

TỦ SÁCH HAI TỐT

NGUYỄN CẢNH TOÀN

PHONG CÁCH HỌC TẬP MỚI VỀ MÔN TOÁN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

HÀ NỘI — 1987



TỦ SÁCH HAI TỐT

NGUYỄN CẢNH TOÀN

PHONG CÁCH HỌC TẬP MỚI VỀ MÔN TOÁN

www.facebook.com/otoanhoc2911

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
HÀ NỘI — 1987

LỜI NÓI ĐẦU

Khi đặt tên cho cuốn sách chúng tôi cũng muốn tìm những chữ nôm na, dễ hiểu hơn hai chữ « phong cách » nhưng chưa tìm được. « Phong cách học tập » không phải là « phương pháp học tập ». Có thể nói nó là tinh thần của phương pháp học tập, nó là cái chỉ đạo phương pháp học tập. Nói đến phong cách là nói đến con người, một « kiểu mẫu » con người nhất định. Phong cách học tập mới gắn liền với một « kiểu mẫu » con người học sinh mới, con người học sinh xã hội chủ nghĩa. Bởi vậy xây dựng phong cách học tập mới cũng là góp phần xây dựng con người học sinh mới. Đó là ý chủ đạo của quyển sách này. Chúng tôi sẽ ít bàn tới những phương pháp học tập cụ thể, tỉ mỉ vì chúng tôi cho rằng không có những phương pháp cứng nhắc, cố định. Mỗi người học sinh, trên cơ sở thẩm nhuần phong cách học tập mới, phải tự mình tìm lấy phương pháp học tập phù hợp với hoàn cảnh, điều kiện học tập của mình ; tất nhiên là phải học tập các kinh nghiệm hay của người khác nhưng phải học tập sáng tạo, không nên máy móc, rập khuôn. Ví dụ cũng là việc « tái hiện bài » (xem nội dung ở § 4), nhưng mức độ đến đâu thì tùy ở trình độ từng người nhưng người nào thì cũng phải thể hiện phong cách học tập mới ở tinh thần tự nguyện, tự giác và tinh thần dựa vào sức mình là chính.

Có ý kiến cho rằng phong cách học tập mới chỉ áp dụng được cho học sinh giỏi. Chúng tôi không nghĩ như thế. Tất nhiên, « phong cách mới » hay cái gì đi nữa thì cũng phải phù hợp với trình độ của người học, không nên khó quá, cũng không nên dễ quá. Nhưng khó là thế nào, dễ là thế nào, cũng cần phải đi sâu nghiên cứu chứ không thể kết luận vội vàng được. Nếu kết luận vội vàng thì chúng ta có thể vô tình mắc phải bệnh bảo thủ, dễ dàng gạt đi những ý kiến mới với lý do : « Quá cao so với trình độ người học »

Đề minh họa quan niệm về khó, dễ, chúng tôi xin lấy vài ví dụ : dạy cho các cháu mẫu giáo có thói quen rửa tay trước khi ăn cơm là một điều khó nhưng cái khó ở đây không phải là ở chỗ « động tác rửa tay » quá khó đối với các cháu mà là ở khả năng nghiệp vụ của các cô mẫu giáo. Hoặc như nhiều việc trước đây có người nghĩ rằng chị em phụ nữ không làm được nhưng thực tiễn của phong trào « ba đảm đang » đã chứng tỏ không những chị em làm được mà có khi còn làm một cách xuất sắc. Vậy cái khó ở đây không phải là bản thân các việc đó vượt quá khả năng sức khỏe của chị em, mà cái khó ở đây lại chính là các tư tưởng bảo thủ, coi thường phụ nữ. Trong việc học tập của học sinh cũng vậy, có nhiều yêu cầu không phải là quá cao nhưng trong thực tế đã trở thành quá cao đối với học sinh chỉ vì thầy giáo không thường xuyên đề ra yêu cầu đó cho các em và do đó các em hằng ngày không được tập dượt. Có thể nói đó là những khó khăn giả tạo. Vả chăng, như người xưa đã nói : « Mọi sự khởi đầu đều khó », ít có việc chưa tập tành gì đã làm thành thạo ngay được, thường thì bước đầu thế nào cũng lúng túng, khó khăn, nhưng nếu kiên nhẫn và quyết tâm vượt khó thì rồi sẽ quen dần. Bản thân những yêu cầu của phong cách học tập mới thật ra không phải là quá cao đối với học sinh trung bình hay học sinh kém. Nhưng nói như vậy không có nghĩa rằng xây dựng phong cách học tập mới không có gì khó. Phải nói ngay là rất khó ; cái khó ở đây là phải chiến thắng sức mạnh của thói quen, nếp cũ. Cho nên không phải chỉ đơn giản có một quyển sách nói về phong cách học tập mới là đủ (tuy rằng việc có một quyển sách như vậy là cần thiết) mà còn phải có cả một cuộc vận động kiên trì, bền bỉ, có lãnh đạo chặt chẽ, có chỉ đạo điển hình v.v... Ngay đối với sinh viên các trường Đại học, việc vận động xây dựng phong cách học tập mới cũng là một cuộc đấu tranh lâu dài gian khổ giữa cái mới và cái cũ.

Nói đến vấn đề khó, dễ chỉ cũng cần thấy rằng việc vận dụng phong cách học tập mới phải rất linh hoạt cho phù hợp với hoàn cảnh, điều kiện từng lúc, từng nơi, từng người. Quên mất điều này thì sẽ tự gây cho mình những khó khăn không đáng có. Ví dụ, học một chỗ nào đó chưa hiểu thì, theo yêu cầu của phong cách học tập mới là chưa nên nhờ người khác giảng ngay cho mà phải tự mình cố gắng suy nghĩ thêm. Nhưng suy nghĩ thêm đến lúc nào ? Cái đó lại tùy nội dung của vấn đề chưa hiểu và

điều kiện thì giờ. Nếu nội dung của vấn đề chưa hiểu không liên quan đến việc tiếp thu các phần sau thì nên kiên trì, suy nghĩ ngày này qua ngày khác, có khi là tháng này qua tháng khác, thậm chí có thể năm này qua năm khác. Nhưng nếu là vấn đề cần phải nắm vững để hiểu được các phần sau thì cũng phải tự mình suy nghĩ đến một chừng mực nào đó tùy theo điều kiện thì giờ cho phép, rồi cũng phải đi nhờ bạn hay thầy giảng cho.

Viết quyền sách nhớ này, một mặt chúng tôi muốn góp với các em học sinh phổ thông cấp III và một phần nào các em cấp II một số ý kiến về phương hướng phấn đấu để học tốt (chứ không phải là những phương pháp tỉ mỉ, cụ thể), mặt khác cũng là muốn trao đổi ý kiến với các cô giáo, thầy giáo. Viết về một vấn đề có tính chất lý luận thì nên chọn hình thức nào để viết cho bớt khô khan, nhất là đối với các em học sinh? Chúng tôi đã cân nhắc và cuối cùng chọn hình thức nói chuyện với các em học sinh. Nếu các cô giáo, thầy giáo hay bất cứ ai khác có đọc quyển này thì xin xem như là đọc với mục đích góp ý kiến cho chúng tôi để lần sau chúng tôi nói chuyện với các em được hay hơn.

Cuối cùng, xin nói thêm rằng trong nội dung quyển sách này, chúng tôi không giành một phần riêng để nói về việc xây dựng thế giới quan duy vật biện chứng, rèn luyện tư duy biện chứng vì nghĩ rằng các em chưa hiểu « duy vật biện chứng » là gì; trong chừng mức phù hợp với trình độ các em, chúng tôi có đề cập đến vấn đề đó nhưng lồng khéo nó vào trong các phần khác, cố hết sức tránh các danh từ khó hiểu.

Hà nội, ngày 8-1-1967

NGUYỄN CẢNH TOÀN

MỞ ĐẦU

QUYẾT TÂM XÂY DỰNG PHONG CÁCH HỌC TẬP MỚI VỀ MÔN TOÁN

Các em học sinh thân mến !

Chắc các em đều đã được nghe cô giáo, thầy giáo hoặc bố, mẹ, anh, chị kể cho nghe về đời sống của nhân dân ta trước Cách mạng tháng Tám. Từ những ngày đen tối đó đến nay, đất nước ta đã tiến những bước dài vạn dặm. Hiện nay, chúng ta đang vừa xây dựng chủ nghĩa xã hội vừa đánh Mỹ cứu nước bảo vệ miền Bắc, giải phóng miền Nam, tiến tới thống nhất đất nước. Trong sự nghiệp vĩ đại đó, chúng ta đã giành được những thắng lợi cực kỳ to lớn; người và việc anh hùng mọc ra hằng ngày, hằng giờ như hoa nở rộ mùa xuân. Một mối quan tâm đặc biệt của Đảng ta, của Bác Hồ là làm sao giáo dục đào tạo các em thành những con người chiến sĩ dũng cảm và đầy sáng tạo để tiếp tục và phát triển sự nghiệp cách mạng của các bậc cha anh. Đó cũng chính là mối lo thường xuyên của các cô giáo, thầy giáo. Các cô, các thầy lo nhưng sự cố gắng của bản thân các em mới là điều quyết định. Vậy các em phải làm gì và nên làm như thế nào? Đó là

một câu hỏi mà ở đây tôi không có tham vọng trả lời đầy đủ mà chỉ trả lời trong một phạm vi rất hạn chế; các em nên học toán như thế nào để góp phần rèn luyện mình trở thành những con người chiến sĩ cách mạng dũng cảm và đầy sáng tạo?

Trước đây tôi đã có dịp nói chuyện về vấn đề này với một số em. Khi nghe xong, nhiều em có ý kiến: «Hay nhưng mà khó lắm». Có thật là quá khó không? Vấn đề khó hay dễ, trong «lời nói đầu» tôi đã có nói qua. Đối với các em, tôi chỉ xin nhắc thêm lời dạy của Bác Hồ: «Không có việc gì khó, Chỉ sợ lòng không bền, Đào núi và lấp biển, Quyết chí càng làm nên». Đối với những người lười suy nghĩ, chỉ muốn học một cách thoải mái, hơi khó khăn một tí là nản thì xây dựng phong cách học tập mới là một điều rất khó, thậm chí có thể nói rằng người đó không thể xây dựng cho mình được một phong cách học tập mới. Trái lại, một người có đầy đủ ý chí và quyết tâm, dù cho bước đầu có học kém chẳng nữa, thì rồi dần dần sẽ thấy rằng phong cách học tập mới không phải là cái gì cao siêu, xa cách mình quá mà nó rất gần gũi với mình, hơn nữa nó là một nhu cầu không thể thiếu được của mình.

Bây giờ chúng ta hãy đi vào nội dung của phong cách học tập mới về môn toán. Nội dung có bao gồm nhiều phần quan hệ khăng khít với nhau, xâm nhập lẫn nhau, thật khó mà trình bày tách bạch. Tuy nhiên, để cho dễ trình bày, tôi sẽ tách riêng từng phần mà nói. Các em hãy chịu khó vừa đọc, vừa suy nghĩ, liên hệ đến cách học tập từ trước đến nay của mình. Trong khi nói chuyện, tôi sẽ giới thiệu với các em một số bài trong báo «Toán học và tuổi trẻ», một số sách thuộc tủ sách «Hai tốt» để các em

đọc thêm. Không đọc các sách, báo đó thì vẫn có thể theo dõi bài nói chuyện này, nhưng tôi mong rằng các em sẽ chịu khó tìm đọc. Đây cũng là một thử thách đầu tiên về lòng quyết tâm xây dựng phong cách học tập mới, vì tập dượt tự đọc thêm sách, báo cũng là một yêu cầu của việc xây dựng phong cách nói trên. Có thể là các em sẽ gặp khó khăn vì thiếu sách, báo, thiếu thì giờ v.v..., nhưng «không chịu bó tay trước các khó khăn xuất hiện trong khi học tập» cũng là một yêu cầu khác của phong cách học tập mới.

§ 1. HIỂU RÕ MỤC ĐÍCH HỌC TẬP, XÂY DỰNG ĐỘNG CƠ HỌC TẬP ĐÚNG ĐẮN

Ở trường phổ thông, các em học toán để làm gì? Chắc các em đã đôi lần suy nghĩ về câu hỏi đó và cũng đã tự trả lời được phần nào. Nhưng trả lời đầy đủ câu hỏi trên thì không phải là dễ. Trước hết, phải trả lời một câu hỏi rộng hơn: « Học để làm gì? ». Tất nhiên ngày nay, dưới chế độ ta, còn rất ít người nghĩ rằng học để đồ bằng nọ, bằng kia, làm ông nọ, ông kia, nhưng còn khá nhiều người nghĩ đơn giản rằng học để có kiến thức, có hiểu biết. Nghĩ như vậy không đầy đủ. Nói vắn tắt nhất thì « học là để trở nên người chiến sĩ cách mạng ». Nhưng nói đến người chiến sĩ cách mạng thì nhiều em thường chỉ nghĩ đến những người đã từng vào nhà tù của đế quốc thực dân, những người đã từng xông pha trước mũi tên, hòn đạn v. v... và thấy « người chiến sĩ cách mạng » cao quá, xa quá đối với người học sinh phổ thông. Câu chuyện sau đây có thể làm cho các em hiểu rõ hơn người chiến sĩ cách mạng là thế nào: ở tỉnh Hưng yên, có bảy em gái tốt nghiệp lớp bảy về tham gia sản xuất. Thiết tha đem cái vốn hiểu biết nhỏ bé của mình về khoa học kỹ thuật phục vụ hợp tác xã, các em xin gia nhập đội khoa học kỹ thuật. Nhưng đội không nhận các em vì chưa tin vào khả năng của các em. Tích cực đề nghị đi, đề nghị lại nhiều lần mà vẫn không được, các em không chán nản và bàn với nhau tự tổ chức lấy việc nghiên cứu một số vấn đề về kỹ thuật nông nghiệp mà đội đương làm, trước mắt là việc nuôi bèo hoa dâu. Khó khăn đến với các em đó không phải là ít, trong đó có khó khăn do sự hiểu biết còn quá ít ỏi của mình về « bèo hoa dâu ». Nhưng không phải vì vậy mà các em đành bó tay. Các em chia nhau đi tìm, đi học trong nhân dân, trong bạn bè, trong sách vở, trong

thực tế việc làm của mình, nghĩa là vừa làm, vừa rút kinh nghiệm. Rốt cuộc, chính các em lại đạt được những kết quả tốt hơn của đội. Sau đó các em được nhận vào đội và một trong bảy em được bầu làm đội trưởng. Đồng chí chủ tịch Ủy ban hành chính tỉnh đã tặng các em danh hiệu « bảy cô tiên bèo ».

Rõ ràng là ở các em đó đã biểu hiện rất rõ nhiều nét của phẩm chất người chiến sĩ cách mạng. Này nhé : — Các em đó có giác ngộ xã hội chủ nghĩa thể hiện ở chỗ các em tha thiết với hợp tác xã, với lẽ lối làm ăn tập thể.

— Các em đó có lòng yêu nước, yêu quê hương, gần bó với đồng ruộng, thôn xóm, muốn đem hiểu biết của mình đóng góp vào việc làm cho quê hương chóng trở nên giàu đẹp.

— Trên cơ sở đó, các em có ý thức làm chủ cao, không ngồi chờ ai đến giao công việc cho mà chủ động tìm đến công việc, coi việc của hợp tác xã như việc nhà. Có thể là còn hơn việc nhà nữa.

— Các em đó có tinh thần tiến công liên tục, không chịu bó tay trước bất cứ khó khăn, trở ngại nào, « không làm được cách này thì bày cách khác ».

— Các em đó biết vận dụng lực lượng tập thể, biết tổ chức nhau lại, phân công, phân nhiệm mà làm.

— Các em đó biết cách học, học mọi nơi, mọi chỗ, mọi người, học ngay trong thực tế việc làm của mình.

Đó chính là nguyên nhân thành công của các em và qua sự thành công đó, bản thân các em cũng trưởng thành lên về nhiều mặt, vốn hiểu biết về khoa học kỹ thuật của mình cũng được nhân lên. Nói như trên không có nghĩa là cho rằng chẳng cần có nhiều kiến thức, chỉ cần có giác ngộ, có nhiệt tình là được. Người chiến sĩ cách mạng rất cần kiến thức, rất cần hiểu biết thì mới làm cách mạng được và do đó rất quý kiến thức, rất

chăm lo bồi dưỡng vốn kiến thức của mình. Tuy nhiên các em cần nhận rõ mấy điểm sau đây :

— Các em phải hiểu « kiến thức » một cách toàn diện ; ngoài kiến thức trong sách vở ra còn phải có hiểu biết về thực tế, về cuộc sống, về đường lối chính sách của Đảng v.v...

— « Có kiến thức » là để đem ra vận dụng một cách sáng tạo phục vụ cách mạng chứ không phải để trở thành một nhà thông thái xa rời cuộc sống, xa rời nhân dân. Trong việc đem kiến thức ra phục vụ cách mạng thì phẩm chất của con người vận dụng kiến thức đó có một ý nghĩa quyết định. Lấy ví dụ như bầy cò tiên bèo trên kia, kiến thức khoa học còn rất ít ỏi mà phục vụ được rất tốt. Ở vào hoàn cảnh của các em đó, một người nhiều kiến thức hơn nhưng không gần bó với hợp tác xã, không có ý thức làm chủ, chờ người ta bảo gì làm nấy, gặp khó khăn thì kêu ca, mới thất bại một đôi lần đã chán nản, thì chắc chắn là kết quả phục vụ sẽ rất kém.

— « Vốn kiến thức » của một người không phải là cái gì không thay đổi. Nếu động cơ học tập không đúng đắn, học để thi đỗ, thì cái vốn kiến thức mà nhà trường trang bị cho, đến khi ra trường sẽ cùn dần đi, hoặc nếu nhờ một nguyên nhân nào đó mà phát triển thì thường cũng phát triển lệch hướng. Người chiến sĩ cách mạng, với nhận thức đúng đắn về mục đích học tập, sẽ có đầy đủ ý chí và quyết tâm để « học, học nữa, học mãi », học tất cả những cái gì giúp cho mình ngày càng phục vụ được tốt hơn, học mọi người, mọi nơi, mọi chỗ, học trong sách và cả trong thực tế. Nhờ vậy, người đó dù cho lúc đầu có kém cũng dần dần trở nên giỏi, có một vốn kiến thức toàn diện, phong phú.

Như vậy, tuy kiến thức rất quan trọng nhưng con người nắm kiến thức đó trong tay là con người như thế nào mới thật là điều phải quan tâm trước hết. Cho nên,

« phong cách học tập mới » khác với « phong cách học tập cũ » ở chỗ nó chủ trương « vừa học tập kiến thức khoa học vừa thông qua đó mà tự giác rèn luyện con người mình trở thành người chiến sĩ cách mạng ». Nó chống lại việc chỉ biết lo nhồi nhét kiến thức mà coi nhẹ việc rèn luyện con người mới. Chính việc chăm lo rèn luyện con người mới lại giúp cho việc tiếp thu kiến thức được nhanh hơn, chắc hơn và tăng thêm khả năng sáng tạo khi vận dụng kiến thức.

Tóm lại, nếu chúng ta biết học tập để phục vụ cách mạng thì không những ta phục vụ được tốt mà ta sẽ tìm được cách học tập tốt nhất, thông minh nhất, sáng tạo nhất.

Nghề nói đến đây có lẽ các em còn hoài nghi : « Nói thế chứ sao ở các nước tư bản nhiều người đi học chẳng phải vì mục đích phục vụ cách mạng gì cả, thậm chí có người còn là phản cách mạng mà họ vẫn giỏi, vẫn trở thành những nhà bác học nổi tiếng ? ». Trả lời câu hỏi này cũng không có gì khó : khi so sánh hai người nào đó để xem ai học chóng giỏi hơn, thì trước hết phải xét xem hai người đó có được học tập trong những điều kiện như nhau không. Ta không thể đem so sánh một em bé ít thì giờ với một em bé có đầy đủ thì giờ, tiện nghi để học tập. Đó chỉ là nói về mặt kiến thức văn hóa trong sách vở, còn nếu xét một con người toàn diện thì vấn đề so sánh lại càng không đơn giản. Nói đến một nhà bác học tư sản nổi tiếng thì phải thấy rằng ông ta sẽ còn giỏi hơn nữa, nếu ông ta giác ngộ cách mạng. Lịch sử đã chứng minh điều đó. Có nhiều nhà bác học chỉ vì dẫu óc bảo thủ mà làm chậm trễ bước tiến của khoa học vì như các nhà toán học đã chế diễu số ảo $i = \sqrt{-1}$ là số ngu ngốc (1). Có người thì chỉ vì tin rằng

(1) Xin xem bài : « Số ảo ngu ngốc hay thông minh » của tác giả đăng trong báo « Toán học và tuổi trẻ » số 1 và số 2 (tháng 10 và tháng 11 năm 1964).

cờ Thượng đế, thần linh mà bỏ rơi mất những phát minh khoa học vĩ đại ví như một số nhà toán học trước Lô-ba-sép-ki, cũng nghiên cứu những vấn đề như Lô-ba-sép-ki mà không phát minh ra được hình học phi o-clit (tức là thứ hình học trong đó người ta công nhận rằng qua một điểm ở ngoài một đường thẳng có ít nhất hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng với đường đã cho mà không cắt đường này). Khoa học của Liên xô, Trung quốc và các nước xã hội chủ nghĩa khác tiến lên rất nhanh vì nhiều nguyên nhân trong đó có nguyên nhân là sự giác ngộ cách mạng của những người làm công tác khoa học. Ở nước ta cũng vậy. Nền khoa học của ta tuy còn rất non trẻ mà cũng đã có những đóng góp xuất sắc cũng vì lý do đó. Chắc các em đã được nghe nói đến «BCG chết» dùng để tiêm phòng lao. Tại sao các bác sĩ Việt nam lại phát minh ra «BCG chết» trong lúc cả thế giới dùng «BCG sống»? — Vì các đồng chí đó nghĩ rằng «BCG sống» rất khó bảo quản, phải dùng tủ lạnh, tốn kém phiền phức, hạn chế rất nhiều việc sử dụng để phục vụ đông đảo nhân dân lao động. Chính vì suy nghĩ để làm sao phục vụ nhân dân ta được tốt nhất mà các đồng chí đã nghiên cứu phát minh ra BCG chết. Chắc các em cũng biết chuyện anh Phạm Hồng Sơn. Mặc dầu bị tê liệt, anh Sơn vẫn muốn đem hết trái tim và khối óc của mình ra phục vụ nhân dân. Nhưng tê liệt phải nằm một chỗ thì biết làm thế nào? Anh Sơn không chịu bỏ tay và quyết định học tiếng Nga. Với một quyết tâm và nghị lực lớn, anh học chóng có kết quả và đã dịch được sách báo văn nghệ.

Mấy ví dụ trên chắc cũng đã đủ để chứng minh cho điều tối nói trên.

Bây giờ ta đi cụ thể vào việc học toán. Toán học ngày càng đóng một vai trò quan trọng trong sản xuất và đời sống. Nó đã xâm nhập vào rất nhiều ngành. Trước kia, toán học cần thiết cho vật lý, cho cơ học, một phần nhỏ

nào cho bỏa học. Nhưng ngày nay, toán học đã trở nên hết sức cần thiết cho rất nhiều ngành khác như sinh vật, y học, ngôn ngữ học, kinh tế học và đã bước đầu xâm nhập cả vào sử học, văn học, pháp lý. Ở Liên xô, đã có những nhà toán học chế ra một cái máy chẩn đoán bệnh đem thí nghiệm cho một người đau tim thì máy chẩn đoán đúng hơn những thầy thuốc nhiều kinh nghiệm. Cũng đã có những nhà toán học dùng chuyên môn của mình đọc được những chữ viết của người cổ xưa mà nhiều nhà khảo cổ lão luyện không đọc được.

Đó là nói chuyện trên thế giới. Còn trong nước ta thì từ ngày Cách mạng tháng Tám thành công, nhất là từ ngày hòa bình lập lại, nền toán học tuy còn rất non trẻ của chúng ta đã có nhiều đóng góp. Trong cuộc chiến đấu chống Mỹ cứu nước, toán học cũng đã góp phần của mình. Chắc hẳn các em đã nghe nói nhiều đến vận trù học và chính các em ở lớp chín trường phổ thông cấp III thi xã Hưng yên trong năm học 1965 — 1966 đã từng tham gia vào một đoàn áp dụng vận trù phục vụ sản xuất. Sang năm học 1966 — 1967 lại có thêm nhiều em ở năm trường phổ thông cấp III khác cũng tham gia công tác này. Nhưng không phải chỉ có vận trù đâu. Nào là môn hàm số phức với các ứng dụng vào việc rửa mặn, nổ mìn định hướng, nào là môn xác suất với việc ứng dụng vào pháo binh, vào việc kiểm tra chất lượng sản phẩm, vào việc dự báo lũ v.v... Đất nước ta càng ngày càng cần đến nhiều toán. Việc giảng dạy và học tập toán học ở các trường, ngay từ các cấp phổ thông cần phải cải tiến. Việc đào tạo một đội ngũ đông đảo các nhà toán học cũng rất cần thiết. Trách nhiệm đó không phải của riêng Bộ Giáo dục, Bộ Đại học, Ủy ban khoa học và kỹ thuật, của các cô giáo, thầy giáo dạy toán, mà là của các em nữa, những người chủ nhỏ tuổi của đất nước. Để làm tròn trách nhiệm đó, ngay từ bây giờ các em hãy cố gắng học toán theo phong cách mới.

§2. RÈN LUYỆN LÒNG YÊU BỘ MÔN TOÁN

Nhiều người thường cho toán học là khô khan, không chứa chan linh cảm như văn học, nghệ thuật nên học chán lảm. Có thật thế không? Sau đây ta hãy xét vấn đề đó.

Chắc các em đều thích xem xiếc, thích xem các chuyện thần thoại, các chuyện chống gián điệp. Có phải vì nó ly kỳ, hồi hộp không? Và chắc cũng có đôi lần các em tấm tắc khen đẹp trước một ngôi nhà mới xây, trước một bức tranh, một đồ vật nào đó và thầm phục bàn tay, khối óc lao động sáng tạo của những người đã tạo ra thứ đó. Trong toán học, liệu người ta có thể thưởng thức cái hay, cái đẹp, liệu người ta có những phút hồi hộp không? Trước hết xin có vài câu chuyện tâm sự với các em :

Hồi còn học ở phổ thông, tôi rất thích toán, thích khi chưa khá toán và có lẽ chính cái thích đó đã làm cho tôi say sưa học tập và sau này cứ khá dần lên. Bây giờ nghĩ lại, tôi thấy lúc ấy tuy chưa khá toán mà đã thích vì thấy toán học rất tài và rất lạ. Không phải chờ lên đến cấp III mới thấy điều đó. Khi còn học lớp bốn, tôi nhớ có câu chuyện sau đây làm cho tôi rất say mê với phép lấy căn bậc hai. Có hôm trong lớp một bạn đưa ra đồ bài toán : biết diện tích một hình vuông, tìm cạnh của nó ; tôi hách tấp nói ngay rằng cứ đem chia diện tích cho 4 thì ra cạnh, nhưng rồi thấy ngay là sai. Hôm đó chả ai làm được bài toán. Tôi về nhà cứ loay hoay suy nghĩ mãi : làm phép gì? Cộng, trừ, nhân, chia đều không ổn vì muốn cộng, trừ, nhân hay chia thì trong đầu bài ít ra cũng phải có hai số. Đẳng này chỉ đọc có một số thì biết cộng nó với gì, trừ cái gì vào nó, nhân nó với gì, hay chia nó cho cái gì? Thật là một bí mật, khó hiểu. Hè năm đó, tôi được người anh rề giảng cho biết ngoài bốn phép cộng, trừ, nhân, chia còn có phép lấy căn bậc hai và phải dùng phép này để giải bài toán

nói trên. Tôi biết thêm được một điều mới lạ, nó giải quyết cho mình một mối băn khoăn lâu nay và vì vậy tôi say mê luyện tập làm phép lấy căn bậc hai.

Lên đến cấp hai, cấp ba, tôi vẫn thường gặp nhiều chuyện tương tự. Có nhiều thắc mắc mang từ năm trước sang năm sau hoặc từ cấp học dưới lên cấp học trên mới được giải quyết, và mỗi lần giải quyết được một thắc mắc như vậy thì lại càng thêm thía thêm cái « tài tình » của toán học và càng yêu toán học. Sau đây xin kể thêm với các em hai câu chuyện khác : tôi và mấy bạn học lớp năm cùng ở trọ một nhà ; một hôm chủ nhà đem ở đâu về một miếng tôn tròn và muốn đục một lỗ vào đúng tâm. Ông ta bảo : « Đây các cậu xem hộ tôi đục vào chỗ nào cho cân » (tức là cho đúng tâm). Chúng tôi mang com-pa ra rồi mầy mò thử đi thử lại vẫn chưa đặt được thật đúng tâm, cứ chệch đi khi thì bên này một tí, khi thì bên kia một tí. Năm sau khi học đến quỹ tích, đến đường trung trực, mới vỡ lẽ ra là việc trước đây mình phải mầy mò để tìm cho đúng tâm của miếng tôn đã có một lý luận rất đơn giản để giải quyết chính xác. Thật là thú vị biết bao giờ học vẽ ba đường trung trực của một tam giác. Tôi nhớ hôm đó, nghe thầy giảng xong, liền hệ đến chuyện miếng tôn tròn năm trước, tôi cứ gật gù một mình : « Hay ! Hay thật ! ».

Hồi nhỏ, tôi cũng đã nghe người lớn nói từ Quả đất lên mặt trời đến mấy triệu cây số. Tôi nửa tin nửa ngờ. Ai leo lên đó mà đo được ? Thế rồi đầu óc ngây thơ của tuổi nhỏ tưởng tượng ra một cô tiên có cánh bay, tay cầm một cái thước ngọc óng ánh, từ từ vừa bay lên mặt trời vừa đặt thước đo. Lớn lên, qua những bài về Địa lý đại cương ở lớp Năm, tôi được biết chính xác thêm về khoảng cách giữa Quả đất và Mặt trời nhưng vẫn chưa được giải thích về cách đo nên đó vẫn là điều ám ảnh tôi năm này qua năm khác cho đến cuối cấp ba, lúc

học môn Thiên văn (hồi đó, chương trình có môn Thiên văn), tôi mới thật hiểu rõ. Thì ra có một cô tiên thật, cô tiên đó là trí óc thông minh của con người. Hôm học xong bài : « Khoảng cách giữa Quả đất và Mặt trời », trên đường từ lớp về nhà, tôi cứ trầm ngâm suy nghĩ, xuyt xoa : « Tài thật ! Hay thật ».

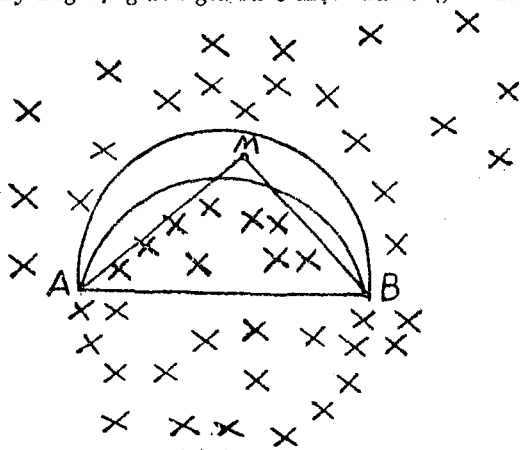
Kể lại với các em những câu chuyện trên đây, tôi muốn đi đến một kết luận rút ra từ kinh nghiệm bản thân : muốn thấm thía cái « tài » của toán học để mà yêu toán hơn thì bản thân mình phải trải qua những lúc gặp khó khăn trong việc hiểu toán, làm toán, vận dụng toán vào thực tế, nhưng không bằng lòng với việc không hiểu, không làm được đó ; sự không bằng lòng đó làm cho mình băn khoăn, thắc mắc, muốn tìm mà hiểu cho bằng được, có thể thì khi thắc mắc được giải quyết mới thấm thía hết cái hay. Tất nhiên, thỉnh thoảng cũng cần nghe nói chuyện về những thành tựu của toán học hiện đại như máy tính điện tử v.v... để mở rộng tầm mắt, thấy rõ tương lai, nâng cao quyết tâm học toán nhưng dầu sao thì những vấn đề thiết thân, gần gũi với mình vẫn có tác dụng kích thích lòng yêu và say mê học toán hơn là những vấn đề còn xa xôi đối với mình. Điều này cũng ví như bà con nông dân chúng ta hiện nay, tuy cũng rất hứng thú với việc nghe tin về con tàu vũ trụ, nhưng chắc là say mê hơn với máy cày, máy tuốt lúa v.v... Cho nên các em nên tìm cái « hay », cái « tài » của toán học trước hết trong các bài học, bài tập thường ngày. Trong chương trình phổ thông, nhưng những cái « hay », cái « tài » đó không hiếm miễn là các em luôn luôn không bằng lòng với hiểu biết hiện có mà bao giờ cũng muốn tìm biết rõ hơn, sâu hơn, nhiều hơn. Các em ngày nay còn có một thuận lợi rất lớn mà ngày xưa chúng tôi không có. Hồi với chúng tôi ngày xưa thì cái « hay », cái « tài » đó không

gắn với một lý tưởng gì cao đẹp vì hồi đó chúng tôi học toán không biết để làm gì ngoài việc để thi đỗ và vì hứng thú cá nhân. Bởi vậy lòng yêu toán của chúng tôi cũng bị hạn chế: Các em ngày nay thì khác hẳn. Các em có lý tưởng cao đẹp nên cái « tài » của toán học rất có ý nghĩa đối với các em, ý nghĩa của việc xây dựng một đất nước xã hội chủ nghĩa, độc lập, thống nhất và giàu mạnh. Ngay bây giờ, khi còn ngồi ở trên ghế nhà trường, các em đã vận dụng được cái « tài » đó của toán học vào một số việc có lợi ích cho nhân dân, cho đất nước. Đó là một cơ sở rất tốt cho lòng yêu toán phát triển. Nhưng cũng phải nói rằng các em chưa nhận thức hết cái lợi ích của toán học ở trường phổ thông. Một mặt cô giáo, thầy giáo không đủ thì giờ để nói hết cho các em, mặt khác, ngay đối với những ứng dụng toán học mà cô, thầy đã giảng, nếu các em không tự mình suy nghĩ, liên hệ luôn thì lúc gặp việc cần đến các ứng dụng đó lại quên khuấy đi mất; ví dụ có em đã được thầy giảng cho biết về việc dùng định lý đảo của định lý Pi-ta-go để dựng góc vuông (bằng cách dựng một tam giác có ba cạnh theo thứ tự dài bằng 3, 4, 5 đơn vị), lúc được phân công ra ruộng để chuẩn bị cho việc làm bờ vùng bờ thửa thì lúng túng không biết làm thế nào để chằng hai cái dây cho thật vuông góc với nhau trong điều kiện không có dụng cụ gì khác ngoài mấy cái dây. Nếu như lúc đó mà nhớ đến định lý đảo của định lý Pi-ta-go thì đã có cách xử trí rất hay (căng dây thành một tam giác có ba cạnh tỉ lệ với 3, 4, 5 thì sẽ có góc vuông) và có lẽ lúc đó sẽ thăm thía cái hay, cái tài của định lý Pi-ta-go hơn lúc nghe thầy giảng trên lớp.

Toán học ở phổ thông có những ứng dụng bất ngờ. Ví dụ có nhiều người khi nghe nói cung chứa góc được ứng dụng vào việc bảo đảm an toàn cho tàu bè đi lại nơi

cò đá ngầm (1) đã sừng sốt, hỏi : « Thế à ? Có thật không ? ». Cho nên không thể thỏa mãn với những điều đã biết mà luôn luôn nên cố gắng tìm tòi học hỏi, suy nghĩ thêm. Đi đôi với cái « tài » và các lợi ích gắn với cái « tài » đó, toán học còn có mặt hấp dẫn khác, đó là những cái « lạ » nó kích thích rất nhiều tinh tò mò khoa học và lòng yêu bộ môn. Tôi nhớ lúc còn học lớp năm, nghe các bạn lớp sáu nói với nhau : « trừ nhân với trừ thành cộng » (tức là : số âm nhân với số âm thành số dương) thì tinh tò mò khoa học của tôi bị kích thích rất dữ : « cái gì lạ vậy ? » và cứ háo hức được chóng học đến điều đó, giống như người được nghe giới thiệu về một cuốn phim hay thì háo hức muốn được xem ngay. Lúc học lớp sáu mở quyển sách lớp bảy thấy có hai dấu + và — cùng đứng một chỗ (trong công thức về nghiệm của một phương trình bậc hai) cũng rất lấy làm lạ. Trước khi học lôgarit thấy người ta dùng lôgarit để tính toán thì rất lấy làm thắc mắc vì tính toán trông có vẻ phức tạp lắm, còn lợi ích ra sao thì chưa hiểu. Cứ thế, ngày khi

(1) Xin nhắc lại đây ứng dụng đó : giả sử ở một cửa sông có đá ngầm. Người ta cố tìm hai cung tròn ngăn ra một vùng không có đá ngầm và xây dựng hai cột đèn biển ở A và B. Giả sử hai cung đó chứa góc 84° và góc 95° . Thế thì một con tàu M muốn qua vùng đó an toàn chỉ việc đi làm sao cho góc AMB luôn luôn lớn hơn 84° và nhỏ hơn 95° .



Hình 1

còn học phổ thông, tôi dần dần nghiệm ra rằng cứ mỗi chương, có khi mỗi bài học lại đưa mình đi sâu thêm vào một thế giới đầy hấp dẫn. Lên đến Đại học và trên nữa thì lại còn biết bao nhiêu điều hấp dẫn khác. Vườn hoa toán học quả là đầy hoa thơm, cỏ lạ, cây trái ngon, ngọt, ai mà không thích, ai mà không yêu ? Khốn nỗi con đường đi đến đây, lại xa xôi, vất vả, nên quả thật cũng có nhiều người ngại. Nhưng, ở đời có việc gì mà lại không phải trải qua vất vả, khó khăn rèn luyện mới đi đến chỗ thật hứng thú, say mê. Người đánh đàn, cho đến khi đàn lên được những bản nhạc du dương cũng phải trải qua bao nhiêu gian khổ luyện tập. Học toán cũng vậy. Các em là cháu Bác Hồ, là con em của một dân tộc anh hùng dám đánh và đánh thắng tên đế quốc đầu sỏ, nguy hiểm nhất, hung hãn nhất, lẽ nào các em lại ngại khó khăn hay sao ?

Nhưng ngoài những cái hấp dẫn nói trên, toán học còn hấp dẫn người ta bằng cái đẹp trong « lao động toán học ».

Về đẹp thứ nhất trong « lao động toán học » là tinh thần dám nghĩ, dám làm. Không nói đâu xa xôi, lấy ngay trong chương trình toán phổ thông ta cũng thấy rõ điều đó. Ví dụ: con số 0. Bây giờ có lẽ các em đã quá quen với con số 0 nên cũng chẳng suy nghĩ sâu xa về nó, vì vậy mà đã bỏ qua mất một bài học về tinh thần « dám nghĩ, dám làm ». Các em thử nghĩ xem : người ta đặt ra các con số là để đếm, để viết. Phải có cái gì thì mới đếm, mới viết chữ. Chẳng hạn, nếu như trong chuồng bò không có một con bò nào cả thì chắc chả ai bảo : « Đếm số bò trong chuồng đi rồi ghi lại » vì chẳng có gì mà đếm, mà ghi cả. Bởi thế, trong các chữ số La mã không có con số « không » ; trong các chữ số Ả rập (lúc là các chữ số ta vẫn dùng) lúc đầu cũng chưa có con số 0. Đến lúc có người dám nghĩ rằng nên

đặt ra một con số để chỉ : « không có gì cả » thì quả là một ý kiến độc đáo, táo bạo, quả là một sự « dám nghĩ, dám làm ». Và cái đẹp dễ trong lao động toán học này đã đưa tới cái đẹp dễ lợi ích phục vụ : ta không thể tưởng tượng nổi sự phát triển của toán học nói riêng và khoa học nói chung sẽ bị hạn chế đến mức nào nếu như trong toán học không có con số 0. Lấy chữ số La mã làm ví dụ. Các em có đọc ngay được số MCMLXVI không ? Có viết ngay được số : « ba vạn bảy nghìn chín trăm mười bốn » không ? Đọc và viết các số đã khó rồi, nói chi đến làm tính. Giá cứ bắt dùng các chữ số La mã thì có lẽ học xong Đại học rồi vẫn chưa làm thành thạo bốn phép tính : cộng, trừ, nhân, chia. Chính vì vậy mà ngày xưa, phải là những nhà bác học mới làm nổi tính nhân.

Về đẹp thứ hai trong « lao động toán học » là ý chí tiến công liên tục để đẩy lùi mãi giới hạn của sự không hiểu biết. Toán học phát triển chủ yếu là do sự thúc đẩy của các nhu cầu thực tế, ví dụ như do nhu cầu đo đạc đất đai mà phát sinh ra môn hình học, do nhu cầu tính toán cực nhanh mà phát sinh ra máy tính điện tử. Nhưng ý chí tiến công liên tục để đẩy lùi mãi giới hạn của sự không hiểu biết ở những người công tác toán học cũng là một nguyên nhân quan trọng thúc đẩy toán học phát triển. Nhiều vấn đề rất đơn giản, bây giờ mở quyển sách giáo khoa phổ thông nào ra cũng thấy, nhưng trước đây đã phải tốn bao nhiêu suy nghĩ của những con người không chịu lùi bước trước khó khăn. Con số 0 nói trên cũng là một ví dụ. Đọc lịch sử toán học, các em sẽ thấy nhiều ví dụ hơn nữa : số π (có thể xem ở « Toán học và tuổi trẻ » số 3 tháng chạp 1964, trang 14), phép nhân (xem « Toán học và tuổi trẻ » số 2, tháng 11-1964, trang 15) v. v... Không những chỉ trong lịch sử, ngày nay ở những em học sinh biết cách

học toán, ta cũng thấy thể hiện ngay cái ý chỉ đó. Ví dụ. Có em học sinh khi đọc xong lời giải của bài toán về vị trí tương đối của tâm bốn hình vuông dựng trên bốn cạnh của một tứ giác (xem « Toán học và tuổi trẻ » số 2, tháng 11-1964, trang 13 hoặc xem ở § 5) đã không thỏa mãn với việc hiểu được lời giải đó mà còn tò mò muốn hiểu biết thêm, tự đặt ra cho mình một bài toán tương tự : « Nghiên cứu về vị trí tương đối của tâm ba tam giác đều dựng trên ba cạnh của một tam giác ».

Vẽ đẹp thứ ba trong « lão động toán học » là óc giàu tưởng tượng của những người làm toán. Chúng ta thường khen những người viết chuyện thần thoại là giàu tưởng tượng. Người làm toán cũng phải thế : phải để cho trí tưởng tượng của mình bay bổng lên thật cao thì mới có sức sáng tạo. Cũng một hình tam giác thôi nhưng khi thì lại tưởng tượng nó là tứ giác có một cạnh bằng không, khi thì tưởng tượng đây là một lục giác có ba cạnh bằng không, khi thì phải hình dung nó là một thứ « tứ diện » ở trong mặt phẳng, khi lại phải hình dung nó là một thứ « tam diện » trong mặt phẳng v. v... Như vậy thì từ một tính chất nào đó đã biết của tam giác, ta sẽ biết đặt vấn đề mở rộng những tính chất đó hoặc phát hiện những tính chất tương tự cho các trường hợp của tứ giác, lục giác, tứ diện, tam diện. Chính bằng cách đó mà trong bài : « Một phương pháp suy nghĩ sáng tạo » (Toán học và tuổi trẻ số 10, tháng 7-1965), ta đã mở rộng được công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ra cho tứ giác. Trong một bài khác (Toán học và tuổi trẻ số 21, tháng 6-1966), ta đã phát hiện ra một định lý Pi-ta-go cho tứ diện. Nếu như trong tam giác có các hệ thức :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

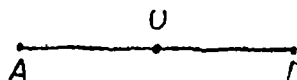
thì người ta đã phát hiện ra hệ thức tương tự trong tam diện là :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

trong đó a, b, c là ba mặt của tam diện (mỗi mặt là một góc) và A, B, C là ba góc nhị diện theo thứ tự đối diện với ba mặt a, b, c .

Nếu chỉ biết nhìn « tam giác » là « tam giác » thì khi biết được kiến thức gì về tam giác, ta sẽ dừng lại đấy thôi, không phát triển, mở rộng ra được. Tất nhiên, từ chỗ biết đặt thành vấn đề đến chỗ giải quyết được vấn đề thường còn gặp nhiều khó khăn nhưng trong khoa học nói chung, trong toán học nói riêng, « phát hiện được vấn đề » cũng đã là quý lắm rồi.

Lấy một ví dụ khác: Cho điểm giữa O của một đoạn AB . Ta có rất nhiều cách



Hình 2

nhìn khác nhau về hình vẽ này: có thể xem A, B là hai điểm đối xứng qua O , có thể xem A là vị tự của O trong phép vị tự tâm B , tỉ số 2, có thể xem A là kết quả của việc quay điểm B một góc 180° quanh O ; có thể xem AOB là một tam giác cân có góc ở đỉnh là 180° ; có thể xem nó là một tam giác có một cạnh dài gấp đôi cạnh kia và có một góc bằng 0 ; lại có thể xem hình 2 như một thứ « vòng tròn ». Sao vậy? Chắc các em ngạc nhiên. Có gì đâu. Nếu ta chỉ xét đường thẳng AB mà thôi (chứ không xét toàn bộ mặt phẳng) thì tập hợp hai điểm A, B chính là quỹ tích những điểm cách đều điểm O một khoảng bằng OA . Mà nào đã hết đâu. Còn có thể xem hình 2 như tương tự với một tam giác và trọng tâm của nó (vì O là trọng tâm của đoạn AB); cũng có thể xem hình 2 là một hàng điểm điều hòa (điểm thứ tư ở xa vô tận) v. v... Nhưng chắc các em muốn biết ngay

lợi ích của các cách xem xét như trên. Để khỏi quá dài, tôi sẽ hạn chế việc giải thích lại trong ba cách xem (về các cách khác, nếu có thì giờ, các em thử suy nghĩ xem sao) :

— Xem hình 2 như một tam giác cân : nếu là một tam giác cân bình thường AOB với góc ở đáy $\widehat{AOB} = \alpha$, đáy $AB = 2a$, cạnh bên $OA = b$, thì ta có :

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2a}{\sin (\pi - 2\alpha)}$$

$$\text{hay} \quad \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{2a}{b}$$

Khi điểm O tiến sát dần cạnh AB thì góc α nhỏ dần và b dần tới a tức $\frac{2a}{b}$ dần tới 2. Vậy ta tìm ra một

cách để chứng minh rằng $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$ dần tới 2 khi α dần tới không.

— Xem hình 2 như một vòng tròn : như thế thì định lý về ba trung tuyến đồng quy trong một tam giác có thể phát biểu là : ba đường thẳng nối ba đỉnh của một tam giác với tâm các vòng tròn có đường kính là cạnh đối diện thì đồng quy. Phát biểu dưới hình thức này thì nó gọi cho ta một nghi vấn khoa học : thế thì trong một tứ diện, các đường thẳng nối các đỉnh của tứ diện với tâm các vòng tròn ngoại tiếp các mặt đối diện có đồng quy không ? Tất nhiên là ta còn phải nghiên cứu xem điều vừa nói có đúng không và dù cho nghiên cứu không ra thì việc biết phát hiện vấn đề như trên cũng rất tốt.

— Xem hình 2 như tương tự với một tam giác và trọng tâm của nó : như thế thì định lý về ba trung tuyến đồng quy lại có thể phát biểu : ba đường thẳng nối ba đỉnh của một tam giác với trọng tâm của các cạnh đối diện thì

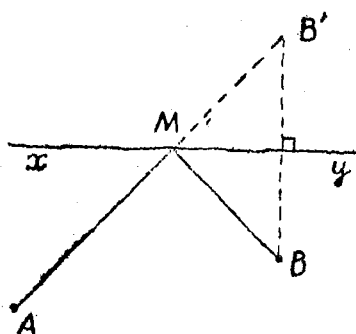
đồng quy. Cách phát biểu này gợi nên nghi vấn khoa học sau đây : trong một tứ diện bốn đường thẳng nối bốn đỉnh với trọng tâm các mặt đối diện có đồng quy hay không ?

Chắc các em nghĩ rằng : đòi hỏi tưởng tượng như thế thì khó quá, cao quá. Đứng ! Nếu đột ngột đòi hỏi các em phải làm được như thế thì khó quá, cao quá thật. Nhưng nếu các em có tập dượt dần dần, từ thấp lên cao, từ dễ đến khó thì những cách xem xét trên kia không có gì là cao xa cả. Tưởng tượng hình 2 là một tam giác cân có góc ở đỉnh là 180° hay xem điểm O là trọng tâm của đoạn AB thì có gì là vượt quá khả năng tiếp thu của các em không ? Tôi nghĩ nếu các em được tập dượt làm quen với cách xem xét như trên thì chẳng có gì là khó đối với các em cả.

Vẻ đẹp thứ tư trong « lao động toán học » là sức mạnh của suy luận toán học ; chỉ dựa trên một số rất ít nguyên tắc thôi nhưng suy luận toán học thật là muôn hình muôn vẻ, thiên biến vạn hóa. Chỉ từ một vài tiên đề lúc đầu, người ta có thể rút ra cả hàng pho sách định lý này kế tiếp định lý kia. Từ những sự kiện lẻ tẻ, mờ nhin tưởng như chẳng quan hệ gì với nhau, người ta đã biết phân tích tỉ mỉ tìm ra những chỗ giống nhau rồi tổng hợp, khái quát đề lên thành những lý luận rất tổng quát, bao trùm lên rất nhiều ngành khác nhau. Ví dụ từ chỗ nhận xét rằng có nhiều quan hệ tuy không phải là quan hệ hình học nhưng có phần giống với quan hệ hình học (1) người ta đã khái quát đề lên thành lý thuyết về

(1) Ví dụ : Một hệ hai phương trình bậc nhất có hai ẩn số nói chung có một nghiệm, cũng có thể không có nghiệm, cũng có thể có vô số nghiệm ; đó là một quan hệ giống với quan hệ và sự tương giao của hai đường thẳng trong mặt phẳng : nói chung hai đường thẳng trong một mặt phẳng có một điểm chung, cũng có thể không có điểm chung, cũng có thể trùng nhau.

những không gian trừu tượng có thể có nhiều chiều (1) thậm chí có vô số chiều mà hầu như trong ngành toán học nào cũng gặp. Các em thử nghĩ xem, con người sống trong không gian chỉ có ba chiều nhưng đã sáng tạo ra không gian nhiều chiều để phục vụ đắc lực cho khoa học, đó chẳng phải là sức mạnh của suy luận toán học đó sao? Chẳng nói đâu xa, trong việc học tập hằng ngày, nếu mỗi lần làm xong một bài toán, các em đều thử lắng lại mà suy nghĩ sẽ thấy thấm thía cái sức mạnh đó. Thường thì các em cốt làm xong bài là thôi nên tuy đã phần nào có cái sức mạnh đó trong người mà không nhận thức đầy đủ về nó, do đó không yêu nó, không chăm lo trau dồi nó. Ví dụ, các em làm ra bài toán sau đây: « Có hai làng A, B ở gần một đường sắt x y. Hỏi phải



Hình 3

xây dựng một nhà ga M ở đâu để cho tổng các đoạn đường đi từ ga tới hai làng là ngắn nhất?» và cũng thấy được cái « tài tình » ở đây là biết lấy điểm B' đối xứng với B qua x y rồi nối AB', nhưng nếu hỏi em đã suy nghĩ từng bước cụ thể như thế nào thì có khi em không trả lời được.

Ở đời thường xảy ra tình trạng như vậy: nhiều khi ta hoàn thành tốt một công việc nào đó nhưng vẫn không có ý thức đầy đủ về quá trình làm việc của mình để hoàn thành công việc đó; chẳng hạn có thể có người bơi

(1) Muốn rõ hơn xin xem quyển sách « Không gian n chiều là gì? » của cùng tác giả, thuộc tủ sách « Hai tốt », Nhà xuất bản Giáo dục.

giỏi nhưng nếu hỏi anh ta tỉ mỉ về cách cử động chân tay khi bơi thì anh ta không trả lời được; điều này sẽ hạn chế sự tiến bộ của anh ta về sau. Trở lại bài toán trên, nếu chịu khó nghiên cứu lại quá trình suy nghĩ thì sẽ thấy nó có thể gồm mấy bước sau đây:

— Bước liên tưởng: trong đầu bài có hai chữ « ngắn nhất ». Ta liên tưởng đến kiến thức gì đã biết? — Ta nghĩ đến tính chất: « Đường thẳng là con đường ngắn nhất... ».

— Bước đối chiếu, so sánh, phát hiện ra khó khăn: nhưng trong bài ra, đường lại không thẳng, mà bắt buộc thế nào cũng phải gấp khúc. Khó khăn là ở chỗ đó.

— Bước thứ nhất để giải quyết khó khăn là nghĩ đến một bài toán tương tự nhưng dễ hơn: vì A và B cùng nằm về một phía của xy nên đường AMB mới buộc phải gấp khúc; giá như A và B ở khác phía thì đã không vấp phải khó khăn đó và ta thấy ngay lời giải là nối A và B bằng một đoạn thẳng; đoạn này cắt xy ở đâu thì M ở đó.

— Bước thứ hai để giải quyết khó khăn là đưa bài toán đã cho về bài toán dễ nói trên (đấy là điểm mấu chốt trong sự suy nghĩ). Ta tự hỏi: Có chẳng một điểm cố định B' nằm bên kia đường xy (bên không có hai điểm A, B) sao cho khoảng cách từ M đến B luôn luôn bằng khoảng cách từ M đến B' dù cho M ở đâu trên đường xy? Câu hỏi này rất dễ trả lời: điểm B' phải là một điểm sao cho xy là đường trung trực của đoạn BB'. Vậy có một điểm B' thỏa mãn yêu cầu nói trên, đó là điểm đối xứng của B qua xy.

Nghiên cứu lại quá trình suy nghĩ một cách tỉ mỉ như vậy rất bổ ích vì điều đó càng làm cho các em biết suy nghĩ một cách đầy hứng thú, có ý thức, có phương pháp, có hiệu quả cũng giống như người nhảy cao nếu được xem cuộn phim quay lúc mình đang nhảy đem chiếu chậm lại trên màn ảnh thì sẽ có ý thức về từng động tác tay, chân của mình để cải tiến cách nhảy.

Việc làm này cũng phải chịu khó tập luyện dần. Nếu các em không tập luyện mà đột ngột có ai bảo các em làm thì chắc các em sẽ kêu khó.

Một vẻ đẹp khác của « lao động toán học » là sự uyển chuyển trong cách suy nghĩ; các em học sinh thường chưa đạt được sự uyển chuyển này; các em hay suy luận cứng nhắc, rập khuôn, máy móc. Ví dụ, có em khi giải phương trình :

$$(x-1)^2 = 4$$

đã khai triển $(x-1)^2$ ra rồi chuyển 4 về vế thứ nhất để đưa phương trình về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ rồi áp dụng

công thức $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Rõ ràng là em đó đã máy

móc áp dụng công thức tổng quát để giải phương trình bậc hai vào phương trình trên đây. Nếu cách suy nghĩ mà uyển chuyển một chút thì em đó đã tính đến đặc điểm của phương trình này : ở vế đầu đã xuất hiện sẵn một bình phương, đó là một thuận lợi cần nắm lấy; chỉ việc lấy căn bậc hai của hai vế là có ngay $x-1 = \pm 2$, do đó $x = 1 \pm 2$. Chính khi giải phương trình tổng quát $ax^2 + bx + c = 0$, người ta không có sẵn thuận lợi đó và phải cố gắng tạo ra nó bằng cách biến đổi vế thứ nhất

thành $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ rồi đưa phương trình về

dạng $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Phương trình $(x-1)^2 = 4$

chính là đã có sẵn dạng này; đem biến đổi nó để trở lại dạng $ax^2 + bx + c = 0$ có khác nào một người ở

Hải dương muốn đi Hải phòng lại quay trở lên Hà nội đã rồi mới đi.

Còn nhiều ví dụ khác như có em hề gặp bài toán quỹ tích nào là cũng máy móc chứng minh phân thuận và phân đảo, bài toán dựng hình nào cũng đầy đủ mấy bước từ phân tích đến biện luận mà không quan tâm gì đến những đặc điểm của từng bài có thể giúp ta bớt phần này, phần kia.

Trong «lao động toán học» còn nhiều vẻ đẹp khác nữa. Các em đã từng sử dụng các bảng tính, có khi nào các em hình dung ra công phu tỉ mỉ, cần thận của những người đầu tiên ngồi tính toán lập ra các bảng đó không? Thật phải có một sự kiên nhẫn phi thường. Có người đã để cả đời mình để tính toán dựng nên các bảng số như vậy. Ngày nay các bảng số đã phục vụ biết bao nhiêu cho chúng ta nhưng ít ai nghĩ đến những người lập ra chúng. Muốn xây dựng một lâu đài nguy nga, tráng lệ cần có sự suy nghĩ mạnh bạo, độc đáo của người kiến trúc sư nhưng cũng rất cần bàn tay cần cù, tỉ mỉ của nhiều người thợ. Lâu đài toán học cũng vậy cần có sự mạnh bạo sáng tạo, dám nghĩ, dám làm nhưng cũng rất cần sự cần cù, tỉ mỉ, kiên nhẫn. Lao động toán học cũng giành cho người ta những phút hồi hộp, những cái bất ngờ như khi xem xiếc đọc chuyện thần thoại vậy. Các em hãy nhớ lại xem, lúc làm một bài toán đang bí, chợt nảy ra một ý kiến, thế là lấy giấy bút ra vẽ, viết, tính toán, hồi hộp chờ các kết quả xuất hiện dần dưới ngòi bút và sung sướng biết bao nhiêu nếu như cuối cùng ta đi đến một kết quả làm sáng rõ điều bí ẩn đã làm cho ta thắc mắc, loay hoay, khác nào người đương mò trong bóng tối chợt bước ra ngoài ánh sáng. Làm được một bài toán cũng hứng thú như làm xong một bài thơ hay, như nghĩ được một nước cờ cao. Nhiều khi làm xong bài toán lại

không hứng thú bằng phát hiện ra những kết quả bất ngờ trong quá trình làm toán ; hứng thú này cũng giống hứng thú của người đi đường, vừa bước lên đến một đỉnh đèo chợt thấy hiện ra trước mắt một phong cảnh đẹp thật không ngờ trước.

§3. LIÊN HỆ HỌC VÀ HÀNH

Ở §2. khi nói đến vẻ đẹp trong lợi ích toán học, thực ra ta đã đề cập chút ít đến vấn đề này. Nhưng mục đích của các em không phải chỉ là đi đến biết thưởng thức cái đẹp trong lợi ích của toán học mà chủ yếu là biết đem toán học ra ứng dụng để phục vụ đời sống, phục vụ sản xuất, chiến đấu, để học tập các bộ môn khoa học kỹ thuật khác. Mà chính tự bản thân mình có vận dụng được toán học một cách có ích lợi thiết thực, thì mới càng thấm thía vẻ đẹp nói trên, mới càng yêu mến môn toán.

Tuy cuối cùng là biết đem toán học ra phục vụ sản xuất, đời sống v.v... nhưng như thế không có nghĩa là ta cứ chờ cho có vấn đề gì trực tiếp sản xuất, đến đời sống v.v... mới suy nghĩ đến việc đem toán ra phục vụ. Làm như vậy có khác gì người pháo thủ chờ có máy bay địch đến mới bắn còn thường ngày thì không luyện tập. Cho nên phải có ý thức luyện tập thường xuyên nghĩa là phải tranh thủ mọi nơi, mọi lúc, mọi dịp để tập dượt vận dụng. Nếu gặp vấn đề phục vụ sản xuất thì càng tốt, nếu không thì vận dụng vào một trò chơi, vào một hiện tượng thiên nhiên v.v... cũng tốt. Luyện tập được thường xuyên như vậy thì dần dần các em sẽ bắt rất nhạy với các kiến thức toán học khi đứng trước một vấn đề thực tế, đồng thời sự hiểu biết toán học của mình được củng cố, khả năng suy luận toán học cũng tăng lên. Tình hình hiện nay là đa số các em chỉ vận dụng hiểu biết toán học của mình khi cô giáo, thầy giáo bảo, còn không ai bảo thì thôi dù cho có nhiều hiện tượng, sự việc sờ sờ trước mắt có liên quan đến toán học. Xin nêu ra đây một vài trường hợp:

Trong mùa mưa bão, Nha khí tượng thường báo tin bão, cho biết kinh độ, vĩ độ, hướng đi và vận tốc của trung tâm bão, nhưng tôi chưa gặp em học sinh phổ thông nào có ý thức đem chút ít hiểu biết toán học (và địa lý) của mình để thử tự mình phán đoán xem bão sẽ đổ bộ vào đâu, có vào nước mình không, vào tỉnh mình không, nhân đó cũng tăng thêm ý thức biết lo cái lo chung của cả nước, cả tỉnh.

Nhiều kỳ nhật thực hay nguyệt thực, tôi cũng đã thử hỏi một số em học sinh cấp III xem đứng trước hiện tượng thiên nhiên này, các em có những suy nghĩ gì hơn các em cấp I. Nhưng tôi đã thất vọng. Đứng ra thì với trình độ toán cấp III, các em phải biết suy nghĩ về thời gian từ lúc hiện tượng bắt đầu đến lúc hiện tượng chấm dứt (thời gian này do Nha khí tượng không báo hoặc cứ theo dõi trên đồng hồ cũng có thể biết được), suy nghĩ xem thời gian đó nói lên cái gì, căn cứ vào nó thì có thể tính toán để biết được cái gì. Dù tính toán không ra, nhưng có nghĩ đến việc tính toán đó cũng là quý rồi. ,

Tuy nhiên cũng không phải tất cả các em đều như thế. Tôi cũng thỉnh thoảng tìm ra được một số em có ý thức tích cực tranh thủ mọi dịp để vận dụng óc suy luận toán học và kiến thức toán học của mình. Ví dụ: một em học sinh nọ nhân buổi tối ra đứng gần cửa sổ nhìn sang tường nhà trước mặt chợt chú ý đến một hiện tượng mà lâu nay em đó bỏ qua: bóng các chấn song cửa sổ nhà em in trên tường nhà trước mặt thành những đường song song. Em đó nghĩ: « Tại sao lại như vậy? » và tìm cách giải thích. Thế là trong óc em đó cái đèn nhà em trở thành một điểm, mỗi chấn song là một đường thẳng và bóng của nó trên tường nhà trước mặt là tương giao của mặt phẳng tường này với mặt phẳng xác định bởi cái đèn và chấn song. Như vậy là em đã tự đặt cho mình một bài toán trong không gian và vận dụng các định lý về tương giao của các đường thẳng và mặt phẳng để giải.

Cuối cùng em đó đã giải thích được tại sao bóng các châu song của sô lại song song.

Và đây là câu chuyện một em khác : Một hôm trời sáng, em ra ngoài hè ngồi chơi, chợt chú ý đến một điều là bóng mái nhà song song với thềm nhà ; em cũng suy nghĩ : « Tại sao nhỉ ? ». Thế là trong đầu óc em đó cái sân trở thành một mặt phẳng, các tia sáng trắng trở thành những đường thẳng song song v.v...

Xung quanh các em những sự việc, hiện tượng có liên quan đến kiến thức toán học ở bậc phổ thông như vậy có hiếm đâu. Phát hiện ra các sự việc, hiện tượng đó cũng chẳng đòi hỏi một sự thông minh đặc biệt gì. Vấn đề là phải chú ý rèn luyện cho thành một thói quen. Bước đầu các em phải tự đặt cho mình một kỷ luật như sau : mỗi ngày một lần, vào những lúc đi lao động hay đi chơi, hãy tự đặt cho mình câu hỏi sau đây và cố gắng trả lời : « Xung quanh ta hiện nay có cái gì liên quan đến toán học không ? » Trả lời được, rất tốt ; trả lời chưa được, cũng tốt. Nếu có một tập thể vài em thì các em có thể lấy câu hỏi đó mà đố nhau. Làm như vậy là một cách học không mất thì giờ, không cần có sách vở trước mặt, bút giấy trong tay, không cần đèn đèn ban đêm. Trong điều kiện hòa bình, cách học đó rất tốt. Trong điều kiện chiến tranh chống Mỹ cứu nước hiện nay, cách đó lại càng thích hợp.

Để có một nguồn gợi ý, bước đầu các em nên đọc quyển sách « Mười vạn câu hỏi (phần Toán) » của Nhà xuất bản Khoa học. Trong quyển sách đó, người ta nêu lên nhiều câu hỏi liên quan đến toán học về những sự vật rất quen thuộc với chúng ta. Đọc xong, có lẽ các em sẽ thấy lâu nay mình quả là « mù toán » khi nhìn vào sự vật xung quanh nhưng đồng thời cũng bắt đầu thấy « sáng » ra. Tuy nhiên, không nên xem quyển sách đó như một thứ « tủ », một thứ « cẩm nang » để đố nhau mà chỉ nên xem là một thứ gợi ý cho mình suy nghĩ thêm.

Ngoài cách tập dượt trên đây, với sự hướng dẫn của cô giáo, thầy giáo các em có thể tổ chức nhau lại, tiến hành một cuộc điều tra hứng thú và bổ ích sau đây : các em phân công nhau tìm đến các bác, các chú, các cô công nhân, nông dân, bộ đội, sản xuất giỏi, chiến đấu anh dũng để điều tra xem việc học tập văn hóa nói chung, toán học nói riêng đã giúp các bác, các chú, các cô tăng năng suất lao động, tăng hiệu quả chiến đấu như thế nào. Trong các hội nghị thi đua, nhiều bác, nhiều chú, nhiều cô đã báo cáo rằng chính nhờ biết định lý này, định lý nọ mà đã tăng được năng suất. Đây ! Thực tế chiến đấu và sản xuất cũng lắm điều phong phú đối với toán học nhưng chưa có một sự điều tra, nghiên cứu cho tường tận để tập hợp lại mà phổ biến rộng rãi. Các em có thể tham gia một phần vào đấy và qua sự tham gia đó các em sẽ thêm hứng thú học toán, thêm nhạy cảm trong việc liên hệ toán học với sản xuất và chiến đấu.

§ 4. TỰ GIÁC TRANH THỦ RÈN LUYỆN THÊM VỀ TƯ TƯỞNG VÀ ĐẠO ĐỨC TRONG LAO ĐỘNG TOÁN HỌC

Ở § 1, các em đã thấy rằng kiến thức khoa học là quan trọng nhưng quan trọng hơn nữa là những kiến thức đó nằm trong những con người như thế nào. Nếu chúng nằm trong những người chiến sĩ cách mạng thì chúng sẽ tỏa tác dụng phục vụ rộng rãi và cũng sẽ phát triển, nảy nở như một cái cây đầy nhựa sống. Cho nên cần phải tự giác rèn luyện tư tưởng và đạo đức xã hội chủ nghĩa không những để sau này phục vụ tốt mà để ngay bây giờ học tập tốt. Việc rèn luyện đó phải được chú ý không những qua việc học tập chính trị, sinh hoạt Đoàn, Đội v.v... mà cả trong học tập văn hóa nói chung, trong việc học tập môn toán nói riêng. Ở § 2, các em

đã thấy các vẽ đẹp trong «lao động toán học». Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ việc tự giác tranh thủ rèn luyện con người mới, con người xã hội chủ nghĩa thông qua «lao động toán học». Nhiều em trong khi học toán thường hay ỷ lại vào thầy, vào bạn, vào sách, không dựa vào sức mình là chính nên chậm tiến bộ. Học bài chưa hiểu, làm bài suy nghĩ một lúc chưa ra là muốn đi nhờ người khác giảng cho, bày vẽ cho, ngồi mà tự mình suy nghĩ thêm thì ngại lắm. Những lúc ấy là lúc nên tự động viên mình: «Cố lên tí nữa, suy nghĩ thêm tí nữa xem sao, chịu bó tay dừng lại đây là thua thằng Mỹ». Nhưng suy nghĩ thêm tí nữa nghĩa là thế nào? Cái đó thì tùy từng vấn đề. Có khi là một khái niệm mới khó hiểu thì phải chịu khó tìm những ví dụ cụ thể mà chủ quan mình cho là đúng, đem các ví dụ đó ra đối chiếu với từng tiêu chuẩn nêu trong định nghĩa để xem ví dụ mình tìm đã thật đúng chưa. Có khi là một bài toán làm mãi chưa ra thì hoặc là phải tìm xem khái niệm gặp trong bài toán có thể nhìn theo một cách nào khác nữa không, hoặc có khi phải giải quyết một trường hợp đặc biệt đã dễ may ra tìm được tia sáng nào cho trường hợp tổng quát. Sau đây là vài ví dụ cụ thể:

Ví dụ 1: Khái niệm «quỹ tích» là một khái niệm thường khó hiểu đối với các em học sinh. Sở dĩ như vậy vì các em thường học bằng cách đọc định nghĩa trong sách giáo khoa một cách có tính chất thuộc lòng không chú ý đặc biệt đến những chữ quan trọng trong định nghĩa và khi đã thấy khó hiểu (t) chỉ muốn chờ thầy giảng lại cho. Thật ra thì chỉ cần chú ý đến những chữ quan trọng rồi chịu khó tự mình tìm những ví dụ cụ thể, là có thể hiểu được rõ ràng.

Trong định nghĩa của quỹ tích có hai vế: một vế nói rằng quỹ tích *chứa tất cả* các điểm có một tính chất nào đó; vế thứ hai nói rằng quỹ tích *chỉ chứa* những điểm

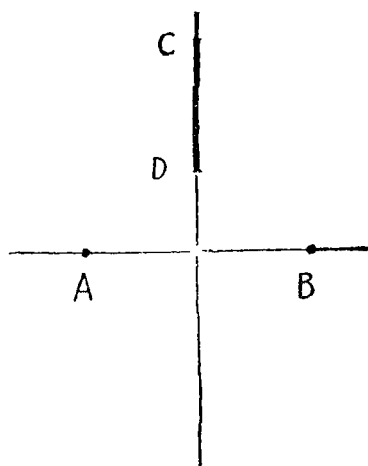
có tính chất đó thôi. Nếu chỉ đọc thôi mà không suy nghĩ, liên hệ thì dù cho có đọc nhiều lần, các chữ quan trọng như «chứa tất cả», «chỉ chứa» cũng chưa làm động lại trong óc các em một cái gì thật rõ rệt. Nhưng chỉ việc lấy một vài ví dụ đơn giản (mà tự các em có thể tìm được) là vấn đề trở nên rõ ràng ngay. Chẳng hạn, các em có thể liên hệ định nghĩa của quỹ tích với đường trung trực của một đoạn thẳng AB. Đường trung trực đó quả là thỏa mãn cả hai về ở trên :

— nó chứa tất cả các điểm cách đều A và B.

— nó chỉ chứa các điểm cách đều A và B.

Cho nên nó là quỹ tích những điểm cách đều A và B. Nhưng như thế chưa đủ. Để cho định nghĩa được sáng rõ hơn, cần phải tìm những phần ví dụ tức là những ví dụ trong đó định nghĩa không được thỏa mãn đầy đủ.

Trên kia, nếu ta lấy một đoạn thẳng CD nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn AB (hình 4) thì đoạn CD chỉ thỏa mãn về thứ hai (nó chỉ chứa các điểm cách đều A và B nhưng không chứa tất cả các điểm cách đều A và B) nên không thể gọi nó là quỹ tích những điểm cách đều A và B được. Trái lại, nếu ta lấy toàn bộ mặt phẳng thì nó thỏa mãn về thứ nhất mà không thỏa mãn



Hình 4

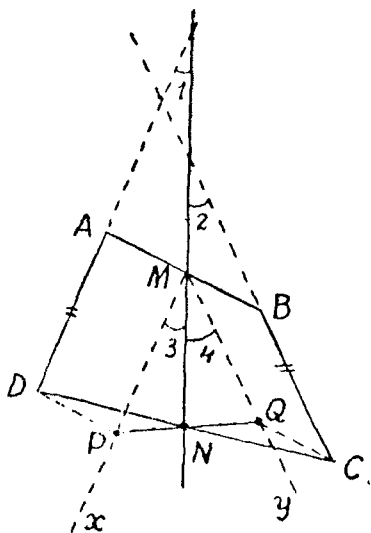
về thứ hai (nó chứa tất cả các điểm cách đều A và B vì nó chứa toàn bộ đường trung trực của đoạn AB nhưng nó không chỉ chứa các điểm cách đều A và B).

Một ví dụ như ví dụ trên đây, sức các em có thể tự tìm lấy được, không cần chờ ai, lần này các em không chú ý tìm không phải vì khó mà vì chưa có thói quen đó. Tự mình tìm được một ví dụ như vậy thì sẽ hiểu sâu sắc hơn khái niệm (ở đây là khái niệm quỹ tích) và sẽ tránh được nhiều sai lầm (như nhiều em khi mới chứng minh được về thứ nhất đã vội kết luận rằng đường nọ, đường kia là quỹ tích).

Ví dụ thứ hai mà tôi sắp nêu ra thì hơi khó nhưng như vậy không có nghĩa là đòi hỏi tất cả các em phải làm ngay được như trong ví dụ. Để có trình độ lập luận được như ví dụ, nhiều em còn phải tập dượt và phải chú ý tập dượt ngay từ bây giờ.

Ví dụ 2: Ta hãy xét bài toán sau đây : Cho một tứ giác ABCD trong đó $AD=BC$. Chứng minh rằng đường thẳng nối hai điểm giữa M và N của hai cạnh AB và CD làm những góc bằng nhau với hai cạnh AD và BC.

Đây là một bài toán khó vì mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận không rõ ràng. Thông thường muốn chứng minh rằng hai góc nào đó bằng nhau thì ta tìm xem hai góc đó có phải là hai góc của hai tam giác bằng nhau nào không. Ở đây giả thiết có cho những đoạn thẳng bằng nhau : $AD=BC$, $MA=MB$, $NC=ND$. Ta liên tưởng đến



Hình 5

trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác. Khi nối những các đoạn bằng nhau này lại không tạo thành tam giác và

quan hệ với hai góc nổi trên không rõ ràng. Ta cảm thấy bài toán khó quá và nếu không kiên nhẫn tự động viên mình thì cũng dễ nản. Nào, bây giờ ta hãy cố gắng suy nghĩ thêm một chút : « Người ta bảo phải chứng minh hai góc nào đó bằng nhau thì không nhất thiết phải xét hai góc đó mà có thể xét hai góc khác theo thứ tự bằng hai góc đó và nằm ở những vị trí thuận lợi hơn. Cũng vậy, người ta cho hai đoạn thẳng nào đó bằng nhau thì không nhất thiết phải sử dụng hai đoạn đó mà có thể xét những đoạn theo thứ tự bằng hai đoạn đó và nằm ở những vị trí thuận lợi hơn ». Ý nghĩ này cũng chẳng cao siêu gì lắm, mọi em học sinh đều có thể nghĩ được như vậy và thường ngày làm toán chắc đã có nhiều dịp vận dụng đến nó. Ý nghĩ này chỉ cho ta phương hướng suy nghĩ tiếp để làm cho giả thiết và kết luận xích lại gần nhau. Ta hãy cố suy nghĩ thêm chút nữa : ta nghĩ đến việc tìm hai góc theo thứ tự bằng hai góc 1 và 2 (h.5) nhưng sắp đặt ở một vị trí thuận lợi hơn ; hai góc như vậy không sẵn có trên hình vẽ ; phải tạo ra chúng ; cách đơn giản nhất là vẽ những đường theo thứ tự song song với AD và BC. Nhưng nên vẽ qua đâu ? Ở đây chỉ có hai điểm M và N là đáng chú ý. Ta thử vẽ đi qua M hay N xem sao, chẳng hạn vẽ qua M hai đường Mx và My theo thứ tự song song với AD và BC (h.5). Bây giờ ta có hai góc 3 và 4 theo thứ tự bằng hai góc 1 và 2 nhưng 3 và 4 ở vào một vị trí thuận lợi hơn vì có chung đỉnh và đỉnh đó lại là một điểm có nói đến trong giả thiết. Nhưng liên hệ giữa hai góc 3 và 4 với các đoạn bằng nhau trong giả thiết thì vẫn chưa rõ. Ta hãy tiếp tục suy nghĩ thêm. Ý nghĩ trên kia lại hướng dẫn ta : phải tạo nên những đoạn thẳng bằng các đoạn đã cho nhưng ở vị trí thuận lợi hơn. Ta thử đặt lên trên Mx và My hai đoạn MP và MQ theo thứ tự bằng AD và BC xem sao. Ta phát hiện ngay ra tam giác cân MPQ trong đó ta phải

chứng minh cho được rằng MN là phân giác. Ta nghĩ đến tính chất của phân giác ở đỉnh của một tam giác cân. Nó vừa là trung tuyến, vừa là đường cao. Ta nghĩ đến « trung tuyến » nhiều hơn vì giả thiết cho ta hai trung điểm của hai cạnh. Ta hướng sự suy nghĩ về việc chứng minh cho được rằng MN là trung tuyến của tam giác cân PMQ. Chứng minh như thế nào ? Nhìn hình vẽ ta nghĩ ngờ rằng N là trung điểm của đoạn PQ và nếu quả thế thì PDQC là một hình bình hành. Ta xoay ra xét tứ giác PDQC. Ta chú ý ngay đến hai hình bình hành AMPD (vì $AD // MP$) và BCQM (vì $BC // MQ$). Từ đó suy ra dễ dàng $PD = CQ$ do đó PDQC quả là hình bình hành nên MN quả đúng là trung tuyến, và do đó là phân giác của góc PMQ.

Hai ví dụ trên đây cũng đủ nói rõ « cố gắng tự mình suy nghĩ thêm tí nữa » cụ thể là như thế nào. Để làm được việc đó, ngoài việc tự động viên, nhắc nhở về tinh thần, cần thấy rõ lợi ích của việc rèn luyện này vì trong bất cứ việc gì, người nào biết dựa vào sức mình là chính, năng lực người đó mới chóng phát triển. Có nhiều em, khi gặp những vấn đề chưa hiểu thì tuy không chạy đi hỏi thầy, hỏi bạn ngay nhưng lại lục tìm trong sách để xem thử trong sách người ta nói đến vấn đề đó như thế nào. Làm như vậy kẻ cũng đã tốt rồi vì mình tự tìm lấy tài liệu, tự đọc lấy mà hiểu, có dựa hay ý lại vào ai đâu. Nhưng nghiêm khắc mà kiểm điểm thì vẫn còn có ý lại ; đó là ý lại vào tác giả quyển sách. Cách nên làm là cứ thử mình tự lực suy nghĩ xem sao đã, nếu quả thật khó quá, hãy tìm đến sách. Ví dụ, sau khi học xong cách giải một hệ hai phương trình bậc nhất có hai ẩn số thì có thể tự mình thử tìm cách giải một hệ ba phương trình bậc nhất có ba ẩn số mà chưa mở sách gì ra vội.

Chắc có em sẽ thắc mắc rằng gặp điều chưa hiểu ta đi tra sách hay hỏi ngay người khác có phải mau hơn

không ; làm như vậy ta sẽ có thì giờ học thêm kiến thức mới. Các em sẽ hết thắc mắc nếu các em nhớ rằng điều quan trọng bậc nhất chưa phải là nhồi nhét cho được nhiều kiến thức mà là rèn luyện con người có đầy đủ các đức tính của người chiến sĩ cách mạng và người chiến sĩ cách mạng phải là người thấm nhuần tinh thần : « dựa vào sức mình là chính », ý lại vào người khác hay sách vở bày vẽ cho, tưởng là nhanh, kỳ thực là chậm vì đầu óc ít chịu suy nghĩ, tập dượt, nên khả năng lao động trí óc sẽ bị hạn chế, hiệu suất sẽ thấp. Những kiến thức tiếp thu mà ít thông qua động não của bản thân thường hơi hợt, chóng quên, rất khó vận dụng và vì những kiến thức tiếp thu được không chắc như vậy nên sẽ ảnh hưởng đến việc tiếp thu các kiến thức khác về sau, dần dần đi đến chỗ đuối, không đủ sức để tiếp thu thêm những kiến thức mới nữa hay ít ra cũng tiếp thu rất vất vả, khó khăn.

« Dựa vào sức mình là chính » gần liền với « độc lập suy nghĩ ». Các em đến lớp chăm chú nghe thầy giảng và khiêm tốn học tập tất cả mọi người nhưng cần hết sức coi trọng « độc lập suy nghĩ », hơn nữa cần phải « dám nghĩ », nghĩa là cần hết sức tự tin, không nên tự ti cho rằng mình không thể suy nghĩ được cái gì khác hơn, hay hơn những điều người khác đã suy nghĩ, nhất là khi người ấy rõ ràng giỏi hơn mình. Điều đó không có gì trái với đức tính khiêm tốn cả vì rằng một người nào đó (ví dụ cô giáo, thầy giáo) nhìn chung là giỏi hơn mình nhưng trong một vấn đề cụ thể nào đó thì mình vẫn có thể có ý kiến hay hơn. Đảng, Bác Hồ cũng thường căn dặn các cô, các chú cán bộ là phải học tập quần chúng vì cán bộ nói chung là có trình độ hơn quần chúng nhưng trong từng sự việc thì quần chúng nhiều khi có những sáng kiến rất hay, nhất là quần chúng lại đông, trí tuệ tập thể của quần chúng rất lớn. Trong việc học toán cũng vậy, thỉnh thoảng vẫn có những học sinh có cách giải một bài

loạn hay hơn cách giải của thầy. Thât ra có biết khiêm tốn học hỏi người khác thì mới có khả năng « độc lập suy nghĩ » « dám nghĩ » vì có biết học lấy cái hay của người khác thì mới có cơ sở để rồi có lúc, có nơi có thể suy nghĩ hay hơn người ta. Một người huênh hoang, tự đắc, không chịu học tập ai, cứ muốn khi nào cũng suy nghĩ hơn người thì rốt cuộc chả suy nghĩ được hơn ai cái gì mà suy nghĩ sai lầm thì nhiều.

Để rèn luyện năng lực độc lập suy nghĩ, bước đầu nên cố gắng thực hiện « tái hiện bài » tức là sau khi đã hiểu được các điểm chính của bài thi xếp sách vở lại, tự mình cố gắng suy nghĩ để có thể trình bày lại bài học, coi như mình có nhiệm vụ chuẩn bị giảng lại cho người khác. Khi chuẩn bị như vậy, nếu vấp vấp chỗ nào thì cố gắng suy nghĩ giải quyết trước đó, nếu lâu không được thì hãy mở sách ra xem lại. Cứ làm như thế cho đến lúc tự mình có thể trình bày trôi chảy (chứ không phải là học thuộc lòng).

Tùy theo trình độ từng em mà thực hiện « tái hiện » bài có mức độ. Ví dụ đối với các em giỏi thì nghe trên lớp xong đã nắm được các điểm chính, về nhà có thể cố gắng « tái hiện » ngay, chưa cần vội mở vở ra xem. Đối với những em khả thi có thể phải mở vở ra đọc lại, nghĩ một lúc rồi mới « tái hiện ». Các em trung bình thì phải học bài đã rồi mới « tái hiện » còn các em kém thì phải tập dượt dần, lúc đầu cố gắng tái hiện những đoạn dễ, dần dần tiến lên « tái hiện » cả bài.

Thường các em hay thỏa mãn với cái gọi là « hiểu » bài, rồi chuyển ngay sang làm bài tập, không qua bước « tái hiện ». Cách học như thế không sâu và thường ít làm được bài tập. Chính qua sự tự mình trình bày lại mới thấy rõ chỗ nào mình nắm chưa sâu, chỗ nào mình vận dụng kiến thức còn lúng túng và qua sự cố gắng để

khắc phục những sự lúng túng này dần dần sẽ nảy ra những suy nghĩ độc lập, những ý kiến có khi độc đáo

Ngoài biện pháp nói trên, thì nên tập dần thói quen là tự đặt cho mình những câu hỏi như : « Tại sao ? » « Thế nào ? » « Bao nhiêu ? » Đã phải là cách làm hay nhất chưa ? » Không phải chỉ khi ngồi vào bàn học, trước quyển sách toán mới tự đặt cho mình những câu hỏi như vậy mà bất cứ ở đâu, lúc nào cũng nên tranh thủ tự đặt những câu hỏi như vậy và cố trả lời. Sau đây xin kể một câu chuyện của bản thân tôi hồi còn học ở Phổ thông để minh họa cho các ý nói trên. Một hôm đi tàu hỏa tôi tò mò muốn biết tàu chạy được bao nhiêu ki-lô-mét một giờ (thế là tôi đã tự đặt cho mình một câu hỏi). Tôi định tìm người lớn để hỏi cho biết nhưng sau đó lại gạt ý nghĩ đó đi và tự bảo : tự mình có cách gì tìm ra được vận tốc con tàu không ? Vội gì mà đã phải đi hỏi người khác. Thế là tôi bắt đầu vào một cuộc khám phá thú vị : khám phá cho ra một điều bí mật đối với tôi, đó là vận tốc con tàu. Thoạt đầu tôi chỉ có ý nghĩ đơn giản là theo dõi các cột ki-lô-mét bên đường để biết đoạn đường đi rồi chia cho thời gian. Nhưng rồi tôi không được thỏa mãn lắm vì tàu chạy lúc nhanh, lúc chậm. Tôi muốn biết rõ lúc tàu chạy nhanh nhất thì vận tốc là bao nhiêu (thế là tôi lại tự đặt thêm một câu hỏi mới). Và chẳng cách nhìn cột ki-lô-mét bên đường cũng có nhiều bất tiện : có khi cột bị che khuất, có khi cột ở xa quá không trông rõ con số, khi thì lại quá gần, tàu chạy vụt qua trông lóa cả các số (đó là chưa nói khi ngồi xa cửa sổ trông ra ngoài rất khó hay là ban đêm). Tôi bóp trán suy nghĩ. Chợt tôi chú ý đến cái nhịp đều đều của tiếng động gây ra khi bánh toa tàu chạy qua chỗ giáp hai thanh ray. Và một ý mới nảy ra trong óc tôi : đếm các tiếng động đó để biết tàu đã chạy được bao nhiêu thanh ray. Tiếng động hơi hỗn loạn, khó phân biệt, tôi chạy ra gần đầu toa, quăng trên chỗ

các bánh toa tàu và ở đó nhịp tiếng động rất rõ. Nhìn vào đồng hồ đếm xem trong mỗi phút có bao nhiêu tiếng động. Chỉ còn một ẩn số chưa tìm ra. Đó là chiều dài mỗi thanh ray. Tôi chực đi hỏi người khác nhưng lại tự kìm được ngay : « Tự mình không tìm ra được hay sao mà đã vội phải đi hỏi ! Lại bóp trán suy nghĩ : « Chờ đến ga xuống đo chẳng ? — Không được, thước đâu mà đo. À, phải rồi, dễ lắm. Ta cứ đếm xem giữa khoảng hai cột ki-lô-mét có bao nhiêu tiếng động thì cứ lấy một nghìn mét chia cho từng ấy sẽ ra chiều dài của thanh ray ».

Có độc lập suy nghĩ quen thì tiến lên mới dám có những ý nghĩ mạnh bạo và có nhiều sáng kiến độc đáo. Qua môn toán, nếu chịu khó nghiền ngẫm thì sẽ thấm thía rằng mỗi sáng tạo đều gắn với một sự « dám nghĩ, dám làm ». Ở §2, ta đã gặp thí dụ về con số 0. Trong chương trình toán học Phổ thông có rất nhiều chỗ đề cho chúng ta thấm thía tinh thần « dám nghĩ, dám làm ». Ví dụ như số âm. Không có gì cả mà « dám » đặt ra số để chỉ « cái không có », đó đã là một điều suy nghĩ táo bạo. Bây giờ lại « dám » nghĩ ra những số để chỉ « cái ít hơn cái không có gì ». Thế rồi hai số âm nhân với nhau lại cho ta một số dương ! Bây giờ chúng ta đã quá quen với các số âm, dương, nhưng thử đặt mình vào hoàn cảnh những người của thời đại mới phát minh ra các số âm xem. Có phải là « sáng kiến táo bạo » không. Thật là cả một thế giới mới và từ cái thế giới mới ấy, thoát một cái, ta lại trở về thế giới cũ (tức là các số dương). Thế rồi lại đến số mũ âm, số mũ phân v. v... Đó là đều là những chuyện « dám nghĩ »

cả : a^3 là $a \times a \times a$ (ba thừa số), chứa a^{-2} hay $a^{\frac{1}{3}}$ thì nghĩa lý ra làm sao ? Ai là người đầu tiên nghĩ đến những điều đó cũng đáng phục đấy chứ ? Đấy, các em thấy không, trong môn toán ở trường Phổ thông, thiếu gì chỗ đề rèn luyện cho mình tinh thần « dám nghĩ, dám làm ».

Năng lực « độc lập suy nghĩ », tinh thần, « dám nghĩ, dám làm » cũng liên quan đến một đức tính khác là « ý thức chủ động học tập, tinh thần tích cực tiến công không ngừng vào khoa học kỹ thuật ». Càng có ý thức chủ động học tập càng phát triển được năng lực « độc lập suy nghĩ » và ngược lại càng có năng lực « độc lập suy nghĩ » càng chủ động học tập. Nhưng một tình trạng khá phổ biến là ngoài bài thầy giảng, thầy ra cho làm, nhiều em không suy nghĩ gì thêm, không đọc sách gì thêm. Có phải vì các em đó ít thì giờ, ngoài việc học ở trường còn phải lao động giúp đỡ gia đình không?

— Đánh rằng có vấn đề thì giờ nhưng đó có phải là lý do chủ yếu không? Nếu công nhận đó là lý do chủ yếu thì chẳng hóa ra chúng ta đành chịu bó tay hay sao? Qua nhiều ví dụ ở các phần trên, ta thấy rằng nếu có ý thức tranh thủ thời gian thì có thể học tập mọi nơi, mọi lúc. Ở nhiều trường, các em có phong trào: « đi trao, về truy ». Đó cũng là một hình thức tranh thủ học tập trên đường đi học nhưng như vậy chưa đủ, còn rất nhiều dịp khác để tranh thủ học tập như câu chuyện đi tàu hỏa kể trên đã minh họa. Và nội dung học tập không phải chỉ bó lại trong phạm vi các bài thầy giảng cũng không phải chỉ bó lại trong phạm vi kiến thức khoa học, kiến thức thực tế, mà phải chăm lo học cả phương pháp suy nghĩ, phương pháp nghiên cứu. Ý thức chủ động học tập ở mức độ cao chính là tinh thần tích cực tiến công vào khoa học, kỹ thuật. Ở § 3, các em đã nghe câu chuyện về em học sinh với bóng các chấn song cửa sổ. Câu chuyện đó chưa hết. Sau khi em học sinh giải xong bài toán: « Chứng minh tại sao bóng các song cửa sổ lại song song », em cũng chưa thỏa mãn. Em còn tự đặt cho mình những câu hỏi như sau: « Nếu bức tường trước mặt mà không song song với bức tường nhà mình thì sao? ». « Bóng các song cửa sổ chiếu xuống sân thì thế nào? » Thế là em lại tự đề xuất được cho

mình hai bài toán hình học mới để giải quyết. Phải có tinh thần học như thế mới được. Phải có tinh thần như các chiến sĩ ngoài mặt trận, đánh thắng được một trận thì phải khuếch trương ngay chiến quả, tiến công liên tục làm cho kẻ thù không kịp thở. Đối với các em, kẻ thù là tất cả những cái gì cản trở việc học tập.

Phải luôn luôn cảnh giác với tư tưởng thỏa mãn, có khi biểu hiện ra một cách rất tinh vi, khó thấy. Ví dụ, khi lên lớp chữa bài tập, thấy lời giải của thầy rất hay so với cách giải của mình thì chỉ còn biết lo chép vào vở mà ít khi nghĩ: « Liệu còn có cách giải nào khác hay hơn nữa không? » Hoặc như khi nghe bạn trình bày phần biện luận của một bài toán, mới nghe trình bày một số trường hợp, đã thầm nghĩ là « hết rồi », đến khi thấy quả là còn một số trường hợp nữa mà mình không nghĩ đến thì chính lúc đó là lúc phải tự kiểm điểm về tư tưởng « chóng thỏa mãn ».

Người chiến sĩ ngoài mặt trận, ngoài tinh thần dũng mãnh tiến công địch, muốn bảo đảm thắng lợi phải có một sự chuẩn bị rất chu đáo, tỉ mỉ, lo lắng từ cái dễ lau súng trở đi, lại phải có tinh thần bền bỉ, kiên nhẫn trong lúc luyện tập, lúc phục kích chờ địch v.v... Học toán, làm toán cũng vậy. Ngoài cái hăng say, nhiệt tình tiến quân vào khoa học, phải có cái chu đáo, tỉ mỉ, bền bỉ. Có nhiều em làm bài toán hình học mãi không ra chỉ vì không chịu vẽ hình cẩn thận, chu đáo. Trong kỳ thi học sinh giỏi toán năm học 1964—1965 trên toàn miền Bắc, rất nhiều em không đoán nhận ra quỹ tích trong lúc chỉ cần vẽ hình thật chu đáo cũng thấy ngay rằng quỹ tích là đường thẳng. Rất nhiều em ngại tính toán bằng số, nhất là tính toán với các số có nhiều con số; những tính toán như vậy không khó nhưng rất dễ nhầm nếu không thật cẩn thận, tỉ mỉ. Trong ứng dụng thực tế, lại rất hay gặp những tính toán như vậy và thực tế

trên các công trường đã chứng tỏ rằng tính toán sai hoặc không chính xác gây ra rất nhiều lãng phí. Trong lịch sử toán học, đã có những nhà toán học vì tính nhàm mà tưởng lầm rằng vấn đề mình đang nghiên cứu đã giải quyết xong rồi đình chỉ công việc nghiên cứu của mình lại. Cho nên trong lúc học toán các em cần phải tự đề ra cho mình một kỷ luật là vẽ hình thật chu đáo, tính toán dù dài, lắng nghe cũng cố kiên nhẫn làm đến đâu đến đấy, không bỏ dở nửa chừng hay làm quấy quỏ cho xong; đối với các bài toán khó thì kiên trì đeo đuổi, ngày này qua ngày khác, tháng này qua tháng khác, thậm chí năm này qua năm khác.

Ngoài mặt trận, muốn bảo đảm thắng lợi, người chiến sĩ lại phải có tinh thần đồng đội rất cao. Trong việc tiến công vào toán học cũng vậy. Bất cứ nhà toán học nào, dù phát minh to lớn đến đâu, cũng phải thấy rằng mình không thể nào có phát minh đó nếu không có các thành quả khoa học của biết bao lớp người đi trước, sự cộng tác trực tiếp hay gián tiếp, xa hay gần của những người hiện nay. Khoa học, toán học càng phát triển lại càng đòi hỏi sự làm việc tập thể, có tổ chức, có phân công. Cho nên, ngay bây giờ ngồi trên ghế nhà trường, các em phải có ý thức rèn luyện theo phương hướng đó. Không những các em phải giúp đỡ nhau học tập (nhưng phải chống ý lại vào nhau), quan tâm đến sự tiến bộ của nhau mà phải bắt đầu tập dượt tổ chức, phân công để tiến hành một đề tài nghiên cứu toán học tập thể phù hợp với trình độ của các em, ví như việc điều tra xem các chú, các cô công nhân, nông dân, bộ đội đã áp dụng toán học như thế nào để tăng năng suất, tăng hiệu quả chiến đấu, như tôi đã gợi ý ở §3.

5. RÈN LUYỆN PHƯƠNG PHÁP SUY NGHĨ, SUY LUẬN

Toán học là một môn học đặc biệt thuận lợi cho việc rèn luyện phương pháp suy nghĩ, suy luận, chẳng thế mà

nó đã được mệnh danh là « thể dục của trí não ». Đáng tiếc là rất nhiều em không cố gắng khai thác thuận lợi đó. Nhiều em học toán, làm toán một cách hoàn toàn kì ờng có ý thức gì về phương pháp suy nghĩ của mình, giống như anh chàng tập hơi thổi, nhẩy xuống nước là vùng vẫy chân tay nhưng không quan tâm đến việc cử động chân tay như thế nào là đúng phương pháp. Nhiều phương pháp suy nghĩ rất đơn giản nhưng chính khi cần vận dụng đến thì các em lại không hề nghĩ đến nó. Ví dụ, trong bài toán hình học kỳ thi học sinh giỏi toán toàn miền Bắc năm học 1964—1965 vừa nói ở trên (1) còn có thể đoán nhận quỹ tích bằng một phương pháp suy nghĩ rất đơn giản : « phương pháp loại dần », nhưng không có em nào nghĩ đến : trong chương trình Phổ thông, các quỹ tích trong hình học phẳng chỉ có « đường thẳng » và « đường tròn ». Nếu không phải « đường thẳng » thì là « đường tròn », nếu không phải « đường tròn » thì là « đường thẳng » đơn giản thế thôi. Đề « loại » một trong hai khả năng đó thì chỉ việc chú ý rằng « đường thẳng » có những điểm ở xa vô tận còn « đường tròn » thì không có. Trong bài toán nói trên, chỉ cần chú ý theo dõi một điểm chạy trên quỹ tích (chưa đoán nhận ra là hình gì) thì thấy rằng điểm ấy có thể chạy ra xa mãi. Như vậy quỹ tích không thể là « đường tròn ». Vậy nó là đường thẳng. Suy luận đơn giản thế mà biết bao em, gọi là « giỏi toán », nghĩ không ra. Không phải là các em kém, cũng không phải là hằng ngày các em không dùng đến phương pháp « loại dần » đó trái lại các em thường xuyên dùng đến nó nhưng dùng một cách vô ý thức.

Đến đây, tôi thấy cần nhắc lại quan niệm về « khó, dễ » đã nói lúc đầu. Rõ ràng không thể nói rằng cách suy luận trên đây là vượt quá sức các em, mà phải thấy thiếu sót ở chỗ « thiếu rèn luyện » của các em.

Đề rèn luyện phương pháp suy nghĩ, suy luận, nên làm mấy việc như sau : mỗi khi làm xong một bài toán, nên duyệt lại toàn bộ sự suy nghĩ, cách lập luận của mình từ đầu chi cuối để xem trong quá trình suy nghĩ lập luận đó mình đã suy nghĩ như thế nào, vận dụng phương pháp gì. Không cần chờ học xong toàn bộ cả một giáo trình « lôgic » (1) mới làm được việc này. Chỉ cần nắm được một số phương pháp suy nghĩ cơ bản là được. Ở đây không nói kỹ lưỡng về các phương pháp đó được nhưng tôi cũng tạm nêu ra vài nét để giúp các em trong bước đầu, sau này các em sẽ tìm sách đọc thêm hoặc hỏi thêm cô giáo, thầy giáo. Trước khi đi vào vấn đề, cần nói thêm rằng việc duyệt lại sự suy nghĩ, cách lập luận của mình có phần còn quan trọng hơn việc làm được bài toán. Tại sao vậy ? Đối với các nhà bác học thì cái quan trọng là kết quả của sự suy nghĩ, làm việc. Người ta đánh giá kết quả làm việc của nhà bác học ở chỗ ông ta đã phát minh, sáng tạo ra được cái gì và cái đó có tác dụng phục vụ như thế nào còn quá trình suy nghĩ, làm việc của ông ta ra sao thì ít người quan tâm đến (trừ những người muốn học tập về cách suy nghĩ, cách làm việc của ông ta, ví dụ như các học trò của ông). Ngay bản thân nhà bác học cũng quan tâm làm sao cho phát minh, sáng tạo ra được cái này, cái nọ còn cách suy nghĩ, làm việc của mình như thế nào thì tuy cũng có quan tâm để rút kinh nghiệm nhưng không phải là mục đích chính. Sở dĩ như vậy vì nhà bác học coi như đã được đào tạo thuần thục về phương pháp, tác phong làm việc rồi và bây giờ phải thể hiện kết quả đào tạo ấy ra thành kết quả phục vụ

(1) Lôgic là một danh từ phiên âm từ một danh từ quốc tế, dùng để chỉ một môn học trong đó người ta nghiên cứu về các phương pháp suy nghĩ, suy luận.

cụ thể. Tất nhiên trong quá trình suy nghĩ, làm việc, rút kinh nghiệm, nhà bác học cũng tự rèn luyện thêm nhưng mục đích cuối cùng là phải đi đến kết quả phục vụ cụ thể. Ông ta không thể báo cáo với cơ quan rằng: « Tuy tôi không có phát minh, sáng tạo ra cái gì nhưng tôi đã tự rèn luyện mình trưởng thành lên. Đó cũng là thành tích của tôi ». Đối với học sinh thì lại khác. Vấn đề phục vụ ngay khi còn ngồi trên ghế nhà trường cũng đặt ra với học sinh nhưng cái chính là đào tạo, rèn luyện để sau này phục vụ được đặc lực. Không ai giao cho nhà bác học một vấn đề nghiên cứu với mục đích để cho nhà bác học đó rèn luyện mà bao giờ cũng với mục đích là giải quyết vấn đề đó cho tốt. Còn ở trường, có nhiều bài toán ra cho học sinh làm thuần túy chỉ vì mục đích rèn luyện học sinh chứ không có một mục đích phục vụ cụ thể gì trước mắt. Cho nên các cô giáo, thầy giáo thường quan tâm xem các em suy nghĩ, tự rèn luyện như thế nào trong quá trình làm toán nhiều hơn là quan tâm xem em làm đáp số có đúng không. Ví dụ có hai học sinh A và B. A thường làm được nhiều bài toán thầy ra nhưng lại chủ quan, ít chú ý duyệt lại cách suy nghĩ của mình để rút kinh nghiệm, còn B thì ít làm được bài thầy ra hơn nhưng làm bài nào, ra hay không, B cũng chú ý rút kinh nghiệm về cách suy nghĩ của mình. Thế thì ai đáng khen hơn ? Các em có đồng ý là nên khen B hơn không mặc dù trong một thời gian nào đó xét về điểm, B thường thua A. Nhưng chúng ta tin chắc rằng chẳng chóng thì muộn, B sẽ vượt A kể cả về điểm. Trong một kỳ thi học sinh giỏi toán ở Liên xô, người ta đã tặng giải nhất cho một em chưa làm xong bài trong lúc nhiều em khác làm đúng và đầy đủ bài, lại xếp thấp hơn. Sao vậy ? Vì em đó, tuy chưa làm xong bài nhưng đã tỏ ra có những suy nghĩ rất độc đáo, sáng tạo.

Không phải chỉ đối với cách suy nghĩ của bản thân, mình cần duyệt lại, rút kinh nghiệm mà cả đối với cách suy nghĩ của người khác (thầy, bạn) cũng vậy. Khi bạn làm ra một bài toán mà ta không làm ra hoặc bạn có một lời giải hay hơn lời giải của ta, thì cái chính chưa phải là cảm cui chép lấy lời giải của bạn (để rồi về sau có khi không xem đến!), mà phải tự đặt cho mình những câu hỏi như: « Tại sao bạn đó nghĩ ra cách giải? Bạn đó đã suy nghĩ như thế nào? » Nếu tự mình không trả lời được thì hỏi ngay bạn để bạn trả lời. Như vậy vừa giúp ích mình vừa giúp ích bạn vì nếu không có ai hỏi chưa chắc bạn đã có ý thức đầy đủ về cách suy nghĩ của mình; có người hỏi, buộc bạn phải suy nghĩ để trả lời, đó cũng là một cách giúp bạn tự rèn luyện.

Cũng không phải chỉ chú ý đến cách suy nghĩ trong khi học toán, làm toán mà cần tận dụng mọi dịp, mọi chỗ để rèn luyện. Câu chuyện « đi tàu hỏa » trên kia là một ví dụ. Sau đây là một câu chuyện khác. Mấy em học sinh cùng đi học với nhau trên đường cái. Một em chú ý đến các số ghi trên các cột giấy thép bên đường và hỏi các bạn: « Các cậu có biết những số đó là số gì không? » Tất cả đều lắc đầu. Một em đề xuất ý kiến: « Ta thử suy nghĩ xem. Cứ theo dõi sự biến thiên của các số đó từ cột này sang cột khác, biết đâu chẳng suy luận ra được các số đó là số gì ». Mọi người đều tán thành. Đi qua độ vài chục cột, các em nhận xét rằng có số thì thay đổi một đơn vị từ cột này qua cột khác, có số lại khoảng hai mươi cột mới thay đổi một đơn vị. Ước chừng khoảng cách giữa hai cột chỉ độ vài chục mét các em suy luận ra rằng số đầu không phải chỉ số ki-lô-mét mà có lẽ là chỉ số cột từ một nơi nào đó trở đi, số thứ hai chắc là chỉ số ki-lô-mét. Còn lại những số khác các em chịu không đoán ra nhưng đầu sao đấy cũng là một cuộc học tập bổ ích, tập thể bồi dưỡng cho nhau về tinh tò mò

khoa học, về óc quan sát nhận xét, về khả năng suy luận. Cách học như vậy chẳng những không mất thì giờ mà lại hứng thú nữa. Chỉ ngay trên con đường đi từ nhà tới trường, thiên nhiên và xã hội cũng có biết bao nhiêu điều cho ta học tập, không những chỉ về tư tưởng, kiến thức khoa học mà cả về phương pháp suy nghĩ nữa. Chỉ cần có ý thức. Nếu lại có một tập thể, người đổ cái này, người hỏi cái kia để cùng nhau suy nghĩ, giải đáp thì hứng thú biết bao nhiêu.

Bây giờ tôi xin trình bày vắn tắt một vài phương pháp suy nghĩ, suy luận.

Suy diễn. Khi từ một chân lý tổng quát ta rút ra một kết luận riêng biệt thì việc làm đó gọi là «suy diễn». Ví dụ «bất cứ hai tam giác nào có ba cạnh bằng nhau đôi một thì bằng nhau». Đó là một chân lý tổng quát; nó tổng quát ở chỗ nó đúng đối với bất cứ hai tam giác nào thỏa mãn điều kiện nêu ra. Trong một bài toán nào đó, ta gặp hai tam giác ABC và DEG; ta chứng minh được rằng $AB=DE$, $AC=DG$, $BC=EG$. Áp dụng chân lý tổng quát nói trên, ta rút ra kết luận rằng hai tam giác ABC và DEG bằng nhau. Kết luận này là riêng biệt cho hai tam giác ABC và DEG của ta. Như vậy là từ «trường hợp bằng nhau thứ ba của các tam giác» (chân lý tổng quát), ta *suy diễn* ra sự bằng nhau của hai tam giác ABC và DEG (kết luận riêng biệt).

Quy nạp. Khi từ một số chân lý riêng biệt, ta đề lên thành một kết luận tổng quát thì việc làm đó gọi là «quy nạp». Ví dụ: Từ chỗ nhận xét trên rất nhiều ví dụ cụ thể như $77=53+17+7$, $461=449+7+5$ v.v..., nhà toán học Gôn-bác đã xướng lên mệnh đề: «Mỗi số lẻ, lớn hơn năm, đều có thể phân tích thành tổng của ba số hạng là những số nguyên tố». Như vậy là ông ta đã từ một số chân lý riêng biệt (các ví dụ cụ thể) quy nạp đề lên thành một kết luận tổng quát.

Chúng ta thấy rằng phép suy diễn đưa tới một kết luận chắc chắn là đúng còn phép quy nạp đưa tới một kết luận có thể đúng cũng có thể không đúng. Nói như vậy không có nghĩa là phép quy nạp không có giá trị gì hay giá trị kém hơn phép suy diễn. Chính nó giúp chúng ta phát hiện vấn đề, dự đoán những chân lý mới, mở đường cho các phát minh. Tất nhiên là sau khi đã dùng quy nạp để nêu lên mệnh đề toán học nào đó thì còn phải dùng suy diễn để chứng minh mệnh đề đó. Ví như mệnh đề Gôn-bác nêu trên kia đòi hỏi phải có chứng minh, và trải qua mấy trăm năm nay, tuy người ta đã có nhiều tiến bộ trên con đường tìm cách chứng minh mệnh đề đó nhưng vẫn chưa chứng minh được trọn vẹn. Suy diễn thường dùng để chứng minh nhưng cũng có thể dẫn tới phát minh khi ta đi đến những kết luận riêng biệt đặc sắc, phát hiện cho ta một mối liên hệ nào đó. Ví dụ, khi mà trong hình học Lô-ba-sép-ki (đã giới thiệu ở 1) người ta suy diễn để thiết lập nên những công thức lượng giác thì người ta nhận ra rằng các công thức đó giống các công thức lượng giác ở trên mặt cầu; điều đó giúp người ta vạch ra được mối liên hệ giữa hình học Lô-ba-sép-ki và hình học trên mặt cầu và tiến thêm bước nữa, dẫn tới sự phát minh ra hình học Ri-ơ-man (1) (không có đường song song). Trong quá trình nghiên cứu, nhà toán học vừa dùng suy diễn, vừa dùng quy nạp. Quy nạp giúp ông ta phát hiện vấn đề, nêu lên những dự đoán; sau đó ông ta dùng suy diễn để giải quyết vấn đề, chứng minh hay bác bỏ dự đoán. Trong quá trình suy diễn, ông ta lại chú ý xem có những mối liên hệ mới nào bộc lộ ra không; các

(1) Muốn biết rõ hơn có thể xem quyển « Hình học Ri-ơ-man là gì? » của tác giả thuộc tủ sách « Hai tốt », Nhà xuất bản Giáo dục.

mỗi liên hệ này (nếu có) lại làm cơ sở cho một phép quy nạp mới, một phát minh mới v.v...

Đó là nói chuyện các nhà toán học. Còn các em? Vì các em thường có nhận thức không đầy đủ rằng học toán là để có kiến thức toán học nên các em chỉ lo hiểu cho được định lý này, định lý kia; từ định lý này rút ra định lý kia thì phải dùng suy diễn, do đó vai trò của « quy nạp » thường bị coi rất nhẹ. Nhưng nhà trường xã hội chủ nghĩa của chúng ta muốn đào tạo ra những con người mà về phương diện văn hóa, không phải chỉ có một mớ kiến thức nào đó, mà còn phải có năng lực vận dụng sáng tạo các kiến thức đó. Nói đến sáng tạo thì không thể coi nhẹ vai trò của « quy nạp » được. Ở trường Phổ thông, cô giáo, thầy giáo cũng nhiều khi dùng quy nạp để giảng bài cho các em. Ví dụ, để giảng bài « tổng số góc của một tam giác » cô giáo, thầy giáo cho các em đo các góc của nhiều tam giác, lấy tổng số các góc đó và nhận xét rồi trên cơ sở nhận xét đó mà dự đoán định lý. Nhưng tiếc rằng việc các em tự mình dùng quy nạp để mày mò, tìm tòi thì còn quá ít. Ngay trong việc đoán nhận quỹ tích, có thể dùng quy nạp được (dùng thước và com-pa vẽ thật cẩn thận nhiều vị trí của điểm chuyển động, nhận xét về các vị trí đó rồi quy nạp để đoán nhận quỹ tích, nhưng các em cũng ít dùng (như ở kỳ thi học sinh giỏi toán mà ta đã nói ở trên).

Muốn vận dụng được « suy diễn » và « quy nạp » cho có hiệu quả thì phải biết « phân tích » và « tổng hợp ». « Phân tích » một cái gì là đi sâu vào nội dung, cơ cấu của nó. « Phân tích » giúp ta phát hiện ra các mối liên hệ. Ví dụ, vật chất thì muôn màu, muôn vẻ : sắt, đồng, chì, nước, gỗ v.v... Nhưng đi sâu vào cấu tạo của vật chất (cũng là một hình thức phân tích) mới thấy mối liên hệ trong cái thế giới muôn màu, muôn vẻ đó : đó là cấu

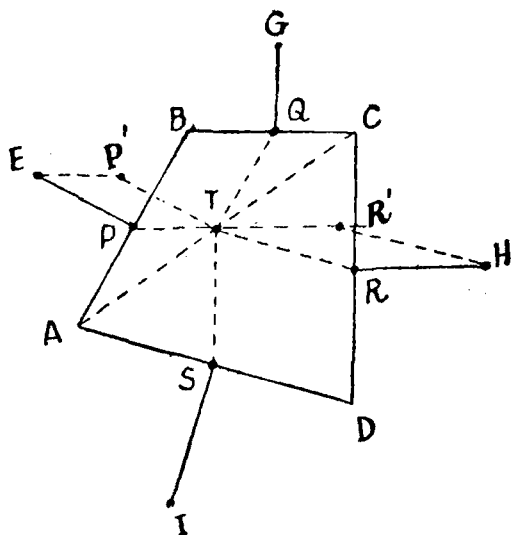
tạo phân tử, nguyên tử, điện tử, hạt nhân v.v... Trong toán học, nhiều khái niệm, nhiều vấn đề có vẻ rất xa nhau nhưng khi phân tích đi sâu vào nội dung, cơ cấu của chúng mới thấy ra được mối liên hệ. Làm một bài toán chứng minh tức là thiết lập nên được mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận. Đối với những bài toán dễ, mối liên hệ đó thường thấy ngay. Những bài toán khó là những bài mà mối liên hệ đó bị che khuất. Muốn khám phá ra mối liên hệ đó thì phải phân tích « giả thiết » hoặc phân tích « kết luận », hoặc phân tích cả hai. Sau đây là một ví dụ. Tôi chọn một ví dụ khó không phải vì muốn đòi hỏi quá cao ở các em, mà chỉ vì qua một bài toán khó thì minh họa được rõ ràng, sáng sủa hơn thế nào là phân tích, thế nào là tổng hợp.

Ví dụ : trên bốn cạnh của một tứ giác lồi bất kỳ và về phía ngoài của tứ giác, người ta dựng bốn hình vuông. Chứng minh rằng tâm của bốn hình là đỉnh của một tứ giác mới có hai đường chéo vuông góc và bằng nhau.

$$\begin{array}{ll}
 \text{GT} \left\{ \begin{array}{l} \text{— tứ giác lồi bất kỳ } ABCD \\ \text{— bốn hình vuông dựng trên} \\ \text{bốn cạnh về phía ngoài có} \\ \text{tâm là } E, G, H, I \end{array} \right. & \text{KL} \left\{ \begin{array}{l} EH \perp GI \\ EH = GI \end{array} \right.
 \end{array}$$

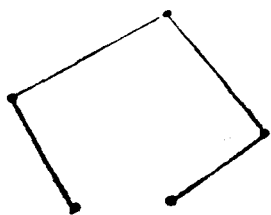
Đây là một bài toán khó. Mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận không rõ vì giả thiết cho một tứ giác lồi bất kỳ, nghĩa là không có cái gì đặc biệt về góc và cạnh, còn kết luận thì lại nêu ra hai đoạn thẳng rất đặc biệt (vừa vuông góc, vừa bằng nhau). Phân tích giả thiết. Nói đến tứ giác bất kỳ, thoát tiên ta tưởng chừng như không phân tích đi sâu gì được nữa. Giả là một hình bình hành chẳng hạn thì còn nói đi vào nội dung của nó là có các cạnh đối diện song song, bằng nhau v. v...

Ta thử cố đi sâu vào hai chữ « tứ giác » xem Nó là một hình có bốn cạnh. Nói như vậy đã đúng chưa?



Hình 6

Một đường gấp khúc như ở hình 7 chẳng có bốn cạnh là gì? À, thì ra nó là một tứ



Hình 7

giác bất kỳ nhưng là một đường gấp khúc bốn cạnh đặc biệt. Đặc biệt ở chỗ nó khép kín. Đến đây, ta vẫn chưa thấy được manh mối gì về mối quan hệ với kết luận. Ta lại phải phân tích hai chữ « khép kín ». Để thấy được phương hướng đi, ta phân tích thêm giả

thiết về « tâm của bốn hình vuông ». Tâm của một hình vuông có thể xem là giao điểm của hai đường chéo, cũng thể xem là điểm cách đều bốn cạnh. Nên hiểu theo cách

nào? Nhìn vào kết luận thấy có hai đoạn bằng nhau và vuông góc, ta nghiêng về cách nhìn thứ hai (nếu thất bại thì ta sẽ xét cách nhìn thứ nhất trong khi làm toán, thế nào cũng phải có khi mò mẫm; phân tích kỹ thì tránh bớt được mò mẫm nhưng cũng khó mà tránh hết); vậy tâm các hình vuông nên hiểu là những điểm nằm trên trung trực của cạnh tương ứng và cách cạnh đó một khoảng bằng nửa cạnh (về phía ngoài tứ giác). Sự phân tích này khiến ta chú ý đến điểm giữa của các cạnh. Đến đây ta mới thấy rằng hai chữ « khép kín » có thể phân tích ra là: bốn điểm giữa của bốn cạnh tạo nên một hình bình hành. Nhưng hình bình hành này không làm cho chúng ta hài lòng vì các cạnh của nó song song với hai đường chéo của tứ giác mà mối quan hệ giữa các đường chéo này với tâm của các hình vuông thì không rõ. Ta thấy ngay rằng nếu nối bốn điểm giữa của bốn cạnh với điểm giữa của một đường chéo, ví dụ AC (hình 6) thì ta được bốn đoạn theo thứ tự song song với bốn cạnh và bằng nửa cạnh tương ứng (như vậy là ta tiếp tục đi sâu phân tích vào tính chất *khép kín* của đường gấp khúc bốn cạnh (1)) và ta thấy ngay mối liên hệ với tâm bốn hình vuông.

Đến đây ta thấy xuất hiện hai đường gấp khúc EPTRH và GQTSI có các cạnh đôi một bằng nhau và vuông góc. Mối liên hệ với kết luận đến đây đã khá rõ. Chỉ còn một tí khó khăn phải vượt: nếu các cạnh đôi một bằng nhau và vuông góc của hai đường gấp khúc nói trên mà sắp đặt theo một thứ tự giống nhau thì chứng minh coi như là xong. Khắc phục khó khăn trên không khó. Ta chỉ việc dựng hai hình bình hành EPTP' và HRTR'.

(1) Ở đây nên rút một kinh nghiệm là nếu suy nghĩ hời hợt thì chẳng thấy cái gì. Có hai chữ « tứ giác » mà đi sâu vào cũng lắm vấn đề. Người hời hợt sẽ nghĩ: « Tứ giác thì còn có gì mà phải phân tích ».

Như thế thì hai đường gấp khúc EP'TR'H và GQTSI có các cạnh tương ứng vuông góc và bằng nhau. Do đó có thể dùng một phép quay với một góc bằng góc vuông để cho đường gấp khúc này trùng khít lên đường gấp khúc kia. Từ đó suy ra EH và GI vuông góc và bằng nhau.

« Tổng hợp » là liên kết nhiều sự việc, sự kiện khác nhau để có một cái nhìn bao quát, thiết lập nên các mối liên hệ giữa các sự việc, sự kiện đó. « Phân tích » tạo điều kiện, chuẩn bị cho « tổng hợp » và « tổng hợp » chỉ phương hướng cho bước « phân tích » tiếp theo. Lấy ngay ví dụ trên thì rõ. Trong bài toán này ta có ba khái niệm « tứ giác bất kỳ », « tám các hình vuông », « hai đoạn thẳng vuông góc và bằng nhau ». Ta đi vào phân tích khái niệm « tứ giác bất kỳ » nhưng đến chỗ « khép kín » thì ta phải dừng lại, không biết hướng nào mà phân tích nữa. Lúc đó ta lại phải « tổng hợp », nhìn toàn diện cả ba khái niệm mới thấy ra phương hướng cho bước phân tích tiếp tục : đó là sự chú ý đến các điểm giữa các cạnh. Khi đi đến chỗ « bốn điểm giữa của bốn cạnh là bốn đỉnh của một hình bình hành », ta lại tổng hợp nhìn bao quát một lượt, thấy cách phân tích đó không thuận lợi và đã đi đến một cách phân tích khác, làm bộc lộ rõ hơn mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận.

Nói tóm lại, chứng minh một định lý tức là từ giả thiết rút ra kết luận bằng một loạt suy diễn. Cái khó, cái sáng tạo là ở chỗ tìm cho ra loạt suy diễn này. Muốn vậy vừa phải phân tích, vừa phải tổng hợp xen kẽ. Nói một cách có hình ảnh thì mỗi lần suy diễn tức là đi một bước nhưng bước về phía nào, bước làm sao để cho cuối cùng tới được kết luận (đi từ giả thiết) thì phải nhờ phân tích và tổng hợp xen kẽ chỉ đường cho.

Trên đây chỉ là sơ lược một vài nét về một số phương pháp suy nghĩ cơ bản khi làm toán. Những bài toán nói

ở đây là những bài toán thông thường, có giả thiết, có kết luận rõ ràng. Tiến lên một bước cao hơn là những bài toán đòi hỏi sáng tạo nhiều hơn trong đó ngay giả thiết và kết luận cũng phải tự mình tìm lấy. Đó là những bài toán đòi hỏi mở rộng một định lý, tìm ra những tính chất tương tự một tính chất đã biết v.v.. Ở đây tôi không đi sâu vào vấn đề này mà xin giới thiệu với các em các bài « Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán » ở trong báo « Toán học và tuổi trẻ » các số 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27. Các bài này viết cho các em yêu toán, khá toán một chút. Nói như vậy không có nghĩa là các em kém hay trung bình thì không cần đọc. Nhà trường chúng ta nhằm rèn luyện nên những bộ óc thông minh, sáng tạo, nên các em cũng nên đọc các bài đó để có một ý thức về phương hướng tiến tới. Còn bây giờ thì các em hãy rèn luyện khả năng phân tích và tổng hợp trong việc làm một vài bài toán tương đối khó một chút. Nhưng sớm hay muộn rồi các em cũng phải tiến tới « học một biết mười » như các tác giả những bài báo đó đã chỉ dẫn.

Biết suy nghĩ đúng, có phương pháp cũng chưa bảo đảm học toán, làm toán tốt. Còn phải biết suy nghĩ một cách linh hoạt, chống máy móc, rập khuôn, cố gắng đạt đến một sự uyển chuyển như đã nói ở § 2. Muốn vậy, khi nào gặp một bài toán mà phương pháp giải đã có sẵn trong sách giáo khoa thì khoan hãy hấp tấp cắm đầu cắm cổ làm ngay, mà nên tự đặt câu hỏi : « Bài toán này có những đặc điểm gì khiến ta có thể không dùng phương pháp sẵn có mà nên đi tìm một phương pháp khác hay hơn ? ». Khi học được một số kiến thức mới thì nên cố gắng dùng chúng để soi sáng lại các kiến thức cũ với ý nghĩ rằng : « Khi đã có các kiến thức mới này rồi thì có thể trình bày, giải quyết các kiến thức cũ, các vấn đề cũ một cách khác đi chăng ? Cũng vậy, khi nghe nói chuyện,

khi đọc một bài báo, nếu cô tiếp thu được cái gì mới, cô nảy ra ý kiến gì mới thì nên xem lại thử trong những suy nghĩ mình có gì cần sửa đổi không. Ví dụ, khi học đến cũ của định lý Pi-ta-go thì nên suy nghĩ lại về các phương pháp dựng góc vuông, khi đọc một bài báo nói về một phương pháp suy nghĩ sáng tạo thì nên suy nghĩ lại về một số bài toán cũ xem có thể sáng tạo được gì xung quanh các bài toán đó.

Nói tóm lại là không nên khur khur ôm lấy một phương pháp sẵn có, một cách suy nghĩ sẵn có mà nên tùy đặc điểm từng vấn đề, tùy khối lượng kiến thức có thể sử dụng v.v... mà sẵn sàng, mạnh dạn tìm những phương pháp mới, cách suy nghĩ mới.

6. HỌC TẬP CÓ KẾ HOẠCH

Để đạt được hiệu suất học tập cao, ngoài việc chăm lo rèn luyện con người, rèn luyện phương pháp suy nghĩ, suy luận, còn cần phải học tập có kế hoạch.

Trước khi ngồi vào bàn học ở nhà hay ở lớp nên chuẩn bị sẵn đầy đủ dụng cụ để trước mặt (thước, compa, bảng tính v. v...) phòng khi dùng đến khỏi phải mất công tìm. Như vậy tiết kiệm được thì giờ và sự suy nghĩ, chú ý vào việc học tập được liên tục. Ở lớp, chú ý nghe giảng là chính để hiểu được càng nhiều càng tốt rồi ghi theo cách hiểu của mình, không nên ghi lia lịa như một cái máy bắt chước hiểu hay không hiểu. Chỗ nào có vướng mắc thì lấy bút chì đỏ (bao giờ cũng nên có sẵn trước mặt) đánh dấu lại về nhà sẽ nghiên cứu, chứ nên vì vướng mắc mà dừng lại đó, không theo dõi lời thầy giảng tiếp. Trên đường đi về nhà, nên tranh thủ cố nhớ lại những điều mình đã thu nhận ở lớp để củng cố. Về nhà nên học ngay bài đó trong ngày hôm ấy, trước hết

là đọc lại cho hiểu và cố gắng tự mình tu chỉnh lại những chỗ đã đánh dấu chỉ đỏ. Nếu tự mình không hiểu nổi nên không tu chỉnh được thì phải tìm sách, tìm bạn để tu chỉnh, cùng lắm thì nhờ thầy. Khi học vào những giờ đã quy định thì nên ngồi vào bàn tử tế, sách vở dụng cụ đầy đủ trước mặt, tay cầm bút chì, đọc hiểu đến đâu thì cố gắng tái hiện ngay đến đấy, học xong cố gắng tái hiện toàn bộ rồi mới chuyển qua làm bài tập. Phải chống lại việc đọc sách toán như đọc tiểu thuyết. Ở nhà học cũng cần có giờ giấc quy định, nhưng sử dụng giờ giấc đó thì cũng cần phải linh hoạt, không nên máy móc. Ví dụ khi học toán đã thấy mệt óc lắm rồi thì nên thay đổi học một môn khác khá xa môn toán như văn, sử v. v... hoặc đi đấy đi tranh thủ ít phút làm một số việc chân tay như quét nhà, đóng quyển vở v. v... để cho đầu óc được thoải mái một lúc vì « thay đổi hình thức lao động cũng là một cách nghỉ ngơi ». Có thể là trong khi học toán như vậy, có vấn đề nghĩ mãi vẫn chưa hiểu rõ thì đành tạm đi đấy mà học bài khác hay làm việc khác nhưng phải cố ghi tạc vấn đề đó trong óc để rồi có dịp lại tiếp tục suy nghĩ về nó. Những dịp đó có rất nhiều ví dụ như lúc ngồi cạnh bếp nấu cơm, lúc giã gạo, lúc sắp hàng mua cái gì đó cho gia đình, lúc chần trà, lúc đi trên đường v. v... Mỗi lần suy nghĩ thêm một chút, lâu dần rồi vấn đề cũng sáng ra. Tất nhiên, trong trường hợp vấn đề mà nếu chưa hiểu được ngay thì không thể tiếp tục học nốt các phần sau, các em cần phải đi hỏi thầy, hỏi bạn.

Cần có kế hoạch ôn tập thường xuyên, tránh tình trạng đầu năm học lớt phớt, cuối năm mới to đũa, hoặc thi môn nào thì quá lo ôn môn đó, các môn khác chỉ học qua loa. Nhiều em học thường có quyển sổ ghi tóm tắt các điều quan trọng và các công thức dùng cho ôn tập. Có một quyển sổ như vậy cũng tốt nhưng khi xây dựng quyển sổ đó, không nên xây dựng một cách thụ động,

mở sách toán ra chép các công thức vào đó như một cái máy. Nên suy nghĩ về nội dung, về đặc điểm cấu tạo của từng công thức đó để nhớ nó rồi dựa theo đó mà ghi vào sổ tay. Lại phải nghiên cứu cách chuyển từ một công thức sang một công thức tương tự. Ví dụ : Ta định ghi công thức :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

vào sổ. Ta chú ý rằng về sau sắp đặt theo các lũy thừa của a. Ta viết :

$$a^3 \quad a^2 \quad a$$

Ta lại chú ý rằng nó sắp theo các lũy thừa tiến của b. Ta viết thêm :

$$a^3 \quad a^2b \quad ab^2 \quad b^3$$

Cuối cùng ta chú ý rằng có hai hệ số 3 ở giữa và tất cả các dấu đều là dấu + để hoàn thành việc viết. Sau đó, ta nghiên cứu việc chuyển từ $(a + b)^3$ sang $(a - b)^3$. Ta chú ý rằng muốn chuyển như vậy thì chỉ việc thay b bằng $-b$ tức là đổi dấu mọi số hạng có chứa lũy thừa lẻ của b. Nhận xét như vậy, ta không cần nhìn vào sách, vở mà có thể tự mình viết ngay vào sổ :

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(ở các số hạng thứ hai và thứ tư có thay dấu vì ở đấy có lũy thừa lẻ của b).

Làm như vậy thì ngay bản thân việc chép vào sổ cũng là một dịp rèn luyện, học tập, củng cố.

Không những học bài, làm bài phải có kế hoạch mà việc đọc sách, đọc báo (như các sách của tủ sách « Hai tốt », báo « Toán học và tuổi trẻ ») cũng nên có kế hoạch. Ví dụ, đọc một quyển sách, ta cố định mức cho từng ngày, ngày nào đọc đến trang nào, đến bao giờ thì xong. Nhận được tờ báo « Toán học và tuổi trẻ » cũng nên định ra xem ngày nào đọc bài nào, giải những bài toán nào v. v. ...

Khi đọc sách, đọc báo, thấy có gì hay, ta đánh dấu bút chì bên cạnh, ghi vào một quyển sổ riêng tên vấn đề, ở sách nào, báo nào, số mấy ra ngày nào, trang bao nhiêu. Làm như vậy sau này khi cần tìm đến sẽ không mất thì giờ. Ví dụ, đọc báo «Toán học và tuổi trẻ», ta ghi *mở rộng định lý, công thức*. THPT, 10, 7-1965, trang 1. Quyển sổ riêng đó cũng nên chia ra từng phần thế nào đó cho hợp lý, để sau tra cứu cho dễ. Đó là một cách làm việc khoa học mà ngay từ bây giờ các em phải lập để làm quen.

Nói chung lại, cần chú ý tránh hai cách làm việc trái ngược sau đây :

Một là gặp đâu học đấy theo hứng thú, không có một sự phân phối thời gian, không có chuẩn bị, không ghi chép, không tự đặt ra những mức phấn đấu cho từng ngày, từng tuần.

Hai là có vạch ra thời gian biểu nhưng lại quá máy móc, cứng đờ, không biết tùy tình hình mà thay đổi hình thức lao động, học tập để cho hiệu suất được cao, hoặc chỉ biết học trong những giờ đã quy định, không có ý thức tranh thủ mọi dịp, mọi lúc, mọi nơi để học tập. Khi học thì có ghi chép nhưng ghi như cái máy, tham ghi nhiều, chú trọng ghi cho đẹp nhưng lại chẳng sử dụng được mấy những điều đã ghi.

KẾT LUẬN

Cố gắng dần dần thực hiện cho được những điều đã nói ở sáu phần trên chính là phấn đấu để dần dần xây dựng cho mình một phong cách học tập mới về môn toán. Những điều đó cũng chính là thể hiện cụ thể của bốn

điềm do Trung ương Đoàn thanh niên Lao động Việt
nam nêu ra :

Hăng say vượt khó
Độc lập suy nghĩ
Liên hệ học và hành
Học tập có kế hoạch.

Cần tránh những nhận thức quá đơn giản như cho rằng học tập theo phong cách mới là « tái hiện bài » là « độc lập suy nghĩ », là « có đọc thêm sách, báo ngoài bài thầy giảng » v. v..., Đành rằng đó cũng là những yêu cầu của phong cách học tập mới nhưng không phải chỉ có thế. Cần nắm cho vững bản chất của phong cách học tập mới là « kết hợp hữu cơ việc tiếp thu, vận dụng kiến thức khoa học với việc tự giác rèn luyện con người mới, lấy việc dựa vào sức mình là chính làm sợi chỉ đỏ xuyên qua mọi khâu học tập ». Trong những trường hợp các em còn phân vân không rõ mình học thế này hay thế kia là đã theo phong cách mới hay chưa thì nên bám sát vào bản chất nói trên mà kiểm điềm. Ví dụ, em A học khá, có tái hiện được bài nhưng chưa chịu khó vươn lên hơn nữa học tập các phương pháp suy nghĩ sáng tạo, còn em B học kém, tuy đã cố gắng hết sức mình nhưng tái hiện bài vẫn còn khó khăn thì nên đánh giá em nào hơn? Ở đây, không thể căn cứ vào việc em A tái hiện được bài, em B chưa tái hiện được bài mà cho rằng em A theo đúng phong cách mới còn em B thì chưa. Cần phải thấy rằng trong việc rèn luyện con người mới có vấn đề xây dựng ý chí vươn lên không ngừng, chống tư tưởng dễ thỏa mãn với cái hiện có. Thế thì em A rõ ràng là chưa đạt được yêu cầu này còn em B thì lại có. Lấy một ví dụ khác: em C học kém nên cần có sự giúp đỡ của bạn. Nhưng em chỉ nhờ giúp khi thật là cần thiết. Nhiều khi em làm bài chưa ra, bạn

định đến giúp, em liền gạt đi, bảo : « Đều tỏ cố gắng suy thêm chút nữa ». Trái lại, em D học khá, không phải nhờ bạn giúp nhưng một đôi lần gặp những bài toán khó, em không bền bỉ suy nghĩ lâu và sớm chạy đi hỏi thầy. Thế thì nên đánh giá thế nào ? Căn cứ vào phần nói về việc « dựa vào sức mình là chính » nêu ra ở trên, ta có thể nói rằng em C quán triệt tinh thần của phong cách học tập mới hơn em D.

Cuối cùng cũng cần nói thêm với các em rằng không nên sốt ruột. Phấn đấu xây dựng phong cách học tập mới cũng phải lâu dài, gian khổ thì mới đi đến kết quả tốt đẹp. Mới vài tuần, vài tháng chưa có kết quả gì rõ rệt thì không nên chán nản, buông trôi, mất tin tưởng.

Cuộc kháng chiến chống Mỹ, cứu nước hiện nay càng làm nổi bật lòng dũng cảm, đức tính hy sinh, tinh thần sáng tạo vô cùng lớn lao của nhân dân ta. Ở bất cứ lĩnh vực hoạt động nào, chúng ta cũng thấy có những sáng tạo thật là độc đáo, thật là Việt nam. Đảng tự hào biết mấy được làm người Việt nam trong thời đại của Bác Hồ, phải không các em ? Các em hãy đem lòng tự hào đó để tự động viên mình ra sức góp phần xây dựng cho được một phong cách học tập mới chứa chất rất nhiều sáng tạo độc đáo, phù hợp với hoàn cảnh của học sinh Việt nam chống Mỹ, cứu nước, xây dựng chủ nghĩa xã hội.

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Mở đầu : Quyết tâm xây dựng phong cách
học tập mới về môn Toán.

§ 1. Hiểu rõ mục đích học tập, xây dựng động
cơ học tập đúng đắn.

§ 2. Rèn luyện lòng yêu bộ môn toán.

§ 3. Liên hệ học và hành.

§ 4. Tự giác tranh thủ rèn luyện thêm về tư
tưởng và đạo đức trong lao động toán học.

§ 5. Rèn luyện phương pháp suy nghĩ, suy luận.

§ 6. Học tập có kế hoạch

Kết luận

PHONG CÁCH HỌC TẬP MỚI
VỀ MÔN TOÁN

Người biên tập

VŨ VĂN ĐỨC

In 8 000 cuốn, khổ 13 × 19
tại Nhà máy in Diên Hồng
Số in : 203/t2. Số X.B. : 01 TK
Xong ngày 15 tháng 1-1987
Nộp lưu chiểu tháng 1-1987

Giá : 0,23đ