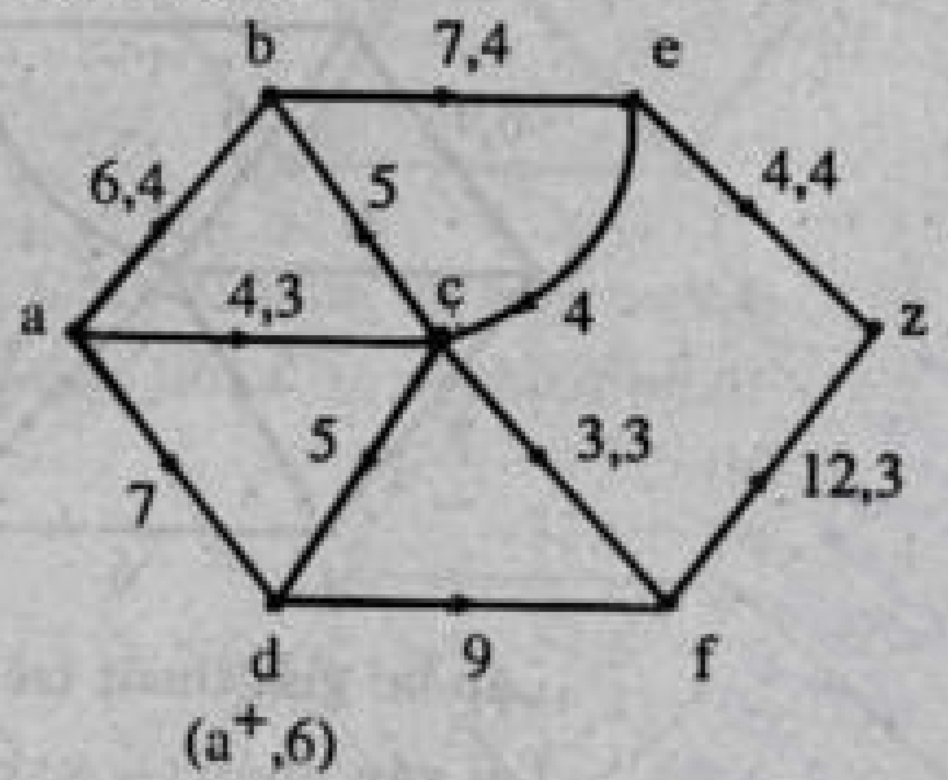
Xét đỉnh c.

Đặt nhãn cho f là (c⁺, 3)

Xét đỉnh f.

Đặt nhãn cho z là (f⁺, 3)

Tìm được dây chuyền acfz và hàm tải φ được sửa thành



Lặp lại giải thuật.

Xét đỉnh a.

Đặt nhãn cho b là (a⁺, 2), nhãn cho c là (a⁺,1), nhãn cho d là (a⁺, 7)

Xét đỉnh b.

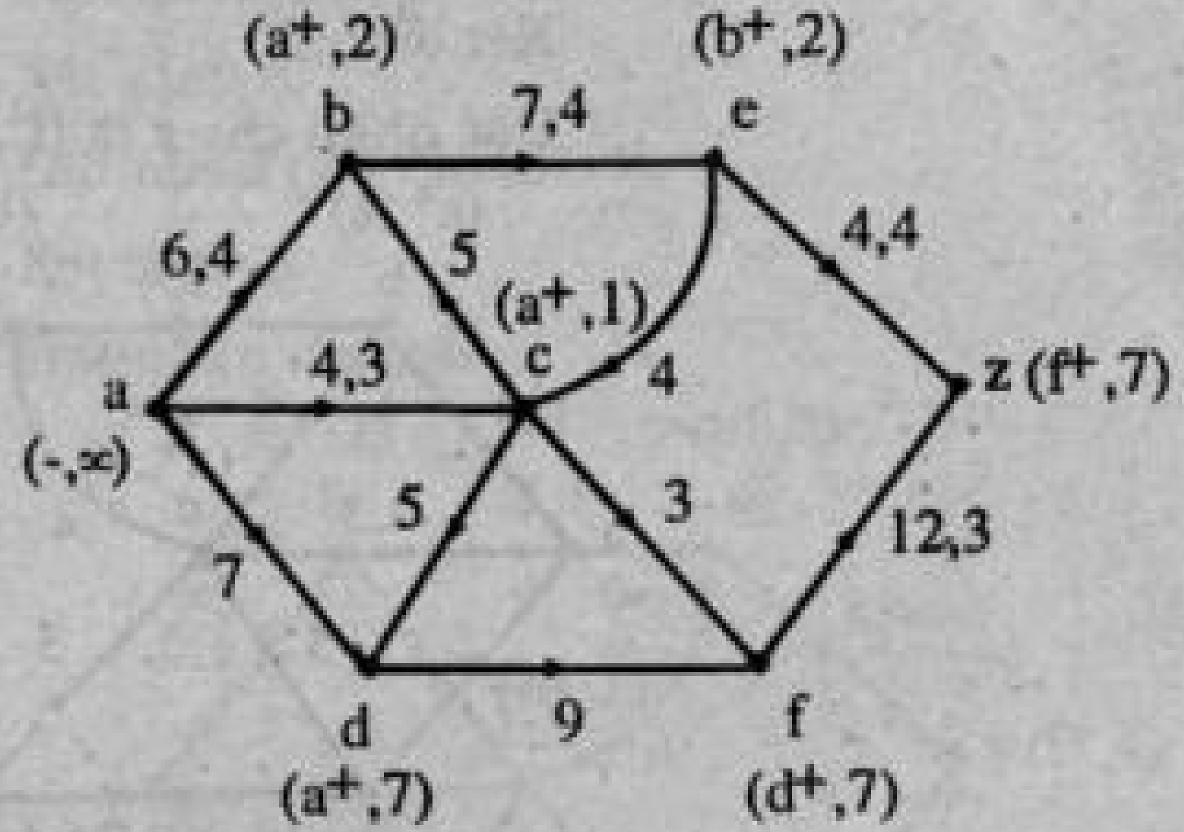
Đặt nhãn cho e là (b⁺, 2).

Xét đỉnh d.

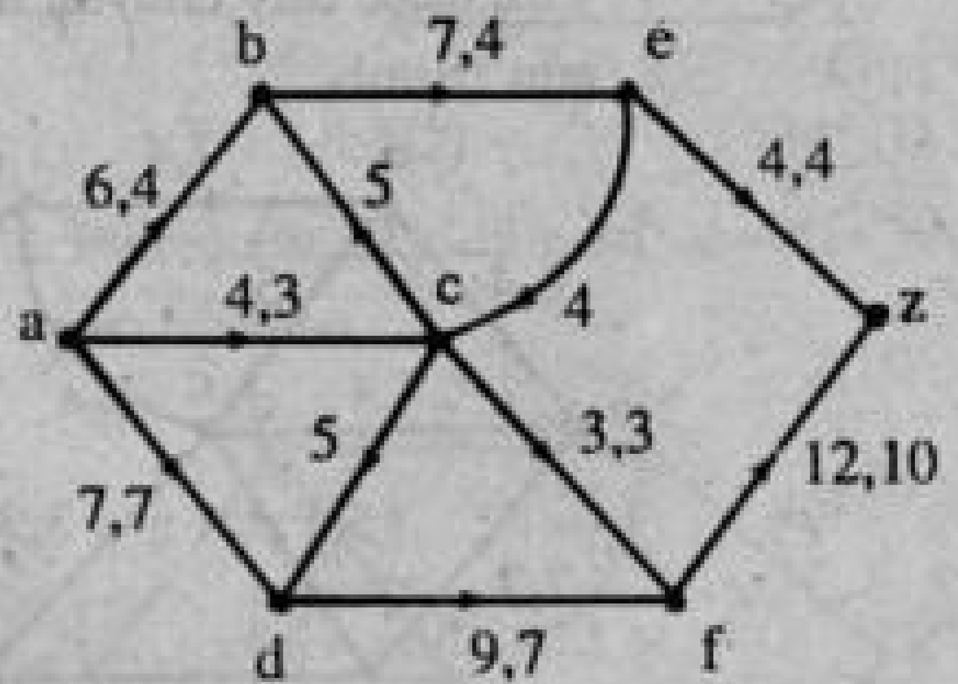
Đặt nhãn cho f là (d⁺, 7).

Xét đỉnh f.

Đặt nhãn cho z là (f⁺, 7).



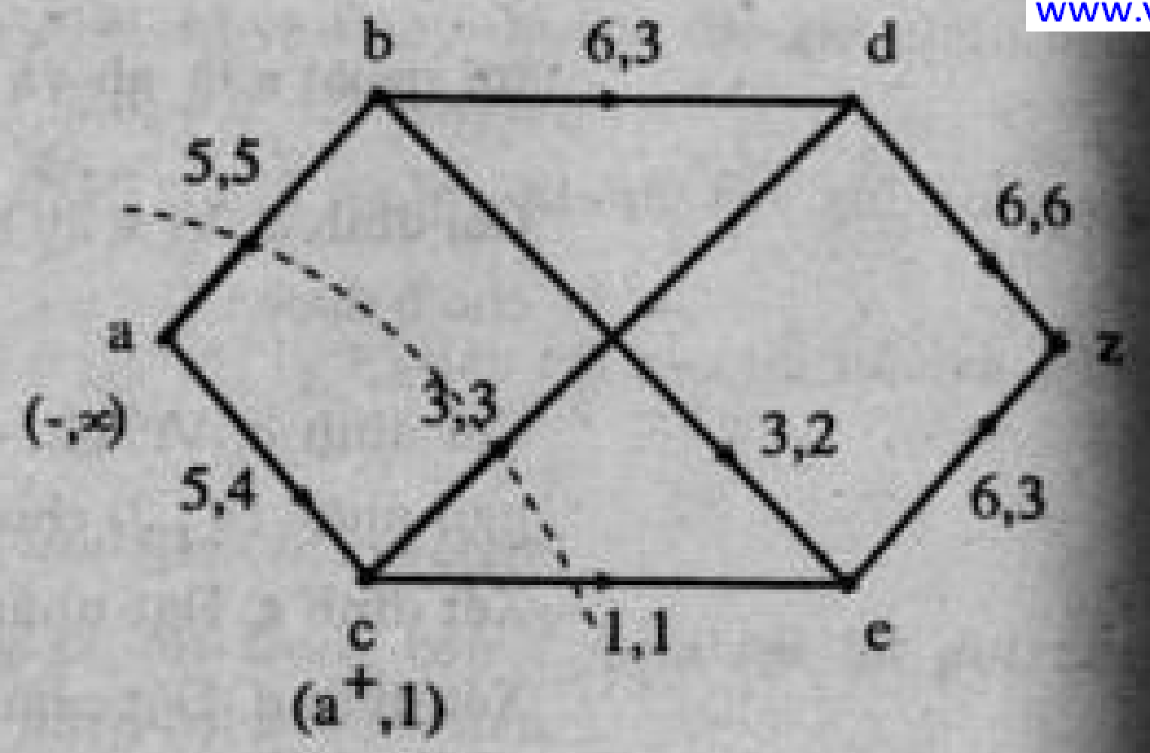
Tìm được dây chuyền adfz là hàm tải φ được sửa thành



Lặp lại giải thuật.

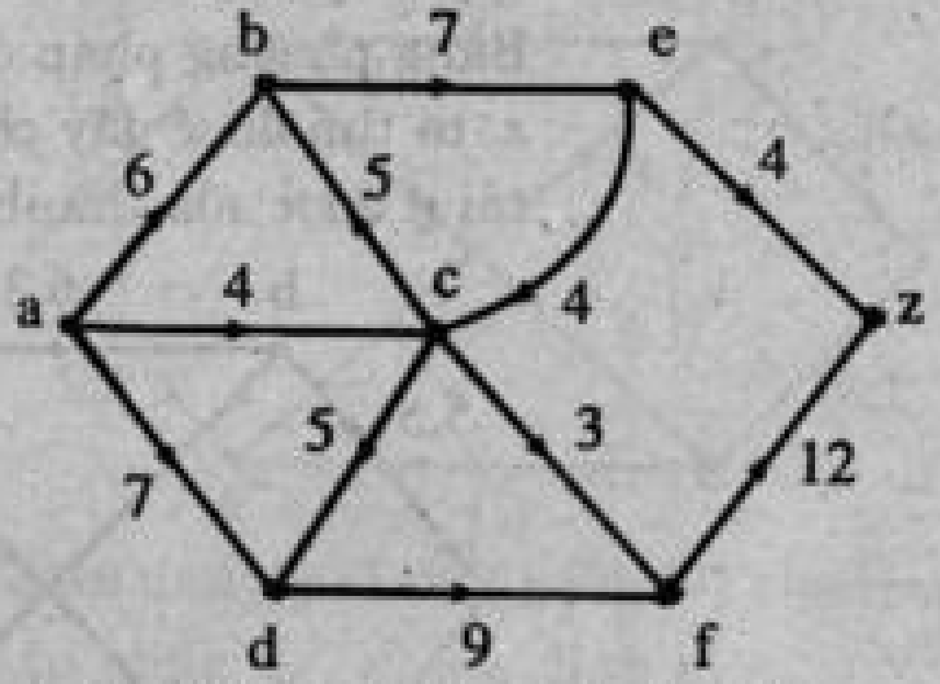
Xét đỉnh a.

Đặt nhãn cho b là (a⁺, 2), nhãn cho c là (a⁺,1).



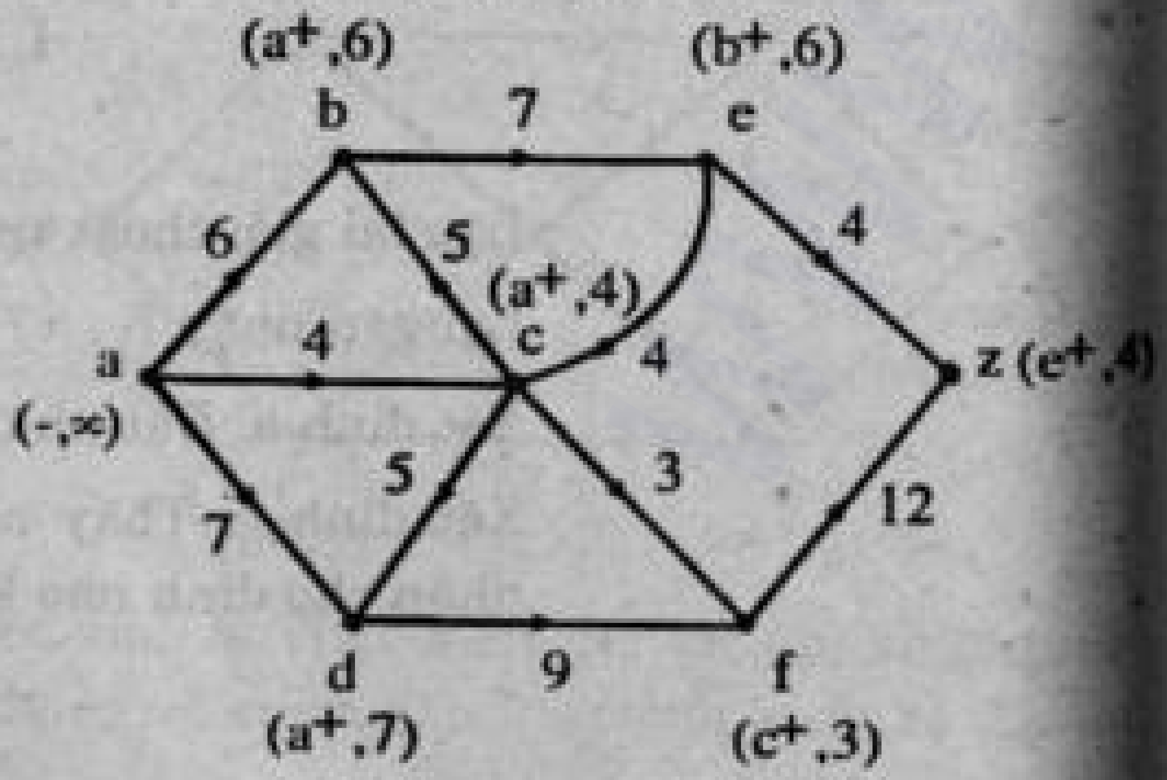
Vậy hàm tải φ như trên là tối đại và ({a,c},{b,d,e, z}) là 1 phép cắt a–z tối tiểu. □

THÍ DỤ 2: Cho mạng G sau :



Gọi φ là hàm tải zero trên G.

Gán nhãn (–, ∞) cho đỉnh a.



Xét đỉnh a. Thực hiện thủ tục ghi nhãn tại a.

Không có cạnh nào tới trong a cả.

Có 3 cạnh tới ngoài a là $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}$ và $\overrightarrow{ad}$.

Coi đỉnh b. Đỉnh b chưa có nhãn và $s(\overrightarrow{ab}) = 6$, vậy đặt nhãn cho b là (a⁺, 6).

Tương tự đặt nhãn cho c là (a⁺, 4) và đặt nhãn cho d là (a⁺, 7)

Xét đỉnh b.

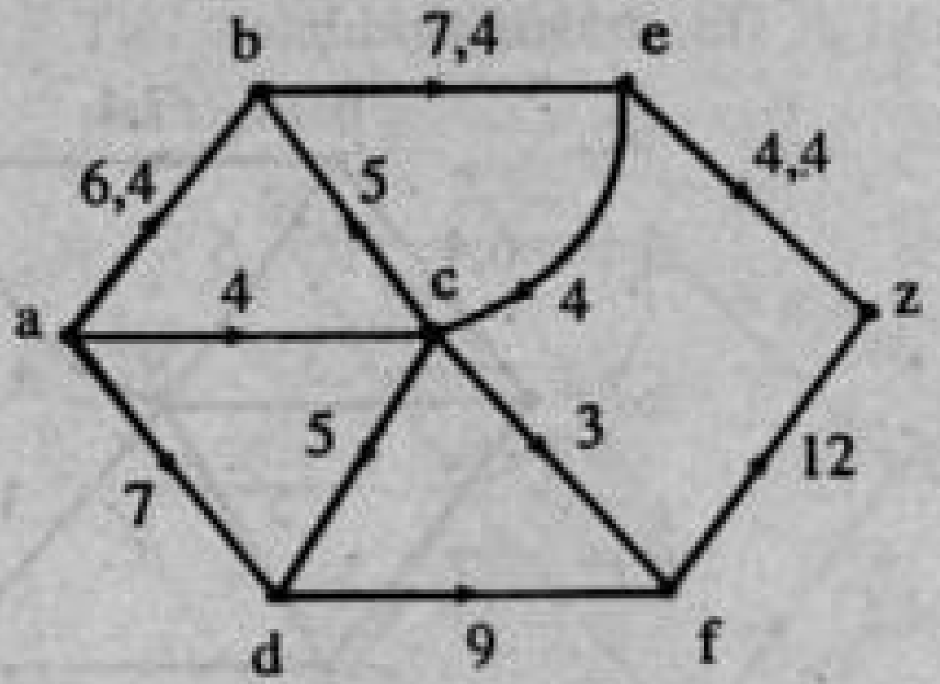
Đặt nhãn cho e là (b⁺, 6).

Xét đỉnh c.

Đặt nhãn cho f là (c⁺, 3).

Xét đỉnh e.

Đặt nhãn cho z là (e⁺, 4). Bây giờ đỉnh z đã có nhãn. Ta tìm được dây chuyền abez và hàm tải φ được sửa thành .



Lặp lại giải thuật trên.

Lại gán nhãn (–, ∞) cho a.

Xét đỉnh a.

Đặt nhãn cho b là (a⁺, 2), nhãn cho c là (a⁺,4), nhãn cho d là (a⁺, 7).

Xét đỉnh b.

$$c(\overline{zv}) \le c(\overline{w'w})$$

Ta lại có bất đẳng thức tam giác :

$$c(\overline{zv}) + c(\overline{uv}) \ge c(\overline{zu}) \Rightarrow c(\overline{uz}) - c(\overline{uv}) \le c(\overline{zv})$$

Vậy $c(\Gamma_{i+1}) - c(\Gamma_i) \le 2c(\overline{zv}) \le 2c(\overline{w'w}) = 2[c(S_i) - c(S_{i+1})]$

Suy ra : $c(\Gamma_n) \le 2c(S_1) < 2c(\Gamma^*)$ □

THÍ DỤ 4: Xét đồ thị G có ma trận trọng số sau :

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & 7 & 5 & 10 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & & 9 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & & 8 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 4 & 8 & & 8 & 12 \\ 5 & 3 & 5 & 6 & 8 & & 13 \\ 6 & 14 & 9 & 10 & 12 & 13 & \end{array}$$

Ma trận trọng số đối xứng và thỏa bất đẳng thức tam giác. Ta áp dụng giải thuật tìm nhanh chu trình Hamilton.

Chọn đỉnh 1, $\Gamma_1 = 1$.

Đỉnh 5 gần 1 nhất, vậy $\Gamma_2 = 1\ 5\ 1$.

Đỉnh 3 gần 1 nhất, vậy $\Gamma_3 = 1\ 5\ 3\ 1$.

Đỉnh 2 gần 5 nhất, vậy $\Gamma_4 = 1\ 2\ 5\ 3\ 1$.

Đỉnh 4 gần 2 nhất, vậy $\Gamma_5 = 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 1$.

Đỉnh 6 gần 2 nhất, vậy $\Gamma_6 = 1\ 4\ 6\ 2\ 5\ 3\ 1$.

Ta tìm được chu trình 1 4 6 2 5 3 1 có trọng số là 47.

Nếu ta bắt đầu bằng cách chọn đỉnh 2, ta sẽ tìm được chu trình 2 4 3 1 5 6 2 có trọng số 42.

(Chu trình Hamilton ngắn nhất của đồ thị G này có trọng số là 39). □

6.3 BÀI TOÁN GHÉP ĐÔI

6.3.1 GIỚI THIỆU BÀI TOÁN

Cho một đồ thị lưỡng phân G = (X, Y, E) với X là tập hợp các đỉnh trái và Y là tập hợp các đỉnh phải của G.

Một bộ ghép *(matching)* của G là một tập hợp các cạnh của G đôi một không có đỉnh chung.

Bài toán ghép đôi *(Matching Problem)* của G là tìm một bộ ghép tối đại (nghĩa là có số cạnh lớn nhất) của G.

Xét một bộ ghép M của G.

Các đỉnh trong M gọi là các đỉnh đã ghép *(matched vertices)*.

Một đường pha *(alternating path)* là 1 đường trong G bắt đầu bằng một X–đỉnh chưa ghép và gồm các cạnh lần lượt không rồi đến có nằm trong M.

Một đường mở *(augmenting path)* của M là 1 đường pha của M kết thúc bằng một Y–đỉnh chưa ghép.

Từ 1 X đỉnh u chưa ghép, ta có thể xây dựng 1 cây pha *(alternating tree)* gốc u gồm tất cả các đường pha bắt đầu từ u (các đường pha này không có đỉnh chung nào khác ngoài u).

Một cây pha có chứa ít nhất 1 đường mở gọi là 1 cây mở *(augmenting tree)*, nếu không ta gọi nó là 1 cây đóng *(Hungarian tree)*, gốc u của cây đóng này gọi là đỉnh đóng *(Hungarian acorn)*.

Để tìm bộ ghép tối đại của 1 đồ thị lưỡng phân G, ta dùng giải thuật đường mở sau :

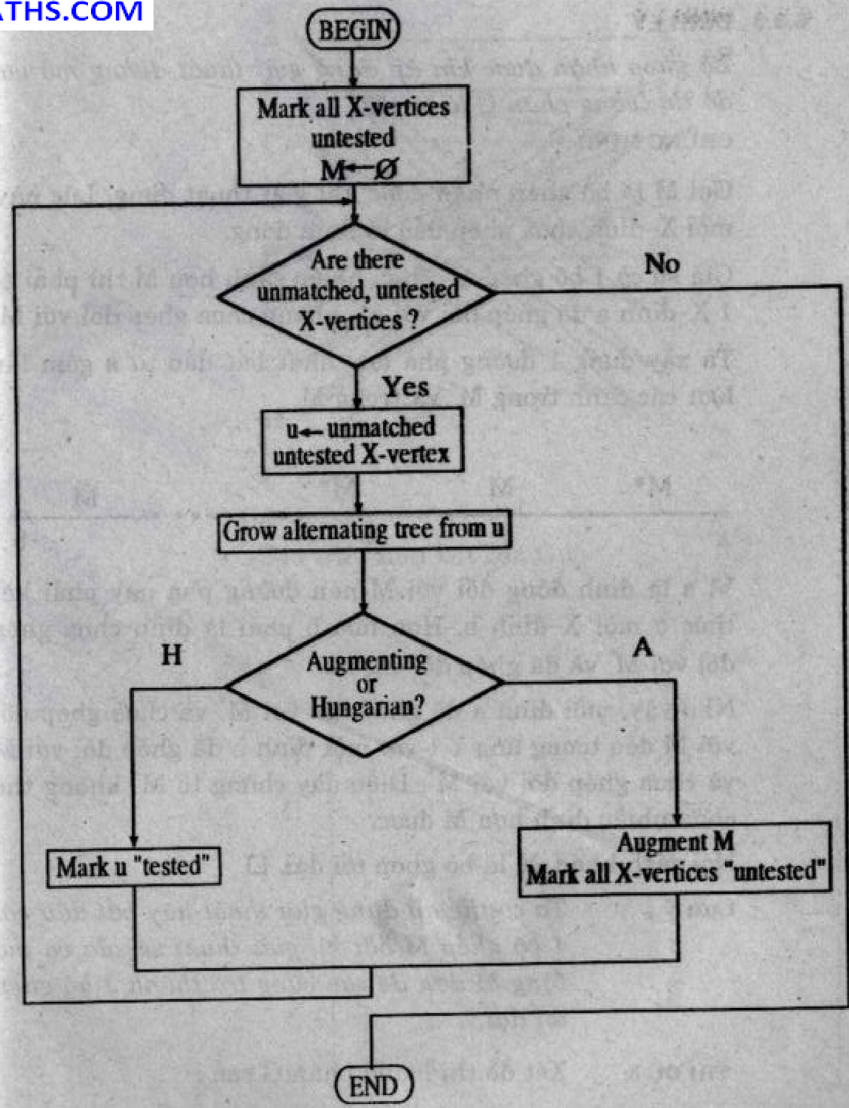
6.3.2 GIẢI THUẬT ĐƯỜNG MỞ (Augmenting Path/Hungarian Algorithm)

Xây dựng bộ ghép M như sau :

1. Mọi X–đỉnh là chưa kiểm tra. Đặt M = ∅.
2. Nếu mọi X–đỉnh chưa ghép đều đã kiểm tra thì dừng.
3. Nếu không, chọn một X–đỉnh u chưa ghép và chưa kiểm tra để xây dựng 1 cây pha gốc u.
4. Nếu cây pha này là cây mở thì qua bước 5, nếu không, đánh dấu u là đã kiểm tra rồi quay về bước 2.

5. Thực hiện thủ tục mở rộng M bằng cây mở như sau : Trên đường mở, loại bỏ các cạnh trong M và thêm vào các cạnh ngoài M để nhận được bộ ghép mới. Đánh dấu mọi X–đỉnh là chưa kiểm tra. Quay về bước 2.

Sơ đồ khối của giải thuật này là :



6.3.3 ĐỊNH LÝ

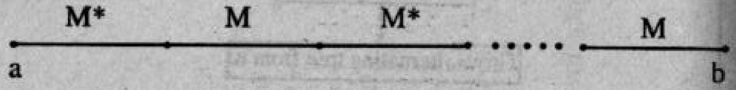
Bộ ghép nhận được khi áp dụng giải thuật đường mở vào đồ thị lưỡng phân G là tối đại.

CHỨNG MINH

Gọi M là bộ ghép nhận được khi giải thuật dừng. Lúc này, mọi X–đỉnh chưa ghép đều là đỉnh đóng.

Giả sử có 1 bộ ghép M^* chứa nhiều cạnh hơn M thì phải có 1 X–đỉnh a đã ghép đối với M^* nhưng chưa ghép đối với M

Ta xây dựng 1 đường pha duy nhất bắt đầu từ a gồm lần lượt các cạnh trong M^* và trong M.



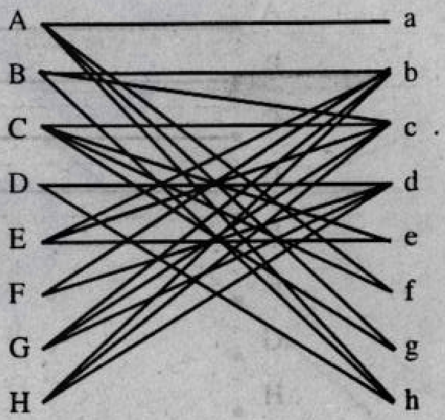
Vì a là đỉnh đóng đối với M nên đường pha này phải kết thúc ở một X–đỉnh b. Hơn nữa b phải là đỉnh chưa ghép đối với M^* và đã ghép đối với M.

Như vậy, mỗi đỉnh a đã ghép đối với M^* và chưa ghép đối với M đều tương ứng 1-1 với một đỉnh b đã ghép đối với M và chưa ghép đối với M^*. Điều này chứng tỏ M^* không thể chứa nhiều đỉnh hơn M được.

Nói cách khác, M là bộ ghép tối đại. □

Lưu ý : *Ta có thể áp dụng giải thuật này bắt đầu với 1 bộ ghép M bất kì, giải thuật sẽ sửa và mở rộng M dần để sau cùng trở thành 1 bộ ghép tối đại.*

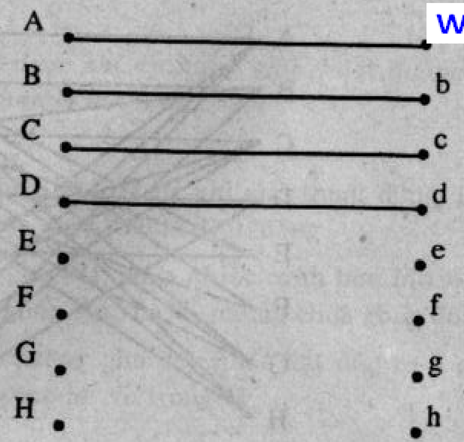
THÍ DỤ 5: Xét đồ thị lưỡng phân G sau :



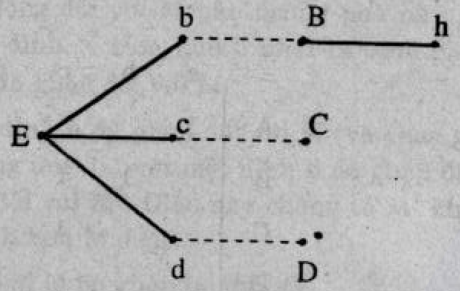
Ma trận liên kết của G là :

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & & & & & 1 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

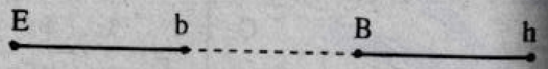
Coi bộ ghép đầu tiên :



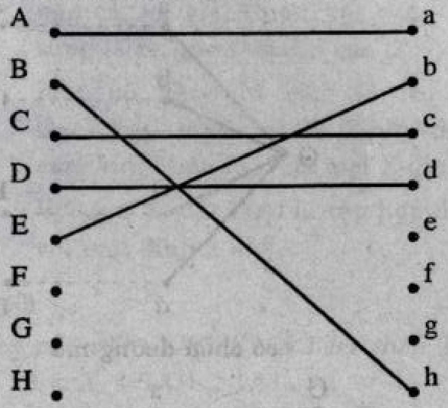
Xét đỉnh E. Cây pha gốc E là :



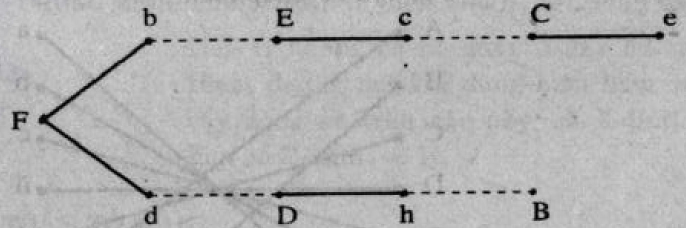
Đây là 1 cây mở vì chứa đường mở



từ đó suy ra bộ ghép mới :

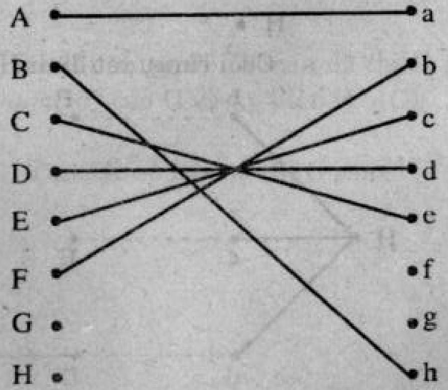


Xét đỉnh F. Cây pha gốc F là :

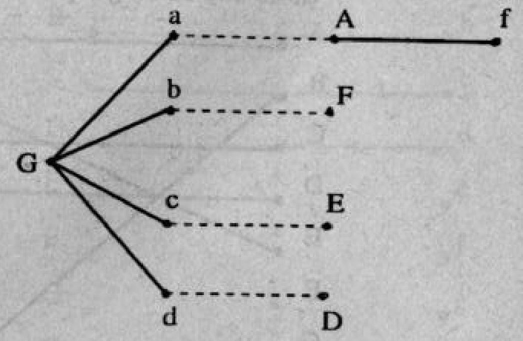


có chứa đường mở

Suy ra bộ ghép mới :

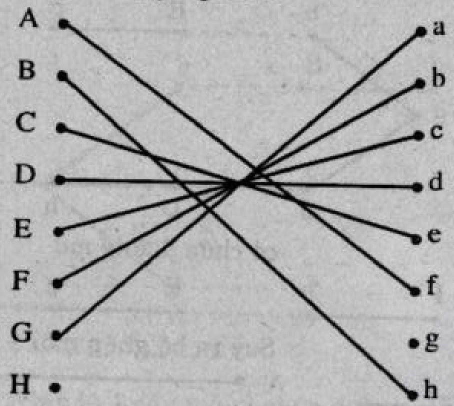


Xét đỉnh G. Cây pha gốc G là :

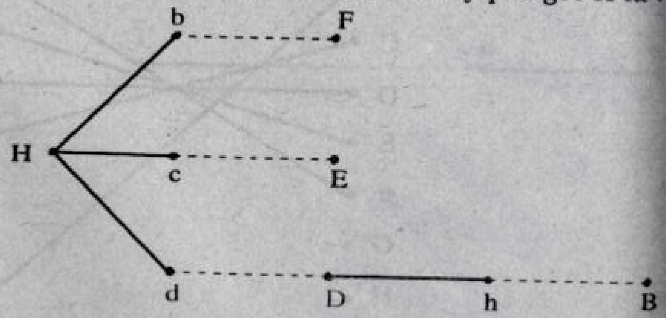


có chứa đường mở

suy ra bộ ghép mới:



Cuối cùng, xét đỉnh H. Cây pha gốc H là :



Đây là 1 cây đóng vì không chứa đường mở nào cả, và giải thuật kết thúc. Bộ ghép sau cùng là bộ ghép tối đại của G. □

Một bộ ghép M của đồ thị lưỡng phân G=(X,Y;E) được gọi là X-đầy đủ *(X-compele matching)* nếu M chứa mọi X-đỉnh.

Với $A \subset X$, đặt $\Gamma(A)$ là tập hợp đỉnh $y \in Y$ kề với một đỉnh $x \in A$.

6.3.4 ĐỊNH LÝ (Hall)

Đồ thị lưỡng phân G = (X,Y;E) có 1 bộ ghép X-đầy đủ nếu và chỉ nếu $\forall A \subset X,\ |\Gamma(A)| \geq |A|$.

CHỨNG MINH: Phần thuận là hiển nhiên. Xét phần đảo.

Nếu G không có bộ ghép X-đầy đủ thì giải thuật đường mở khi dừng luôn luôn sinh ra cây đóng và trên cây này, số X-đỉnh nhiều hơn số Y-đỉnh: vô lý. □

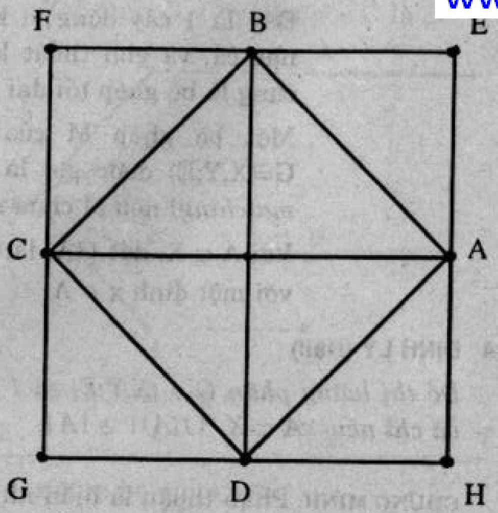
6.4 BÀI TOÁN TÔ MÀU

6.4.1 GIỚI THIỆU BÀI TOÁN

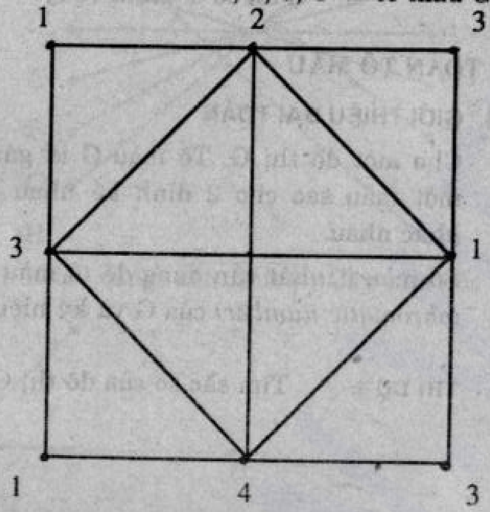
Cho một đồ thị G. Tô màu G là gán cho mỗi đỉnh của G một màu sao cho 2 đỉnh kề nhau phải được gán 2 màu khác nhau.

Số màu ít nhất cần dùng để tô màu đồ thị G gọi là sắc số *(chromatic number)* của G và ký hiệu là $\chi(G)$.

THÍ DỤ 6: Tìm sắc số của đồ thị G sau :



Nhận xét rằng 4 đỉnh A, B, C, D đôi một kề nhau nên phải được tô bằng 4 màu khác nhau. Vậy $\chi(G) \geq 4$. Hơn nữa, có thể dùng 4 màu đánh số 1, 2, 3, 4 để tô màu G như sau :



Vậy $\chi(G) = 4$. □

Bây giờ ta khảo sát bài toán đi tìm sắc số

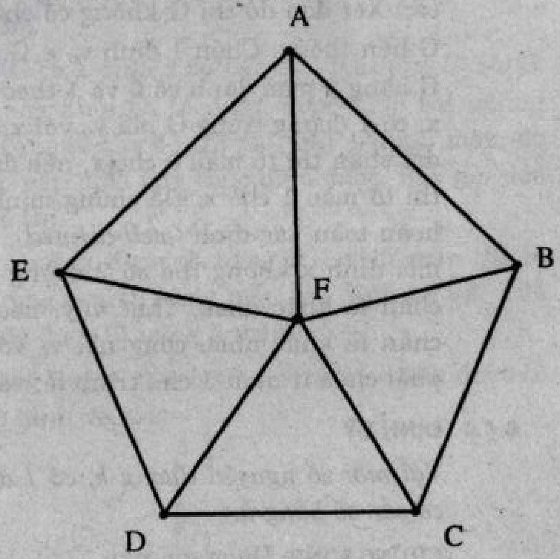
của một đồ thị cho trước.

6.4.2 ĐỊNH LÝ

Nếu G có chứa 1 đồ thị con đẳng hình với K_m thì $\chi(G) \geq m$.

CHỨNG MINH: Hiển nhiên. □

THÍ DỤ 7: Tìm sắc số của đồ thị sau :



G chứa K_3, vậy $\chi(G) \geq 3$.

Dùng 3 màu đánh số 1, 2, 3 để tô màu G. Giả sử đỉnh F tô màu 1, A màu 2 và B màu 3. Thấy ngay rằng phải tô C màu 2 và D màu 3. Bây giờ bắt buộc phải dùng một màu khác 3 màu trên để tô màu đỉnh E. Vậy $\chi(G) = 4$. □

Khi tìm sắc số của 1 đồ thị G, có 2 điều cần lưu ý :

– Nếu G' là một đồ thị con của đồ thị G thì $\chi(G') \leq \chi(G)$.

– Nếu dùng k màu để tô màu G thì không cần quan tâm đến những đỉnh có bậc < k.

6.4.3 ĐỊNH LÝ

Một đơn đồ thị có thể tô bằng 2 màu nếu nó không có chu trình lẻ.

CHỨNG MINH

($\Rightarrow$) Hiển nhiên.

($\Leftarrow$) Xét đơn đồ thị G không có chu trình lẻ. Có thể giả sử G liên thông. Chọn 1 đỉnh $v_0 \in G$. Ta tô màu các đỉnh của G bằng 2 màu đánh số 0 và 1 theo cách sau : Với mỗi đỉnh x, có 1 đường trong G nối v_0 với x, nếu đường này có chiều dài chẵn thì tô màu 0 cho x, nếu đường này có chiều dài lẻ thì tô màu 1 cho x. Để chứng minh rằng cách tô màu này hoàn toàn xác định *(well-difined)*, chỉ cần chứng minh với mỗi đỉnh x không thể có 2 đường nối v_0 với x mà có tính chẵn lẻ khác nhau. Thực vậy, nếu có 2 đường mang tính chẵn lẻ khác nhau cùng nối v_0 với x thì dễ thấy rằng G phải chứa ít nhất 1 chu trình lẻ: vô lý. □

6.4.4 ĐỊNH LÝ

Với mỗi số nguyên dương k, có 1 đồ thị không chứa K_3 và có sắc số bằng k.

CHỨNG MINH: Dùng qui nạp.

Trường hợp k = 1 hiển nhiên đúng.

Giả sử đã có đồ thị G_k không chứa K_3 và có sắc số bằng k ($k \geq 1$). Ta xây dựng đồ thị G_{k+1} gồm k bản sao của G_k và thêm n_k^k đỉnh mới (n_k là số đỉnh của G_k) theo cách sau: mỗi bộ thứ tự $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ với v_i là đỉnh thuộc bản sao G_k thứ i sẽ tương ứng với 1 đỉnh mới , đỉnh mới này được nối bằng k cạnh mới đến các đỉnh v_i trong bản sao G_k thứ i.

Dễ thấy rằng G_{k+1} không chứa K_3 và $\chi(G_{k+1}) = k + 1$. □

6.4.5 ĐỊNH LÝ 5 MÀU (Kempe-Heawood)

Mọi đồ thị phẳng đều có sắc số ≤ 5.

CHỨNG MINH

Xét đồ thị G có n đỉnh. Dùng phép chứng minh qui nạp trên n.

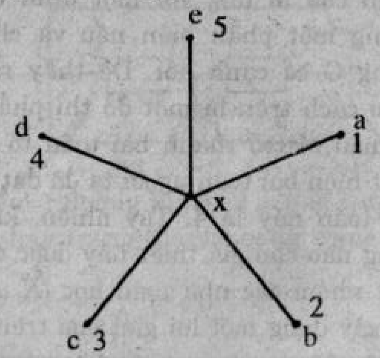
Trường hợp G có 1 đỉnh hiển nhiên đúng.

Giả sử mọi đồ thị phẳng có n đỉnh ($n \geq 1$) đều có thể tô bằng 5 màu. Coi 1 đồ thị phẳng có n + 1 đỉnh. Có thể giả sử G là đơn đồ thị.

Vì G phẳng nên G có 1 đỉnh x có bậc ≤ 5 *(bài tập 13 ch.1)*. Loại bỏ đỉnh x này khỏi G, ta nhận được 1 đồ thị phẳng mới có n đỉnh. Tô màu cho đồ thị mới này bằng 5 màu, do giả thiết qui nạp nên điều này thực hiện được. Bây giờ đưa đỉnh x vào lại đồ thị.

Nếu các đỉnh kề với x được tô bằng ít hơn 5 màu thì tô màu x bằng 1 trong 5 màu khác màu các đỉnh kề với x là xong : đồ thị G đã được tô bằng 5 màu.

Vậy chỉ xét trường hợp d(x) = 5 và 5 đỉnh kề với x được tô bằng 5 màu như hình vẽ sau:



Xét tất cả các đường trong G bắt đầu từ a và gồm các đỉnh chỉ tô bằng màu 1 và màu 3, trong các đường này nếu không có đường nào đi qua đỉnh c thì ta có thể thay đổi màu các đỉnh trên tất cả các đường nói trên theo cách đổi màu 1 thành màu 3 và ta có thể tô đỉnh x màu 1.

Nếu có 1 đường từ a đến c gồm toàn các đỉnh chỉ tô bằng màu 1 và màu 3 thì đường này cộng $\overline{xa}$ và $\overline{cx}$ sẽ tạo thành 1 chu trình, 2 đỉnh b, d không thể nằm cùng bên trong hoặc cùng bên ngoài chu trình này được. Suy ra không có đường nào từ b đến d gồm các đỉnh chỉ tô bằng màu 2 và màu 4. Vậy lại có thể thay đổi màu các đỉnh trên tất cả các đường bắt đầu từ b gồm các đỉnh chỉ tô màu 2 và màu 4 theo cách đổi màu 2 thành màu 4 và ngược lại. Lúc này, b và d có cùng màu 4 và ta có thể tô đỉnh x bằng màu 2. □

6.4.6 BÀI TOÁN 4 MÀU

Trên một bản đồ bất kỳ, ta nói nó được tô màu nếu mỗi miền của nó được tô một màu xác định sao cho 2 miền kề nhau (chung một phần biên) phải được tô bằng 2 màu khác nhau. Vấn đề cần dùng tối thiểu bao nhiêu màu để tô một bản đồ bất kỳ đã được đặt ra từ khoảng giữa thế kỷ 19. Mô hình toán học của bài toán này như sau : Với mỗi bản đồ M cho trước, ta xây dựng một đồ thị G tương ứng : mỗi miền của M ứng với một đỉnh của G, 2 miền của M có chung một phần biên nếu và chỉ nếu 2 đỉnh tương ứng trong G có cạnh nối. Dễ thấy rằng đồ thị G nhận được theo cách trên là một đồ thị phẳng. Như thế thì bài toán tô màu M trở thành bài toán tô màu G. Ngay từ khi mới xuất hiện bài toán người ta đã đặt giả thiết rằng lời giải của bài toán này là 4. Tuy nhiên, không có một chứng minh đúng nào cho giả thiết này được đưa ra cho đến năm 1976, một nhóm các nhà toán học *(K. Appel, W. Haken,J. Koch)* đã xây dựng một lời giải dựa trên các kết quả do máy tính IBM 360 cung cấp (mất hàng ngàn giờ trên máy tính) đã khẳng định được giả thiết 4 màu là đúng.

Giờ đây, ta có

6.4.6.1 Định lý 4 màu (Appel-Haken)

Mọi đồ thị phẳng đều có sắc số ≤ 4.

Lời giải của bài toán 4 màu là 1 sự kiện rất đáng chú ý vì

đây là lần đầu tiên một giả thuyết toán học nổi tiếng đã được chứng minh bằng khả năng tổng hợp của con người và máy tính.

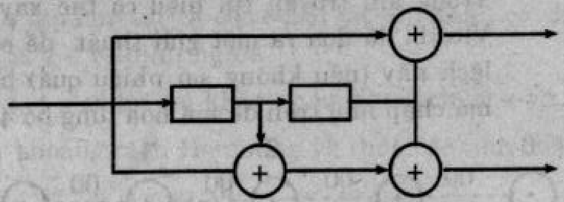
6.5 BÀI TOÁN MÃ VỚI GIẢI THUẬT VITERBI

6.5.1 BÀI TOÁN MÃ VÀ MÁY MÃ CHẬP

Giả sử S muốn gởi đến R một bản thông tin dưới dạng 1 chuỗi các bit nhị phân. Trong quá trình truyền thông tin có thể có một số sai lệch : bit 0 thành bit 1 hoặc ngược lại.

Để có thể phát hiện và sửa các bit sai này, người ta sẽ mã hóa dữ liệu rồi mới chuyển đi.

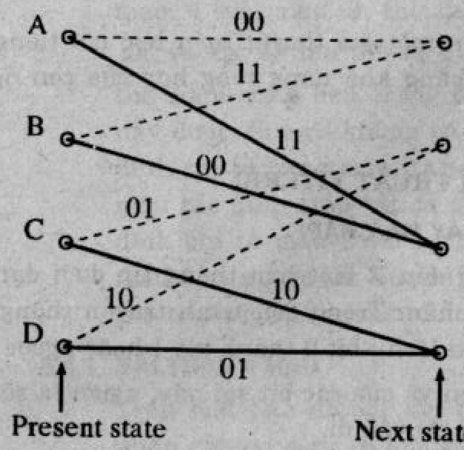
Một máy hữu hạn trạng thái (FSM : *Finite State Machine*) dùng để mã hóa dữ liệu gọi là máy mã chập *(convolutional encoder)*. Có nhiều loại máy mã chập, dưới đây ta xét một máy mã chập hết sức đơn giản, đó là một mạch tuần tự gồm 2 D–flip flop và 3 cổng XOR:



Mạch này gồm 1 đường input, 2 đường output và tương ứng với máy hữu hạn trạng thái có bảng trạng thái sau :

Present State	Next State		Output	
	0	1	0	1
A ≡ 00	A	C	00	11
B ≡ 01	A	C	11	00
C ≡ 10	B	D	01	10
D ≡ 11	B	D	10	01

Ta cũng có thể thay bảng trạng thái này bằng hình vẽ sau gọi là đơn vị mắt cáo của máy:



Cạnh------- tương ứng với input 0

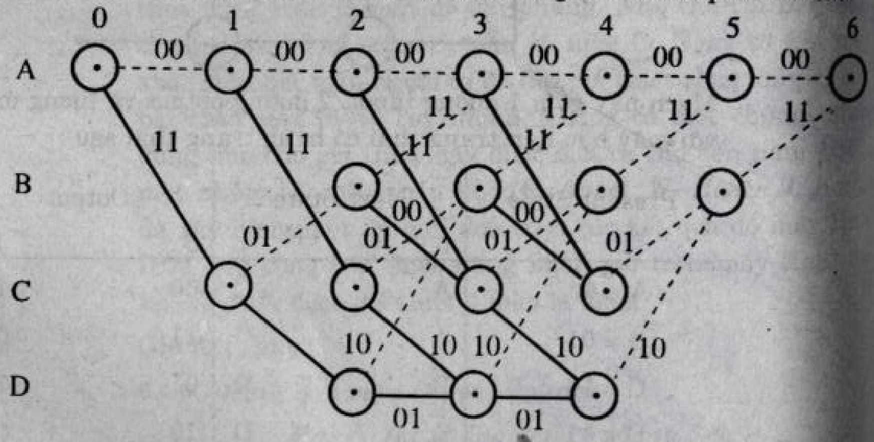
và cạnh——tương ứng với input 1

Nhãn của cạnh tương ứng với output

Máy bắt đầu ở trạng thái đầu A và khi đưa một chuỗi dữ liệu vào máy, ta nhận được chuỗi output tương ứng gọi là chuỗi đã mã hóa.

6.5.2 GIẢI THUẬT VITERBI

Trong khi truyền tín hiệu có thể xảy ra những sai lệch, Viterbi đã đưa ra một giải thuật để có thể sửa những sai lệch này (nếu không sai nhiều quá) bằng cách dùng máy mã chập như trên để mã hóa từng bó 4 bit input như sau:



Hình vẽ trên được suy ra từ đơn vị mắt cáo của máy và xem như một đồ thị có hướng, tất cả các cạnh đều được

định hướng từ trái sang phải, đồ thị này gọi là biểu đồ mắt cáo cụt ở mức 4 của máy mã chập. Bây giờ, mỗi bó 4 bit dữ liệu tương ứng với 1 đường có hướng từ đỉnh A_0 đến A_6 (gọi là 1 đường mã) và cũng tương ứng với một chuỗi 12 bit gọi là chuỗi mã hóa (gọi là 1 từ mã) của 4 bit dữ liệu.

THÍ DỤ 8:

Data	Codepath	Codeword
0101	$A_0A_1C_2B_3C_4B_5A_6$	001101000111
1110	$A_0C_1D_2D_3B_4A_5A_6$	111001101100

Dễ thấy rằng có tất cả 16 đường mã tương ứng với 16 bó 4 bit. Bây giờ giả sử có 2 người là S và R. S gởi cho R một bản thông tin dưới dạng các bit nhị phân bằng cách cứ 4 bít lại được mã hóa thành 12 bit từ mã tương ứng theo cách trình bày trên rồi mới chuyển đến R.

Vấn đề là khi R nhận được chuỗi 12 bit này, có thể có vài bit bị sai. Làm thế nào để phát hiện và sửa các bit sai này ?

Gọi X là tập hợp tất cả các chuỗi bit nhị phân có chiều dài 12. Với $x, y \in X$, định nghĩa

$$\delta(x,y) = \text{số bit sai khác nhau giữa 2 chuỗi } x \text{ và } y.$$

δ gọi là khoảng cách Hamming và thỏa các tính chất:

i) $\delta(x, y) \geq 0$

ii) $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

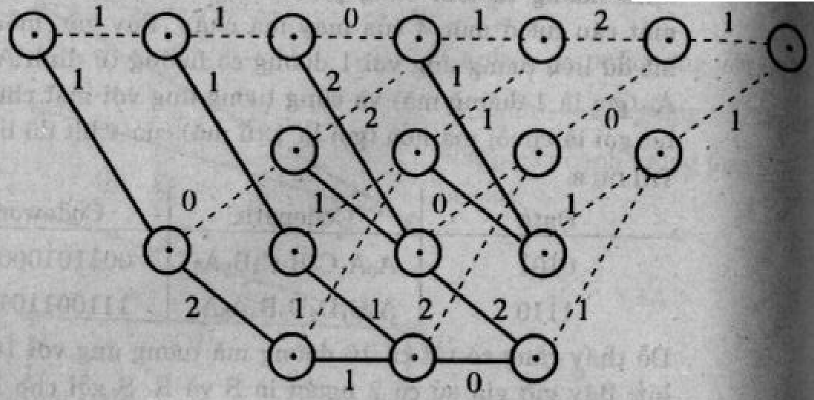
iii) $\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \delta(x,z)$

với mọi $x, y, z \in X$.

Ta kiểm chứng dễ dàng rằng nếu a, b là 2 từ mã (trong số 16 từ mã) thì $\delta(a,b) \geq 5$. Vậy, nếu giả thiết rằng trong 12 bit chuyển đi, số bit sai không quá 2 thì từ mã đúng chính là từ mã có khoảng cách đến chuỗi 12 bit nhận được nhỏ nhất. Thí dụ R nhận được chuỗi 12 bit sau:

100100011110

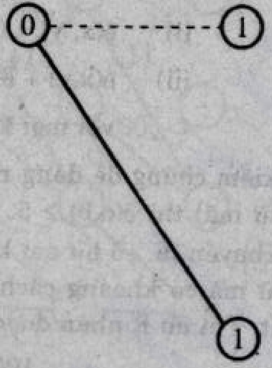
Trên mỗi cạnh của biểu đồ mắt cáo cụt vẽ ở trên, ta ghi số bit sai khác so với các bit tín hiệu nhận được



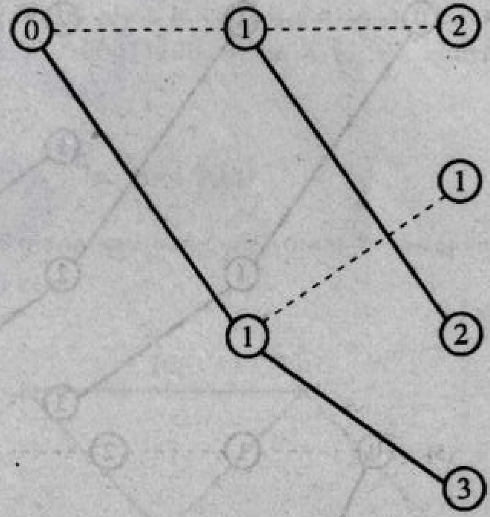
Như vậy, ta có 1 đồ thị có hướng có trọng số. Thấy ngay rằng mỗi từ mã ứng với 1 đường từ A_0 đến A_6 và chiều dài của đường này chính là khoảng cách giữa từ mã với chuỗi 12 bit nhận được. Do đó, tìm từ mã có ít sai lệch nhất với 12 bit nhận được chính là tìm đường mã có chiều dài ngắn nhất và ta sẽ dùng giải thuật Dijkstra để giải quyết.

Dưới đây là sự trình bày ngắn gọn các bước tìm con đường ngắn nhất nối A_0 với A_6 :

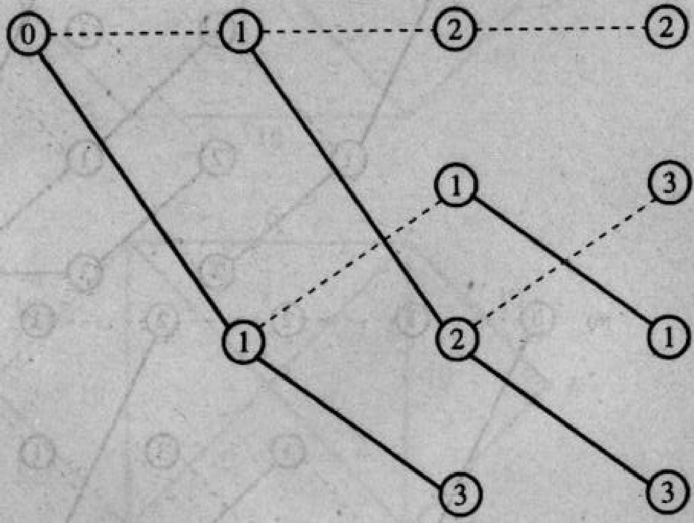
(1)



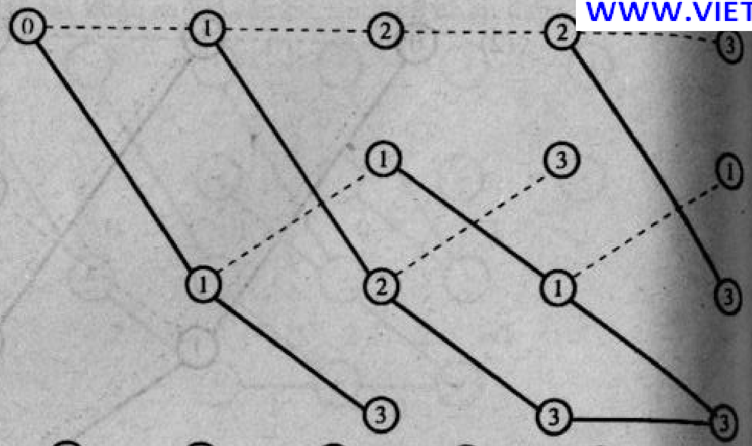
(2)



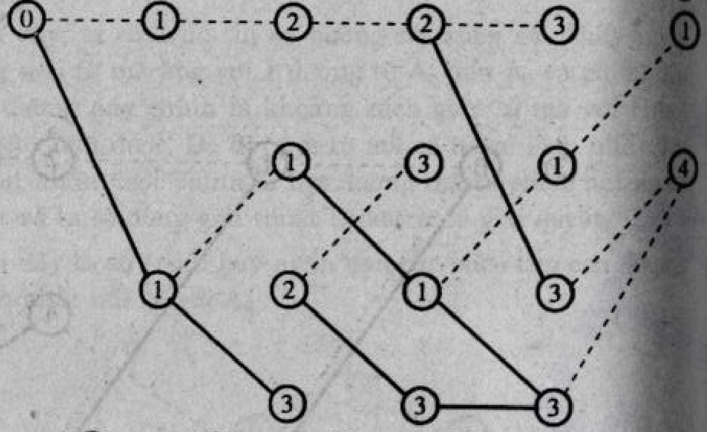
(3)



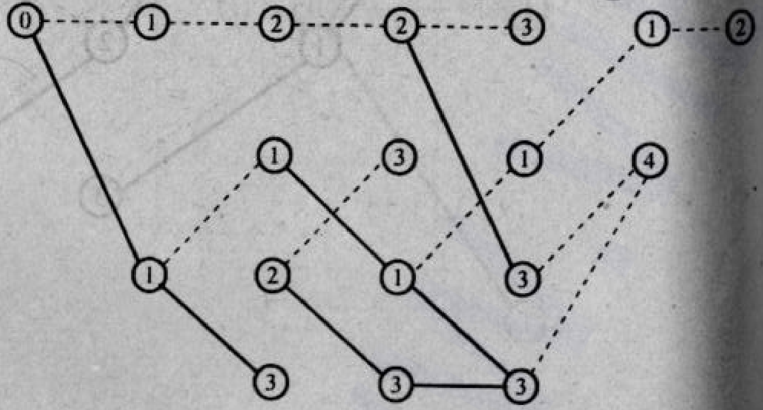
(4)



(5)



(6)

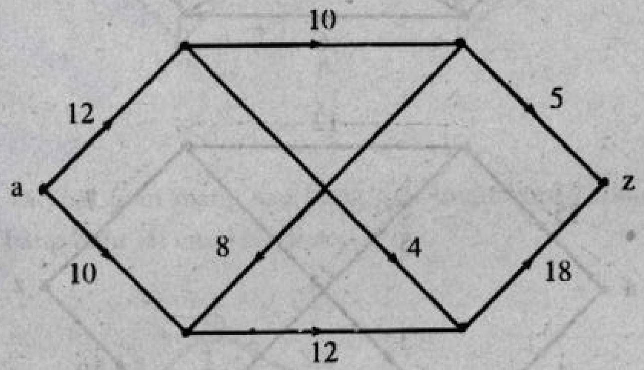


Con đường ngắn nhất là $A_0C_1B_2C_3B_4A_5A_6$. Suy ra từ mã cần tìm là 110100011100 và bó 4 bit đã chuyển đến là 1010. □

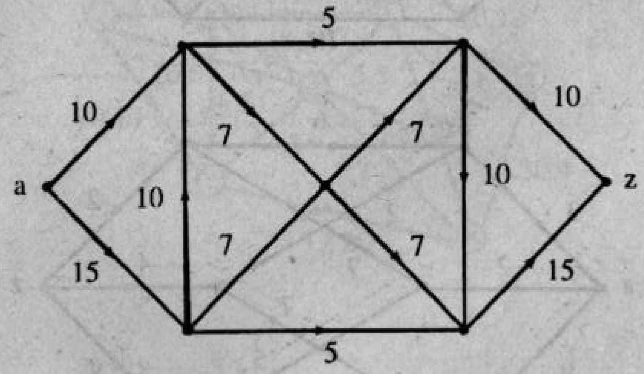
■ BÀI TẬP

1. Giải các bài toán mạng sau bằng giải thuật Ford-Fulkerson bắt đầu bằng hàm tải zero.

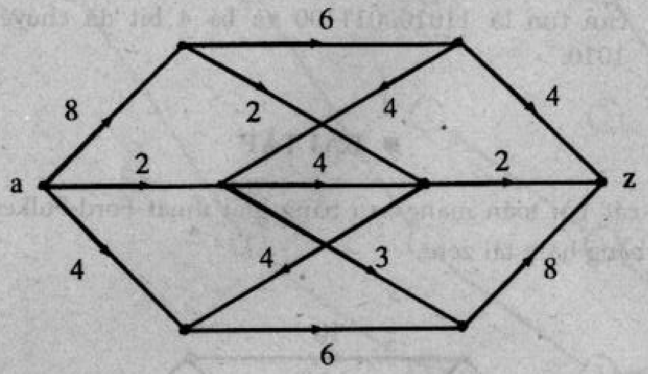
a)



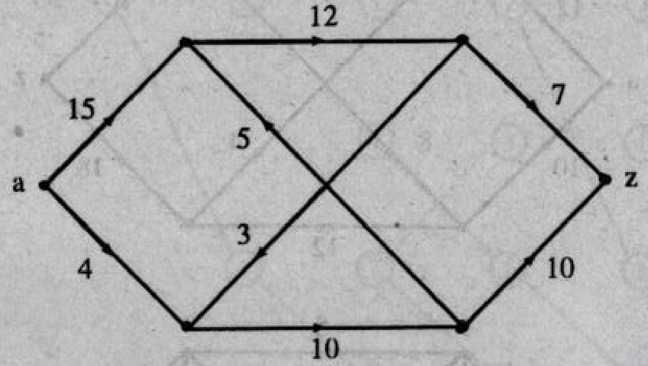
b)



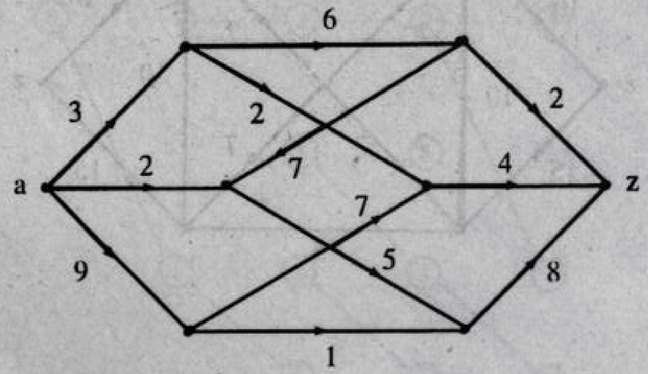
c)



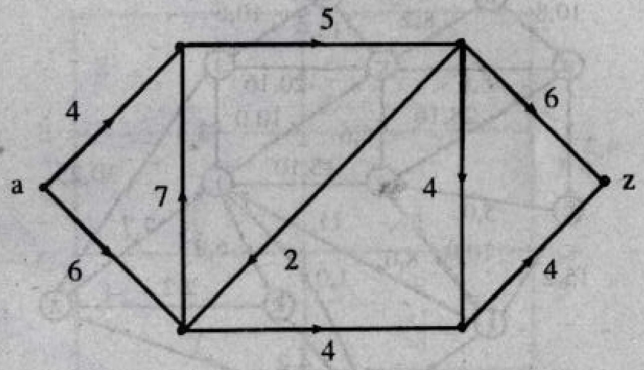
d)



e)

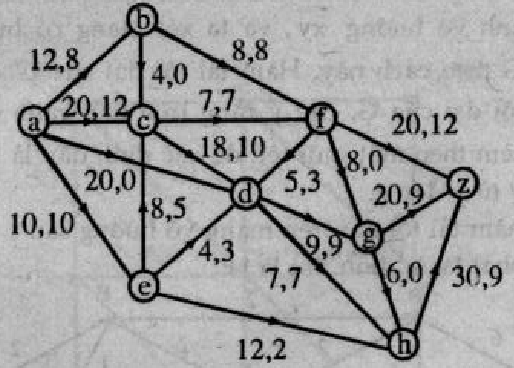


f)

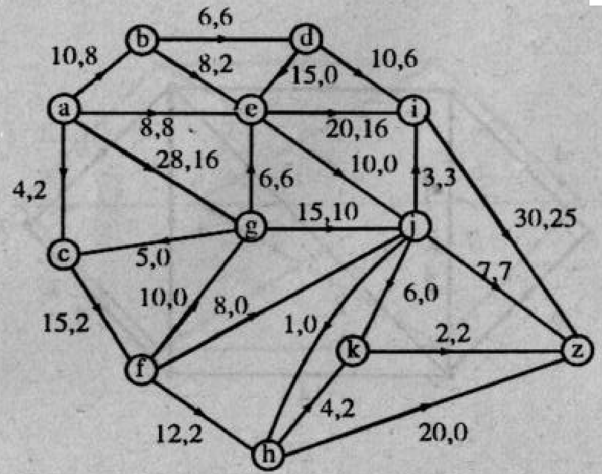


2. Giải các bài toán mạng sau bằng giải thuật Ford-Fulkerson, bắt đầu bằng hàm tải cho kèm theo:

a)



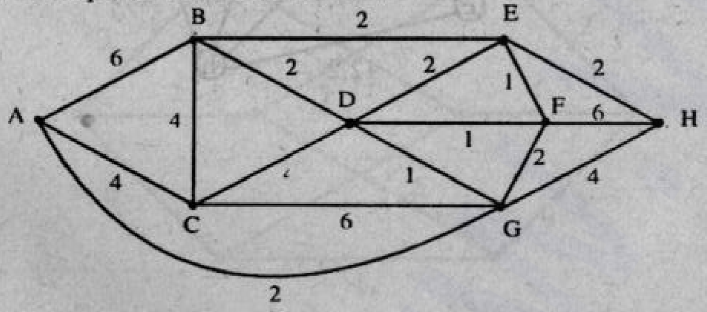
b)



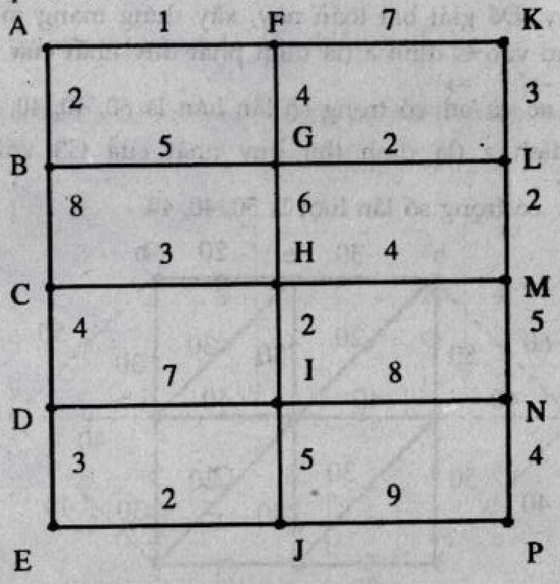
3. *(Undirected Network).* Để tìm hàm tải tối đại trên một mạng vô hướng G, ta xem mỗi cạnh vô hướng $\overline{xy}$ như 2 cạnh có hướng $\overrightarrow{xy}$ và $\overrightarrow{yx}$, trọng số của 2 cạnh có hướng này cùng bằng trọng số của cạnh vô hướng $\overline{xy}$, và ta xét mạng có hướng G' nhận được từ G theo cách này. Hàm tải tối đại của G' cũng chính là hàm tải tối đại của G, chú ý rằng trên mỗi cạnh $e = \overline{xy}$, ta sẽ ghi $\varphi(e)$ kèm theo một mũi tên để xác định đây là lượng tải từ x đến y hay từ y đến x.

Hãy tìm hàm tải tối đại trên mạng vô hướng sau :

a) Đỉnh phát là A, đỉnh thu là H:

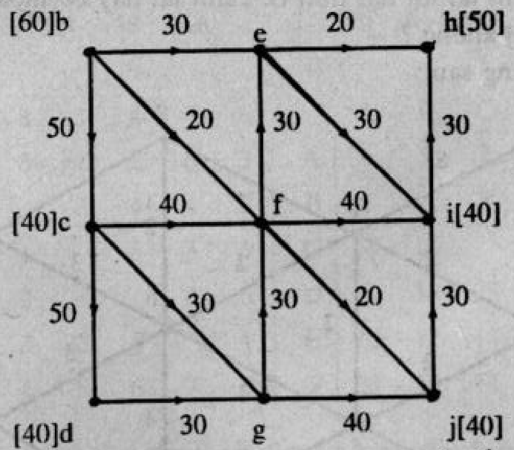


b) Đỉnh phát B, đỉnh thu là J.



4. *(Flow Network with Supplies and Demands).*

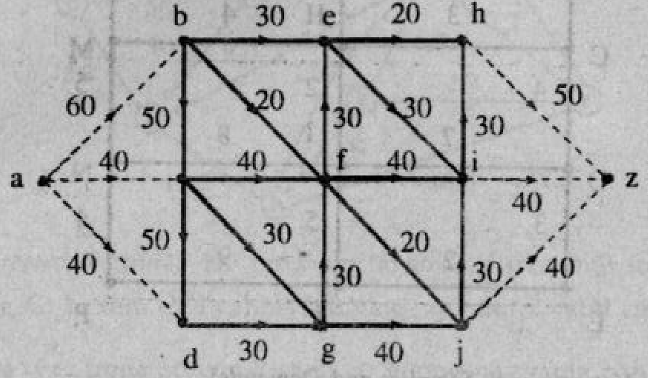
Xét mạng G sau :



có 3 đỉnh phát b, c, d với khả năng cung cấp lần lượt là 60, 40 và 40; có 3 đỉnh thu h, i, j với khả năng tiếp nhận lần lượt là 50, 40 và 40.

Ta muốn tìm hàm tải tối đại thỏa yêu cầu của các c

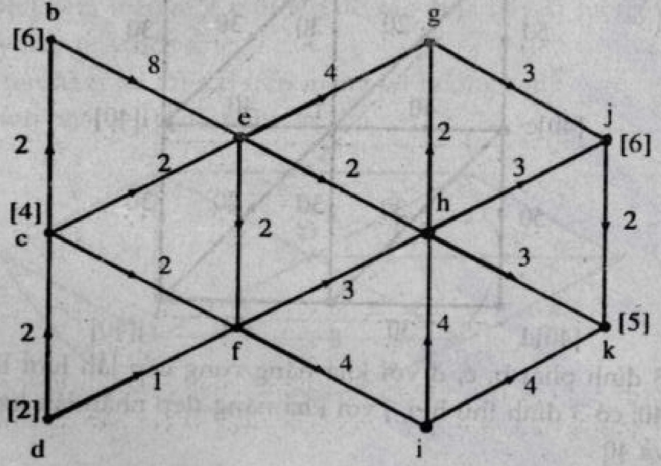
mạng này. Để giải bài toán này, xây dựng mạng mới G' bằng cách thêm vào G đỉnh a (là đỉnh phát duy nhất của G') với các cạnh $\vec{ab}, \vec{ac}$ và $\vec{ad}$ có trọng số lần lượt là 60, 40, 40, cũng thêm vào G đỉnh z (là đỉnh thu duy nhất của G') với các cạnh $\vec{hz}, \vec{iz}, \vec{jz}$ có trọng số lần lượt là 50, 40, 40.



Hàm tải tối đại trên G' tương ứng với hàm tải tối đại trên G.

a) Tìm hàm tải tối đại trên G. Hàm tải này có thỏa yêu cầu của h, i và j không ?

b) Xét mạng sau :



n tải thỏa yêu cầu của j và k (nếu có)

c) Làm lại câu b) trong đó đổi chiều cạnh $\vec{hg}$.

5. Giải bài toán du lịch cho các đồ thị có ma trận trọng số sau :

a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix} & 3 & 9 & 7\\ 3 & & 6 & 5\\ 5 & 6 & & 6\\ 9 & 7 & 4 & \end{bmatrix}\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}A&B&C&D\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\end{array} & \begin{bmatrix} & 9 & 12 & 6\\ 4 & & 8 & 8\\ 6 & 15 & & 10\\ 5 & 8 & 11 & \end{bmatrix}\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\\E\end{array} & \begin{bmatrix} & 43 & 30 & 27 & 16\\ 20 & & 5 & 13 & 35\\ 12 & 27 & & 46 & 48\\ 7 & 14 & 30 & & 8\\ 21 & 25 & 18 & 16 & \end{bmatrix}\end{array}$$

d)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\\E\end{array} & \begin{bmatrix} & 12 & 9 & 8 & 8\\ 14 & & & 10 & 15\\ 7 & 12 & & 9 & \\ 20 & 9 & 15 & & 8\\ 16 & 15 & 14 & 13 & \end{bmatrix}\end{array}$$

e)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \begin{bmatrix} & 3 & 4 & 2 & 6 & 3\\ 5 & & 3 & 4 & 4 & 5\\ 4 & 1 & & 5 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 6 & & 4 & 5\\ 3 & 3 & 3 & 5 & & 4\\ 7 & 4 & 5 & 6 & 7 & \end{bmatrix}\end{array}$$

f)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}A&B&C&D&E&F\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\\E\\F\end{array} & \begin{bmatrix} & 5 & 7 & 9 & 12 & 15\\ 8 & & 8 & 10 & 13 & 17\\ 15 & 12 & & 9 & 7 & 3\\ 8 & 18 & 25 & & 12 & 9\\ 10 & 12 & 14 & 16 & & 18\\ 20 & 16 & 14 & 12 & 10 & \end{bmatrix}\end{array}$$

6. Dùng giải thuật tìm nhanh để tìm lời giải gần đúng của bài toán du lịch cho các đồ thị có ma trận trọng số sau :

a)

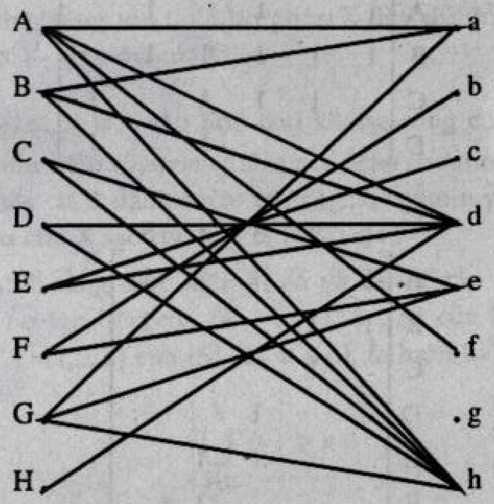
	1	2	3	4	5	6
1	–	31	33	23	72	34
2	31	–	34	40	52	54
3	33	34	–	15	41	43
4	23	40	15	–	53	51
5	72	52	41	53	–	42
5	34	54	43	51	42	–

b)

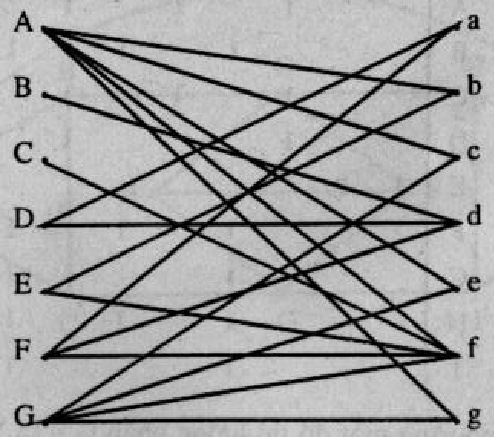
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	–	70	53	93	91	50	63	30	144	88
1	70	–	35	111	68	64	38	71	77	33
2	53	35	–	78	45	29	60	42	95	62
3	93	111	78	–	60	53	135	65	147	140
4	91	68	45	60	–	45	102	69	88	93
5	50	64	29	53	45	–	83	24	118	90
6	63	38	60	135	102	83	–	80	107	34
7	30	71	42	65	69	24	80	–	136	95
8	144	77	95	147	88	118	107	136	–	75
9	88	33	62	140	93	90	34	95	75	–

7. Tìm bộ ghép tối đại cho các đồ thị lưỡng phân sau :

a)



b)



c)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\end{array} & \begin{bmatrix}1&&1&&1&\\1&1&1&1&1&\\&1&1&1&&1\\&&&1&&1\end{bmatrix}\end{array}$$

d)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\\E\\F\end{array} & \begin{bmatrix}1&&&&1\\1&1&&&1\\&1&&&\\&&1&&\\&&1&1&\\&&&1&\end{bmatrix}\end{array}$$

e)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\\E\\F\\G\\H\\I\end{array} & \begin{bmatrix}&&1&&1&&1&&1\\&&&1&&1&&1&\\&&1&&1&&1&&\\&&1&&&&1&&1\\1&1&&&&&&&\\&&&1&&1&&1&\\&&&1&&&&1&\\&&&1&&1&&1&\\&&&1&&&&1&\end{bmatrix}\end{array}$$

8. Chứng minh rằng một đồ thị lưỡng phân $G = (X,Y;E)$ có một bộ ghép gồm t cạnh nếu và chỉ nếu

với mọi $A \subset X$, $|\Gamma(A)| \geq |A| + t - |X|$

9. Cho 1 đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$ và giả sử mỗi X-đỉnh kề với đúng m Y-đỉnh và mỗi Y-đỉnh cũng kề với đúng m X-đỉnh.

Chứng minh rằng tồn tại 1 bộ ghép X-đầy đủ đồng thời cũng là 1 bộ ghép Y- đầy đủ của G.

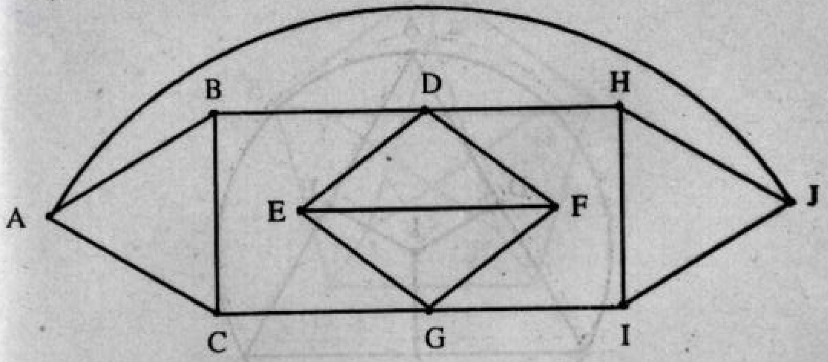
10. Cho $S_1, S_2, \ldots, S_n$ là n tập hợp con không rỗng của 1 tập hợp X. Một hệ biểu diễn *(System of Distinct Representatives: SDR)* của họ tập hợp này là 1 danh sách $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ gồm n phần tử đôi một khác nhau của X sao cho $s_i \in S_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Chứng minh rằng điều kiện ắt có và đủ để tồn tại một hệ biểu diễn cho họ tập hợp con $\{S_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ của X là với mọi họ con $\{S_{i_j} \mid j = 1, \ldots, k\}$ của $\{S_i\}$ $(1 \leq k \leq n)$, ta luôn luôn có :

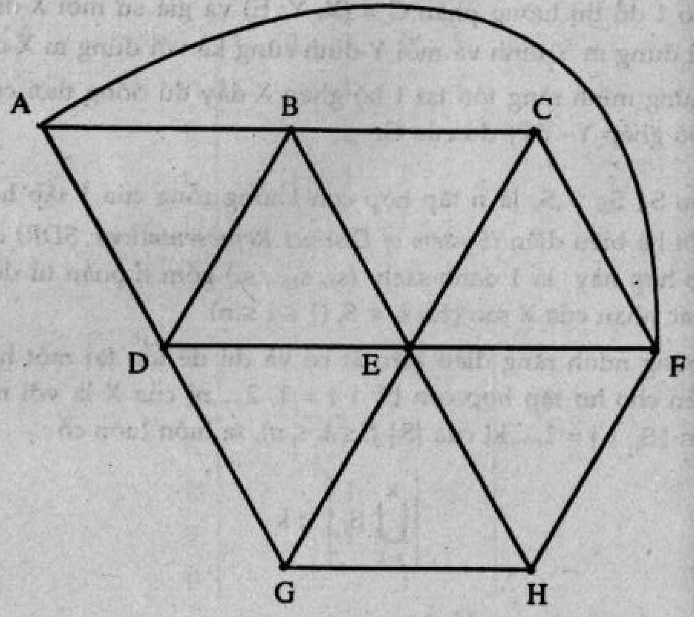
$$\left|\bigcup_{j=1}^{k} S_{i_j}\right| \geq k$$

11. Tìm sắc số của các đồ thị sau :

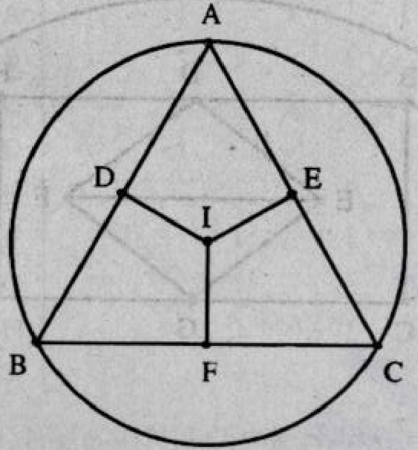
a)

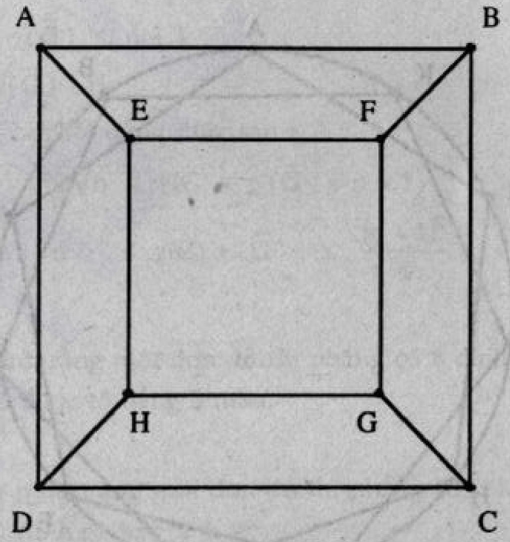


b)

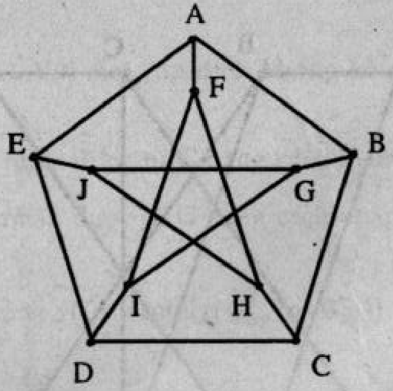


c)

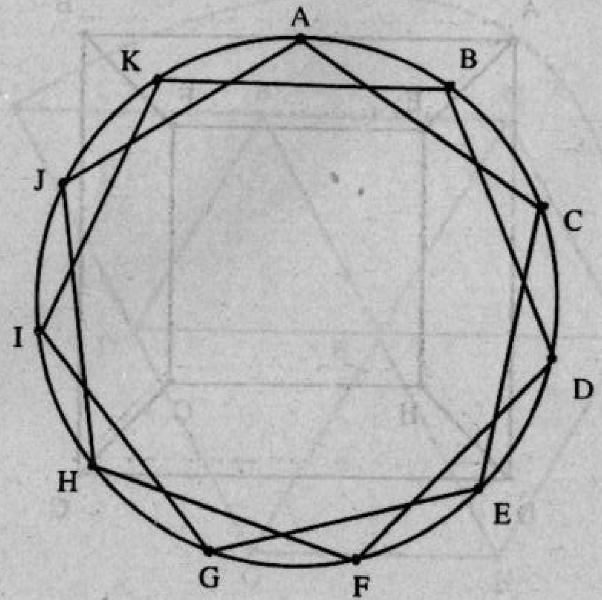




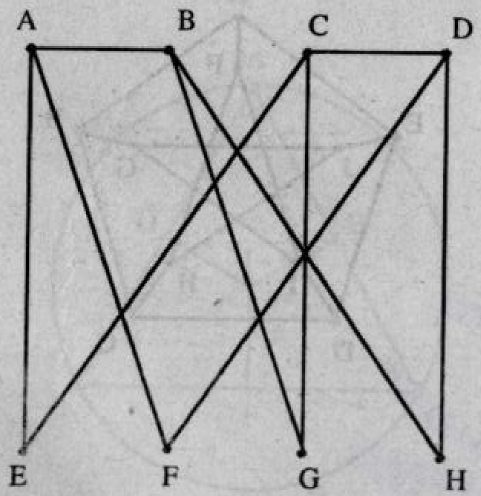
e)



f)



g)



12. Gọi $\overline{G}$ là đồ thị bù của đồ thị G. Chứng minh rằng nếu G có n đỉnh thì :

a) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

b) $\chi(G).\ \chi(\overline{G}) \geq n$

c) Suy ra các bất đẳng thức sau :

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

và $$n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

13. Chứng minh rằng một đơn đồ thị phẳng có 8 đỉnh và có 13 cạnh không thể được tô bằng 2 màu.

14. a) Chứng minh rằng mọi đơn đồ thị phẳng có ít hơn 12 đỉnh thì sẽ có 1 đỉnh có bậc ≤ 4.

b) Dùng kết quả phần a để chứng minh mọi đơn đồ thị phẳng có ít hơn 12 đỉnh có thể tô bằng 4 màu.

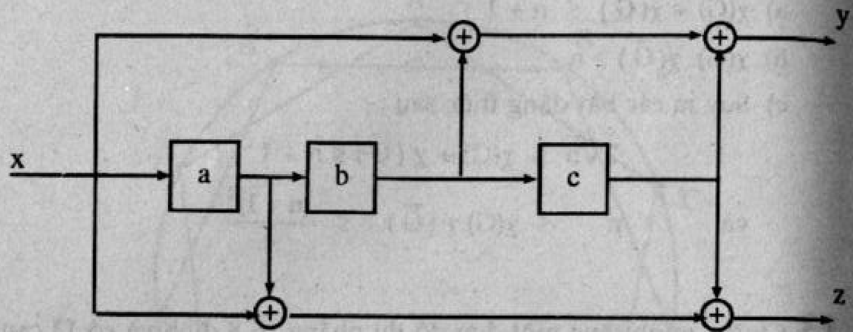
15. Cho 1 đồ thị G. Với mọi cặp đỉnh không kề nhau x, y của G, ta định nghĩa:

G^{+}_{xy} là đồ thị nhận được từ G bằng cách thêm vào G cạnh $\overline{xy}$,

G^{c}_{xy} là đồ thị nhận được từ G bằng cách nhập x với y vào thành 1 đỉnh.

Chứng minh rằng $\chi(G) = \min[\chi(G^{+}_{xy}), \chi(G^{c}_{xy})]$

16. Xem máy mã chập sau :



a) Lập bảng trạng thái rồi vẽ đơn vị mắt cáo của máy.

b) Vẽ biểu đồ mắt cáo cụt ở mức 3 (chọn trạng thái đầu là abc = 000).

17. Giải mã bằng giải thuật Viterbi các chuỗi mã 12 bit sau :

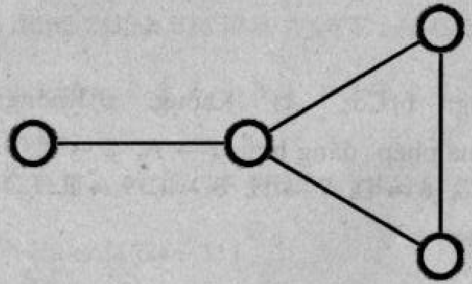
a) 110101110100 b) 111010000111 c) 011101011011

☑ PHỤ LỤC

(Hướng dẫn & Đáp số)

Chương 1

1.

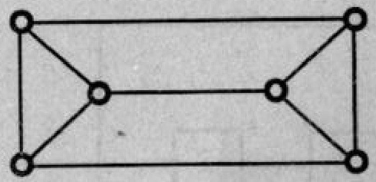


3. a) $2^{\binom{n}{2}}$ b) $3^{\binom{n}{2}}$ c) $2^{\binom{n}{2}+n}$

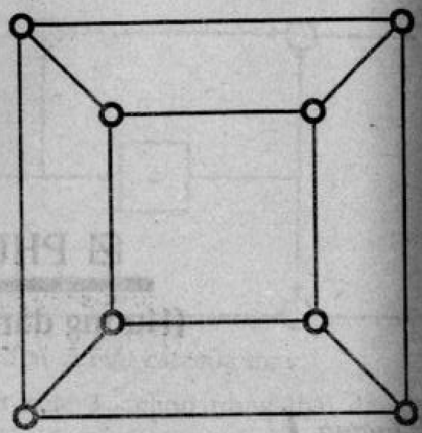
d) Với $n = 2k$: 2^{k^2}, với $n = 2k + 1$: $2^{k(k+1)}$

5. a) K_4 b) Không có.

c)



d)



7. 12

9. Không.

11. 6.

14. a) Không; b) Có; c) Không; d) Không; e) Không

f) Có qua phép đẳng hình $1 \to A,\ 2 \to B,\ 3 \to E,\ 4 \to C,\ 5 \to G,\ 6 \to D,\ 7 \to H,\ 8 \to I,\ 9 \to F$.

g) Không.

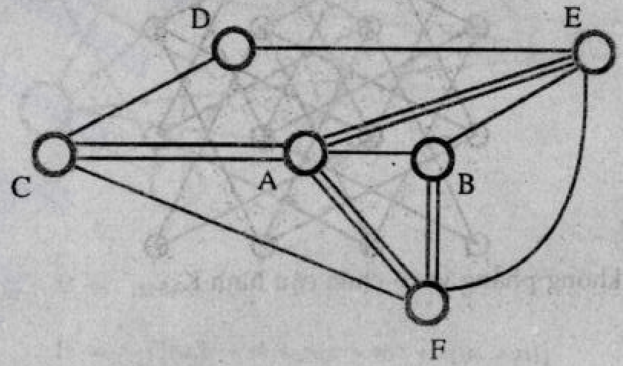
16. a) Không. b) Không. c) Không.

▲

Chương 2

▼

1. a)



b) Vì G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ là A và E nên G có đường Euler.

3. a) Chu trình Euler : 7 3 5 6 3 1 4 2 5 2 1 0 0 4 6 7 7.

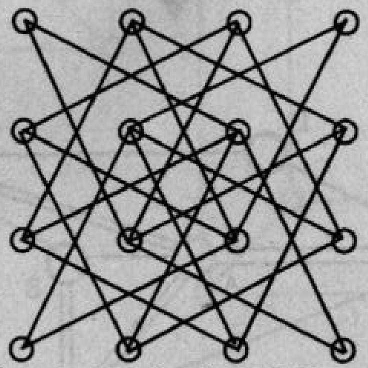
b) Đường Euler :

A B C D H A I C F G F E D J A J B H G E H I J

4. Số chu trình Euler là $(2a - 1)\,!$

▲

4. a)



b) G không phẳng vì có chứa cấu hình $K_{3,3}$.

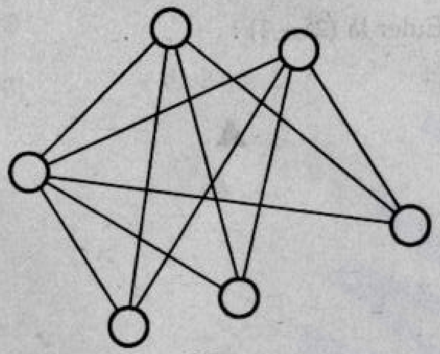
5. $V = 8$

7. $E = 14;\ F = 7$

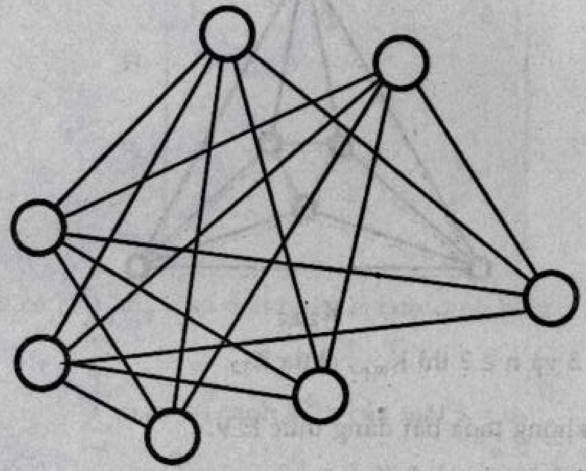
9. a) K_n : $V = n$, $E = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $g = 3$ $(n \geq 3)$

b) $K_{m,n}$: $V = m + n$, $E = mn$, $g = 4$ $(m, n \geq 2)$

11. a)



$K_{1,2,3}$



$K_{2,2,3}$

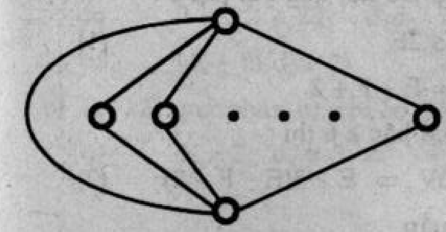
b) $K_{m,n,r}$: $V = m = n + r$

$$E = \frac{1}{2}[m(n+r) + n(r+m) + r(m+n)]$$

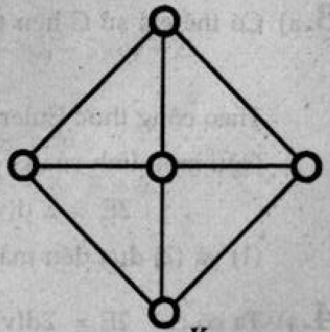
$$= mn + nr + rm$$

$$g = 3.$$

c) $K_{m,n,r}$ phẳng $\Leftrightarrow$ 2 trong 3 số m, n , r bằng 1 hay cả 3 số này cùng ≤ 2.



$K_{1,1,r}$



$K_{1,2,2}$