BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

7 (241)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- KHAI THÁC KẾT QUẢ CỦA MỘT BÀI TOÁN
- KẾT QUẢ KÌ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9 QUỐC GIA
- BA ĐIỂM THẲNG HÀNG CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ
- MỘT VÀI KẾT QUẢ CỦA HÌNH HỌC

Thầy giáo và Đội tuyển học sinh giỏi 1996-1997 tỉnh Đồng Nai

TIẾP TỤC KHAI TRIỂN PHƯƠNG PHÁP VÉC TƠ

MỞ RỘNG BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ 1992

THÀNH PHỐ CÓ BAO NHIÊU XE BUÝT

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT : 8.220073
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT : 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : HOÀNG LÊ BÁCH

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

KHAI THÁC KẾT QUẢ CỦA MỘT BÀI TOÁN

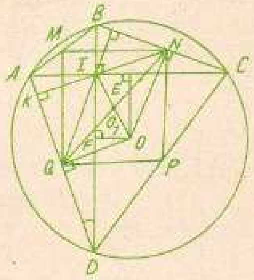
NGUYỄN NGỌC NAM
(Hà Tây)

Từ kết quả hay hướng giải của một bài toán ta có thể khai thác sâu các kết quả và sẽ tìm thêm được các bài toán mới. Các bài toán này giúp chúng ta củng cố được nhiều kiến thức, sáng tạo hơn trong mỗi bài và tìm được mối liên hệ, phương pháp giải đối với mỗi dạng toán. Ví dụ ta xuất phát từ :

Bài toán gốc :

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O, R) có $AC \perp BD$ tại I ($I \neq O$). Chứng minh rằng : 8 điểm gồm trung điểm của các cạnh và chân các đường vuông góc hạ từ I xuống các cạnh cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó theo R và d ($OI = d$).

Giải :



* Gọi trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q thì $MNPQ$ là hình chữ nhật nội tiếp đường tròn đường kính MP hoặc NQ.

Kéo dài IN cắt AD tại K $\Rightarrow IN \perp AD = K \Rightarrow$ K nằm trên đường tròn đường kính NQ.

Tương tự $\Rightarrow$ đpcm.

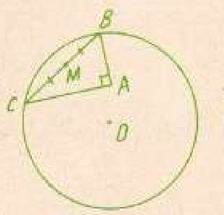
* $NQ^2 = MN^2 + MQ^2$

Hạ $OE \perp AC$; $OF \perp BD \Rightarrow AE = EC = MN$; $BF = FD = MQ \Rightarrow NQ^2 = AE^2 + BF^2 = (R^2 - OE^2) + (R^2 - OF^2) =$
$= 2R^2 - (OE^2 + OF^2) = 2R^2 - d^2 \Rightarrow NQ = \sqrt{2R^2 - d^2} \Rightarrow$ Bán kính của đường tròn đi qua 8 điểm trên bằng : $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$.

Từ bài toán trên ta nhận thấy : $QONI$ là hình bình hành $\Rightarrow$ Trung điểm của IO đồng thời là trung điểm O_1 của QN hay tâm của đường tròn đi qua M, N, P, Q chính là trung điểm của IO.

Như vậy, Nếu I cố định $\Rightarrow O_1$ cố định và $d = const \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$ không đổi. Tôi đề xuất bài toán quỹ tích sau :

Bài toán 1 : *Cho đường tròn (O), A là một điểm cố định nằm trong đường tròn ($A \neq O$). Góc vuông xAy có hai cạnh thay đổi cắt đường tròn (O) ở B và C.*



Tìm quỹ tích trung điểm M của dây BC.

Từ kết quả trên : $NQ^2 = 2R^2 - d^2$

Mà : $NQ^2 = MN^2 + NQ^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2) \Rightarrow AC^2 + BD^2$
$= 8R^2 - 4d^2$ (*) $Ac^2 + BD^2 =$
$= IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2(IA.IC + IB.ID)$
$= IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 4(R^2 - d^2)$ ($IA.IC = IB.ID =$
$= R^2 - d^2$) $\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 8R^2 - 4d^2 - 4R^2 + 4d^2$
$\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$ (**)

Từ kết quả (*) và (**) ta có thêm hai bài toán sau.

Bài toán 2 :

Cho đường tròn (O), hai dây AC và BD thay đổi, cắt nhau tại I ($I \neq O$) và luôn vuông góc với nhau.

Chứng minh rằng : $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$ không đổi.

Bài toán 3 :

Cho đường tròn (O), hai dây AC và BD thay đổi nhưng luôn vuông góc với nhau tại một điểm I cố định ở trong đường tròn ($I \neq O$).

Chứng minh rằng : $AC^2 + BD^2$ không đổi.

Khai thác thêm ta có : $OM^2 + ON^2 + OP^2 + OQ^2 =$

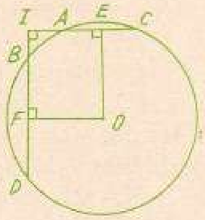
$$= \left(R^2 - \frac{1}{4}AB^2\right) + \left(R^2 - \frac{1}{4}BC^2\right) + \left(R^2 - \frac{1}{4}CD^2\right) + \left(R^2 + \frac{1}{4}DA^2\right)$$

$$= 4R^2 - \frac{1}{2}(IA^2 + IB^2 + IC^2 + CD^2) =$$

$= 4R^2 - 2R^2 = 2R^2 =$ const.

Ta có bài toán 4 :

Bài toán 4 :



Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong (O, R) có 2 đường chéo vuông góc với nhau.

Chứng minh rằng : Tổng bình phương các khoảng cách từ O đến các cạnh của tứ giác không phụ thuộc vào vị trí của tứ giác trên đường tròn. Lưu ý thêm về đề bài toán 2, 3, 4 ta thấy hai dây AC và BD cắt nhau. Nếu 2 dây này cũng vuông góc với nhau nhưng không cắt nhau (giao điểm của 2 đường thẳng chứa 2 dây nằm ngoài đường tròn) thì kết quả có đúng không ?

Xét bài toán 2 :

Hạ $OE \perp AC$, $OF \perp BD \Rightarrow IEOF$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow OE = IF = \frac{IB + ID}{2}; OF = IE = \frac{IA + IC}{2} \Rightarrow$$

$$OI^2 = IE^2 + OE^2 = \frac{1}{4}(IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2IA.IC + 2IB.ID)$$

$\Rightarrow 4OI^2 = IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 4(OI^2 - R^2)$ vì $IA.IC = IB.ID = BI^2 - R^2$. $\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2 =$ const.

Xét bài toán 3 :

$AC^2 + BD^2 = (IC^2 - IA^2) = 8R^2 - 4d^2 =$ const (nếu I cố định)

Khi đó :

$$OM^2 + ON^2 + OP^2 + OQ^2 = 4R^2 - \frac{1}{4}(4R^2 + 8R^2 - 4d^2)$$

$= R^2 + d^2$.

Ta có thêm các bài toán sau "mạnh hơn".

Bài toán 5 : *Trong (O,R) cho 2 dây AC và BD vuông góc với nhau tại I. Chứng minh rằng : $IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2ID^2$ không đổi.*

Bài toán 6 : *Trong (O R) cho 2 dây AC và BD thay đổi luôn vuông góc với nhau tại I cố định.*

Chứng minh rằng $AC^2 + BD^2$ không đổi.

Đi sâu thêm ta có : (với hình vẽ ban đầu)

$(AC + BD)^2 = AC^2 + BD^2 + 2AC.BD = 8R^2 - 4d^2 + 8AE.DF$
$= 8R^2 - 4d^2 + 8\sqrt{(R^2 - OE^2)(R^2 - OF^2)}$
$= 8R^2 - 4d^2 + 8\sqrt{R^4 - R^2d^2 + OE^2 . OF^2}$

Nếu I cố định $\Rightarrow d$ không đổi $\Rightarrow$ Độ lớn của $(AC + BD)$ phụ thuộc vào tích $(OE^2 . OF^2) \Rightarrow (AC + BD)$ lớn nhất $\Leftrightarrow (OE^2 . OF^2)_{Max}$.

Mà : $OE^2 + OF^2 = d^2 =$ const $\Rightarrow (OE^2 . OF^2)_{Max} \Leftrightarrow OE = OF$ ($\leftrightarrow OEIF$ là hình vuông). $\Rightarrow (AC + BD)$ lớn nhất $\Leftrightarrow AC$ và BD tạo với OI các góc bằng nhau và bằng 45°.

Ta có bài toán 7.

Bài toán 7 : *Cho điểm I cố định trong đường tròn (O) ($I \neq O$)*

Tìm vị trí của 2 dây AB và CD đi qua I và vuông góc với nhau để tổng độ dài (AB + CD) lớn nhất.

Cuối cùng, tôi xin đề nghị các bạn hãy tìm các lời giải hay hơn cho các bài toán ở trên.

Bài T1/237. *Cho số A có 1997 chữ số trong đó có 1996 chữ số 5 và một chữ số khác 5. Hỏi A có thể là số chính phương hay không, tại sao ?*

Lời giải. Gọi a là chữ số khác 5 của A, ta có tổng các chữ số của A là $1996 . 5 + a = 9980 + a$, suy ra số dư trong phép chia của A cho 9 là $8 + a \pmod 9$(*). Nếu A chính phương thì A bằng k^2, mà số dư trong phép chia của k cho 9 là 0, +1, +2, +3, +4 nên số dư trng phép chia của A cho 9 là 0, 1, 4, 7. Như vậy, từ (*) ta có các giá trị mà a có thể nhận là : 1, 2, 5 (loại theo gt). Xét các trường hợp :

1) A có chữ số tận cùng là a. Do A chính phương nên a không thể bằng 2 và 8 mà bằng 1, và A có dạng $(10m + 1)^2 = 100^2 + 20m + 1$,, suy ra chữ số hàng chục của A^2 là số chẵn, khác 5, nên trường hợp này không xảy ra.

2) A có chữ số tận cùng khác a, tức là 5. Suy ra A có dạng $(10m + 5)^2 = 100m\,(m + 1) + 25$. Từ đó ta có $a = 2$ và chữ số hàng trăm của A là số chẵn (vì $m\,(m + 1)$ chẵn), tức là khác 5, mâu thuẫn với gt.

Vậy không thể xảy ra trường hợp A chính phương.

Nhận xét. Có 196 bài giải, trong đó có 5 bài giải sai. Lời giải tốt gồm có :

Quảng Ngãi : *Nguyễn Cao Thuyên* (8_2 THCS Chuyên Bình Sơn), *Nguyễn Nhật Anh* (9T Chuyên Nguyễm Nghiêm, Đức Phổ), *Mai Hân Giang* (9t, Chuyên Lê Khiết). **Thừa Thiên :** *Trần Đình Khiêm* (8T Nguyễn Tri Phương, Huế). Quảng Ninh : *Phạm Lâm Quý* (8^a Chuyên Toán Trọng Điểm Uông Bí). **Nghệ An :** *Lê Quang Đạo* (9CT Phan Bội Châu). **Thanh Hóa :** *Trương Minh Trọn* (9^1 Lam Sơn), *Tống Thành Vũ* (9B Năng Khiếu Tĩnh Gia), *Mai Văn Ngà* (8 Tự nhiên 2, Năng Khiếu Bỉm Sơn), *Đỗ Mạnh Cường* (7T Năng Khiếu Bỉm Sơn). **Hà Bắc :** *Nguyễn Tiến Hưng* (9A Năng Khiếu Yên Phong). **Hải Dương :** *Tô Minh Hoàng* (8T PTNK), *Hoàng Thị Nguyệt ánh* (8T PTNK), *Trần Thế Hiển* (7 Toán Năng Khiếu Nam Sách), *Nguyễn Mạnh Tưởng* (6 Toán BDHS Giỏi Nam Sách). **Vĩnh Phú :** *Nguyễn Hoài Thanh* (8^a Chuyên Vĩnh Tường), *Nguyễn Thu Trang* (6a Chuyên Vĩnh Tường). **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh* (9 Toán Lê Quý Đôn Nha Trang). **Nam Định :** *Nguyễn Trọng Kiên* (9 Toán Trần Đăng Ninh Tp Nam Định). **Đồng Nai :** *Nguyễn Ninh Thuận* (8_1 THCS Quang Trung thị trấn Tân Phú). **Đắk Lắk :** *Ngô Quốc Anh* (8 toán Chuyên Nguyễn Du Tp Buôn Ma Thuột), *Đặng Ngọc Châu* (9T Phan Chu Trinh Tp Buôn Ma Thuột). **Ninh Bình :** *Dương Mạnh Toàn* (8T NK Tx Tam Điệp). **Bạc Liêu :** *Lương Thế Nhân* (8A PTTH Chuyên). **Hải Phòng :** *Thái Văn Việt* (8CT PTCS Trần Phú). **Hà Tây :** *Nguyễn Mạnh Thắng* (8^A Chuyên Thạch Thất).

ĐẶNG VIỄN

Bài T2/237 : *Giải phương trình :*

$$19 + 10x^4 - 14x^2 = (5x^2 - 38)\sqrt{x^2 - 2}$$

Lời giải. của *Tô Minh Hoàng 8T, NK* **Hải Dương** và *Trần Huy Đức*, 8T, NC Can Lộc, **Hà Tĩnh**.

Điều kiện có nghĩa của phương trình : $x \in R$, $|x| \geq \sqrt{2}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2}$, $(t \in R, t \geq 0)$. Khi đó phương trình đã cho trở thành :

$$19 + 10\,(t^4 + 4t^2 + 4) - 14\,(t^2 + 2) = [5\,(t^2 + 2) - 38]\,t$$

hay $10t^4 - 5t^3 + 26t^2 + 28t + 31 = 0 \Leftrightarrow$

$$10t^2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{203}{8}t^2 + 28t + 31 = 0 \qquad (1)$$

Ta thấy vế trái của (1) lớn hơn không với mọi $t \geq 0$. Từ đó suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Chu Mạnh Dũng* 8T, NK Bắc Giang. *Nguyễn Đức Hải, Nguyễn Trung Lập, Nguyễn Thanh Tú*, 9B, CT Yên Lạc. **Vĩnh Phúc.** *Lưu Tiến Đức*, 8B, *Hoàng Minh Hoàng*, 9B, Chuyên ứng Hòa, **Hà Tây**. *Phùng Quang Trung*. 9CT, NK ý Yên, **Nam Định**. *Hà Xuân Giáp*, $7TN_2$; *Hà Thị Phương Thảo*, 9TN, NK Bỉm Sơn ; *Trịnh Lê Hùng*, 9T, Lam Sơn ; *Lưu Ngọc Tuấn*, 8C. NK Thành phố **Thanh Hóa**. *Phan Việt Bắc, Nguyễn Đình Quân*, 9TA, Phan Bội Châu ; **Nghệ An**. *Dương Chí Vịnh*, 9CT, NK thị xã **Hà Tĩnh**. *Đặng Thị Tố Như*, 9T, NK Hải Đình, Đồng Hới, **Quảng Bình** - *Nguyễn Nhật Anh, Huỳnh Minh Sơn*, 9T, Chuyên Nghiễm Nghiêm, Đức Phổ, **Quảng Ngãi**. *Trần Thế Minh*, 8A, Chuyên, **Bạc Liêu**.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/237. *Cho n số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \in N; n \geq 3)$.*

Chứng minh :

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1}$$

$$\geq \frac{n}{2}\left[2\sqrt[n]{\frac{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\dots(x_n + x_1)}{(x_n + x_2)(x_1 + x_3)\dots(x_{n-1} + x_1)}} - 1\right]$$

Lời giải :

Đặt

$$M = \frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1}$$

$$P = \frac{x_n}{x_n + x_2} + \frac{x_1}{x_1 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_1}$$

$$Q = \frac{x_2}{x_n + x_2} + \frac{x_3}{x_1 + x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_1}{x_{n-1} + x_1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số dương ta có :

$$M + P = \left(\frac{x_1 + x_n}{x_n + x_2}\right) + \left(\frac{x_2 + x_1}{x_1 + x_3}\right) + \dots + \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{x_{n-1} + x_1}\right)$$

$$\geq \sqrt[n]{\frac{(x_1 + x_n)(x_2 + x_1)\dots(x_n + x_{n-1})}{(x_n + x_2)(x_1 + x_3)\dots(x_{n-1} + x_1)}}$$

$$M + P = \left(\frac{x_1 + x_2}{x_n + x_2}\right) + \left(\frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_3}\right) + \dots + \left(\frac{x_n + x_1}{x_{n-1} + x_1}\right)$$

$$\geq \sqrt[n]{\frac{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\dots(x_n + x_{n-1})}{(x_n + x_2)(x_1 + x_3)\dots(x_{n-1} + x_1)}}$$

Cộng từng vế của hai bất đẳng thức và lưu ý $P + Q = n$, ta được :

$$2M + P + Q \geq 2n\sqrt[n]{\frac{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\dots(x_n + x_1)}{(x_n + x_2)(x_1 + x_3)\dots(x_{n-1} + x_1)}}$$

Suy ra :

$$M \geq \frac{n}{2}\left[2\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_n+x_1)}{(x_n+x_2)(x_1+x_3)\ldots(x_{n-1}+x_1)}} - 1\right]$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Nhận xét : 1) Hầu hết các bạn đều chứng minh đúng. Nhiều bạn xét :

$$A = \left(\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(x_1+x_2)+(x_1+x_n)}{2(x_2+x_n)} + \frac{(x_2+x_3)+(x_1+x_2)}{2(x_1+x_3)} + \ldots + \frac{(x_{n-1}+x_n)+(x_n+x_1)}{2(x_{n-1}+x_1)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các cặp số dương ta có:

$$A \geq \frac{\sqrt{(x_1+x_2)(x_1+x_n)}}{x_2+x_n} + \frac{\sqrt{(x_2+x_3)(x_1+x_2)}}{x_1+x_3} + \ldots + \frac{\sqrt{(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1)}}{x_{n-1}+x_1} = B$$

Cuối cùng, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số dương sẽ có :

$$B \geq n\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_n+x_1)}{(x_2+x_n)(x_1+x_3)\ldots(x_{n-1}+x_1)}}$$

Do $A = M + \frac{n}{2}$ nên từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2) Các bạn có lời giải tốt hơn là : *Đỗ Hồng Quân*, 8A$_2$, Chuyên Việt Trì (**Phú Thọ**) ; *Nguyễn Phong Thiên, Lương Việt Cường*, 9A, Hồng Bàng và *Trần Văn Hà*, 9D$_2$, Lạc Viên (**Hải Phòng**) ; *Đặng Hoài Thu*, 9 Toán, Chuyên Thị xã và Hoàng Thùy Giang, 9A, Chuyên Quỳnh phụ (**Thái Bình**) ; *Hoàng Minh Phúc*, 9B, Nghi Liên, Nghi Lộc (**Nghệ An**) ; *Nguyễn Thị Nga*, 9K, Lê Lợi, Hà Đông (**Hà Tây**) ; *Lương Thế Nhân*, 8A, Chuyên Bạc Liêu (**Bạc Liêu**) ; *Nguyễn Quang Thi*, Lê Quý Đôn (**Đà Nẵng**) ; *Lư Bon Vinh*, 9A$_1$, Chánh Hưng, Quận 8 (**TP Hồ Chí Minh**) ; *Vũ Việt Tài*, 9 Toán, Chuyên Hải Hậu và *Nguyễn Trọng Kiên*, 9T, Trần Đăng Ninh (**Nam Định**) ; *Nguyễn Hoàng Quân*, 9T$_2$, Nguyễn Bỉnh Khiêm (**Vĩnh Long**) ; *Hoàng Thanh Lâm*, 9T, Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên (**An Giang**) ; *Trần Tuấn Anh*, 9 Toán, Lê Quý Đôn (**Khánh Hòa**) ; *Lê Chí Hùng*, 9T, Lam Sơn (**Thanh Hóa**) ; *Nguyễn Thị Minh Thoa*, 9C, Ngọc Lâm, Gia Lâm (**Hà Nội**) ; *Tăng Thị Hà Yên, Nguyễn Thùy Trang*, 8 Toán, Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột (**Đăk Lăk**) ; *Đặng Thị Tố Như*, 9T, Hải Đình, Đồng Hới (**Quảng Bình**) ; *Trần Vĩnh Trung*, 9$_8$, Lý Tự Trọng, Trà Vinh (**Trà Vinh**) ; *Huỳnh Công Phước*, 91, Nguyễn Tri Phương (**Thừa Thiên Huế**).

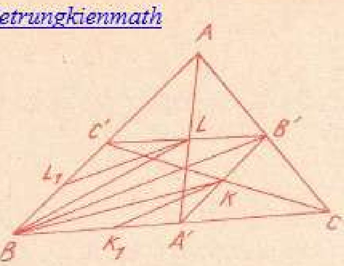
Bạn nhỏ tuổi nhất có lời giải tốt là *Nguyễn Thu Trang*, 6A, Chuyên Vĩnh Tường (**Vĩnh Phú**). Bạn có lời giải tốt nhưng không ghi địa chỉ ở lời giải là Vũ Quý Lộc !

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/237 :

Giả sử AA', BB', CC' là các đường phân giác trong của ΔABC. Gọi L là giao điểm của AA' và B'C', K là giao điểm của CC' và A'B'.

Chứng minh rằng BB' là phân giác của góc KBL.



Lời giải :

Kẻ $KK_1 // LL_1 // BB'$

Theo định lí Talet ta có :

$$\frac{BK_1}{BA'} = \frac{B'K}{B'A'} \text{ và } \frac{K_1K}{BB'} = \frac{A'K}{A'B'}$$

Suy ra : $\dfrac{BK_1}{KK_1} = \dfrac{B'K}{A'K}.\dfrac{BA'}{BB'}$ (1)

Mặt khác $\dfrac{B'K}{A'K} = \dfrac{CB'}{CA'}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\dfrac{BK_1}{KK_1} = \dfrac{CB'}{CA'}.\dfrac{BA'}{BB'}$ (3)

Xét ΔABC với AA', BB' là phân giác ta có :

$\dfrac{BA'}{CA'} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$; $CB' = \dfrac{ab}{a+c}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra : $\dfrac{BK_1}{KK_1} = \dfrac{ac}{a+c}.\dfrac{1}{BB'}$

Tương tự $\dfrac{BL_1}{LL_1} = \dfrac{ac}{a+c}.\dfrac{1}{BB'}$

Nên $\dfrac{BK_1}{KK_1} = \dfrac{BL_1}{LL_1}$ (5)

Ta lại có $\widehat{BK_1K} = 180^0 - \widehat{KK_1C} = 180^0 - \dfrac{\widehat{B}}{2}$

$\widehat{BL_1L} = 180^0 - \widehat{LL_1A} = 180^0 - \dfrac{\widehat{B}}{2}$

Suy ra $\widehat{BK_1K} = \widehat{BL_1L}$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $\Delta BK_1K \sim \Delta BL_1L$.

Suy ra $\widehat{LBL_1} = \widehat{KBK_1}$

Vậy BB' là phân giác góc KBL.

Nhận xét . Giải tốt bài này có các bạn :

Quảng Ninh : Đỗ Quang Khánh, 6A2 Trọng điểm Uông Bí. **Hải Phòng** : Nguyễn Phong Thiên, 9A1 Hồng Bàng, Vũ Anh Dũng, 9T1 Trần Phú ; **Vĩnh Phúc** : Nguyễn Trung Lập, Đỗ Văn Tuấn, Nguyễn Đức Hải, 9B Chuyên Yên Lạc, Vũ Văn Phong ; 9A Chuyên Vĩnh Tường ; **Hòa Bình** : Đỗ Thị Thu Hà, 9A, Hữu Nghị ; **Bắc Ninh** : Phạm Viết Khoa, 9 Toán, Tiên Sơn, Nguyễn Đăng Quý, 8A, NK Thuận Thành, Nguyễn Thế Thủy, 7A NK Gia Lương ; **Hà Tây** : Đỗ Thanh Hiền, 7A Toán Thường Tín, Lưu Tiến Đức, 8B Chuyên Văn Toán, ứng Hòa ; **Hà Nội** : Vũ Đình Hoàng 9A3 Giảng Võ ; Đỗ Quang Anh, 9D Quang Trung ; **Nam Định** : Nguyễn Công Tuấn, Nguyễn Khánh An, 8T Trần Đăng Ninh, Trần Đức Hậu, 8T Hàn Thuyên, Vũ Xuân Dũng, 9, Giao Tiến, Nguyễn Đức Kiên, 9A, Bạch Long ; **Thanh Hóa** : Lê Mạnh Thủy, 7A Hoằng Hóa, Trịnh Lê Hùng, Trương Minh Tuấn, 9T Lam Sơn, Mai Thị Thu Hà, Lê Thị Minh Tâm, Trịnh Thị Hiền, 8 TN NK Bỉm Sơn, Lưu Đức Thi, Nguyễn Thị Hồng, 7A NK Hoằng Hóa, Trịnh Hồng Nam, 9B THCS NK TP ; **Nghệ An** : Hà Văn Đạt, 9TA Phan Bội Châu, Hoàng Minh Phúc, 9B Nghi Liên, Nghi Lộc ; **Hà Tĩnh** : Nguyễn Viết Cường, 9T2 NK ; Thừa Thiên - Huế : Huỳnh Công Phước, 91 Nguyễn Tri Phương, **Bình Định** : Phan Thanh Giản, 8A Hòa Thắng, Tuy Phước. **Khánh Hòa** : Trần Tuấn Anh, 9T Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Đắc Lắc** : Nguyễn Tuấn Anh, Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột ; **Bình Dương** : Nguyễn Tiến Hùng 9T1 PTTH Chuyên Hùng Vương, Thủ Dầu Một, **Đồng Nai** : Võ Hữu Danh, 8T Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa, **Bà Rịa - Vũng Tàu** : Bùi Chính Quang, 8T Chuyên

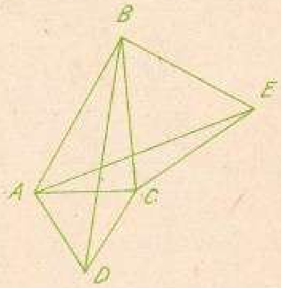
Lê Quý Đôn, Nguyễn Ngọc Ân Phương, 8T NK Cai Lậy Bạc Liêu Trần Anh Khoa, 8A Chuyên.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/237. *Cho tam giác ABC có góc B bằng 30^0. Dựng phía ngoài tam giác ACD.*

Chứng minh rằng : $BD^2 = AB^2 + BC^2$.

Lời giải. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A dựng tam giác đều BCE. Xét phép quay tâm C góc quay 60^0 ngược chiều kim đồng hồ (hình vẽ) biến : E → B, A → D, do đó EA → BD, suy ra BD = AE. Mặt khác, ^ABE = ^ABC + ^CBE = 30^0 + 60^0 = 90^0 nên ΔABE vuông đỉnh B và ta có $BD^2 = AE^2 = AB^2 + BE^2 = AB^2 = BC^2$.



Nhận xét. Có 347 bài giải, tất cả đều giải đúng. Các bạn giải theo phương pháp quay thường trình bày thiếu chặt chẽ hoặc giả chặt chẽ nhưng dài dòng. Các bạn giải bằng cách chứng minh tam giác bằng nhau thì thiếu các trường hợp góc ABC lớn hơn hoặc bằng 120^0.

Lời giải tốt gồm có :

Hà Nội : Nguyễn Ngọc Giang (8^H THCS Trưng Vương), Nguyễn Đức Tiến (9^{A1} PTCS Chu Văn An), Lê Cường (9M PTDL Marie Curie), Nguyễn Hoàng Minh (8C Hà Nội - Amsterdam). Nguyễn Thị Minh Thoa (9C THCS Ngọc Lâm Gia Lâm). **Hải Phòng** : Phạm Đức Hiệp, Vũ Thùy Linh (7T Chu Văn An), Nguyễn Phong Thiên (9A1 THCS Hồng Bàng). **Bạc Liêu** : Trần Anh Khoa, Trần Thế Minh (8A PTTH Chuyên). **Đắc Lắc** : Đặng Trung Thành, Lương Thị Thanh Minh (8 Toán Chuyên Nguyễn Du). **Bắc Ninh** : Trương thị Thao, Nguyễn Mai Anh, Phạm Viết Khoa (9 Toán Năng Khiếu Tiên Sơn), Nguyễn thị Hảo (10A1 PTTH Lý Thái Tổ, Tiên Sơn). **Tp Hồ Chí Minh** : Nguyễn thị Thanh Thiên (9T1 Nguyễn An Khương, huyện Hoóc Môn). **Nam Định** : Nguyễn Trọng Kiên (9T Trần Đăng Ninh Tp Nam Định), Nguyễn Công Tuấn (8 Toán Trần Đăng Ninh Tp Nam Định), Nguyễn Tuấn Anh (9 Chuyên Toán ý Yên). **Thanh Hóa** : Lại Thế Tài (7A Năng Khiếu Hà Trung), Vũ Đức Nghĩa (8A THCS Đông Cương Tx Thanh Hóa). **Nghệ An** : Nguyễn Trình Hiếu (9T PTCS thị trấn Quán Hành, huyện Nghi Lộc), Nguyễn Xuân Giao (9T$_B$ PTTH Phan Bội Châu), Hà Văn Đạt (9T$_A$ PTTH Phan Bội Châu). **Quảng Bình** : Đặng thị Tố Như (THCS Năng khiếu Hải Đình Đồng Hới). **Vĩnh Phú** : Trần Hương Xuân (7A1 Chuyên Mê Linh). **Ninh Bình** : Đinh Hữu Toàn (9 Toán Năng Khiếu Trương Hán Siêu Tx Ninh Bình). **Hải Dương** : Lê thị Thu Trang (8T Năng Khiếu). **Sơn Tây** : Doãn Phương Thảo Chuyên Tx Sơn Tây). **Quảng Ngãi** : Phạm Tuấn Anh (8 Toán Chuyên Lê Khiết). **Đà Nẵng** : Nguyễn Quang Anh Tuấn (9T5 PTCS Lê Hồng Phong). **Vĩnh Long** : Nguyễn thị Ngọc Lan (8T-V PTTH Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/237 : *Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots$ thỏa mãn : $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$ $\forall n \ge 2$.*

Tìm tất cả các giá trị của n để a_n là số chính phương.

Lời giải (của *Đỗ Quang Dương*, 10T THPH Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình) :

1. Để giải Bài đã ra ta sẽ giải :

Bài toán khái quát : Cho số nguyên $p \ge 2$. Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots$ thỏa mãn :

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$ $\forall n \ge 2$.

Hãy tìm tất cả các giá trị của n để a_n là lũy thừa p của một số tự nhiên.

Lời giải : Với mỗi $n \ge 2$, đặt $b_n = a_n - a_{n-1}$. Khi đó, từ công thức xác định dãy $\{a_n\}$, ta sẽ có : $b_n = n.b_{n-1}$ $\forall n \ge 3$. Suy ra $b_n = n!$ $\forall n \ge 3$. Kết hợp với $b_2 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2!$ ta được $b_n = n!$ $\forall n \ge 2$. Do đó, với mỗi $n \ge 2$ ta có :

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) + a_1 = \sum_{k=2}^{n} b_k + 1 = \sum_{k=1}^{n} k!$$

Kết hợp với $a_1 = 1 = 1!$ ta được $a_n = \sum_{k=1}^{n} k!$ $\quad \forall n \ge 1$. (1)

* Xét $p = 2$. Khi đó, do từ (1) ta có $a_n \equiv 3 \pmod{10}$ $\forall n \ge 5$ nên suy ra $a_n \ne a^2$ $\forall a \in N$, $\forall n \ge 5$ (vì các số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi 1, 4, 5, 6, 9).

Với $n = 1, 2, 3, 4$, bằng cách thử trực tiếp, ta thấy a_n là số chính phương khi và chỉ khi $n = 1$, $n = 3$.

* Xét $p > 2$. Khi đó, do $a_n \equiv 0 \pmod 3$ $\forall n \ge 2$ (suy ra từ (1)) nên điều kiện cần để $\exists a \in N$ sao cho $a_n = a^p$ là $a_n \equiv 0 \pmod{27}$ hoặc $a_n = 1$. Từ (1) ta có $a_n > 1$ $\forall n$ 2, và

$$a_n = a_8 + \sum_{k=9}^{n} k! \quad \forall n \ge 9.$$ Suy ra $a_n \equiv a_8 \pmod{27}$ $\forall n \ge 9$. Mà $a_8 = 46233 \equiv 1 \pmod{27}$ nên $a_n \equiv 1 \pmod{27}$ $\forall n \ge 8$. Như vậy, $\forall n \ge 8$ đều không tồn tại $a \in$ **N** sao cho $a_n = a^p$.

Với $1 \le n \le 7$, bằng cách thử trực tiếp ta thấy chỉ có duy nhất giá trị $n = 1$ là giá trị cần tìm.

2. Bài đã ra là trường hợp đặc biệt của Bài toán khái quát, khi $p = 2$. Theo đó, tất cả các giá trị n thỏa mãn yêu cầu của bài toán đã ra là : $n = 1$ và $n = 3$.

Nhận xét. Tòa soạn nhận được lời giải của 195 bạn. Trong số đó có : 97 bạn cho Lời giải tốt ; 87 bạn cho Lời giải không hoàn chỉnh do để sót giá trị $n = 1$; 11 bạn cho lời giải sai do đã xét sai số hạng tổng quát của dãy $\{a_n\}$.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/237 : *Chứng minh rằng $\forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in$ **R** ta có bất đẳng thức sau :*

$$\frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \le$$
$$\le \left(\frac{a_1^{m+1}}{S-a_1} + \dots + \frac{a_n^{m+1}}{S-a_n}\right)\left(\frac{x_1^2}{a_1^m} + \frac{x_2^2}{a_2^m} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^m}\right)$$

$\forall m, n \in$ **N** ; $m, n \ge 2$ và $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Lời giải (*của nhiều bạn*) : *Không mất tổng quát, giả sử* $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n$. Khi đó, do $a_i > 0$ $\forall i = 1$, n và $m \in$ **N**, ta có :

$$a_1^m \ge a_2^m \ge \dots \ge a_n^m \qquad (1)$$

và : $$\frac{a_1}{S-a_1} \ge \frac{a_2}{S-a_2} \ge \dots \ge \frac{a_n}{S-a_n} \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Trêbưsep cho hai dãy không tăng (1) và (2), ta được :

$$(a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m)\left(\frac{a_1}{S-a_1} + ... + \frac{a_n}{S-a_n}\right) \le$$
$$\le n\left(\frac{a_1^{m+1}}{S-a_1} + ... + \frac{a_n^{m+1}}{S-a_n}\right) \qquad (3)$$

Mà : $\frac{a_1}{S-a_1} + ... + \frac{a_n}{S-a_n} =$

$$= \left(\frac{S}{S-a_1} - 1\right) + ... + \left(\frac{S}{S-a_n} - 1\right)$$
$$= S\left(\frac{1}{S-a_1} + ... + \frac{1}{S-a_n}\right) - n$$
$$= \frac{1}{n-1}\left[(S-a_1) + ... + (S-a_n)\right] \times$$
$$\times \left(\frac{1}{S-a_1} + ... + \frac{1}{S-a_n}\right) - n \ \ge \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}$$

Nên từ (3) ta có :

$$\frac{1}{n-1}(a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m) \le$$
$$\le \frac{a_1^{m+1}}{S-a_1} + \frac{a_2^{m+1}}{S-a_2} + ... + \frac{a_n^{m+1}}{S-a_n} \qquad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{a_1^m}}, \frac{x_2}{\sqrt{a_2^m}}, ..., \frac{x_n}{\sqrt{a_n^m}}\right)$$

và $(\sqrt{a_1^m}, \sqrt{a_2^m}, ..., \sqrt{a_n^m})$ ta được :

$$\left(\frac{x_1^2}{a_1^m} + \frac{x_2^2}{a_2^m} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^m}\right)(a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m) \ge$$
$$\ge (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$$

Suy ra : $\dfrac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m} \le \dfrac{x_1^2}{a_1^m} + \dfrac{x_2^2}{a_2^m} + ... + \dfrac{x_n^2}{a_n^m}$ (5)

Do các vế của (4) và (5) đều là các số dương nên nhân vế theo vế hai bất đẳng thức cùng chiều (4) và (5) ta được :

$$\frac{1}{(n-1)}(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \le$$
$$\le \left(\frac{a_1^{m+1}}{S-a_1} + ... + \frac{a_n^{m+1}}{S-a_n}\right)\left(\frac{x_1^2}{a_1^m} + \frac{x_2^2}{a_2^m} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^m}\right)$$

Dấu "=" ở bất đẳng thức trên xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra đồng thời ở (4) và (5) $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ x_1 = x_2 = ... = x_n \end{cases}$

Nhận xét :

1. Tòa soạn nhận được Lời giải của 240 bạn. Tất cả các bạn đều cho Lời giải đúng. Không ít bạn quên không xét điều kiện xảy ra dấu "=" ở bđt cần chứng minh.

2. Một số bạn có nhận xét đúng, rằng điều kiện "$m \in N$, $m \ge 2$" đã cho trong đề bài là quá mạnh. Điều kiện đó có thể được thay thế bởi điều kiện : $m > 0$.

3. Một số bạn đã nêu ra và giải quyết đúng một số Bài toán khái quát từ Bài đã ra.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/237. *Tìm phần nguyên của số S xác định bởi*

$$S = tg^4\frac{3\pi}{7} + tg^4\frac{2\pi}{7} + 2\left(tg^2\frac{3\pi}{7} + tg^2\frac{2\pi}{7}\right)$$

Giải. (của đa số các bạn). Sử dụng công thức $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, ta được :

$$S + 2 = \left(1 + tg^2\frac{3\pi}{7}\right)^2 + \left(1 + tg^2\frac{2\pi}{7}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{\cos^4\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4\frac{2\pi}{7}} \text{ Suy ra :}$$
$$S + 2 + \frac{1}{\cos^4\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\cos^4\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\pi}{7}} \ (*)$$

Gọi vế phải của (*) là A. Ta chứng minh A = 416.

Dễ thấy $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}$ thỏa mãn phương trình $\cos^2 4x = \cos^2 3x$

($\Leftrightarrow (\cos^2 x - 1)(64\cos^6 x - 80\cos^4 x + 24\cos^2 x - 1) = 0$)

Suy ra

$$y_1 = \cos^2\frac{\pi}{7}; \qquad y_2 = \cos^2\frac{2\pi}{7}, \qquad y_3 = \cos^2\frac{3\pi}{7}$$

là ba nghiệm phân biệt của phương trình

$$64t^3 - 80t^2 + 24t - 1 = 0 \qquad (**)$$

Áp dụng định lí Viet đối với (**), ta được

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{5}{4}, \qquad y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \frac{3}{8};$$
$$y_1y_2y_3 = \frac{1}{64}$$

Do vậy :

$$A = \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \frac{1}{y_3^2} = \frac{y_1^2y_2^2 + y_2^2y_3^2 + y_3^2y_1^2}{y_1^2y_2^2y_3^2} =$$
$$= \frac{(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1)^2 - 2y_1y_2y_3(y_1 + y_2 + y_3)}{(y_1y_2y_3)^2} =$$
$$= 416$$

Thế vào (*), ta được : $S = 414 - \dfrac{1}{\cos^4\frac{\pi}{7}}$.

Mà : $-1 > -\dfrac{1}{\cos^4\frac{\pi}{7}} > -\dfrac{1}{\cos^4\frac{\pi}{6}} = -\dfrac{16}{9} > -2$

Do vậy $\quad [S] = 412$

Nhận xét. Còn có rất nhiều các dạng khác dựa trên các đẳng thức lượng giác để đưa về xét phương trình bậc 3 và hệ thức Viet liên quan đến các nghiệm của chúng. Ngoài ra, còn có bạn sử dụng máy tính để tính phần nguyên của S, tuy nhiên thuật toán tính gần đúng của các bạn đã không đem lại kết quả đúng.

Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Hà Nội : Phạm Quang Vinh, Nguyễn Mạnh Hà, Nguyễn Sỹ Phong, Nguyễn Đức Mạnh, Phan Tuấn Sơn, Lê Tuấn Anh, Nguyễn Minh Công. **TP Hồ Chí Minh** : Lê Quang Nẫm, Nguyễn Lê Lực. **Tiền Giang** : Châu Công Điền, Nguyễn Bảo Điền. **Đà Nẵng** : Ngô Quốc Tuấn, Nguyễn Tuấn Phong, Nguyễn Ngọc Hải. **Lâm Đồng** : Nguyễn Tiến Hằng, Phan Thanh Hải. **Hải Phòng** : Đồng Thanh Tùng, Nguyễn Trọng Nghĩa, Đặng Anh Tuấn, Phạm Dương Hiếu, Đoàn Thái Sơn, Đoàn Mạnh Hà, Trương Duy Lợi. **Thanh Hóa** : Lê Duy Diễn, Nguyễn Khuyến Lân, Nguyễn Văn Quang, Nguyễn Hương, Lê Việt Hùng, Lê Văn Phương, Lê Xuân Trung. **Bắc Giang** : Vũ Duy Tuấn, Nguyễn Tiến Mạnh. **Hải Dương** : Nguyễn Dũng, Vũ Văn Tâm. **Nghệ An** : Hoàng Thanh Phúc, Đặng Đức Hạnh, Hồ Sỹ Ngọc, Ngô Anh Tuấn, Nguyễn Đức Trung, Trần Hữu Tú. **Phú Thọ** : Nguyễn Huy Cương, Nguyễn Kim Sở. **Thái Nguyên** : Lê Quang Huy. **Vĩnh Phúc** : Trần Thanh Tâm. **Quảng Bình** : Trương Vĩnh Lân, Trần Đức Thuận. **Trà Vinh** : Trần Huỳnh Thế Khanh. **Bến Tre** : Nguyễn Phương Như. **Đắc Lắc** : Vũ Hải Đông.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/237. *Ký hiệu m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c của một tam giác ABC. Chứng minh rằng :*

$$1^o)\ \frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\ge 2\sqrt{3}\ ; \qquad (1)$$

$$2^o)\ \frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\ge \frac{3\sqrt{3}}{2}\ ; \qquad (2)$$

Lời giải. (của Vũ Việt Toàn, lớp 9 Toán, Hải Hậu, Nam Định và nhiều bạn khác). Sử dụng công thức đường trung tuyến, ta có :

$$4m_a^2=2(b^2+c^2)-a^2=2(a^2+b^2+c^2)-3a^2$$

hay là : $\quad (2m_a)^2+(a\sqrt{3})^2=2(a^2+b^2+c^2)$

Áp dụng B.Đ.T Côsi cho hai số dương $2m_a$ và $a\sqrt{3}$, ta được :

$$2(2m_a.a\sqrt{3})\le 4m_a^2+3a^2=2(a^2+b^2+c^2),$$

hay là :

$$am_a\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{a}{m_a}\ge\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2} & (i)\\[2ex] \dfrac{m_a}{a}\ge\dfrac{2m_a^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2} & (ii)\end{cases}$$

Do đó :

- Từ (i) và hai B.Đ.T tương tự, ta thu được B.Đ.T (1) cần tìm

- Để ý rằng $4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=3(a^2+b^2+c^2)$, từ (ii) và hai B.Đ.T tương tự, ta thu được B.Đ.T (2) cần tìm.

Dấu đẳng thức ở cả hai B.Đ.T trên xảy ra khi và chỉ khi, đồng thời ta có :

$$\frac{m_a}{a}=\frac{m_b}{b}=\frac{m_c}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}4m_a^2=3a^2\\4m_b^2=3b^2\\4m_c^2=3c^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+c^2=a^2\\c^2+a^2=b^2\\a^2+b^2=c^2\end{cases}\Leftrightarrow a^2=b^2=c^2\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ là đều

Nhận xét. 1°) Khá đông các bạn tham gia giải bài toán trên và cho lời giải đúng (có tới 149 bài giải gửi đến tòa soạn). Ngoài bạn Vũ Việt Toàn, các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả : lời giải ngắn gọn và chỉ ra cụ thể khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

Hà Nội : *Nguyễn Mạnh Hà, Nguyễn Hồng Dung, Trần Thị Lê*, PTCTT, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội, Phạm Anh Thái 11A₀, PTDL Lương Thế Vinh. **Bắc Giang** : *Đào Ngọc Minh*, 9T, NK Yên Dũng : *Nguyễn Tiến Mạnh*, THPT NK Ngô Sĩ Liên. **Hưng Yên** : *Nguyễn Văn Sáng*, 11A Yên Mỹ, Mỹ Văn ; **Vĩnh Phúc** : *Lê Thế Thành*, 11B, chuyên Vĩnh Tường ; **Phú Thọ** : *Vũ Mạnh Hùng*, 11B, chuyên Hùng Vương, Việt Trì. **Hòa Bình** : Đỗ Quang Dương, 10T, Hoàng Văn Thụ ; **Hải Phòng** : *Đoàn Thái Sơn*, 10T PTTHNK Trần Phú ; **Thanh Hóa** : Vũ Đức Nghĩa, 8A THCS Đông Cương, *Trương Minh Tuấn*, 9T, Lê Đức Hân, 10T, Nguyễn Khuyến Lân, 10T, PTTH Lam Sơn ; Cao Xuân Sinh, 10 A_1, THCB Ba Đình, Nga Sơn ; **Nghệ An** : *Nguyễn Đình Quân*, 9 Toán A, *Đặng Đức Hạnh*, 11T ; **Thừa Thiên - Huế** : *Huỳnh Công Phước*, 9[1] Nguyễn Tri Phương ; **Đà Nẵng** : *Đoàn Xuân Bình*, $11A_4$, *Nguyễn Hoàng Thành*, $10A_1$, Lê Quý Đôn ; **Lâm Đồng** : *Trương Anh Tuấn*, 11T, *Phan Thanh Hải*, 12T, PTTH Chuyên Thăng Long, Đà Lạt ; **Bến Tre** : *Nguyễn Phương Như*, $11A_1$, PTTH CB Nguyễn Đình Chiểu. **Tiền Giang** : *Nguyễn Bảo Điền*, 11 Anh, Châu Công Điền 12T, PTTH chuyên TG. **Quảng Bình** : *Trần Hữu Lực*, 11CT, PTTH Năng khiếu Đồng Hới.

2°) Ngoài ra các bạn sau đây đã chỉ ra một cách khái quát hóa bài toán trên và cho chứng minh đúng hai B.Đ.T sau đây (Bài toán của ta ứng với n = 1) :

$$\left(\frac{a}{m_a}\right)^n+\left(\frac{b}{m_b}\right)^n+\left(\frac{c}{m_c}\right)^n\ge 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n;$$

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^n+\left(\frac{m_b}{b}\right)^n+\left(\frac{m_c}{c}\right)^n\ge 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Đó là : *Nguyễn Hồng Dung, Trần thị Lê, Phạm Anh Thái, Nguyễn Văn Sáng, Vũ Đức Nghĩa, Lê Đức Hân, Nguyễn Đình Quân và Nguyễn Mạnh Hà.*

3°) Lời giải của nhiều bạn còn dài dòng, chưa gọn. Thiếu sót chủ yếu của đa số lời giải vẫn là chưa chỉ ra một cách cụ thể khi nào xảy ra dấu đẳng thức hoặc giả ngộ nhận một cách trực giác không có chứng minh cẩn thận.

4°) Một số ít bạn chứng minh $m_a\le R+R\cos A=2R\cos^2\frac{A}{2}$ và sử dụng định lí hàm sin, suy ra B.Đ.T $\frac{a}{m_a}\ge 2tg\frac{A}{2}$ và hai B.Đ.T tương tự.

Sau đó sử dụng hệ thức lượng giác :

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1\ (\forall\ \Delta ABC)$$

và từ đó, vì :

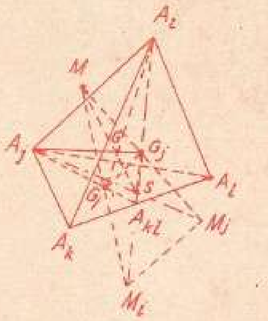
$$\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)^2\ge$$

$$\ge 3\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\right)=3$$

sẽ thu được B.Đ.T (1) cần tìm.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/237. *Gọi G_i là trọng tâm mặt đối diện với đỉnh A_i của một tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. M là một điểm bất kì trong không gian và gọi M_i là điểm đối xứng của M qua G_i. Chứng minh rằng các đường thẳng A_iM_i (i = 1, 2, 3, 4) đồng quy tại một điểm.*



Lời giải 1. (Phương pháp tổng hợp).

Gọi A_{kl} là trung điểm cạnh A_kA_l ; thế thì, theo cách xác định trọng tâm của tam giác, ta có :

$$\frac{\overline{A_{kl}G_j}}{\overline{A_{kl}A_j}} = \frac{\overline{A_{kl}G_i}}{\overline{A_{kl}A_i}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\overline{G_iG_j}}{\overline{A_jG_i}} = \frac{1}{3},$$

hay là :

$$\overline{G_iG_j} = -\frac{1}{3}\overline{A_jA_i}\ ;\ (\forall i, j) \qquad (1)$$

Mặt khác, theo giả thiết thì G_iG_j là đường trung bình của tam giác MM_iM_j, và do đó :

$$\overline{M_iM_j} = 2\overline{G_iG_j}\ (\forall i, j)\ ; \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\overline{M_iM_j} = -\frac{2}{3}\overline{A_iA_j}\ ; \qquad (3)$$

(3) Chứng tỏ rằng : $M_iM_j \uparrow\downarrow = \frac{2}{3}A_iA_j$ và tứ giác $A_iA_jM_iM_j$ là một hình thang với hai đáy là A_iA_j, M_iM_j và $M_iM_j = \frac{2}{3}A_iA_j$. Bởi vậy, hai đường chéo A_iM_i, A_jM_j cắt nhau tại một điểm S nào đó, xác định bởi :

$$\frac{\overline{SM_i}}{\overline{SA_i}} = \frac{\overline{SM_j}}{\overline{SA_j}} = -\frac{2}{3}$$

Chứng minh tương tự, bốn đường thẳng (nói đúng ra là bốn đoạn thẳng) A_iM_i đôi một cắt nhau và ba một không đồng phẳng, vậy chúng phải đồng quy. Điểm đồng quy S của chúng chia mỗi đoạn M_iA_i theo tỉ số $(M_iA_i, S) = -\frac{2}{3}$.

Sau đây là hai lời giải khác.

Lời giải 2 (Véctơ). Vì G_i và G_j theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác $A_jA_kA_l$ và $A_kA_lA_i$ nên ta có :

$$\left.\begin{aligned} 3\overrightarrow{OG_i} &= \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l} \\ 3\overrightarrow{OG_j} &= \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l} \end{aligned}\right\}\ (\forall\, 0) \Rightarrow 3\overrightarrow{G_iG_j} = \overrightarrow{A_jA_i},$$

hay là :

$$\overrightarrow{G_iG_j} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{A_iA_j}\ ; \qquad (4)$$

Vì G_i và G_j là trung điểm của các đoạn thẳng MM_i và MM_j nên ta có :

$$\left.\begin{aligned} 3\overrightarrow{OG_i} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM_i}, \\ 3\overrightarrow{OG_j} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM_j}, \end{aligned}\right|\ (\forall O) \Rightarrow 2\overrightarrow{G_iG_j} = \overrightarrow{M_iM_j}\ ; (\forall i, j) (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra : $\overrightarrow{M_iM_j} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{A_iA_j}$, hay là :

$$2\overrightarrow{A_iA_j} + 3\overrightarrow{M_iM_j} = \overrightarrow{O}$$

$$2\overrightarrow{OA_i} + 3\overrightarrow{OM_i} = 2\overrightarrow{OA_j} + 3\overrightarrow{OM_j}\ ; (\forall O) \qquad (6)$$

(6) chứng tỏ rằng : Có một điểm S, chung cho cả bốn đoạn thẳng A_iM_i (i = 1, 2, 3, 4), xác định bởi :

$$2\overrightarrow{OA_i} + 3\overrightarrow{OM_i} = 5\overrightarrow{OS}\ (i = 1, 2, 3, 4)\ (\forall O) \qquad (7)$$

Vậy bốn đoạn thẳng A_iM_i đồng quy tại một điểm S, xác định bởi hệ thức véctơ (7), hay là : $2\overrightarrow{SA_i} + 3\overrightarrow{SM_i} = \overrightarrow{O}$;(7')

Suy ra : $2\overline{SA_i} + 3\overline{SM_i} = 0$, hay là :

$$(M_iA_i, S) = -\frac{2}{3}$$

Có thể chứng minh rằng điểm đồng quy S thẳng hàng với hai điểm M và G. Thật vậy, từ (7), (5) và (4) ta được :

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{OS} &= 2\overrightarrow{OA_i} + 3\overrightarrow{OM_i} = 2\overrightarrow{OA_i} + 3(2\overrightarrow{OG_i} - \overrightarrow{OM}) \\ &= -3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OA_i} + 2(\overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l}) = \\ &= -3\overrightarrow{OM} + 8\overrightarrow{OG}, (\forall O) \end{aligned}$$

trong đó G là trọng tâm tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Cho $O \equiv M$, ta được : $5\overrightarrow{MS} = 8\overrightarrow{MG}$,

hay là : $$\overrightarrow{MS} = \frac{8}{5}\overrightarrow{MG}\ ; \qquad (8)$$

Lời giải 3 (Biến hình). Theo tính chất trọng tâm của tứ diện, nếu gọi G là trọng tâm của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ thì ta có hệ thức : $\overrightarrow{GG_i} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA_i}$; cũng có nghĩa là :

$$G_i = V_G^{-\frac{1}{3}}(A_i)\ ; \qquad (9)$$

Mặt khác, theo giả thiết thì :

$$M_i = V_M^2(G_i)\ ; \qquad (10)$$

Từ (9) và (10) suy ra : $M_i = V_M^2 \,.\, V_G^{-\frac{1}{3}}(A_i)$

Và do đó :

$$M_1M_2M_3M_4 = V_M^2 \,.\, V_G^{-\frac{1}{3}}(A_1A_2A_3A_4) \qquad (11)$$

Nhưng :

$$V_M^2 \,.\, V_G^{-\frac{1}{3}} = V_S^{-\frac{2}{3}}$$

(trong đó S thẳng hàng với M và G).

Bởi vậy, bốn đường thẳng A_iM_i đồng quy ở tâm vị tự S của phép vị tự $V_S^{-\frac{2}{3}}$ tâm S, tỉ số $-\frac{2}{3} = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$, biến tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ thành tứ diện $M_1M_2M_3M_4$.

Nhận xét. 1°) Khá đông các bạn tham gia giải bài toán trên, có tới 124 bài giải gửi đến tòa soạn ; một số bạn đưa ra cả hai lời giải (véctơ và biến hình).

2°) Các bạn sau đây có lời giải tốt : hoặc có lời giải ngắn gọn, hoặc đã khái quát hóa bài toán theo một trong các hướng sau :

- Thay thế 4 điểm bằng một hệ n điểm tùy ý ($n \geq 4$)

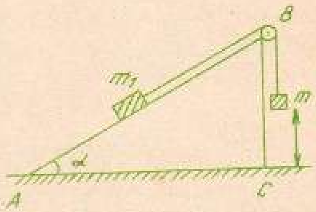
- Thay điểm M_1 đối xứng với điểm M qua G_1, cũng tức là vị tự với G_1 trong phép vị tự V_M^1 tâm M, tỉ số 2 bởi điểm M_1 là vị tự của G_1 trong phép vị tự V_M^k tâm M, tỏ số k tùy ý.

Hà nội : *Nguyễn Mạnh Hà*, 10A ; *Phan Tuấn Sơn* 10A, ĐHKHTN ; *Lê Quang Tôn*, 10A₁, Yên Hòa ; *Trương Thiện Đại*, 11A, Nguyễn Trãi ; *Dương Việt Hùng* 11A, Vân nội Đông Anh. **Bắc giang** : *Vũ Duy Tuấn* 11A, Ngô Sĩ Liên ; *Nguyễn Ngọc Sơn* 12A, PTTH Yên Dũng 1. **Thanh Hóa** : *Nguyễn Văn Quang* 10T, *Phạm Như Ngọc* 11T, Lam Sơn ; *Hán Văn Thắng* 12A₆ Đào Duy Từ. **Nghệ An** : *Nguyễn Tiến Trung*, 10A, ĐHSP Vinh ; *Đặng Đức Hạnh*, 11T, Phan Bội Châu.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/237. *Cho cơ hệ như hình vẽ.*

Ban đầu m_2 được giữ cố định ở độ cao h so với mặt đất. Sau đó thả cho hệ thống chuyển động không vận tốc ban đầu, m_1 trượt lên mặt phẳng nghiêng với hệ số ma sát k.



a) Tính vận tốc v của m_2 khi nó sắp chạm đất

b) Tính sức căng T của sợi dây. Khối lượng của dây nối và ròng rọc không đáng kể.

Hướng dẫn giải. a) Muốn cho m_2 đi xuống, phải có $P_2 > P_{1x} + F_{msmax}$ (P_{1x} là hình chiếu của $\vec{P_1}$ lên mặt phẳng nghiêng), suy ra $m_2g > m_1g\sin\alpha + km_1g\cos\alpha$ hay $m_2 > m_1(\sin\alpha + k\cos\alpha)$. Như m_2 chạm đất thì m_2 đi được đoạn h, còn m_1 được nâng lên được một độ cao $h_1 = h\sin\alpha$. Xét hệ cô lập gồm hai vật m_1 và m_2 ; chọn gốc thế năng tại mát đất, áp dụng định luật bảo toàn năng lượng :

$$\frac{(m_1 = m_2)}{2}v^2 = m_2gh - m_1gh\sin\alpha - m_1gkh\cos\alpha,$$

suy ra

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{m_1 + m_2}[m_2 - m_1(\sin\alpha + k\cos\alpha)]}$$

với $m_2 - m_1\sin\alpha - m_1k\cos\alpha > 0$.

b) Đối với vật m_1 ta có : $\vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = \vec{F_{ms}} = m_2\vec{a}$

$\rightarrow \quad T - m_1g\sin\alpha - m_1gk\cos\alpha = m_1a \quad (1)$

Đối với vật m_2 ta có :

$\vec{T} + \vec{P_2} = m_2\vec{a} \rightarrow m_2g - T = m_2a \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a = \dfrac{g(m_2 - m_1k\cos\alpha - m_1\sin\alpha)}{m_1 + m_2}$

Và $T = m_2(g - a) = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}g(1 + \sin\alpha + k\cos\alpha)$

Lưu ý. Có thể giải câu a) bằng phương pháp động học như ở câu b) với $v = \sqrt{2ah}$.

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đúng : *Lê Tự Duy Phong*, 10A₁, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Dương Lê Nam*, 10T₁, PTTH Năng khiếu, Đồng Hới, **Quảng Bình** ; *Lê Trần Thế Duy*, 11L, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Bùi Quang Hưng* 10A, PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh (**Nghệ An**) ; *Nguyễn Văn Tân*, 10 Tin, PTTH Lê Viết Thuật, Vinh **Nghệ An** ; *Nguyễn Đăng Trung*, 10A₂, chuyên Yên Bái, **Yên Bái** ; *Trần Ngọc Hiền*, 10 Toán lí, chuyên Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Nghĩa Lâm*, 10A CT, ĐHSP Vinh ; *Lưu Văn Mạnh*, 10A₂, THCB Ba Đình ; *Nguyễn Quốc Khánh*, 10A₄, chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Phạm Văn Tập*, 10C₁, PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng** ; *Lê Đức Thịnh*, 12A, PTTH Quảng Xương III, **Thanh Hóa** ; *Vũ Xuân Vinh*, 11A₁, PTTH Hồng Quang, **Hải Dương** ; *Lê Thị Hồng Anh*, 10A₁, PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Trung Dũng* ; 9 Lí, Trần Đăng Ninh **Nam Định**.

MAI ANH

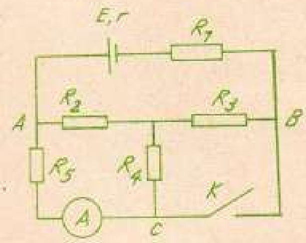
Bài L2/237. *Cho mạch điện như hình vẽ.*

$R_1 = 14r$; $R_2 = 4r$;

$R_3 = 18r$; $R_4 = 9r$;

$R_A = r$. Bỏ qua điện trở dây nối và khóa K.

Khi K đóng R_5 có công suất tiêu thụ cực đại và chỉ 2A. Xác định số chỉ khi K mở.



Hướng dẫn giải. Khi K đóng, mạch ngoài có sơ đồ :

$$\{(R_5 \text{ nt } R_A) \,//\, [R_2 \text{ nt } (R_3 \,//\, R_4]\} \text{ nt } R_1.$$

Khi đó $R_{AB} = \dfrac{10r(R_5 + r)}{R_5 + 11r}$, $I = \dfrac{E}{R_{AB} + R_1 + r}$ và dòng qua ampe kế $I_A = \dfrac{U_{AB}}{R_5 + R_A} = \dfrac{2E}{5(R_5 + 7r}$. Công suất tiêu thụ trên R_5 là $P = I_A^2 \cdot R_5$, nó đạt cực đại khi $R_5 = 7r$.

Từ đó $I_A = \dfrac{2E}{70r}$. Theo đề bài $I_A = 2$, suy ra $E = 70r$. Khi K mở, mạch ngoài có sơ đồ :

$$R_1 \text{ nt } R_3 \text{ nt } [R_2 \,//\, (R_4 \text{ nt } R_5 \text{ nt } R_A)].$$

Khi đó $R_{AC} = \dfrac{68}{21}r$ và dòng điện mạch chính

$$I' = \frac{E}{R_{AC} + R_1 + R_3 + r} = \frac{1470}{761}(A)$$

Dòng điện qua bây giờ bằng :

$$I_A = \frac{U_{AB}}{R_5 + R_A + R_4} = \frac{280}{760} \approx 0{,}37A$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : *Ông Quang Thái*, 11A₁, PTTH Lê Quý Đôn, **Long An** ; *Trần Nam Dũng* 11CT PTTH Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Trung Dũng* 9 Lí, trường Trần Đăng Ninh, **Nam Định**, *Nguyễn Văn Thới*, 11A, PTTH Lê Quý Đôn, TX Tân An, **Long An** ; *Trần Huỳnh Thế Khanh*, 12A₁, PTTH Phạm Thái Bường, **TX Trà Vinh** ; *Trần Thị Ngọc Bích*, 9A Năng khiếu Quỳnh Lưu, **Nghệ An** ; *Vũ Kỳ Nam* 9 Lí, chuyên Nguyễn Du, **Buôn Ma Thuột** ; *Ngô Văn Mẫn*, 11CT, ĐHTH Huế, *Lý Minh Hiếu*, 11A₁, PTTH Bắc Kiến Xương, **Thái Bình** ; *Đỗ Giao Tiến*, 9F, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Phạm Quốc Hùng* 9A, THCS chuyên Nguyễn Hiền, Điện Bàn, **Quảng Nam** ; *Bùi Văn Thành*, 11A₃, PTTH chuyên Yên Bái ; *Nguyễn Nghĩa Lâm*, 10A, CT, ĐHSP Vinh ; *Đàm Hữu Thu*, 11 Lí, chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên** ; *Trần Hữu Lực*, 11 CT, PTTH Năng Khiếu Đồng Hới **Quảng Bình** ;

MAI ANH

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/241 : Chứng minh rằng với

$$\begin{cases} c > 0 \\ (a+c)^2 < ab + bc - 2ac \end{cases}$$

thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

TRẦN HỒNG SƠN
(Thái Bình)

Bài T2/241 : Cho 3 số $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn :

$$x^{1997} + y^{1997} + z^{1997} = 3.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = x^2 + y^2 + z^2$

ĐỖ THANH HÂN
(Minh Hải)

Bài T3/241 : Cho p, q, r là ba số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh phương trình hai ẩn x, y sau đây : $9x - 2y - p^4 - q^4 - r^4 = 0$ luôn có nghiệm tự nhiên.

NGUYỄN HÀO LIỄU
(Thừa Thiên - Huế)

Bài T4/241 : Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một điểm C nằm giữa A, B. Từ một điểm M trên nửa đường tròn kẻ đường thẳng vuông góc với MC cắt các tiếp tuyến tại A và B của (O) tại các điểm tương ứng E, F. Tìm vị trí của điểm M sao cho chu vi tứ giác $AEFB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

NGUYỄN THẾ THIỆP
(Thanh Hóa)

Bài T5/241 : Cho tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng nếu r, r_1, r_2 là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác tương ứng ABC, ABM, ACM thì :

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq 2\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{a}\right)$$

(với $BC = a$).

NGUYỄN ĐỀ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/241 : Cho dãy số $\{b_n\}$ được xác định bởi :

$$b_1 = \frac{1}{2}\,;\; b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \sqrt{b_n^2 + \frac{1}{4^n}}\right)$$

với $\forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng $\{b_n\}$ là dãy hội tụ và hãy tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Bài T7/241 : Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn phương trình :

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = y.$$

Trong đó ký hiệu $[a]$ là phần nguyên của a.

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

Bài T8/241 : Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n số thực thuộc $[0 ; 1]$. Chứng minh rằng :

$$\left[\frac{n}{2}\right] \geq x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + \ldots + x_{n-1}(1 - x_n) + x_n(1 - x_1)$$

TRẦN NAM DŨNG
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T9/241 : Chứng minh rằng : trong mọi tam giác nhọn ABC ta có

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \geq (1 + \sqrt{2\cos A \cos B \cos C})^2$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Định)

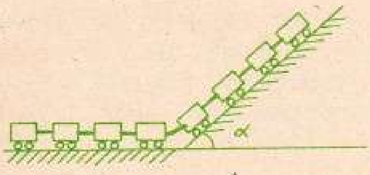
Bài T10/241 : Giả sử M, N, P là ba điểm theo thứ tự lấy trên các cạnh SA, SB, SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng (ABP) ; (CBM) và (CAN) ; J là giao điểm của ba mặt phẳng (MNC), (NPA) và (PMB). Chứng minh ba điểm S, I, J thẳng hàng và

$$\frac{JS}{JI} = 1 + \frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC}$$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

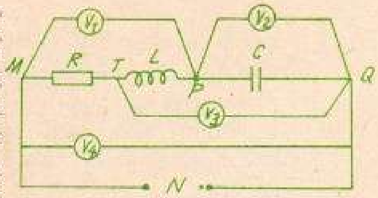
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/241 : Một tàu hỏa gồm nhiều toa đi lên đồi nghiêng một góc α khi chuyển động theo quán tính. Khi đoàn tàu hoàn toàn dừng lại, một nửa chiều dài đoàn tàu nằm ở trên đồi (như hình vẽ). Thời gian từ lúc tàu bắt đầu đi lên đồi đến lúc dừng tàu là bao nhiêu ? Biết chiều dài đoàn tàu là L và bỏ qua ma sát.



NGUYỄN QUANG HỌC
(Hà Nội)

Bài L2/241 : Cho một mạch điện xoay chiều RLC không phân nhánh (hình bên), trong đó các vôn kế V_1, V_2, V_3 và V_4 lần lượt chỉ các giá trị U_1, U_2, U_3, U_4. Tổng trở của mỗi vôn kế coi là lớn vô cùng và tổng trở các dây dẫn và điện trở hoạt động của cuộn cảm L coi là nhỏ không đáng kể. Biết rằng $Z_C > Z_L$, với Z_C là dung kháng của tụ điện C và Z_L là cảm kháng của cuộn cảm L.



Chứng minh rằng nếu $U_4^2 = U_2 \times U_3$ thì $U_2^2 = U_1^2 + U_4^2$.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For lower secondary schools

T1/241. Prove that if

$$\begin{cases} c > 0 \\ (a + c)^2 < ab + bc - 2ac \end{cases}$$

then the equation $ax^2 + bx + c = 0$ has a root.

T2/241. The numbers $x, y, z \geq 0$ satisfy the condition

$$x^{1997} + y^{1997} + z^{1997} = 3$$

Find the greatest value of the expression

$$F = x^2 + y^2 + z^2$$

T3/241. Let p, q, r be three prime numbers greater than 3. Prove that the following equation (with two unknowns x, y)

$$9x - 2y - p^4 - q^4 - r^4 - 0$$

has potitive integer solution.

T4/241. Let be given a semi circle (O) withs diameter AB and a point C on the segment AB ($C \neq A, B$). The line passing through a point M on the semicircle, perpendicular to the line MC, cuts the tangents of (O) at A and B respectively at E and F. Find the position of M so that the perimeter of the quadrilateral $AEFB$ attains its least value.

T5/241. Let M be the midpoint of the side BC of a triangle ABC. Prove that if r, r_1, r_2 are respectively the radii of the incircles of the triangles ABC, ABM, ACM, then.

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{a}\right)$$

where $BC = a$

For upper secondary schools

T6/241. The sequence of munbers $\{b_n\}$ is defined by :

$$b_1 = \frac{1}{2},\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \sqrt{b_n^2 + \frac{1}{4^n}}\right)\ \forall_n \geq 1.$$

Prove that the sequence $\{b_n\}$ is convergent and find its limit.

T7/241. Find the prime numbers x, y satisfying the condition :

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = y,$$

where [a] denotes te greatest integer not exceeding a.

T8/241. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are n real numbers in the segment $[0 ; 1]$. Prove that

$$\left[\frac{n}{2}\right] \geq x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + \ldots + x_{n-1}(1 - x_n) + x_n(1 - x_1)$$

T9/241. Prove that for every acute - angled triangle ABC, We have

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \geq \left(1 + \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C}\right)^2$$

T10/241. Le M, N, P be three points respectively on the sides SA, SB, SC of a tetrahedron $SABC$, I be the point of intersection of the three planes (ABP), (CBM), (CAN) and J be the point of intersection of the three planes (MNC), (NPA), (PMB).

Prove that the three points S, I, J are collinear and that

$$\frac{JS}{JI} = 1 + \frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC}$$

HỘP THƯ

Tạp chí Toán học và tuổi trẻ đã nhận được ý kiến về Đề bài và Lời giải của bài L1/232 đăng trong số 2/1997 của ông Đỗ Văn Toán, khoa Lý, Đại học sư phạm Vinh (Nghệ An).

Tòa soạn xin hoan nghênh và cám ơn ông Đỗ Văn Toán đã có những góp ý cụ thể và chính xác. Đáp số đúng của bài toán, như ông Đỗ Văn Toán đã đề nghị, phải là **T = 8,5N**. Tòa soạn xin thành thật xin lỗi bạn đọc và mong các bạn tự kiểm tra phép toán thay số dựa trên bài giải đăng trên báo.

Ông Đỗ Văn Toán cũng đã nêu *nhận xét rất đúng* là : với các *dữ kiện bằng số* cho trong đề bài, định luật bảo toàn và chuyển hóa năng lượng *đã bị vi phạm*. Cụ thể là : đáng lẽ phải có $\frac{m_B v_B^2}{2} < \frac{m_A v_0^2}{2}$, thì với các dữ kiện bằng số cho trong đề bài lại dẫn tới bất đẳng thức ngược lại $\frac{m_B v_B^2}{2} > \frac{m_A v_0^2}{2}$. Bạn đọc hãy tự kiểm tra điều nói trên.

TH&TT

KẾT QUẢ KÌ THI
HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9 QUỐC GIA
NĂM HỌC 1996 - 1997

Kì thi Quốc gia chọn học sinh giỏi THPT năm học 1996 - 1997 được tiến hành vào các ngày 14, 15 tháng 3 năm 1977, trong đó môn Toán lớp 9 được tiến hành thi vào ngày 15 tháng 3 năm 1997.

Đề thi gồm có hai bộ đề (một dùng cho bảng A, một dùng cho bảng B), mỗi bộ đề gồm có 4 bài thi với thời lượng làm bài là 180 phút (không kể thời gian giao đề).

Kì thi chọn học sinh giỏi năm học 1996 - 1997, số đơn vị tham gia dự thi và số thí sinh dự thi nhiều hơn so với các năm học trước, do có một số tỉnh mới được thành lập cũng xin đăng kí dự thi.

Ở bảng A gồm có 30 đơn vị tỉnh, thành phố tham gia với tổng thí sinh là 291.

Ở bảng B gồm có 28 đơn vị tỉnh, thành phố tham gia với tổng thí sinh là 241. Và như vậy số thí sinh dự thi môn toán 9 gồm có 532 em học sinh.

Đề thi môn Toán 9 (kể cả hai bảng) được chấm theo thang điểm 20.

Các bài giải nhất, giải nhì, giải ba và giải khuyến khích được phân theo mức điểm đạt được của thí sinh trong từng bảng với qui định tổng số giải không được quá 40% số thí sinh dự thi của mỗi bảng, thí sinh đạt giải phải có số điểm tối thiểu từ trung bình trở lên.

Sau đây là danh sách các thí sinh được giải :

BẢNG A

1) *Giải nhất* (từ 19 đến 20 điểm)

Nguyễn Quang Bằng (*Hải Dương*)

Trần Cường (*Thái Bình*)

Nguyễn Minh Hiếu (*Bắc Ninh*)

2) *Giải nhì* (từ 17 đến 18,5 điểm)

Bùi Viết Lộc, Đỗ Đức Nhật Quang, Nguyễn Vũ Thanh Tùng (*Hà Nội*); Phạm Thị Kiều Dung, Bùi Đức Giang (*Hà Tây*); Vũ Trần Cường (*Nam Định*); Trương Việt Hùng, Lê Huy Hoàng (*Thanh Hóa*); Trịnh Quốc Khanh (*Vĩnh Phú*) Nguyễn Thị Thanh Hằng, Nguyễn Danh Nam, Hán Văn Sơn (*Bắc Giang*) Dương Xuân Quang, Phùng Văn Thủy, Hoàng Tùng (*Bắc Ninh*); Phạm Hồng Quân (*Hải Dương*); Trần Thị Dinh (*Thái Bình*); Mai Hồng Chương, Đinh Hữu Toàn (*Ninh Bình*); Trần Tuấn Anh (*Khánh Hòa*); Nguyễn Hải Nam (*Đồng Nai*)

3. *Giải ba* (từ 15 đến 16,5 điểm)

Trần Kỳ An, Nguyễn Hoàng Dũng (*Hà Nội*); Phạm Quốc Việt, Huynh Quang Thuận (*T.P. Hồ Chí Minh*); Hoàng Công Hợp, Lê Thị Thu Huyền (*Hà Tây*); Trịnh Thanh Tùng (*Hải Phòng*); Nguyễn Văn Trung, Đào Hoàng Anh (*Nam Định*); Lưỡng Hữu Tỉnh, Nguyễn Tiến Hòa (*Thanh Hóa*); Lê Thị Như Bích, Huỳnh Công Phước, Phạm Nguyên Quý, Phan Lê Bảo Túy (*Thừa Thiên Huế*); Nguyễn Vũ Kim Ngân (*Quảng Ninh*); Phan Tiến Dũng, Đinh Thúy Hằng, Vũ Đoàn Hưng, Phạm Thị Thu Hiền, Đặng Thị Thu Hương, Lương Quang Mạnh, Nguyễn Anh Tuân, Tạ Thanh Xuân (*Phú Thọ*); Vũ Văn Phong, Nguyễn Trung Lập, Trần Lê Huy, Lê Chí Hoàng, Nguyễn Đức Toàn (*Vĩnh Phúc*); Nguyễn Minh Thư (*Bắc Giang*); Trương Văn Nhất (*Bắc Ninh*); Đào Thi Hương Giang, Lê Văn Hiệp, Nguyễn Thị Hường, Bùi Tân Phú (*Hải Dương*); Vũ Văn Hải, Đào Thi Hồng, Đỗ Thị Hồng Huệ, Lương Thanh Tùng, Phạm Văn Việt (*Thái Bình*); Phạm Việt Phương (*Ninh Bình*); Đào Mạnh Cường, Chu Viết Tuấn, Trần Khoa Văn, Nguyễn Huy Vũ (*Nghệ An*); Đặng Duy Điền Hải, Nguyễn Vĩnh Thuận (*Hà Tĩnh*); Võ Thị Dung Hòa, Võ Thị Bạch Yến (*Khánh Hòa*)

4) *Giải khuyến khích* (từ 13,5 đến 14,5 điểm)

Nguyễn Viết Thắng, Lê Minh Anh Tú, Đào Phương Bắc (*Hà Nội*); Nguyễn Cẩm Thạch, Phạm Thanh Phong, Nguyễn Hồng Anh Khoa (*TP Hồ Chí Minh*); Hà Trung Hải, Lương Thanh Hoài, Tạ Trần Minh (*Hà Tây*); Nguyễn Việt Anh, Trần Thị Hồng Cẩm, Cao Vũ Dân (*Hải Phòng*); Lê Thị Thu Hòa, Trần Xuân Trọng, Phạm Thị Thuận (*Thanh Hóa*); Huyền Tôn nữ Hoàng Lan, Phạm Viết Tuấn (*Thừa Thiên Huế*); Trần Anh Hùng (*Quảng Nam*); Phạm Tiến Dũng (*Phú Thọ*); Hoàng Huy Phương, Phạm Thành Ngữ (*Vĩnh Phúc*); Trần Đức Anh Tuấn (*Thái Nguyên*); Bùi Thu Hương, Lương Văn khuê, Trần Thị Hà Phương, Ngô Anh Viên (*Bắc Giang*); Nguyễn Thị Hoan (*Bắc Ninh*); Trần Hữu Sơn (*Quảng Ninh*); Lê Minh Hải, Nguyễn Thanh Hảo (*Hải Dương*); Phạm Thị Hường Thu (*Thái Bình*); Phạm Tuấn Ngọc (*Nghệ An*); Nguyễn Thái Phú, Đặng Thái Sơn; Nguyễn Viết Tú (*Hà Tĩnh*); Trần Kim Nhân (*Quảng Trị*); Nguyễn Quốc Việc Hùng (*Quảng Ngãi*); Nguyễn Xuân San (*Bình Định*); Bùi Thanh Mai (*Khánh Hòa*); Nguyễn Trọng Văn (*Tiền Giang*).

BẢNG B

1) *Giải nhất* (từ 19 đến 20 điểm)

Lưu Minh Ngọc (*Đak Lak*);

Lương Thế Nhân (*Bạc Liêu*);

Nguyễn Hoàng Quân (*Vĩnh Long*);

2) *Giải nhì* (từ 15 đến 18,5 điểm)

Bùi Thị Vân Anh, Đỗ Thị Thu Hà (*Hòa Bình*); Nguyễn Văn Bình, Đặng Thị Tố Như (*Quảng Bình*); Phạm Ngọc Sáng (*Gia Lai*); Nguyễn Thanh Nha (*Đak Lak*); Phạm Nguyên Thắng, Bùi Tiến Đạt (*Lâm Đồng*); Trần Tuấn Hùng (*Tây Ninh*); Nguyễn Đỗ Thái Nguyên, Tăng Mỹ Hảo (*Vĩnh Long*); Phạm Công Khanh, Ngô Minh Trí (*Đồng Tháp*).

3) *Giải ba* (từ 12,5 đến 14,5 điểm)

Nguyễn Tuấn Việt (*Yên Bái*); Nguyễn Hoàng Minh, Nguyễn Cảnh Toàn (*Tuyên Quang*); Trần Mạnh Thắng (*Lai Châu*); Nguyễn Bích Vân, Đỗ Chí Cường, Trần Khánh Hoàng (*Sơn La*); Nguyễn Thị Thu Hằng, Lưu Thị Hiền, Phạm Mạnh Tuấn, Trương Trung Yên, Tôn Việt Hùng (*Hòa Bình*); Phạm Thị Quỳnh Hoa, Trần Đức Sơn (*Quảng Bình*); Ngô Viết Cường, Nguyễn Quốc Nguyên (*Gia Lai*); Đặng Ngọc Châu, Đinh Thanh Nam (Đak Lak); Huỳnh Trọng Trí, Tô Thu Hiền, Nguyễn Thị Liên

Chi, Đoàn Nguyễn Huy Khôi, Đồng Hoàn Vũ, Nguyễn Hữu Vũ Tuyên (*Lâm Đồng*); Trần Tân Quốc, Bùi Ngọc Bảo, Phạm Nguyễn Hoài Nhân, Lương Thu Thủy (*Bến Tre*) ; Nguyễn Trọng Hưng, Đoàn Ngọc Minh, (*Bình Dương*) ; Trần Thái Minh Chánh, Nguyễn Tấn Đa, Nguyễn Xuân Dũng, Phạm Lý Duy Linh (*Tây Ninh*); Hoàng Thanh Lâm (*An Giang*); Phạm Thị Vân Giang, Tô Hồng Yến, Trần Thế Minh, Trương Yến Nhi (*Bạc Liêu*); Nguyễn Chí Thành, Lâm Xuân Nhã (*Vĩnh Long*); Phan Đình Thế Duy (*Đồng Tháp*).

4) *Giải khuyến khích* (từ 11 đến 12 điểm)

Lương Ngọc Nghĩa (*Bắc cạn*) ; Trần Quyết Thắng, Nguyễn Đức Trong (*Lào Cai*) ; Nguyễn Phương Hoa, Trần Tuấn Linh (*Yên Bái*); Nguyễn Thị Lan Hương, Vũ Hồng Quang, Nguyễn Tuấn Thành (*Tuyên Quang*); Đặng Thị Hiên (*Hòa Bình*) ; Hoàng Thị Minh Diệu, Diệp Thị Bích Hạnh, Trương Thị Lệ Thủy (*Quảng Bình*); Hồ Viết Trang, Huỳnh Vi Quang (*Gia Lai*) ; Huỳnh Thị Vân Tuyền (*KonTum* ; Mai Thùy Anh (*Đak Lak*); Nguyễn Khánh Minh, Nguyễn Đức Thắng (*Lâm Đồng*); Nguyễn Văn Nghĩa (*Bến Tre*); Trần Hồ Nam, Giang Hoa, Nguyễn Thế Bảo, Nguyễn Tiến Hùng, Võ Quý Long (*Bình Dương*); Nguyễn Quốc Huy (*Tây Ninh*); Châu Nguyễn Phước Long, Trương Ngọc Cường, Trương Thanh Hải (*Cà Mau*); Trần Anh Khoa, Nguyễn Thị Thanh Thủy (*Bạc Liêu*); Bùi Minh Khoa (*Trà Vinh*); Vũ Tất Thành (*Vĩnh Long*); Trần Ngọc Nhi (*Đồng Tháp*)

Dưới đây là đề thi

BẢNG A
Ngày thi : 15 - 3 - 1997
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1 : a. Chứng minh rằng số P sau đây không thuộc tập hợp số tự nhiên N với mọi giá trị thực dương của x, y, z, t:

$$P = \frac{2x+y+z}{x+y+z} + \frac{2y+z+t}{y+z+t} + \frac{2z+t+x}{z+t+x} + \frac{2t+x+y}{t+x+y}$$

b. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một bộ ba số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn tính chất ; tích của hai số bất kì trong ba số đó cộng với 1 chia hết cho số còn lại.

Bài 2: a. Cho biểu thức :

$Q = \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_3} + \ldots + \sqrt{1-x_{1997}}$

trong đó $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1997}$ là các biến số nhận giá trị thực dương và thỏa mãn điều kiện : $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{1997} = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của Q và các giá trị tương ứng của các biến của nó.

b. Giải hệ phương trình với các ẩn x, y, z.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 \end{cases}$$

Bài 3 : Cho đường tròn tâm O bán kính R và một dây AB cố định có độ dài bằn a ($a < 2R$). Trên dây AB lấy một điểm P tùy ý rồi qua A và P vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với đường tròn (O) tại A ; qua B và P vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với đường tròn (O) tại B ; hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai M.

a. Chứng minh rằng bốn điểm $0, M, C, D$ cùng nằm trên một đường tròn.

b. Cho điểm P di động trên dây AB :

1) Tìm quỹ tích điểm M.

2) Chứng minh rằng đường thẳng qua M và P luôn đi qua một điểm cố định N. Tìm giá trị lớn nhất của tích $PM . PN$.

Bài 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Dựng hình bình hành nội tiếp tứ giác $ABCD$ có hai cạnh liên tiếp tương ứng song song với hai đường thẳng giao nhau a và b cùng thuộc mặt phẳng $ABCD$.

BẢNG B
Ngày thi : 15 - 3 - 1997
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1: a. Tìm các cặp số tự nhiên có tích bằng 700 và có UCLN bằng 5.

b. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một bộ ba số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn tính chất : tích của hai số bất kì trong ba số đó cộng với 1 chia hết cho số còn lại.

Bài 2. a. Nếu $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{15-x^2} = 2$ thì $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{15-x^2}$ bằng bao nhiêu ?

Hãy tìm giá trị tương ứng của x.

b. Cho phương trình với các ẩn là x và y:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy - 10x - 12y + 22 = 0$$

Tìm nghiệm của phương trình sao cho :

1) $x + y$ đạt giá trị lớn nhất.

2) $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3: Cho tam giác ABC có diện tích là S và một hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp trong tam giác đó (M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC) . Gọi diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là S_1.

Chứng minh rằng : $S \geq 2S_1$.

Bài 4: Cho đường tròn tâm O bán kính R và một dây AB cố định có độ dài bằng a ($a < 2R$). Trên dây AB lấy một điểm P tùy ý rồi qua A và P vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với đường tròn (O) tại A ; qua B và P vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với đường tròn (O) tại B ; hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai M.

a. Chứng minh tứ giác $PCOD$ là hình bình hành và bốn điểm O, M, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b. Cho điểm P di động trên dây AB.

1) Tìm quỹ tích điểm M.

2) Chứng minh rằng đường thẳng qua M và P luôn đi qua một điểm cố định N. Tìm giá trị lớn nhất của tích $PM. PN$.

NGUYỄN HỮU THẢO

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

BA ĐIỂM ĐẶC BIỆT THẲNG HÀNG CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẠM HỮU HOÀI
(TP Hồ Chí Minh)

Ở tạp chí số 236 (2/1997), tác giả My Duy thọ đã giúp các bạn một phương pháp để chứng minh 3 điểm uốn của đồ thị thẳng hàng và chứng minh 3 điểm cực trị nằm trên một parabol. Tất nhiên, phương pháp này không nhấn mạnh là dùng cho 3 điểm đặc biệt nào mà khái quát chung cho 3 điểm đặc biệt nào đó.

Bài báo này, giúp thêm các bạn một số thí dụ luyện tập và sử dụng thêm phương pháp véctơ.

I. Ví dụ 1 : CMR : Họ các đồ thị sau luôn qua 3 điểm cố định thẳng hàng :

a) (Cm) : $y=(m+2)x^3+2(m+2)x^2-(m+3)x-2m+1$

b) (Cm) : $y=(m+1)x^3-(2m-1)x-m+1$

c) (Cm) $y=(m-3)x^3-4(m-3)x^2-(m+1)x+m$

Bài giải

a) Tọa độ 3 điểm cố định là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3+2x^2-x-2=0 \\ y=2x^3+4x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x^2-1)=0 \\ y=2x^3+4x^2-3x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=6 \end{cases}$$

Suy ra họ (Cm) qua A(-2 ; 7), B(1, 4), C(-1, 6) cố định có $\overrightarrow{AB}=(3;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=3.\overrightarrow{AC}$

Tức A, B, C thẳng hàng

Tương tự dẫn đến hệ :

b) $\begin{cases} x^3-2x-1=0 & (1) \\ y=x^3-x+1 & (2) \end{cases}$

Ta khử x^3 từ (1), (2) được hệ mới

$$\begin{cases} x^3-2x-1=0 \\ y-(2x+1)-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x^2-x-1)=0 \\ y=x+2 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm : (- 1 ; 1), $\left(\frac{1-\sqrt5}{2};\frac{5-\sqrt5}{2}\right)$ $\left(\frac{1+\sqrt5}{2};\frac{5+\sqrt5}{2}\right)$ nghiệm đúng phương trình đường thẳng : $y=x+2$

Vậy (Cm) qua 3 điểm cố định thẳng hàng

c) Xét hệ : $\begin{cases} x^3-4x^2-x+1=0 & (1) \\ y=-3x^3+12x^2-x & (2) \end{cases}$

Xét hàm $f(x)=x^3-4x^2-x+1$ liên tục trên các đoạn $[-1, 0], [0, 1], [1, 5]$ và có $f(-1)=-3<0$, $f(0)=1>0$

$f(1)=-3<0$; $f(5)=21>0$ phương trình (1) có 3 nghiệm $x_1 \in(-1;0)$; $x_2\in(0,1)$; $x_3\in(1;5)$.

Bây giờ ta chia đa thức y cho f(x) được :

$y=-3f(x)-4x+3$ Như vậy hệ trên tương đương

Với : $\begin{cases} x^2-4x^2-x+1=0 \\ y=-4x+3 \end{cases}$ hệ này có 3 nghiệm

(x_i, y_i nghiệm phương trình đường thẳng $y=-4x+3$ vậy (cm) luôn qua 3 điểm cố định thẳng hàng.

Ví dụ 2 : CMR : mỗi đồ thị sau có 3 điểm uốn thẳng hàng

a) (C) : $y=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ b) (C) : $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$

c) (C) : $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+3}$

Bài giải

Ta có :

$$y''=\frac{2(2x-1(x^2-x-2)}{(x^2-x+1)^3}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đồ thị đi qua 3 điểm uốn $A(-1;-1)$, $B(\frac{1}{2};0)$, $C(2;1)$

$$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3}{2};1\right) > \overrightarrow{BC}=\left(\frac{3}{2};1\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}.$$

Vậy 3 điểm uốn thẳng hàng

Ta có :

$$y''=\frac{2(2x-1(x^2-x-2)}{(x^2-2x+2)^3}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt3$		1		$1+\sqrt3$		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Điểm uốn có tọa độ nghiệm hệ :

$$\begin{cases} (x-1)(x^2-2x-2)=0 \\ y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x-2=0 \\ y=\dfrac{x-1}{x^2-2x-2)+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=1\pm\sqrt3 \\ y=\dfrac{x-1}{4} \end{cases}$$

Suy ra 3 điểm uốn cùng thuộc đường thẳng $y=\dfrac{x-1}{4}$

C) ?XĐ : **R**

$y''=\dfrac{2(x^3-3x^2+3)}{(x^2--3x+3)^3}$ cùng lấy $g(x)=x^3-3x^2+3$

$g(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1;0]$, $[0,2]$; $[2,3]$

$g(-1)=-1<0$, $g(o)=3>0$, $g(2)=-1<0$, $g(3)=3>0$

$\Rightarrow g(x)=0$ có 3 nghiệm : $-1<x_1<0<x_2<2\ x_3<3$

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tọa độ điểm uốn nghiệm hệ : $\begin{cases} x^3-3x^2+3=0 \\ y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-3x+3)=3x-3 \\ y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{x-1}{x^2-3x+3} \\ y=\dfrac{x}{3} \end{cases}$$

Tọa độ 3 điểm uốn nghiệm đúng phương trình đường thẳng : $y=\dfrac{x}{3}$ nên 3 điểm uốn thẳng hàng

Bài tập đề nghị :

1/ CMR : Đồ thị (C) của hàm số

$$y=\frac{x^2.\cos\alpha-2x+\cos\alpha}{x^2-2x.\cos\alpha+1}$$ ($\alpha\in(0;\pi)$) có 3 điểm uốn thẳng hàng

2/ CMR : họ (c_m) : $y=(m-2)x^2-3mx+2m\cos\alpha$ với $\alpha\in(0,\pi)$ qua 3 điểm cố định thẳng hàng.

TIẾP TỤC KHAI TRIỂN PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

THÍCH PHÁP MINH
(thành phố Huế)

- Trong báo toán học và tuổi trẻ số 2/1005 Phạm Bảo (Hà Nội) đã giới thiệu một số phương pháp vectơ. Sau đây tôi xin tiếp tục một số phương pháp cơ bản để tăng cho bạn đọc công cụ giải toán đi từ bài toán cơ bản

Bài toán I : *Bài toán về trọng tâm*

a) Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

b) Cho tứ diện ABCD, I là trung điểm AB . J là trung điểm CD, G là trung điểm IJ

Chứng minh :

1/ $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

2/ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$

3/ *Xác định* M *để :* $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|$ *bé nhất*

Lời giải :

1/ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}$

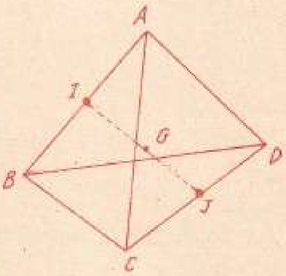
Do đó : $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

2/ Ta có : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GI}$

$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=$

$=2(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ})=\overrightarrow{0}$



3)

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=$

$=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GV}+$

$+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GV}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$

theo (2) của bài toán 1 ta có :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|=|4\overrightarrow{MG}|=4MG$

Vậy : $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|$ bé nhất khi MG bé nhất $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ M ≡ G

Bài toán II : *Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh :* $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$

(trong đó : a = BC, b = CA, c = AB)

Lời giải :

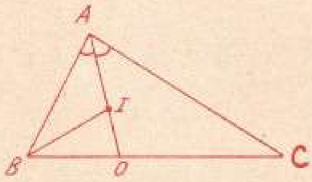
$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$$

ta có : $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\dfrac{c}{b}$ (T/c đường phân giác)

hay : $\overrightarrow{DB}=-\dfrac{c}{b}.\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}=\dfrac{c}{b}(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID})$

$b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=(b+c)\overrightarrow{ID}$



lại có :

$\overline{ID}=-\dfrac{BD}{BA}.\overline{IA}$ (BI là phân giác góc DBA)

ta có : $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\dfrac{c}{b}\Rightarrow\dfrac{DB}{c}=\dfrac{DC}{b}=\dfrac{DB+DC}{[c+b}=\dfrac{a}{c+b}$

$$DB=\frac{ac}{c+b}\Rightarrow\frac{DB}{BA}=\frac{\frac{ac}{c+b}}{c}=\frac{a}{b+c}$$

vậy $\overrightarrow{ID}=-\dfrac{a}{b+c}.\overrightarrow{IA}$. Do đó : $b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=-a\overrightarrow{IA}$

Hay : $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ Trong những bài toán cơ bản trên để vận dụng thích hợp làm phương pháp giải toán như thế nào ta đi vào ví dụ cụ thể

Ví dụ 1 : *Cho tứ diện ABCD. I là trung điểm AB, J là trung điểm C, M là trung điểm thuộc AC, N là trung điểm thuộc AB. Sao cho :* $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{MB}{MD}$..

Chứng minh I, J, M, N thuộc cùng một mặt phẳng

Lời giải :

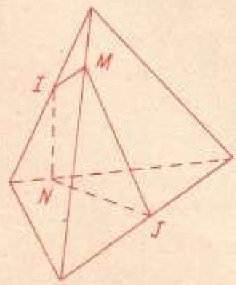
Ta có :

$\overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AM}$ (vì $M\in AC$)

$\overrightarrow{BD}=h\overrightarrow{BN}$ ($N\in BD$)

Từ giả thiết :

$\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{NB}{ND}\Rightarrow h=k$



Theo b/ của Bài toán 1 thì :

$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=$

$=v\overrightarrow{AM}+v\overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{IJ}=\dfrac{v}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN})$

$=\dfrac{v}{2}(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IN})$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\dfrac{v}{2}(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN})$

Đẳng thức này chứng tỏ $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}$ đồng phẳng

$\Rightarrow$ *I, J, M, N* đồng phẳng

Bài toán 1 còn áp dụng được như sau :

Ví dụ 2 : *Cho tứ diện ABCD. Tìm M sao cho* $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ *bé nhất*

Lời giải :

Gọi : I là trung điểm AB

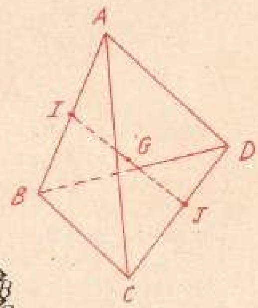
J là trung điểm CD

G là trung điểm IJ

ta có :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GV}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$

(bài toán 1)



$MA^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2=$

$=MG^2+GA^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$

Tương tự :

$MB^2=MG^2+GB^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$

$MC^2=MG^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$

$MD^2=MG^2+GD^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GD}$

$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})$

$\Leftrightarrow MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$\Leftrightarrow MA^2+MB^2+MC^2+MD^2\geq GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

Dấu = xảy ra khi $M\equiv G$

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ bé nhất khi $M\equiv G$

Ví dụ 3 : *Cho tam giác ABC I là tâm vòng tròn nội tiếp*

Chứng minh rằng :

$$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$$

Lời giải :

Ta có : $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

$(a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC})^2 = 0 \Leftrightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\vec{IA}.\vec{IB} + 2ac\vec{IA}.\vec{IC} + 2bc\vec{IB}.\vec{IC} = 0$

Mà : $2\vec{IA}.\vec{IB} = IA^2 + IB^2 - AB^2$

$2\vec{IA}.\vec{IC} = IA^2 + IC^2 - AC^2$

$2\vec{IB}.\vec{IC} = IB^2 + IC^2 - BC^2$

(tích vô hướng của 2 vectơ)

$a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - AB^2) + ac(IA^2 + IC^2 - AC^2) + bc(IB^2 + IC^2 - BC^2) = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + ab + ac)IA^2 + (b^2 + ab + bc)IB^2 + (c^2 + ac + bc)IC^2 (abc^2 + acb^2 + bca^2) = 0$

$\Leftrightarrow a(a+b+c)IA^2 + b(a+b=c)IB^2 + c(a+b+c)IC^2 . abc(a+b+c) = 0$

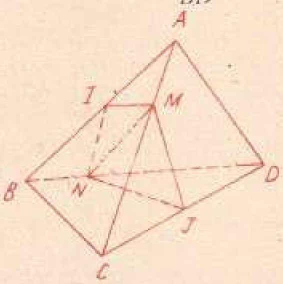
$(a+b+c)(aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 - abc) = 0$

Do $a+b+c \neq 0 \Rightarrow aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

$$\Rightarrow \frac{aIA^2}{abc} + \frac{bIB^2}{abc} + \frac{cIC^2}{abc} = 1$$

Vậy : $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ac} + \frac{IC^2}{ab} = 1$ (Đpcm)

Ví dụ 4 : *Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Tìm M trên AC và N trên DC' sao cho MN // BD'. Tính tỷ số : $\frac{MN}{BD'}$*



Lời giải :

$\vec{AM} = x.\vec{AC}$

$\vec{DM} = y\vec{DC'}$

MN // BD' được viết lại

$\vec{MN} = z\vec{BD'}$ (*)

Đặt :

$\vec{BA} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}, \vec{BB'} = \vec{c}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng

Ta có : $\vec{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (*)

$\vec{MN} = \vec{BN} - \vec{BM}$

Từ : $\vec{DN} = y\vec{DC'}$

Ta có :

$\vec{DB} + \vec{BN} = y(\vec{DB} + \vec{BD'})$

$\vec{BN} - \vec{BD} = y(\vec{BC'} - \vec{BD})$

$\vec{BN} = (\vec{a} + \vec{b}) =$

$= y(\vec{b} + \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b}))$

$\vec{BN} = (1 - y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c}$

Từ : $\vec{AM} = x\vec{AC}$ ta có :

$\vec{BM} - \vec{BA} = x(\vec{BC} - \vec{BA})$

$\vec{BM} - \vec{a} = x(\vec{b} - \vec{a})$

$\vec{BM} = (1 - x)\vec{a} + x\vec{b}$

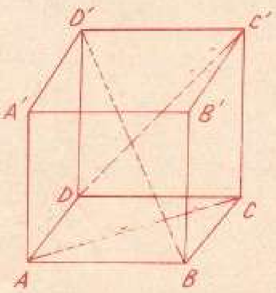
Do đó $\Rightarrow$:

$\vec{MN} = (x - y)\vec{a} + (1 - x)\vec{b} + y\vec{c}$ (2)

Thay (1) và 2) vào (*) ta có :

$(x - y)\vec{a} + (1 - x)\vec{b} + y\vec{c} = z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên



$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 1 - x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

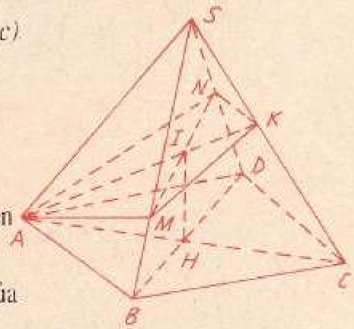
Vậy M cần xác định bởi

$$\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AC}$$

Ngoài ra : $\frac{MN}{BD'} = |z| = 1/3$

Ví dụ 5 : *Khai triển 2 bài toán của Phạm Bảo trong báo tờ 2/1995. Hình chóp SABCD, ABCD là đáy hình bình hành. Gọi K là điểm giữa của SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N.*

(Đề 149 tuyển sinh Đại học)



Lời giải :

$$\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$$

Đặt : $\frac{SB}{SM} = x$; $\frac{SD}{SN} = y$

Do : M, I, N thẳng hàng nên

$\vec{SI} = \alpha\vec{SM} + \beta.\vec{SN}$

(trong đó $\alpha + \beta = 1$) (1)

Do K, H là trung điểm của AC và SC

$\Rightarrow I$ trọng tâm $\Delta SBD \Rightarrow \frac{SH}{SI} = \frac{3}{2} \Rightarrow SI = \frac{2}{3}SH$

Vậy ta có :

$(1) \Leftrightarrow \frac{2}{3}\vec{AB} = \alpha.\frac{1}{x}\vec{SB} + \beta.\frac{1}{y}\vec{SD}$

Mà : $2\vec{SH} = SB = +\vec{SD} \Rightarrow$

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\vec{SB} + \vec{SB}) = \alpha\frac{1}{x}\vec{SB} + \beta.\frac{1}{y}\vec{SB}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{x} - \frac{1}{3}\right)\vec{SB} + \left(\frac{\beta}{y} - \frac{1}{3}\right)\vec{SD} = 0$

$\vec{SB}, \vec{SD}$ khác phương nên

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{\beta}{y} - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}\xi \\ \beta = \frac{1}{3}\psi \end{cases}$$

Mà $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}(x - y) = 1$

$\Rightarrow x + y = 3$ Vậy $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$

Trang báo có hạn tôi xin bạn đọc tìm tòi phát hiện thêm những ý giải toán sau các ví dụ này :

- Đề nghị bạn đọc tự giải tiếp :

Bài toán 1 : *Cho tam giác ABC gọi H là giao điểm 3 đường cao. Tìm các số α, β, φ sao cho*

$$\alpha.\vec{HA} + \beta.\vec{HB} + \gamma.\vec{HC} = 0$$

Bài toán 2 : *Tìm tập hợp những điểm M của mp (ABC) sao cho : $MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = k^2$ (k hằng số) mở rộng ra không gian, tìm những điểm $M \in$ tứ diện ABCD)*

Bài toán 3 : *Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm vòng tròn bàng tiếp. Chứng minh rằng có hệ thức*

$$-a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = 0$$

Bài toán 4 : *Cho ABC. I là tâm vòng tròn nội tiếp Chứng minh rằng :*

$$\frac{IA.IB.IC}{aIA^2 + bIB^2 + cIC^2} \leq \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Các bạn thử tìm xem nếu tâm nội tiếp tâm này là tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện thì ta có được hệ thức như thế nào ?

Còn có hệ thức nào tương tự như tâm nội tiếp nhưng đối với trực tâm ?

Giao điểm 3 đường trung trực (tức tâm vòng tròn ngoại tiếp ta có được hệ thức như thế nào ?

Chúc các bạn may mắn thành công, tìm được hệ thức như là trọng tâm G đối với tứ diện.

MỞ RỘNG BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ 1992

NGUYỄN TUẤN HẢI
(Hà Nam)

Trong kì thi vô địch toán quốc tế Matxcova 1992 có bài toán : "Cho 9 điểm trong không gian trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Các điểm được nối với nhau bằng các đoạn thẳng. Tìm số đoạn thẳng ít nhất sao cho với mọi cách tô các đoạn thẳng đó bằng 2 màu luôn luôn tồn tại các tam giác có 3 cạnh cùng màu". Trong số báo Toán học và Tuổi trẻ 6 - 1992 Giáo sư Hoàng Chúng đã có bài viết về bài toán này cùng gợi mở của nó. Bài báo này xin được giới thiệu kết quả khái quát của bài toán trên.

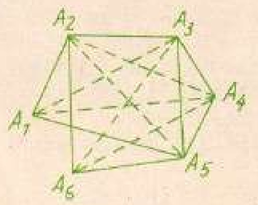
Ta hãy thay 9 điểm bởi n điểm tổng quát ($n \geq 6$) và phải tìm f(n) số nhỏ nhất các đoạn thẳng để cho với mọi cách tô f(n) đoạn đó bằng 2 màu xanh và đỏ ta đều tìm được một tam giác có 3 cạnh cùng màu. Ta chứng minh

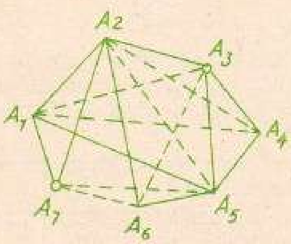
$$f(n) = \frac{n^2 - 3n + 12}{2}$$

Trước tiên $n = 6$, $f(n) = 15$ ta đã tô màu tất cả các đoạn tạo thành 6 điểm đó. Xét điểm A_1 là đầu mút của 5 cạnh khác nên có ít nhất 3 cạnh cùng màu A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4. Nếu 1 cạnh của $\Delta A_2A_3A_4$ cùng màu với 3 đoạn đó thì suy ra điều phải chứng minh, nếu không $\Delta A_2A_3A_4$ là tam giác thỏa mãn.

Với n điểm ta tô màu cho $f(n) = \frac{n^2 - 3n + 12}{2}$ đoạn thẳng, còn lại $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n^2 - 3n + 12}{2} = n - 6$ đoạn không được tô màu. Như thế ta đã tô màu tất cả các cạnh tạo từ n - (n - 6) = 6 điểm. Và theo trên tồn tại 1 tam giác có 3 cạnh cùng màu.

Ta chỉ ra cách tô bằng 2 màu cho f(n) - 1 đoạn thẳng mà ở đó không có một tam giác nào có 3 cạnh cùng màu. Ta sẽ xây dựng cách tô màu đó bằng quy nạp theo n. Cách tô màu sau đây với n = 6, 7, 8 thỏa mãn





Với khẳng định đúng được với n điểm, ta xây dựng cách tô màu cho (n + 1) điểm như sau : Chọn điểm Ai nào đó ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) mà nó nối với n - 1 điểm khác như sau : chọn điểm Ai nào đó ($i \in \{1, 2,..., n\}$) mà nó nối với n - 1 điểm khác trong hệ n điểm Ai. Ta không tô màu $A_{n+1}Ai$ còn $A_{n+1}Aj$ ($j \neq i$) được tô cùng màu với AiAj. Khi đó trong hệ (n + 1) điểm số đoạn thẳng được tô màu là

$$\frac{n(1-1)}{2} - (n-5) + (n-1) = f(n+1) - 1$$

mà không có tam giác mà có 3 cạnh cùng màu. Khẳng định được chứng minh hoàn toàn.

Tiếp theo ta sẽ mở rộng khẳng định khi dùng m màu để tô các đoạn thẳng. Trước hết ta kí hiệu Um là số điểm ít nhất sao cho $\forall$ cách tô tất cả các đoạn thẳng nối 2 điểm trong chúng bằng m màu luôn tồn tại một tam giác cùng màu. Bằng quy nạp theo m ta sẽ có Um = m(Um - 1 - 1) + 2 và $U_1 = 3$; $U_2 = 6$ (Bạn đọc có thể tìm được (*) trong bài báo "Bài toán Ramxay" của tác giả Lê Thống Nhất trên báo Toán học và Tuổi trẻ năm 1982).

Cũng từ (*) bằng quy nạp theo m ta được

$$Um = m!\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{(m-1)!} + \frac{2}{m!} + 2\right)$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng với n điểm và dùng n màu để tô thì số các đoạn thẳng ít nhất để cho $\forall$ cách tô chúng bằng m màu đều tồn tại 1 tam giác cùng màu là

$$f(n) = \frac{n^2 - 3n + 2Um}{2}$$

Thật vậy, bài toán đúng với n = Um (với n < Um g2 không có lời giải) còn trong trường hợp tổng quát (n > Um) ta tô màu cho f(n) đoạn còn lại $\frac{n(n-1)}{2} - f(n) = n - Um$ đoạn không được tô màu. Loại bỏ (n - Um) điểm là đầu mút của 1 trong n - Um đoạn đó ta được n - (n - Um) = Um điểm mà tất cả các đoạn thẳng nối 2 điểm của chúng đều được tô màu. Theo trên tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu. Phép xây dựng các tô màu cho f(n) - 1 đoạn thẳng cũng tương tự như cách xây dựng của phép tô 2 màu đã trình bày ở trên.

Tóm lại, số ít nhất các đoạn thẳng cần tô bằng m màu là :

$$f(n) = n(n-3) + m\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{(m-1)!} + \frac{2}{m!} + 2\right)$$

Bạn đọc thân mến !

Trên đây là kết quả tổng quát của 1 bài toán khó. Tôi đã rất vui khi tìm ra kết quả này. Các bạn hãy suy nghĩ cho trường hợp tồn tại một đa giác S cạnh cùng màu. Cuối cùng các bạn hãy thử chứng minh rằng trong trường hợp $m = 1$ thì $f(n) = [\frac{n^2}{4}] + 1$.

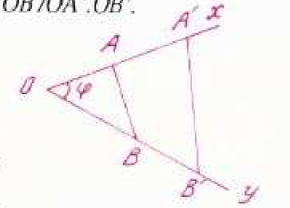
Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

MỘT VÀI KẾT QUẢ ĐẸP CỦA HÌNH HỌC CHỨNG MINH BẰNG PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

VÕ GIANG GIAI
(Tp. Hồ Chí Minh)

Để có những kết quả sau, trước hết ta phải chứng minh 2 bổ đề quen thuộc sau :

Bổ đề 1 : Cho $0 < xOy < 180^\circ$; $A, A' \in Ox$; $B, B' \in Oy$.
Ta có : $S_{OAB} / S_{OA'B'} = OA.OB / OA'.OB'$.
Đặt : $xOy = \varphi$
Ta có :



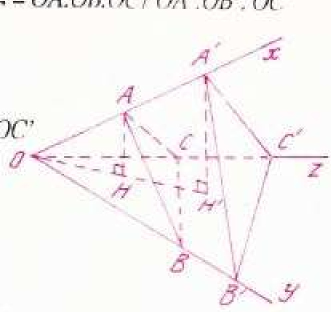
$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \,.\, OB \,.\, \sin\varphi$$

$$S_{OA'B'} = \frac{1}{2} OA' \,.\, OB' \,.\, \sin\varphi$$

Suy ra ta có được bổ đề 1.

Bổ đề 2 : Cho tam diện $Oxyx$; $A, A' \in Ox$; $B, B' \in Oy$; $C, C \in Oz$. Ta có : $V_{OABC}/V_{OA'B'C} = OA.OB.OC / OA'.OB'.OC$

Giải :
Kẻ : $AH, A'H' \perp (Oyz)$
Ta có :
$AH/A'H' = OA/OA'$
$S_{OBC}/S_{OB'C'} = OB.OC / OB'.OC'$
(do Bổ đề 1)



$$V_{OABC} = \frac{1}{3} AH \,.\, S_{OBC}$$

$$V_{OA'B'C'} = \frac{1}{3} A'H' \,.\, S_{OBC}$$

Suy ra ta có được bổ đề 2.

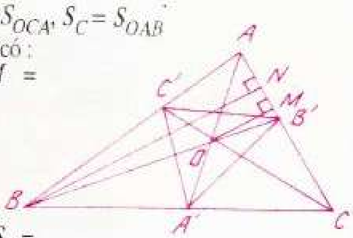
Bài toán 1. *Cho* ΔABC *; O nằm trong tam giác : AO, BO, CO cắt BC, CA, AB tương ứng A', B', C'. Chứng minh rằng :*

$$S_{A'B'C'} \leq \frac{1}{4} S_{ABC} \text{ dấu "=" } \Leftrightarrow O \text{ là trọng tâm tam giác.}$$

Giải :

Đặt $\begin{cases} S = S_{ABC},\ S' = S_{A'B'C} \\ S_A = S_{OBC},\ S_B = S_{OCA'},\ S_C = S_{OAB} \end{cases}$

Kẻ : $OM, BN \perp AC$, ta có :
$OB'/BB' = OM/BM =$
$\frac{1}{2} AC \,.\, OM / \frac{1}{2} AC \,.\, BN$
$= S_B/S.$



Chứng minh tương tự :
$OC''/CC' = S_C/S.$
Theo Bổ đề 1 : $S_{OB'C'}/S_A =$
$OB'.OC'/OB.OC = OB'.OC'$
$/(BB' - OB')(CC' - OC)$
$= 1/(BB'/OB' - 1).(CC'/OC' -$
$1) = 1/(S/S_B - 1)(S/S_C - 1)$
$= S_B.S_C/(S - S_B)(S - S_C)$
$\Rightarrow S_{OB'C'} = (S - S_A).\alpha$, $\alpha = S_A.S_B.S_C / (S - S_A)(S - S_B)(S - S_C)$ Chứng minh tương tự :

$$S_{OC'A'} = (S - S_B).\alpha$$
$$S_{OA'B'} = (S - S_C).\alpha$$

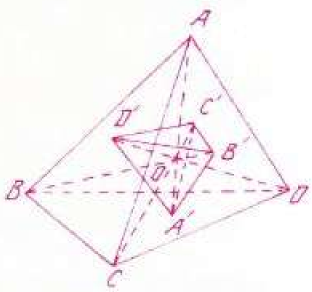
$\Rightarrow S' = S_{OB'C'} + S_{OC'A'} + S_{OA'B'} =$
$= [(S - S_A) + (S - S_B) + (S - S_C)]\alpha.$
Hơn nữa : Theo bất đẳng thức Cauchy thì
$S - S_A = S_B + S_C \geq 2\sqrt{S_B . S_C}$ $S - S_B = S_C + S_A \geq 2\sqrt{S_C . S_A}$ $S - S_C = S_A + S_B \geq 2\sqrt{S_A . S_B}$
$\Rightarrow (S - S_A)(S - S_B)(S - S_C) \geq 8 S_A.S_B.S_C$
$\Rightarrow \alpha \leq 1/8$
Dấu "=" $S_A = S_B = S_C \Leftrightarrow O$ trọng tâm ΔABC
Như vậy : $S' \leq S/4$ Dấu "=" $\Leftrightarrow$ trọng tâm ΔABC.

Đặc biệt : Nếu O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì ta có ngay kết quả bài toán trong đề thi học sinh giỏi lớp 9 toàn quốc - 1996.

Bài toán 2 : *Cho tứ diện ABCD ; O nằm trong tứ diện ; AO, BO, CO, DO cắt (BCD), (ACD), (ABD), (ABC) tương ứng là A', B', C', D'.*
Chứng minh rằng :

$$V_{A'B'C'D'} \leq \frac{1}{27} V_{ABCD}. \text{ Dấu "=" } \Leftrightarrow O \text{ là trọng tâm tứ diện.}$$

Giải :
Đặt : $V = V_{ABCD'}$
$V' = V_{A'B'C'D'}$
$V_A = V_{AOBCD'}$
$V_B = V_{OACD'}$
$V_C = V_{OABD'}$, $V_D = V_{OABC}$



Kẻ : $OM, BN \perp (ACD)$, ta có :
$OB'/BB' = OM/BN$
$= \frac{1}{3} OM \,.\, S_{ACD} / \frac{1}{3} BN \,.\, S_{ACD}$
$= V_B/V$
Chứng minh tương tự :
$OC''/CC' = V_C/V$, $OD'/DD' = V_D/V$
Theo Bổ đề 2 : $V_{OB'C'D'}/V_A = OB'.OC'.OD' / OB.OC.OD$
$= OB'.OC'.OD' / (BB' - OB')(CC' - OC')(DD' - OD')$
$= 1/(BB'/OB' - 1) - (CC'/OC' - 1).(DD'/OD' - 1)$
$= 1/(V/V_B - 1)(V/V_C - 1)(V/V_D - 1)$
$= V_B.V_C.V_D/(V - V_B)(V - V_C)(V - V_D).$
$\Rightarrow V_{AB'C'D'} = (V - V_A)\alpha,$
Với $\alpha = V_A.V_B.V_C.V_D/(V - V_A)(V - V_B)(V - V_C)(V - V_D).$
Chứng minh tương tự :
$V_{OA'C'D'} = (V - V_B).\alpha$
$V_{OA'B'D'} = (V - V_C).\alpha$
$V_{OA'B'C'} = (V - V_D).\alpha$
Suy ra :
$V' = (V - V_A)\alpha + (V - V_B)\alpha + (V - V_C)\alpha + (V - V_D)\alpha =$
$= 3V.\alpha$
Hơn nữa theo Bất đẳng thức Cauchy thì
$V - V_A = V_B + V_C + V_D \geq 3\sqrt[3]{V_A . V_C . V_D}$
Chứng minh tương tự :
$V - V_B \geq 3\sqrt[3]{V_A . V_B . V_D}$
$V - V_C \geq 3\sqrt[3]{V_A . V_B . V_D}$
$V - V_D \geq 3\sqrt[3]{V_A . V_B . V_C}$
$\Rightarrow (V - V_A) - (V - V_B) - (V - V_C) \geq 81\, V_A.V_B.V_C.V_D \Rightarrow$
$\Rightarrow a \leq 1/81$
Dấu "=" $\Leftrightarrow V_A = V_B = V_C = V_D$
$\Leftrightarrow$ Trọng tâm tứ diện

Như vậy : $V' \leq \frac{1}{27} V.$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ O trọng tâm tứ diện.

Sau đây là những bài toán có thể làm theo phương pháp trên :

Bài 1. Cho ΔABC, $BC = a$, $CA = b$, $AC = c$; O tâm đường tròn nội tiếp : AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt là A', B' C'.
Tính tỷ số : $S_{A'B'C'} : S_{ABC}$

Bài 2. Cho hình chóp SABCD, ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt SA, SB, SC, SD lần lượt là :
A', B', C', D'. Chứng minh rằng :
$SA/SA' \ S_C/S_{C'} = S_B/S_{B'} + S_D/S_{D'}$
(Đề số 57, V_b, bộ đề toán "Đề thi tuyển sinh", 1994).

Tìm ra ... chỗ sai

Trước hết, xin nhắc lại bài toán (xem thêm số 237)

"Cho phương trình bậc hai

$$x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0 \ (k \in R)$$

Hãy xác định k để $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất (x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình)".

Lời giải cho kết quả là $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là - 5 khi $k = -1$.

Không cần xem lời giải cũng thấy là kết quả sai vì $A = x_1^2 + x_2^2$ không thể nhận giá trị âm !

Nguyên nhân sai là lời giải thiếu điều kiện để phương trình có nghiệm. Tham số k phải thỏa mãn $\Delta x \geq 0 \ (=) \ k \geq \frac{7}{2}$.

Xét $A = 2k^2 + 4k - 3$ với $k \geq \frac{7}{2}$. Lập bảng biến thiên của A :

k	$-\infty$	-1	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
A	$+\infty$ $\searrow$		$\frac{81}{8}$ $\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, có kết quả đúng là A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{81}{8}$ khi và chỉ khi $k = \frac{7}{4}$.

Nhận xét : Nhiều bạn chỉ nêu ra chỗ sai mà không góp phần sửa chữa lời giải. Có bạn giải nhưng vẫn tiếp tục sai.

Các bạn Đào Phan Thoại, 8T, trường năng khiếu Triệu Sơn, Thanh Hóa, Phạm Lê Minh, 9 Lý, trường năng khiếu Bắc Giang có nhận xét tốt và giải chính xác.

LÊ THỐNG NHẤT

THÔNG BÁO

Tạp chí *TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ* xin giới thiệu với bạn đọc :

Tuyển tập 30 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ

Với 172 bài viết và 146 đề toán phân loại theo từng chủ điểm, cuốn sách này có thể cung cấp cho các bạn nhiều tư liệu thú vị, bổ ích. Nhiều bạn không có điều kiện lưu giữ các số tạp chí từ năm 1964 thì cuốn sách này phần nào đáp ứng được mong muốn của các bạn. Các tác giả và các bạn tham gia giải toán từ những năm trước đây có thể gặp lại những kỉ niệm của mình. Sách gồm 504 trang, khổ 19 × 26,5 in trên giấy tốt ra mắt các bạn vào đầu tháng 7 năm 1997. Các bạn có thể mua tại 57 Giảng võ, 81 Trần Hưng Đạo, 197 Tây Sơn, 25 Hàn Thuyên, 23 Tràng Tiền, *HÀ NỘI* ; 231 Nguyễn Văn Cừ, 240 Trần Bình Trọng, quận 5, TP *HỒ CHÍ MINH* ; 15 Nguyễn Chí Thanh, *ĐÀ NẴNG* hoặc đặt mua tại các Công ty Sách và Thiết bị trường học thuộc các Sở Giáo dục và đào tạo, PHÒNG KẾ HOẠCH TIÊU THỤ - TRUNG TÂM PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC (thuộc NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC) 57 Giảng Võ, *Hà Nội* (điện thoại : 04.8562493). Giá sách : 28.000đ. Mọi chi tiết các bạn có thể trực tiếp liên hệ với Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 81 Trần Hưng Đạo, *Hà Nội* (điện thoại : 04.8220073).

TH v TT

ISSN : 0866 - 8035 Chỉ số : 12884 Mã số : 8BT43M7

Giải đáp bài

HỎI TUỔI CỦA MỖI NGƯỜI

Nếu gọi tuổi của ông là x, tuổi của cha là y, tuổi của con là z thì theo điều kiện của bài toán ta có :

- Lúc cháu ra đời thì tuổi ông bằng tuổi cha sau đây 12 năm :

$$x - z = y + 12 \qquad (1)$$

- Ông có con sớm hơn cha có con là 2 năm :

$$x - y + 2 = y - z \qquad (2)$$

- Tổng số tuổi của ông, cha và cháu là 100 :

$$x + y + z = 100 \qquad (3)$$

Như thế ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - z - y = 12 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được tuổi ông : $x = 56$ tuổi cha : $y = 34$ và tuổi con $z = 10$.

Nhận xét : 1. Có rất nhiều bạn có giải đáp đúng.

2. Các bạn *Trịnh Thành Đông*, 4A, Vĩnh Thành, Vĩnh Lộc **Thanh Hóa** *Nguyễn Mạnh Tuấn*. 5A Thanh Dương, Thanh Chương, **Nghệ An** *Nguyễn Dũng Hải* : 6T_1, *Nguyễn Thế Phương* 6T_3 NK Nguyễn Du, Gò Vấp, TP.**HCM**, *Nguyễn Tấn Minh Tường* : 6/2, Nguyễn Khuyến. *Trần Thị Ninh Nhâm* Tiên Lãng, **Hải Phòng.** *Trịnh Hưng Yên*, 7A, Chuyên cấp II, *Bùi Tấn Nghĩa*, 7A_1, Chuyên Phong Châu, **Phú Thọ**. *Phí Anh Dũng*, 7A, Chuyên Thạch Thất, **Hà Tây**. *Trần Đăng Ninh*, 7T, Trần Đăng Ninh, **Nam Định.** *Phạm Sỹ Vinh*, 7A, Hưng Dũng, Vinh, **Nghệ An**. *Lê Thị Minh Tâm*. Pleiku, **Gia Lai.** *Lê Phú Cường* Tây kỳ, Tứ kỳ, **Hải Dương** không lập và giải phương trình nhưng đã đưa ra *những lập luận* dẫn đến *giải đáp đúng*.

BÌNH PHƯƠNG

THÀNH PHỐ CÓ BAO NHIÊU TUYẾN XE ?

Mạng lưới các tuyến ô tô buýt của một thành phố được bố trí theo nguyên tắc :

a) Mỗi tuyến chỉ có ba bến đỗ

b) Hai tuyến bất kì hoặc không có, hoặc nếu có thì chỉ có một bến đỗ chung. Hỏi có thể bố trí nhiều nhất là bao nhiêu tuyến xe trong thành phố chỉ có 9 bến đỗ ?

NGUYỄN CÔNG SỨ

THÔNG BÁO THAY ĐỔI TRỤ SỞ

Bắt đầu từ tháng 6-1997, trụ sở của Tòa soạn TC TH&TT chuyển về :

81, Trần Hưng Đạo, Hà Nội. ĐT : 04.8220073

Thư từ và bài vở xin gửi về tòa soạn theo địa chỉ trên

TC TH&TT

Chế bản tại TT CB-ĐH NXB Giáo dục
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7/1997

Giá : 2.000đ
Hai nghìn đồng