https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

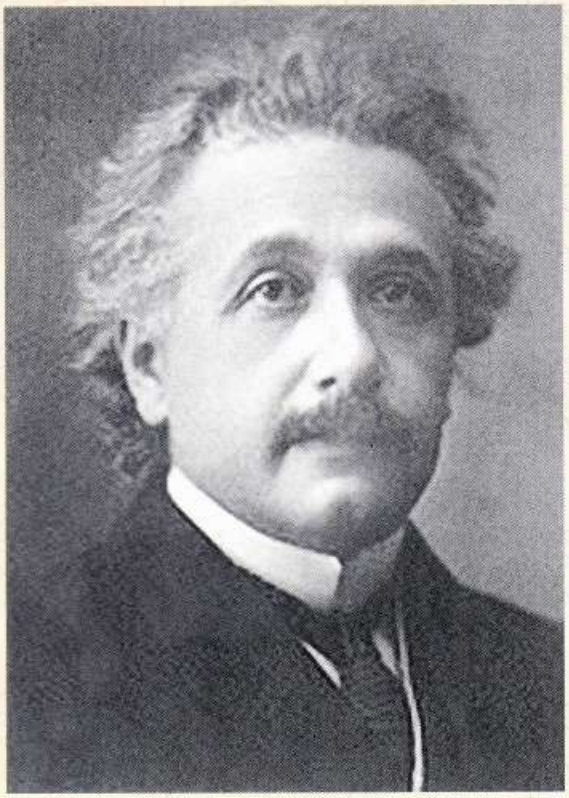
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

6 2006 Số 348

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA

Hướng dẫn giải Đề số 5



Albert Einstein
(1879 - 1955)

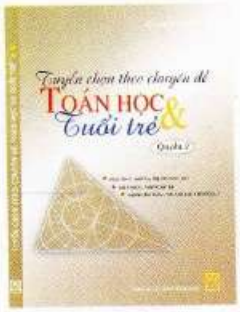
Về sách ĐẠI SỐ 10 nâng cao

Học ở ngoài toán

40 HỌC SINH VIỆT NAM DỰ THI OLYMPIC SINGAPORE MỞ RỘNG

VŨ KIM THỦY

Sáng 30 tháng 5 năm 2006, tại Hội trường Lê Văn Thiêm, 19 Lê Thánh Tông Hà Nội, đã diễn ra cuộc thi Olympic Singapore 2006 (SMO 2006). Đây là cuộc thi lớn của Singapore với hàng nghìn học sinh các nước Đông Nam Á tham gia.Việt Nam tham gia từ năm 2004 do Hội Toán học Hà Nội đăng cai. Có 40 học sinh Hà Nội, Vĩnh Phúc, Phú Thọ và Hải Dương dự thi. Đề thi gồm 35 bài toán làm trong 150 phút. Mười bài đầu ghi đáp số và 25 bài còn lại ghi vắn tắt cách giải bằng tiếng Anh và đáp số. Bài thi sau đó niêm phong gửi sang Singapore. Kết quả cùng các số liệu phân tích kết quả của từng nước,từng trường, từng câu toán sẽ được gửi cho các nước vào tháng 8. Tạp chí Toán học Tuổi trẻ sẽ đăng kết quả của học sinh Việt Nam ngay sau khi nhận được thông tin và Bằng chứng nhận giải thưởng.



SÁCH MỚI 2006 ĐANG PHÁT HÀNH !

QUYỂN 2

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí đang phát hành **Quyển 2** cuốn **Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ** thuộc **Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ**. Từ các bài đã in trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ những năm gần đây, sách tập hợp lại các bài viết theo ba chuyên đề nhằm phục vụ độc giả làm tài liệu tham khảo bổ ích.

Chuyên đề thứ nhất : **Toán THCS - Những tìm tòi sáng tạo** tuyển những bài tìm tòi, khám phá và nâng cao các kiến thức được trình bày trong SGK toán THCS. Nó giúp độc giả đi xa hơn, hiểu sâu hơn những gì cô đọng trong SGK. Cả thầy và trò THCS đều tìm thấy những điều lí thú, hấp dẫn cho mình khi đọc chương này.

Chuyên đề thứ hai : **Toán THCS - Những đề thi**, đúng như tên gọi, nó sẽ bao gồm các đề thi vào THPT và các đề thi học sinh giỏi THCS. Đề thi bao giờ cũng là mối quan tâm của người dạy và người học. Các đề thi có khối lượng kiến thức vừa tinh chất vừa phong phú, cung cấp cho các thầy, cô nguồn tư liệu giảng, luyện đa chiều và các bạn học sinh được thêm cơ hội thử sức mình trước kì thi. Chương này xếp thành hai phần, phần đầu là các đề thi và phần sau là hướng dẫn giải.

Chuyên đề thứ ba : **Những bài toán - Lời giải sao cho đúng?** là những bài toán nhỏ, những câu chuyện bàn về đúng, sai và muôn vàn cái bẫy cùng những vấp váp đi cùng người giải toán. Tưởng đúng mà không phải là đúng. Những bài đó giúp ta có cách nhìn tỉnh táo và khúc chiết ở mỗi bước lập luận, trong từng trường hợp của mỗi bài toán. Điều này cũng giúp các bạn có được phẩm chất đáng quý là cẩn trọng và chuẩn xác trước các vấn đề đặt ra.

Sách dày 252 trang, khổ 19 × 26,5 cm, giá bán lẻ là 30000 đồng đã có mặt trên thị trường. Đề nghị các đơn vị mua nhiều gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về theo địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ : 187B Giảng Võ, Hà Nội

Địa chỉ liên hệ để biết các thông tin chi tiết:

ĐT/FAX: 04.5144272; Email: toanhoctt@yahoo.com

Trân trọng cảm ơn.

THÔNG BÁO

Tăng giá báo từ tháng 7.2006

Kể từ tháng 7.2006 giá bán lẻ mỗi số Toán học và Tuổi trẻ là 5000 đồng (năm nghìn đồng). Trân trọng thông báo để độc giả được biết.

THTT

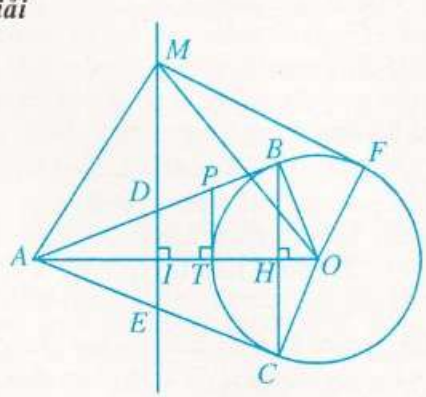
Từ một bài toán ôn tập LỚP 9

ĐẶNG VĂN BIỂU
(GV THCS Đông Du, Gia Lâm, Hà Nội)

Tình cờ tôi gặp một bài toán trong đề cương ôn tập học kì I lớp 9 của trường THCS Láng Thượng, Ba Đình, Hà Nội sau đây.

✪ **Bài toán 1.** *Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O), (B, C là các tiếp điểm). Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Trên đường thẳng DE lấy điểm M bất kì, dựng tiếp tuyến MF với đường tròn (O) (F là tiếp điểm). Chứng minh rằng MF = MA.*

Lời giải



Hình 1

Gọi I, H lần lượt là giao điểm của OA với DE và BC. Chú ý rằng $PB = PT < AP$ (h. 1) nên đường thẳng DE không có điểm chung với (O), do đó M nằm ngoài (O).

Ta có (nếu M trùng với I thì coi $MI = 0$):

$$MF^2 = MO^2 - OF^2 = MI^2 + OI^2 - OB^2 \quad (1)$$

Lại có

$$IO^2 = (IH + HO)^2 = IH^2 + HO^2 + 2IH.HO$$
$$= IH^2 + HO^2 + AH.OH \quad (2)$$
$$OB^2 = OH.OA = OH.(OH + HA)$$
$$= OH^2 + OH.HA \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$MF^2 = MI^2 + IH^2 + HO^2 + AH.OH - HO^2$$
$$- AH.OH = MI^2 + IH^2 = MI^2 + IA^2 = MA^2.$$

Do đó $MF = MA$ (đpcm).

Từ kết quả của bài toán 1 xuất hiện câu hỏi : Có điểm M nào nằm ngoài đường thẳng DE thỏa mãn đoạn tiếp tuyến MF bằng MA không?

✪ **Bài toán 2.** *Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Tìm tập hợp điểm M sao cho khi dựng tiếp tuyến MF với đường tròn (O) (F là tiếp điểm) luôn có MF = MA.*

Lời giải

a) *Phần thuận.* Giả sử có điểm M thỏa mãn $MF = MA$. Qua A dựng hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O), BC cắt AO tại H. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng OA (h. 1). Do $MF = MA$ nên I nằm giữa A và H (việc chứng minh xin dành cho bạn đọc).

Tương tự như bài toán 1, ta có

$$MF^2 = MI^2 + IH^2 + OH.(IH - IA)$$
$$MA^2 = MI^2 + IA^2.$$

Do $MF^2 = MA^2$ nên

$$(IA - IH).(AH + OH) = 0 \Leftrightarrow IA = IH.$$

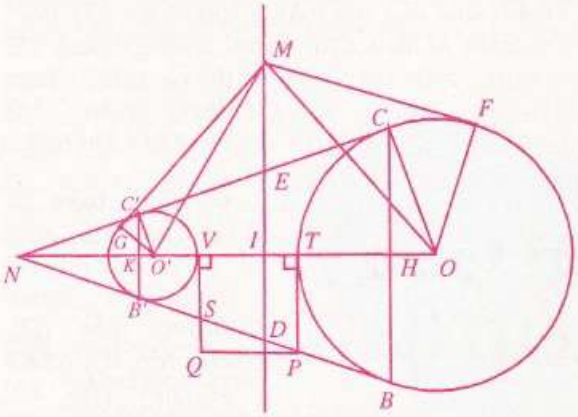
Vậy M nằm trên đường trung trực của AH.

b) *Phần đảo.* Như lời giải bài toán 1.

c) *Kết luận.* Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn $MA = MF$ (F là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (O)) là đường trung trực AH.

Bây giờ ta sẽ tổng quát hoá bài toán 1 bằng cách xem điểm A như một suy biến của đường tròn (O').

✪ **Bài toán 3.** *Cho hai đường tròn (O) và(O') ở ngoài nhau. Dựng các tiếp tuyến chung ngoài BB' và CC' của hai đường tròn (B, C thuộc (O); B', C' thuộc (O')). Gọi D, E tương ứng là trung điểm của BB' và CC'.Từ một điểm M thuộc đường thẳng DE, dựng các tiếp tuyến MF, MG với các đường tròn (O), (O') tương ứng (F, G là các tiếp điểm). Chứng minh rằng MF = MG.*



Hình 2

Lời giải

Gọi bán kính các đường tròn (O) và (O') tương ứng là R và r $(R \geq r)$.

- Nếu $R = r$ thì dễ thấy bài toán đúng.
- Nếu $R > r$ thì tia BB' cắt tia CC' tại N (nằm trên tia OO'). OO' cắt BC và $B'C'$ lần lượt tại H và K. DE cắt $O'O$ tại I. Dựng hình chữ nhật $VTPQ$ thì $B'S = VS < VQ = TP = PB$ (h.2) nên đường thẳng DE không có điểm chung với (O) và (O'), do đó M nằm ngoài (O) và (O'). Đặt $O'O = a$, ta có

$$\frac{NO'}{NO} = \frac{NC}{NC'} = \frac{NK}{NH} = \frac{r}{R} = \frac{O'K}{O'H} \Rightarrow \frac{NO'}{O'O} = \frac{r}{R-r}$$

$$\Rightarrow NO' = \frac{r.a}{R-r}.$$

Tương tự ta có $NO = \dfrac{R.a}{R-r}$.

Trong tam giác vuông $NO'C'$, ta có

$$O'K.O'N = r^2 \Rightarrow O'K = \frac{r(R-r)}{a};\ OH = \frac{R(R-r)}{a}.$$

Do đó $NK = NO' - KO' = \dfrac{r.a}{R-r} - \dfrac{r(R-a)}{a}$.

Tương tự ta được $NH = \dfrac{R.a}{R-r} - \dfrac{R(R-r)}{a}$.

Suy ra $2IH = KH = NH - NK = a - \dfrac{(R-r)^2}{a}$.

Ta có (nếu M trùng với I thì coi $MI = 0$).

$$MF^2 = MO^2 - OF^2 = MI^2 + IO^2 - R^2$$
$$= MI^2 + (IH + HO)^2 - R^2$$
$$= MI^2 + IH^2 + HO^2 + 2OH.HI - R^2$$
$$= MI^2 + \frac{[a^2 - (R-r)^2]^2}{4a^2} + \frac{R^2(R-r)^2}{a^2} + \frac{R(R-r)[a^2 - (R-r)^2]}{a^2} - R^2$$
$$= MI^2 + \frac{(a+R+r)(a-R-r)(a-R+r)(a+R-r)}{4a^2}$$
$$= MI^2 + X \qquad (4)$$

(số hạng thứ hai của kết quả trên đặt là X)

Hoàn toàn tương tự ta cũng biến đổi được

$$MG^2 = MI^2 + X \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $MF = MG$ (đpcm).

Nếu BB' và CC' là các tiếp tuyến chung trong thì ta có bài toán sau đây.

✪ **Bài toán 4.** *Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Vẽ các tiếp tuyến chung trong BB' và CC' (B, C thuộc (O); B', C' thuộc (O')). Gọi D, E tương ứng là trung điểm của BB' và CC', M là một điểm bất kì thuộc đường thẳng DE. Dựng các tiếp tuyến MF và MG với (O) và (O') tương ứng (F, G là các tiếp điểm). Chứng minh rằng MF = MG.*

Việc chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Từ kết quả của bài toán 3 xuất hiện câu hỏi: Có điểm M nào nằm ngoài đường thẳng DE thoả mãn hai đoạn tiếp tuyến MF và MG bằng nhau không ? Các bạn hãy làm bài toán sau.

✪ **Bài toán 5.** *Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Tìm tập hợp điểm M sao cho khi dựng các tiếp tuyến MF, MG với các đường tròn (O) và (O') tương ứng (F, G là các tiếp điểm) thì luôn có MF = MG.*

Để kiểm tra những dự đoán trong bài viết này, tôi đã sử dụng sự hỗ trợ của phần mềm hình học Cabri Geometry II Plus. Các bạn có thể tải từ mạng internet theo địa chỉ **http://www.cabri.com/v2/page/fr/logiciel.php#cabri2d.**

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI

Olympic toán học quốc tế năm 2006

NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT)

Kì thi chọn học sinh vào Đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế năm 2006 (IMO 2006) được tiến hành trong hai ngày 17 và 18-4-2006. Căn cứ các quy định về việc triệu tập học sinh tham dự kì thi chọn học sinh vào các đội tuyển dự thi Olympic Quốc tế, Bộ GD&ĐT đã triệu tập 47 học sinh tham dự kì thi nói trên, gồm 46 học sinh đạt từ 30,5 điểm trở lên ở Bảng A và 01 học sinh đoạt giải Nhất ở Bảng B trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm học 2005 - 2006. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh phải làm 3 bài toán trong thời gian 240 phút. Điểm tối đa của mỗi ngày thi là 21 điểm giống như thi Quốc tế.

Ngày thi thứ nhất (17- 4- 2006)

Bài 1. *(Hình học phẳng; 6 điểm).* Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H. Đường phân giác ngoài của góc BHC cắt các cạnh AB và AC tương ứng tại D và E. Đường phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại điểm thứ hai K khác A. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua trung điểm của cạnh BC.

Bài 2. *(Số học; 6,5 điểm).* Hãy tìm tất cả các cặp số (n, k), với n là số nguyên không âm và k là số nguyên lớn hơn 1, sao cho số

$A = 17^{2006n} + 4.\,17^{2n} + 7.\,19^{5n}$ có thể phân tích được thành tích của k số nguyên dương liên tiếp.

Bài 3 *(Tổ hợp; 8,5 điểm).* Trong không gian cho 2006 điểm mà trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Người ta nối tất cả các cặp điểm đã cho bởi các đoạn thẳng.

Số tự nhiên m được gọi là *số tốt* nếu ta có thể gán cho mỗi đoạn thẳng (trong số các đoạn thẳng đã nối) một số tự nhiên không vượt quá m sao cho mỗi tam giác tạo bởi 3 điểm trong số các điểm đã cho đều có 2 cạnh được gán hai số bằng nhau và cạnh còn lại được gán số lớn hơn hai số đó. Hãy tìm số tốt có giá trị nhỏ nhất.

Ngày thi thứ hai (18 - 4 - 2006)

Bài 4 *(Đại số; 7 điểm).* Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 2]$, ta luôn có bất đẳng thức

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào ?

Bài 5 *(Hình học phẳng; 7,5 điểm).* Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Xét một đường thẳng l thay đổi sao cho l luôn vuông góc với đường thẳng OA và luôn cắt các tia AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của l và các tia AB, AC. Giả thiết rằng các đường thẳng BN, CM cắt nhau và nếu gọi K là giao điểm của BN và CM thì các đường thẳng AK và BC cắt nhau.

1) Gọi P là giao điểm của đường thẳng AK và đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

2) Gọi H là trực tâm của tam giác AMN. Đặt $BC = a$ và kí hiệu d là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng HK. Chứng minh rằng $d \leq \sqrt{4R^2 - a^2}$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng l đi qua giao điểm của đường thẳng OA với đường thẳng BC.

Bài 6 *(Số học - Đại số; 6,5 điểm).* Cho dãy số (a_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, xác định bởi

$$a_0 = 1 \quad \text{và} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{3a_n}\right)$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, số $A_n = \dfrac{3}{3a_n^2 - 1}$ là một số chính phương và A_n có ít nhất n ước nguyên tố phân biệt.

ĐÍNH CHÍNH SỐ 5.2006 (347)

Trang	*Dòng*	*Đã in*	*Sửa lại*
17	28 ↓	$a > 1$	$a < 1$

Thành thật xin lỗi độc giả.

THTT

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. 1) Biểu thức M có nghĩa khi $x \geq 0$.

$$M = \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}\right) = \sqrt{x}-1.$$

2) ĐK $x \geq 0$. PT đã cho tương đương với

$$\sqrt{x}\left(3+\sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 1$$

$\Leftrightarrow x = 1$. PT có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bình phương hai vế ta được

$$(x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x - m)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 4x + 2m + 2)(x^2 + 2 - 2m) = 0$$

Suy ra

$$x^2 - 4x + 2m + 2 = 0 \qquad (2)$$

hoặc $\quad x^2 + 2 - 2m = 0 \qquad (3)$

Ta thấy biệt thức của PT (2): $\Delta_2 = 2 - 2m$.

Kết hợp với PT (3) ta có các kết quả

- Nếu $m < 1$ thì $\Delta_2 > 0$, lúc đó PT (2) có hai nghiệm phân biệt, còn PT (3) vô nghiệm. Suy ra PT đã cho có đúng hai nghiệm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10
Trường THPT chuyên Lam Sơn - Thanh Hoá

NĂM HỌC 2005 - 2006

ĐỀ THI ĐĂNG TRÊN THTT SỐ 346, THÁNG 4 NĂM 2006

Bài 2. Giải hệ $\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 & (1) \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 & (2) \end{cases}$

Lấy PT (1) trừ PT (2) theo từng vế ta được $(x - y)(x + y - 1) = 0$.

- Nếu $x - y = 0$, hay $x = y$ thì hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$, $(2; 2)$.

- Nếu $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$, thay vào PT (1) ta được $x^2 - x + 1 = 0$. PT này vô nghiệm.

Hệ đã cho có hai nghiệm $(1; 1)$ và $(2; 2)$.

Bài 3. 1) Khi $m = 1$, PT trở thành

$$x^2 - 2x - 2|x - 1| + 2 = 0 \qquad (1)$$

- Với $x \geq 1$, PT (1) trở thành $x^2 - 4x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

- Với $x < 1$, PT (1) trở thành $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).

Vậy PT (1) có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 2$.

2) PT đã cho tương đương với

$$x^2 - 2x + 2 = 2|x - m| \qquad (1)$$

- Nếu $m = 1$, PT đã cho có đúng hai nghiệm (theo câu 1).

- Nếu $m > 1$, PT (2) vô nghiệm, PT (3) có hai nghiệm phân biệt.

Bài 4. 1) (Bạn đọc tự vẽ hình).

Vì OM, ON lần lượt là các tia phân giác của $\widehat{AOH}$ và $\widehat{BOH}$ nên $\widehat{MON} = 90^\circ$ (đpcm).

2) Giả sử $\widehat{MON} = 90^\circ$. Từ M vẽ tiếp tuyến với (C) cắt By tại N'. Theo câu 1, ta có $\widehat{MON'} = 90^\circ$, do đó $N \equiv N'$. Suy ra MN là tiếp tuyến của (C).

3) Ta có $\dfrac{MI}{IB} = \dfrac{MA}{NB} = \dfrac{MH}{HN}$ nên $IH // BN$, hay tứ giác $HIBN$ là hình thang. Để tứ giác này nội tiếp thì điều kiện cần và đủ là $HIBN$ là hình thang cân, hay tam giác MNB cân tại M. Dựng $MK \perp BN$ thì K là trung điểm của BN. Đặt $AB = 2R$, $AM = x$, lúc đó $NB = 2x$. Dùng tính chất của tiếp tuyến ta tìm được $MN = 3x$. Trong tam giác vuông MNK có $MN^2 = MK^2 + NK^2$. Từ đó $x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Nghĩa là $AM = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Vậy (d) cần

tìm đi qua M, cách A một khoảng bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ và tiếp xúc với (C).

Bài 5. (Bạn đọc tự vẽ hình). Gọi H là trung điểm của AC. Do tam giác ASC cân tại S nên $SH \perp HC$ và $\widehat{SCH} = 30^\circ$. Suy ra $SH = \frac{a}{2}$; $HC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$. Từ giả thiết ta có $AB = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Từ đó $AC^2 = AB^2 + BC^2$ dẫn đến tam giác ABC vuông tại B. Vậy $BH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác SHB thấy $SB^2 = SH^2 + BH^2$ nên $SH \perp HB$, kết hợp với $SH \perp AC$ suy ra $SH \perp$ mp(ABC). Ta có

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{6}SH.AB.BC = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

NGÀY THỨ HAI

Bài 6. 1) Giả sử x_0 là nghiệm của PT $x^2 - x - 1 = 0$, khi đó $x_0^2 = x_0 + 1$. Ta có

$$x_0^4 = x_0^2 + 2x_0 + 1 = x_0 + 1 + 2x_0 + 1 = 3x_0 + 2.$$

Từ đó

$$x_0^8 = (3x_0 + 2)^2 = 9x_0^2 + 12x_0 + 4.$$

$$P(x_0) = \sqrt{9x_0^2 + 24x_0 + 16} - 3x_0$$
$$= \sqrt{(3x_0+4)^2} - 3x_0 = |3x_0 + 4| - 3x_0.$$

Để ý $3x_0 + 4 = 3(x_0 + 1) + 1 = 3x_0^2 + 1 > 0$, với mọi x_0.

Do đó $P(x_0) = 3x_0 + 4 - 3x_0 = 4$.

Vì x_1, x_2 là nghiệm của PT $x^2 - x - 1 = 0$, nên $P(x_1) = P(x_2) = 4$ (đpcm).

2) PT đã cho tương đương với

$$(3x^2 + 7xy) + (6xy + 14y^2) = 330$$
$$\Leftrightarrow x(3x + 7y) + 2y(3x + 7y) = 330$$
$$\Leftrightarrow (x + 2y)(3x + 7y) = 330 \qquad (1)$$

Do x, y nguyên dương nên

$$(x + 2y)(3x + 6y) < (x + 2y)(3x + 7y) <$$
$$< (x + 2y)(4x + 8y),$$

hay $3(x + 2y)^2 < 330 < 4(x + 2y)^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{165}{2}} < x + 2y < \sqrt{110}.$$

Suy ra $x + 2y = 10$, kết hợp với (1) suy ra

$$3x + 7y = 33.$$

Giải hệ $\begin{cases} x+2y = 10 \\ 3x+7y = 33 \end{cases}$ tìm được $x = 4, y = 3$.

Bài 7. ĐK $x \ge 0, y \ge 0$. Đặt $u = \sqrt{xy} \ge 0$.

Khi đó $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$$= \left[\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy}\right]^2 - 2xy =$$

$$= (16 - 2u)^2 - 2u^2 = 2u^2 - 64u + 256.$$

PT thứ nhất của hệ đã cho trở thành

$$\sqrt{2u^2 - 64u + 256} + u\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{u^2 - 32u + 128} = 8 - u$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - u \ge 0 \\ u^2 - 32u + 128 = 64 - 16u + u^2 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4.$$

Lúc đó ta có hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x}.\sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất (4; 4).

Bài 8. 1) Tập xác định của hàm số y là $\mathbb{R}$. Nhận thấy $y > 0$ với mọi x nên để tìm $y_{\min}$ ta tìm $y_{\min}^2$.

Mà $y^2 = 2x^2 + 2 + 2\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$

$$= 2x^2 + 2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \ge 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Do đó $y_{\min} = 2$ đạt được khi $x = 0$.

2) Đặt $a = x - 2$, $b = y - 2$, $c = z - 2$. Phải chứng minh $abc \le 1$.

Thật vậy, từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ có

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1.$$

Theo BĐT Cauchy

$$\frac{1}{a+2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{b+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{c+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\right)\geq\sqrt{\frac{bc}{(b+2)(c+2)}} \qquad (1)$$

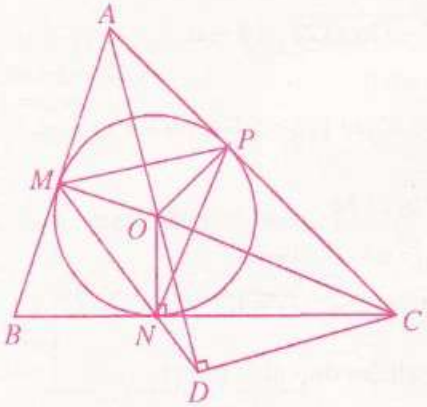
Tương tự $\frac{1}{b+2}\geq\sqrt{\frac{ac}{(a+2)(c+2)}}$ (2)

$$\frac{1}{c+2}\geq\sqrt{\frac{ab}{(a+2)(b+2)}} \qquad (3)$$

Nhân các BĐT (1), (2), (3) theo từng vế ta được điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hay $x = y = z = 3$.

Bài 9. 1) (h. 1).

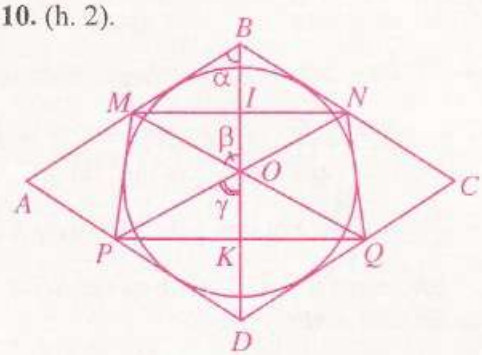


Hình 1

Ta có $\widehat{NDA} = \widehat{BMN} - \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{180^o - \widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2}$, hay $\widehat{NDO}=\widehat{NCO}$, suy ra tứ giác $ONDC$ nội tiếp. Từ đó $AD \perp DC$ (đpcm).

2) Ta thấy $\widehat{MOP}+\widehat{A} = 180^o$, hay $2\widehat{MNP}+\widehat{A} = 180^o$, suy ra $\widehat{MNP}=90^o-\frac{\widehat{A}}{2}$ (1). Tương tự $\widehat{NPM} = 90^o-\frac{\widehat{B}}{2}$ (2); $\widehat{NMP} = 90^o-\frac{\widehat{C}}{2}$ (3). Giả sử rằng $\widehat{A}\geq\widehat{B}\geq\widehat{C}$ từ (1), (2), (3) có $\widehat{MNP}\leq\widehat{NPM}\leq\widehat{NMP}$. Vậy khi ΔABC đồng dạng với (T) có các đỉnh là M, N, P phải có $\widehat{A}=\widehat{M}$; $\widehat{B}=\widehat{P}$; $\widehat{C}=\widehat{N}$. Điều này chỉ xảy ra khi (theo (1), (2), (3)) $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C} = 60^o$ lúc đó tam giác MNP đều và từ đó ta có $k = \frac{1}{2}$.

Bài 10. (h. 2).



Hình 2

Giả sử $\widehat{MBO} = \alpha$, $\widehat{MOB} = \beta$, $\widehat{POD} = \gamma$.

Khi đó

$\widehat{BMO}+\widehat{OPD} = (180^o - \alpha - \beta) + (180^o - \alpha - \gamma)$

$= 360^o - (2\alpha + \beta + \gamma)$ (1).

Mặt khác MO là phân giác của $\widehat{PMB}$; PO là phân giác của $\widehat{MPD}$ nên $\widehat{BMO} + \widehat{OPD} = \widehat{OMP} + \widehat{OPM} = \beta + \gamma$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ và do đó $\widehat{BMO} = \gamma$, dẫn đến $\Delta BMO \backsim \Delta DOP \Rightarrow \frac{MB}{OD}=\frac{OB}{PD}$ (3)

Tương tự $\Delta BNO \backsim \Delta DOQ \Rightarrow \frac{OD}{BN}=\frac{DQ}{BO}$ (4).

Từ (3), (4) có $\frac{MB}{NB}=\frac{DQ}{DP}$. Kết hợp với $\widehat{MBN} = \widehat{QDP} \Rightarrow \Delta MBN \backsim \Delta QDP \Rightarrow \widehat{BNM}=\widehat{DPQ}$. Xét hai tam giác BIN và DKP có $\widehat{KDP} = \widehat{IBN} = \alpha$; $\widehat{BNI} = \widehat{DPK}$, suy ra $\widehat{DKP} = \widehat{BIN} \Rightarrow \widehat{DKP}=\widehat{MIK}$. Từ đó $MN // PQ$.

MAI CÔNG MÃN sưu tầm
(Sở GD-ĐT Thanh Hóa)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

Câu 1. *a)* Bạn đọc tự giải.

b) PT hoành độ giao điểm của *(C)* và *(d)* có dạng

$$\frac{x^2-x+1}{x-1}=kx-\frac{3}{2}.$$

PT này luôn có hai nghiệm phân biệt khác 1. Vậy *(d)* cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt B, C với hoành độ là x_1, x_2 theo thứ tự. Từ giả thiết ta có hệ :

$$x_1+x_2=\frac{2k+1}{2(k-1)};\quad x_1.x_2=\frac{1}{2(k-1)};$$

$$x_1+2x_2=0.$$

• Giải hệ trên tìm được $k=0$ hoặc $k=-\frac{5}{4}$.

Vậy PT đường thẳng *(d)* cần tìm là :

$$y=-\frac{3}{2} \text{ và } y=\frac{-5}{4}x-\frac{3}{2}.$$

Câu 2. *a)* Đặt $x+y=u$, $xy=v$, đưa về hệ

$$\begin{cases} u+3v=1+4\sqrt{2} \\ u^2-2v=3 \end{cases}$$

Khử v tìm được $u=\dfrac{-1\pm(4+3\sqrt{2})}{3}$.

Thử ĐK $u^2\geq 4v$ suy ra $u=1+\sqrt{2}$, $v=\sqrt{2}$. Hệ có hai nghiệm $(x\,;y)$ là $(1;\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};1)$.

b) Xét vế trái của BPT đã cho với $x\neq 0$, ta có nghiệm của tử số là 3 và nghiệm của mẫu số là 4, −4, 5, −5. Lập bảng xét dấu vế trái của BPT đã cho được nghiệm của BPT là :

$x<-5$; $-4<x<0$; $0<x\leq 3$; $4<x<5$.

Câu 3. a) (Bạn đọc tự vẽ hình). Xét hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Axyz$ với tọa độ các điểm là: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;b;0)$, ...

Gọi thể tích của tứ diện $BIJK$ là V, ta có:

$$6V=\left|[\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BJ}].\overrightarrow{BK}\right|, \text{ suy ra } V=\frac{5}{48}.$$

b) Ta có $BK\perp \text{mp}(A'C'D)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BK}\perp\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{BK}\perp\overrightarrow{A'D}$ (1)

Từ hệ (1), áp dụng biểu thức toạ độ của tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{A'C'}=0$ và $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{A'D}=0$ có hệ

$$\begin{cases} -a^2+\dfrac{b^2}{2}=0 \\ \dfrac{b^2}{2}-c^2=0 \end{cases}$$

ta tìm được

$$a=c=\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

c) Gọi khoảng cách của hai đường thẳng CI và $A'J$ là h, ta có :

$$h=\frac{\left|[\overrightarrow{CI};\overrightarrow{AJ}].\overrightarrow{IA'}\right|}{\left|[\overrightarrow{CI};\overrightarrow{A'J}]\right|}=\frac{abc}{\sqrt{4b^2c^2+4a^2b^2+9a^2c^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{c^2}+\dfrac{9}{b^2}}}.$$

Do $abc=1$ nên $h_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{3\sqrt[3]{144}}}$ khi:

$$\frac{a}{2}=\frac{c}{2}=\frac{b}{3}=\frac{1}{\sqrt[3]{12}}.$$

Câu 4. a) Từ các hệ thức đã cho ta có các hệ thức:

$\sin 2A=\sin 3B$ (2) và $\sin A=\sqrt{2}\sin B$ (3)

Từ (2) có

$2\sin A\cos A=3\sin B-4\sin^3 B$ (3),

Thay (3) vào (4) được

$$2\sin A\cos A = \frac{3}{\sqrt{2}}\sin A - \frac{2}{\sqrt{2}}\sin^3 A$$

hay $\left(\sqrt{2}\cos A - 1\right)^2 = 0$.

Từ đó tìm được $A = 45^0$, $B = 30^0$, $C = 105^0$.

b) Đặt sin x = u với $u \neq 0$ có

$$\Rightarrow I_1 = \int \frac{\cos^2 x.\,d(\sin x)}{\cos^4 x - 3\cos^2 x + 3}$$

$$= \int \frac{1-u^2}{u^4+u^2+1}du = -\int \frac{1-\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}+1}du.$$

Đặt $v = u + \frac{1}{u}$ thì

$$I_1 = -\int \frac{dv}{v^2-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dv}{v-1} - \int \frac{dv}{v+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1} + C.$$

Từ đó $I = -\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}\Big|_0^1 = \ln\sqrt{3}$.

Câu 5. Gọi số học sinh được cử khối 12, khối 11, khối 10 theo thứ tự là x, y, z. Phân thành các trường hợp :

- $x = 3, y = 1, z = 1$ có $C_5^3.C_3^1.C_2^1 = 60$ cách;
- $x = 1, y = 3, z = 1$ có $C_3^3.C_5^1.C_2^1 = 10$ cách;
- $x = 2, y = 2, z = 1$ có $C_5^2.C_3^2.C_2^1 = 60$ cách;
- $x = 2, y = 1, z = 2$ có $C_5^2.C_2^2.C_3^1 = 30$ cách;
- $x = 1, y = 2, z = 2$ có $C_3^2.C_2^2.C_5^1 = 15$ cách.

Theo quy tắc cộng ta có tổng số cách là **175**.

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

the segments DB and DC. Prove that the circle with diameter EF passes through a fixed point when P moves on the line BC.

T7/348. Let ABC be a triangle with $AB = AC = a$. Construct a circle with center A, with radius R ($R < a$). From B and C, draw the tangents BM, CN to this circle (M and N are touching points) so that they are not symmetric with respect to the altitude AH of triangle ABC. Let I be the point of intersection of BM and CN.

1) Find the locus of I when R varies.

2) Prove that $IB.IC = |a^2 - d^2|$ where $AI = d$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/348. Let be given n real positive numbers $a_1, a_2, ..., a_n$ satisfying the condition

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \le \sum_{i=1}^{k} i(i+1)$$

for all $k = 1, 2, ..., n$. Prove that

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \ge \frac{n}{n+1}.$$

T9/348. Determine the number of distinct real roots belonging to the interval $(0; 2\pi)$ of the equation

$$e^{2\cos^2 x}(8\sin^6 x - 12\sin^4 x + 10\sin^2 x) = e + \frac{5}{2}.$$

T10/348. Find all polynomials $P(x)$ with real coefficients satisfying the condition

$P(x).P(2x^2) = P(x^3 + x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

T11/348. Let O be the point of intersection of the diagonals AC, BD of a convex quadrilateral $ABCD$. Let G_1 and G_2 be the centroids respectively of the triangles OAB and OCD. Let H_1 and H_2 be the orthocenters respectively of the triangles OBC and ODA. Prove that G_1G_2 is perpendicular to H_1H_2.

T12/348. Let I and r be respectively the center and the radius of the sphere inscribed in a tetrahedron $ABCD$. Let r_A, r_B, r_C, r_D be the radii of the spheres inscribed respectivelly in the tetrahedra $IBCD$, $IACD$, $IABD$, $IABC$. Prove the inequality

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_D} \le \frac{4+\sqrt{6}}{r}.$$

Bất đẳng thức Schur VÀ ỨNG DỤNG

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

I. BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

Nếu a, b, c và t là các số thực dương bất kì thì

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+c^t(c-a)(c-b)\ge 0 \qquad (1)$$

Chứng minh.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c>0$. Khi đó

$a^t\ge b^t \Rightarrow a^t(a-b)(a-c)\ge b^t(a-b)(b-c)$

$\Rightarrow a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)\ge 0.$

Mặt khác $c^t(c-a)(c-b)\ge 0.$

Vậy $a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+$
$+c^t(c-a)(c-b)\ge 0.$

Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❐

II. HỆ QUẢ

1) Nếu $t=1$ ta có:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0 \qquad (2)$$

BĐT (2) tương đương với các BĐT sau:

- $a^3+b^3+c^3+3abc\ge$
$\ge a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$ (3)
- $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\le abc$ (4)
- $4(a+b+c)(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^3+9abc$ (5)

III. ỨNG DỤNG

Ở phần tiếp theo chúng tôi trình bày một số áp dụng của BĐT *Schur* dưới dạng (2), (3), (4), (5) qua một số thí dụ.

Thí dụ 1. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng:

$$0\le xy+yz+zx-2xyz\le \frac{7}{27}$$

(Đề thi Toán Quốc tế – 1984)

Lời giải. Ta có

- $xy+yz+zx-2xyz$
$=(x+y+z)(xy+yz+zx)-2xyz$
$=x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+xyz\ge 0$

- $xy+yz+zx-2xyz\le \frac{7}{27}$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx)-2xyz\le$
$\le \frac{7}{27}(x+y+z)^3.$

$\Leftrightarrow 7(x^3+y^3+z^3)+15xyz\ge$
$\ge 6(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)$ (6)

Theo BĐT (3) ta có

$6(x^3+y^3+z^3+3xyz)$
$\ge 6(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2).$

$x^3+y^3+z^3\ge 3xyz.$

Từ đó và theo BĐT *Cauchy* suy ra (6)

Vậy BĐT (6) là đúng.

Dấu bằng ở (6) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$

Thí dụ 2. Giả sử a, b, c là ba số thực dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \le 1 \qquad (7)$$

(Đề thi Toán Quốc tế – 2000)

Lời giải. Đặt $x = a, y = 1, z = \frac{1}{b} = ac$

thì $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$.

BĐT (7) $\Leftrightarrow \dfrac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{yzx} \le 1$ (8)

Từ đó và BĐT (4) thì BĐT (8) đúng. Suy ra BĐT (7) đúng.

Dấu bằng ở (7) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Thí dụ 3. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \ge 9(ab + bc + ca) \qquad (9)$$

(Đề thi Olympic Toán Châu Á – Thái Bình Dương – 2004)

Lời giải. BĐT (9) tương đương với

$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2+b^2+c^2) + 8$
$\ge 9(ab + bc + ca)$.

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$;
$(a^2b^2 + 1) + (b^2c^2 + 1) + (c^2a^2 + 1)$
$\ge 2(ab + bc + ca)$;

$a^2b^2c^2 + 1 + 1 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge \dfrac{9abc}{a+b+c}$

$\ge 4(ab + bc + ca) - (a + b + c)^2$ (theo BĐT (5))

$\Rightarrow a^2b^2c^2 + 2 \ge 2(ab+bc+ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy $(a^2b^2c^2 + 2) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3) +$
$+ 4(a^2 + b^2 + c^2) \ge$

$\ge 2(ab + bc + ca) + 4(ab + bc + ca)$
$+ 3(a^2 + b^2 + c^2) \ge 9(ab + bc + ca)$.

Vậy BĐT (9) đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thí dụ 4. Cho ba số thực dương $a, b\ c$, thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.
Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge 9$.

(Đề thi Olympic Toán Ba Lan - 2005)

Lời giải. Theo BĐT (3) ta có:
$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge (a + b + c)(ab + bc + ca)$.

Ta có $(a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca) = 9$
$\Rightarrow a + b + c \ge 3$, suy ra $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge 9$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Thí dụ 5. Tìm số thực k lớn nhất sao cho với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$, ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3k \ge (k+1)(a+b+c) \qquad (10)$$

(Đề thi chọn HSG Toán Quốc gia THPT năm 2006 – Bảng B)

Lời giải. Giả sử số thực k thỏa mãn đề bài

Chọn $a = b = \frac{1}{n+1}, c = (n+1)^2\ (n \in \mathbb{N}^*)$.

Từ (10) suy ra

$$k \le \frac{n^2 + 2n + 1 + \frac{1}{(n+1)^4} - \frac{2}{n+1}}{n^2 + 2n + \frac{2}{n+1} - 1}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 2n + 1 + \frac{1}{(n+1)^4} - \frac{2}{n+1}}{n^2 + 2n + \frac{2}{n+1} - 1} = 1$,

nên $k \le 1$. Với $k = 1$ BĐT (10) trở thành

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \ge 2(a+b+c) \qquad (11)$$

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ thì x, y, z là các số dương và $xyz = 1$.

BĐT (11) tương đương với

$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \ge 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 3)$
$\ge 2(xy + yz + zx)(x + y + z)$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)$
$\ge x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 6$ (12)

(Xem tiếp trang 14)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

HÌNH THÀNH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

THÁI VIẾT THẢO
(Sở GD-ĐT Nghệ An)

CÓ rất nhiều hướng để hình thành các bất đẳng thức (BĐT) nói chung và BĐT trong hình học nói riêng. Trong bài viết này trình bày một cách hình thành một số BĐT trong tam giác từ một BĐT cơ bản trong hình học lớp 10.

Cho tam giác ABC với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Gọi S là diện tích ΔABC; r và R là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác; m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C theo thứ tự. Trong hình học 10 ta đã biết: Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có $|\vec{a}|^2 \geq 0$. Giả sử M là một điểm bất kì cùng các số thực α, β, γ, ta có $\left(\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right)^2 \geq 0$.

Bình phương vô hướng hai vế của $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$ dẫn tới

$$2\,\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - AB^2.$$

Từ đó qua phép biến đổi tương đương ta đi đến bất đẳng thức sau:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2) \geq$$
$$\geq a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta \qquad (*)$$

Dấu bằng trong BĐT (*) xảy ra khi và chỉ khi $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Bây giờ ta xét các vị trí đặc biệt của M và chọn các số α, β, γ thích hợp để có các bất đẳng thức khác mang bản chất hình học hơn.

I. Các bất đẳng thức liên quan đến đường trung tuyến

a) Khi M là trọng tâm tam giác ABC, ta sẽ có các BĐT liên quan đến đường trung tuyến. Lúc đó BĐT (*) trở thành:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha m_a^2+\beta m_b^2+\gamma m_c^2)$$
$$\geq \frac{9}{4}(a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta) \qquad (1^*)$$

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ thay vào (1*) được:

$$am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 \geq \frac{9}{4}abc \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) có các dạng tương đương sau:

- $\dfrac{m_a^2}{h_a}+\dfrac{m_b^2}{h_b}+\dfrac{m_c^2}{h_c} \geq \dfrac{9}{2}R$

  (do $2S = \dfrac{abc}{2R} = ah_a = bh_b = ch_c$).

- $3(a^3+b^3+c^3)+9abc$
  $\leq 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$
  (dùng công thức đường trung tuyến).

– Chọn $\alpha = p-a$, $\beta = p-b$, $\gamma = p-c$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Thay vào (1*).

Ta biến đổi $a^2(p-b)(p-c)$

$$= ap(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}\right)$$

$$= S^2\left(\frac{p}{p-a}-1-\frac{a}{p}\right) = S\left(\frac{p^2r}{p-a}-pr-ra\right).$$

Biến đổi tương tự với $b^2(p-a)(p-c)$ và $c^2(p-a)(p-b)$ rồi áp dụng hệ thức

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{4R+r}{pr}$$

(Xem THTT số 337 tháng 7.2005 trang 6 hệ thức 17, hoặc quyển *Phương trình bậc ba và các hệ thức hình học trong tam giác* của Tạ Duy Phượng, hệ thức (16) ta thu được :

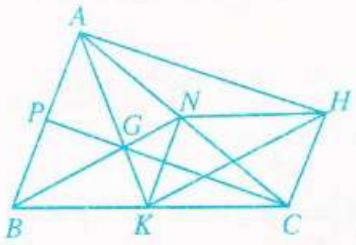
$$(p-a)m_a^2+(p-b)m_b^2+(p-c)m_c^2 \geq 9S(R-r).$$

– Chọn $\alpha = \frac{a}{m_a}$, $\beta = \frac{b}{m_b}$, $\gamma = \frac{c}{m_c}$ thay vào (1*) ta được

$$a.m_b.m_c + b.m_c.m_a + c.m_a.m_b \geq \frac{9}{4}abc \quad (3)$$

– Chọn $\alpha = bc$, $\beta = ca$, $\gamma = ab$, thay vào (1*) ta có

$$\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{9}{4}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{ab+bc+ca}\right) \quad (4)$$



b) Bây giờ ta gọi AK, BN, CP theo thứ tự là các đường trung tuyến của tam giác ABC; dựng hình bình hành $APCH$, dễ thấy

$AK = m_a$, $KH = m_b$, $HA = m_c$, $NH = \frac{a}{2}$, $NA = \frac{b}{2}$, $NK = \frac{c}{2}$ (hình vẽ).

Áp dụng bất đẳng thức (*) cho tam giác AKH với M trùng N, ta thu được:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2) \geq 4(m_a^2\beta\gamma + m_b^2\alpha\gamma + m_c^2\alpha\beta) \quad (2^*)$$

Từ BĐT này bằng cách chọn α, β, γ thích hợp ta được lớp các BĐT mới dưới đây:

– Chọn $\alpha = m_a$, $\beta = m_b$, $\gamma = m_c$ thay vào (2*) ta được:

$$a^2.m_a + b^2.m_b + c^2.m_c \geq 4m_a.m_b.m_c \quad (5)$$

– Chọn $\alpha = \frac{m_a}{a}$, $\beta = \frac{m_b}{b}$, $\gamma = \frac{m_c}{c}$ thay vào (2*) ta có:

$$bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \geq 4m_a.m_b.m_c \quad (6)$$

– Chọn $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$, $\gamma = c^2$ thay vào (2*) sau khi biến đổi ta thu được:

$$bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)} \quad (7)$$

Áp dụng BĐT Ptolémée cho các tứ giác $GNAP$, $GKCN$, $GPBK$ và biến đổi ta được:

$$bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \geq a^2.m_a + b^2.m_b + c^2.m_c \quad (8)$$

Kết hợp (5), (7) và (8) ta được dãy BĐT kép sau:

$$4m_a.m_b.m_c \leq bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)} \quad (9)$$

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ thay vào (2*), sau khi kết hợp với (4) ta có tiếp:

$$\frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}{4abc} \geq \frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{9(a^3+b^3+c^3)}{4(ab+bc+ca)} \quad (10)$$

Áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có

$$\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{(m_a+m_b+m_c)^2}{a+b+c}.$$

Từ đây kết hợp với (10) suy ra

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{a+b+c}{2}\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}} \quad (11)$$

– Chọn $\alpha = b^2c^2$, $\beta = c^2a^2$, $\gamma = b^2a^2$ thay vào (2*), sau đó sử dụng BĐT

$$3[(a.m_a)^2 + (b.m_b)^2 + (c.m_c)^2] \geq (a.m_a + b.m_b + c.m_c)^2,$$ ta được:

$$a.m_a + b.m_b + c.m_c \leq \frac{3}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \quad (12)$$

c) Gọi L là *điểm Lemoine* của tam giác ABC nghĩa là giao điểm của ba đường thẳng đối xứng với ba trung tuyến qua ba đường phân giác trong tương ứng theo từng đỉnh của ΔABC. Khi đó dễ thấy :

$$LA = \frac{2m_a bc}{a^2+b^2+c^2}, \quad LB = \frac{2m_b ac}{a^2+b^2+c^2},$$

$$LC = \frac{2m_c ba}{a^2+b^2+c^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) cho tam giác ABC với M trùng L ta được :

$$4(\alpha+\beta+\gamma)[\alpha(bcm_a)^2 + \beta(acm_b)^2 + \gamma(abm_c)^2] \geq (a^2+b^2+c^2)^2(a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta) \quad (3^*)$$

Trong BĐT này ta cũng chọn các bộ số α, β, γ thích hợp để được các BĐT mới.

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, thay vào (3*) ta được BĐT:

$$4(bcm_a^2 + acm_b^2 + abm_c^2) \geq (a^2+b^2+c^2)^2 \quad (13)$$

(Xem tiếp trang 28)

VẬT LÍ

QUÁN TÍNH của một vật thể có phụ thuộc vào NĂNG LƯỢNG chứa trong nó hay không?

A. EINSTEIN

Lời tòa soạn. Ở các nước có nền giáo dục phát triển, học sinh các trường THPT có nhiều điều kiện tiếp cận với các bài báo, các tác phẩm gốc của các nhà khoa học, qua đó họ hiểu được sự hình thành những tư tưởng, những lí thuyết hoặc các công trình khoa học của các nhà bác học như thế nào? Điều đó giúp ích rất nhiều cho học sinh trong việc học được cách suy nghĩ, cách nghiên cứu khoa học trong tương lai. Nhằm mục đích đó, chúng tôi giới thiệu một bài báo của Albert Einstein - Nhà vật lí vĩ đại của thế kỉ XX. Bài báo này được công bố ngày 27-9-1905 trên tạp chí khoa học Annalen der Phyzich ở Đức.

Các kết quả những nghiên cứu đưa chúng ta đến một kết luận rất thú vị, việc công bố kết luận sẽ được trình bày trong bài báo này.

Trong nghiên cứu, ngoài các phương trình của Maxwell J. - Hertz H. đối với chân không và các công thức của Maxwell đối với năng lượng trường điện từ của không gian, tôi còn xuất phát từ nguyên lí sau đây.

Các quy luật, mà các trạng thái của hệ vật lí bị thay đổi theo nó, không phụ thuộc vào việc những thay đổi trạng thái này (nguyên lí tương đối) được gắn với một hệ tọa độ nào trong số hai hệ chuyển động thẳng đều với nhau. Khi đi từ điều này, nói riêng, tôi đi đến kết quả sau đây.

Giả sử hệ sóng phẳng của ánh sáng gắn với hệ tọa độ (x, y, z), có năng lượng l và giả sử hướng của tia sáng (vuông góc với mặt sóng) tạo góc φ với trục x của hệ. Nếu đưa vào hệ tọa độ mới (ξ, η, ζ) chuyển động thẳng đều với hệ (x, y, z) và nếu gốc tọa độ của hệ thứ nhất chuyển động theo trục x với vận tốc v, thì năng lượng của ánh sáng khi đó trong hệ (ξ, η, ζ) sẽ là

$$l^* = l\,\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

ở đây V là vận tốc của ánh sáng. Chúng ta sẽ sử dụng kết quả đó ở phần sau.

Giả sử trong hệ (x, y, z) vật đứng yên, năng lượng của vật gắn với hệ (x, y, z) bằng E_0. Còn năng lượng của vật này gắn với hệ (ξ, η, ζ) chuyển động với vận tốc v như trên, giả sử bằng H_0.

Giả sử vật này gửi đi sóng ánh sáng phẳng có năng lượng $L/2$ (được đo đối với hệ (x, y, z)) theo hướng tạo thành góc φ với trục x và đồng thời cùng gửi lượng sáng đó theo hướng ngược lại. Khi đó vật đứng yên đối với hệ (x, y, z). Định luật bảo toàn năng lượng cần phải được áp dụng cho quá trình này và hơn nữa (theo nguyên lí tương đối) đối với cả hai hệ tọa độ. Nếu ta kí hiệu E_1 là năng lượng của vật sau bức xạ ánh sáng khi đo nó đối với hệ (x, y, z) và tương ứng, H_1 là năng lượng đối với hệ (ξ, η, ζ), thì khi sử dụng hệ thức nêu trên chúng ta sẽ tìm được

$$E_0 = E_1 + \left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}\right),$$

$$H_0 = H_1 + \left(\frac{L}{2}\,\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2}\,\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right)$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Khi trừ đẳng thức thứ hai với đẳng thức thứ nhất ta được

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right).$$

Trong hệ thức này cả hai hiệu dưới dạng $H - E$ có ý nghĩa vật lí đơn giản. Các đại lượng H và E là giá trị năng lượng của cùng một vật gắn với hai hệ tọa độ chuyển động đối với nhau, trong đó, vật đứng yên đối với một trong hai hệ này (đứng yên trong hệ (x, y, z)). Bởi vậy, rõ ràng là hiệu $H - E$ có thể khác với động năng K của vật gắn với hệ khác (hệ (ξ, η, ζ), chỉ bởi một hằng số cộng được C nào đó, hằng số này phụ thuộc vào việc chọn các hằng số cộng được tùy ý trong các biểu thức đối với H và E. Do đó, ta có thể đặt $H_0 - E_0 = K_0 + C$, $H_1 - E_1 = K_1 + C$,

vì hằng số C khi bức xạ ánh sáng không thay đổi. Bởi vậy, chúng ta nhận được

$$K_0 - K_1 = L\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right).$$

Động năng của vật đối với hệ (ξ, η, ζ) bị giảm khi bức xạ ánh sáng một lượng không phụ thuộc vào bản chất của vật. Ngoài ra, hiệu $K_0 - K_1$ phụ thuộc vào vận tốc cũng đúng như động năng của êlectrôn. Bỏ qua các đại lượng bậc bốn và bậc cao hơn, có thể nhận được

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Từ phương trình này trực tiếp suy ra là nếu vật phát năng lượng L dưới dạng bức xạ thì khối lượng của nó bị giảm L/V^2. Đồng thời rõ ràng là không tồn tại năng lượng chứa đựng trong vật trực tiếp truyền đi thành năng lượng bức xạ tia sáng. Vì thế chúng ta sẽ đi tới kết luận tổng quát hơn.

Khối lượng của vật là số đo năng lượng chứa đựng trong nó; nếu năng lượng bị thay đổi một đại lượng L, thì khối lượng bị thay đổi tương ứng một đại lượng $L/(9.10^{20})$, hơn thế nữa, ở đây năng lượng được đo bằng ec, còn khối lượng bằng gam (1ec = 10^{-7}J).

Không loại trừ khả năng là cần phải kiểm tra lí thuyết đối với các chất, năng lượng của các chất bị thay đổi ở bậc cao hơn (thí dụ, đối với muối rađi).

Nếu lí thuyết phù hợp với thực nghiệm, thì sự bức xạ sẽ truyền quán tính giữa các vật bức xạ và hấp thụ.

LÊ HÙNG (NXB Giáo dục)
(dịch từ tạp chí *Kvant* N°6-2005)

BẤT ĐẲNG THỨC... *(Tiếp trang 10)*

Mặt khác $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$.

Suy ra

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)$$
$$\geq x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz + 6$$
$$\geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 6$$

theo BĐT (3).

Vậy BĐT (12) đúng $\Rightarrow$ BĐT (11) đúng. Dấu bằng ở (11) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Như vậy giá trị lớn nhất của k là 1.

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc.

Bài 1. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^2+bc}{b+c} + \dfrac{b^2+ca}{c+a} + \dfrac{c^2+ab}{a+b} \geq a + b + c.$

b) $\dfrac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq$

$\leq \max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2, \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2, \left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}.$

(Đề chọn đội tuyển của Mỹ thi Toán Quốc tế - 2000)

c) $(xy+yz+zx)\left(\dfrac{1}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{(y+z)^2} + \dfrac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \dfrac{9}{4}.$

(Đề thi Olympic Toán của Iran – 1996)

d) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq$

$\geq ab\sqrt{2a^2+2b^2} + bc\sqrt{2b^2+2c^2} + ca\sqrt{2c^2+2a^2}.$

Bài 2. Cho ba số thực a, b, c thuộc khoảng $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin a \sin(a-b)\sin(a-c)}{\sin(b+c)} + \frac{\sin b \sin(b-c)\sin(b-a)}{\sin(c+a)}$$
$$+ \frac{\sin c \sin(c-a)\sin(c-b)}{\sin(a+b)} \geq 0.$$

(Đề chọn đội tuyển của Mỹ thi Toán Quốc tế - 2003)

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu Toán

HỌC TOÁN ở ngoài toán

NGUYỄN CẢNH TOÀN

A đố B dùng 6 que diêm mà xếp thành 4 tam giác đều có cạnh dài bằng que diêm. B nghĩ mãi không ra. Vừa lúc đó, C đi đến. Nghĩ một lúc, C rỉ tai B:

- Đây là một bài toán trong không gian.

B reo lên:

- Ra rồi! Dễ ợt! Cứ xếp 6 que diêm thành hình tứ diện đều trong không gian thì có 4 mặt của tứ diện là những tam giác đều có cạnh dài bằng que diêm.

Rồi quay sang C:

- Cậu có năng khiếu thật. Sao cậu nghĩ được đây là bài toán không gian. Tớ thì cứ nghĩ đây là một bài toán dạng hình tam giác, mà tam giác là hình phẳng nên cứ tìm mãi trong mặt phẳng mà không ra.

- Tớ có năng khiếu gì đâu. Chẳng qua là tớ hay tần mần suy nghĩ về việc con người ta hay cầu cứu đến chiều cao rồi dần dần suy rộng ra rằng số chiều không gian càng lớn thì càng dễ vùng vẫy, số chiều không gian càng ít thì càng bị o ép.

- Cậu nói cụ thể hơn xem nào.

- Này nhé, cậu có thấy cao ốc đương mọc đầy lên đó không. Đất chật, người đông, nên phải làm nhà nhiều tầng. Nhiều gia đình, nhà chật chội phải làm thêm gác lửng, nghĩa là cũng vượt khó bằng chiều cao.

- Còn gì nữa. Câu chuyện của cậu lí thú đấy.

- Máy bay bay trong không gian thì hầu như không có tai nạn "va quệt hay đụng nhau" còn ô tô, xe máy đi trên mặt đất thì, cậu biết đấy Đài Tiếng nói Việt Nam cho biết mỗi ngày cũng hàng trăm vụ tai nạn đâm nhau, va quệt vào nhau trên đất nước ta.

- Ừ nhỉ. Những chuyện so sánh như vậy sao mà tớ lại ít nghĩ đến.

- Cậu có chú ý rằng, mỗi lần từ đường cái rẽ vào ngõ hẹp, ông lái xe, nếu là lần đầu rẽ vào đó, đều cẩn thận hỏi xem vào đó rồi có chỗ để quay xe ra không. Ngõ hẹp là không gian một chiều, cần có khoảng rộng là không gian hai chiều thì mới quay xe được. Đầu tầu hỏa cũng vậy, nó không thể quay ngược trở lại trên đường ray vì đường ray là không gian một chiều. Muốn nó quay ngược được phải đưa nó đến các nhà ga lớn, ở đó có bàn xoay tức là một không gian hai chiều, thì nó mới quay ngược được.

- Tớ thật vô tâm. Những chuyện thường ngày như vậy mà tớ chẳng chú ý gì cả.

- Cậu có nhiều sách và một cái bàn hẹp. Cậu có thể chất hết sách lên bàn nhờ ở chỗ sách có thể để chồng lên nhau, nghĩa là ta có thể tận dụng thêm chiều cao. Còn nếu là mâm cơm thì không thể chồng mâm này lên mâm kia.

- Ờ nhỉ. Những chuyện vặt vãnh như thế mà cũng dính đến toán học nhỉ.

- Đó mới là chuyện thêm chiều không gian. Còn bớt chiều không gian lại có một lợi ích khác. Cậu đã đi Yên Tử, Chùa Hương v.v..., cậu có chú ý rằng để giữ trật tự trước khi khách lên cabin của cáp treo thì người ta lại biến không gian hai chiều của phòng đợi thành không gian một chiều bằng cách dựng nên những hành lang hẹp chỉ vừa một người đi và buộc hành khách phải đi vào các hành lang đó, ai muốn rẽ ngang, rẽ dọc đều chịu.

- Ơ hay nhỉ! Tớ đã đi cáp treo rồi nhưng tớ đâu có suy nghĩ được như cậu.

(Xem tiếp bìa 3)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/348. (Lớp 6) Tìm tất cả các số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn điều kiện

$$\overline{abcd} = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 + 2006.$$

PHẠM HUY THÔNG
(GV Hà Nội)

Bài T2/348. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = 2\widehat{ABE}$. Trên tia BE lấy điểm M sao cho $EM = BC$. Hãy so sánh số đo các góc $\widehat{MBC}$ và $\widehat{BMC}$.

NGUYỄN XUÂN BÌNH
(NXB Giáo dục)

Bài T3/348. Giải phương trình

$$\frac{1}{4x-2006} + \frac{1}{5x+2004} = \frac{1}{15x-2007} - \frac{1}{6x-2005}.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP. Hồ Chí Minh)

Bài T4/348. Chứng minh rằng

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) + 2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}\right) \geq 6$$

trong đó a, b, c là các số không nhỏ hơn 1.

TRẦN VĂN TỎ
(SV K28D, Toán - Tin, ĐHSP HN2)

Bài T5/348. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3xy + 3yz + 3zx - xyz$$

trong đó x, y, z là ba số dương thỏa mãn

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

TẠ HOÀNG THÔNG
(SV lớp Toán 2001 - ĐHKHTN, ĐHQG TP. HCM)

Bài T6/348. Cho tam giác ABC. P là điểm nằm trên đường thẳng BC. Trên tia đối của tia AP lấy điểm D sao cho $AD = \frac{BC}{2}$. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của DB và DC. Chứng minh rằng đường tròn đường kính EF luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trên đường thẳng BC.

ĐÀO QUỐC DŨNG
(GV THPT Diễn Châu 4, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài T7/348. Cho tam giác ABC có $AB = AC = a$, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính R với $R < a$. Từ B, C lần lượt kẻ các tiếp tuyến BM, CN (M, N là các tiếp điểm) với đường tròn trên sao cho chúng không đối xứng với nhau qua AH. Gọi giao điểm của các đường thẳng BM và CN là I.

1) Tìm tập hợp điểm I khi R thay đổi.

2) Chứng minh rằng $IB.IC = |a^2 - d^2|$ với $AI = d$.

TRẦN XUÂN UY
(GV TP. Nam Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/348. Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} i(i+1)$ với $k = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}.$$

TRƯƠNG NGỌC ĐẮC
(GV THPT Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T9/348. Xác định số nghiệm thực phân biệt nằm trong khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình

$$e^{2\cos^2 x}(8\sin^6 x - 12\sin^4 x + 10\sin^2 x) = e + \frac{5}{2}.$$

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Bài T10/348. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$P(x).P(2x^2) = P(x^3 + x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

NGUYỄN LÂM TUYỀN
(SV BK48 -K47, ĐHBK Hà Nội)

Bài T11/348. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC, BD của một tứ giác lồi $ABCD$; G_1, G_2 tương ứng là trọng tâm các tam giác OAB, OCD ; H_1, H_2 tương ứng là trực tâm các tam giác OBC, ODA. Chứng minh rằng G_1G_2 vuông góc với H_1H_2.

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T12/348. Gọi I và r theo thứ tự là tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$. Kí hiệu r_A, r_B, r_C, r_D theo thứ tự là bán kính mặt cầu nội tiếp các tứ diện $IBCD$, $IACD$, $IABD$, $IABC$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}\le\frac{4+\sqrt{6}}{r}.$$

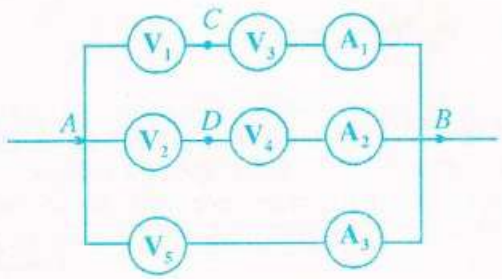
NGUYỄN HỒNG QUÂN
(GV THPT Hồng Ngự 2, Hồng Ngự, Đồng Tháp)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/348. Một vật nhỏ được treo vào đầu một lò xo nhẹ để tạo thành một con lắc lò xo. Tại thời điểm $t = 0$ (s) người ta đưa vật tới vị trí lò xo giãn $\Delta l = 4$ (cm) rồi truyền cho vật một vận tốc $v = 20\sqrt{15}$ (cm/s) hướng thẳng đứng xuống dưới thì thấy vật dao động điều hòa và có vận tốc cực đại $v_0 = 40\sqrt{5}$ (cm/s). Chọn trục tọa độ Ox theo phương thẳng đứng, gốc O ở vị trí bắt đầu thả vật, chiều dương hướng xuống dưới. Viết phương trình dao động của vật. Cho $g = 10$ (m/s^2).

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/348. Cho mạch điện như hình vẽ.



Hiệu điện thế đặt vào hai điểm A, B là U không đổi. Số chỉ các vôn kế V_1, V_2, V_5 theo thứ tự là 9,6 (V), $\frac{24}{7}$ (V), 12 (V). Gọi số chỉ các ampe kế A_1, A_2, A_3 tương ứng là I_1, I_2, I_3 thì $I_1 = 2{,}8I_2 = 0{,}4I_3$. Hỏi nếu đặt hai điểm C, D vào hiệu điện thế trên thì số chỉ các vôn kế là bao nhiêu ? Cho rằng các ampe kế có điện trở không đáng kể.

NGUYỄN MẠNH THẮNG
(GV THCS Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/348. (for 6th grade)

Find all four-digit numbers $\overline{abcd}$ satisfying the condition

$$\overline{abcd} = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 + 2006.$$

T2/348. (for 7th grade)

Let ABC be a right-angled triangle with right angle at A. On the side AC take the point E so that $\widehat{EBC} = 2\widehat{ABE}$. On the segment BE take the point M such that $EM = BC$. Compare the measures of the angles $\widehat{MBC}$ and $\widehat{BMC}$.

T3/348. Solve the equation

$$\frac{1}{4x-2006}+\frac{1}{5x+2004}=\frac{1}{15x-2007}-\frac{1}{6x-2005}.$$

T4/348. Prove that

$$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)+2\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right)\ge 6$$

for arbitrary numbers a, b, c not less than 1.

T5/348. Find the greatest value of the expression

$$P = 3xy + 3yz + 3zx - xyz$$

where x, y, z are positive numbers satisfying the condition $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

T6/348. Let be given a triangle ABC. P is a point on the line BC. On the opposite ray of the ray AP, take the point D such that $AD = \frac{BC}{2}$. Let E and F be the midpoints respectively of

(Xem tiếp trang 8)

★**Bài T1/344. (Lớp 6).** *Tìm số tự nhiên n sao cho tổng của 2n số hạng*

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{2n(2n+2)}$$

bằng $\frac{14651}{19800}$.

Lời giải. Đặt

$$A=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{2n(2n+2)}$$

Áp dụng công thức $\frac{2}{k(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$ với $k = 1, 2, ..., 2n$ ta có

$$2A=\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\right)+$$

$$+\left(\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\ldots+\frac{2}{2n(2n+2)}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right).$$

Để $A=\frac{14651}{19800}$ thì

$$\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{14651}{9900}$$

hay $\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\frac{199}{9900}$ (*)

hay $\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{199}{9900}$.

Vì $(4n + 3, 2(2n + 1)) = (4n + 3, 4n + 2) = 1$ và $(4n + 3, 2(2n + 2)) = (4n + 3, 4n + 4) = 1$ nên $\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)}$ là phân số tối giản với số tự nhiên n bất kì. Vì vậy $4n + 3 = 199$ (số nguyên tố) và $(2n+1)(2n+2) = 9900$. Suy ra $n = 49$. ❐

Nhận xét. 1) Từ (*) có thể lập luận cách khác. Với $n = 49$ thì (*) đúng. Với $n < 49$ hoặc $n > 49$ thì (*) không đúng. Vậy chỉ có thể $n = 49$. Một số bạn không xét các trường hợp $n < 49$ hoặc $n > 49$ mà khẳng định ngay là $n = 49$ là chưa đầy đủ. Một số bạn đưa về dạng $(n - 49)(398n + 299) = 0$ để suy ra $n = 49$, tuy nhiên điều đó đòi hỏi sự khéo léo biến đổi tam thức bậc hai thành tích hai nhân tử (khi chưa học cách giải phương trình bậc hai).

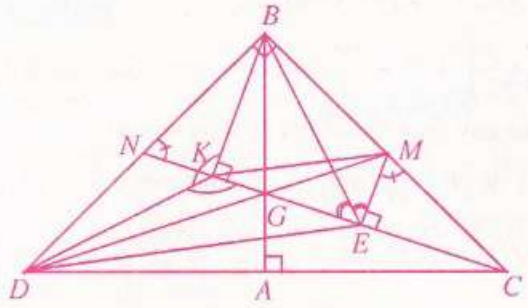
2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Phùng Thị Thu Thủy*, 6B, THCS Tân Phú, Thanh Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Bùi Văn Toàn*, 6A1, *Nguyễn Ngọc Thọ*, 6A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Trần Anh Linh*, 6A, THCS Đồng Ích, *Mạc Thị Thu Huệ*, 6A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch; **Hà Tây:** *Tào Thị Ánh Tâm*, 5A, TH Tam Hưng, Thanh Oai; **Quảng Ninh:** *Đỗ Thái Chúng*, 6A1, THCS Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Thanh Hóa:** *Cao Thanh Tùng*, 6A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa;**Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Hạnh*, 6A, *Nguyễn Văn Thắng*, *Hoàng Văn Đông*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Bình:** *Hoàng Thị Trường Giang*, 6/2, THCS Quảng Minh, Quảng Trạch; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Ngọc Giào*, 6/5, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Triệu Phong; **Quảng Ngãi:** *Võ Văn Viến*, 6A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành;**Tiền Giang:** *Nguyễn Hoàng Lâm*, 6/1, THCS Tân Thành, Gò Công Đông.

VIỆT HẢI

★**Bài T2/344. (Lớp 7).** *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là điểm thuộc cạnh AB sao cho* $AG=\frac{1}{3}AB$, *E là chân đường vuông góc hạ từ M xuống CG. Các đường thẳng MG và AC cắt nhau tại D. So sánh độ dài DE và BC.*

Lời giải. Trên tia CA lấy điểm D' sao cho A là trung điểm của CD' thì hai đường trung tuyến BA và $D'M$ cắt nhau tại điểm G với $AG=\frac{1}{3}AB$, do đó điểm D' trùng với điểm D. Mặt khác, $BA \perp DC$ nên ΔBDC cân tại B, mà $\widehat{BCD} = 45^\circ$ tức ΔBDC vuông cân tại B. Do đó $BD = BC$ (1). Gọi N là giao điểm của CG với BD. Vì G là trọng tâm ΔBDC nên N là trung điểm của BD. Từ đó $BN = CM = BM$. Hạ $BK \perp NC$ thì $KM = BM = CM$ (hình vẽ). Vì ΔKMC cân tại M nên $KE = CE$ (2).



Lại có $\widehat{BNK} = \widehat{CME}$ (cùng phụ với $\widehat{BCN}$), suy ra $\Delta BNK = \Delta CME \Rightarrow \widehat{NBK} = \widehat{MCE}$ và $BK = CE$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $KE = KB$ nên ΔBKE là tam giác vuông cân tại K, do đó $\widehat{BEK} = \widehat{BEM} = 45^o$.

Hai tam giác BKD và CEB có $\widehat{DBK} = \widehat{BCE}$, $BK = CE$ (theo (3)), $BD = CB$, do đó $\Delta BKD = \Delta CEB \Rightarrow \widehat{DKB} = \widehat{BEC} = 135^o \Rightarrow \widehat{DKC} = 360^o - 90^o - 135^o = 135^o$. Suy ra $\Delta DKB = \Delta DKE$ (c.g.c.) $\Rightarrow DB = DE$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $DE = BC$. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn dùng đến kiến thức đường trung bình của tam giác nhưng lại phải chứng minh điều đó.

Một số bạn có nhận xét đúng là bài toán này về thực chất là bài T4/289 tuy nhiên ở đây chỉ được giải bằng kiến thức ở lớp 7.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Dương Hồng Quân*, 7A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Thanh Hóa:** *Hoàng Tiến Dũng, Phạm Thanh Tùng, Trương Quốc Cường*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Ngọc*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Bùi Bắc Nam*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7^7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bình Định:** *Nguyễn Đồng Tiến*, 7A3, THCS Lương Thế Vinh, Quy Nhơn; **Quảng Ngãi:** *Cao Thị Nhật Linh*, 7G, THCS Hành Phước, *Võ Quang Duyệt*, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/344. *Giải phương trình*

$$\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}.$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ 2-\sqrt{x} \ge 0 \\ \sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \le 4$

Đặt $u = \sqrt{2+\sqrt{x}}$, $v = \sqrt{2-\sqrt{x}}$, do $0 < x \le 4$ nên $\sqrt{2} < u \le 2$; $0 \le v < \sqrt{2}$.

Ta có $uv = \sqrt{4-x}$ và $u^2 + v^2 = 4$.

Phương trình trong đầu bài trở thành

$$\frac{u^2}{\sqrt{2}+u}+\frac{v^2}{\sqrt{2}-v}=\sqrt{2}.$$

Biến đổi phương trình, ta được:

$$u^2(\sqrt{2}-v)+v^2(\sqrt{2}+u)=\sqrt{2}(\sqrt{2}+u)(\sqrt{2}-v)$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}(u^2+v^2)-uv(u-v)=\sqrt{2}\left[2+\sqrt{2}(u-v)-uv\right]$$

Thay $u^2 + v^2 = 4$ được:

$$4\sqrt{2}-uv(u-v)=2\sqrt{2}+2(u-v)-\sqrt{2}uv$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}(2+uv)-(u-v)(2+uv)=0$$
$$\Rightarrow (2+uv)(\sqrt{2}-u+v)=0.$$

Vì $2 + uv > 0$ nên $\sqrt{2} - u + v = 0$
$\Rightarrow u - v = \sqrt{2}$.

Do đó $(u - v)^2 = 2 \Rightarrow u^2 + v^2 - 2uv = 2$
$\Rightarrow 4 - 2uv = 2 \Rightarrow uv = 1$.

Ta được $uv = \sqrt{4-x} = 1 \Rightarrow x = 3$ (thoả mãn các điều kiện của bài toán)

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$. ❐

Nhận xét. 1) Có trên 600 bạn tham gia giải bài toán này và số đông làm theo cách giải trên. Điểm quan trọng của lời giải là tìm ra các hệ thức: $u^2 + v^2 = 4$, $u - v = \sqrt{2}$ để từ đó được $uv = 1$.

2) Các bạn lớp 6, 7, 8 sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hoá: *Phạm Hoàng Vũ*, 7C, THCS Lí Thường Kiệt, Hà Trung; *Hoàng Thị Nga*, 7C2, THCS Quảng Ngọc, Quảng Xương; *Nguyễn Thị Thu Hà*, 6B, *Trịnh Minh Chiến*, 8C, *Phạm Thanh Tùng, Trịnh Quang Dũng*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; *Lê Thị Thương, Lê Thị Huyền, Nguyễn Thị Linh*, 8D, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hoá; **Khánh Hoà:** *Nguyễn Thành Đạt*, 6A, THCS Quang Trung, Cam Đức; *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7^7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa Cam Ranh; **Quảng Bình:** *Hoàng Thị Trường Giang*, 62, THCS Quảng Minh, Quảng Trạch; **Nghệ An:** *Vũ Văn*

An, 6C, THCS Quỳnh Hưng, Quỳnh Lưu; *Dương Hoàng Hưng*, 8B, THCS Lí Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Thị Thuý*, 8B, THCS Hạnh Lâm, Thanh Chương; **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Thăng*, 8B, THCS Phú Thái, *Phạm Ngọc Dung*, 8B, THCS Liên Hoà, Kim Thành; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*, 6M, THCS Nguyễn Huệ, TX Đông Hà; **Hưng Yên:** *Hoàng Văn Công*, 7B, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, *Phan Thị Hà*, 6A, THCS Tiên Lữ; **Lào Cai:** *Lê Đức Thọ*, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP Lào Cai; **Nam Định:** *Trương Quang Huy*, 8A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định, *Vũ Thành Chinh*, 7C, THCS Ngô Đồng, Giao Thuỷ; **Hải Phòng:** *Phan Ngọc Diệp*, 7A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An, *Nguyễn Ngọc Huy*, 7A, THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng; **Bắc Ninh:** *Nghiêm Đình Quyết*, 8A1, THCS TTr Chờ, Yên Phong.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T4/344.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \dfrac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} (3x^3 - y^3)(x+y) = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(3x^3 - y^3)(x+y) = (x^2+y^2)^2 \quad (3)$$

$\Leftrightarrow 3x^4 + 3x^3y - xy^3 - y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

$\Leftrightarrow 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y)(2x^2+xy+y^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 0. \end{array}\right.$$

• Nếu $x - y = 0$ thì $x = y$. Thay vào (2) ta được $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x = y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• Nếu $x + 2y = 0$ thì $x = -2y$. Thay vào (2) ta được $5y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Với $y = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ thì $x = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$.

Với $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ thì $x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

• Nếu $2x^2 + xy + y^2 = 0$ thì

$$\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + x^2 + \frac{3y^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (1) là $x + y \neq 0$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm

$$(x; y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right); \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{-\sqrt{5}}{5}\right). \square$$

Nhận xét. 1) Đa số các bạn tham gia giải bài này đều đúng. Ngoài lời giải trên đây, nhiều bạn còn giải bằng cách lập luận $y \neq 0$ và chia cả hai vế của phương trình (3) cho y^4 để đưa đến phương trình bậc bốn ẩn t $\left(\text{với } t = \dfrac{x}{y}\right)$ và cũng đi đến kết quả.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Tây: *Đặng Khánh Hòa*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, *Trần Đức Minh, Đinh Hoàng Long*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức, *Nguyễn Thị Thu Thủy*, 9A1, THCS Nguyễn Trực, TT Kim Bài, Thanh Oai; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Huy Linh*, 8B, THCS Yên Bái, Yên Định, *Nguyễn Minh Đức*, 9C, THCS Trường Sơn, Nông Cống, *Thịnh Quang Thanh*, 9B, THCS Hàm Rồng; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Dương*, 8B, THCS Liên Hòa, Kim Thành; **Bắc Giang:** *Hà Khương Duy*, 9B, THCS TTr. Bố Hạ, Tân Thế; **HưngYên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ; **Hà Nam:** *Trần Văn Quỳnh*, 9A1, THCS Nguyễn Khuyến, Bình Lục; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thế Hưng*, 9A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Luật*, 9B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Thuận:** *Phạm Minh Quân*, 8_2, THCS Nguyễn Du, Phan Thiết; **Lâm Đồng:** *Đinh Thành Nhân*, 9A7, THCS Quang Trung, Đà Lạt.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/344.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$M = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovski, ta có

• $(ab + bc + ca)^2 =$

$= (\sqrt{a}.\sqrt{a}.b + \sqrt{b}.\sqrt{b}.c + \sqrt{c}.\sqrt{c}.a)^2$

$\leq (a + b + c)(ab^2 + bc^2 + ca^2)$ (1)

- $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$

  Do $a^2+b^2+c^2=3$, suy ra $a+b+c \le 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$M = \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{(ab+bc+ca)^2} \ge \frac{1}{a+b+c} \ge \frac{1}{3}.$$

$M = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{1}{3}$ đạt được khi $a=b=c=1$. ❐

Nhận xét. 1) Đa số các bạn giải đúng và có cách giải như ở trên.

2) Từ bài toán đã cho, bạn đọc có thể dễ dàng giải được một số bài toán mở rộng sau:

* "Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a_1a_2^2+a_2a_3^2+...+a_na_1^2}{(a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1)^2}$$

trong đó các số a_i dương ($i = 1, ..., n$) thỏa mãn

$a_1^2+{}_2^2+...+a_n^2 = m$".

* "Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a^{n-1}b+b^{n-1}c+c^{n-1}a}{\left(\sqrt{(ab)^n}+\sqrt{(bc)^n}+\sqrt{(ca)^n}\right)^2}$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn

$a^n+b^n+c^n = n+1$ ($n \ge 1$)."

3) Các bạn có lời giải tốt là:

Bắc Ninh: *Nguyễn Hồng Vân*, 7D, THCS Tam Sơn, Từ Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Mạc Thế Trường*, 9A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Hà Tây:** *Đinh Duy Anh*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Yên Bái:** *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu, TX. Nghĩa Lộ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Huy Linh*, 8B, THCS Yên Bái, Yên Định, *Trịnh Quang Thanh*, 9B, THCS Hàm Rồng, *Nguyễn Minh Anh*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Đức Thiện*, 9G, THCS TTr. Kỳ Anh, *Trần Quang Biểu*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Trị:** *Nguyễn Minh Sang*, 9/6, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Triệu Phong; **Kiên Giang:** *Vũ Đại Nghĩa*, 9/3, THCS Mai Thị Hồng Hạnh, Giồng Riềng.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T6/344. *Cho X là một điểm nằm trên cạnh AB của hình bình hành ABCD. Đường thẳng qua X song song với AD, cắt AC tại M và cắt BD tại N. XD cắt AC tại P và XC cắt BD tại Q. Chứng minh rằng* $\frac{MP}{AC}+\frac{NQ}{BD} \ge \frac{1}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (Hình đơn giản, bạn đọc tự vẽ). Đặt $AX = x$, $XB = y$, $AB = x+y = a$. Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{AP}{PC} = \frac{AX}{CD}$. Suy ra

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AX}{CD+AX} = \frac{x}{a+x} \quad (1)$$

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AX}{AB} = \frac{x}{a} \quad (2)$$

Từ (1), (2) và $MP = AM - AP$ suy ra:

$$\frac{MP}{AC} = \frac{AM}{AC} - \frac{AP}{AC} = \frac{x}{a} - \frac{x}{a+x} = \frac{x^2}{a(a+x)} \quad (3)$$

Tương tự ta có $\frac{NQ}{BD} = \frac{y^2}{a(a+y)}$ (4)

Theo BĐT Bunhiacovski:

$$[a(a+x)+a(a+y)]\left[\frac{x^2}{a(a+x)}+\frac{y^2}{a(a+y)}\right] \ge (x+y)^2 \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) dẫn đến:

$$\frac{MP}{AC}+\frac{NQ}{BD} \ge \frac{(x+y)^2}{a(a+x)+a(a+y)} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{a}{2}$ hay X là trung điểm của cạnh AB. ❐

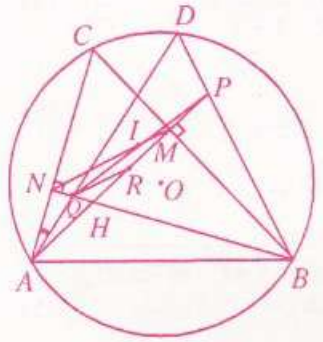
Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:

Yên Bái: *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu, TX Nghĩa Lộ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Trương Mạnh Linh*, 9B, THCS Từ Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Chính*, 9A, THCS Lập Thạch; **Bắc Giang:** *Hà Trọng Sỹ*, 9A, THCS Tân Thanh, Lạng Giang; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Ngọc Huy*, 7A, THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng; **Nam Định:** *Trần Thu Thủy*, 8A4, THCS Trần Đăng Ninh, *Trần Thị Hồng Vân*, 9D, Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Minh Anh*, 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Lượng*, 9, THCS Trần Hưng Đạo, TX Đông Hà; **Đà Nẵng:** *Hồ Quý Phương*, 9/2, THCS Trưng Vương; **Quảng Ngãi:** *Vũ Hoàng Yến*,

9A, THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa; **Phú Yên:** *Nguyễn Vũ Hoàng Minh*, 8A, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hòa; **Đăk Lăk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Đồng Nai:** *Nguyễn Nhật Minh*, 9A1, THCS Lý Thường Kiệt; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, Rạch Giá.

VŨ KIM THỦY

★ **Bài T7/344.** *Cho tam giác ABC với các đường cao AM, BN và nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm trên đường tròn đó mà khác A, B và DA không song song với BN. Các đường thẳng DA và BN cắt nhau tại Q. Các đường thẳng DB và AM cắt nhau tại P. Chứng minh rằng khi D di động trên đường tròn (O) thì trung điểm của đoạn PQ luôn nằm trên một đường thẳng cố định.*



Lời giải. Chúng ta sẽ chứng minh trung điểm của đoạn PQ luôn thuộc đường thẳng MN cố định khi D di động trên đường tròn (O). Thật vậy, giả sử D thuộc cung BC (không chứa A) (các trường hợp D thuộc cung AB không chứa C hoặc D thuộc cung AC không chứa B thì chứng minh tương tự).

Gọi H là trực tâm tam giác ABC.

Nhận thấy rằng $\Delta ANH \backsim \Delta BMH$ nên

$$\frac{AN}{NH} = \frac{BM}{MH} \qquad (1)$$

Vì $\widehat{ANQ} = \widehat{BMP} = 90^\circ$; $\widehat{NAQ} = \widehat{MBP}$ suy ra $\Delta ANQ \backsim \Delta BMP$, dẫn đến $\dfrac{AN}{NQ} = \dfrac{BM}{MP}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{NQ}{NH} = \dfrac{MP}{MH}$ (3)

Trên đường thẳng AM lấy điểm R sao cho $QR // MN$. Theo định lí Thales ta có

$$\frac{NQ}{NH} = \frac{MR}{MH} \qquad (4)$$

Từ (3), (4) ta nhận được $\dfrac{MP}{MH} = \dfrac{MR}{MH}$, hay $MP = MR$. Như vậy nếu gọi I là giao điểm của PQ và MN thì MI là đường trung bình của tam giác PQR, suy ra I là trung điểm của đoạn PQ. Nói cách khác, trung điểm của đoạn PQ luôn nằm trên đường thẳng MN cố định. ❐

Nhận xét. Một số bạn sử dụng *định lí đảo Menelaus* cho tam giác PHQ để chứng minh ba điểm M, I, N thẳng hàng (trong đó I là trung điểm của đoạn PQ). Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt, gửi bài đến Tòa soạn sớm:

Phú Thọ: *Nguyễn Hoàng Hải, Vũ Hồng Quân*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Chinh, Dương Thu Trang, Khổng Hoàng Thao, Mạc Thế Trường*, 9A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Bắc Giang:** *Hà Khương Duy*, 9B, THCS TTr. Bố Hạ, Yên Thế; **Yên Bái:** *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu, TX Nghĩa Lộ; **Hà Tây:** *Đặng Dũng Hà, Trần Nhật Tân*, 9A3, THCS Ngô Sỹ Liên, Chương Mỹ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Ngọc*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trần Văn Phúc*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Võ Thị Minh Trang*, 9A, THCS TTr. Quán Hành, Nghi Lộc; **Đăk Lăk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T8/344.** *Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng*

$$\sum_{j=0}^{p} C_p^j C_{p+j}^j - (2^p + 1)$$

chia hết cho p^2, trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n.

Lời giải. (Theo bạn *Phùng Hoàng Đức*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**).

Ta có hai nhận xét sau:

1) $\left(C_{p+j}^j - 1\right) \vdots\, p$ với $1 \le j \le p-1$. Thật vậy

$$C_{p+j}^j - 1 = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+j) - j!}{j!}$$

Ta có $(p+1)(p+2)\ldots(p+j) \equiv j! \pmod p$.

Tử số chia hết cho p và $j!$ mà $(p, j!) = 1$ do đó tử số chia hết cho $j!p$ tức là $\left(C_{p+j}^j - 1\right) \vdots\, p$.

2) $C_{2p}^p \equiv 2 \pmod{p^2}$. Thật vậy ta có

$$(1+x)^{2p} = (1+x)^p (1+x)^p$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k x^k = \left(\sum_{i=0}^{p} C_p^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{p} C_p^j x^{p-j}\right)$$

Đồng nhất hệ số của x^p ta được

$$C_{2p}^p = \sum_{k=0}^{p} \left(C_p^k\right)^2 = 2 + \sum_{k=1}^{p-1} \left(C_p^k\right)^2, \text{ vì } C_p^k \vdots p$$

với mọi k mà $1 \le k \le p-1$ nên $C_{2p}^p \equiv 2 \pmod{p^2}$

Trở lại bài toán ta có

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=0}^{p} C_p^j C_{p+j}^j - 2^p - 1 \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} C_p^j C_{p+j}^j + 1 + C_{2p}^p - \sum_{j=0}^{p} C_p^j - 1 \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} C_p^j \left(C_{p+j}^j - 1\right) + \left(C_{2p}^p - 2\right). \end{aligned}$$

Dựa vào nhận xét 1) và 2) ta suy ra $B \vdots p^2$ (đpcm). ❐

Nhận xét. Nhiều bạn có lời giải tốt như : **Hà Nội:** *Đặng Anh Tuấn*, 11A1, Khối THPT chuyên Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội; **Hà Tây:** *Nguyễn Xuân Việt*, 11T, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Cường*, $10A_0$, THPT Yên Phong; **Hưng Yên:** *Phan Tiến Dũng*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Phạm Duy Hiệp*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Ninh:** *Phạm Đức Mạnh*, 10 THPT chuyên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Hải*, THPT Đông Sơn; **Quảng Bình:** *Đặng Ngọc Thành* 11chuyên, THPT chuyên Quảng Bình; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T9/344.** *Xét dãy $(f_n(x))$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ các hàm số xác định trên $[0; 1]$ thỏa mãn*

$$f_0(x) = 0 \text{ và } f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - \left(f_n(x)\right)^2\right)$$

với $n = 0, 1, 2, \ldots$

Chứng minh rằng $\dfrac{nx}{2+n\sqrt{x}} \le f_n(x) \le \sqrt{x}$

với $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; 1]$.

Lời giải. Với $x \in [0; 1]$ đã được xác định, để đơn giản trong trình bày ta kí hiệu $x = a^2$, $a \in [0; 1]$ và $x_n = f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. (Qua đó ta cũng thấy đây là bài toán thuộc phần dãy số). Như vậy ta có:

$$a \in [0; 1],\ x_0 = 0,\ x_{n+1} = x_n + \frac{a^2 - x_n^2}{2}$$

với $n = 0, 1, 2, \ldots$ và ta cần phải chứng minh

$$\frac{na^2}{2+n.a} \le x_n \le a \text{ với } n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (1) bằng quy nạp theo n. Với $n = 0$ thì (1) đúng vì $x_0 = 0$.

Giả sử (1) đã đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$), ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$.

Ta có $x_{k+1} = x_k + \dfrac{a^2 - x_k^2}{2}$.

Suy ra $a - x_{k+1} = a - x_k - \dfrac{a^2 - x_k^2}{2}$

$$= (a - x_k)\left(1 - \frac{a + x_k}{2}\right) \qquad (2)$$

Chú ý: theo giả thiết quy nạp $x_k \le a \Rightarrow a - x_k \ge 0$ và $1 - \dfrac{a + x_k}{2} \ge 1 - \dfrac{a + a}{2} = 1 - a \ge 0$.

Do đó từ (2) ta nhận được $a - x_{k+1} \ge 0$, tức là

$$x_{k+1} \le a \qquad (3)$$

Lại theo giả thiết quy nạp $\dfrac{k.a^2}{2+k.a} \le x_k \le a$, suy ra $a - x_{k+1} =$

$$(a - x_k)\left(1 - \frac{a + x_k}{2}\right) \le \left(a - \frac{k.a^2}{2+ka}\right)\left(1 - \frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{2a}{2+ka}\left(1 - \frac{a}{2}\right) \le \frac{2a}{2+(k+1)a}$$

vì $2(2 + ka) - (2 - a)(2 + (k + 1)a)$

$= a(2 + (k + 1)a) - 2a = (k + 1).a^2 \ge 0$.

Hệ quả là $x_{k+1} \ge a - \dfrac{2a}{2+(k+1)a} = \dfrac{(k+1).a^2}{2+(k+1)a}$

Từ (3) và (4) ta có

$$\frac{(k+1).a^2}{2+(k+1)a} \le x_{k+1} \le a \text{ (đpcm). } ❐$$

Nhận xét. Đề thi học sinh giỏi toán Quốc gia THPT bảng A năm học 1989, yêu cầu:

Chứng minh $a - \dfrac{2}{n+1} \le x_n \le a$ (5)

Ta thấy $\dfrac{na^2}{2+na} = a - \dfrac{2a}{2+na} \ge a - \dfrac{2a}{a+na} = a - \dfrac{2}{n+1}$ (vì $0 \le a \le 1 < 2$).

Như vậy (1) là một đánh giá chặt hơn so với (5). Chú ý phương pháp chứng minh vẫn là quy nạp.

Hoan nghênh các bạn lớp 10 sau tham gia và có lời giải tốt:

Hà Tây: *Nguyễn Hữu Hiển, Đinh Quốc Trung*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Quyền*, $10A_1$, THPT chuyên; **Hải Dương:** *Đỗ Đức Tài*, 10T2, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Hoàng Đức Ý*, 10 T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Dương Trọng Hoàng*, 10A1, PTCT, ĐH Vinh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/344.** *Cho đa thức $P(x) = x^2 - 1$. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình*

$$P(P(...(P(x))...)) = 0$$

trong đó có 2006 kí hiệu P ở vế trái của phương trình.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Đặt $P_n(x) = \underbrace{P(P(...P}_{n \text{ chữ } P}(x))...))$.

Nhận xét rằng $P(x) \geq -1$ với mọi x nên $P_{n+1}(x) = P(P_n(x)) \geq -1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng phương trình $P_n(x) = a$ với $a > 0$ tùy ý, luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Thật vậy, với $n = 1$ thì phương trình $x^2 - 1 = a$ có hai nghiệm phân biệt. Giả sử phương trình $P_n(x) = a$ với $a > 0$ tùy ý có hai nghiệm thực phân biệt.

Xét phương trình $P_{n+1}(x) = a$ với $a > 0$ nào đó..

Ta có $P_{n+1}(x) = a \Leftrightarrow P(P_n(x)) = a$

$\Leftrightarrow (P_n(x) - \sqrt{a+1})(P_n(x) + \sqrt{a+1}) = 0$.

Do $P_n(x) + \sqrt{a+1} \geq -1 + \sqrt{a+1} > 0$ mà theo giả thiết quy nạp $P_{(n)}(x) = \sqrt{a+1}$ có hai nghiệm thực phân biệt, suy ra phương trình $P_{n+1}(x) = a$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Tiếp theo, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học rằng phương trình $P_n(x) = 0$ có đúng $n + 1$ nghiệm thực phân biệt.

Thật vậy, với $n = 1$ và $n = 2$ thì ta có kết luận đúng. Giả sử, phương trình $P_n(x) = 0$ có đúng $n + 1$ nghiệm thực phân biệt. Xét phương trình $P_{n+2}(x) = 0$

$\Leftrightarrow [P(P_n(x)) + 1]\,[P(P_n(x)) - 1] = 0$

$\Leftrightarrow P_n^2(x)(P_n^2(x) - 2) = 0$

$\Leftrightarrow P_n^2(x)(P_n(x) - \sqrt{2})(P_n(x) + \sqrt{2}) = 0$.

Theo giả thiết quy nạp, PT này có đúng $n + 3$ nghiệm thực phân biệt.

Kết luận: Phương trình $P_n(x) = 0$ có đúng $n + 1$ nghiệm phân biệt và như vậy, phương trình ở đề bài có 2007 nghiệm thực phân biệt. ❐

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Lạng Sơn: *Nguyễn Phong Phú*, 11A, THPT Chu Văn An, TP Lạng Sơn; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Văn Thành*, 12B, THPT Bắc Sơn; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đình Kiên*, 11A1, THPT Tiên Du, *Nguyễn Trí Dũng*, 11A1, THPT Thuận Thành 1, *Lê Tiến Thành*, 11A1, THPT Quế Võ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thu Phương, Đỗ Lê Việt Thắng, Ngô Tuấn Anh, Nguyễn Xuân Thọ, Phùng Hoàng Đức*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Phạm Sỹ Tiến*, 12A2, THPT Bán công Hai Bà Trưng, Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Đặng Tiến Sinh*, 12A3, THPT CN Việt Trì, *Khổng Ngọc Trọng*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ; **Hà Tây:** *Nguyễn Hữu Phương*, 11A2, THPT Vân Cốc, *Dương Minh Hùng, Trịnh Ngọc Tú*, 11T, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hải Dương:** *Vũ Xuân Dương*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP Hải Dương; **Hưng Yên:** *Phan Tiến Dũng*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Nguyễn Bình*, 11A1, THPT Nam Tiền Hải; **Nam Định:** *Phạm Duy Hiệp*, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** *Trịnh Bá Linh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Đậu Lệ Thủy*, 11A, THPT Quỳnh Lưu, Nghệ An; **Quảng Bình:** *Đặng Ngọc Thanh*, 11T, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Trị:** *Võ Thị Chung*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** *Đinh Văn Vương*, 10T, *Nguyễn Thị Hoàng Oanh, Nguyễn Thành Nam*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Bình Định:** *Võ Xuân Thanh*, 11A6, THPT số 2, Tuy Phước; **Đăk Lăk:** *Lê Đức Quang*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 10A1, THPT Châu Thành; **Phú Yên:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 11A THPT Phan Chu Trinh, Phú Yên; **Bạc Liêu:** *Trần Mỹ Linh*, 10T, *Đỗ Thanh Ân*, 11T, THPT chuyên Bạc Liêu.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/344.** *Giả sử ba tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ và $A_3B_3C_3$ thỏa mãn các điều kiện :*

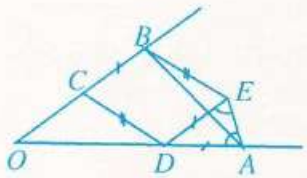
$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3}$, $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$ *và*

$B_1C_1 + C_2A_2 = B_2C_2 + C_3A_3 = B_3C_3 + C_1A_1$ (*)

Chứng minh rằng ba tam giác đó bằng nhau.

Lời giải. Cách giải hình học gồm hai bước sau đây.

Bước 1. *Bổ đề.* Nếu một tứ giác lồi $ABCD$ có hai cạnh đối diện $AD = BC$ nhưng không song song thì $AB \neq CD$; cụ thể là AB lớn hơn hay nhỏ hơn CD tuỳ theo hai tia AD và BC cắt nhau hay hai tia DA và CB cắt nhau.



Hình 1

(Bạn đọc tự chứng minh bằng cách dựng hình bình hành $BCDE$ (h.1), sau đó sử dụng định lí về so sánh cạnh và góc của tam giác ABE).

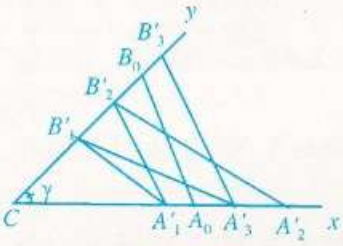
Bước 2. Đặt $\widehat{C_i} = \gamma$ $(0 < \gamma < \pi)$, $A_iB_i = c$, $B_iC_i = a_i$, $C_iA_i = b_i$, $(i \in \{1, 2, 3\})$.

Khi đó dãy điều kiện (*) được viết lại là:

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_3 = a_3 + b_1 \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh rằng dãy đẳng thức (1) chỉ được thỏa mãn với $a_1 = a_2 = a_3$ và $b_1 = b_2 = b_3$.

a) Trước hết, giả sử rằng a_1, a_2, a_3 đôi một khác nhau và do đó, theo (1) thì b_1, b_2 và b_3 cũng đôi một khác nhau. Không mất tính tổng quát giả định rằng $a_1 < a_2 < a_3$ và do đó $b_1 < b_3 < b_2$ (2).



Hình 2

Sau đó, ta dựng một góc $\widehat{xCy} = \gamma$ rồi lấy các điểm A'_1, A'_2, A'_3 trên Cx và B'_1, B'_2, B'_3 trên Cy sao cho $CA'_i = b_i$ và $CB'_i = a_i$ $(i \in \{1, 2, 3\})$. Thế thì ta được $\Delta A'_iB'_iC = \Delta A_iB_iC$ (c.g.c.), $(i \in \{1, 2, 3\})$, (h. 2). Theo cách dựng và giả thiết có:

$$A'_1B'_1 = A'_2B'_2 = A'_3B'_3 = A_iB_i = c \qquad (3).$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng: $A'_1B'_1 < A'_2B'_2$ hoặc $A'_1B'_1 < A'_3B'_3$.

Thật vậy, từ (1) ta được: $b_2 - b_3 = a_2 - a_1$ và $b_3 - b_1 = a_3 - a_2$ nên

$$A'_3A'_2 = B'_1B'_2,\ A'_1A'_3 = B'_2B'_3 \qquad (4)$$

Xét tứ giác lồi $A'_2B'_2B'_1A'_3$ có $A'_3A'_2 = B'_1B'_2$ và tứ giác lồi $A'_3B'_3B'_2A'_1$ có $A'_1A'_3 = B'_2B'_3$ và hai cặp tia $(A'_2A'_3, B'_2B'_1)$; $(A'_3A'_1, B'_3B'_2)$ đều cắt nhau ở C. Vì vậy, theo bổ đề ở trên thì ta có:

$$A'_2B'_2 > A'_3B'_1 \ (5) \text{ và } A'_3B'_3 > A'_1B'_2 \qquad (6)$$

Xét hai trường hợp có thể xảy ra:

1) Nếu $a_1 \le b_1$ thì $\widehat{CA'_1B'_1} \le \widehat{CB'_1A'_1}$ suy ra $\widehat{A'_1A'_3B'_1} < \widehat{CA'_1B'_1} < 90^0 < \widehat{B'_1A'_1A'_3}$ và do đó, trong $\Delta A'_1B'_1A'_3$ ta có $A'_3B'_1 > A'_1B'_1$ nên đối chiếu với (5) ta được $A'_1B'_1 < A'_2B'_2$ (7).

2) Nếu $a_1 \ge b_1$ thì cũng lập luận tương tự (bạn đọc tự vẽ hình) ta được $\widehat{A'_1B'_2B'_1} < 90^o < \widehat{A'_1B'_1B'_2}$ và do đó, trong $\Delta A'_1B'_1B'_2$ ta có $A'_1B'_2 > A'_1B'_1$ nên đối chiếu với BĐT (6) ta được $A'_1B'_1 < A'_3B'_3$ (8).

Các BĐT (7) hoặc (8) thu được từ giả định có các BĐT nghiêm ngặt (2), mâu thuẫn với giả thiết của bài toán là có dãy đẳng thức (3). Mâu thuẫn đó chứng tỏ hoặc $a_1 = a_2 = a_3$ và do đó, $b_1 = b_2 = b_3$, hoặc ít nhất hai trong ba số a_i bằng nhau (hay hai trong ba số b_i bằng nhau), $(i \in \{1, 2, 3\})$.

b) Ta chứng minh rằng: Nếu hai trong ba số a_i $(i \in \{1, 2, 3\})$ bằng nhau thì cả ba số a_i đó bằng nhau, do đó cả ba số b_i cũng bằng nhau và ba tam giác $A_iB_iC_i$ bằng nhau. Thật vậy, chẳng hạn giả sử $a_2 = a_3$; thế thì từ (1) suy ra $b_3 = b_1$ và bây giờ thì dãy đẳng thức (1) thu về chỉ còn một đẳng thức đó là $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$ (9).

Bài toán quy về chỉ còn hai tam giác trong đó điều kiện (*) được thay bởi (9). Sau đó cũng chứng minh tương tự như phần a) trên cơ sở sử dụng bổ đề trên thì chứng minh được rằng $a_1 = a_2 = a_3$ và do đó $b_1 = b_2 = b_3$, ta được đpcm. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn đưa ra cách giải đại số theo hướng sau: Áp định lí cosin cho $\Delta A_iB_iC_i$ $(i \in \{1, 2, 3\}$ ta xem sáu số dương a_i, b_i là các nghiệm của hệ (H) gồm sáu PT sau: $a_1 + b_2 = a_2 + b_3 = a_3 + b_1 = d$ và $a_1^2 + b_1^2 + ka_1b_1 = a_2^2 + b_2^2 + ka_2b_2 = a_3^2 + b_3^2 + ka_3b_3 = c^2$ trong đó $k = -2\cos\gamma$. Sử dụng tính hoán vị vòng quanh của chỉ số $1 \to 2 \to 3 \to 1$ và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau dẫn đến xét tam thức bậc hai của k dạng $f(k) = \alpha k^2 + \beta k + \gamma$, trong đó α, β, γ lần lượt là các đa thức đối xứng của các đối số a_1, a_2, a_3. Điều kiện cần và đủ để $k = -2\cos\gamma$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình (H) là $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3$ (kéo theo $b_1 = b_2 = b_3$).

2) Bài toán này thuộc loại khó. Chỉ có 22 bạn tham gia giải, trong đó có một bạn lớp 7 và một bạn lớp 9. Đáng tiếc là hầu hết đều giải sai, hoặc do vội vàng ngộ nhận, hoặc do tính toán nhầm dấu, hoặc chỉ xét trên một cung tròn cũng dẫn đến ngộ nhận.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★**Bài T12/344.** *Xét một lục giác lồi nội tiếp ABCDEF. Đường chéo BF cắt AE, AC lần lượt tại M, N. Đường chéo BD cắt CA, CE lần lượt tại P, Q. Đường chéo DF cắt EC, EA lần lượt tại R, S.*

Chứng minh rằng MQ, NR và PS đồng quy.

Lời giải. Trước hết, xin phát biểu và chứng minh hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho các số dương $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ thỏa mãn điều kiện $\alpha+\beta=\alpha'+\beta' < \pi$; $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$.

Khi đó: $\alpha=\alpha'$ và $\beta+\beta'$.

Chứng minh.

Đặt $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)=\pi-(\alpha'+\beta')>0$. Xét hai tam giác ABC, $A'B'C'$ có: $\widehat{A}=\alpha$; $\widehat{B}=\beta$; $\widehat{C}=\gamma$ và $\widehat{A'}=\alpha'$, $\widehat{B'}=\beta'$; $\widehat{C'}=\gamma$ ta thấy: $\widehat{C}=\widehat{C'}$ (cùng bằng γ) (1)

Theo định lí sin và theo giả thiết

$$\frac{CA}{CB}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'}=\frac{C'A'}{C'B'} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Rightarrow \alpha=\alpha'$; $\beta=\beta'$.

Bổ đề 2. (định lí Pascal) Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp. AE cắt DF tại S, BE cắt CF tại X, AC cắt BD tại P. Khi đó S, X, P thẳng hàng.

Chứng minh. Áp dụng định lí Céva dạng sin cho các tam giác XEF, XBC (h. 1), ta có

$$\begin{cases}\dfrac{\sin X_1}{\sin X_2}\cdot\dfrac{\sin E_1}{\sin E_2}\cdot\dfrac{\sin F_1}{\sin F_2}=1\\[2ex] \dfrac{\sin X_3}{\sin X_4}\cdot\dfrac{\sin C_3}{\sin C_4}\cdot\dfrac{\sin B_3}{\sin B_4}=1\end{cases}$$

Mặt khác, ta có

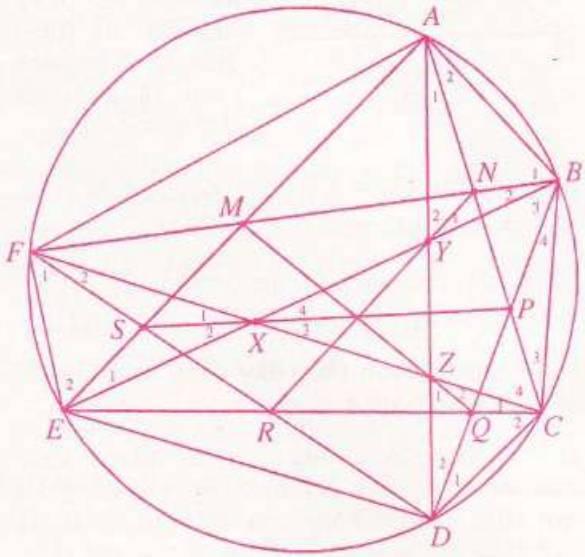
$$\begin{cases}\widehat{E_1}=\widehat{C_3}\ ;\ \widehat{E_2}=\widehat{C_4}\\ \widehat{F_1}=\widehat{B_3}\ ;\ \widehat{F_2}=\widehat{B_4}\end{cases}$$

(góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Từ đó suy ra: $\dfrac{\sin X_1}{\sin X_2}=\dfrac{\sin X_3}{\sin X_4}$. Theo bổ đề 1, ta có: $\widehat{X_1}=\widehat{X_3}$; $\widehat{X_2}=\widehat{X_4} \Rightarrow S, X, P$ thẳng hàng.

Trở lại việc giải bài toán.

Trường hợp 1: AD, BE, CF không đồng quy (h. 1).



Hình 1

Giả sử BE cắt CF tại X, BE cắt AD tại Y, AD cắt CF tại Z.

Theo bổ đề 2, PS đi qua X, NR đi qua Y, MQ đi qua Z.

Áp dụng định lí Céva dạng sin lần lượt cho các tam giác XEF, YAB, ZCD, ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{\sin X_1}{\sin X_2}\cdot\dfrac{\sin E_1}{\sin E_2}\cdot\dfrac{\sin F_1}{\sin F_2}=1\\[2ex] \dfrac{\sin Y_1}{\sin Y_2}\cdot\dfrac{\sin A_1}{\sin A_2}\cdot\dfrac{\sin B_1}{\sin B_2}=1\\[2ex] \dfrac{\sin Z_1}{\sin Z_2}\cdot\dfrac{\sin C_1}{\sin C_2}\cdot\dfrac{\sin D_1}{\sin D_2}=1\end{cases} \qquad (3)$$

Từ đó, với chú ý rằng:

$\widehat{E_1}=\widehat{D_2}$; $\widehat{E_2}=\widehat{B_1}$; $\widehat{A_1}=\widehat{F_2}$; $\widehat{A_2}=\widehat{D_1}$; $\widehat{C_1}=\widehat{B_2}$; $\widehat{C_2}=\widehat{F_1}$ (4) (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Từ (3), (4) suy ra:

$$\frac{\sin X_1}{\sin X_2}\cdot\frac{\sin Y_1}{\sin Y_2}\cdot\frac{\sin Z_1}{\sin Z_2}=1$$

Vậy, theo định lí Céva đảo dạng sin cho ΔXYZ thì PS, NR, MQ đồng quy.

Trường hợp 2: AD, BE, CF đồng quy tại điểm T.

Theo bổ đề 2, PS đi qua T, NR đi qua T, MQ đi qua T. ❐

Nhận xét. 1) Có 35 bạn tham gia giải và đều giải đúng.

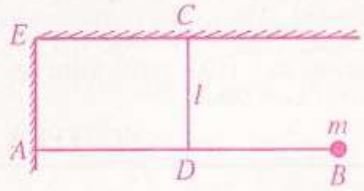
2) Bài toán này là một áp dụng hay của định lí Céva dạng sin.

3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

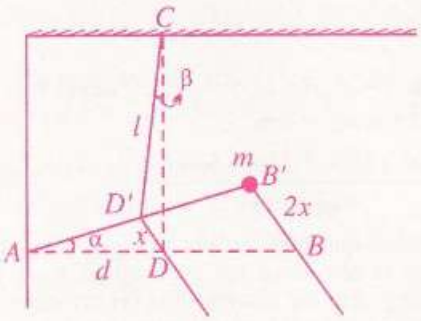
Hà Nội: *Nhữ Anh Tuấn*, 11A2, *Hoàng Văn Cương*, 10A1, *Từ Đức Phong*, 10T2, khối PT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Hà Tây:** *Nguyễn Tiến Thành*, 10T2, THPT Nguyễn Trãi, Hà Đông; **Bắc Ninh:** *Ngô Quốc Duy*, 11A1, THPT Lý Thái Tổ, Từ Sơn; **Nghệ An:** *Bùi Văn Hoàng*, THCS Yên Thành; **Hà Tĩnh:** *Lê Nam Trường*, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Quốc Trung*, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 11A, THPT Phan Chu Trinh, Sông Cầu; **Vĩnh Long:** *Chương Công Danh*, 10T1, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm....

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/344. *Cho hệ cơ như hình vẽ. Thanh AB cứng rất nhẹ, đầu A gắn vào bản lề sao cho thanh có thể quay theo mọi hướng, đầu B gắn vật có khối lượng m. Dây CD có độ dài l, không dãn với D là trung điểm của AB. Kéo thanh AB lệch một góc nhỏ theo phương vuông góc với AE rồi thả nhẹ. Bỏ qua mọi ma sát, chứng minh rằng thanh AB dao động điều hòa và tính chu kì dao động của hệ.*



Lời giải. Khi thanh lệch góc α thì dây OD lệch góc β, D lệch khỏi vị trí cân bằng đoạn x đến D' và B lệch đoạn $2x$ đến B' (hình vẽ).



Vì α, β, x là nhỏ nên thế năng của vật là (chọn mốc tính thế năng tại vị trí cân bằng): $E_t = mgh$, với $h = 2.l(1-\cos\beta) = 4l\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \approx l\beta^2$

Vì $\sin\beta \approx \beta \approx \frac{x}{l}$ nên $E_t \approx mg\frac{x^2}{l}$. Động năng của vật là $E_d = \frac{m}{2}(2x')^2 = 2mx'^2$.

Cơ năng của hệ bảo toàn (bỏ qua ma sát) nên: $2m'x^2 + mg\frac{x^2}{l} = \text{const}$. Lấy đạo hàm hai vế hệ thức này ta có: $x'' + \frac{g}{2l}x = 0$; vật (tức là thanh) dao động điều hòa với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{g}{2l}}$.

Chu kì dao động của hệ là $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$. ❐

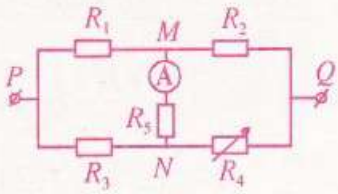
Nhận xét. Các bạn có đáp số đúng (nhưng lập luận chưa thật chặt chẽ):

Thái Nguyên: *Trịnh Quang Hưng*, 12A, THPT chuyên Thái Nguyên; **Bắc Ninh:** *Trần Thái Hà, Trần Đức Trung*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngọc Lâm*, 10B chuyên Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** *Trần Anh Vũ, Phạm Đức Linh*, 10 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** *Vũ Tuấn Anh*, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Lê Bá Sơn*, 10F, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồ Như Ý, Nguyễn Anh Minh, Hoàng Mạnh Hà, Nguyễn Tất Nghĩa*, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Thị Quốc Toản*, 10A3, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Võ Hảo Nhơn, Nguyễn Hữu Quốc Đạt, Nguyễn Việt Duy*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Đức Mạnh*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Nguyễn Phúc Hưng*, 11A1, THPT Võ Thị Sáu, Đất Đỏ; **Tiền Giang:** *Trương Mai Thanh Tâm*, 10 Lí, THPT chuyên Tiền Giang.

MAI ANH

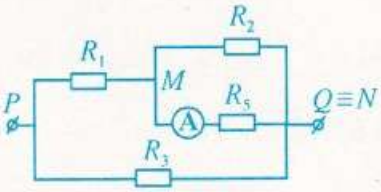
★ **Bài L2/344.** *Cho mạch điện như hình vẽ.*

Biết $R_1 = 1\Omega$, $U_{PQ} = 2V$, $R_A = 0,5\Omega$. Khi $R_4 = 0\ \Omega$ thì $I_A = 1A$; khi $R_4 = 6\Omega$ thì $I_A = 0\ A$; khi $R_4 \to \infty$ thì $I_A = \frac{1}{7}A$. Tính R_2, R_3, R_5.



Lời giải. (Theo bạn *Trịnh Văn Vương*, 11T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**)

Khi $R_4 = 0\Omega$, mạch điện có dạng như hình 1.



Hình 1

$$U_{MQ} = I_A(R_A + R_5) = 0,5 + R_5$$

$$I_2 = \frac{U_{MQ}}{R_2} = \frac{0,5 + R_5}{R_2};$$

$$I_1 = I_A + I_2 = 1 + \frac{0,5 + R_5}{R_2}$$

Ta cũng có :

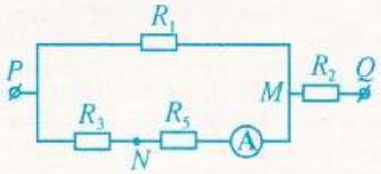
$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{2 - (0,5 + R_5)}{1} = 1,5 - R_5$$

Suy ra : $0,5 + R_5 = (0,5 - R_5)R_2$ (1)

Khi $R_4 = 6\ \Omega$, $I_A = 0$ A, mạch điện trở thành mạch cầu cân bằng :

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \Rightarrow R_1R_4 = R_2R_3 \text{ hay } R_2R_3 = 6 \quad (2)$$

Khi $R_4 \to \infty$, mạch điện có dạng như hình 2.



Hình 2

$$U_{PM} = I_A(R_3 + R_5 + R_A) = \frac{1}{7}(R_3 + R_5 + 0,5)$$

$$I_1 = \frac{U_{PM}}{R_1} = \frac{R_3 + R_5 + 0,5}{7};$$

$$I_2 = I_1 + I_A = \frac{R_3 + R_5 + 1,5}{7};$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{2 - \frac{1}{7}(R_3 + R_5 + 0,5)}{R_2} = \frac{13,5 - R_3 - R_5}{7R_2}$$

Suy ra $(R_3 + R_5 + 1,5)R_2 = 13,5 - R_3 - R_5$ (3)

Từ hệ các phương trình (1), (2), (3) dễ dàng tìm được :

a) $R_2 = 1\ \Omega$; $R_3 = 6\ \Omega$; $R_5 = 0\ \Omega$;

b) $R_2 = 3\ \Omega$; $R_3 = 2\ \Omega$; $R_5 = 0,25\ \Omega$. ❐

Nhận xét: Ngoài bạn Vương, các bạn sau đây có lời giải tốt và ngắn gọn :

Hưng Yên: *Phạm Đức Linh*, 10 lí, *Trần Anh Vũ*, 10 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Tiền Giang**: *Trương Mai Thanh Tâm*, 10 lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Hải Phòng**: *Võ Sĩ Cường*, 10 lí, THPT năng khiếu Trần Phú; **Bình Định**: *Nguyễn Việt Duy*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Thọ**: *Phùng Thị Yến Chi*, THPT chuyên Hùng Vương; **Khánh Hoà**: *Ngô Hà Thảo*, 11 Lí, *Nguyễn Ngọc Kì Nam*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hải Dương**: *Vũ Tuấn Anh*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Quảng Ngãi**: *Phạm Thị Lệ Hương*, 11 Lí, *Nguyễn Thị Kim Khuyên*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Sơn La**: *Lê Vũ Hải*, 10 Lí, THPT chuyên Sơn La; **Hà Nội**: *Phan Đình Đức*, 10A2, THPT Cao Bá Quát, Gia Lâm; **Nghệ An**: *Nguyễn Tất Nghĩa*, 10A3, *Trần Văn Thắng*, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bắc Ninh**: *Trần Thái Hà*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc**: *Vũ Ngọc Quang*, 12A3, *Nguyễn Minh Khương*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Đỗ Duy Chủng*, 11A1, THPT Ngô Gia Tự; **Thanh Hoá**: *Trần Hoàng Đại*, 11B3, THPT Triệu Sơn I, *Lê Bá Sơn*, 10F, THPT Lam Sơn.

NGUYỄN VĂN THUẬN

HÌNH THÀNH ... *(Tiếp trang 12)*

BĐT này còn được viết ở dạng sau:

$$ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 \geq$$
$$\geq a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b).$$

Kết hợp các BĐT (10) và (13), ta có

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$
$$\geq 4(bcm_a^2 + acm_b^2 + abm_c^2)^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^2 \quad (14)$$

– Chọn $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thay vào (3*) ta được:

$$(bc.m_a)^2 + (ca.m_b)^2 + (ab.m_c)^2 \geq$$
$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{12} \quad (15)$$

– Chọn $\alpha = a^3$, $\beta = b^3$, $\gamma = c^3$ thay vào (3*)

$$a.m_a^2 + b.m_b^2 + c.m_c^2 \geq$$
$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2(ab+bc+ca)}{4(a^3+b^3+c^3)} \quad (16)$$

Qua các kết quả trên ta thấy rằng để thu được các BĐT đẹp ta cần có sự lựa chọn bộ số α, β, γ thích hợp. Đồng thời sự chuyển hoá vị trí của M như đã xét ở các phần (b) và (c) cũng đưa tới các BĐT đẹp khác. Ta cần chú ý rằng, nếu điểm M thoả mãn $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, thì không nên chọn các số α, β, γ tỉ lệ với x, y, z vì lúc đó xảy ra dấu đẳng thức.

(Kì sau đăng tiếp)

Nhân kỉ niệm 95 năm
ngày sinh GS. NGUYỄN THÚC HÀO

NHỮNG BÀI BÁO CỦA GS. NGUYỄN THÚC HÀO TRONG BÁO KHOA HỌC

TỪ 1942 ĐẾN 1944

TRẦN ĐÌNH VIỆN
(Sưu tầmvà giới thiệu)

GS. Nguyễn Thúc Hào

Vào đầu thập niên 40 của thế kỉ trước, các nhà khoa học Việt Nam giàu lòng yêu nước, đầy tâm huyết, đứng đầu là GS. *Hoàng Xuân Hãn*, đã tập hợp nhau lại, thống nhất thực hiện các chương trình hoạt động nhằm quảng bá văn hóa dân tộc, truyền bá trong lớp trẻ lòng yêu nước, yêu khoa học. GS. *Hoàng Xuân Hãn* cho xuất bản cuốn *Danh từ Khoa học*, đặt nền móng cho việc dùng và phổ biến tiếng mẹ đẻ trong các lĩnh vực khoa học.

Tháng 1 năm 1942 tạp chí *Báo Khoa học* ra mắt độc giả số đầu tiên do GS. *Nguyễn Xiển* sáng lập, Chủ nhiệm *Nguyễn Đình Thụ*, Chủ bút *Đặng Phúc Thông* cùng với sự cộng tác vô cùng nhiệt tình của các nhà khoa học nổi tiếng thời bấy giờ. Tạp chí đề cập đến nhiều lĩnh vực như Toán, Lí, Hóa, Thiên văn, Địa chất, Y học. Về Toán - Lí (chiếm một tỉ lệ khá cao trong tạp chí) có GS. *Hoàng Xuân Hãn, Nguyễn Thúc Hào, Tạ Quang Bửu, Nguỵ Như Kon Tum, Phó Đức Tố*... tham gia viết bài.

Tạp chí ra mỗi tháng một kì, số 1 ra tháng 1-1942. Rất tiếc tạp chí chỉ duy trì được ba năm, số cuối cùng xuất bản tháng 12-1944.

Trong thời gian ngắn ngủi đó, GS. *Nguyễn Thúc Hào* đã có năm bài báo đăng trong 8 số, mang các đầu đề sau:

1. *Cây đàn bầu* (số 5 năm 1942)
2. *Những khái niệm cơ bản của Hình học* (số 6 năm 1942)
3. *Câu chuyện sông đào trên Hỏa tinh* (đăng trong hai số 11 và 12 năm 1942).
4. *Trực giác và lý luận Toán học* (số 13, 14 năm 1943).
5. *Điều kiện cần và đủ* (số 25 và 26 năm 1944).

Đã hơn 60 năm trôi qua nhưng nội dung và hình thức của các bài báo đó vẫn có ý nghĩa và hấp dẫn lạ kì, kích thích lòng ham mê khoa học của các thế hệ độc giả. Chúng ta khâm phục và biết ơn GS. *Nguyễn Thúc Hào* cũng các nhà khoa học tiền bối đã để lại cho các thế hệ nối tiếp những đóng góp vô cùng quý giá. (GS. NGND. Nguyễn Thúc Hào là Hiệu trưởng đầu tiên và liên tục nhiều năm của trường ĐH Vinh).

Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một trong số các bài báo nói trên.

NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA HÌNH HỌC

Mở đầu bài báo, tác giả xác định Khoa học Hình học là một chi phái của khoa Toán học, chuyên về nghiên cứu tính chất của các **Hình**, không quan tâm đến cái chất của vật như vật lí học. Hình của vật có hai đặc tính là **dạng và kích thước.**

Phần tiếp theo tác giả định nghĩa bằng cách mô tả các khái niệm hình trong không gian Ơclit 3 chiều. Các khái niệm hình học được đưa ra từ to đến nhỏ: từ khái niệm không gian tới điểm.

Khái niệm không gian, không gian của hình học như thuộc về lí tưởng, có tính cách thuần nhất. Không gian là giới trống không, vô cùng, vô tận, đựng tất cả các vật chất trong vũ trụ.

Khối, trong không gian vô tận, một vật choán lấy một phần mà thôi. Phần không gian ấy ta sẽ gọi là một khối.

Mặt, giới hạn của một khối là các vỏ mỏng vô cùng, phân biệt khối với phần dư của không gian. Cái vỏ vô cùng mỏng, không có bề dày, ta gọi là **Mặt**.

Đường, nếu ta muốn phân một mặt ra làm hai mảnh, ta cần đến một cái gì làm giới hạn giữa hai mảnh ấy; giới hạn ấy, mảnh vô chừng, là phần chung của hai mảnh mặt. Ta gọi nó là đường.

(Xem tiếp trang 30)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Những quan điểm cơ bản trong việc biên soạn SÁCH GIÁO KHOA ĐẠI SỐ 10 NÂNG CAO

SÁCH giáo khoa (SGK) *Đại số 10 nâng cao* được biên soạn theo chương trình mới Trung học phổ thông phân ban, trên cơ sở chương trình và SGK thí điểm *Đại số 10 ban KHTN* sau 3 năm thực hiện, rút kinh nghiệm và tiếp thu ý kiến của đông đảo các cán bộ quản lí, các nhà khoa học, các giảng viên đại học, các giáo viên trực tiếp giảng dạy.

Bài viết này nhằm giúp các em học sinh, các thầy cô giáo bước đầu tìm hiểu về chương trình và SGK *Đại số 10 nâng cao*.

Theo quy định của chương trình, SGK *Đại số 10 nâng cao* gồm có 6 chương, tương ứng với 6 chủ đề lớn, thực hiện trong 90 tiết.

Chương I - MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP: 12 tiết

Chương II- HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI: 11 tiết

Chương III- PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH: 16 tiết

Chương IV- BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH: 25 tiết

Chương V- THỐNG KÊ: 09 tiết

Chương VI- GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC: 14 tiết

Chương trình còn dành 3 tiết cho việc ôn tập và kiểm tra cuối năm.

Như vậy, 4 chương đầu của chương trình mới bao gồm các nội dung quen thuộc của SGK Đại số 10 chỉnh lí hợp nhất năm 2000 (SGK 2000); hai chương còn lại đều là những nội dung mới, trong khi quỹ thời gian giảm 9 tiết. Từ đó có thể thấy rằng một trong những khó khăn lớn nhất của các tác giả SGK, cũng là khó khăn chung của các thầy cô giáo và các em học sinh khi thực hiện chương trình này là vấn đề thời lượng cùng với những lúng túng khó tránh khỏi trong việc đổi mới phương pháp dạy - học.

Để phắc phục các khó khăn nói trên, đồng thời nâng cao tính khả thi, SGK *Đại số 10 nâng cao* được biên soạn theo quan điểm cơ bản là : **sát thực - trực quan - nhẹ nhàng - đổi mới.** Cụ thể như sau.

SÁT THỰC có nghĩa là :

– Thiết kế bài học ***sát với thực tiễn giảng dạy***, nhất là sát với thời lượng cho phép, đảm bảo tính khả thi của SGK. Bên cạnh các bài học, SGK còn thiết kế các bài luyện tập nhằm giúp học sinh rèn luyện kĩ năng giải toán. Tổng số thời gian dành cho các bài luyện tập này là 27 tiết (không kể các tiết ôn tập cuối chương và phần bài tập sau mỗi bài học).

– Chú trọng các ví dụ và bài tập ***sát với thực tiễn đời sống và gắn với các môn học khác***. Chẳng hạn, có nhiều câu hỏi, ví dụ và bài tập liên quan đến : luật giao thông, các chỉ số phát triển kinh tế của Việt Nam, các số liệu gần gũi với học sinh như sĩ số học sinh, chiều cao, cân nặng, số anh chị em trong gia đình, ..., sự quay của kim đồng hồ, các bài toán về quỹ đạo của quả bóng đá, quỹ đạo bay của con tàu vũ trụ, về khẩu phần ăn, về cái cổng Ac-xơ ở Xanh Lu-i (Mỹ)....

TRỰC QUAN có nghĩa là ***tiếp cận kiến thức bằng phương pháp trực quan*** nhằm giảm tính hàn lâm và đơn giản hoá những vấn đề phức tạp. Đây là phương pháp tiếp cận chủ đạo trong toàn bộ cuốn sách. Hầu hết các khái niệm đều được hình thành trên cơ sở dẫn dắt từ những ví dụ và mô tả khái niệm. Đặc biệt, vấn đề đọc đồ thị của hàm số, tức là nhận biết tính chất của hàm số thông qua đồ thị của nó, rất được coi trọng. Kĩ năng đọc đồ thị sẽ phát huy

tác dụng trong việc nghiên cứu hàm số bậc hai và tìm hiểu định lí về dấu của tam thức bậc hai.

NHẸ NHÀNG có nghĩa là :

– ***Giảm nhẹ yêu cầu về kiến thức và kĩ năng***, hạn chế các ví dụ và bài tập phức tạp, đòi hỏi kĩ thuật và mẹo mực. Chẳng hạn, không yêu cầu giải các phương trình, bất phương trình vô tỉ và hệ phương trình bậc hai có chứa tham số. Đặc biệt, giáo viên và học sinh sẽ không còn phải mất nhiều thời gian để dạy - học và luyện giải các bài toán về định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai vốn là những bài toán chứa đựng nhiều yếu tố phức tạp và mẹo mực.

Trong lượng giác, các công thức góc nhân ba và tính theo tang của góc chia hai không có trong chương trình nhằm giảm bớt số lượng công thức cần nhớ.

– ***Không trình bày chi tiết lại các kiến thức học sinh đã được học ở lớp dưới***, trừ những trường hợp trình bày lại với mục đích nâng cao và chính xác hoá. Điều này được thể hiện rõ trong chương III. Ở lớp dưới, học sinh đã làm quen với cách giải các phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai một ẩn không chứa tham số ; SGK *Đại số 10 nâng cao* không nhắc lại những vấn đề đó nữa. Tương tự, SGK cũng không trình bày lại cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số và phương pháp thế vì đó là những phương pháp giải quá quen thuộc ở lớp 9.

ĐỔI MỚI có nghĩa là ***đổi mới về cấu trúc và cách trình bày sách***, làm cho sách đẹp hơn, hấp dẫn hơn, thuận tiện hơn và tạo điều kiện đổi mới phương pháp dạy học.

– Về cấu trúc, mỗi chương đều có trang mở đầu, giới thiệu nội dung và yêu cầu chủ yếu của chương ; có thêm các *Bài đọc thêm* nhằm giúp học sinh mở rộng thêm kiến thức ; có thêm các tư liệu lịch sử được giới thiệu qua mục *Em có biết* nhằm kích thích học sinh hứng thú trong học Toán. Các hoạt động, kí hiệu là Hn , xen kẽ trong từng phần của bài học là những gợi ý giúp giáo viên có những ý tưởng trong đổi mới phương pháp dạy học. Ở cuối sách có thêm bảng tra cứu các thuật ngữ trong SGK và bảng trả lời - đáp số - hướng dẫn giải các bài tập, nhằm giúp học sinh tự học tốt hơn.

– Về cách trình bày, Nhà xuất bản Giáo dục đã rất chú ý đổi mới hình thức SGK, từ kênh hình đến kênh chữ. Đặc biệt, việc nghiên cứu, đề xuất và áp dụng bản *Quy định về trình bày SGK Toán Trung học phổ thông* đã bước đầu tạo ra cho SGK một dáng vẻ mới, sáng sủa và mang phong cách quốc tế. Chẳng hạn, nếu như SGK trước đây viết là f(x), $\Delta = b^2 - 4ac$, sinα, M(p ; q), tập hợp **R, N**... thì bây giờ viết là $f(x)$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $\sin\alpha$, $M(p\ ;\ q)$, tập hợp $\mathbb{R}, \mathbb{N}$, ..., rất gần với cách kí hiệu thông dụng trong các ấn phẩm toán học trên thế giới. Điều đó chắc chắn sẽ giúp cho học sinh hứng thú hơn, dễ dàng hơn trong việc sử dụng SGK như một tài liệu tự học.

TS. NGUYỄN HUY ĐOAN
(*Chủ biên SGK Đại số 10 nâng cao*)

NHỮNG KHÁI NIỆM... *(Tiếp trang 29)*

Điểm, trên một đường, nếu ta muốn phân ra làm hai đoạn, giới hạn phân chia là một điểm, điểm được hình dung như hạt bụi rất nhỏ, không có bề ngang, bề dày và bề cao.

Tác giả nói thêm: điểm là khái niệm thuần khiết nhất trong những khái niệm của hình học. Nó là một khái niệm cơ bản của khoa ấy.

Hình, Hình là tập hợp gồm những điểm, đường, mặt và khối.

Hai hình bằng nhau, hãy tưởng tượng rằng, mang hình A đặt vào hình B, cho nó lồng vào hình B, khi nào hai hình có thể trùng khít với nhau như một, ta bảo chúng bằng nhau.

Tiếp theo, tác giả trình bày một số tính chất của đường thẳng và mặt phẳng, đường thẳng song song (tác giả gọi là song hành) và tiên đề Ơclit về đường thẳng song song (tác giả gọi là định tắc Ơclit). Bài báo kết luận:

Đó, Hình học bắt đầu chỉ ngần ấy ý tưởng và quan niệm điểm, đường thẳng và mặt phẳng, khái niệm hình không đổi, nguyên tắc về sự liên tục, công lý về đường song hành.

Người ta đã xây dựng ra môn Hình học nguyên tố (bây giờ gọi là cơ sở hình học), Ơclit là người đầu tiên đã hiểu khoa hình học như thế và đem ra dẫn giải một cách rành mạch.

NGUYỄN THÚC HÀO

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 348 (6-2006)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục
NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI *Phó Tổng biên tập :* TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
Thư kí Toà soạn : ThS. VŨ KIM THỦY

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS .TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Đặng Văn Biểu – Từ một bài toán ôn tập lớp 9.

3 *Nguyễn Khắc Minh* – Kì thi chọn đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic toán học Quốc tế năm 2006.

4 Lời giải Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2005 – 2006.

7 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Thử sức trước kì thi
Hoàng Ngọc Cảnh – Hướng dẫn giải Đề số 5.

9 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Trần Xuân Đáng – Bất đẳng thức Schur và ứng dụng.

11 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Thái Viết Thảo – Hình thành các bất đẳng thức trong tam giác từ một bất đẳng thức cơ bản.

13 **Vật lí – Physics**
A.Einstein – Quán tính của một vật thể có phụ thuộc vào năng lượng chứa trong nó hay không?

15 **Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán**
Nguyễn Cảnh Toàn – Học Toán ở ngoài Toán

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/348, ..., T12/348, L1/348, L2/348.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 344.

29 *Trần Đình Viện* – Những bài báo của GS. Nguyễn Thúc Hào trong báo Khoa học.

30 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Nguyễn Huy Đoan – Những quan điểm cơ bản trong việc biên soạn sách giáo khoa Đại số 10 nâng cao.

Bìa 2: 40 học sinh Việt Nam dự thi Olympic Singapore mở rộng

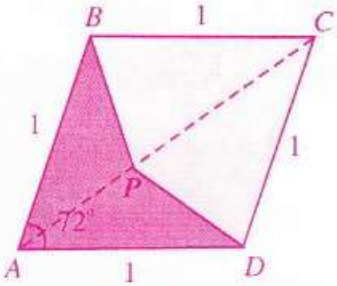
Bìa 3: Giải trí toán học – Math Recreation.

Bìa 4: Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics

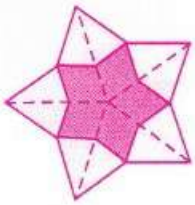
Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 đường Thích Quảng Đức, TX. Thủ Dầu Một, Bình Dương, Tel : 0650.858330

Cánh diều, viên gạch hoa và cấu trúc phân tử

Mùa hè các em thường ưa thích chơi thả diều. Như được bay bổng cùng cánh diều trên bầu trời trong xanh làm các em quên hết mệt nhọc, chuẩn bị tinh thần sảng khoái vào năm học mới. Tuy nhiên hình thù cánh diều như thế nào để khi gặp gió diều bay nhẹ nhàng là một bài toán cần đặt ra. Điều thú vị là viên gạch hoa cũng có liên hệ mật thiết với cánh diều như trên hình 1.



Hình 1



Hình 2

Viên gạch hoa có dạng hình thoi $ABCD$ cạnh bằng 1 với một góc trong bằng 72^0. Điểm P nằm trên đường chéo lớn sao cho $CP = 1$. Nối P với B và P với D. Hình thoi này được chia làm hai phần: phần *cánh diều* và phần *mũi tên ABPD*. Nếu nhìn hai hình này trong không gian ba chiều sẽ có ứng dụng trong môn *Hoá phân tử*. Các viên gạch hoa có thể đặt sát nhau tạo thành hình sao năm cánh (h.2) hoặc các hình dạng khác.

Các bạn hãy làm các bài toán nhỏ sau :

a) Tìm số đo của góc BPC, góc APB, góc ABP.

b) Tính độ dài của BP.

c) Tính diện tích phần cánh diều và phần mũi tên.

NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN
(NXB Giáo dục tại TP HCM)

HỌC TOÁN ... *(Tiếp trang 15)*

- Cứ những chuyện tưởng như vớ vẩn đời thường đó mà dần dần tớ thấm một điều: Không gian càng nhiều chiều càng dễ vùng vẫy, không gian càng ít chiều càng dễ ép người ta vào khuôn phép. Chính vì vậy mà khi gặp bài toán xếp diêm, thấy bí ở trong mặt phẳng, tớ thấy ngay lối thoát là phải vào trong không gian.

- Tớ phải bắt chước cách học của cậu mới được.

- Cũng là nhờ ông anh tớ. Ông ấy học giỏi lắm nhưng không phải lúc nào cũng ôm lấy quyển sách. Cứ đi chơi với ông ấy, dọc đường ông ấy sẽ chỉ ra những gì có thể học được. Nhiều khi thật bật ngờ, chuyện chả ai bận tâm, chú ý đến thì ông ấy lại lôi ra được một bài học gì đó. Ông ấy là tác giả của cách học gọi là "sáu mọi".

- "Sáu mọi" là cách gì vậy?

- Là học mọi lúc, học mọi nơi, học mọi người, học trong mọi hoàn cảnh, học bằng mọi cách và học qua mọi nội dung.

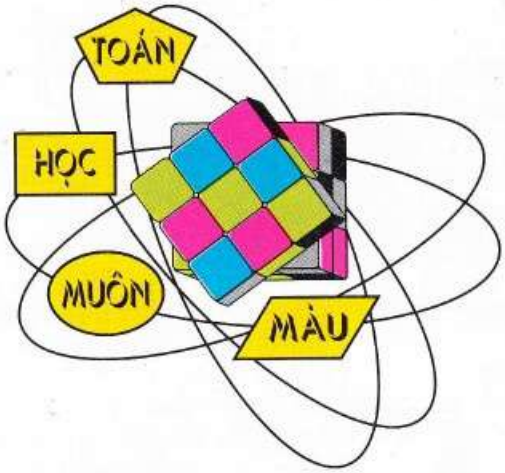
- Cậu nói kĩ cho mình nghe đi.

- Chuyện còn dài. Tốt hơn hết là hôm nào cậu đến chơi, mình sẽ giới thiệu để cậu làm quen với ông anh mình rồi từ từ, cậu đi chơi với ông ấy vài lần, cậu sẽ hiểu rõ hơn "Sáu mọi". Rồi cậu còn được nghe ông ấy nói về "sáng tạo học" với toán học nữa.

- Lại còn "sáng tạo học" là cái gì nữa đây?

- Đấy, còn khối chuyện nên phải từ từ không nôn nóng được.

Bây giờ tớ có việc phải đi đây. Bai! Bai!



Mạng đường ngắn nhất

Nhiều người đã biết bài toán sau :
Trên một bản đồ có ba địa điểm (kho, trạm bưu điện, ...) A, B, C không thẳng hàng. Cần phải xây dựng các đoạn đường từ một vị trí M nào đó tới A, B, C sao cho độ dài của mạng đường $MA + MB + MC$ là ngắn nhất. Nhà toán học Italia là Torricelli đã giải bài toán này vào khoảng năm 1640. Kết luận như sau: Nếu tam giác ABC có một góc bằng hoặc lớn hơn 120° thì điểm M phải trùng với đỉnh góc tù của tam giác, còn nếu ba góc của tam giác ABC đều nhỏ hơn 120° thì điểm M phải thỏa mãn $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 120^o$. Điểm M như thế gọi là *điểm Torricelli*.

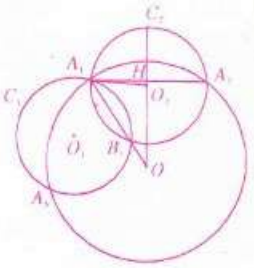
Ta xét bài toán tương tự đối với tứ giác.

Dành cho bạn đọc

1) Cho tứ giác lồi $ABCD$. Hãy xác định vị trí điểm M sao cho độ dài của $MA + MB + MC + MD$ là nhỏ nhất.

2) Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB \le AD$. Hãy xác định vị trí hai điểm M và N sao cho độ dài của $MA + MB + MN + NC + ND$ là nhỏ nhất.

Giải đáp bài: HÌNH HOA NĂM CÁNH



Hình 1

1) Hình tròn lớn tâm O (h. 1) có bán kính $R = OA_1 =$

$$\frac{A_1H}{\sin 36^o} \le \frac{r}{\sin 36^o}$$

nên có diện tích là

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi A_1H^2}{\sin^2 36^o} \le \frac{\pi r^2}{\sin^2 36^o}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A_1H = r \Leftrightarrow A_1A_2 = 2r$, nghĩa là A_iA_{i+1} là đường kính của đường tròn tâm O_{i+1} ($i = 1, 2, 3, 4$) và $A_1A_5 = 2r$.

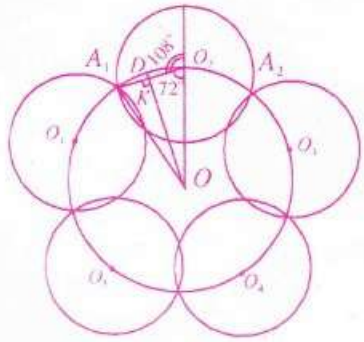
Lúc đó $S_{\max} = \dfrac{\pi r^2}{\sin^2 36^o} \approx 9{,}093r^2$.

2) Kí hiệu S_Δ là diện tích tam giác, S_q là diện tích hình quạt.

Ta tính được (h.2):

$$S_{\Delta(OA_1O_2)} = \frac{A_1O_2}{2}.OK = \frac{r^2.\text{tg}72^o}{4}$$

$$S_{q(OA_1O_2)} = \frac{\pi.OA_1^2}{10} = \frac{\pi r^2}{40.\cos^2 72^o}$$



Hình 2

$$S_{q(O_2A_1C)} = \frac{108.\pi r^2}{360} = \frac{3\pi r^2}{10}$$

$$\frac{S_c}{S} = \frac{10\left(S_{\Delta(OA_1O_2)} + S_{q(O_2A_1C)} - S_{q(OA_1O_2)}\right)}{10S_{q(OA_1O_2)}}$$

$$= 12.\cos^2 72^o + \frac{10\cos 72^o.\sin 72^o}{\pi} - 1 \approx 1{,}081.$$

Bạn *Trịnh Văn Nam*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm.

PHI PHI

ISSN : 0866-8035 **Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004**
Chỉ số : 12884 In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội **Giá : 4000 đồng**
Mã số : 8BT50M6 In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2006 **Bốn nghìn đồng**