T. Huy ĐN

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

12 2014 Số 450

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Chào mừng kỉ niệm 50 năm thành lập

Tạp chí TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA PHẦN LẺ

VŨ HỒNG PHONG (*GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh*)

Để giải được các PT, HPT có chứa phần nguyên, phần lẻ (phần phân) đòi hỏi chúng ta phải nắm vững các tính chất của phần nguyên cũng như phần lẻ. Sau đây, chúng tôi xin giới thiệu tới các bạn một số tính chất của phần lẻ cùng các thí dụ có vận dụng các tính chất này.

A. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA PHẦN LẺ

Trước tiên xin nhắc lại một vài tính chất (TC) của phần lẻ: Với x, y là số thực, m; n là các số nguyên, kí hiệu phần nguyên của x là $[x]$, phần lẻ của x là $\{x\} = x - [x]$, $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên.

Tính chất

1. $0 \le \{x\} < 1$.

2. Với $n \ge 1$ thì $0 \le [n\{x\}] \le n-1$.

3. $\{n+x\} = \{x\}$.

4. $\{nx\} = \{n\{x\}\}$.

5. Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $\{x\} = \{-x\} = 0$.

Với $x \notin \mathbb{Z}$ thì $\{x\} + \{-x\} = 1$.

6. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

Mở rộng: với $m \ge 1; n \ge 1$

a) • Với $k \in \mathbb{Z};\ -n+1 \le k \le m-1$ và

$$m\{x\} - n\{y\} = k \text{ thì } mx - ny \in \mathbb{Z}.$$

• Nếu $mx - ny \in \mathbb{Z}$ thì

$$m\{x\} - n\{y\} \in \{-n+1; -n+2; \ldots; m-1\}.$$

b) • Với $k \in \mathbb{Z}; 0 \le k \le m+n-1$ và

$$m\{x\} + n\{y\} = k \text{ thì } mx + ny \in \mathbb{Z}.$$

• Nếu $mx + ny \in \mathbb{Z}$ thì

$$m\{x\} + n\{y\} \in \{0; 1; \ldots; m+n-1\}.$$

c) • Với $k \in \mathbb{Z};\ -n+1 \le k \le m-1$ và

$\{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_m\} - \{y_1\} - \{y_2\} - \ldots - \{y_n\} = k$ thì

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m - y_1 - y_2 - \ldots - y_n \in \mathbb{Z}.$$

• Nếu $x_1 + x_2 + \ldots + x_m - y_1 - y_2 - \ldots - y_n \in \mathbb{Z}$ thì

$$\{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_m\} - \{y_1\} - \{y_2\} - \ldots - \{y_n\} \in \{-n+1; -n+2; \ldots; m-1\}.$$

7. a) $\{x_1\} + \{x_2\} + .. + \{x_n\} - n + 1$

$$\le \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n\} \le \{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_n\}.$$

Đẳng thức xảy ra ở BĐT vế trái, vế phải lần lượt là $[\{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_n\}] = n-1$;

$$[\{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_n\}] = 0.$$

b) $\{x\} - \{y\} \le \{x-y\} \le \{x\} - \{y\} + 1$.

Đẳng thức xảy ra ở BĐT vế trái, vế phải lần lượt là $[\{x\} - \{y\}] = 0$; $[\{x\} - \{y\}] = -1$.

8. Với $n \ge 1$ ta có:

$$\{x\} + \left\{x + \frac{1}{n}\right\} + \ldots + \left\{x + \frac{n-1}{n}\right\} - \frac{n-1}{2} = \{nx\}.$$

Chứng minh

6. Giả sử $\{x\} = \{y\}$ ta có

$$x - y = [x] + \{x\} - [y] - \{y\} = [x] - [y] \in \mathbb{Z}.$$

Giả sử $x - y \in \mathbb{Z}$ thì

$$\{x\} - \{y\} = x - y - [x] + [y] \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Do $0 \le \{x\}; \{y\} < 1$ nên $-1 < \{x\} - \{y\} < 1$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $\{x\} - \{y\} = 0 \Rightarrow \{x\} = \{y\}$.

a) • Với $m\{x\}-n\{y\}=k$ thì $mx-ny=$
$m[x]-n[y]+m\{x\}-n\{y\}=m[x]-n[y]+k\in\mathbb{Z}.$

• Nếu $mx-ny\in\mathbb{Z}$ thì
$m\{x\}-n\{y\}=mx-ny-m[x]+n[y]\in\mathbb{Z}.$ (1)

Do $0\le\{x\},\{y\}<1$ nên $-n<m\{x\}-n\{y\}<m.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:
$$m\{x\}-n\{y\}\in\{-n+1;-n+2;...;m-1\}.$$

7. a) Ta có $\{x_1+x_2+...+x_n\}$
$=x_1+x_2+...+x_n-[x_1+x_2+...+x_n]$
$=[x_1]+\{x_1\}+[x_2]+\{x_2\}+...+[x_n]+\{x_n\}$
$-[[x_1]+\{x_1\}+[x_2]+\{x_2\}+...+[x_n]+\{x_n\}]$
$=[x_1]+\{x_1\}+[x_2]+\{x_2\}+...+[x_n]+\{x_n\}$
$-[x_1]-[x_2]-...-[x_n]-[\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_n\}]$
$=\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_n\}-[\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_n\}]$ (1)

Do $0\le\{x_i\}<1$ nên $0\le\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_n\}<n$
$\Rightarrow 0\le[\{x_1\}+\{x_2\}+...+\{x_n\}]\le n-1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra TC7a.

Nhận xét

• Tính chất 7a có thể phát biểu như sau: Biểu thức
$$\{x_1+x_2+...+x_n\}-\{x_1\}-\{x_2\}-...-\{x_n\}$$
nhận các giá trị $-n+1;\ -n+2;\ ...;0$.

• Tổng quát: biểu thức
$\{x_1+x_2+...+x_m-y_1-y_2-..-y_n\}$
$-\{x_1\}-\{x_2\}-...-\{x_m\}+\{y_1\}+\{y_2\}+...+\{y_n\}$
nhận các giá trị $-m+1;-m+2;...;n$.

(Bạn đọc tự chứng minh các tính chất còn lại).

B. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Giải phương trình*
$$\left(\left\{\frac{x}{3}\right\}+\left\{\frac{x+1}{3}\right\}+\left\{\frac{x+2}{3}\right\}-1\right)[x]+[2x]=6,2.$$

Lời giải. Theo TC8 ta có
$$\left\{\frac{x}{3}\right\}+\left\{\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right\}+\left\{\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right\}-\frac{3-1}{2}=\left\{3.\frac{x}{3}\right\}=\{x\}.$$

PT $\Leftrightarrow\{x\}[x]+[2x]=6,2$
$\Leftrightarrow\{x\}[x]+[2([x]+\{x\})]=6,2$
$\Leftrightarrow\{x\}[x]+[2[x]+2\{x\}]=6,2$
$\Leftrightarrow\{x\}[x]+2[x]+[2\{x\}]=6,2$ (1)

TH1: $0\le\{x\}<\dfrac{1}{2}$ (2) thì $[2\{x\}]=0$.

PT(1) $\Leftrightarrow\{x\}[x]+2[x]=6,2$
$$\Leftrightarrow\{x\}=\frac{6,2-2[x]}{[x]} \quad (3)$$

Do (2) nên $0\le\dfrac{6,2-2[x]}{[x]}<\dfrac{1}{2}$
$$\Leftrightarrow 2,48<[x]<3,1\Leftrightarrow[x]=3.$$

Thay $[x]=3$ vào (3) được $\{x\}=\dfrac{0,2}{3}$.

Suy ra $x=[x]+\{x\}=3+\dfrac{0,2}{3}=\dfrac{46}{15}$.

TH2: $\dfrac{1}{2}\le\{x\}<1$ thì $[2\{x\}]=1$.

PT(1) $\Leftrightarrow\{x\}[x]+2[x]+1=6,2\Leftrightarrow\{x\}=\dfrac{5,2-2[x]}{[x]}$

Giải tương tự TH1 ta được $x=2,6$.

Vậy PT có hai nghiệm $x=\dfrac{46}{15}$ và $x=2,6$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình*
$$\{\sqrt{1+x}\}=\{0,5-\sqrt{3-x}\} \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $-1\le x\le 3$. Theo TC6 thì
PT(1) $\Leftrightarrow A=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-0,5\in\mathbb{Z}.$

Có $(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x})^2=4+2\sqrt{(x+1)(3-x)}.$

Theo BĐT Cauchy thì $0\le 2\sqrt{(x+1)(3-x)}\le 4.$

Suy ra $4\le(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x})^2\le 8$
$\Rightarrow 2\le\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\le 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow 1,5\le A\le 2\sqrt{2}-0,5\approx 2,3$ với $\forall x\in[-1;3].$

Do vậy $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-0,5=2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=1\pm\frac{5\sqrt{7}}{8}$$

Vậy PT(1) có hai nghiệm $x=1\pm\frac{5\sqrt{7}}{8}$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$\frac{\{x\}+\{4x\}}{\{4x\}+\{6x\}+2}=\frac{[x]^2-2[x]+3}{[x]^2+2} \quad (1)$$

Lời giải. Dễ thấy $\{4x\}+\{6x\}+2>0$.

Theo TC4 có $\{4x\}=\{4\{x\}\}=4\{x\}-[4\{x\}]$.

Theo TC7 có

$\{6x\}=\{x+x+4x\}\geq\{x\}+\{x\}+\{4x\}-2$

$\Rightarrow \{4x\}+\{6x\}+2\geq 2(\{x\}+\{4x\})$

Suy ra $\text{VT}(1)=\frac{\{x\}+\{4x\}}{\{4x\}+\{6x\}+2}\leq\frac{1}{2}$ (2)

$\text{VT}(1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow[\{x\}+\{x\}+\{4x\}]=2$

$\Leftrightarrow 2\leq 2\{x\}+\{4x\}<3 \Leftrightarrow 2\leq 2\{x\}+\{4\{x\}\}<3$

$\Leftrightarrow 2\leq 2\{x\}+4\{x\}-[4\{x\}]<3$

$\Leftrightarrow 2\leq 6\{x\}-[4\{x\}]<3$ (*)

TH1: $0\leq\{x\}<\frac{1}{4}$ thì $[4\{x\}]=0$.

(*) $\Leftrightarrow 2\leq 6\{x\}<3\Leftrightarrow\frac{1}{3}\leq\{x\}<\frac{1}{2}$ (loại).

TH2: $\frac{1}{4}\leq\{x\}<\frac{1}{2}$ thì $[4\{x\}]=1$.

(*) $\Leftrightarrow 2\leq 6\{x\}-1<3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq\{x\}<\frac{2}{3}$ (loại).

TH3: $\frac{1}{2}\leq\{x\}<\frac{3}{4}$ thì $[4\{x\}]=2$.

(*) $\Leftrightarrow\frac{2}{3}\leq\{x\}<\frac{5}{6}$, suy ra $\frac{2}{3}\leq\{x\}<\frac{3}{4}$.

TH4: $\frac{3}{4}\leq\{x\}<1$ thì $[4\{x\}]=3$.

(*) $\Leftrightarrow\frac{5}{6}\leq\{x\}<1$, suy ra $\frac{5}{6}\leq\{x\}<1$.

Vậy BPT(*) $\Leftrightarrow\{x\}\in\left[\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)\cup\left[\frac{5}{6};1\right)$.

Ta có: $([x]-2)^2\geq 0$ suy ra

$$2([x]^2-2[x]+3)\geq[x]^2+2.$$

Do đó $\text{VP}(1)=\frac{[x]^2-2[x]+3}{[x]^2+2}\geq\frac{1}{2}$ (3)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow[x]=2$.

Từ (2), (3) suy ra $\text{VT}(1)=\text{VP}(1)=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\{x\}\in\left[\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)\cup\left[\frac{5}{6};1\right)\\ [x]=2\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{8}{3};\frac{11}{4}\right)\cup\left[\frac{17}{6};3\right)$$

Tập nghiệm PT(1) là $T=\left[\frac{8}{3};\frac{11}{4}\right)\cup\left[\frac{17}{6};3\right)$.

Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\left\{\sqrt{2+\frac{x}{y}}\right\}+2\left\{\sqrt{2-\frac{x}{y}}\right\}=1 & (*)\\ [xy]^2+([-xy]+7)^2+\frac{1}{\{xy\}\{-xy\}}=22 & (**)\end{cases}$$

Lời giải. Ta có $\{xy\}\{-xy\}\neq 0\Leftrightarrow xy\notin\mathbb{Z}$.

ĐK: $-2\leq\frac{x}{y}\leq 2$; $xy\notin\mathbb{Z}$. Đặt $\frac{x}{y}=a$ với $-2\leq a\leq 2$.

PT(*) trở thành: $\left\{\sqrt{2+a}\right\}+2\left\{\sqrt{2-a}\right\}=1$ (1)

Theo TC6b thì từ PT(1) có

$L=\sqrt{2+a}+2\sqrt{2-a}\in\mathbb{Z}$ nên

$L^2=10-3a+4\sqrt{4-a^2}=4+3(2-a)+4\sqrt{4-a^2}\geq 4.$

Theo BĐT Cauchy có:

$L^2=10-3a+2\sqrt{(8+4a)(2-a)}$

$\leq 10-3a+8+4a+2-a=20.$

Vậy $4\leq L^2\leq 20$, mà $L\geq 0$, suy ra $L\in\{2;3;4\}$

• Với $L=2\Rightarrow L^2=4\Rightarrow a=2$.

Thay $a=2$ vào PT (1) thấy không thoả mãn.

• Với $L=3\Rightarrow 10-3a+4\sqrt{4-a^2}=9$

$$\Rightarrow 4\sqrt{4-a^2}=3a-1\Rightarrow a=\frac{3+12\sqrt{11}}{25}.$$

Thay $a=\frac{3+12\sqrt{11}}{25}$ vào vế trái (1) được

$$\left\{\sqrt{\frac{53+12\sqrt{11}}{25}}\right\}+2\left\{\sqrt{\frac{47-12\sqrt{11}}{25}}\right\}$$

$$=\left\{\frac{3+2\sqrt{11}}{5}-1\right\}+2\left\{\frac{6-\sqrt{11}}{5}\right\}=2.$$

Suy ra $a=\frac{3+12\sqrt{11}}{25}$ bị loại.

• Với $L=4\Rightarrow a=-2$ hoặc $a=\frac{14}{25}$.

Thay $a=-2$ và $a=\frac{14}{25}$ vào PT(1) ta thấy chỉ có $a=\frac{14}{25}$ là nghiệm.

Do $xy\notin\mathbb{Z}$ nên: $[xy]+[-xy]=-1$;

$$\{xy\}+\{-xy\}=1;\ \{xy\}\{-xy\}>0.$$

Vì $(m-n)^2\ge 0$ nên $m^2+n^2\ge\frac{1}{2}(m+n)^2$ và $mn\le\frac{1}{4}(m+n)^2$. Đẳng thức xảy ra ở 2 BĐT trên đều là $m=n$. Áp dụng các BĐT này, ta có:

$$\text{VT}(**)\ge\frac{1}{2}([xy]+[-xy]+7)^2+\frac{4}{(\{xy\}+\{-xy\})^2}$$
$$=22=\text{VP}(**).$$ Suy ra

$$\text{PT}(**)\Leftrightarrow\begin{cases}[xy]=[-xy]+7\\ [xy]+[-xy]=-1\\ \{xy\}=\{-xy\}\\ \{xy\}+\{-xy\}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[xy]=3\\ \{xy\}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow xy=\frac{7}{2}$. Như vậy ta có

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{14}{25}\\ xy=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)\in\left\{\left(\frac{7}{5};\frac{5}{2}\right);\left(\frac{-7}{5};\frac{-5}{2}\right)\right\}.$$

Vậy HPT đã cho có nghiệm

$$(x;y)\in\left\{\left(\frac{7}{5};\frac{5}{2}\right);\left(\frac{-7}{5};\frac{-5}{2}\right)\right\}.$$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $1-x^2=6\{x\}x^2$.

b) $\{x\{x\}\}+[x]=2,24$.

c) $[x]\left[x+\frac{1}{3}\right]+2\{2x\}=\frac{40}{3}$.

d) $x[x]+\frac{\{x\}+\{2x\}}{\{3x\}}=1+x\left[\frac{7x}{10}\right]$.

e) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+2\{2x\}=8+4\{4x\}$.

f) $\left\{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2}\right\}+...+\left\{\frac{x}{2^8}+\frac{1}{2}\right\}=[x]-\left[\frac{255x}{256}\right]$.

g) $\left\{\frac{x+1}{45}\right\}+\left\{\frac{x+4}{45}\right\}+\left\{\frac{x+7}{45}\right\}+...+\left\{\frac{x+43}{45}\right\}=\frac{88}{3}+[x]$.

2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}\{\sqrt{x+y}\}=\{\sqrt{x-y}\}\\ \{x-\sqrt{x^2-y^2}\}=x+y+0,5\end{cases}$

b) $\begin{cases}\{x\}+[y]=\{y\}+[x]\\ 1+x[x]=y[2y]+\dfrac{\{3y\}+1}{\{y\}+\{2y\}}\end{cases}$

c) $\begin{cases}3\{x\}+[3\{y\}]+[y]=6\\ 3\{y\}+[3\{x\}]+[x]=6.\end{cases}$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG PTNK, ĐHQG THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH năm học 2014-2015

(Đề thi đăng trên TH&TT Số 449, tháng 11 năm 2014)

VÒNG 1

Câu 1. a) Bình phương 2 vế, đưa PT về dạng $(3-x)(1-x^4)=0$. Tập nghiệm : $S=\{3;1;-1\}$.

b) $\frac{x}{y}=-\sqrt{7}$.

Câu 2. a) HPT có 5 nghiệm $(x; y)$ là :

$$(\sqrt{7}; 9); (-\sqrt{7}; 9); (0; 18); (4; 2); (-4; 2).$$

b) $AB = BD = AD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD; $OA = AB\sin\widehat{ABO} = AB\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2OA$ $=\sqrt{3}AB \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2} = \frac{\sqrt{3}AB^2}{2} = 18\sqrt{3}$ $\Rightarrow AB = 6$ (m); Chu vi hình thoi $ABCD$ là $AB.4 = 24$ (m); Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm D, bán kính $DB = 6$m.

Câu 3. a) Với $m=-1$, PT(1) có nghiệm $x=-1$.

b) ĐK: $x \neq -3$. PT(1) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt $\Leftrightarrow mx^2+(m-3)x+2m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 9m-3(m-3)+2m-1\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -1 \\ -\frac{9}{7}<m<1 \end{cases}.$$

$x_1+x_2=\frac{3-m}{m}$; $mx_2^2+(m-3)x_2+2m-1=0$.

Do đó $21x_1+7m(2+x_2+x_2^2)=58$

$\Leftrightarrow 21(x_1+x_2)+7\left[mx_2^2+(m-3)x_2+2m-1\right]=51$

$\Leftrightarrow x_1+x_2=\frac{17}{7} \Leftrightarrow m=\frac{7}{8}$ (thỏa mãn ĐK).

Câu 4. a) $\frac{x+y}{2}=100 \Rightarrow \frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}=200$

$\Rightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=400 \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{400}=20.$

b) Do x, y tỉ lệ nghịch, x tăng $a\%$ thì y giảm $m\%$ nên ta có $(x+x.a\%)(y-y.m\%)=xy$

$\Leftrightarrow (1+a\%)(1-m\%)=1$ (do $x>0$, $y>0$)

$\Leftrightarrow 1-\frac{m}{100}=\frac{100}{100+a} \Leftrightarrow m=\frac{100a}{100+a}$.

Câu 5. (Bạn đọc tự vẽ hình) a) $AC \perp BD$ tại I $\Rightarrow$ tâm O của $(\mathcal{C})$ là trung điểm của CD. Dễ thấy: $BE = BC = BA \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại B; $BO \perp CE$ và $DF \perp CE \Rightarrow BO \,//\, DF$, $DFBO$ là hình bình hành $\Rightarrow F$ là trung điểm của AB và $AF = a$.

b) OB là tia phân giác của $\widehat{EOC}$, OP là tia phân giác của $\widehat{EOD}$. Mà $\widehat{EOC}$ và $\widehat{EOD}$ kề bù nên $\widehat{BOP}=90^\circ$. Gọi K là trung điểm của BP, ta nhận thấy F, K, I, O thẳng hàng, $KO \perp CD$, suy ra đường tròn ngoại tiếp ΔABP có tâm K, tiếp xúc với CD tại O.

$PE.BE = OE^2 \Leftrightarrow PE=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2} \Rightarrow PD=\frac{a}{2}$.

Ta có $AP=2a-\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$. Do đó $\frac{AP}{PD}=3$.

c) Ta có $\widehat{IEF}=\widehat{ICD}=\widehat{IAF}=45^\circ \Rightarrow$ tứ giác $AFIE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IEM}=\widehat{AFI}=90^\circ \Rightarrow IM$ là đường kính của $(\mathcal{C}) \Rightarrow I, O, M$ thẳng hàng $\Rightarrow M \in OF$ và $FM = 3a$. ΔAFM vuông tại $F \Rightarrow AM^2 = AF^2 + FM^2$ $=9a^2+a^2=10a^2 \Rightarrow AM=\sqrt{10}a$.

VÒNG 2

Câu 1. a) Dễ thấy PT (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$. Do đó: $0<2m\leq\frac{m^2+4}{2}$

$\Rightarrow 0<x_1+x_2=\frac{2m}{m^2+5}\leq\frac{m^2+4}{2(m^2+5)}<\frac{m^2+5}{2(m^2+5)}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_1+x_2 \notin \mathbb{Z}$.

b) $m=2$ và $m=\frac{5}{2}$.

Câu 2. 1) ĐK: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Dễ thấy $x \neq 0$, $y \neq 0$. Do vai trò của x, y như nhau nên có thể giả sử $x \geq y > 0$. Ta có:

$$1 + x\sqrt{y} = 1 + \sqrt{x}\sqrt{xy} \geq 1 + \sqrt{y}\sqrt{xy} = 1 + y\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2\left(1 + x\sqrt{y}\right)^2 \geq 2\left(1 + y\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow 9y\sqrt{x} \geq 9x\sqrt{y}$$

$\Rightarrow y \geq x \Rightarrow x = y$. Từ đó tìm được nghiệm $(x; y)$ của HPT là: $\left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}\right)$ và $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$.

2) $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{BC}{AB}; \dfrac{NB}{NA} = \dfrac{BC}{AC}; BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\Rightarrow \frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA.NA} = \left(\frac{MC}{MA} + 1\right)\left(\frac{NB}{NA} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{BC}{AB} + 1\right)\left(\frac{BC}{AC} + 1\right) = \frac{BC^2}{AB.AC} + \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} + 1$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2}{AB.AC} + 1 + \sqrt{AB^2 + AC^2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right)$$

$$\geq 2 + 1 + \sqrt{2AB.AC}.2\sqrt{\frac{1}{AB}.\frac{1}{AC}} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Câu 3. a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} \Leftrightarrow ab = c(a + b) \Rightarrow ab \vdots (a + b)$.

Nếu $a + b$ là số nguyên tố thì $a \vdots (a + b)$ hoặc $b \vdots (a + b)$ mà a, b nguyên dương suy ra $a > a + b$ hoặc $b > a + b$ (vô lí). Vậy $a + b$ không thể là số nguyên tố.

b) Ta có: $(a + c)(b + c) = ab + (a + b)c + c^2$

$= 2(a + b)c + c^2 = c(2a + 2b + c)$

$\Rightarrow (a + c)(b + c) \vdots c$ (*). Giả sử $a + c$ và $b + c$ đồng thời là số nguyên tố. Do $a + c > c$, $b + c > c$ và $c > 1$ nên $(a + c)(b + c)$ không chia hết cho c, mâu thuẫn với (*), ta có đpcm.

Câu 4. (Bạn đọc tự vẽ hình) a) Gọi O là tâm của nửa đường tròn đường kính AB. Ta có:

$\widehat{ACN} = \widehat{ANC}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow AN = AC$. Tương tự, $BM = BC$.

b) Gọi $L = AI \cap CN$, $K = BJ \cap CM$. Các ΔACN, ΔBCM cân nên: $CL = NL$, $AL \perp CN$, $CK = MK$, $BK \perp CM \Rightarrow KL \,//\, MN \Rightarrow \widehat{CKL} = \widehat{CMN}$; $\widehat{IKJ} = \widehat{ILJ} = 90^{\circ} \Rightarrow$ tứ giác $KLJI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CKL} = \widehat{CJI} \Rightarrow \widehat{CJI} = \widehat{CMN}$, suy ra bốn điểm M, I, J, N cùng nằm trên một đường tròn. Dễ thấy: $\widehat{MCN} = \widehat{MHI} = 45^{\circ} \Rightarrow$ tứ giác $HICN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NIC} = \widehat{NHC} = 90^{\circ} \Rightarrow NI \perp CM$. Tương tự, $MJ \perp CN$. ΔCMN nhận MJ, NI, CH là ba đường cao nên chúng đồng quy.

c) $MN = AN + BM - AB = AC + BC - AB$. $AC^2 + BC^2 = AB^2 = 4R^2$; $AC.BC = CH.AB$ và $CH \leq OC = R$. Do đó: $(AC + BC)^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC.BC$

$= AB^2 + 2CH.AB = 4R^2 + 4R.CH \leq 4R^2 + 4R^2$

$= 8R^2 \Rightarrow AC + BC \leq 2\sqrt{2}R$

$\Rightarrow MN \leq 2\sqrt{2}R - 2R = 2(\sqrt{2} - 1)R.$

$\max MN = 2(\sqrt{2} - 1)R \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa của cung AB.

$$S_{CMN} = \frac{CH.MN}{2} \leq \frac{R.2(\sqrt{2} - 1)R}{2} = (\sqrt{2} - 1)R^2.$$

$\max S_{CMN} = (\sqrt{2} - 1)R^2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa của cung AB.

Câu 5. Gọi 5 số tự nhiên phân biệt đó là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, không mất tổng quát, giả sử

$a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1$ (*)

a) Từ (*) ta có: $a_5 - a_3 \geq 2$; $a_4 - a_2 \geq 2$. Theo đề bài: $a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 \Rightarrow a_1 > a_5 - a_3 + a_4 - a_2 \geq 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_1 \geq 5 \Rightarrow a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1 \geq 5$.

b) Ta có: $a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1 \geq 5$;

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 40$.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$\geq a_1 + a_1 + 1 + a_1 + 2 + a_1 + 3 + a_1 + 4 = 5a_1 + 10$

$\Rightarrow 5a_1 + 10 < 40 \Rightarrow a_1 < 6$. Với $5 \leq a_1 < 6$, $a_1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 35$. Mặt khác

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$\geq a_2 + a_2 + 1 + a_2 + 2 + a_2 + 3 = 4a_2 + 6$.

nên $4a_2 + 6 < 35 \Rightarrow a_2 < \dfrac{29}{4} \Rightarrow a_2 \leq 7$.

Vì $6 \leq a_2 \leq 7$, $a_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_2 = 6$ hoặc $a_2 = 7$. Có hai bộ số $(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5)$ thoả mãn bài toán là $(5; 6; 7; 8; 9)$, $(5; 7; 8; 9; 10)$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (TP. Hồ Chí Minh)

Sưu tầm và hướng dẫn giải

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2014-2015

(*Thời gian làm bài*:150 *phút*)

Bài 1 (*1,5 điểm*). Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right),$$

với $x>0, x\neq\frac{1}{4}, x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Chứng minh rằng $A>\sqrt{A}$.

Bài 2 (*3 điểm*)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $6x^2+5y^2=74$.

Bài 3 (*1,5 điểm*). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác đồng quy tại H. Chứng minh rằng:

$$\frac{HA}{HA_1}+\frac{HB}{HB_1}+\frac{HC}{HC_1}\geq 6.$$

Bài 4 (*3 điểm*). Cho đường tròn tâm O, dây cung AB (AB không phải là đường kính). Điểm M di động trên cung lớn AB (M không trùng với A hoặc B). Gọi H là hình chiếu của M trên AB; E, F lần lượt là hình chiếu của D trên MA, MB.

a) Chứng minh đường thẳng MD luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi Q, P lần lượt là hình chiếu của D trên MA, MB. Chứng minh rằng $DP.EF=PQ.HE$.

c) Chứng minh $\frac{MA^2}{MB^2}=\frac{AH.AD}{BD.BH}$.

Bài 5 (*1 điểm*). Cho các số x, y, z đôi một khác nhau, khác 0 và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{xz}{y^2+2xz}+\frac{xy}{z^2+2xy}$.

BÙI VĂN CHI
(*GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)
sưu tầm và giới thiệu

Vang mãi Bài ca trồng người

Kính tặng Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ

Thời gian thấm thoắt thoi đưa
Xin mừng Báo Toán tuổi vừa năm mươi
Ngoảnh nhìn năm tháng vèo trôi
Biết bao kỉ niệm bồi hồi hiện ra

Nào lời dạy bảo thiết tha
Các nhà toán học nâng ta trưởng thành
Như hoa nở thắm trĩu cành
Những đề toán lạ mãi dành trong tim

Trăm ngàn câu chuyện ân tình
Báo gìn giữ lửa yêu tin con người
Cánh chim bay suốt cuộc đời
Nhịp cầu nối những chân trời bao la

Từ trong *tuổi trẻ* sinh ra
Báo vang vọng mãi *Bài ca trồng người.*

Thu 2014

Lê Quốc Hán (*GV Khoa Toán, ĐH Vinh*)

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

NGUYỄN HỮU TRUNG
(GV THPT Thuận Thành Số 2, Bắc Ninh)

Trong các đề thi Đại học và Cao đẳng xuất hiện khá nhiều bài toán giải bất phương trình (BPT) vô tỉ mà cách giải thường là biến đổi tương đương hoặc đặt ẩn phụ để đưa về bất phương trình mới đơn giản hơn. Tôi xin giới thiệu thêm với các bạn một số dạng toán về giải BPT vô tỉ và những cách đặt ẩn phụ để giải chúng.

I. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT MỘT ẨN PHỤ

Loại 1: Trong một số bài toán ta có thể đặt ẩn phụ trực tiếp với ẩn t bằng một biểu thức căn thức chứa ẩn. Khi đó ta sẽ rút ẩn cũ theo ẩn mới t và thay lại BPT ban đầu, ta được một BPT với ẩn mới. Giải BPT tìm nghiệm t, thay lại phép đặt suy ra nghiệm x. Cụ thể ta xét thí dụ sau:

Thí dụ 1. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x+3}\ge 2x+2. \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\ge -1$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=t^2-1$, $t\ge 0$. Thay vào (1) ta được BPT ẩn t:

$$2\sqrt{2t^2+1}\le 2t^2-t\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\le 0\\ t\ge\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ 4t^4-4t^3-7t^2-4\ge 0 \quad (2)\end{cases}$$

Với $t\le 0$, kết hợp ĐK ta được $t=0$. Khi đó BPT (2) vô nghiệm. Với $t\ge\frac{1}{2}$, khi đó:

$(2)\Leftrightarrow (t-2)(4t^3+4t^2+t+2)\ge 0\Leftrightarrow t\ge 2.$

Với $t\ge 2\Rightarrow\sqrt{x+1}\ge 2\Leftrightarrow x\ge 3$. Kết hợp với ĐK ta được tập nghiệm BPT (1) là: $S=[3,+\infty)$.

Thí dụ 2. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt[3]{7x-8}+1\ge(\sqrt{2x-1}-1)^2. \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\ge\frac{1}{2}$. Đặt $t=\sqrt{2x-1}$

$\Rightarrow x=\dfrac{t^2+1}{2}\ (t\ge 0)$. Khi đó BPT (1) trở thành:

$$\sqrt[3]{\frac{7t^2-9}{2}}+1\ge(t-1)^2\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{7t^2-9}{2}}\ge t^2-2t$$

$$\Leftrightarrow 7t^2-9\ge 2(t^2-2t)^3$$

$$\Leftrightarrow 2t^6-12t^5+24t^4-16t^3-7t^2+9\le 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-3)(2t^4-4t^3+2t^2+4t+3)\le 0 \ (2)$$

Ta có: $2t^4-4t^3+2t^2+4t+3$

$=2t^2(t-1)^2+4t+3>0,\ \forall t\ge 0$.

Thành thử $(2)\Leftrightarrow (t-1)(t-3)\le 0\Leftrightarrow 1\le t\le 3$.

Khi đó ta được: $1\le\sqrt{2x-1}\le 3\Leftrightarrow 1\le x\le 5$. Kết hợp với ĐK ta được tập nghiệm của (1) là $S=[1,5]$.

Loại 2: Nếu một bất phương trình vô tỉ có bộ phận chứa ẩn nằm ngoài căn biểu diễn được theo bộ phận chứa ẩn nằm trong căn khi đó ta có thể đặt bộ phận chứa căn đó làm ẩn phụ.

Chú ý: Trong thực hành có thể cần thực hiện một số biến đổi như nhân, chia, hoặc thêm bớt hằng số thích hợp,... để làm xuất hiện bộ phận cần đặt ẩn phụ.

Thí dụ 3. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x \ (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\ge\frac{6}{7}$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow 14x-181+\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<0$$

$$\Leftrightarrow (7x+7)+(7x-6)+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}+\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}-182<0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6})^2+(\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6})-182<0 \ (2)$$

Đặt $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\ (t>0)$. Khi đó BPT (2) có dạng: $t^2+t-182<0\Leftrightarrow -14<t<13$. Kết hợp với $t>0$ suy ra $0<t<13$.

Vậy: $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}<13$.

Đặt $f(x)=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}$ với $x\ge\frac{6}{7}$.

$f'(x)=\dfrac{7}{2\sqrt{7x+7}}+\dfrac{7}{2\sqrt{7x-6}}>0,\forall x>\dfrac{6}{7}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến khi $x\geq\dfrac{6}{7}$. Do đó

$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}<13\Leftrightarrow f(x)<f(6)\Leftrightarrow x<6$.

Kết hợp điều kiện $x\geq\dfrac{6}{7}$ ta được tập nghiệm của BPT (1) là: $S=\left[\dfrac{6}{7},6\right)$.

Thí dụ 4 (ĐH khối B-2012). *Giải bất phương trình:* $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\geq 3\sqrt{x}$. (1)

Phân tích: Thoạt nhìn ta thấy không thể đặt ẩn phụ ngay vì BPT chứa 2 căn và biểu thức ngoài căn không biểu diễn được theo biểu thức chứa căn. Nhưng nếu ta chia 2 vế của BPT cho $\sqrt{x}\neq 0$ khi đó ta được: $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4}\geq 3$

và ta có thể nghĩ đến phép đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải. ĐK: $0\leq x\leq 2-\sqrt{3}$ hoặc $x\geq 2+\sqrt{3}$.

TH1: Nếu $x=0$, khi đó (1) trở thành: $2\geq 0$ (luôn đúng), suy ra $x=0$ là một nghiệm.

TH2: Với $x>0$, chia 2 vế của (1) cho $\sqrt{x}$ ta được:

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x-4+\frac{1}{x}}\geq 3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)-4}\geq 3\ (2)$$

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}},(t\geq 2)\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=t^2-2$.

Khi đó (2) trở thành:

$$\sqrt{t^2-6}\geq 3-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-t<0\\ \begin{cases}3-t\geq 0\\ t^2-6\geq(3-t)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>3\\ \dfrac{5}{2}\leq t\leq 3\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow t\geq\dfrac{5}{2}$. Với $t\geq\dfrac{5}{2}$ ta được:

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}+2\geq 0$$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}\leq\dfrac{1}{2}$ hoặc $\sqrt{x}\geq 2$. Từ đó ta được $x\leq\dfrac{1}{4}$ hoặc $x\geq 4$. Kết hợp hai trường hợp và ĐK ta được tập nghiệm của BPT (1) là: $S=[0,1]\cup[4,+\infty)$.

Nhận xét: Ta có thể chia hai vế BPT (1) cho $x+1>0$ và biến đổi về dạng $1+\sqrt{1-6.\dfrac{x}{(x+1)^2}}\geq 3\sqrt{\dfrac{x}{(x+1)^2}}$ và đặt $t=\sqrt{\dfrac{x}{(x+1)^2}}$.

Thí dụ 5 (ĐH khối A-2010). *Giải bất phương trình:* $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\geq 1$. (1)

Lời giải. ĐK: $x\geq 0$.

Nhận xét: Ta có

$\sqrt{2(x^2-x+1)}=\sqrt{(x-1)^2+x^2+1}>1$

$\Rightarrow 1-\sqrt{2(x^2-x+1)}<0$.

Do đó: (1) $\Leftrightarrow x-\sqrt{x}\leq 1-\sqrt{2(x^2-x+1)}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2(x^2-x+1)}\leq 1-x+\sqrt{x}$ (2).

TH1: Nếu $x=0$, khi đó (2) có dạng: $\sqrt{2}\leq 1$ (vô nghiệm).

TH2: Nếu $x>0$, chia 2 vế của (2) cho $\sqrt{x}>0$, ta được: $\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2}\leq\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)+1$ (3).

Đặt $t=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=t^2+2$.

Khi đó (3) trở thành: $\sqrt{2t^2+2}\leq t+1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\ 2t^2+2\leq(t+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\ (t-1)^2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow t=1.$$

Với $t=1\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (do $x>0$) $\Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Kết hợp 2 trường hợp và ĐK ta được nghiệm của (1) là: $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Thí dụ 6. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{2x^4-6x^3+10x^2-6x+8}-\sqrt{x^3+x}\leq\sqrt{x^2+1}(x-2)\ (1).$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}2x^4-6x^3+10x^2-6x+8\geq 0\\ x^3+x\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+1)(2x^2-6x+8)\ge 0\\ x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0.$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\sqrt{2x^2-6x+8}$

$$-\sqrt{x^2+1}\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}(x-2)\le 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}(\sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x}-x+2)\le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x}-x+2\le 0$ (2).

TH1: Với $x=0$, khi đó (2) vô nghiệm.

TH2: Với $x>0$, chia 2 vế của (2) cho $\sqrt{x}$ ta được: $\sqrt{2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)-6}-1-\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x+\frac{4}{x}\right)-6}\le\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)+1 \quad (3).$$

Đặt $t=\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\Rightarrow x+\dfrac{4}{x}=t^2+4$, thay vào (3) ta được: $\sqrt{2t^2+2}\le t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ t^2-2t+1\le 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ (t-1)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow t=1.$$

Với $t=1$ ta có: $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{2}-2=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=-1 \text{ (loại)},\ \sqrt{x}=2\Rightarrow x=4.$$

Kết hợp hai trường hợp và ĐK, ta thấy BPT (1) có nghiệm $x=4$.

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT HAI ẨN PHỤ

Nhận xét. Trong trường hợp đặt một ẩn phụ mà không đưa được về BPT chỉ với ẩn phụ đó thì ta có thể đặt hai ẩn phụ để đưa về BPT với hai ẩn phụ vừa đặt. Cụ thể ta xét một số thí dụ sau.

Thí dụ 7. *Giải bất phương trình:*

$2(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2})-\sqrt{1-x^4}\le 3x^2+1.$ (1)

Phân tích: Ta thấy nếu đặt t bằng một biểu thức nào đó thì các biểu thức chứa ẩn x còn lại không biểu diễn được theo ẩn t nghĩa là không thể đưa BPT (1) về BPT một ẩn t. Khi đó ta có thể sử dụng đặt hai ẩn phụ như sau: $a=\sqrt{x^2+1}, b=\sqrt{1-x^2}$ ta thu được:

$$\sqrt{1-x^4}=ab,\ 3x^2+1=2a^2-b^2.$$

Lời giải. ĐK: $-1\le x\le 1$. Đặt $a=\sqrt{x^2+1}$, $b=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 3x^2+1=2a^2-b^2, \sqrt{1-x^4}=a.b$, với $a\ge b\ge 0$. Khi đó BPT (1) trở thành:

$$2(2a-b)-ab\le 2a^2-b^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+(b-4)a+2b-b^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-b)(a+b-2)\ge 0. \quad (2)$$

Vì $a\ge b\ge 0$ nên $2a-b\ge 0$. Do đó (2) $\Leftrightarrow a+b-2\ge 0\Rightarrow \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\ge 2$ (3).

Bình phương hai vế của (3) ta được:

$$2\sqrt{1-x^4}\ge 2\Leftrightarrow \sqrt{1-x^4}\ge 1\Leftrightarrow x=0$$

(thỏa mãn ĐK). Vậy BPT (1) có nghiệm $x=0$.

Thí dụ 8. *Giải bất phương trình:*

$\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)}}\ge\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}+2-\dfrac{x^2+1}{x}.$ (1)

Lời giải. ĐK: $x>0$. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x}}\ge\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+2-\frac{x^2+1}{x} \quad (2).$$

Đặt $a=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}, b=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x}}$ $(a>0, b>0)\Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x}=b^2+1$.

Khi đó (2) trở thành: $ab\ge a+1-b^2$

$\Leftrightarrow (b-1)(a+b+1)\ge 0\Leftrightarrow b\ge 1 (\text{do } a+b+1>0).$

Với $b\ge 1$ ta có $\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x}}\ge 1\Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$ (luôn đúng). Vậy BPT (1) có tập nghiệm $S=(0,+\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải các bất phương trình sau

1. $(x^2+1)^2\le 5-x\sqrt{2x^2+4}$.
2. $x(x-4)\sqrt{4x-x^2}+(x-2)^2<2$.
3. $x^3-8x^2+13x+6+(6x-18)\sqrt{x^2-5x+5}\ge 0$.
4. $\sqrt{x(x+1)(x+2)}\le x^2-x-4$.
5. $\sqrt{\dfrac{x^4+x+1}{x^3+x}}\ge\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}}-\dfrac{x^2+1}{x}$.
6. $\sqrt{x^2+20x+4}+\sqrt{x}\le 2x+4$.
7. $x^4-2x^3-2x^2-x+10\ge(8-4x)\sqrt{x^3+2x}$.
8. $\sqrt[3]{2x-1}\ge(\sqrt{x-1}+2)^2-3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Giả sử Δ là tiếp tuyến với đồ thị (C_m) đi qua A và cắt đường tròn (S) tại hai điểm phân biệt M, N.

Đường tròn (S) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=5$ và điểm A nằm trong đường tròn (S).

Vẽ $IH \perp \Delta$ tại H. Ta có $MN \geq 2\sqrt{R^2-IA^2}$.

Do đó MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $H \equiv A$.

Đường thẳng Δ đi qua A và nhận vectơ $\overrightarrow{IA}=(4;-2)$ làm VTPT, có PT $2x-y-6=0$.

Δ tiếp xúc với (C_m) nếu và chỉ nếu hệ sau có nghiệm $\begin{cases} x^3-6x^2+9x+m=2x-6 \\ 3x^2-12x+9=2 \end{cases}$

Ta tìm được $m=\dfrac{-36\pm 10\sqrt{15}}{9}$.

Câu 2. ĐK: $\sin 4x-\sqrt{3}\cos 2x \neq 0$ (*)

PT đã cho tương đương với

$$2\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Đáp số. $x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 3. Ta có $I=-\displaystyle\int_2^{1+\sqrt{2}}\frac{d\left(-x^2+2x+3\right)}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

$$+\frac{1}{2}\int_2^{1+\sqrt{2}}\frac{d\left(\dfrac{x-1}{2}\right)}{\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\sqrt{1-\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2}}=-I_1+\frac{1}{2}I_2$$

• Tính $I_1=\left(2\sqrt{-x^2+2x+3}\right)\Big|_2^{1+\sqrt{2}}=2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$.

• Tính I_2. Đặt $\dfrac{x-1}{2}=\sin t,\ t\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Ta có $I_2=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sin t}=\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(\frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{12}}\right)$.

Vậy $I=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\tan\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{12}}\right)$.

Câu 4. a) ĐK: $x\in(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$.

PT đã cho viết lại là

$\log_{2015}\left(x^2-4\right)=\log_{2015}\left((x+2)^2|x-3|\right)$

$\Leftrightarrow x-2=(x+2)|x-3|$ (*).

• Với $x\in(-\infty;-2)\cup(2;3)$ (a), giải PT (*) và đối chiếu với (a) được $x=\pm 2\sqrt{2}$.

• Với $x\in(3;+\infty)$ (b), giải PT (*) và đối chiếu với (b) được $x=1+\sqrt{5}$.

PT đã cho có các nghiệm là $x=\pm 2\sqrt{2}$ và $x=1+\sqrt{5}$.

b) Giả sử $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Từ giả thiết suy ra $\begin{cases}-2x=-4\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\Rightarrow z=2+i$.

Do đó $\omega=z^2-3z=(2+i)^2-3(2+i)=-3+i$.

Phần thực của số phức cần tìm là -3, phần ảo là 1.

Câu 5. Gọi $M(m;n;2m+n),\ N(4+k;k;-3k)$.

Gọi I là trung điểm của MN, đường thẳng Δ_2 có VTCP $\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=(1;\ 2;\ 2)$.

Vì M và N đối xứng với nhau qua Δ_2 nên

$$\begin{cases} I\in\Delta_2 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=0\end{cases}$$

Tìm được $m=1,\ n=-1,\ k=1\Rightarrow M(1;-1;1),\ N(5;1;-3)$.

Gọi VTCP của $\Delta,\ \Delta_1$ lần lượt là $\overrightarrow{u_\Delta}=(a;b;c)$ $\left(a^2+b^2+c^2>0\right)$, $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(1;\ 1;\ -3)$; VTPT của mp$(P)$ là $\vec{n}=(2;\ 1;\ -1)$.

Vì $\Delta\perp\Delta_1$ nên $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{u_{\Delta_1}}\Leftrightarrow b=3c-a$ (1)

Từ giả thiết có

$$\sin 30^o = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{n}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{|2a+b-c|}{\sqrt{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tìm được ($a=1$, $b=2$ và $c=1$) hoặc ($a=11$, $b=-5$ và $c=2$).

Có hai đường thẳng thỏa mãn đề bài với PT là

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}; \quad \frac{x-1}{11} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-1}{2}.$$

Câu 6. • Gọi x là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ ($x > 0$), có $S_{SBC} = \frac{1}{2}SB.BC \Rightarrow x = a$.

Do đó, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3}{3}$ (đvtt).

• Chọn hệ trục $Axyz$ sao cho

$$A(0;\ 0;\ 0);\ C(a;\ a;\ 0);\ I\left(\frac{a}{2};\ 0;\ \frac{a}{2}\right);\ J\left(0;\ \frac{a}{2};\ \frac{a}{2}\right).$$

Từ đó $d(AI, CJ) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CJ}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CJ}\right]\right|} = \dfrac{2a}{\sqrt{11}}$.

Câu 7. PT đường thẳng AB qua M có dạng $ax + b\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0$ $\left(a^2 + b^2 > 0\right)$, suy ra PT đường thẳng CD qua N và song song với AB là $ax + b(y-7) = 0$.

Do AB và CD đối xứng nhau qua tâm I, nên

$$\begin{cases} d(I, AB) = d(I, CD) \\ I \text{ nằm giữa hai đường } AB \text{ và } CD \end{cases} \Rightarrow 3a = 4b.$$

Chọn $a = 4$ và $b = 3$ ta được PT $AB: 4x + 3y - 1 = 0$.

PT đường thẳng BD qua I có dạng

$$m(x-2) + n(y-1) = 0 \quad \left(m^2 + n^2 > 0\right).$$

Ta có $\cos(AB, BD) = \dfrac{|4m+3n|}{5\sqrt{m^2+n^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow m = -2n$ hoặc $m = -\frac{2}{11}n$.

Chọn $m = 2$ và $n = -1$ hoặc $m = 2$ và $n = -11$ ta được PT $BD: 2x - y - 3 = 0$ hoặc $2x - 11y + 7 = 0$.

Do B có tung độ dương và $B = AB \cap BD$ nên $B\left(-\frac{1}{5};\ \frac{3}{5}\right)$. Từ $\overline{BP} = 5\overline{BI} \Rightarrow P\left(\frac{54}{5};\ \frac{13}{5}\right)$.

Câu 8. ĐK: $x \geq 2$ (*)

PT thứ hai của hệ có thể viết lại dưới dạng $4y = (x+y-2)^2 \Rightarrow y \geq 0$ (**)

Đặt $t = \sqrt[4]{x-2}$ ($t \geq 0$), PT thứ nhất của hệ trở thành $t + \sqrt{t^4+5} = y + \sqrt{y^4+5}$ (1)

Xét hàm số $f(u) = u + \sqrt{u^4+5}$, $u \geq 0$. Từ (1) suy ra $t = y \Leftrightarrow x = y^4 + 2$ (2) (do hàm số $f(u)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$).

Thế (2) vào PT thứ hai của hệ được $y\left(y^7 + 2y^4 + y - 4\right) = 0$ (3)

Lí luận PT (3) có nghiệm $y = 0$ hoặc $y = 1$.

Đối chiếu với ĐK (*) và (**), suy ra HPT đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(2; 0)$, $(3; 1)$.

Câu 9. Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{2b}$, $z = \frac{1}{3c}$, do $abc = \frac{1}{6}$ nên $xyz = 1$. Thay vào biểu thức P được

$$P = \frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y+1}{8} + \frac{z+1}{8} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^3}{(y+1)(z+1)}\cdot\frac{y+1}{8}\cdot\frac{z+1}{8}} = \frac{3x}{4}.$$

Cùng với hai BĐT tương tự, sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương x, y, z ta được $P \geq \frac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{3}.$$

Vậy GTNN của P là $\frac{3}{4}$, đạt được khi

$$(a;\ b;\ c) = \left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right).$$

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 3

(*Thời gian làm bài:* 180 *phút*)

Câu 1 (*1 điểm*). Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m-1)x+1$ có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi $m=1$.

2) Tìm m để đồ thị (C_m) cắt đường thẳng $y=x+1$ tại ba điểm $A(0;1)$, B, C sao cho $BC=\sqrt{10}$.

Câu 2 (*1 điểm*). Giải phương trình :

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}+\frac{4+2\sin 2x}{\sin 2x}-2\sqrt{3}=2(\cot x+1).$$

Câu 3 (*1 điểm*). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x; y=x(3+\tan^2 x); x=\frac{\pi}{4}$.

Câu 4 (*2 điểm*)

1) Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2\mathrm{i}+1|=|\mathrm{i}z+\mathrm{i}-1|$.

2) Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+4}^2+C_{n+4}^2=149.$$

Câu 5 (*1 điểm*). Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$,

$d_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$ và $d_3:\begin{cases}x=-2t\\ y=-1-4t\\ z=-1+2t\end{cases}$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d_2 và cắt d_1, d_3 lần lượt tại A, B sao cho $AB=\sqrt{13}$.

Câu 6 (*1 điểm*). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD}=60^o$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

Câu 7 (*1 điểm*). Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình: $(x-2)^2+(y-3)^2=26$. $G\left(1;\frac{8}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác và $M(7;2)$ nằm trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC; $M\neq A$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng $y_B>y_C$.

Câu 8 (*1 điểm*). Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)=1\\ \left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2-1}\right)^2+8\sqrt{y-x+4}=17.\end{cases}$$

Câu 9 (*1 điểm*). Cho các số thực $a,b\in(0;1)$ thỏa mãn $a^2+b^2=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{8(1-a)}{1+a}+9\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}.$$

NGUYỄN TẤT THU

(*GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai*)

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

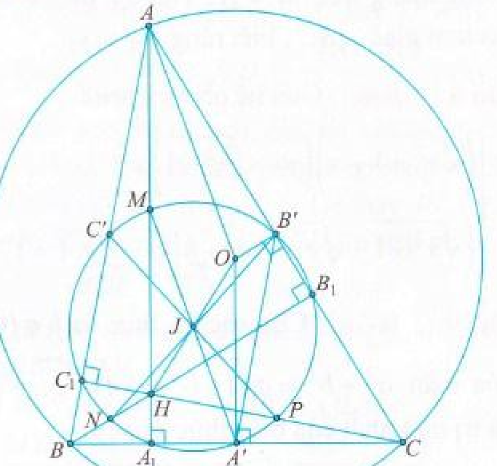
TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRÒN EULER VÀ MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Vũ Công Minh (*GV. THCS Hồng Bàng, Hải Phòng*)

Chúng ta biết rằng đường tròn Euler của tam giác là đường tròn đi qua chín điểm: trung điểm các cạnh của tam giác; chân đường cao hạ từ ba đỉnh của tam giác xuống cạnh đối diện; trung điểm của các đoạn thẳng nối trực tâm của tam giác tới các đỉnh. Bài viết này xin trình bày một số bài toán liên quan tới đường tròn đặc biệt này.

Trước hết ta có các tính chất về đường tròn Euler:

***Tính chất 1**: Cho tam giác ABC, các đường cao AA_1; BB_1; CC_1 cắt nhau tại H. Gọi A'; B'; C'; M; N; P lần lượt là trung điểm của BC; AC; AB; HA; HB; HC. Khi đó chín điểm: A'; B'; C'; A_1; B_1; C_1; M; N; P cùng nằm trên một đường tròn (gọi là "đường tròn chín điểm Euler" hay gọi tắt là "đường tròn Euler" của tam giác ABC).*



Hình 1

***Chứng minh** (h. 1)* Ta có $MN // AB$; $NA' // CH$. Từ đó $MN \perp NA'$ hay $\widehat{MNA'} = 90^o$. Tương tự $\widehat{MPA'} = 90^o$; $\widehat{MB'A'} = 90^o$; $\widehat{MC'A'} = 90^o$.

Mặt khác theo tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ta có $MA = MB_1$; $A'B_1 = A'C$ nên ΔMAB_1 và $\Delta A'B_1C$ là các tam giác cân.

Do đó: $\widehat{AB_1M} + \widehat{A'B_1C} = \widehat{MAB_1} + \widehat{B_1CA'} = 90^o$.

Suy ra: $\widehat{MB_1A'} = 90^o$. Tương tự $\widehat{MC_1A'} = 90^o$.

Như vậy 7 điểm B'; C'; A_1; B_1; C_1; N; P cùng nhìn MA' dưới một góc vuông. Vậy chín điểm A'; B'; C'; A_1; B_1; C_1; M; N; P cùng nằm trên đường tròn đường kính MA'. ❐

Nhận xét: Vì vai trò của các đoạn thẳng MA'; NB'; PC' là giống nhau nên NB'; PC' cũng là đường kính đường tròn Euler của tam giác ABC. Như vậy, là các đường thẳng A'M; B'N; C'P đồng quy tại tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

***Tính chất 2:** Tâm đường tròn Euler của tam giác là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác đó.*

***Chứng minh** (h. 1)* Gọi J và O lần lượt là tâm đường tròn Euler và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Dễ dàng chứng minh $\Delta HAB \backsim \Delta OA'B'$ (g.g). Từ đó: $\dfrac{OA'}{HA} = \dfrac{B'A'}{BA} = \dfrac{1}{2}$ hay $OA' = MH$. Tứ giác MOA'H là hình bình hành, mà J là trung điểm của MA' nên J là trung điểm của OH. ❐

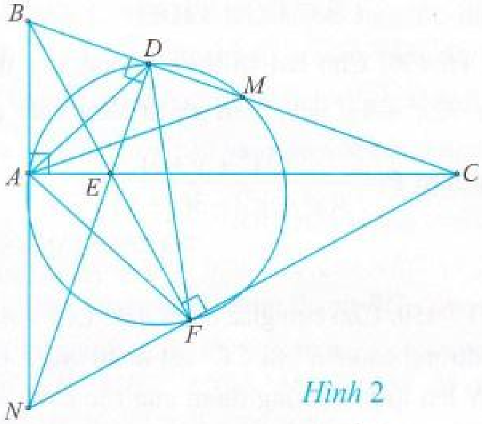
Nhận xét

1) Theo tính chất 2, tâm đường tròn Euler của tam giác nằm trên đường thẳng Euler của tam giác đó. (Đường thẳng Euler là đường thẳng đi qua ba điểm: trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác).

2) Bán kính đường tròn Euler của tam giác bằng một nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Ta sẽ áp dụng các tính chất đường tròn Euler vào giải một số bài toán sau:

❍Bài toán 1. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm D trên đoạn thẳng BM. Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt đoạn thẳng AC tại E. Gọi F là giao điểm của tia BE và đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM sao cho E nằm giữa B và F. Chứng minh rằng $\widehat{DAE} = \widehat{FAE}$.*



Hình 2

Lời giải (*h.* 2). Gọi N là giao điểm của DE và AB. Thấy rằng E là trực tâm tam giác BCN nên $BE \perp NC$. Ta có đường tròn đi qua ba điểm A, D, M chính là đường tròn Euler của tam giác BNC, mà BE cắt đường tròn trên tại F. Vậy F là chân đường cao hạ từ B xuống NC. Các tứ giác $BDEA$; $BDFN$; $AEFN$ nội tiếp nên:

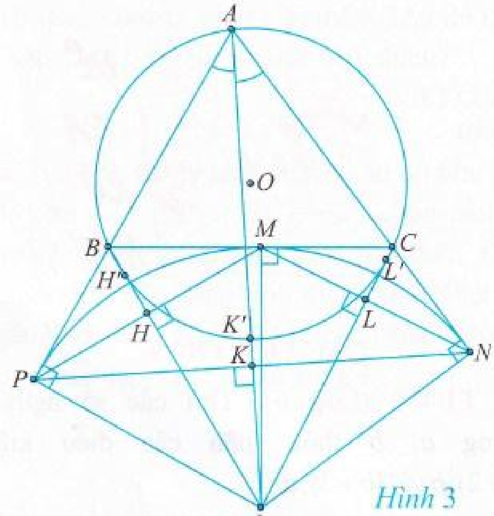
$\widehat{DAE} = \widehat{DBE} = \widehat{FNE} = \widehat{FAE}$. ❒

Nhận xét: Chứng minh tương tự ta có DE là tia phân giác của góc ADF. Như vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADF. DB và DC lần lượt là tia phân giác ngoài góc D của tam giác ADF. Từ đó B và C lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc F và góc A của tam giác ADF. Ta có tính chất: *"Đường tròn ngoại tiếp của tam giác đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn bàng tiếp tam giác đó."*

✪Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi I là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của I lên BC, CA, AB. Chứng minh tâm đường tròn Euler của tam giác MNP nằm trên đường thẳng OI.*

Lời giải (*h.* 3). Trước hết ta xét bổ đề sau:

Cho ba tia chung gốc Ox, Oy, Oz. Lấy các điểm A và A' trên tia Ox, B và B' trên tia Oy, C và C' trên tia Oz sao cho A, B, C không thẳng hàng; A', B', C' không thẳng hàng và $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OC'}{OC}$. Khi đó ba điểm O, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ thẳng hàng. (*Bạn đọc tự chứng minh*).



Hình 3

Quay trở lại bài toán:

Gọi H, K, L lần lượt là giao điểm của BI và MP, AI và NP, CI và MN. H', K', L' lần lượt là giao điểm của IB, IA, IC với đường tròn (O). Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $IK.IA = IH.IB = IL.IC$ $(= IP^2 = IM^2)$.

Mặt khác $IK'.IA = IH'.IB = IL'.IC$.

Vậy $\dfrac{IK}{IK'} = \dfrac{IH}{IH'} = \dfrac{IL}{IL'}$. Theo bổ đề trên ta có điểm I, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HKL, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $H'K'L'$ thẳng hàng. Để ý rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HKL là tâm đường tròn Euler của tam giác MNP, đường tròn ngoại tiếp tam giác $H'K'L'$ là đường tròn (O). Từ đó ta có điều phải chứng minh. ❒

✪Bài toán 3. *Cho tam giác ABC có trực tâm H và một đường thẳng d bất kỳ qua tâm đường tròn Euler của tam giác. Giả sử A và H nằm về một phía so với d, B và C nằm về một phía so với d. Chứng minh tổng khoảng cách từ A và H tới d bằng tổng khoảng cách từ B và C tới d.*

Lời giải (*h.* 4). Gọi A' và M lần lượt là trung điểm của BC và HA; I, K, I_1, K_1, I_2, K_2 lần lượt là hình chiếu của A', M, B, C, H, A lên d. Theo tính chất đường trung bình của hình thang ta có $BI_1 + CK_1 = 2A'I$; $HI_2 + AK_2 = 2MK$.

Để ý rằng vì d đi qua tâm đường tròn Euler tam giác ABC cũng là trung điểm của MA' nên $MK = A'I$. Từ đó $BI_1 + CK_1 = HI_2 + AK_2$. ❒

(*Xem tiếp trang* 30)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/450 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn các điều kiện: $(a+2) \vdots b$ và $(b+3) \vdots a$.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN
(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T2/450 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A, E là một điểm trên cạnh BC sao cho $EC = 2EB$. Chứng minh rằng

$$AC^2 = 3(EC^2 - EA^2).$$

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Bài T3/450. Giải phương trình

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{4x} + \frac{3x}{2x^2+2}.$$

ĐÀO QUỐC DŨNG
(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

Bài T4/450. Cho BC là dây cung của đường tròn tâm O bán kính R và $BC = R$. A là một điểm trên cung lớn BC $(A \neq B, A \neq C)$, M và N là các điểm trên dây cung AC sao cho $AC = 2AN = \frac{3}{2}AM$. Vẽ $MP \perp AB$ $(P \in AB)$. Chứng minh ba điểm P, O, N thẳng hàng.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên – Huế)

Bài T5/450. Biết phương trình

$$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0 \ (a \neq 0)$$

có ba nghiệm thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (1-2ab)\dfrac{b}{a^2}$.

NGUYỄN NHƯ HUYỀN
(GV CĐSP Hà Giang)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/450. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $32x^6 + 4y^3 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{(2x^2+y+3)^3}{3(x^2+y^2)-3(x+y)+2}$.

TRƯƠNG TẤN SANG
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/450. Cho tam giác nhọn ABC $(AB > AC)$, các đường cao BB' và CC' cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. AH cắt $B'C'$ ở E, AO cắt MN ở F. Chứng minh rằng $EF \parallel OH$.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài T8/450. Cho các số dương a, b, c. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}-3 \geq k\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-1\right)$.

VÕ QUỐC BÁ CẨN
(Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/450. Giải phương trình sau trong tập hợp số nguyên dương:

$$\frac{x^2(x+y)(x+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2(y+z)(y+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2(z+x)(z+y)}{(z-x)(z-y)} = 2160 + (x+y-z)^2$$

biết ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng.

BÙI QUANG TRƯỜNG
(GV ĐHXD Hà Nội)

Bài T10/450. Cho một bảng ô vuông kích thước 999×999, các ô được tô bởi một trong hai màu Trắng hoặc Đỏ. Giả sử T là số bộ (C_1, C_2, C_3) các ô mà hai ô đầu trong cùng một hàng và hai ô cuối trong cùng một cột, với C_1 và C_3 màu Trắng, C_2 màu Đỏ. Tìm giá trị lớn nhất của T.

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/4. Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$ và số nguyên tố p sao cho đa thức $f(x) = x^n - px + p^2$ phân tích được thành tích của hai đa thức khác hằng số với hệ số nguyên.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T12/450. Cho tam giác đều ABC và điểm M không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB.

Chứng minh rằng: Đường thẳng Euler của các tam giác MBC, MCA, MAB hoặc có điểm chung hoặc đôi một song song.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

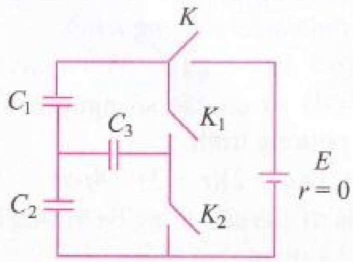
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/450. Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng, nguồn S phát bức xạ đơn sắc có bước sóng λ, màn quan sát cách mặt phẳng hai khe một khoảng không đổi D, khoảng cách giữa hai khe $S_1S_2 = a$ có thể thay đổi (nhưng S_1 và S_2 luôn cách đều S). Xét điểm M trên màn, lúc đầu là vân sáng bậc 4, nếu lần lượt giảm hoặc tăng khoảng cách S_1S_2 một lượng Δa thì tại đó là vân sáng bậc k và bậc $3k$. Nếu tăng khoảng cách S_1S_2 thêm $2\Delta a$ thì tại M là vân sáng hay vân tối bậc bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG

(Hà Nội)

Bài L2/450. Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Cho $C_3 = 2C_1 = 2C_2 = 2C$. Ban đầu các khoá K ngắt, các tụ điện chưa tích điện. Đóng K. Sau khi cân bằng tĩnh điện được thiết lập, ngắt K và đóng K_1. Sau khi cân bằng tĩnh điện được thiết lập, ngắt K_1 và đóng K_2.



1. Tìm điện tích các tụ điện sau khi cân bằng tĩnh điện được thiết lập.
2. Tìm nhiệt lượng tổng cộng đã toả ra trong các quá trình đó.

VŨ THANH KHIẾT

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/450 (For 6th grade). Find all positive integers a and b such that $(a+2)\,\vdots\, b$ and $(b+3)\,\vdots\, a$.

Problem T2/450 (For 7th grade). Given a right triangle ABC with the right angle A. Choose E on the side BC such that $EC = 2EB$. Prove that $AC^2 = 3(EC^2 - EA^2)$.

Problem T3/450. Solve the following equation $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{4x} + \dfrac{3x}{2x^2+2}$.

Problem T4/450. Let BC be a chord of a circle with center O and radius R. Assume that $BC = R$. Let A be a point on the major arc BC $(A \neq B, A \neq C)$, and M, N points on the chord AC such that $AC = 2AN = \dfrac{3}{2}AM$. Choose P on AB such that MP is perpendicular to AB. Prove that three points P, O, and N are collinear.

Problem T5/450. Assume that the equation

$$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0 \ (a \neq 0)$$

has three positive real solutions. Find the minimum value of the expression

$$M = (1-2ab)\frac{b}{a^2}.$$

(Xem tiếp trang 31)

Bài T1/446 (Lớp 6). *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn phương trình:*

$$(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr.$$

Lời giải. Giả sử có các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn phương trình

$$(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr \qquad (1)$$

Xét các giá trị của số r trong ba trường hợp sau:

a) Nếu $r = 2$ thì (1) trở thành

$$5(p+1)(q+2) = 8pq \qquad (2)$$

Vì $(5, 8) = 1$ nên 5 phải là ước của số nguyên tố p hoặc số nguyên tố q, do đó $p = 5$ hoặc $q = 5$.

• Với $p = 5$, thay vào (2) thì được $q = 6$ (không thỏa mãn).

• Với $q = 5$, thay vào (2) thì được $p = 7$ (thỏa mãn).

b) Nếu $r = 3$ thì (1) trở thành $(p+1)(q+2) = 2pq$. Từ đó $pq - 2p - q = 2$, hay là

$$(p-1)(q-2) = 4 = 1.4 = 2.2.$$

Do p, q đều là số nguyên tố nên $(q-2)$ khác 2, 4 suy ra $q = 3$ và $p = 5$ (thỏa mãn).

c) Nếu $r > 3$ thì từ (1) có

$4pqr = (p+1)(q+2)(r+3) < 2r(p+1)(q+2)$, suy ra $2pq < (p+1)(q+2)$ hay là

$$(p-1)(q-2) < 4.$$

Từ đó mỗi thừa số ở vế trái nhỏ hơn 4, suy ra $p < 5$. Do p là số nguyên tố nên $p = 2$ hoặc $p = 3$.

• Với $p = 2$, thay vào (1) được $3(q+2)(r+3) = 8qr$. Vì $(3, 8) = 1$ nên 3 phải là ước của số nguyên tố q hoặc số nguyên tố r, nhưng $r > 3$ nên $q = 3$ và $r = 5$ (thỏa mãn).

• Với $p = 3$, thay vào (1) được $(q+2)(r+3) = 3qr$. Từ đó $2pq - 3q - 2r = 6$, hay là

$(q-1)(2r-3) = 9 = 1.9 = 3.3$, mà $2r - 3 > 3$ nên $2r - 3 = 9$ và $q - 1 = 1$, tức là $q = 2$ và $r = 6$ (không thỏa mãn).

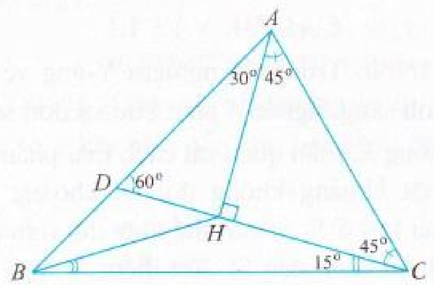
Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $(p; q; r)$ là $(7; 5; 2)$, $(5; 3; 3)$ và $(2; 3; 5)$. ❒

➢ ***Nhận xét.*** Một số bạn sau có lời giải đúng nhưng phép thử nhiều hơn: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền*, 6A4, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Thái Bá Bảo*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ**: *Nguyễn Thùy Dương*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Ngãi**: *Lê Tuấn Kiệt*, 6A, *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A,THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

Bài T2/446 (Lớp 7). *Cho tam giác ABC có* $\widehat{A} = 75^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. *Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho* $\widehat{ACD} = 45^\circ$. *Chứng minh rằng DA = 2DB.*

Lời giải



Từ giả thiết suy ra $\widehat{ACB} = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$, $\widehat{BCD} = 15^\circ$ và $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Hạ $AH \perp DC$ ($H \in DC$), ta có ΔHAC vuông cân tại H, nên $\widehat{HCA} = \widehat{HAC} = 45^\circ$ và $HA = HC$, suy ra $\widehat{HAD} = 30^\circ$. Trong tam giác vuông AHD có

$$HD = \frac{1}{2}AD \text{ hay } AD = 2HD \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh $HB = HA = HC$. Thật vậy, giả sử $HB > HA$ $(= HC)$. Khi đó trong ΔHAB

có $\widehat{HBA} < \widehat{HAB}$ (2)

trong ΔHBC có $\widehat{HBC} < \widehat{HCB}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra

$$\widehat{ABC} = \widehat{HBA} + \widehat{HBC} < \widehat{HAB} + \widehat{HCB} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ,$$

tức là $\widehat{ABC} < 45^\circ$: Vô lí.

Tương tự, không thể xảy ra $HB < HA$.

Vậy $HB = HA = HC$. Từ đó ta có

$$\widehat{HBC} = \widehat{HCB} = 15^\circ, \ \widehat{DHB} = 30^\circ = \widehat{DBH}$$

$\Rightarrow \Delta DHB$ cân tại D và $DB = DH$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $AD = 2DB$ (đpcm). ❒

➢ ***Nhận xét***

1) Nhiều bạn đã đưa ra lời giải khác nhưng đều dùng phương pháp chứng minh gián tiếp, chẳng hạn gọi *O* là giao điểm ba đường trung trực của tam giác *ABC* rồi chứng minh *O* trùng với *H*.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Vũ Linh Chi*, 7A$_1$, *Nguyễn Thuỳ Dương, Bùi Quang Sáng*, 7A$_3$, THCS Lâm Thao; **Thanh Hoá:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 6C, *Nguyễn Văn Mạnh, Trần Lê Hiệp, Nguyễn Thị Như Quỳnh A, Nguyễn Thị Như Quỳnh B*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Trọng Bằng*, 7A$_2$, THCS T.T. Quán Hành, Nghi Lộc; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đình Nhật*, 7A, THCS T.T. Cẩm Xuyên; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Lê Hoàng Duyên, Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/446. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{x+y+2}+x+y=2(x^2+y^2) & (1)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} & (2)\end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x+y\ge -2;\ xy\ne 0$. (*)

Ta có (2) $\Leftrightarrow xy(x+y)=x^2+y^2$. Từ đó:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+y+2}+x+y=2xy(x+y)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+2}=(x+y)(2xy-1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+2=(x+y)^2(2xy-1)^2 & (3)\\ (x+y)(2xy-1)\ge 0 & (**)\end{cases}$$

Tiếp tục biến đổi, ta có (3) tương đương với:

$$x+y+2=(x^2+y^2+2xy)(4x^2y^2-4xy+1)$$
$$\Leftrightarrow x+y+2=[xy(x+y)+2xy](4x^2y^2-4xy+1)$$
$$\Leftrightarrow x+y+2=xy(x+y+2)(4x^2y^2-4xy+1)$$
$$\Leftrightarrow (x+y+2)(4x^3y^3-4x^2y^2+xy-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y+2)(xy-1)(4x^2y^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y+2=0\\ xy-1=0\end{array}\right. \text{ (do } 4x^2y^2+1\ne 0).$$

- Nếu $x+y+2=0$ thì $x+y=-2$, ta có:

$(1)\Leftrightarrow -2=2(x^2+y^2)$, không tồn tại x, y.

- Nếu $xy-1=0$ thì $xy=1$, ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+y+2}+x+y=2xy(x+y)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+2}+x+y=2(x+y)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+2}=x+y\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+2=(x+y)^2\\ x+y\ge 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-(x+y)-2=0\\ x+y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x+y=2.$$

Với $\begin{cases}xy=1\\ x+y=2\end{cases}\Rightarrow x=y=1$ (thỏa mãn (*), (**)).

Vậy HPT có nghiệm là $(x; y) = (1; 1)$.

➢ ***Nhận xét***

1) Ngoài cách giải trên, nhiều bạn còn sử dụng các cách biến đổi, đặt ẩn phụ, sử dụng bất đẳng thức và đều cho lời giải rõ ràng, mạch lạc và ngắn gọn.

2) Hoan nghênh các bạn có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Bùi Thị Liễu Dương*, 8A$_4$; *Đàm Tuấn Minh*; *Nguyễn Hồng Anh*, 9A$_1$, THCS Yên Lạc; *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hoàng Anh*, 8C, THCS Văn Lang, Việt Trì; *Trần Quốc Lập*, 8A3, *Nguyễn Anh Hào*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Quảng Ngãi:** *Võ Thành Hy*, 9A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Quảng Trị:** *Trần Thị My Na*, 9A, THCS TT Hải Lăng; **Bình Định:** *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn; **Nam Định:** *Nguyễn Hoàng Huy*, 9A2, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Hưng Yên:** *Phạm Tiến Duật*, 9A, THCS Bình Minh, Khoái Châu; **Cần Thơ:** *Triệu Phú Hữu*, 9A2, THCS Thốt Nốt, quận Thốt Nốt, TP. Cần Thơ; **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Thanh*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bình Dương:** *Phạm Ngọc Trinh*, 9A9, THCS Chu Văn An; **Đà Nẵng:** *Trần Nhân Trung*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/446. *Cho tam giác ABC có (I), (J) lần lượt là đường tròn nội tiếp, đường tròn bàng tiếp của góc A. Đường tròn (J) lần lượt tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng JD cắt đường thẳng EF tại N. Đường thẳng qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt đường thẳng AN tại P. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MN = MP.*

Lời giải. *Cách 1.* Gọi $K=AJ\cap BC$.

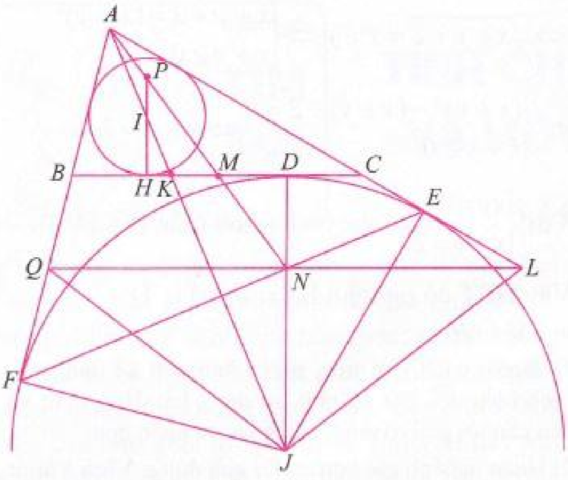
• Ta có tứ giác *AEJF* nội tiếp nên

$$\widehat{NEJ}=\widehat{KAB}=\widehat{KAC} \quad (1)$$

• Tứ giác *JECD* nội tiếp nên $\widehat{ACK}=\widehat{NJE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta NJE \backsim \Delta KCA$, suy ra

$$\frac{NE}{JE}=\frac{AK}{AC} \quad (3)$$



Tương tự ta có $\dfrac{NF}{JF}=\dfrac{AK}{AB}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{NE}{NF}=\dfrac{AB}{AC}$.

Gọi $M'=AN\cap BC$, ta có

$$\frac{M'B}{M'C}=\frac{S_{ABM'}}{S_{ACM'}}=\frac{S_{ABM'}}{S_{ANF}}.\frac{S_{ANF}}{S_{ANE}}.\frac{S_{ANE}}{S_{ACM'}}$$

$$=\frac{AB.AM'}{AN.AF}.\frac{NF}{NE}.\frac{AN.AE}{AC.AM'}=\frac{AB}{AC}.\frac{NF}{NE}=1.$$

Suy ra M' là trung điểm của BC hay $M'\equiv M$.

Mặt khác, do $MH=MD=\dfrac{|AB-AC|}{2}$, suy ra $\Delta PHM=\Delta NDM$ (g.c.g), dẫn tới $MN=MP$.

Cách 2. Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC thứ tự tại Q, L. Dễ thấy $JN\perp QL$. Do các tứ giác $JNQF$ và $JNEL$ nội tiếp nên có

$$\widehat{JQL}=\widehat{JFN}=\widehat{JEN}=\widehat{JLQ}.$$

Suy ra ΔJQL cân tại J, mà $JN\perp QL$, nên N là trung điểm QL.

Gọi $M'=AN\cap BC$. Do $BC\,//\,QL$ nên

$$\frac{M'B}{QN}=\frac{M'C}{LN}=\frac{AM'}{AN}\Rightarrow\frac{M'B}{M'C}=\frac{NQ}{NL}=1.$$

Do đó M' là trung điểm BC, hay $M'\equiv M$. Từ đó, tương tự *cách* 1, ta suy ra $MN=MP$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Chỉ có 10 bạn tham gia giải bài toán này và đều cho lời giải đúng. Các bạn dưới đây có lời giải tốt: **Thanh Hoá:** *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thảo Chi, Trần Quốc Lập*, 8A3, *Dương Gia Huy, Nguyễn Tiến Long*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Yên:** *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/446. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$x^3=4y^3+x^2y+y+13. \quad (1)$$

Lời giải. *Cách 1.* Đặt $x=2y+k$ $(k\in\mathbb{Z})$ rồi thay vào phương trình (1) ta có

$(2y+k)^3=4y^3+(2y+k)^2y+y+13$

$\Leftrightarrow 8ky^2+(5k^2-1)y+k^3-13=0$ (2)

• Nếu $k=0$ thì từ (2) suy ra $y=-13$, do đó $x=-26$.

• Xét $k\in\mathbb{N}^*$, xem (2) là phương trình bậc hai ẩn y, ta có $\Delta=(5k^2-1)^2-32k(k^3-13)$

$=-7k^4-10k^2+416k+1$

+ Với $k\geq 4$ thì $\Delta=-7k^4-10k^2+416k+1$ $<-7.4^3.k+416k+1=1-32k<0$, PT(2) vô nghiệm

+ Với $k\leq -1$ thì $\Delta=-7k^4-10k^2+416k+1$ $<416k+1<0$, PT (2) vô nghiệm.

+ Với $k=1$, thay vào (2) có $8y^2+4y-12=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-\dfrac{4}{3}\notin\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Từ $y=1$, suy ra $x=3$.

+ Với $k=2$ thì $\Delta=681$; Với $k=3$ thì $\Delta=592$, đều không là số chính phương nên (2) không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-26;-13)$ và $(3;1)$.

Cách 2. Biến đổi phương trình (1) thành

$$(x-2y)(x^2+xy+2y^2)=y+13$$

Nếu $y=-13$ thì tìm được $x=-26$.

Với $y\neq -13$: Vì x, y nguyên nên $x-y$ và $x^2+xy+2y^2$ là các ước số của $(y+13)$. Suy ra

$$|y+13|\geq x^2+xy+2y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{7y^2}{4}\geq\frac{7y^2}{4}.$$

Vì y nguyên nên $y\in\{-2,-1,0,1,2,3\}$.

Thay lần lượt các giá trị của y ở trên, ta thấy $y=1$ thì $x=3$ (thỏa mãn x là số nguyên).

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-26;-13)$ và $(3;1)$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Các bạn tham gia giải bài này không nhiều và trình bày tính toán còn dài dòng. Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Nguyễn Tiến Long, Dương Gia Huy*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa**: *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Quảng Bình**: *Phan Trần Hướng*, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Ngãi:** *Võ Thành Hy*, 9A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/446. *Cho* $f(x)=\dfrac{4^{x+2}}{4^x+2}$. *Tính*:

$$f(0)+f\left(\frac{1}{2014}\right)+f\left(\frac{2}{2014}\right)+...+f\left(\frac{2013}{2014}\right)+f(1).$$

Lời giải (*Theo số đông các bạn gửi bài về Tòa soạn*). Nhận thấy $f(1-x)=\dfrac{4^{3-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{32}{4^x+2}$

nên $f(x)+f(1-x)=\dfrac{16\left(4^x+2\right)}{4^x+2}=16$ (1)

Gọi S là tổng cần tính, ta có $S=\big(f(0)+f(1)\big)+$

$$\left(f\left(\frac{1}{2014}\right)+f\left(\frac{2013}{2014}\right)\right)+...+\left(f\left(\frac{1006}{2014}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{1008}{2014}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1007}{2014}\right)+f\left(\frac{1007}{2014}\right)\right)$$

Áp dụng công thức (1) cho từng đôi số hạng trong mỗi dấu ngoặc, có tất cả 1008 dấu ngoặc như vậy, ta được $S=1007.16+\dfrac{1}{2}.16=16120$.

Vậy $f(0)+f\left(\dfrac{1}{2014}\right)+f\left(\dfrac{2}{2014}\right)+...+$

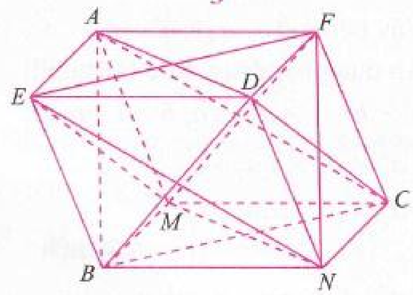
$$+f\left(\frac{2013}{2014}\right)+f(1)=16120.\ \square$$

➤ ***Nhận xét.*** Đây là bài toán khá cơ bản nên có nhiều bạn gửi bài giải về tòa soạn và hầu hết có kết quả đúng. Mấu chốt của lời giải là chứng minh $f(x)+f(1-x)=16$. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Xuân Dương, Đại Văn Thưởng, Nguyễn Hồng Anh*, 9A1, THCS Yên Lạc, *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên; **Long An**: *Phạm Quốc Thắng*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Biên Hòa**: *Hoàng Trọng Phúc*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Hưng Yên**: *Phạm Tiến Duật*, 9A, THCS Bình Minh, Khoái Châu; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Khải Hưng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi**: *Võ Thành Huy*, 9A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Phú Thọ**: *Trần Mạnh Cường, Nguyễn Hoàng Phi, Trần Quốc Lập*, 8A3, *Nguyễn Tiến Long, Dương Gia Huy*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Thái Nguyên**: *Trần Trọng Đạo*, 10 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Cần Thơ**: *Triệu Phú Hữu*, 9A2, THCS Thốt Nốt, TP Cần Thơ.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/446. *Cho tứ diện ABCD. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện AB và CD, AC và BD, AD và BC. Chứng minh rằng:* $V_{ABCD}\geq\dfrac{1}{3}d_1d_2d_3$.

Lời giải



Ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bởi hình hộp xiên $AEDF.MBNC$ (hình vẽ). Kí hiệu V là thể tích hình hộp này, d là khoảng cách. Khi đó dễ thấy $V_{BAED}=V_{DBNC}=V_{CDAF}=V_{MABC}=\dfrac{1}{6}V$.

Từ đó suy ra $V_{ABCD}=V-\dfrac{4}{6}V=\dfrac{1}{3}V$ (1)

Mặt khác, $V=S_{BMCN}.d((AEDF);(MBNC))$
$=S_{BMCN}.d(AD;BC)=S_{BMCN}.d_3=BN.d(M;BN).d_3$
$\geq BN.d(M;(EDNB)).d_3=BN.d(AM;(EDNB)).d_3$
$=BN.d((AMCF);(EDNB)).d_3=BN.d(AC;DB).d_3$
$=BN.d_2.d_3\geq d((AEBM);(FDNC)).d_2.d_3$
$=d(AB;CD).d_2.d_3=d_1.d_2.d_3.$

Do đó $V\geq d_1.d_2.d_3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $V_{ABCD}\geq\dfrac{1}{3}d_1d_2d_3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AEDF.MBNC$ là hình hộp chữ nhật, lúc đó $AB=CD\ (=FN)$, $AC=BD\ (=EN)$, $AD=BC\ (=MN)$, hay $ABCD$ là *tứ diện gần đều*. $\square$

➤ ***Nhận xét.*** Số lời giải gửi về Toà soạn không nhiều. Hai bạn sau có lời giải tương đối tốt: **Hà Nội:** *Trần Mạnh Hùng*, 12 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Quảng Ngãi:** *Đặng Thanh Huy*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Khiết.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/446. *Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thay đổi và thỏa mãn* $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}=1$ *(n là số nguyên dương không nhỏ hơn 2, cố định cho trước). Chứng minh rằng:*

$$a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+...+a_{n-1}^{a_n}+a_n^{a_1}+a_1+a_2+...+a_n>n^3+n.\ (1)$$

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*)

Từ giả thiết suy ra $a_k > 1$ với $k = 1,2,\ldots,n$ và

$$1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1a_2...a_n}}.$$

Vậy nên $a_1a_2\ldots a_n \geq n^n$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli

$a^b + b - 1 > ab, \forall a, b > 1$ suy ra

$$\begin{cases} a_1^{a_2}+a_2>a_1a_2+1 \\ a_2^{a_3}+a_3>a_2a_3+1 \\ ... \\ a_{n-1}^{a_n}+a_n>a_{n-1}a_n+1 \\ a_n^{a_1}+a_1>a_na_1+1 \end{cases}$$. Vậy nên

$$a_1^{a_2}+a_2^{a_3}+...+a_{n-1}^{a_n}+a_n^{a_1}+a_1+a_2+...+a_n$$
$$>a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1+n \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và sử dụng (2), ta được $a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1$

$$\geq n\sqrt[n]{(a_1a_2)(a_2a_3)...(a_na_1)}=n\sqrt[n]{(a_1a_2...a_n)^2}\geq n^3 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) cho ta đpcm.❒

➢ ***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Phạm Thị Kim Ngân*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Bến Tre:** *Nguyễn Xuân Đại*, 12T, THPT chuyên Bến Tre; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khiêm*, 10A1, THPT Quang Trung, Tây Sơn, *Võ Thế Duy*, 12A1, THPT Phù Mỹ 1, *Mai Tiến Luật*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Võ Thường Sơn*, 11A1, THPT Chuyên Lý Tự Trọng; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Ngọc Gia Văn*, 11CT, THPT Chuyên Nguyễn Du; **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11A2, THPT chuyên KHTN, *Trần Phương Nam*, 12A13, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, *Vũ Bá Sang*, 11TA, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Tĩnh:** *Trần Hậu Mạnh Cường*, 12T1, *Phạm Quốc Cường*, *Võ Duy Khánh*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Phạm Việt Anh*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu 1, Nghệ An; **Long An:** *Châu Hòa Nhân*, 12T2, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** *Bùi Trung Dũng*, *Ông Tùng Dương*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** *Nguyễn Anh Hào*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Quảng Bình:** *Trần Nam Quang Trung*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thanh Hóa:** *Lê Hùng Cường*, 12A7, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Huy*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** *Phạm Văn Huy*, 11H4, THPT Vũng Tàu; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/446. *Giả sử T là tập hợp gồm n phần tử. Xét các tập con khác nhau của T sao cho mỗi tập con này có ba phần tử và không có hai tập con nào rời nhau. Hãy tìm số lớn nhất các tập con khác nhau của T.*

Lời giải. (Theo bạn *Vũ Bá Sang*, 11Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, ***Hà Nội***)

Gọi $k(n)$ là số cần tìm.

Khi $3 \leq n \leq 5$ rõ ràng tất cả các tập con gồm 3 phần tử của T đều đôi một có phần tử chung. Do đó $k(n) = C_n^3$ nếu $3 \leq n \leq 5$.

Xét $n \geq 6$. Không giảm tổng quát giả sử $T = \{1, 2, ..., n\}$. Ta xét C_{n-1}^2 tập con 2 phần tử của tập $\{2, 3, ..., n\}$. Với mỗi tập con A của $\{2, 3, ..., n\}$ ta xét tập $A \cup \{1\}$ có 3 phần tử. Rõ ràng các tập có 3 phần tử dạng $A \cup \{1\}$ với A là tập con có 2 phần tử của $\{2, 3, ..., n\}$ thoả mãn điều kiện đề bài. Do vậy

$$k(n)\geq C_{n-1}^2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh $k(n) \leq C_{n-1}^2$ là bài toán được giải. Giả sử khẳng định $k(m) \leq C_{m-1}^2$ đúng với mọi số $6 \leq m \leq n$ (với $m = 6$ dễ thấy khẳng định đúng). Giả sử $\mathcal{S}$ là họ các tập con 3 phần tử thoả mãn điều kiện đề bài. Xét tập $A \in \mathcal{S}$, không giảm tổng quát, giả sử $A = \{1, 2, 3\}$. Nếu mọi $B \in \mathcal{S}$ đều chứa hai phần tử của A thì $|\mathcal{S}| = 1 + 3(n-3) < C_{n-1}^2$ (do $n \geq 7$). Giả sử có ít nhất tập $B \in \mathcal{S}$ chỉ chứa 1 phần tử của A và giả sử $B = \{1, 4, 5\}$. Nếu tất cả các tập của $\mathcal{S}$ đều chứa 1 thì $|\mathcal{S}| = C_{n-1}^2$.

Trái lại giả sử tập $C \in \mathcal{S}$ không chứa 1.

Vì $C \cap A \neq \varnothing$ và $C \cap B \neq \varnothing$ nên ta giả sử $C = \{2, 4, 6\}$. Để ý rằng

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-2)(n-3)}{2}=n-2.$$

Do đó nếu có không quá $n - 2$ tập chứa 7 thì do giả thiết quy nạp thì khẳng định đúng. Trái lại giả sử 7 thuộc về ít nhất $n - 1$ tập. Với mỗi tập như thế phải chứa 1, 2 hoặc 3.

Nếu nó chứa 1 thì nó phải chứa 2, 4 hoặc 6, điều này xảy ra nếu tập đó là $\{1, 2, 7\}$, $\{1, 4, 7\}$ hoặc $\{1, 6, 7\}$.

Nếu nó chứa 2 thì nó phải chứa 1, 4 hoặc 5. Như vậy có thêm hai khả năng nữa là các tập $\{2, 4, 7\}$ hoặc $\{2, 5, 7\}$.

Nếu nó chứa 3 thì nó phải chứa 1, 4, 5, do đó chỉ có 1 khả năng là $\{3, 4, 7\}$ (vì tập đó phải giao khác rỗng với các tập $\{1, 4, 5\}$ và $\{2, 4, 6\}$).

Như vậy chỉ có 6 khả năng cho các tập con chứa 7. Vì thế nếu $n - 2 \geq 6$ tức là $n \geq 8$ thì không có quá $n - 2$ tập chứa 7. Xét $n = 7$, $T = \{1, 2, \ldots, 7\}$ ta lí luận tương tự và đi đến kết luận rằng không quá $n - 2$ tập chứa 6. Vậy đáp số là $k(n) = \begin{cases} C_n^3 & 3 \leq n \leq 5 \\ C_{n-1}^2 & n \geq 6 \\ 0 & 1 \leq n < 3 \end{cases}$. ❒

➢ ***Nhận xét.*** Chỉ có 3 bạn tham gia giải và có duy nhất 1 lời giải đúng trên đây của bạn *Sang*.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/446. *Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các đa thức f(x) với hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên dương n, f(n) là ước của $p^n - 1$.*

Lời giải. Kí hiệu A là tập hợp tất cả các ước số nguyên của $p - 1$. Nhận xét rằng tất cả các đa thức hằng số, $f(x) \equiv b$, $b \in A$ thoả mãn bài toán (vì $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p^n - 1 \,\vdots\, (p-1) \,\vdots\, b$). Ta sẽ chứng minh đó là tất cả các đa thức thoả mãn bài toán. Phản chứng tồn tại đa thức $f(x)$ thoả mãn bài toán, đa thức $f(x)$ có bậc dương. Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$ và q là ước số nguyên tố bất kì của $f(n)$. Ta có $f(n+q) - f(n) \,\vdots\, (n+q-n) = q$. Kết hợp với $f(n) \,\vdots\, q \Rightarrow f(n+q) \,\vdots\, q$. Như vậy

$p^n - 1 \,\vdots\, f(n) \,\vdots\, q,\ p^{n+q} - 1 \,\vdots\, f(n+q) \,\vdots\, q$

$\Rightarrow p^{n+q} - 1 - (p^n - 1) = p^n(p^q - 1) \,\vdots\, q$.

Từ các sự kiện trên ta suy ra $p \neq q$, $p^q - 1 \,\vdots\, q$.

Mặt khác theo Định lí Fermat $p^q \equiv p \pmod q$

$\Rightarrow p^q - 1 - (p^q - p) = p - 1 \,\vdots\, q$ (1)

Xét $n \in \mathbb{N}^*$, $n - 1 \,\vdots\, (p-1)$. Số các số n như thế là vô hạn, trong khi đó A là tập hợp hữu hạn và đa thức $f(x)$ có bậc dương, suy ra có số n như vậy mà $f(n) \notin A$. Mặt khác $p^n - 1 = (p - 1).B$, trong đó $B = p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1 \equiv n \pmod{p-1}$

$\equiv 1 \pmod{p-1} \Rightarrow (p - 1, B) = 1$.

Do $f(n) \notin A \Rightarrow$ có ước số nguyên tố q của $f(n)$ mà $B \,\vdots\, q \Rightarrow p - 1 \not\vdots\, q$. Mâu thuẫn với (1). ❒

➢ **Nhận xét.** Đây là bài toán đa thức – số học hay, khó. Trong số các bạn gửi lời giải tới Toà soạn có ba bạn giải đúng: **Hà Nội:** *Nguyễn Việt Anh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Tĩnh:** *Trần Hậu Mạnh Cường*, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/446. *Kí hiệu [a] là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $[x].[y] = 30^4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = [x[x]] + [y[y]]$.*

Lời giải. Ta có: $[x].[y] = 30^4 \Rightarrow [x], [y] \neq 0$. Mà x, y dương nên: $x \geq [x] > 0$, $y \geq [y] > 0$. Kí hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của x, vậy: $0 \leq \{x\} = x - [x] < 1$.

Khi đó: $P = \left[\left([x] + \{x\}\right)[x]\right] + \left[\left([y] + \{y\}\right)[y]\right]$

$= [x]^2 + \left[\{x\}[x]\right] + [y]^2 + \left[\{y\}[y]\right] \geq 2[x][y] = 2.30^4$.

$$P = 2.30^4 \Leftrightarrow \begin{cases} [x] = [y] = 30^2 \\ \left[30^2\{x\}\right] = \left[30^2[y]\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [x] = [y] = 30^2 \\ 0 \leq \{x\}, \{y\} < \dfrac{1}{30^2} \end{cases} \Leftrightarrow x, y \in \left[30^2, 30^2 + \frac{1}{30^2}\right).$$

Sử dụng tính chất : Với $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $n[\alpha] \leq [n\alpha] \leq n[\alpha] + n - 1$ (1)

ta có:

$P = \left[x[x]\right] + \left[y[y]\right] \leq [x]^2 + [x] - 1 + [y]^2 + [y] - 1$

$= [x]^2 + [y]^2 + [x] + [y] - 2$ (2).

Do $[x] \geq 1, [y] \geq 1$ nên $\begin{cases} ([x]-1)([y]-1) \geq 0 \\ ([x]^2-1)([y]^2-1) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [x] + [y] \leq [x][y] + 1 = 30^4 + 1 \\ [x]^2 + [y]^2 \leq [x]^2[y]^2 + 1 = 30^8 + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P \leq 30^8 + 30^4$; $P = 30^8 + 30^4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [x] = 1 \text{ hoặc } [y] = 1 \\ [x[x]] = [x]^2 + [x] - 1 \\ [y[y]] = [y]^2 + [y] - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x] = 1 \text{ hoặc } [y] = 1 \\ [x] + 1 - \dfrac{1}{[x]} \leq x < [x] + 1 \\ [y] + 1 - \dfrac{1}{[y]} \leq y < [y] + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[1;2), y\in\left[30^4+1-\dfrac{1}{30^4};30^4+1\right) \\ x\in\left[30^4+1-\dfrac{1}{30^4};30^4+1\right), y\in[1;2) \end{array}\right..$$

Vậy $\max P=30^8+30^4$, $\min P=2.30^4$. ❐

➢ ***Nhận xét***

1) Sử dụng BĐT ở VT(1) ta cũng có đánh giá:

$$P\geq[x][x]+[y][y]=[x]^2+[y]^2\geq 2[x][y]=2.30^4.$$

2) Từ (2), có thể tìm GTLN của P bằng cách: Giả sử $x\leq y$, suy ra $x\in\left[1;30^2\right]$. Xét hàm số $f(t)=t^2+\dfrac{30^8}{t^2}+t+\dfrac{30^4}{t}-2$ với $t\in[1;30^2]$. Dùng BĐT Cauchy hoặc dùng đạo hàm, chứng minh được f nghịch biến trên $[1;30^2]$. Vậy $f(t)\leq f(1)=30^8+30^4$.

3) Các bạn tham gia giải bài này đều tìm ra đúng kết quả. Tuy nhiên khi tìm giá trị của x, y xảy ra max$P$, một số bạn còn bị nhầm. Ví dụ: Có bạn kết luận: $\max P=30^8+30^4$ khi $x=1, y=30^4+0{,}999$. Điều này không đúng vì

$$1\in[1;2),\ 30^4+0{,}999\notin\left[30^4+1-\frac{1}{30^4};30^4+1\right).$$

Tính chất (1) cũng như những tính chất khác về phần nguyên và phần lẻ, bạn đọc có thể xem thêm trong TH&TT số 449, 450 (T11, T12/2014).

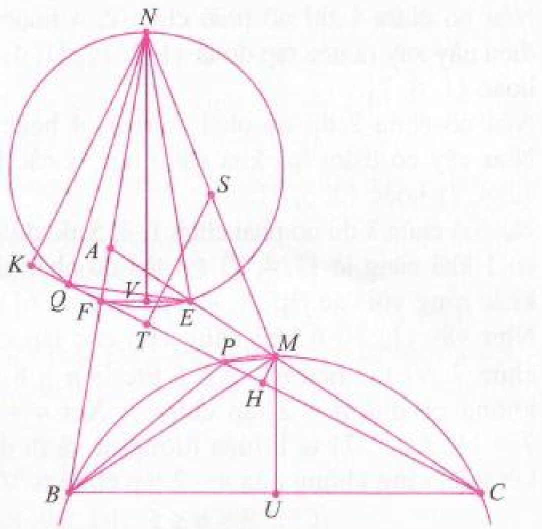
4) Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Trần Mạnh Hùng, Nguyễn Việt Anh*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ. **Thái Nguyên:** *Nguyễn Triều Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Nam Định:** *Nguyễn Hoàng Huy*, 9A2, THCS Trần Đăng Ninh. **Nghệ An:** *Phạm Việt Anh*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu I; *Hồ Xuân Hùng*, THPT Đô Lương I; **Long An:** *Nguyễn Bình An*, 10T2, THPT chuyên Long An.

TRẦN HỮU NAM

Bài T12/446. *Cho tam giác ABC. E, F lần lượt thuộc các đoạn CA, AB sao cho EF // BC. Trung trực của BC cắt AC tại M; trung trực của EF cắt AB tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM cắt CF tại P khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EFN cắt CF tại Q khác F. Chứng minh rằng trung trực của PQ đi qua trung điểm của MN.*

Lời giải (Theo bạn *Nguyễn Anh Hào, 9A1*, THCS Lâm Thao, ***Phú Thọ***).

Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của M, N trên CF; S, T, U, V theo thứ tự là trung điểm của MN, HK, BC, EF (hình vẽ).



Dễ thấy các tứ giác $MCBP$, $NEFQ$ nội tiếp.

Kết hợp với $\widehat{MHP}=\widehat{MUB}=90°=\widehat{NKQ}=\widehat{NVE}$, suy ra các cặp tam giác (MHP, MUB) và (NKQ, NVE) đồng dạng. Từ đó, chú ý rằng U, V theo thứ tự là trung điểm của BC, EF, suy ra

$$\begin{cases} HP=MP.\dfrac{HP}{MP}=MP.\dfrac{UB}{MB}=\dfrac{BC}{2}.\dfrac{MP}{MB} \\ KQ=NQ.\dfrac{KQ}{NQ}=NQ.\dfrac{VE}{NE}=\dfrac{EF}{2}.\dfrac{NQ}{NE} \end{cases} \quad (1)$$

Vì các tứ giác $MCBP$, $NEFQ$ nội tiếp và BC // EF nên $\begin{cases} \widehat{MBP}=\widehat{MCP}=\widehat{FCE};\widehat{PMB}=\widehat{PCB}=\widehat{EFC} \\ \widehat{NQE}=\widehat{NFE}=\widehat{CBF};\widehat{QNE}=\widehat{EFC}=\widehat{BCF} \end{cases}.$

Do đó các cặp tam giác (MBP, FCE) và (NQE, CBF) đồng dạng. Vậy $\dfrac{MP}{MB}=\dfrac{FE}{FC};\dfrac{NQ}{NE}=\dfrac{CB}{CF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HP=\dfrac{BC.EF}{2CF}=KQ$.

Kết hợp với $TP=TQ$, suy ra $TH=TK$. Kết hợp với MH // NK; $SM=SN$, suy ra ST // MH // NK. Điều đó có nghĩa là ST là đường trung trực của PQ (đpcm). ❐

➢ ***Nhận xét***. Bài toán này khó, ngoài bạn *Hào* không có bạn nào tham gia giải cả.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/446. *Trong một xi lanh cao, cách nhiệt, đặt thẳng đứng, ở dưới pittông có một lượng khí hêli ở nhiệt độ T_1 = 240K. Ở trên pittông,* *người ta đặt một vật nặng có khối lượng bằng một nửa khối lượng pittông. Sau đó người ta đột ngột lấy vật nặng đi và đợi cho hệ trở về trạng thái cân bằng. Xác định nhiệt độ của khí. Biết rằng bên trên pittông không có khí. Bỏ qua mọi ma sát và trao đổi nhiệt.*

Lời giải. Điều kiện cân bằng cơ học ở trạng thái đầu và cuối: $p_1S = \left(m + \dfrac{m}{2}\right)g, p_2S = mg,$

trong đó m là khối lượng của pittông.

Sau khi đặt các hệ thức trên vào các phương trình Clapeyron-Mendeleev tương ứng, ta được: $\dfrac{3}{2}mgh_1 = \nu RT_1, \quad mgh_2 = \nu RT_2.$

Sử dụng các hệ thức này và định luật bảo toàn năng lượng, ta có: $mgh_1 + \dfrac{3}{2}\nu RT_1 = mgh_2 + \dfrac{3}{2}\nu RT_2.$

Suy ra: $T_2 = \dfrac{13}{15}T_1 = 208\text{K}$. ❐

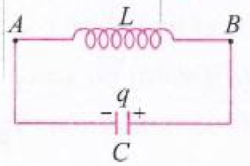
➢ ***Nhận xét***

1) Khi giải bài toán này, một sai lầm thường gặp là trong vế trái của phương trình bảo toàn năng lượng người giải thường viết thế năng ban đầu là $1{,}5mgh_1$, chứ không phải là mgh_1, tức là kể cả vật nặng nằm trên pittông. Điều này là không đúng, vì pittông bắt đầu chuyển động chỉ sau khi bỏ vật nặng này ra và hệ pittông – khí là một hệ kín.

2) Chỉ có bạn *Phạm Ngọc Nam* lớp 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định** có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/446. *Mạch dao động gồm tụ điện thuần dung kháng và cuộn cảm thuần điện cảm đang thực hiện dao động điện từ tự do. Tụ điện có điện tích cực đại Q_0 và cường độ dòng điện qua cuộn cảm có giá trị cực đại I_0. Chọn gốc thời gian ($t = 0$) là lúc điện tích tụ điện có độ lớn $|q| = \dfrac{Q_0}{2}$ và có dấu như hình vẽ. Xác định thời điểm dòng điện qua cuộn cảm có chiều từ A đến B và có độ lớn $|i| = \dfrac{I_0}{2}$.*



Lời giải. Vì mạch dao động LC lí tưởng, ta có: $q = Q_0\sin(\omega t + \varphi)$ và $i = I_0\cos(\omega t + \varphi)$ với $T = 2\pi\dfrac{Q_0}{I_0} \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{I_0}{Q_0}$.

Chọn chiều dương là chiều của dòng điện chạy qua cuộn cảm L là từ A đến B.

Tại thời điểm $t = 0$ thì $|q| = \dfrac{Q_0}{2} \Rightarrow |i_0| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}I_0$.

a) Tại thời điểm $t = 0$, dòng điện có chiều từ A sang B. Khi đó tụ nạp điện nên:

$$\begin{cases} i_0 = I_0\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}I_0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6}. \\ i' < 0 \end{cases}$$

Theo đầu bài ta có: $i = I_0\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{I_0}{2}$ (1)

Giải phương trình (1) ta được :

$$\begin{cases} t = \left(k + \dfrac{1}{12}\right)T,\ k = 0, 1, 2.... \\ t = \left(k - \dfrac{1}{4}\right)T;\ k = 1, 2, ... \end{cases}$$

b) Khi dòng điện có chiều từ B đến A. Lúc đó tụ phóng điện nên:

$$i_0 = I_0\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}I_0 \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

Theo đầu bài ta có: $i = I_0\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{I_0}{2}$ (2)

Giải phương trình (2) ta được :

$$\begin{cases} t = \left(k - \dfrac{1}{4}\right)T,\ k = 0, 1, 2.... \\ t = \left(k - \dfrac{7}{12}\right)T;\ k = 1, 2, ... \end{cases}$$

➢ ***Nhận xét.*** Bài này không bạn nào có lời giải đúng. Lời giải của bạn *Vũ Quang Huy*, 12B, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước** giải bằng cách dùng vòng tròn lượng giác, lời giải ngắn gọn. Tuy nhiên, lời giải của bạn chưa đầy đủ và chính xác.

ĐẶNG THANH HẢI

Kết quả cuộc thi VIẾT CHUYÊN ĐỀ TOÁN
CHÀO MỪNG 50 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

LTS. Cuộc thi viết chuyên đề Toán chào mừng 50 năm Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 1 năm 2014 đến tháng 10 năm 2014. Cuộc thi đã được các Thầy, cô giáo trên toàn quốc hưởng ứng. Có 65 bài viết chuyên đề thuộc các phân môn *Đại số*, *Số học*, *Hình học*, *Tổ hợp* gửi về Toà soạn. Sau đây là danh sách các tác giả đoạt giải.

☆ **Giải Nhất (1 giải)** *Đặng Thanh Hải*, GV THPT Triệu Quang Phục, Yên Mỹ, **Hưng Yên**.

☆ **Giải Nhì (2 giải)**

1. *Trần Xuân Đáng*, GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
2. *Nguyễn Tuấn Ngọc*, GV THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**.

☆ **Giải Ba (4 giải)**

1. *Nguyễn Văn Nho*, GV THPT Nguyễn Duy Trinh, **Nghệ An**.
2. *Lê Hồ Quý*, GV THPT Lê Lợi, **Kon Tum**.
3. *Trần Minh Ngọc*, SV K38, Khoa Toán-Tin ĐHSP TP. **Hồ Chí Minh**.
4. *Nguyễn Trường Sơn*, GV THPT chuyên Lương Văn Tuy, **Ninh Bình**.

☆ **Giải Khuyến khích (14 giải)**

1. *Lê Viết Ân*, 15, Xóm 2, Ngọc Anh, Phú Thượng, Phú Vang, **Thừa Thiên-Huế**.
2. *Nguyễn Văn Thiết*, GV THPT Vinh Xuân, Phú Vang, **Thừa Thiên-Huế**.
3. *Thái Nhật Phượng*, GV THPT Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hoà**.
4. *Chu Tuấn*, GV THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hoà, **Hà Nội**.
5. *Phạm Bắc Phú*, GV THPT A Hải Hậu, **Nam Định**.
6. *Nguyễn Việt Hùng*, GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG, **Hà Nội**.
7. *Vũ Hoàng Lâm*, Số 642 Lô 22, Lê Hồng Phong, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**.
8. *Phùng Chí Tự*, SV K60-CLC Khoa Toán, ĐHSP **Hà Nội**.
9. *Cao Hải Vân*, GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, **Gia Lai**.
10. *Trần Ngọc Duy*, GV THCS Nguyễn Bá Loan, Mộ Đức, **Quảng Ngãi**.
11. *Đào Chí Thanh*, GV THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.
12. *Hoàng Minh Quân*, GV THPT Ngọc Tảo, **Hà Nội**.
13. *Phạm Thị Việt Thái – Phạm Quốc Phong*, GV THPT Nghèn, Can Lộc, **Hà Tĩnh**.
14. *Trần Quốc Luật*, GV THPT chuyên **Hà Tĩnh**.

Cơ cấu giải thưởng:

Giải Nhất: Giấy chứng nhận, 1.000.000 đồng và 1 bộ sách Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (6 cuốn từ Quyển 1 đến Quyển 6).

Giải Nhì: Giấy chứng nhận, 700.000 đồng và 1 bộ sách Tuyển chọn.

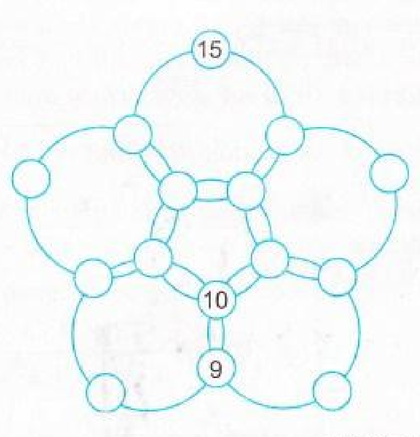
Giải Ba: Giấy chứng nhận, 500.000 đồng và 1 bộ sách Tuyển chọn.

Giải Khuyến khích: Giấy chứng nhận và 1 bộ sách Tuyển chọn.

Điền số vào hình hoa

Tờ báo *Toán học và Tuổi trẻ* đầu tiên ra mắt bạn đọc vào ngày **15.10.1964.**

Sau **50** năm, đến tháng **12.2014** đã xuất bản được **450** tờ tạp chí, trung bình là **9** tờ mỗi năm. Nhân dịp kỉ niệm **50** năm xuất bản Tạp chí TH&TT, mời các bạn giải bài toán điền các số nguyên từ **4** đến **18** (kể cả ba số đã ghi là **15**, **10** và **9**) vào hình hoa bên sao cho mỗi ô tròn chứa một số và tổng các số nằm trên một đường tròn bất kì đều bằng **50**.



PHI PHI (*Hà Nội*)

VỀ NHỮNG BẤT BIẾN TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

ĐỖ MINH KHOA (*Warszawa, Ba Lan*
Email: khoakarol@gmail.com)

Trong những năm gần đây, bài toán liên quan đến hình học tổ hợp xuất hiện nhiều trong các kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia, Vùng, Khu vực, Châu lục, và Quốc tế IMO. Thay vì đưa ra những bài tập đơn lẻ, bài báo này giới thiệu và tóm lược cơ sở của hình học tổ hợp và một phương pháp bất biến có vai trò quan trọng cho lời giải nhiều bài toán hay và khó nhằm đem đến bạn đọc một cách nhìn đầy đủ và toàn diện hơn. Bài báo này được chia làm ba phần: Phần I là giới thiệu và những bài toán về hình phẳng; Phần II là những bài toán về hình khối; Phần III là tuyển chọn những bài toán về hình học tổ hợp và một số bài toán mở liên quan. Hy vọng rằng, Phần III này sẽ đem đến bạn đọc một cách nhìn đầy đủ về hình học tổ hợp, và niềm đam mê sáng tạo toán học.

PHẦN I: Bài toán về hình phẳng

1. Mở đầu

Hình học tổ hợp và *hình học rời rạc* là hai lĩnh vực của hình học nghiên cứu những tính chất tổ hợp và các phương pháp kiến thiết cho các đối tượng hình học rời rạc. Có nhiều bài toán trong hình học rời rạc liên quan đến số lượng hữu hạn hay vô hạn các đối tượng hình học như: điểm, đường thẳng, mặt phẳng, đường tròn, mặt cầu, đa diện hay đa giác,… Chẳng hạn, những đối tượng vừa nêu có thể cắt nhau như thế nào, hay xắp sếp chúng ra sao để phủ một đối tượng khác lớn hơn,… Hình học rời rạc có sự giao thoa với hình học lồi và hình học tính toán, và có quan hệ mật thiết với những vấn đề như hình học hữu hạn, tối ưu tổ hợp, hình học số, hình học vi phân rời rạc, lý thuyết đồ thị, và topo tổ hợp.

Có thể nói rằng hình học rời rạc hiện đại được khởi đầu vào cuối thế kỷ thứ 19, mặc dầu trước đó đã có những nghiên cứu của *Cauchy* và *Kepler* về khối đa diện, phần giao của các hình phẳng, và các lát cắt trong không gian ba chiều. Những chủ đề được nghiên cứu khá sớm như: mật độ của gói các hình tròn bởi *Thue*, hình dạng chiếu bởi *Reye* và *Steinitz*, hình học của những số bởi *Minkowski*, và tô bản đồ bởi *Tait*, *Heawood*, và *Hadwiger*.

2. Bài toán trong mặt phẳng

Chúng ta bắt đầu từ một bài toán đơn giản.

Bài toán 2.1. *Một thanh sô cô la được chia thành 64 miếng vuông hình bàn cờ 8×8. Cần phải bẻ ít nhất bao nhiêu lần (theo mạch chia và không chồng các miếng lên nhau) để có được 64 miếng?*

Lời giải. Nhận thấy rằng sau mỗi lần bẻ thì ta có thêm đúng một miếng nhỏ hơn. Để có được 64 miếng, ta cần bẻ đúng 63 lần. ❒

Bài toán 2.2. *Bàn cờ ô vuông 8×8 được phủ bằng các thanh hình chữ nhật 1×3 (các thanh phủ không chồng lên nhau). Hỏi các ô ở vị trí như thế nào sẽ không bị phủ? (cần tối đa 21 thanh 1×3, khi đó sẽ phủ tối đa là 63 ô, luôn có một ô trống).*

Chứng minh. Tô màu như Hình 1: (r, w, b) := (đỏ, trắng, xanh). Nhận xét rằng khi đặt các thanh 1×3 lên bàn cờ thì mỗi thanh phủ ba ô, mỗi ô một màu. Sau khi phủ, số các ô khác màu đều là 21. ta suy ra thừa ô màu trắng, theo phép đối xứng và phép quay bàn cờ góc 90^o. ❒

Nhận xét 2.3. Ta thấy một bất biến màu trong cách tô như lời giải nêu trên. Thực ra, ta cũng có bất biến số, nếu thay việc tô màu bằng việc đánh dấu bởi các con số. Bạn đọc tự khám phá cách đánh số phù hợp.

r	w	b	r	w	b	r	w
w	b	r	w	b	r	w	b
b	r	w	b	r	w	b	r
r	w	b	r	w	b	r	w
w	b	r	w	b	r	w	b
b	r	w	b	r	w	b	r
r	w	b	r	w	b	r	w
w	b	r	w	b	r	w	b

Hình 1

Bài toán 2.4. *Dùng những viên gạch 2×2 và 3×3 để lát sân kích thước $n \times n$ ($n \geq 2$). Xác định điều kiện của sân $n \times n$ để lát được mà không phải cắt gạch?*

Lời giải. Trước hết, nhận xét rằng:

- Nếu n chẵn thì có thể dùng toàn gạch 2×2 để lát được.
- Nếu $n = 3k$ thì cũng lát được bằng gạch 3×3.

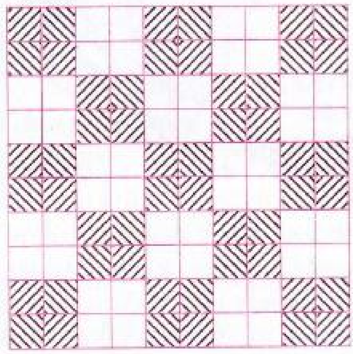
Ta sẽ chứng minh rằng, nếu n lẻ và không chia hết cho 3 thì không thể lát kín sân $n \times n$ bằng hai loại gạch trên.

Chẳng hạn, xét kích thước sân là 7×7. Ta tô màu đỏ cho các cột lẻ, tô màu xanh cho các cột chẵn. Cả thảy có 4 cột đỏ gồm $4 \times 7 = 28$ ô, và 3 cột xanh gồm $3 \times 7 = 21$ ô. Ta thấy rằng, viên 2×2 luôn phủ 2 ô màu đỏ và 2 ô màu xanh, và viên 3×3 phủ 3 ô đỏ và 6 ô xanh, hoặc phủ 6 ô đỏ và 3 ô xanh. Nếu sân 7×7 được phủ kín thì hiệu số các tổng của các ô đỏ và ô xanh là bội số của 3. Tuy nhiên, hiệu số của tổng các ô đỏ và tổng các ô xanh luôn là $4 \times 7 - 3 \times 7 = 7$.

Đối với $n \neq 7$, phép chứng minh hoàn toàn tương tự. Vậy kích thước sân phải là $2k \times 2k$ hoặc $3k \times 3k$. ❐

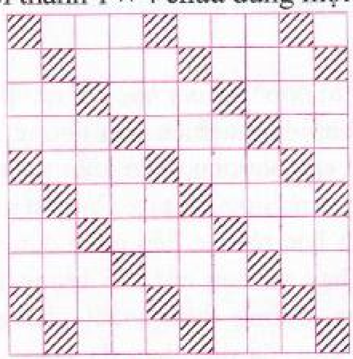
Bài toán 2.5. *Có thể chia bàn cờ 10×10 thành các hình có kích thước 1×4 không?*

Lời giải. Tô màu (trắng-đen) bàn cờ 10×10 hình mắt cáo với kích thước 2×2 (các ô màu xen kẽ nhau như Hình 2. Ta thấy một bất biến sau: mỗi thanh 1×4 luôn chứa đúng hai ô đen và hai ô trắng. Mặt khác, tổng số các ô đen bằng $13 \times 4 = 52$, và tổng các ô trắng bằng 48. Điều này vô lí.



Hình 2. Tô màu 2×2 cho bàn cờ 10×10

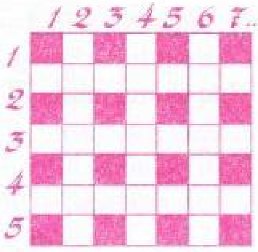
Bạn đọc tham khảo cách tô màu (đen-trắng) như Hình 3 và giải bài toán nêu trên theo cách khác do cách tô màu này cũng có một bất biến: mỗi thanh 1×4 chứa đúng một ô đen. ❐



Hình 3. Một cách tô màu cho bàn cờ 10×10

Bài toán 2.6. *Sảnh hình chữ nhật $m \times n$ của một tòa nhà được lát bằng một số viên gạch kích thước 2×2 và 1×4. Nếu bị vỡ một số lẻ viên 2×2 thì có thể lát thay thế bằng các viên 1×4 không?*

Lời giải. Ta tô màu các ô vuông bàn $m \times n$ theo quy tắc sau: các ô (lẻ, lẻ) := (đỏ, đỏ) (xem Hình 4); những ô còn lại màu trắng (chỉ các ô nằm vị trí (x, y) = (lẻ, lẻ) mới được tô. Nhận thấy rằng: các viên 2×2 sẽ chứa đúng một ô đỏ (vì các số lẻ-chẵn luân phiên nhau), còn các viên 1×4 sẽ chứa 0 hoặc 2 ô đỏ. Từ đó suy ra, nếu một số lẻ các viên gạch 2×2 bị vỡ thì phải thay một số lẻ các ô đỏ. Tuy nhiên, như trên ta đã thấy các viên gạch 1×4 luôn chứa số chẵn các ô đỏ. Vậy câu trả lời là phủ định. ❐



Hình 4

Bài toán 2.7. *Cho 2n số thực đôi một khác nhau: $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$. Viết các số vào bảng $n \times n$ như sau: ô (i, j) (hàng i và cột j) là số $(a_i + b_j)$. Chứng minh rằng nếu tích tất cả các số trên các cột bằng nhau thì tích tất các các số ở mỗi hàng cũng bằng nhau.*

Lời giải. Tích các số ở cột thứ j bằng $\pi_j = (b_j + a_1)(b_j + a_2)\ldots(b_j + a_n)$. Khi đó $\pi_i = \pi_j$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Xét đa thức

$$P(x) = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_n).$$

Ta suy ra $P(b_1) = P(b_2) = \ldots = P(b_n) = C$, trong đó C là hằng số. Ta lại xét đa thức

$$G(x) = P(x) - C.$$

Do $G(x)$ có n nghiệm $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nên nó là đa thức bậc là n với hệ số bậc cao nhất bằng 1. Từ đây ta suy ra $G(x) = (x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_n)$

Vậy, $(x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_n) - C$

$$= (x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_n).$$

Thay $x = -a_j$ ($j = \overline{1,n}$) vào đẳng thức cuối, ta được $-C = (-a_j - b_1)(-a_j - b_2)\ldots(-a_j - b_n) = (-1)^n(a_j + b_1)(a_j + b_2)\ldots(a_j + b_n)$.

Hay $(a_j + b_1)(a_j + b_2)\ldots(a_j + b_n) = (-1)^{n+1}C$.

Vế trái đẳng thức cuối này là tích các số thuộc hàng j. Bài toán được chứng minh. ❒

Bài toán 2.8. *Trong bàn cờ ô vuông $n \times n$ viết tất cả các số từ 1 đến n^2. Chứng minh rằng tồn tại hai ô kề nhau (có chung cạnh) mà hiệu hai số được ghi ở đó lớn hơn hoặc bằng n.*

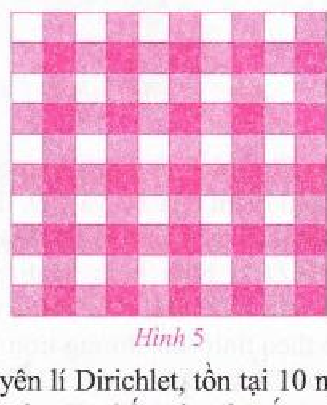
Chứng minh. Giả sử ngược lại, hai ô kề nhau bất kì đều có hiệu nhỏ hơn hoặc bằng $n - 1$. Đặt $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, $B_k = \{k + 1, \ldots, k + n - 1\}$, $C_k = \{k + n, \ldots, n^2\}$, trong đó $k = 1, 2, \ldots, n^2 - n$. Ta thấy trong số bất kì k ô chứa các số thuộc A_k sẽ không thể kề với các ô chứa số thuộc C_k. Suy ra B_k là "lớp đệm" giữa A_k và C_k. Do $|B_k| = n - 1 < n$ ta suy ra với mọi k cố định, tồn tại dòng và cột được ghi các số hoặc thuộc A_k hoặc thuộc C_k. Khi đó chọn $k = 1$ thì tồn tại dòng và cột có các số thuộc C_k và chọn $k = n^2 - n$ thì tồn tại dòng và cột có các số thuộc A_k. Xét $m \in \mathbb{N}$ là giá trị bé nhất để các số từ A_m ghi kín một hàng và một cột. Vậy, các số từ C_{m-1} ghi đầy một hàng và một cột. Từ đó ta suy ra, tồn tại ít nhất hai ô thuộc $A_m \cap C_{m-1}$. Mâu thuẫn vì $A_m \cap C_{m-1} = \varnothing$. ❒

Bài toán 2.9. *Có $m \times n$ người lính đứng thành m hàng ngang và n hàng dọc. Chứng minh rằng trong bất kì 37 người đó luôn tồn tại 10 người đứng không liền kề nhau (không cùng hàng, cột, hoặc liền đỉnh).*

Lời giải. Tô bảng kích thước $m \times n$ bởi bốn màu theo cách sau: dùng hai màu (chẳng hạn, trắng-hồng) tô xen kẽ hàng thứ nhất, dùng hai màu (xanh-đen) tô xen kẽ hàng thứ hai, (xem Hình 5); cụ thể, các ô có các hàng và cột được tô theo quy tắc sau:

Ô (lẻ, lẻ): màu trắng. Ô (lẻ, chẵn): màu hồng.

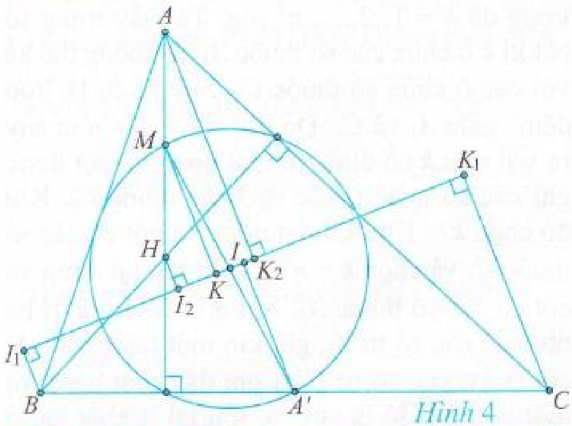
Ô (chẵn, lẻ): màu xanh. Ô (chẵn, chẵn): màu đỏ.


Hình 5

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại 10 người đứng ở ô cùng màu. Ta thấy, do các số nguyên chẵn-lẻ là xen kẽ nhau nên các ô cùng màu là không liền-kề nhau. Bài toán được chứng minh. ❒

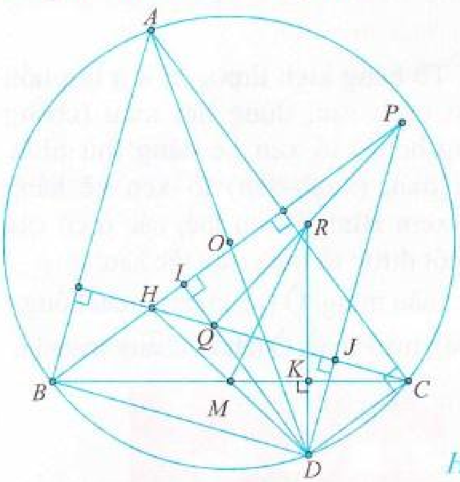
(Kì sau đăng tiếp)

TÍNH CHẤT … (Tiếp theo trang 15)



Hình 4

✪Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm tam giác. Vẽ đường kính AD. Gọi M là trung điểm của BC. I, J, K theo thứ tự là hình chiếu của D lên BH, CH và BC. Chứng minh bốn điểm I, M, K, J cùng nằm trên một đường tròn.*



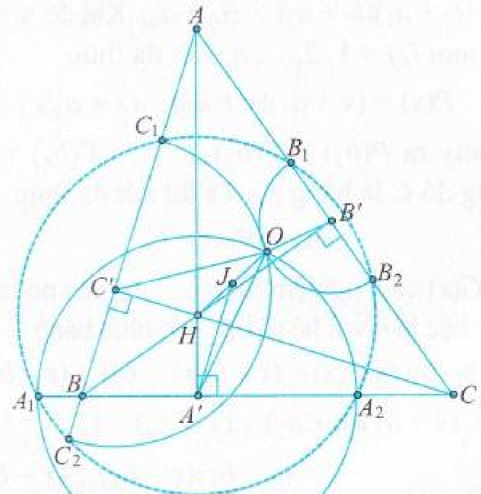
Hình 5

Lời giải *(h. 5)*. Gọi P là giao điểm của DJ và BH, Q là giao điểm của DI và CH. Thấy rằng Q là trực tâm của tam giác PHD. Mặt khác do tứ giác $BHCD$ là hình bình hành nên M là trung điểm của HD. Gọi R là trung điểm của PQ, khi đó theo tính chất đường tròn Euler của tam giác HPD, các điểm M, I, J nằm trên đường tròn đường kính RM.

Lại có $\Delta HCD \backsim \Delta PDQ$ (g.g), CM và DR là hai trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng trên nên $\Delta PRD \backsim \Delta HMC$. Từ đó $\widehat{RDP} = \widehat{MCH}$. Vì tứ giác $KJCD$ nội tiếp nên $\widehat{KDP} = \widehat{MCH}$. Vậy $\widehat{RDP} = \widehat{KDP}$ hay R, K, D thẳng hàng. Cuối cùng vì $\widehat{MKR} = 90^o$ nên điểm K nằm trên đường tròn đường kính MR. Từ đó ta có điều phải chứng minh. ❒

✪Bài toán 5. *Cho tam giác ABC. Các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường tròn tâm A' bán kính A'O cắt đường thẳng BC tại A_1, A_2; đường tròn tâm B' bán kính B'O cắt đường thẳng AC tại B_1, B_2; đường tròn tâm C' bán kính C'O cắt đường thẳng AB tại C_1, C_2. Chứng minh rằng sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải (h. 6). Gọi J là trung điểm của OH, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta thấy J là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Từ đó $A'J = B'J = C'J = \dfrac{R}{2}$.



Hình 6

Theo định lý Pythagore và công thức đường trung tuyến ta có:

$$A_1H^2 = A'H^2 + A'A_1^2 = A'H^2 + A'O^2$$

$$= 2A'J^2 + \frac{OH^2}{2} = \frac{R^2 + OH^2}{2}.$$ Lập luận tương tự với các điểm A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cho ta kết quả $A_1H^2 = A_2H^2 = B_1H^2 = B_2H^2 = C_1H^2 = C_2H^2 \left(= \dfrac{R^2 + OH^2}{2} \right)$. Như vậy sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cùng nằm trên đường tròn tâm H bán kính $\sqrt{\dfrac{R^2 + OH^2}{2}}$. ❒

PROBLEMS … (Tiếp theo trang 17)

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/450. Let x and y be two positive real numbers satisfying $32x^6+4y^3=1$.

Find the maximum value of the expression

$$P=\frac{(2x^2+y+3)^3}{3(x^2+y^2)-3(x+y)+2}.$$

Problem T7/450. Given an acute triangle ABC ($AB>AC$). The heights BB' and CC' intersect at H. Let M, N respectively be the midpoints of the sides AB, AC and O the circumcenter. AH intersects $B'C'$ at E, and AO intersects MN at F. Prove that $EF\,//\,OH$.

Problem T8/450. Given three positive numbers a, b, and c. Find the maximum value of k so that the following inequality holds

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\ge k\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-1\right).$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/450. Find all positive integers x, y, z which form an arithmetic progression and satisfy the following equation

$$\frac{x^2(x+y)(x+z)}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2(y+z)(y+x)}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2(z+x)(z+y)}{(z-x)(z-y)}=2160+(x+y-z)^2.$$

Problem T10/450. Given a 999×999 table of squares. Each square is colored by white or red. Consider a set of triples of squares (C_1, C_2, C_3) which satisfy the following properties: the first two squares C_1, C_2 are in the same row, the last two squares C_2, C_3 are in the same column, C_1, C_3 are white, and C_2 is red. Find the maximum number of elements in such a set.

Problem T11/4. Find all positive integers $n>1$ và and all primes p such that the polynomial $f(x)=x^n-px+p^2$ can be factorized as a product of two non-constant polynomials with integral coefficients.

Problem T12/450. Assume that ABC is an equilateral triangle and M is a point which is not on the lines through BC, CA, and AB. Prove that the Euler lines of the triangles MBC, MCA, and MAB are either concurrent or parallel.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

BÀI TẬP

1. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC và MN là một đường kính thay đổi của đường tròn. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu của M lên AB, AC; N_1, N_2 lần lượt là hình chiếu của N lên AB, AC. Các đường thẳng M_1M_2 và N_1N_2 cắt nhau tại I. Chứng minh rằng I nằm trên một đường tròn cố định.

2. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi I là tâm đường tròn Euler của tam giác; d là một đường thẳng bất kỳ sao cho A, B, C, H nằm về cùng một phía so với d. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ A, B, C, H tới d bằng 4 lần khoảng cách từ I tới d.

3. Cho tam giác ABC nhọn có $AB>AC$. Kẻ các đường cao AD, BE, CF. Đường thẳng EF cắt BC tại P. Đường thẳng qua D song song với EF cắt các đường thẳng AC, AB theo thứ tự tại Q và R. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh bốn điểm M, P, Q, R cùng nằm trên một đường tròn.

4. Cho tam giác ABC. M là một điểm nằm trong tam giác không trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng tồn tại điểm N khác M sao cho các hình chiếu vuông góc của N và M xuống các cạnh của tam giác cùng thuộc một đường tròn.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 450 (12.2014)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI

ĐC: TOÀ NHÀ VĂN PHÒNG HEID - NGÕ 12 LÁNG HẠ - Q. BA ĐÌNH - TP. HÀ NỘI - ĐT: (04) 35122636 - 35122884; FAX: (04) 35122504

NHIỆM VỤ:

- XUẤT BẢN VÀ PHÁT HÀNH SÁCH BỔ TRỢ SÁCH GIÁO KHOA
- XUẤT BẢN VÀ PHÁT HÀNH SÁCH THAM KHẢO CHẤT LƯỢNG CAO, CÁC SẢN PHẨM GIÁO DỤC
- XUẤT BẢN VÀ PHÁT HÀNH LỊCH BLỐC GIÁO DỤC
- TRIỂN KHAI HỘI THẢO - TẬP HUẤN CHO CÁC DÒNG SÁCH ĐƯỢC SỬ DỤNG TRONG TRƯỜNG HỌC

SÁCH GIÁO KHOA TIẾNG ANH

(THEO ĐỀ ÁN NGOẠI NGỮ QUỐC GIA)

TIẾNG ANH (SÁCH HS, BT, GV) LỚP 1 ĐẾN LỚP 12
VỞ BÀI TẬP TIẾNG ANH LỚP 3 ĐẾN LỚP 9
VỞ TẬP VIẾT TIẾNG ANH LỚP 1 ĐẾN LỚP 5
SÁCH THAM KHẢO TIẾNG ANH LỚP 1 ĐẾN LỚP 12
THIẾT BỊ TIẾNG ANH

VỞ CHÍNH TẢ (LỚP 1 ĐẾN LỚP 5)

Tác giả: Lê Ngọc Điệp - Mai Nhị Hà

Luyện chính tả - Luyện nét chữ - Rèn nết người

GIÚP EM LUYỆN VIẾT CHỮ ĐẸP

(LỚP 1 ĐẾN LỚP 5)

Tác giả: Trần Mạnh Hưởng - Lê Hữu Tỉnh

Được biên soạn theo quy định
về mẫu chữ đúng của Bộ Giáo dục va Đao tạo

LUYỆN TỪ VÀ CÂU (LỚP 2 ĐẾN LỚP 5)

Tác giả: Lê Ngọc Điệp - Nguyễn Trí Dũng...

EM LÀM BÀI TẬP TIẾNG VIỆT - TOÁN

(LỚP 1 ĐẾN LỚP 5 DÙNG CHO BUỔI 2/ NGÀY)

Tác giả: Nguyễn Minh Thuyết - Vũ Dương Thụy

THỰC HÀNH TIẾNG VIỆT VÀ TOÁN (LỚP 1 ĐẾN LỚP 5)

Tác giả: Nguyễn Minh Thuyết - Đỗ Đình Hoan

BÀI TẬP CUỐI TUẦN TIẾNG VIỆT (LỚP 1 ĐẾN LỚP 5)

Tác giả: Trần Mạnh Hưởng

BÀI TẬP CUỐI TUẦN TOÁN (LỚP 1 ĐẾN LỚP 5)

Tác giả: Đỗ Trung Hiệu...

TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH (LỚP 1 ĐẾN LỚP 9)

Tác giả: Nguyễn Áng

TỦ SÁCH ÔN THI

* BỒI DƯỠNG HỌC SINH VÀO LỚP 6 (các môn Toán, Tiếng Việt, Tiếng Anh)
* BỒI DƯỠNG HỌC SINH VÀO LỚP 10 (các môn Toán, Văn, Anh)
* HƯỚNG DẪN ÔN TẬP THI TN THPT, CĐ, ĐH

SÁCH DỊCH VÀ TỪ ĐIỂN

* TỪ ĐIỂN CÁC MÔN HỌC TRONG NHÀ TRƯỜNG
* TỪ ĐIỂN HỌC TIẾNG VIỆT
* TỪ ĐIỂN TRA CỨU
* SỔ TAY KIẾN THỨC CÁC MÔN (từ lớp 1 đến lớp 12)
* SÁCH DỊCH
* SÁCH PHỤC VỤ THƯ VIỆN NHÀ TRƯỜNG CẤP TH, THCS, THPT

HỒ SƠ QUẢN LÝ NỀ NẾP

* SỔ THEO DÕI CHẤT LƯỢNG GIÁO DỤC TIỂU HỌC (sổ điểm lớp 1 đến lớp 5)
* HỌC BẠ
* SỔ LIÊN LẠC
* SỔ CHỦ NHIỆM
* SỔ DỰ GIỜ
* LỊCH BÁO GIẢNG TIỂU HỌC (2 BUỔI/ NGÀY)

Website: sachgiaoduconline.net

CỬA HÀNG GIỚI THIỆU SẢN PHẨM

• 187C GIẢNG VÕ - ĐỐNG ĐA - HÀ NỘI - ĐT: (04) 37347590; FAX: (04) 37347591 • 45 PHỐ VỌNG - HAI BÀ TRƯNG - HÀ NỘI - ĐT: (04) 37668142; FAX: (04) 37668143

GD SOBEE

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH VÀ THIẾT BỊ GIÁO DỤC MIỀN NAM

- Địa chỉ: 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh
- Điện thoại: ĐT: (84-8)38358423; 38300312 - FAX: (84-8)38351488

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Tài liệu chuyên toán THCS

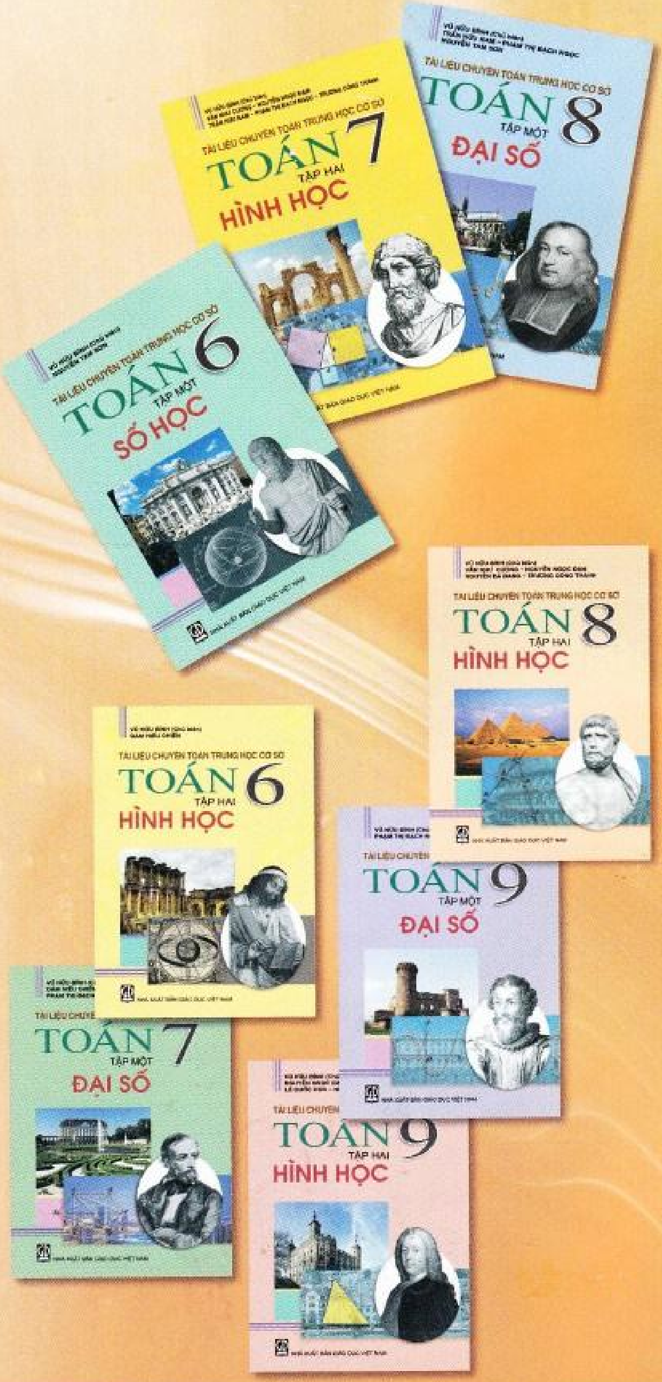
Bộ sách **"Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở"** có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là *Đại số* (ở lớp 6, tập một là *Số học*), tập hai là *Hình học*. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

Mỗi cuốn đều có hai phần: phần *Các chuyên đề cơ bản* (viết theo từng chương của SGK) và phần *Một số chuyên đề nâng cao*. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lý thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh hoạ và sau đó là các bài tập đề nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập trình bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá kỹ lưỡng, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những bài thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Olympic Toán, ... Bằng việc đọc, giải những ví dụ và bài tập này, HS sẽ được mở rộng, đào sâu những kiến thức đã học, qua đó được rèn luyện khả năng tư duy Toán học. Cuối sách sẽ là phần *Hướng dẫn giải* cho các bài tập được đưa ra ở cuối mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việ Nam, chẳng hạn như: NGND. *Vũ Hữu Bình* (chủ biên), NGƯT *Nguyễn Tam Sơn*, nhà giáo *Đàm Hiếu Chiến*, PGS.TS. *Văn Như Cương*, PGS.TS *Đàm Văn Nhỉ*, TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc*, PGS.TS. *Lê Quốc Hán*, ...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, và góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

(Địa chỉ phát hành như trên)



ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT12M4

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2014

Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng