BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

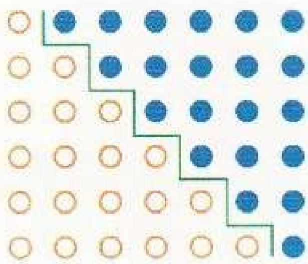
Toán học & Tuổi trẻ

8
2000

SỐ 278 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

CÔNG THỨC TÍNH TỔNG TỪ NHỮNG VIÊN BI

Các bạn nhỏ chắc rất lúng túng khi gặp những phép tính tổng phức tạp, chẳng hạn tính $A = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$. Những viên bi có thể giúp ích cho bạn, giống như các nhà nghiên cứu toán thời cổ Hy Lạp.



Hình 1

• Hãy xếp các viên bi như hình 1 và lấy các băng giấy ngăn cách chúng thì dễ dàng thấy $1+2+3+4+5+6 = \frac{1}{2}6(6+1) = \frac{42}{2} = 21$. Từ đó có thể tổng quát hóa thành công thức tính tổng

$$1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

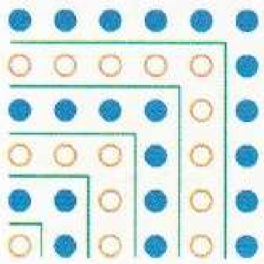
• Hình ảnh bên giúp các bạn dễ nhớ công thức, đồng thời cũng gợi ý cách chứng minh công thức

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

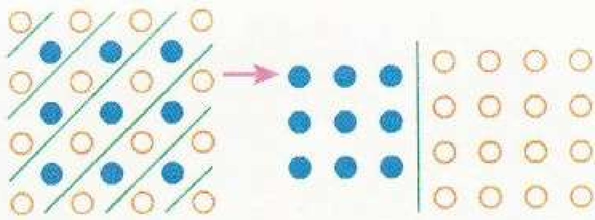
1) Hình 2 gợi cho bạn công thức gì ? Bạn có cách xếp bi nào khác để tìm được công thức đó không ?

2) Hỏi như trên đối với hình 3.

Năm phần thưởng dành cho các bạn gửi về sớm và có ý tưởng hay.



Hình 2



Hình 3

GIẢI ĐÁP

Từ định lí Ơle đến năm "của hiếm"

Một số bạn đã chứng minh được định lí Ơle. Các bạn đều thấy : $C_đ.D = 2C$ và $C_m.M = 2C$. Từ đó sẽ có : $\frac{1}{C_đ} + \frac{1}{C_m} = \frac{D+M}{2C} = \frac{C+2}{2C} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2}$. Nếu $C_đ, C_m > 3$ thì $\frac{1}{C_đ} + \frac{1}{C_m} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ mâu thuẫn, mà $C_đ, C_m \ge 3$, suy ra $C_đ = 3$ hoặc $C_m = 3$. Khi $C_đ = 3$ thì $\frac{1}{C_m} = \frac{1}{C} + \frac{1}{6}$ nên $3 \le C_m \le 5$. Khi $C_m = 3$, tương tự ta có $3 \le C_đ \le 5$. Từ đó dẫn đến 5 loại khối đa diện đều. Thực ra, còn một con đường khác để dẫn đến điều này, các bạn thử suy nghĩ xem ? Xin trao phần thưởng cho 5 bạn : *Đỗ Đức Lân*, 11T, THPT Năng khiếu Hàn Thuyên, Bắc Ninh; *Hoàng Khắc Ngân*, lớp Toán 4E, ĐHSP Huế; *Đặng Quang Huy*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; *Vũ Thiện Phúc*, 12 phố Bà Triệu, Tp Nam Định; *Chu Thị Bích*, 11A1, THPT Trưng Vương, Văn Lâm, Hưng Yên.

GALLERY

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 278 (8-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

TRONG SỐ NÀY

NHÂN DỊP KỈ NIỆM 90 NĂM NGÀY SINH CỦA GS. TẠ QUANG BỬU (23.07.1910)

BÁC BỬU VÀ NGHIỆP TOÁN CỦA TÔI

NGÔ VIỆT TRUNG
(Viện Toán học Việt Nam)

Tôi là người chịu ơn bác Tạ Quang Bửu rất nhiều. Nếu không có bác Bửu quan tâm giúp đỡ đi học nước ngoài thì chưa chắc tôi đã theo nghiệp toán. Năm 1969, tôi được gọi tập trung ở Trường Đại học Bách khoa để chuẩn bị đi du học. Sau khi thi kiểm tra hai môn toán và văn, tôi được gửi đi học ở Đức. Lúc đấy tôi nghĩ rằng đó là do mình học giỏi mà được (tôi đạt giải nhất thi toán toàn miền Bắc và đỗ đầu cuộc thi kiểm tra toán cho học sinh đi học nước ngoài - bài kiểm tra do chính bác Bửu ra). Mãi sau này tôi mới biết là theo thỏa thuận với các nước xã hội chủ nghĩa thì tôi không đủ tiêu chuẩn đi du học vì tôi bị liệt một chân từ bé, đi xa phải dùng nạng. Nhưng bác Bửu vẫn gọi tôi lên tập trung. Lúc đầu Bác xin cho tôi đi học ở Liên Xô, nhưng họ từ chối. Đúng lúc đó thì có một đoàn của Bộ Đại học Cộng hòa dân chủ Đức sang thăm Việt Nam. Bác Bửu đã trực tiếp nói chuyện với ông Thứ trưởng, trưởng đoàn về trường hợp của tôi và ông này đã đồng ý nhận tôi sang học. Tôi được phân công học môn Công nghệ thông tin vì năm đó Đức không nhận sinh viên Việt Nam học toán. Nhưng sau một năm học tiếng ở Đức thì tôi được cử đi học tổng hợp toán cùng hai bạn khác. Hóa ra là bác Bửu đã tiếp tục đàm phán với Bộ Đại học Cộng hòa dân chủ Đức để tôi được học toán.

Trước khi sang Đức, tôi chưa bao giờ được gặp trực tiếp bác Bửu. Lần đầu tiên tôi nhìn thấy Bác là lúc Bác nói chuyện với học sinh ở Trường Đại học Bác khoa trước khi đi học nước ngoài. Tôi vẫn nhớ cảm tưởng lúc đó về Bác như một ông già giản dị và hiền từ. Khoảng năm 1972, một hôm tôi và hai bạn nhận được điện của sứ quán Việt Nam nói là bác Bửu nhắn chúng tôi lên Béclin gặp Bác, khi đó đang thăm Cộng hòa dân chủ Đức. Đó là một vinh dự đặc biệt vì cùng trường chúng tôi còn có nhiều sinh viên Việt Nam học toán của những năm khác. Chúng tôi đến gặp Bác lúc tối ngay tại phòng Bác ở Hotel Stadt Berlin là khách sạn lớn nhất Berlin lúc bấy giờ. Đầu tiên Bác hỏi chúng tôi đã học những gì, sau đó Bác kể kinh nghiệm Bác học ở bên Anh. Câu chuyện dần dần chuyển sang các chuyện tiếu lâm lúc nào không biết và chúng tôi cứ "há mồm" ra mà cười, quên mất rằng người kể chuyện là một bộ trưởng. Lúc Bác định đi ngủ thì trời đã khuya và Bác nói ba đứa chúng tôi cứ ngủ ngay tại phòng Bác. Trước khi đi ngủ Bác còn dạy chúng tôi cách bấm huyệt để chữa mỏi lưng và đau đầu. Đó là một kỉ niệm không thể nào quên đối với tôi.

Năm 1978, tôi về nước công tác tại Viện Toán học. Nghe tin, Bác gọi tôi đến gặp tại nhà riêng ở đường Hoàng Diệu. Tôi phải trình bày sơ qua về luận án phó tiến sĩ của mình cho Bác nghe. Không ngờ Bác lại hiểu rất nhiều về những khái niệm Đại số giao hoán là chuyên ngành tôi đang nghiên cứu. Năm 1980, Bác có đưa cho tôi hai quyển vở dày ghi chép gần như toàn bộ cuốn sách "Algèbre Locale - Multiplicités" của J-P. Serre là một cuốn sách kinh điển về Đại số giao hoán. Trang đầu của một trong hai cuốn vở có ghi "Bửu, Đồ Sơn - 1973". Như vậy là bác Bửu đã đọc rất kĩ cuốn sách của Serre ngay từ năm 1973 là lúc tôi mới tập tễnh vào nghề ở bên Đức. Bác còn gọi tôi đến nhà Bác nhiều lần khác để nói chuyện về toán học như về toán siêu hình, lí thuyết tai biến, lí thuyết kì dị, v.v... Thú thật là tôi chỉ nghe Bác nói là chính vì tôi không hiểu nhiều lắm về những chuyên ngành này. Tuy thế tôi vẫn nhận thấy Bác hiểu bản chất các vấn đề nêu ra rất sâu sắc. Thỉnh thoảng Bác lại lấy một cuốn sách từ trên những giá sách cao ngất trong phòng khách để chỉ cho tôi xem một số điều. Điều này chứng tỏ bác đã đọc và suy ngẫm rất nhiều . Ở Viện Toán chúng tôi vẫn thường nói đùa rằng, nếu một cuốn sách nào đó về những chuyên ngành trên không còn tìm thấy trong viện nữa thì chắc là nó đang nằm ở nhà bác Bửu.

Tôi còn được gặp bác Bửu nhiều lần tại các buổi sinh hoạt khoa học. Bác luôn ân cần hỏi thăm tình hình nghiên cứu của tôi. Đặc biệt, Bác đã đến dự buổi bảo vệ đề cương luận án tiến sĩ của tôi năm 1980 tại Viện Toán học. Sau buổi bảo vệ này, bác Bửu gửi cho tôi một bức thư dài (cùng hai cuốn vở trên) khuyên tôi nên áp dụng những điều mình nghiên cứu vào lí thuyết kì dị và vật lí. Những cuộc nói chuyện với bác Bửu cùng những lời khuyên của Bác đã động viên tôi làm việc rất nhiều. Chúng cũng cho tôi thấy kiến thức của mình còn rất hạn hẹp và mình phải biết gắn những nghiên cứu về chuyên ngành Đại số giao hoán với những vấn đề của các ngành khác. Ngay lúc này đây, sau khi đọc bức thư cũ của bác Bửu, tôi lại tự hỏi mình đã xứng đáng với sự tin cậy của Bác chưa.

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC VÀ NHỮNG SAI LẦM DỄ MẮC

VŨ HỮU BÌNH
(GV Trường THCS Trưng Vương, Hà Nội)

Trong các bài toán Hình học, ta gặp các bài toán có nội dung như sau : Trong tất cả các hình có chung một tính chất, tìm những hình mà một đại lượng nào đó (như độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích...) có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất. Đó là các bài toán cực trị hình học. Bài toán cực trị hình học hấp dẫn học sinh bởi vấn đề nó đặt ra mang tính thực tiễn : đi tìm cái lớn nhất, nhỏ nhất, nhiều nhất, ít nhất..., chính là những cái tối ưu thường gặp trong đời sống và kĩ thuật.

Bài viết này đề cập đến những sai lầm phổ biến thông qua một bài toán cực trị hình học. Trước hết ta nhắc lại *đường lối tổng quát* giải bài toán cực trị hình học : Để tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất), ta phải thực hiện hai bước :

- *Bước 1* : Chứng tỏ rằng với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \leq m$ (hoặc $f \geq m$) với m là hằng số.

- *Bước 2 :* Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$.

Bài toán: *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến tại A và tại B theo thứ tự ở C và D.*

a) Chứng minh rằng ΔCOD và ΔAMB đồng dạng.

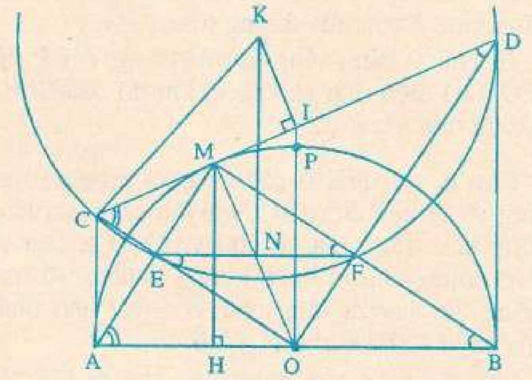
b) Khi điểm M di chuyển trên nửa đường tròn tâm O thì ΔCOD có diện tích nhỏ nhất không ?

c) Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn tâm O sao cho ΔCOD có chu vi nhỏ nhất.

d) Gọi E là giao điểm của OC và AM, gọi F là giao điểm của OD và BM. Chứng minh rằng tứ giác CEFD nội tiếp được trong một đường tròn tâm K và tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính KC của đường tròn đó.

LỜI GIẢI CỦA MỘT HỌC SINH

a) $OMDB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle ODM = \angle OBM$. Tương tự $\angle OCM = \angle OAM$. Do đó ΔCOD và ΔAMB đồng dạng (g.g.) (h.1).



Hình 1

b) Kẻ $MH \perp AB$, ta có $OM \geq MH$ nên $\dfrac{S_{COD}}{S_{AMB}} = \left(\dfrac{OM}{MH}\right)^2 \geq 1.$

Như vậy $S_{COD} \geq S_{AMB}$, do đó S_{COD} nhỏ nhất khi diện tích AMB nhỏ nhất. Dễ thấy ΔAMB không có diện tích nhỏ nhất (vì đáy AB cố định, còn đường cao MH có thể nhỏ tùy ý), do đó ΔCOD cũng không có diện tích nhỏ nhất.

c) Ta có $\dfrac{\text{chu vi } COD}{\text{chu vi } AMB} = \dfrac{OM}{OH} \geq 1$. Như vậy chu vi $COD \geq$ chu vi AMB, do đó : chu vi COD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ chu vi COD = chu vi AMB $\Leftrightarrow OM = MH \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của nửa đường tròn.

d) Ta có $\angle ODM = \angle OBM = \angle EFM = \angle OEF$ nên $CEFD$ là tứ giác nội tiếp trong một đường tròn tâm K. Do CD là dây của đường tròn (K) nên $KC \geq \dfrac{CD}{2} \geq \dfrac{AB}{2} = R$.

Do đó : $\min KC = R \Leftrightarrow CD = AB \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của nửa đường tròn.

NHẬN XÉT LỜI GIẢI TRÊN

Câu a. Lời giải ở câu a là đúng.

Câu b. Lời giải ở câu b là sai. Tuy ΔAMB không có diện tích nhỏ nhất, nhưng từ đó không suy ra được ΔCOD không có diện tích nhỏ nhất. Sai lầm của lời giải do không thỏa mãn m là hằng số khi thực hiện bước 1 của đường lối giải tổng quát nêu trên.

Lời giải đúng cho câu b:

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CD.OM \geq \frac{1}{2} AB . OM =$$
$$= \frac{1}{2} . 2R . R = R^2.$$

$\min S_{COD} = R^2 \Leftrightarrow CD = AB \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa P của nửa đường tròn.

Ta chú ý thêm rằng khi M trùng với P thì ΔCOD có diện tích nhỏ nhất, khi đó ΔAMB lại có diện tích *lớn nhất*.

Câu c. Lời giải ở câu c là sai mặc dù tìm đúng vị trí của điểm M. Nguyên nhân sai lầm giống như trên : Ta có chu vi $COD \geq$ chu vi AMB nhưng chu vi AMB không là hằng số nên không thể suy ra rằng chu vi COD nhỏ nhất khi chu vi COD = chu vi AMB.

Sai lầm kiểu này cũng hay xảy ra khi xét cực trị đại số : Ta có $x^2 + 1 \geq 2x$ (xảy ra dấu "=" khi và chỉ khi $x = 1$) nhưng không thể suy ra rằng x^2+1 có giá trị nhỏ nhất khi $x^2+1 = 2x$. Thật vậy khi $x^2 + 1 = 2x$ thì giá trị của $x^2 + 1$ bằng 2, không phải là giá trị nhỏ nhất (giá trị nhỏ nhất của $x^2 + 1$ là 1 với $x = 0$).

Lời giải đúng cho câu c:

Chu vi $COD = OC + OD + CD$. Gọi I là trung điểm của CD, ta có :

$$CD = 2OI \geq 2OM = 2R \qquad (1)$$

$$OC + OD \geq 2\sqrt{OC.OD} = 2\sqrt{CD.OM} \geq 2\sqrt{2R.R} = 2R\sqrt{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) có

Chu vi $COD \geq 2R + 2R\sqrt{2} = 2R(1 + \sqrt{2})$ (hằng số).

Chu vi COD bằng $2R(1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow$ Đẳng thức xảy ra ở cả (1) và (2) $\Leftrightarrow M \equiv I \equiv P$. Như vậy khi M trùng với P thì ΔCOD có chu vi nhỏ nhất.

Câu d. Lời giải ở câu d là sai. Sai lầm do khi thực hiện bước 2 của đường lối giải tổng quát từ $KC \geq \frac{CD}{2} \geq \frac{AB}{2} = R$ suy ra $\min KC = R$ với $CD = AB$ nhưng không xét xem có xảy ra $KC = \frac{CD}{2}$? Khi $KC = \frac{CD}{2}$, thì $K \equiv I$, nhưng điều này không xảy ra.

Lời giải đúng cho câu d:

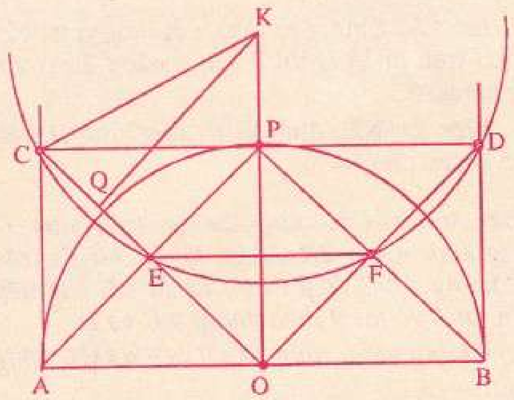
Ta có : $KC^2 = CI^2 + KI^2$ (định lí Pitago) và $CI \geq R$ (h.1). Ta sẽ chứng tỏ rằng $KI = \frac{R}{2}$. Thật vậy nếu điểm I không trùng với điểm P, gọi N là giao điểm của OM và EF, ta có $KN // IO$ (vì $KN \perp EF$, $IO \perp AB$ mà $EF // AB$). Ta lại có $KI // ON$ (cùng vuông góc với CD). Do đó $KION$ là hình bình hành, suy ra $KI = ON = \frac{R}{2}$. Nếu I trùng với điểm P, gọi Q là chân đường vuông góc kẻ từ K tới CO (h.2) thì $KQ // PE$, do đó

$$\frac{KP}{PO} = \frac{QE}{EO} \Rightarrow KI = KP = \frac{PO}{2} = \frac{R}{2}.$$

Trong cả 2 trường hợp đều có :

$$KC^2 \geq R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5R^2}{4}.$$

Từ đó : $\min KC = \frac{R\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow CI = R \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa P của nửa đường tròn.



Hình 2

Kết luận: Những sai lầm khi giải toán cực trị hình học cho thấy : sự linh hoạt trong giải toán tuy cần thiết nhưng không thể tùy tiện, vẫn phải đảm bảo những nguyên tắc nhất định. Toán học đòi hỏi một tư duy rành mạch ; chỉ mập mờ đôi chút là đã có thể dẫn đến sai lầm./.

Trả lời bạn đọc

LTS : *Tòa soạn nhận được nhiều thư của bạn đọc. Xin giải đáp 4 bài toán dưới đây, ngoài ra một số bài toán khác có trong bài viết của thầy giáo Trần Đức Chiến vừa gửi tới Tòa soạn. Xin đăng kịp thời bài viết này (trang 6) như là lời giải đáp cho các bạn.*

GIẢI ĐÁP
MỘT SỐ BÀI TOÁN THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

Câu II.2, ĐH Giao thông vận tải Hà Nội :

Tìm a để phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$1 + \sin^2 ax = \cos x \qquad (*)$$

Đáp: Với mọi x ta có $1 + \sin^2 ax \geq 1 \geq \cos x$,

nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin^2 ax = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin ax = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = k\pi \\ x = 2n\pi \end{cases} \text{ với } k, n \in Z.$$

Nếu $a = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm $x = 2n\pi$ $(n \in Z)$.

Nếu $a \neq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2n\pi \\ \dfrac{k}{a} = 2n \end{cases}$.

Vì $x = 0$ luôn thỏa mãn phương trình nên (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x \neq 0$ không thỏa mãn (*). Khi đó $x \neq 0 \Leftrightarrow n \neq 0$, nên $a = \dfrac{k}{2n}$.

Nếu a là số vô tỉ thì không tồn tại $k \in Z$; $n \in Z$; $n \neq 0$ để $x = 2n\pi$ là nghiệm $\Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất.

Nếu a là số hữu tỉ thì $a = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in Z$ và $q \neq 0$. Khi đó chọn $k = 2p$; $n = q \neq 0$ thì $x = 2n\pi \neq 0$ là nghiệm của (*) $\Rightarrow a$ là số hữu tỉ không thỏa mãn bài toán. Tóm lại : (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a$ là số vô tỉ.

Chú ý : đây là một bài toán thi vào Đại học của Liên Xô trước đây.

Câu II.2, ĐH Kiến trúc và Câu III.2, ĐH Thái Nguyên

Giải phương trình : $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2)$

Đáp: Đặt $t = \log_7 x \Leftrightarrow x = 7^t$. Khi đó phương trình trở thành

$$t = \log_3(\sqrt{7^t} + 2) \Leftrightarrow 3^t = (\sqrt{7})^t + 2$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2\left(\frac{1}{3}\right)^t.$$

Ta có $f(t) = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^t$ là hàm số nghịch biến trên R và $f(2) = 1$ nên $f(t) = f(2) \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 49$.

Câu II.1. ĐH Sư phạm Hà Nội

Giải hệ : $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$

Đáp: $x = 0$ không thỏa mãn hệ nên hệ tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x} = 6 \\ \dfrac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = 6 \\ \left(\dfrac{1}{x} + y\right)^2 - 2\dfrac{y}{x} = 5 \end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$ và $v = \dfrac{1}{x} + y$ ta có :

$$\begin{cases} u.v = 6 \\ v^2 - 2u = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{v^2 - 5}{2} \\ v^3 - 5v - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 \\ u = 2 \end{cases}$$

Từ đó hệ có 2 nghiệm : $(1; 2)$, $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Câu II.3 ĐH Ngoại thương (CSII)

Cho các số dương x và y thỏa mãn điều kiện : $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. *Chứng minh rằng :*

$$x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 \leq x + y \leq 2.$$

Đáp: Từ giả thiết ta thấy không xảy ra khả năng $x > 1$ và $y > 1$.

* Nếu $0 < x, y \leq 1$ thì $x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$ và $y^3 \leq y^2 \leq y \leq 1$ nên suy ra đpcm.

* Nếu $0 < x \leq 1$ và $y > 1$ thì $x^2(1 - x) \leq x^k(1 - x)$ và $y^3(1-y) \leq y^k(1 - y)$ với $k \leq 2$.

Do đó

$x^k(1 - k) + y^k(1 - y) \geq x^2(1-x) + y^3(1-y) \geq 0$ (vì $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$) với $k \leq 2$.

Lần lượt thay $k = 0; 1; 2$; ta có đpcm.

* Nếu $0 < y \leq 1$ và $x > 1$, vẫn làm tương tự trường hợp trên.

N.T.L

Một số bài toán về BẤT ĐẲNG THỨC và GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT

TRẦN ĐỨC CHIẾN
(GV trường CĐSP Quảng Ninh)

1. Đại học Bách khoa Hà Nội *(Khối A+D)*

a) Cho $a+b \geq 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Mời bạn tự chứng minh. Đây chính là câu gợi ý cho câu sau.

b) Cho ΔABC. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}$$

Giải. Vì $\cos\frac{A-B}{2} \leq 1$ và $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2} > 0$

nên : $\sin A + \sin B \leq 2\cos\frac{C}{2}$.

Áp dụng câu a, ta có :

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B}}{2}\right)^3 \leq \frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B}}{2} \leq \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}.$$

Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và từ đó suy ra $P \leq 1$

$\max P = 1 \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

2. Đại học Quốc gia Hà Nội *(Khối A)*

Cho $a+b+c = 0$. Chứnng minh rằng :

$8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c$.

Giải. Đặt $2^a = x$; $2^b = y$; $2^c = z$. Thì có :

$xyz = 1; x, y, z > 0$

Ta chứng minh : $x^3 + y^3 + z^3 \geq x+y+z$

Giả sử : $x \geq y \geq z$. Xét :

$(x-y)(x^2-y^2) + (y-z)(y^2-z^2) + (z-x)(z^2-x^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2(x^3+y^3+z^3) \geq xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2$ (1)

Cộng hai vế của (1) với $x^3+y^3+z^3$ và biến đổi có :

$3(x^3+y^3+z^3) \geq (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \geq$

$\geq (x+y+z)\ 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3 \geq x+y+z$. Đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=0$.

3. Học viện Ngân hàng và ĐH Quốc gia Hà Nội *(Khối D).*

Cho $a, b, c > 0$ và $ab+bc+ca = abc$.

Chứng minh rằng :

$$\frac{\sqrt{a^2+2b^2}}{ab} + \frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{bc} + \frac{\sqrt{c^2+2a^2}}{ca} \geq \sqrt{3}.$$

Giải. Đặt $\frac{1}{a} = x$; $\frac{1}{b} = y$; $\frac{1}{c} = z$.

Ta có : $x, y, z > 0$ và $x+y+z = 1$

Ta phải chứng minh :

$\sqrt{x^2+(\sqrt{2}y)^2} + \sqrt{y^2+(\sqrt{2}z)^2} + \sqrt{z^2+(\sqrt{2}x)^2} \geq \sqrt{3}$

Xét $\vec{u} = (x, \sqrt{2}y)$; $\vec{v} = (y, \sqrt{2}z)$; $\vec{t} = (z, \sqrt{2}x)$

thì $\vec{u} + \vec{v} + \vec{t} = (x+y+z; \sqrt{2}y + \sqrt{2}z + \sqrt{2}x)$

hay là $\vec{u} + \vec{v} + \vec{t} = (1; \sqrt{2})$

Vì $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{t}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{t}|$ nên ta có đpcm.

Hoặc theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki :

$\sqrt{3(x^2+y^2+y^2)} \geq x+y+y$;

$\sqrt{3(y^2+z^2+z^2)} \geq y+z+z$;

$\sqrt{3(z^2+x^2+x^2)} \geq z+x+x$,

từ đó cũng có đpcm.

4. ĐH Nông nghiệp 1

Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$.

Tìm minP với

$$P = \frac{bc}{a^2b+a^2c} + \frac{ca}{b^2a+b^2c} + \frac{ab}{c^2a+c^2b}$$

Giải. Trước hết ta có : Nếu $x, y, z > 0$ thì :

$$\frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 + \frac{z}{x+y} + 1$$

$$= \frac{1}{2}(x+y+y+z+z+x)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) \geq \frac{9}{2}$$

Hay : $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$ (đây là bất đẳng thức Nasơbit)

Đặt $\frac{1}{a} = x$; $\frac{1}{b} = y$, $\frac{1}{c} = z$.

Ta có : $x, y, z > 0$; $xyz = 1$ và

$$P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

$$= \frac{x(x+y+z)}{y+z} + \frac{y(x+y+z)}{z+x} + \frac{z(x+y+z)}{x+y} - (x+y+z)$$

$$= (x+y+z)\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - 1\right) \geq \frac{x+y+z}{2} \geq$$

$$3\frac{\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy Min$P = \frac{3}{2}$ đạt được $\Leftrightarrow x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=1$

5. Đại học Mỏ - Địa chất

ΔABC có : $0 < A \le B \le C < 90^o$.

Chứng minh rằng :

$$\frac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \ge 2 \quad (*)$$

Giải. Vì $C \ge 60^o$ nên đặt $x = \cos C$ thì : $0 < x \le \frac{1}{2}$. Từ đó

$(*) \Leftrightarrow y = 8x^3 - 8x^2 - 8x + 5 \ge 0$, với $0 < x \le \frac{1}{2}$

Lập bảng biến thiên của y sẽ có đpcm.

Cũng có thể viết :

$8x^3 - 8x^2 - 8x + 5 = (2x-1)(4x^2-2x-5) \ge 0$ với $0 < x \le \frac{-1}{2}$

6. Đại học Lâm nghiệp.

Cho $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chứng minh rằng :

$$tg^7x + cotg^7x \ge tgx + cotgx \quad (1)$$

Giải. (1) $\Leftrightarrow$ $(\text{tg}^3x+\text{cotg}^3x)(\text{tg}^4x+\text{cotg}^4x) - 2(\text{tg}x+\text{cotg}x) \ge 0$.

Đặt: $\text{tg}x+\text{cotg}x = t \ge 2$.

(1) $\Leftrightarrow t^6 - 7t^4 + 14t^2 - 8 \ge 0$. Đặt $t^2 = u \ge 4$.

Ta chứng minh :

$f(u) = u^3 - 7u^2 + 14u - 8 \ge 0$ với $u \ge 4$.

Lập bảng biến thiên của $f(u)$ hoặc viết $f(u) = (u-1)(u-2)(u-4)$ để suy ra đpcm.

7. Đại học Ngoại thương (TP HCM)

Cho tam giác ABC. Giả sử M là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính vòng tròn ngoại tiếp các tam giác ABM và ACM. Hãy xác định vị trí của điểm M sao cho $R_1 + R_2$ là nhỏ nhất.

Giải. Áp dụng định lí hàm số sin cho các tam giác ABM và ACM ta có :

$$R_1 = \frac{AB}{2\sin\angle AMB}; \qquad R_2 = \frac{AC}{2\sin\angle AMC}$$

Do $\sin\angle AMB = \sin\angle AMC$ nên :

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{2}(AB+AC) \cdot \frac{1}{\sin\angle AMC} \ge \frac{1}{2}(AB+AC)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sin\angle AMC = 1 \Leftrightarrow$ AM $\perp$BC. Khi đó : $\min(R_1+R_2) = \frac{1}{2}(AB+AC)$

HỘI THI
TIN HỌC TRẺ KHÔNG CHUYÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ VI

Bắt đầu từ 8.1995 với cuộc thi đầu tiên, Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc đã góp phần vào việc phổ cập Tin học cho thanh thiếu niên nước ta. Hội thi lần thứ VI được tổ chức từ ngày 28.7.2000 đến ngày 30.7.2000 tại Hà Nội. Đã có 126 học sinh tham gia ở các khối A (cho học sinh tiểu học), B (cho học sinh trung học cơ sở), C (cho học sinh trung học phổ thông) và thi phần mềm sáng tạo. Từ chỗ chỉ có 27 tỉnh, thành, ngành dự thi trong cuộc thi lần thứ nhất đến cuộc thi lần này có 40 tỉnh thành và 2 ngành Bưu chính viễn thông, Hàng không tham dự, trong đó có 3 học sinh dân tộc Tày. Đáng tiếc là có 9 tỉnh, ngành chỉ tổ chức vòng một ở địa phương mà không tham dự thi toàn quốc. Khối A có 13 giải chính thức và 29 giải khuyến khích trong đó giải nhất thuộc về Lê Đàm Hoàng Vũ, Phú Yên. Khối B có 13 giải chính thức và 28 giải khuyến khích. Huỳnh Lý Thanh Trung, Đà Nẵng được giải đặc biệt, Nguyễn Lê Huy, Hà Nội, Nghiêm Sĩ Phú, Lâm Đồng đoạt giải nhất ở khối này. Khối C có 14 giải chính thức và 29 giải khuyến khích. Hoàng Anh Tuấn, Hà Nội đạt giải nhất khối này. Phần mềm sáng tạo có 12 giải chính thức và 7 giải khuyến khích. Các địa phương đạt kết quả cao là Đà Nẵng, Hà Nội, Tp Hồ Chí Minh và ngành Bưu chính viễn thông. Đội tuyển Tổng công ty Bưu chính viễn thông Việt Nam được tặng giải đồng đội vì có điểm bình quân cao nhất là 65,17 điểm/100. Kết quả cuộc thi cho thấy chất lượng giảng dạy Tin học ở các trường và các địa phương đã có nhiều tiến bộ. Ở cấp tiểu học chất lượng khá đồng đều nhưng ở cấp trung học phổ thông thì miền Bắc và miền Trung có kết quả cao hơn. Các tỉnh miền núi có 4 giải trong tổng số 52 giải chính thức là một tỉ lệ cho thấy cần có đầu tư nhiều hơn ở khu vực này về Tin học.

Ngoài cuộc thi các học sinh còn được tham quan bảo tàng Hồ Chí Minh và đi du thuyền Hồ Tây. Cuộc thi là sự phối hợp thành công giữa Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Bộ Khoa học, Công nghệ và Môi trường, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Đài Truyền hình Việt Nam, Tổng Công ty Bưu chính Viễn thông Việt Nam, Hội Tin học Việt Nam và một số bộ, ngành khác.

VŨ KIM THỦY

Nhìn ra thế giới

CÁC CUỘC THI TOÁN GỒM NHIỀU CÂU HỎI, TRẢ LỜI NHANH

NGUYỄN VIỆT HẢI

Các cuộc thi toán được tổ chức bằng nhiều hình thức khác nhau. Có hình thức thi đưa ra các bài toán tương đối khó, lời giải là một chuỗi suy luận phức tạp, đòi hỏi trình độ phân tích tổng hợp khá cao. Các bài toán loại này được *đăng trên báo chí* để có thời gian dài suy nghĩ giải đáp hoặc dùng trong các cuộc thi *chọn học sinh giỏi*. Hình thức khác là bài thi gồm nhiều câu hỏi, bài tập không quá khó với yêu cầu trả lời nhanh. Loại này đòi hỏi học sinh biết áp dụng đúng và nhanh các kiến thức toán phổ thông vào các trường hợp khác nhau, các tình huống thực tế, tập dượt suy luận lôgic. Mặt khác bài thi nhiều câu hỏi nên có thể bao gồm các phần khác nhau của chương trình, kiểm tra sự hiểu biết rộng về kiến thức toán. Trong các cuộc thi này thí sinh *không được* sử dụng các loại sách vở, máy tính, thước tính, giấy vẽ đồ thị mà chỉ được dùng thước kẻ thẳng, compa. Bài thi cho trong dạng câu hỏi trắc nghiệm (thí sinh được chọn một trong các đáp án cho sẵn) hoặc các bài tập nhỏ (thí sinh phải giải bài tập nhưng chỉ ghi đáp số mà không trình bày lời giải), điều này giúp cho việc chấm thi nhanh chóng (có thể chấm bằng máy tính), đồng thời vượt qua được hàng rào ngôn ngữ giữa các nước khác nhau. Với những đặc điểm trên hình thức thi toán gồm nhiều câu hỏi, trả lời nhanh có thể dành cho *đông đảo học sinh ở nhiều vùng, nhiều nước*, đáp ứng nhu cầu giao lưu toán học giữa các vùng miền khác nhau. Người ta tổ chức thi cùng một đề bài vào cùng một thời điểm, sau đó *gửi bài giải ngay qua bưu điện* (trong tương lai có thể qua thư điện tử) về cho Ban tổ chức cuộc thi.

Hình thức thi này đã được tổ chức ở Mỹ, Ôxtralia, Bỉ, Pháp, các nước Đông Nam Á và một số nước châu Âu. Ở nhiều nước, cuộc thi này được coi là vòng sơ tuyển cho cuộc thi Olympic toán quốc gia. Sau đây là một số cuộc thi :

Trung tâm giáo dục khoa học và toán học Đông Nam Á (RESCAM) đã tổ chức thi toán nhiều câu hỏi, trả lời nhanh ở Malaixia (7/1996) và cho 9 nước Đông Nam Á (9/1998).

Cuộc thi này có 3 vòng : vòng 1 dành cho cá nhân gồm 20 câu hỏi ngắn trong 90 phút, vòng 2 dành cho cá nhân gồm 5 bài tập nhỏ trong 180 phút, vòng 3 cho phép cả 4 thí sinh trong đội thảo luận với 10 bài tập nhỏ trong 60 phút (Đề thi đăng trong THTT số 257, tháng 11/1998).

Cuộc thi toán ở vùng Flanders thuộc nước Bỉ có 3 vòng: vòng 1 gồm 30 câu hỏi trắc nghiệm làm trong 90 phút, vòng 2 gồm 30 câu hỏi trắc nghiệm làm trong 60 phút, vòng 3 gồm 4 bài tập khó.

Cuộc thi Olympic toán ở nước Bỉ gồm 3 vòng : vòng thi sơ tuyển gồm 30 câu hỏi trắc nghiệm, vòng 2 gồm 30 câu hỏi trắc nghiệm và bài tập nhỏ làm trong 90 phút, vòng 3 thi chọn học sinh giỏi quốc gia gồm 4 bài tập khó.

Cuộc thi toán Canguru (tên loài thú có túi sống ở Ôxtralia) ở Ôxtralia có từ những năm 80 gồm các câu hỏi trắc nghiệm, đến nay có tới nửa triệu học sinh tham gia.

Các nhà toán học Pháp và Ôxtralia đã bàn bạc tổ chức cuộc thi *Canguru không biên giới* (Le Kangourou sans frontières) từ năm 1991, đến năm 1993 đã lan sang các nước châu Âu và được sự ủng hộ của Ủy ban châu Âu và UNESCO trong *Đề án 2000.*

Số lượng thí sinh tham gia cuộc thi này tăng dần :

	1991	1993	1995	1996
ở Pháp	120 000	420 000	500 000	600 000
ở ngoài nước Pháp	.	40 000	200 000	500 000

Đến năm 1996 đã có học sinh của 26 nước tham gia cuộc thi *Canguru không biên giới* : Pháp, Đức, Anh, Tây Ban Nha, Italia, Lucxembua, Hà Lan, Nga, Bêlarut, Ba Lan, Séc, Slôvênia, Estônia, Hunggari, Maxêđônia, Mônđavi, Rumani (châu Âu), Ôxtralia (châu Úc), Buốckina Phasô, Côt Đivoa, Marôc, Mađagasca, Môritani, Sênêgan, Tuynidi (châu Phi), Libăng (châu Á). Các bạn muốn biết chi tiết hãy gửi thư đến địa chỉ :

Kangourou Sans Frontières

50 Rue des Écoles, 75005

PARIS-FRANCE

hoặc trên Internet : http ; ///www.mathkang.org.

Xin giới thiệu một số câu hỏi trong cuộc thi *Canguru không biên giới* năm 1997. Cuộc thi tổ chức ngày 21/3/1997 cho 2 trình độ : các lớp đệ tứ, đệ tam (tương đương lớp 8, lớp 9 THCS) và các lớp lycées (tương đương cấp 3 THPT)

Thời gian: 75 phút.

Đề thi gồm 30 câu hỏi : Các câu hỏi từ 1 đến 10 được 3 điểm mỗi câu ; các câu hỏi từ 11 đến 20 được 4 điểm mỗi câu ; các câu hỏi từ 21 đến 30 được 5 điểm mỗi câu. Thí sinh được chọn 1 câu trả lời đúng nhất trong 5 đáp án A, B, C, D, E.

CÁC LỚP THCS

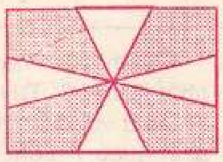
Câu 6. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Thêm điểm thứ tư trên mặt phẳng chứa A, B, C sao cho 4 điểm đó lập thành một hình bình hành. Có bao nhiêu điểm vẽ thêm thỏa mãn điều trên ?

A: 1 B : 2 C : 3 D : 4 E : 6

Câu 10. Buổi sáng. Lôra đang trang điểm, thoáng nhìn thấy trong gương chiếc đồng hồ quả lắc treo phía sau lưng. Mặt đồng hồ không ghi bằng chữ số Ảrập. Cô bé kêu lên "Đồng hồ chết rồi! Bây giờ 4 giờ kém 5 phút à ?". Lôra đã nhầm. Hỏi đồng hồ lúc đó chỉ mấy giờ ?

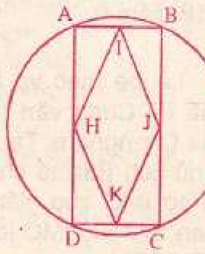
A: 8h05 B: 4h55 C: 7h55 D: 8h55 E: 4h05

Câu 12. Mỗi cạnh của hình chữ nhật được chia thành 3 đoạn bằng nhau và các điểm chia được nối với nhau đi qua tâm như hình bên. Hỏi diện tích phần để trắng bằng bao nhiêu phần có các dấu chấm ?



A: 1 B:1/2 C: 1/3 D: 1/4 E: 2/3.

Câu 13. Trong đường tròn bán kính 3cm vẽ một hình chữ nhật ABCD. Gọi I, J, K, H là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật đó. Hỏi chu vi của hình thoi IJKH bằng bao nhiêu (cm) ?



A: 6 B: 9 C: 12

D: $4\sqrt{3}$ E: phụ thuộc hình chữ nhật

Câu 26. Người ta gấp đôi một tờ giấy hình chữ nhật sao cho hai chiều rộng trùng nhau. Trong mỗi lần gấp đôi tiếp theo cần phải gấp vuông góc với lần gấp trước. Sau 5 lần gấp người ta cắt một chút ở 4 đỉnh hình chữ nhật đã gấp. Hỏi có bao nhiêu lỗ thủng ở bên trong tờ giấy được mở ra như lúc ban đầu ?

A: 4 B: 9 C: 18 D: 20 E: 21

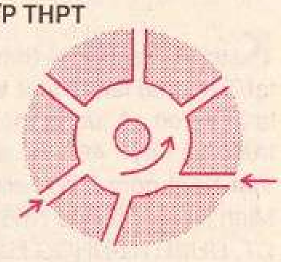
Câu 30. Một con hươu cao cổ ở trong một mảnh đất hình tam giác với độ dài ba cạnh là 20m, 16m và 12m. Mảnh đất có hàng rào thấp nhưng hươu có cổ dài nên có thể ăn cỏ xanh ngon bên ngoài mảnh đất cách hàng rào 2m. Trong các số sau đây, số nào biểu thị gần đúng nhất diện tích phần cỏ mọc ngoài hàng rào mà hươu có thể ăn được (tính theo m^2) ?

A: 96 B: 99,14 C: 102,28

D: 105,42 E: 108,56

CÁC LỚP THPT

Câu 3. Sáu ngả đường dẫn đến một đảo tròn (bùng binh), trong đó có 2 đường một chiều (chỉ được đi vào). Quanh đảo tròn phải đi ngược chiều kim đồng hồ. Hỏi có bao nhiêu cách vào - ra khác nhau mà không đi quá 1 vòng quanh đảo tròn ?



A: 12 B: 48 C: 24 D: 30 E: 28

Câu 9. Xem câu 13 THCS

Câu 11. Xem câu 12 THCS

Câu 20. (cũng là câu 22 THCS)

Đem chia số 10...0, trong cách viết có 1997 chữ số 0 viết sau chữ số 1, cho 15 thì được dư là bao nhiêu ?

A: 1 B: 6 C: 9 D: 10 E: 12

Câu 21. Xem câu 30 THCS

Câu 26. Nếu $f(f(x)) = 4x-3$ thì $f(x)$ bằng bao nhiêu ?

A: $f(x) = -2x+3$ B: $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$

C: $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$ D: $f(x) = 2x - 3$

E: $f(x) = -4x + 1$

THÔNG TIN HOẠT ĐỘNG

❖ Vừa qua, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức trọng thể Lễ kỉ niệm 90 năm ngày sinh của GS. Tạ Quang Bửu (23.7.1910). Bộ trưởng Nguyễn Minh Hiển đã đọc bài diễn văn đánh giá công lao to lớn của GS Tạ Quang Bửu trong các lĩnh vực khoa học, quốc phòng, ngoại giao và đặc biệt là trong sự nghiệp giáo dục. Nhân dịp này, THTT trân trọng giới thiệu bài viết của GS. TSKH Ngô Việt Trung về những kỉ niệm với GS. Tạ Quang Bửu (trang 2).

❖ Chiều ngày 1.8.2000, Đại học Quốc gia Hà Nội đã tổ chức Lễ tuyên dương khen thưởng các học sinh đạt giải cao trong các kì thi Olympic quốc tế. Giáo sư - Viện sĩ Nguyễn Văn Đạo, giám đốc ĐHQG Hà Nội đã nhiệt liệt hoan nghênh và chúc mừng các em học sinh giành thắng lợi trong các kì thi Olympic quốc tế trở về. Đặc biệt, *đây là lần đầu tiên cả 3 em đạt huy chương Vàng môn Toán của đoàn Việt Nam đều là học sinh khối chuyên Toán - Tin học của trường ĐHKHTN thuộc ĐHQG Hà Nội.* Giáo sư đã đánh giá cao sự cố gắng của các em học sinh cùng sự đóng góp của các nhà giáo, sự chăm sóc của các vị phụ huynh. Nhân dịp này ĐHQG Hà Nội đã tuyên dương khen thưởng các em học sinh đạt giải và nhiều nhà giáo có thành tích trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi.

THTT

KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 41

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Trưởng đoàn học sinh Việt Nam thi Toán quốc tế)

Kì thi Toán quốc tế (IMO) lần thứ 41 được tổ chức tại Taejon (Hàn Quốc) từ 13/7 tới 25/7/2000. Đây là kì thi có số lượng thí sinh tham gia lớn nhất từ trước tới nay : 463 thí sinh từ 82 nước. Đội tuyển Việt Nam gồm 6 học sinh : Bùi Viết Lộc, Nguyễn Minh Hoài, Đỗ Đức Nhật Quang, Cao Vũ Dân (12 CT, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội), Nguyễn Phi Lê (nữ, 12, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa), Bùi Việt Hà (11, THPT chuyên Thái Bình)

Căn cứ vào kết quả và điều lệ của IMO, Ban tổ chức đã quyết định trao :

+ 39 Huy chương vàng (HCV) cho các thí sinh đạt từ 30 điểm trở lên.

+ 71 Huy chương bạc (HCB) cho các thí sinh đạt từ 21 đến 29 điểm.

+ 119 Huy chương đồng (HCĐ) cho các thí sinh đạt từ 11 đến 20 điểm.

Kết quả cụ thể của đội tuyển Việt Nam như sau :

TT	Họ và tên	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5	Bài 6	Điểm	Giải
1	Bùi Viết Lộc	7	7	2	7	7	7	37	HCV
2	Nguyễn Minh Hoài	7	7	2	6	6	7	35	HCV
3	Đỗ Đức Nhật Quang	7	7	3	6	4	7	34	HCV
4	Cao Vũ Dân	7	7	0	6	7	2	29	HCB
5	Nguyễn Phi Lê	7	7	3	3	1	0	21	HCB
6	Bùi Việt Hà	7	3	2	0	1	0	13	HCĐ

Trong bảng xếp hạng (không chính thức) của các đội, Trung Quốc xếp thứ nhất (218 điểm) với tất cả 6 học sinh đoạt HCV. Tiếp theo là Nga (215 điểm) với 5 HCV, 1 HCB; Mỹ (184 điểm) với 3 HCV, 3 HCB; Hàn Quốc (172 điểm) với 3 HCV và 3 HCB, Việt Nam (169 điểm) với 3 HCV, 2 HCB và 1 HCĐ; Bungari (169 điểm) với 2 HCV, 3 HCB và 1 HCĐ.

Các đội sau đây đã dành được HCV :

6 HCV : Trung Quốc

5 HCV : Nga

3 HCV : Việt Nam, Mỹ, Hàn Quốc, Đài Loan

2 HCV: Bungari, Bêlarut, Iran, Ukraina, Israen

1 HCV: Hunggari, Canađa, Đức, Nhật, Rumani, Ôxtralia .

Có 4 thí sinh đạt điểm tối đa 42/42 là : Alêxanđơ Usnich (Bêlarut), Yun Zhiwei (Trung Quốc), Alêxây Pôiackôp (Nga) và Alêxanđơ Gaiphulin (Nga).

Đề thi năm nay khá hay với dự kiến bài khó nhất là bài 6. Tuy nhiên thực tế thì bài khó nhất là bài 3 với điểm trung bình là 0,7 trong đó 15 thí sinh được 7 điểm và 335 điểm 0. Bài số 6 có 33 thí sinh điểm 7 và 335 điểm 0 với điểm trung bình là 1,0. Bài dễ nhất là bài 1 với điểm trung bình là 4,1 trong đó 220 thí sinh được 7 điểm và 118 điểm 0.

Lễ bế mạc và trao giải được cử hành trọng thể tại Cung văn hóa của trường Đại học quốc gia Chongnam. Tại buổi lễ, giáo sư Cho Sung Je, Chủ tịch Ban tổ chức IMO-2000 đã chuyển giao lá cờ IMO cho giáo sư Walter Mienka, Chủ tịch Ban tổ chức IMO lần thứ 42 được tổ chức tại Mỹ năm 2001.

Sau đây, chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc đề thi IMO 2000. Xin mời các bạn thử sức.

ĐỀ THI IMO 2000

NGÀY THỨ NHẤT

Thời gian làm bài : 4 giờ 30 phút

Bài 1. Hai vòng tròn Γ_1 và Γ_2 cắt nhau tại M và N.

Gọi l là tiếp tuyến chung của Γ_1 và Γ_2 sao cho l gần với M hơn là với N. Giả sử l tiếp xúc với Γ_1 tại A và tiếp xúc với Γ_2 tại B. Một đường thẳng qua M song song với l cắt đường tròn Γ_1 tại C (khác M) và cắt đường tròn Γ_2 tại D (khác M). Hai đường thẳng CA và DB cắt nhau tại E; hai đường thẳng AN và CD cắt nhau tại P; hai đường thẳng BN và CD cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng $EP = EQ$.

Bài 2. Giả sử a, b, c là các số thực dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$$

Bài 3. Cho trước số nguyên dương $n \geq 2$. Lúc đầu có n con bọ chét ở trên một đường thẳng nằm ngang sao cho không phải tất cả chúng đều ở tại cùng một điểm.

Với mỗi số thực dương λ, một *bước chuyển* các con bọ chét được định nghĩa như sau :

Chọn hai con bọ chét nằm ở hai điểm A và B trong đó A nằm bên trái B. Sau đó để con bọ chét ở A nhảy tới điểm C nằm trên đường thẳng này và ở bên phải B với $BC/AB = \lambda$.

Xác định tất cả các giá trị dương λ sao cho với mọi điểm M nằm trên đường thẳng trên và với mọi vị trí ban đầu của n con bọ chét, ta đều có thể thực hiện được một số hữu hạn các bước chuyển để đưa toàn bộ các con bọ chét tới các vị trí nằm bên phải điểm M.

NGÀY THỨ HAI

Thời gian làm bài : 4 giờ 30 phút

Bài 4. Một nhà ảo thuật có một trăm tấm thẻ đánh số từ 1 tới 100. Ông ta sắp xếp tất cả chúng vào ba chiếc hộp, một hộp sơn màu đỏ, một hộp sơn màu trắng và một hộp sơn màu xanh sao cho mỗi hộp đều có chứa ít nhất một tấm thẻ.

Một khán giả được đề nghị chọn hai hộp tùy ý trong ba hộp nói trên rồi từ mỗi hộp được chọn rút ra một tấm thẻ, cộng hai số trên hai tấm thẻ đã rút ra và thông báo kết quả. Chỉ cần biết được tổng này, nhà ảo thuật có thể nói chính xác chiếc hộp mà khán giả đó đã không chọn.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp 100 tấm thẻ này vào ba chiếc hộp trên để ảo thuật này luôn thành công ?

(Hai cách sắp xếp thẻ được coi là khác nhau nếu trong hai cách xếp này có ít nhất một tấm thẻ được đặt ở hai hộp khác nhau).

Bài 5. Xác định xem có tồn tại hay không số nguyên dương n thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau : n có đúng 2000 ước nguyên tố phân biệt và $2^n + 1$ chia hết cho n.

Bài 6. Giả sử AH_1, BH_2, CH_3 là ba đường cao của một tam giác nhọn ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại T_1, T_2, T_3. Gọi l_1 là đường thẳng đối xứng với H_2H_3 qua T_2T_3, l_2 là đường thẳng đối xứng với H_3H_1 qua T_3T_1, l_3 là đường thẳng đối xứng với H_1H_2 qua T_1T_2. Chứng minh rằng l_1, l_2, l_3 tạo ra một tam giác với ba đỉnh nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 32

Problem. Show that, for all real values of x (radians), $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Solution. Because of periodicity, we need consider only values of x belonging to some interval of length 2π. Thus, assume that $-\pi/2 \leq x < 3\pi/2$.

Suppose that $\pi/2 < x < 3\pi/2$. Then $-1 \leq \cos x < 0$ so that $\sin(\cos x) < 0$, while $-\pi/2 < -1 \leq \sin x \leq 1 < \pi/2$ insures that $\cos(\sin x) \geq 0$. Hence $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ for $\pi/2 < x < 3\pi/2$.

Consider the case that $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Clearly, the inequality holds for $x = 0$, while for $x < 0$, $\cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x)$ and $\sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x)$. Therefore, it suffices to show the result for $0 < x \leq \pi/2$. Now $0 < \sin x < x$ and since $\cos x$ is decreasing for $0 < x \leq \pi/2$, $\cos(\sin x) > \cos x > \sin(\cos x)$.

Từ mới:

real	= thực (tính từ)
value	= giá trị
radian	= rađian
because of	= vì, do
periodicity	= tính tuần hoàn
interval	= khoảng, đoạn
length	= độ dài, chiều dài
assume	= giả sử, giả thiết (động từ).
insure	= bảo đảm (động từ)
hold	= đúng, xảy ra (động từ)
suffice	= đầy đủ, thỏa mãn (động từ)
decreasing	= giảm (tính từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

THỦ KHOA ĐẠI HỌC BÁCH KHOA PARI

Ngô Đắc Tuấn - Gương mặt trẻ Việt Nam tiêu biểu nhất trong năm 1996 - Huy chương vàng Toán quốc tế hai năm liền (1995, 1996) - Huy chương vàng thi toán châu Á - Thái Bình dương (1996) - vừa nhận bằng tốt nghiệp của trường Đại học Bách khoa Pari (École Polytechnique) với vị trí thủ khoa (ngày 15.7.2000). Đây là lần đầu tiên một học sinh Việt Nam đạt được vinh dự này. Các danh thủ Olympic Toán quốc tế của Việt Nam : Đỗ Quốc Anh, Nguyễn Thái Hà cũng nhận bằng tốt nghiệp trường này cùng Ngô Đắc Tuấn.

THTT xin chúc mừng thành tích của bạn.

THTT

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/278. Viết tổng $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+...+\frac{2^n}{n}$ thành phân số tối giản $\frac{p}{s}$.

Chứng minh rằng p chia hết cho 8 với mọi $n \geq 3$.

PHẠM NGỌC BỘI
(GV khoa Toán ĐHSP Vinh, Nghệ An)

Bài T2/278. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c = d$ và $d \leq 1$. Chứng minh rằng mỗi tổng $a+b$, $b+c$, $c+d$ đều không nhỏ hơn $16abcd$.

PHẠM QUANG VĂN
(GV trường THPT Trần Phú, Hải Phòng)

Bài T3/278. Cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ với $n \geq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^2+x_2x_3}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2+x_3x_4}{x_2(x_3+x_4)}+...+\frac{x_{n-1}^2+x_nx_1}{x_{n-1}(x_n+x_1)}+\frac{x_n^2+x_1x_2}{x_n(x_1+x_2)} \geq n.$$

NGÔ VĂN THÁI
(GV trường THPT bán công Quỳnh Phụ, Thái Bình)

Bài T4/278. Hai tam giác đồng dạng ABC và $A_1B_1C_1$ thỏa mãn điều kiện : điểm A_1 nằm trên tia CB, điểm B_1 nằm trên tia AC, điểm C_1 nằm trên tia BA. Chứng minh rằng trực tâm của $\Delta A_1B_1C_1$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

NGUYỄN ĐỄ
(Sở GD–ĐT Hải Phòng)

Bài T5/278. Ở 6 đỉnh của một hình lục giác lồi có ghi 6 số chẵn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Ta thay đổi các số như sau : mỗi lần chọn một cạnh bất kì rồi cộng mỗi số ở hai đỉnh thuộc cạnh đó với cùng một số nguyên nào đó. Hỏi sau một số lần thay đổi như thế thì 6 số mới ở các đỉnh lục giác có thể bằng nhau không ?

VÕ QUANG SỬU
(GV trường Hà Nội – Amsterdam, Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/278. Dãy số (u_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$,
$u_{n+2} = 1999u_{n+1} - u_n$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho u_n là số nguyên tố.

HẠ VŨ ANH
(GV trường THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T7/278. Chứng minh rằng

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

ĐẶNG THANH HẢI
(GV khoa cơ bản, Học viện phòng không Sơn Tây)

Bài T8/278. Tìm mọi hàm số $f : R \to R$ thỏa mãn các điều kiện :

a) $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in R$.

b) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi $x \in R$.

c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ với mọi $x \neq 0$

NGÔ THẾ PHIỆT
(GV trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T9/278. Cho tam giác ABC có chu vi không đổi $2p$. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các góc A, B, C của ΔABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔMNP.

NGÔ VĂN HIỆP
(Quận Hoàn Kiếm, Hà Nội)

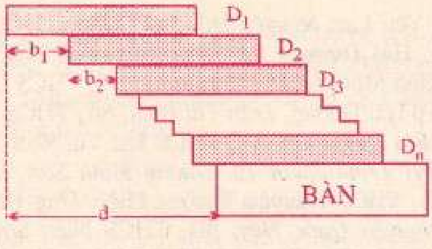
Bài T10/278. Cho hình tứ diện $SABC$ với $SA = SB = SC = 1$. Mặt phẳng (α) thay đổi, luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SF.SD}$$

HỒ CÔNG DŨNG
(GV trường THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/278. Một chồng gạch gồm n viên $D_1, D_2, ..., D_n$ giống hệt nhau, mỗi viên có bề dài $2a$. Chúng được đặt liên tiếp chồng lên nhau trên bàn sao cho viên gạch thứ i tính từ trên xuống nhô ra so với viên gạch thứ $i+1$ một đoạn b_i $(i = 1, 2, ..., n\text{-}1)$ và viên gạch thứ D_n nhô ra khỏi mép bàn một đoạn b_n. Các viên gạch không được gắn với nhau.



1) Hỏi b_i có thể có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu so với a để chồng gạch không bị đổ ?

2) Xác định khoảng cách lớn nhất d giữa mép bàn và mép viên gạch thứ nhất.

NGUYỄN QUANG HẬU
(*Hà Nội*)

Bài L2/278. Một quả cầu trong suốt bán kính R, có chiết suất phụ thuộc bán kính r theo công thức :

$$n = \frac{R+a}{r+a} \text{ với } a \text{ là hằng số dương.}$$

Chiếu tia sáng tới quả cầu dưới góc tới φ, tia sáng bị khúc xạ trong quả cầu.

Hãy xác định khoảng cách nhỏ nhất từ tâm quả cầu đến tia khúc xạ.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(*GV trường THPT chuyên Vĩnh Phúc*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/278. The sum $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}$ written in form of irreducible fraction is $\frac{p}{s}$; prove that p is divisible by 8 for every $n \geq 3$.

T2/278. The non negative numbers a, b, c, d satisfy the conditions $a+b+c = d$ and $d \leq 1$. Prove that each sum $a+b$, $b+c$, $c+d$ is not less than $16abcd$.

T3/278. Given n positive real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 3$). Prove that :

$$\frac{x_1^2+x_2x_3}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2+x_3x_4}{x_2(x_3+x_4)}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2+x_nx_1}{x_{n-1}(x_n+x_1)}+\frac{x_n^2+x_1x_2}{x_n(x_1+x_2)} \geq n.$$

T4/278. The similar triangles ABC and $A_1B_1C_1$ satisfy the conditions : A_1 lies on the ray CB, B_1 lies on the ray AC, C_1 lies on the ray BA. Prove that the orthocenter of triangle $A_1B_1C_1$ coincides with the circumcenter of triangle ABC.

T5/278. The vertices of a convex hexagon are labelled clockwise by 6 consecutive even numbers. We make a change of labelling by choosing a side of the hexagon and adding an integer to each number written at the extremities of this side. Is this possible that after a finite number of such changes, the numbers written at the vertices of the hexagon become all equal ?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/278. The sequence of numbers (u_n) ($n = 0, 1, 2, \ldots$) is defined by :

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = 1999u_{n+1} - u_n$ for every $n = 0, 1, 2, \ldots$

Find all natural numbers n such that u_n is prime.

T7/278. Prove that

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

T8/278. Find all functions $f : R \to R$ satisfying simultaneously the following conditions :

a) $f(-x) = -f(x)$ for all $x \in R$,

b) $f(x+1) = f(x) + 1$ for all $x \in R$,

c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ for all $x \neq 0$.

T9/278. A variable triangle ABC has a constant perimeter $2p$. Let M, N, P be respectively the centers of the escribed circles in the angles A, B, C of triangle ABC. Find the least value of the perimeter of triangle MNP.

T10/278. Let be given a tetahedron $SABC$ with $SA = SB = SC = 1$. A variable plane (α), passing through the center of gravity G of the tetrahedron, cuts the sides SA, SB, SC respectively at D, E, F. Find the greatest value of the expression

$$\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SF.SD}$$

Bài T1/274. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3 - xy^2 + 2000y = 0 \\ y^3 - yx^2 - 500x = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình trên tương đương với

$$\begin{cases} x(x^2 - y^2) = -2000y & (1) \\ -y(x^2 - y^2) = 500x & (2) \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và $(0, 0)$ là 1 nghiệm của hệ.

Nếu $x \neq 0$, từ (1) (2) suy ra

$$(-y)\left(\frac{-2000y}{x}\right) = 500x \Rightarrow y \neq 0 \text{ và } x^2 = 4y^2 \ (3).$$

Ta có $x^2 - y^2 = 3y^2 > 0$, cùng với (1) suy ra x, y trái dấu. Từ đó và (3) có $x = -2y \neq 0$. Thay vào (1) được $3y^2 = 1000$.

Giải ra được $y_1 = \frac{10\sqrt{30}}{2}$, $y_2 = \frac{-10\sqrt{30}}{3}$ nên $x_1 = \frac{-20\sqrt{30}}{3}$, $x_2 = \frac{20\sqrt{30}}{3}$.

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm (x, y) là $(0, 0)$, $\left(\frac{-20\sqrt{30}}{3}, \frac{10\sqrt{30}}{3}\right)$, $\left(\frac{20\sqrt{30}}{3}, \frac{-10\sqrt{30}}{3}\right)$.

Nhận xét. 1) Một số bạn khi giải bài này đã mắc những sai lầm sau : nhân phương trình với x hoặc y mà chưa giả sử $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$, từ $y^2 = \frac{1000}{3}$ chỉ lấy nghiệm $y = \sqrt{\frac{1000}{3}}$, viết nghiệm dạng $x = \frac{\pm 20\sqrt{30}}{3}$, $y = \frac{\pm 10\sqrt{30}}{3}$.

2) Các bạn lớp 6, 7, 8 có lời giải gọn là :

Cao Bằng : *Hoàng Thị Minh Phượng*, 8A THCS Tân Giang, thị xã Cao Bằng; **Bắc Giang:** *Nguyễn Tuyết Mai*, 8A THCS Lê Quý Đôn, thị xã Bắc Giang; **Bắc Ninh:** *Trương Hoàng Long*, 8A THCS Nguyễn Đăng Đạo, thị xã Bắc Ninh, *Nguyễn Hữu Bình Minh*, 8A, *Lê Duy Cường*, 8B, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** *Nguyễn Công Hiệp*, 8A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, *Triệu Văn Tiến*, *Nguyễn Khoa*, *Lê Xuân Long*, 8A, THCS Lâm Thao, *Đoàn Triệu Thanh*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Trần Thị Lệ Hằng*, 8A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên, *Trần Quốc Hội*, 8A, THCS Tự Lập, *Vũ Thu Hiền*, 8A, THCS Xuân Hòa, Mê Linh, *Nguyễn Văn Mạnh*, *Đại Quốc Huy*, 8B, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Hồng Điệp*, 8A THCS Vĩnh Tường; **Hải Dương:** *Vũ Minh Tiến*, 8B, THCS Phú Thứ, Kinh Môn, *Lê Thị Thu Trang*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp Hải Dương, *Trần Thị Bình*, 6A, THCS Thanh Miện, *Bùi Duy Tuấn*, 8A, THCS Lai Vu, Kim Thành; **Hà Tây:** *Trịnh Xuân Tú*, *Dương Minh Sơn*, *Lê Quý Lợi*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Nội:** *Nguyễn Quốc Huy*, 8D, THCS Nam Sơn, Sóc Sơn, *Nguyễn Đức Tâm*, 7C, THCS Giảng Võ, *Nguyễn Thanh Tùng*, 6A1, THCS Láng Thượng; **Nam Định:** *Hoàng Tuấn Anh*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Anh Thông*, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Hùng*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Trần Thị Như Ngọc*, 8A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Hà Tĩnh:** *Phan Thị Nga*, 8C, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Bá*, 8D THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Kon Tum:** *Nguyễn Lương Thùy Viên*, 7A, THCS chuyên; **Gia Lai:** *Đặng Thanh Nhàn*, 6/1, THCS Biển Hồ, Plâyku ; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoàng Duy*, *Phan Đăng Quang*, 8/13, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Nguyễn Quang Tuấn*, 7A6, THCS Kim Đồng, thị xã Bà Rịa **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hoàng Việt*, 7/6, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8/2, THCS Mỹ Hóa.

PHI PHI

Bài T2/274. *Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{x^4 + y^4}{1997.1999}$$

trong đó x, y là các số nguyên dương.

Lời giải. (của bạn *Đoàn Triệu Thanh*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Tp Việt Trì, Phú Thọ và một số bạn khác)

Trước hết chúng ta chứng minh một bổ đề sau :

Bổ đề: *Giả sử* $p = \frac{u.v}{s} + 1$ *là một số nguyên tố lẻ, với* $u, v, s \in N^*$ *và v là một số lẻ.*

Khi đó nếu x, y là các số nguyên thỏa mãn $x^u + y^u \,\vdots\, p$ *thì suy ra* $x \,\vdots\, p$ *và* $y \,\vdots\, p$.

Chứng minh bổ đề.

Phản chứng : Giả sử một trong hai số x, y không chia hết cho p.

Từ $x^u + y^u \,\vdots\, p$ ta có $x \not\vdots\, p \Leftrightarrow y \not\vdots\, p$. Do đó hai số x, y đều không chia hết cho p.

Ta có :

$$x^{u.v} - 1 = (x^{s(p-1)} - 1) \,\vdots\, \left(x^{p-1} - 1\right),$$
$$y^{u.v} - 1 = (y^{s(p-1)} - 1) \,\vdots\, \left(y^{p-1} - 1\right).$$

Dùng định lí nhỏ Phecma suy ra

$$(x^{u.v} + y^{u.v} - 2) \,\vdots\, p$$

Mặt khác vì v là số lẻ

$(x^{u.v} + y^{u.v}) \vdots (x^u + y^u)$ nên $x^{u.v} + y^{u.v} \vdots p$ (2)

Từ (1) và (2) dẫn đến mâu thuẫn.

Chứng minh bài toán

$(x^4 + y^4) \vdots 1997.1999$ với $x, y \in N^*$. Biết 1997 và 1999 là các số nguyên tố,

$$1997 = \frac{4.499}{1} + 1,\ 1999 = \frac{4.999}{2} + 1.$$

Bởi vậy cả hai số x và y đều chia hết cho 1997.1999.

Hệ quả là $\dfrac{x^4 + y^4}{1997.1999} \geq 2.(1997.1999)^3$.

Vậy các số nguyên dương x, y nhỏ nhất thỏa mãn đề bài là $x = y = 1997.1999$, lúc đó giá trị biểu thức bằng $2.1997^3.1999^3$.

Nhận xét. 1) Có 67 bạn gửi lời giải tới Tòa soạn, 10 bạn giải sai.

2) Các bạn sau có lời giải tốt : **Hà Tây:** *Dương Minh Sơn*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền; **Hải Dương:** *Lê Đình Huy*, 7A, THCS Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Ngô Huy Hoàng, Nguyễn Thành Nam, Nguyễn Đức Thuận, Hoàng Tuấn Anh*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hồng Điệp*, 8A, THCS Vĩnh Tường; **Nghệ An:** *Lưu Đại Nghĩa*, 7B, THCS Lê Hồng Phong; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hoàng Việt*, 7G, THCS Nguyễn Du; *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố; **Gia Lai:** *Đặng Thanh Nhàn* 6[1] THCS Biển Hồ; **Ninh Thuận:** *Lâm Thị Bích Thủy*, 7A1, THCS Võ Thị Sáu; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8[2], THCS Mỹ Hóa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T3/274. *Các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn các điều kiện $a+b = 1$, $ax + by = 2$, $ax^2 + by^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$4 < ax^3 + by^3 < 4{,}5.$$

Lời giải. của *Đoàn Triệu Thanh*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Việt Trì, **Phú Thọ**).

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho hai dãy số dương $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{a}x, \sqrt{b}x$ ta có :

$$(\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}x + \sqrt{b}\,.\,\sqrt{b}y) \leq \sqrt{(a+b)(ax^2 + by^2)}$$

hay $2 = (ax + by) \leq \sqrt{3}$

Vậy không tồn tại các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn giả thiết đề bài.

Nhận xét. Có 40 bạn đã chỉ ra là đề bài ra sai.

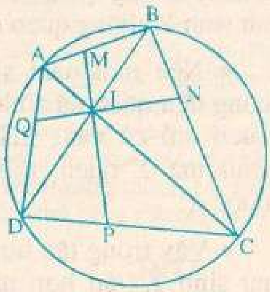
Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hà Tây:** *Nguyễn Hồng Thái*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, *Nguyễn Thị Thanh*, 9B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** *Bùi Quang Nhã, Đinh Thái Sơn*, 9C, THCS Việt Trì, *Phạm Minh Hoàng*, THCS Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Lê Kim Thư*, 9A, THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh; **Hà Nội:** *Tô Thùy Linh*, 9H, THCS Trưng Vương; *Đặng Quang Khải*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh; **Hà Nam:** *Bùi Văn Đại*, 9T, Trần Phú, Tx Phủ Lý; **Hải Dương:** *Đinh Thanh Tùng*, 9A, THCS Phả Lại, Chí Linh; **Nam Định:** *Đỗ Văn Dung*, 9B, THCS Hải Hậu, *Nguyễn Đăng Hạp*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; *Trần Minh Tuấn*, 9T, THCS Trần Đăng Ninh, Tp Nam Định; **Ninh Bình:** *Đinh Quyết Tiến*, 9D, THCS thị trấn Yên Ninh, Yên Khánh; **Thanh Hóa:** *Tống Thành Vũ*, 12T, PTTH Lam Sơn, **Nghệ An:** *Phạm Trung Kiên*, 9C, THCS thị trấn Nam Đàn; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp Biên Hòa; 2. Các bạn *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, DL Châu Phong, Xuân Hòa, Mê Linh, Vĩnh Phúc; *Đào Đình Thông*, 10A1, THPT Hạ Hòa, Phú Thọ; *Nguyễn Hoàng Mạnh*, GV trường THPT Vĩnh Lộc, Thanh Hóa cho biết : đây chính là câu 2 đề 26 (dự tuyển) trong cuốn "Tuyển tập đề thi Olympic 30-4" tổ chức 4/2000 tại trường THPT Lê Hồng Phong Tp Hồ Chí Minh.

TỐ NGUYÊN

Bài T4/274. *Cho tứ giác nội tiếp ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q theo thứ tự trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho* $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{PD}{PC} = \dfrac{AD}{BC}$ *và* $\dfrac{QA}{QD} = \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{AB}{CD}$.

Chứng minh rằng MP vuông góc với NQ.

Lời giải. Gọi giao điểm của AC và BD là I. Dễ thấy $\Delta AIB \backsim \Delta DIC$, suy ra $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{CD}$. Cùng với giả thiết, dẫn đến $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{QA}{QD}$ và $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{NB}{NC}$. Do đó IQ là phân giác của góc $\angle AID$ và IN là phân giác của góc $\angle BIC$. Các góc $\angle AID$ và $\angle BIC$ đối đỉnh nên ta có Q, I, N thẳng hàng (1). Tương tự, IM là phân giác của $\angle AIB$, IP là phân giác của $\angle CID$ và M, I, P thẳng hàng (2). Do $\angle AIB$ và $\angle AID$ là hai góc kề bù nên 2 tia phân



giác IQ và IM vuông góc với nhau (3). Từ (1), (2), (3) ta có $MP \perp NQ$.

Nhận xét. 1. Số đông các bạn giải theo cách chứng minh MP và NQ song song với 2 phân giác vẽ từ 2 đỉnh kéo dài của tứ giác toàn phần nên dài dòng hơn.

2. Giải tốt bài này có các bạn : **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, *Phạm Minh Hoàng*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, **Yên Bái:** *Nguyễn Quang Đạt, Trần Bình Minh*, 9K, Lê Hồng Phong, **Vĩnh Phúc:** *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, Dân lập Châu Phong, Xuân Hòa, Mê Linh, **Hải Dương:** *Bùi Đức Hiếu*, 9A, Nguyễn Trãi, **Hà Tây:** *Vũ Văn Tín*, 9A, THCS Thạch Thất, *Nguyễn Bá Tuấn*, 9B, THCS Thạch Thất, **Bắc Ninh:** *Ngô Quý Hoàn*, 9A, THCS Yên Phong, *Hoàng Đắc Thanh*, 9A, THCS Yên Phong, **Hà Nam:** *Bùi Văn Đại*, 9T, Trần Phú, Phủ Lý, **Hải Phòng:** *Hoàng Đức Giang Nguyên*, 9T, Chu Văn An, *Hà Nội:* *Vũ Quốc Mỹ, Phan Huy Đức*, 9H, THCS Trưng Vương, **Nam Định:** *Vũ Anh Tuấn*, 9B, THCS Hải Hậu, **Nghệ An:** *Trương Bình Nguyên*, 9B, Đặng Thai Mai, Vinh, *Đậu Thị Ngọc Ánh*, 9C, TT Nam Đàn, *Bùi Đăng Tài*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Quảng Bình:** *Nguyễn Thế Tùng*, 8^4, THCS Nam Lý, Đồng Hới, **Gia Lai:** *Đặng* Thanh Nhàn 6^1, THCS Biển Hồ, Pleiku, **Lâm Đồng:** *Phạm Nguyễn Tuấn Anh*, 9A2, THCS Bảo Lộc, **Ninh Thuận:** *Lâm Thị Bích Thủy*, 7A1, THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang, **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hoàng Việt*, 7^6, Nguyễn Du, Gò Vấp, *Nguyễn Đình Khuông*, $8A_1$, THCS Ngô Tất Tố, Phú Nhuận

VKT

Bài T5/275. *Một nhóm học sinh đi cắm trại, trong đó có ít nhất 2 nam và 2 nữ. Biết rằng mỗi nữ sinh quen ít nhất một nam sinh và không có nam sinh nào quen tất cả nữ sinh. Chứng minh rằng có thể tìm được hai nam sinh A, B và hai nữ sinh X, Y sao cho A quen X và B quen Y nhưng A không quen Y và B không quen X.*

Lời giải. Theo giả thiết mỗi nữ sinh quen ít nhất 1 nam sinh nên tìm được nữ sinh X quen ít nam sinh nhất, trong đó có nam sinh A. Vì nam sinh A không quen tất cả nữ sinh nên tìm được nữ sinh Y không quen nam sinh A.

• Nếu mọi nam sinh quen với nữ sinh Y cũng đều quen nữ sinh X thì số nam sinh mà X quen (có cả nam sinh A) nhiều hơn số nam sinh mà Y quen, điều đó trái với việc tìm được X.

• Vậy trong tập hợp các nam sinh quen với nữ sinh Y (tập hợp này không rỗng theo giả thiết) ắt tìm được nam sinh B không quen nữ sinh X. Ta tìm được hai nữ sinh X, Y và hai nam sinh A, B thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét. 1) Có thể giải cách khác : đầu tiên tìm nam sinh A quen ít nữ sinh nhất rồi lập luận tương tự như trên. Một số bạn sử dụng phương pháp phản chứng khá dài dòng. Bạn *Đặng Quang Khải*, 9A1, THPTDL Lương Thế Vinh, Hà Nội đã chỉ ra đây là dạng khác của bài tập 4 trong bài *Nguyên lí khởi đầu cực trị* (trang 61, tác giả Đỗ Bá Khang) trong Tuyển tập 30 năm THTT.

2) Các bạn sau đây cũng có lời giải đúng và gọn :

Thái Nguyên: *Cao Nguyên*, 8A1, THCS Tân Lập, Tp Thái Nguyên; **Phú Thọ:** *Lê Thị Bích An*, 8A1, THCS Lâm Thao, *Lê Ngọc Phương*, 8A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, *Hoàng Ngọc Minh, Đinh Thái Sơn*, 9C, THCS Việt Trì; **Bắc Ninh:** *Phạm Thái Sơn*, 8A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, thị xã Bắc Ninh **Hà Nội:** *Trần Anh Tuấn*, 9A1, THPT DL Lương Thế Vinh, *Trần Kim Phương*, 9A1, THCS Chu Văn An, Ba Đình, *Tô Thùy Linh, Phan Huy Đức, Lê Đức Phương*, 9H, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm, *Lê Hùng Việt Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, *Hoàng Minh Tâm*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hải Phòng:** *Trần Xuân Dũng*, 7A, THPT NK Trần Phú; **Hà Nam:** *Bùi Văn Đại*, 9T, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Ninh Bình:** *Đinh Quyết Tiến*, 9D, *Phạm Quang Huy*, 9T, THCS thị trấn Yên Ninh, Yên Khánh, *Trịnh Thúy Nhung*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, thị xã Ninh Bình **Nghệ An:** *Trần Đức Dũng*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Võ Văn Thành, Phạm Thái Khánh Hiệp, Đậu Quốc Chung*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Quảng Nam:** *Trần Hoàng Huy*, 9/3, THCS Chu Văn An, Duy Xuyên; **Quảng Ngãi:** *Phạm Lê Thịnh*, 9A, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Đồng Nai:** *Trần Võ Huy*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa.

VIỆT HẢI

Bài T6/274. *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực x:*

$$\frac{1 + 2x\text{arctg}x}{2 + \ln(1 + x^2)^2} \geq \frac{1 + e^{x/2}}{3 + e^x} \quad (*)$$

Lời giải. Tất cả các bạn đều chứng minh :

$$\frac{1 + 2x.\text{arctg}x}{2 + \ln(1+x^2)^2} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1 + e^{x/2}}{3 + e^x} \text{ với mọi } x.$$

* Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có

$$e^x + 1 \geq 2\sqrt{e^x} = 2e^{x/2}$$

$$\Rightarrow e^x + 3 \geq 2(e^{x/2} + 1) \Rightarrow \frac{e^{x/2} + 1}{e^x + 3} \leq \frac{1}{2} \ (1)$$

* Xét hàm số $f(x) = 2x.\text{arctg}x - \ln(1 + x^2)$ có $f'(x) = 2.\text{arctg}x$.

Với $x \geq 0$ thì $f'(x) \geq 0$; với $x<0$ thì $f'(x)<0$.

Do đó $f(x) \geq f(0) = 0$ với mọi $x \Rightarrow 2x\text{arctg}x \geq \ln(1 + x^2)$ với mọi x

$\Rightarrow 1 + 2x\text{arctg}x \geq 1 + \ln(1+x^2)$

$= \frac{1}{2}[2 + \ln(1 + x^2)^2] \Rightarrow \frac{1 + 2x\text{arctg}x}{2 + \ln(1+x^2)^2} \geq \frac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều cần phải chứng minh.

Nhận xét. 1) Một số bạn chứng minh bất đẳng thức (1) quá phức tạp.

2) Tất cả các bạn đều giải đúng và rất đáng khen. Cảm ơn các bạn.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T7/278. *Tìm nghiệm dương của phương trình*

$$x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - x^3\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}} = 1 - x$$

Lời giải. (của *Trần Tuấn Anh*, lớp 12 Toán, trường Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa, *Trần Đình Nguyên*, PTNK ĐHQG TP Hồ Chí Minh và một số bạn khác).

Với $x > 0$, đưa phương trình đã cho về dạng tương đương sau :

$$(x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - (x^3+x)\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = x\left[(x^2+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 1\right]$$

$$\Leftrightarrow x\left[(x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right] = x^2\left[(x^2+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 1\right] \text{(1)} \quad (\text{do } x > 0)$$

Đặt $f(x) = x\left[(x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right]$, thì (1) có dạng $f(x) = f(x^2)$ (2)

Ta có $f'(x) = (2x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2$

$$= (2x+1)\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + \frac{1}{2}}\right] \quad (3)$$

Đặt $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$ với $x > 0$.

Dễ thấy $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}}$

$$= -\frac{1}{4x(x+1)(x^2+x+1)} < 0 \; \forall x>0$$

Vậy $g(x)$ là hàm giảm khi $x>0$, mà

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + \frac{1}{x}}\right] = 0$$

$\Rightarrow g(x) > g(0) \quad \forall x > 0$

Do $2x+1 > 0 \; \forall x > 0$, nên từ (3) suy ra $f'(x) > 0 \; \forall x>0$, tức là $f(x)$ là hàm tăng khi $x>0$.

Do vậy (2) $\Leftrightarrow x = x^2$

$\Leftrightarrow x = 1$ (vì $x>0$)

Tóm lại $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Nhận xét. 1) Có 64 bạn tham gia giải, trong đó 43 bạn giải đúng.

Các bạn giải đúng thường có cách giải tương tự như trên, nhưng để chứng minh $f(x)$ là hàm số đồng biến khi $x > 0$, các bạn cho những cách khác nhau để chứng minh.

- Hoặc là dựa vào f'', f''' rồi suy ra f đồng biến.
- Sử dụng định lí Lagrange
- Dùng bổ đề "Nếu $x > y > 0$ thì $\ln\frac{x}{y} > 2\frac{x-y}{x+y}$"

2) Trong số 21 bạn giải sai, thì sai lầm chủ yếu là :

- Ngộ nhận một hàm số là đồng biến.
- Tính toán đạo hàm của các hàm siêu việt sai.

Đặc biệt có một vài bạn biến đổi :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln 1.\ln\frac{1}{x^2} \; (!!)$$

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Hà Nội: *Nguyễn Hoàng Thạch*, 10T, Hà Nội - Amsterdam, *Nguyễn Tuấn Dương*, 10T, *Trần Tất Đạt*, 12B toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Tp Hồ Chí Minh :** *Hoàng Thanh Lâm*, 12 Toán, *Lương Thế Nhân*, 11 Toán, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; **Thái Nguyên:** *Võ Quang Đức* và *Trần Đức Mạnh*, 11 Toán NK Thái Nguyên **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tiến Thịnh*, 11A1, *Nguyễn Trung Lập*, 12A, chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Ninh:** *Đỗ Anh Đức*, *Nguyễn Ngọc Cường*, Hóa 11, Toán 11, Trường THPT NK Bắc Ninh; **Hải Dương:** *Nguyễn Thanh Hải*, 11 Toán, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương; **Thanh Hóa:** *Phan Văn Tiến*, 12T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Đinh Thanh Thường*, 11A, THPT Hermann Gmeiner, *Nguyễn Thanh Sơn*, 11 Tin, Khối PTCT - Tin ĐHSP Vinh; **Lâm Đồng:** *Phan Thị Thanh Vân*, 11 Toán, THPT chuyên Lâm Đồng; **Ninh Bình:** *Đinh Hữu Tiệp*, 11 Toán, THPT Lương Văn Tụy; **Vũng Tàu:** *Trần Quang Vinh*, 11 T2, THPT Lê Quý Đôn.

PHAN HUY KHẢI

Bài T8/274. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{1+\cos\frac{A}{2}}{A}+\frac{1+\cos\frac{B}{2}}{B}+\frac{1+\cos\frac{C}{2}}{C}>3\sqrt{3}$$

trong đó các góc A, B, C đo bằng radian.

Lời giải. Cách 1. (của *Tô Minh Hoàng*, 11T, THPT chuyên **Hải Dương** và nhiều bạn khác). Xét hàm số

$$f(t)=\operatorname{tg}t+\sin t-2t,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\ f(0)=0$$

Ta có

$$f'(t)=\frac{1}{\cos^2 t}+\cos t-2,\ f'(0)=0,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f''(t)=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}-\sin t\geq 0,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Suy ra $f'(t)>f'(0)=0,\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ và $f(t)$ đồng biến trong $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $f(t)>f(0)=0$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Áp dụng vào bài toán đã cho ta có

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}>A,\ \text{hay}\ \frac{1+\cos\frac{A}{2}}{A}>\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\quad (*)$$

Đối với các góc B, C ta cũng có bất đẳng thức tương tự (*).

Do vậy

$$\frac{1+\cos\frac{A}{2}}{A}+\frac{1+\cos\frac{B}{2}}{B}+\frac{1+\cos\frac{C}{2}}{C}$$

$$>\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.\quad (1)$$

Mặt khác, trong ΔABC ta luôn có

$$T=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}=3\sqrt[3]{T},$$

nên $T\geq 3\sqrt{3}$. Thay vào (1) ta được đpcm.

Cách 2. (của đa số các bạn).

Với $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin x<x$ nên

$$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}>1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2=1-\frac{x^2}{2}.$$

Áp dụng vào bài toán ta được

$$\cos\frac{A}{2}>1-\frac{A^2}{8},\ \cos\frac{B}{2}>1-\frac{B^2}{8},$$

$$\cos\frac{C}{2}>1-\frac{C^2}{8}.$$

Do vậy $\dfrac{1+\cos\frac{A}{2}}{A}+\dfrac{1+\cos\frac{B}{2}}{B}+\dfrac{1+\cos\frac{C}{2}}{C}$

$$>\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C}-\frac{A+B+C}{8}$$

$$\geq 2\frac{9}{A+B+C}-\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{144-\pi^2}{8\pi}>3\sqrt{3},\ \text{đpcm}.$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Hà Giang: *Nguyễn Kim Cương*, 11T, THPT chuyên; **Bắc Giang:** *Nguyễn Trọng Trường*, 12C, THPT Hiệp Hòa 2, *Dương Mạnh Hồng*, 12A, *Ngô Quang Vịnh*, 11A, THPT Ngô Sĩ Liên; **Tp Hồ Chí Minh:** *Lương Thế Nhân, Nguyễn Anh Dũng*, 11T, *Trần Quang, Trần Cao Ngọc*, 10T, ĐHKHTN-ĐHQG, *Nguyễn Đăng Thành*, 11A, THPT Gia Định; **Thái Nguyên:** *Võ Văn Đức, Nguyễn Ngọc Anh, Trần Đức Mạnh, Nguyễn Văn Thắng*, 11T, *Tạ Quang Công*, 12T, THPT chuyên; **Bình Thuận:** *Thiều Quang Trung*, 11AG, THPT Trần Hưng Đạo; **Đà Nẵng:** *Đặng Quang Huy*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Ngụy Đức Thuận, Đặng Nguyên Phương Vũ*, 11T, THCB Cao Lãnh; **Nam Định:** *Bùi Văn Tùng*, 11B, THPT Trần Nhật Duật, *Nguyễn Xuân Trường*, 10A, THPT Xuân Trường; **Hòa Bình:** *Nguyễn Xuân Bách*, 11T, *Nguyễn Lâm Tuyền*, 10T, THPT Hoàng Văn Thụ; **Hải Dương:** *Phạm Văn Hùng*, 10A6, THPT Gia Lộc, *Trần*

Văn Tiến, 11A7, THPT Kinh Môn, *Tô Minh Hoàng, Phạm Thành Trung, Vũ Xuân Nam, Chu Ngọc Hưng, Ngô Xuân Bách, Nguyễn Tiến Việt Hưng*, 10T, *Bùi Duy Thịnh*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Nguyễn Văn Thành, Phan Hoàng Vũ*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Huế:** *Nguyễn Du Thái*, 11T, ĐHKH Huế; **Hà Nội:** *Đào Tuấn Sơn, Nguyễn Hoàng Thạch*, 10T, *Đặng Ngọc Minh*, 11T, THPT Amsterdam, *Phan Nhất Thống*, 11A1, PTDL Tôn Đức Thắng, *Lê Chí Kiên*, 11T, *Hoàng Tiến Mạnh, Nguyễn Kim Thanh*, 10B, *Hoàng Tùng*, 12A, *Ngô Quốc Anh*, 11A, *Nguyễn Quang Hải*, 10AT, ĐHKHTN-ĐHQG, *Nguyễn Trung Kiên*, 10A2, *Hàn Thế Anh*, 11A1, ĐHS; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Thắng*, 11T, THPT chuyên; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Trung, Nguyễn Thanh Sơn*, 11T, *Vũ Nguyên Bác, Lê Tất Thắng*, 11A, ĐHSP Vinh; **Ninh Thuận:** *Lê Tiến Trung*, 12A, *Đào Đại Dương*, 11A2, THPT Chu Văn An; **Lam Đồng:** *Phan Đình Hải Sơn*, 11A10; **Khánh Hòa:** *Lê Thị Khánh Hiền*, 11T, THPT Lê Quý Đôn; **Gia Lai:** *Đặng Tuấn Hiệp*, 11C3, THPT Hùng Vương; **Quảng Ngãi:** *Trần Thái An Nghĩa*; **Quảng Trị:** *Hoàng Minh Phụng*, 11T, *Bạch Ngọc Công Đức*, 12T, THPT chuyên; **Thanh Hóa:** *Trịnh Khắc Tuân*, 11A, THPT Lê Hoàn, *Hoàng Minh Tiến*, 11B, THPT Bỉm Sơn, *Bùi Ngọc Hân*, 10T, *Phan Văn Tiến*, 12T, Lam Sơn, *Nguyễn Văn Trung*, 11A1, THPT Hậu Lộc 1; **Phú Thọ:** *Hoàng Tuấn Anh*, 11H, THPT Công nghiệp, *Nguyễn Đình Hòa*, 10A1, chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoài Vũ*, 10A1, *Nguyễn Đắc Tùng, Đỗ Mạnh Tùng*, 11A3, *Lê Mạnh Hùng*, 11A, *Nguyễn Mạnh Hà, Nguyễn Trung Lập*, 12A, *Lê Khánh Hùng*, 12A3, THPT chuyên, *Phùng Anh Đức*, 10A1, *Trần Trung Hiếu*, 11A, THPT Ngô Gia Tự, *Nguyễn Trường Giang*, 11A1, THPT Lê Xoay; **Hải Phòng:** *Lương Minh Hải*, 10T, *Đoàn Duy Trung*, 10T, *Phạm Đức Hiệp*, 10T, Trần Phú, *Trịnh Quang Hiếu*, 11a, THPT Ngô Quyền; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Thành*, 12A, THPT Thuận Thành 1, *Nguyễn Ngọc Cường*, 11T, *Nguyễn Văn Tiến*, 12A1, THPT chuyên; **Yên Bái:** *Trần Việt Yên*, 11A2, *Nguyễn Việt Hằng*, 11A, THPT chuyên

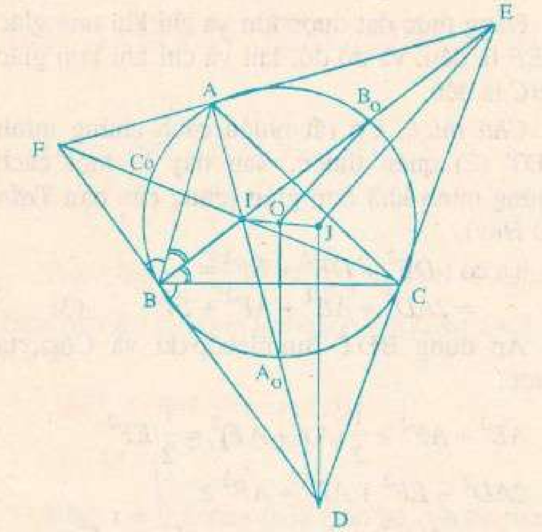
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/274. *Cho tam giác ABC. Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Gọi D, E, F theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C. Chứng minh rằng*

$$DE^2 + EF^2 + FD^2 \geq 8\sqrt{3}pR$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (Dựa theo *Trần Võ Huy*, lớp 9/3, Trường Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa, **Đồng Nai**)



Vì D, E, F là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC nên EF, FD, DE lần lượt là phân giác ngoài các góc A, B, C; đồng thời AD, BE, CF là phân giác trong các góc đó và đồng quy ở tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC, nhưng đối với tam giác DEF thì AD, BE, CF là các đường cao và I là trực tâm. Lấy điểm J đối xứng với I qua tâm O đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF (vì đường tròn tâm O là đường tròn Ơle của tam giác DEF). Cũng dễ thấy rằng các trung điểm A_o, B_o và C_o của ID, IE và IF lần lượt là trung điểm các cung bù của các cung $\overparen{BAC}$, $\overparen{CBA}$ và cung $\overparen{ACB}$ của đường tròn tâm O, do đó : $JD \parallel OA_o$ và $JD = 2OA_o$, từ đó suy ra : $JD = JE = JF = R' = 2R$, và $JD \perp BC$, $JE \perp CA$, $JF \perp AB$. Chú ý rằng dù tam giác ABC là nhọn, vuông hay tù thì DEF bao giờ cũng là tam giác nhọn và do đó, tâm J của đường tròn ngoại tiếp ΔDEF nằm trong tam giác DEF. Gọi S' là diện tích tam giác DEF ta có :

$$S' = S(JBDC) + S(JCEA) + S(JAFB) = \\ = \frac{1}{2}(BC.JD + CA.JE + AB.JF) = pR'$$

hay là : $S' = 2pR$ (1)

Ngoài ra, đối với tam giác DEF ta có một bất đẳng thức quen thuộc :

$$DE^2 + EF^2 + FD^2 \geq 4S'\sqrt{3}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được BĐT cần tìm :

$$DE^2 + EF^2 + FD^2 \geq 8\sqrt{3}pR.$$

Đẳng thức đạt được khi và chỉ khi tam giác *DEF* là đều, và do đó, khi và chỉ khi tam giác *ABC* là đều.

Chú thích. Có rất nhiều cách chứng minh BĐT (2) quen thuộc. Sau đây là một cách chứng minh khá đơn giản (cũng của bạn *Trần Võ Huy*).

Ta có : $DE^2 + DF^2 + EF^2 =$

$$= 2AD^2 + AE^2 + AF^2 + EF^2 \qquad (3)$$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki và Côsi, ta được:

$$AE^2 + AF^2 \geq \frac{1}{2}(AE + AF)^2 = \frac{1}{2}EF^2$$

$$2AD^2 + EF^2 + AE^2 + AF^2 \geq$$

$$\geq 2AD^2 + \frac{3}{2}EF^2 \geq 2AD.EF\sqrt{3} = 4\sqrt{3}S' \ (4).$$

Từ (3) (4), ta thu được B.Đ.T cần tìm.

Nhận xét. 1) Số bạn tham gia giải bài toán trên khá đông, có đến hơn 380 bài gửi đến Tòa soạn. Phần đông các bạn sử dụng nhiều công thức và BĐT lượng giác về các góc trong tam giác, vì vậy lời giải nói chung đòi hỏi tính toán phức tạp, cồng kềnh. Lời giải nêu trên là ngắn gọn nhất; không những thế, chỉ đòi hỏi vận dụng kiến thức đơn giản thuộc chương trình Hình học THCS.

2) Để ý thêm rằng, nếu a, b, c và S là độ dài các cạnh và diện tích của một tam giác nào đó thì ngoài BĐT (2) quen thuộc :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\ S,$$

chúng ta cũng còn có một BĐT mạnh hơn :

$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ và từ đó, thu được BĐT sau :

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S \qquad (5)$$

Sau khi nêu ra và chứng minh BĐT (5) này, bạn *Bùi Việt Dũng*, 10A2, PTCT-ĐHSP **Hà Nội** và *Nguyễn Hoài Vũ*, 11A1, trường THPT chuyên **Vĩnh Phúc** đã đề xuất BĐT sau :

$$DE.DF + DE.EF + DF.EF \geq 8\sqrt{3}pR,$$

mạnh hơn BĐT cần chứng minh.

3) Ngoài các bạn đã nêu tên, các bạn sau đây cũng có lời giải tương đối gọn hơn cả :

Hà Nội: *Ngô Quốc Anh*, 11A Toán, PTCT-ĐHKHTN, ĐHQG; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 10T, PTNK Hoàng Văn Thụ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Trung*, 11A10, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Yên Bái:** *Nguyễn Việt Hằng*, 11A1, THPT chuyên Yên Bái; **Hải Dương:** *Đặng Đức Huy*, 10A5, THPT Nam Sách; **Nam Định:** *Đặng Hữu Nho*, 10A, THPT Trần Hưng Đạo, *Đỗ Thị Hải Yến*, 9B, THCS Hải Hậu; **Thái Bình:** *Lưu Hoài Nam*, 10A, THPT Phụ Dực, Quỳnh Phụ; **Thanh Hóa:** *Mai Văn Hà*, 10T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Thanh Sơn*, 11 Tin, PTCTT-ĐHSP Vinh; **Quảng Ngãi:** *Bùi Quang Minh*, 12 Toán, THPT Lê Khiết; **Khánh Hòa:** *Trần Trung Duy*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

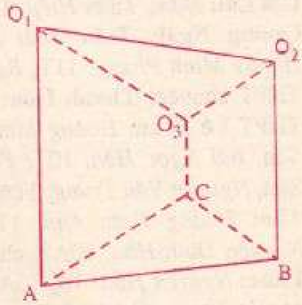
Bài T10/274. *Ba mặt cầu (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3) tiếp xúc với nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc với mặt phẳng chứa tam giác ABC tại ba đỉnh A, B, C. Gọi S là diện tích tam giác ABC và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng :*

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq \frac{2S}{R}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải.

(*Dương Mạnh Hồng*, 12A, THPT năng khiếu Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**) Theo giả thiết các tứ giác BO_2O_3C, CO_3O_1A, AO_1O_2B là các hình thang vuông.



Suy ra :

$$\begin{cases} R_2 + R_3 \geq O_2O_3 \geq BC = a \\ R_3 + R_1 = O_3O_1 \geq CA = b \\ R_1 + R_2 = O_1O_2 \geq AB = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 \geq \frac{a+b+c}{2} = \frac{S}{r} \geq \frac{2S}{R} \ (\text{vì } R \geq 2r)$$

với r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2 + R_3 = a \\ R_3 + R_1 = b \\ R_1 + R_2 = c \\ R = 2r \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ là đều.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán có rất nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên, nhiều bạn giải quá dài. Đặc biệt, có một bạn giải sai.

2) Khi giải bài toán này có nhiều bạn đã cố gắng vẽ cả ba hình cầu (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3). Các bạn

nên nhớ rằng khi giải bài toán hình học, đặc biệt là hình không gian, không nhất thiết phải vẽ mọi yếu tố hình học có trong đề bài.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt. **Sơn La :** *Nguyễn Bích Vân*, 12T3, THPT NK Sơn La; **Quảng Trị:** *Hồ Khắc Hiếu*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nam:** 11D, THPT Duy Tiên B; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Đắc Tùng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Vũ Chí Công*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Quang*, 10T, THPTNK, ĐHQG.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/274. *Trên một mặt bàn nằm ngang, nhẵn, dọc theo một đường thẳng, người ta đặt ba quả cầu có cùng kích thước, khối lượng của chúng lần lượt là m, M và 2M (hình vẽ). Quả cầu m bay đến va chạm đàn hồi trực diện vào quả cầu M. Hỏi với tỉ số nào của $\frac{m}{M}$ thì trong hệ còn xảy ra vừa đúng một va chạm nữa ?*

Hướng dẫn giải. Kí hiệu v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của quả cầu m và M sau va chạm lần 1; áp dụng các định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn động năng (thực ra là cơ năng) ta có :

$$mv_o = mv_1 + Mv_2 \qquad (1)$$

$$\frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} \qquad (2)$$

Suy ra : $v_1 = -\frac{(M-m)v_o}{M+m}$; $v_2 = \frac{2mv_o}{m+M}$

Kí hiệu v'_2 là vận tốc của M sau va chạm với $2M$ (va chạm lần 2), áp dụng các định luật bảo toàn nói trên ta được :

$$v'_2 = -\frac{2mv_o}{3(M+m)}$$

Dấu trừ chứng tỏ sau va chạm lần 2, quả cầu M chuyển động theo chiều ngược lại. Để không xảy ra va chạm nào nữa ta phải có các điều kiện :

* $v_1 < 0$ hay $M > m$;

* $|v_1| \geq |v'_2| \Rightarrow \frac{2mv_o}{3(M+m)} \leq \frac{(M-m)v_o}{M+m}$.

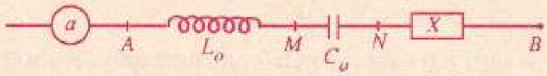
Suy ra $\frac{m}{M} \leq \frac{3}{5}$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Hà Nội: *Nông Hồng Dương*, 10A2, THPT Trần Phú, *Bạch Văn Sơn*, 12C, TH chuyên ngữ, ĐHNN-ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Ngọc Duẩn*, 10B Toán, PT chuyên Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Hải Phòng:** *Nguyễn Minh Quang*, 10 Lí, THPT Trần Phú; *Phạm Thành Công*, 10 Lí, THPT Trần Phú; **Nam Định:** *Đặng Cao Sơn*, 10 Toán 3, THPT Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Vũ Xuân Nam*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, *Trần Văn Bình*, 10L, THPT Nguyễn Trãi; **Bắc Ninh:** *Vũ Xuân Tiến*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Hoài Nam*, 11B1, THKT Sông Công; *Nguyễn Ngọc Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Yên Bái:** *Hoàng Tiến Dũng*, 11A1, *Nguyễn Thanh Bình*, 11A2, THPT chuyên Yên Bái; **Hà Nam:** *Nguyễn Ngọc Tân*, 11B, THPT A Dung Tiên; **Vĩnh Phúc:** *Trần Ngọc Dũng*, 10A, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạkch; *Hà Duy Hưng*, 11A1, THPT Mê Linh; *Nguyễn ánh*, 10B2, *Lê Khánh Hùng*, *Nguyễn Duy Hưng*, 11A3, *Nguyễn Mạnh Hà*, 12A1; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Tp Vũng Tàu:** *Hà Thanh Sơn*, 10T1, THPT Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Du Thái*, 11CT, PTCT, ĐHKH Huế; **Đà Nẵng:** *Đặng Quang Huy*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Phan Nguyên Như*, 11/7, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ; **Thanh Hóa:** *Trần Trọng*, 11B, THPT Bỉm Sơn, *Nguyễn Văn Hiệp*, 10E, THPT Quảng Xương I; **Nghệ An:** *Nguyễn Chí Thành*, 10A6, *Nguyễn Đức Giang*, *Nguyễn Đình Thái*, 10A5, *Lê Quang Phương*, 10A3; *Lê Trọng Giáp*, 10E, THPT Nghĩa Đàn; **Quảng Trị:** *Lê Vũ Hải*, 12A5, THPT Vĩnh Linh; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thành Sơn*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Hà Tĩnh:** *Lê Hồng Quốc Tiệp*, 10A, THPT Hồng Lĩnh

MAI ANH

Bài L2/274. *Một mạch điện có sơ đồ như hình vẽ :*



$$u_{AB} = u = 200\sqrt{2}\sin 100\pi t(V)$$

L_o là một cuộn dây thuần cảm có cảm kháng $Z_{L_o} = 30\Omega$; C_o là tụ điện có dung kháng $Z_{C_o} = 50\Omega$; X là đoạn mạch có chất 2 trong 3 phần tử R, L, C mắc nối tiếp nhau; ampe kế

nhiệt trở $I = 0,8A$; hệ số công suất của đoạn mạch AB là $k = 0,6$.

1) Xác định các phần tử của X và độ lớn của chúng

2) Viết biểu thức của $u_{NB} = u_X$.

Hướng dẫn giải.

1) Tổng trở của mạch $Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{200}{0,8} = 250\Omega$.

Vì $k = \cos\varphi = \dfrac{R}{Z} \neq 0$ nên mạch phải có $R \Rightarrow X$ chứa R, với $R = k.Z = 150\Omega$

a) Trường hợp mạch có tính cảm kháng : X gồm R nt L, ta có :

$$Z^2 = R^2 + (Z_L + Z_{L_o} - Z_{C_o})^2$$

$$\Rightarrow Z_L = \sqrt{Z^2 - R^2} + (Z_{C_o} - Z_{L_o}) = 200 + 20 = 220\Omega \Rightarrow L = \frac{11}{5\pi}\text{ (H)}$$

b) Trường hợp mạch có tính dung kháng : X gồm R nt C, ta có

$$Z_C = \sqrt{Z^2 - R^2} - (Z_{C_o} - Z_{L_o}) = 180\Omega$$

$$\Rightarrow C = \frac{10^{-3}}{18\pi}(F).$$

2) Góc lệch pha giữa u và i là :
$\varphi = \pm\arccos(0,6) \approx 0,927(\text{rad})$

Độ lệch pha giữa u_x và u là $(\varphi_x \mp 0,927)$

a) Khi X gồm R nt L:

$$Z_X = \sqrt{R^2 + Z_L^2} \approx 266,3\Omega$$

$$\Rightarrow U_X = IZ_X \approx 213V;\ \text{tg}\varphi_X = \frac{Z_L}{R} = \frac{220}{150}$$

$$\Rightarrow \varphi_X \approx 0,972\text{ (rad)}$$

Biểu thức của hiệu điện thế
$u_X \approx 213\sqrt{2}\sin(100\pi t + 0,045)\ (V)$

b) Khi X gồm R nt C :

$$Z_X = \sqrt{R^2 + Z_C^2} \approx 234,3V$$

$$\Rightarrow U_X = IZ_X \approx 187,4\text{V};\ \text{tg}\varphi_X = -\frac{Z_C}{R} = -\frac{180}{150}$$

$$\Rightarrow \varphi_X \approx -0,876(\text{rad})$$

Biểu thức của hiệu điện thế
$u_X \approx 187\sqrt{2}\ \sin(100\pi t + 0,051)\ (V)$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn (lưu ý cả việc làm tròn số) : **Hà Tĩnh:** *Bùi Nhật Vinh*, 11 Lí, THPTNK Hà Tĩnh, *Bùi Việt Hoàng Sơn*, 12 Lí, THPTNK Hà Tĩnh; **Phú Yên:** *Lê Ngọc Thiên*, 11 Lí, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Yên Bái:** *Phạm Hồng Chính*, 11A1, THPT chuyên Yên Bái; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thành Thuận*, 11T, THPT chuyên ban, Tx Cao Lãnh; **Thanh Hóa:** *Như Ngọc Thuần*, 12C, THPT Ba Đình, Nga Sơn; *Khương Tú*, 11B, THPT Thiệu Hưng, Thiệu Hóa; **Nghệ An:** *Lê Ngọc Tuấn*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, *Lưu Anh Tú*, 10A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Hải Dương:** *Trần Quang Khải*, 11P3, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn; **Vĩnh Phúc:** *Lại Đăng Giang*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; *Nguyễn Chung Thủy*, 11A6, THPT chuyên; *Đỗ Mạnh Tùng*, 11A3, THPT chuyên; **Quảng Trị:** *Lê Vũ Hải*, 12A5, THPT Vĩnh Linh, Quảng Trị; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang

MAI ANH

THỂ THỨC GỬI BÀI DỰ THI *GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC*

- Bài đánh máy vi tính hoặc viết tay sạch sẽ trên một mặt giấy.
- Góc trên bên phải đề họ tên, lớp, trường, quận huyện, tỉnh và địa chỉ nhà ở. Góc bên trái đề số của bài giải.
- Mỗi bài viết riêng trên một tờ giấy. Không viết liền nhiều bài giải trên cùng một tờ giấy.
- Ngoài phong bì ghi rõ lời giải của số tạp chí nào.
- Chỉ gửi về một địa chỉ : **57 (cũ) Giảng Võ, Hà Nội**
- Không gấp bài phức tạp, không dán nhiều hồ.

THTT

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

MỘT SỐ NGHỊCH LÍ CỦA XÁC SUẤT

NGHỊCH LÍ DE MÉRÉ

NGUYỄN DUY TIẾN
(ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội)

Nghịch lí: Khi tung 4 lần *một con* súc sắc cân đối thì xác suất để ít nhất một lần mặt 1 xuất hiện lớn hơn 1/2. Trong lúc đó khi tung 24 lần *hai con* súc sắc cân đối thì xác suất để ít nhất một lần hai con đều xuất hiện mặt 1 bé hơn 1/2. Điều này thật đáng ngạc nhiên, bởi vì khả năng nhận được một số 1 gấp 6 lần khả năng xuất hiện hai số 1, còn số 24 thì gấp 6 lần số 4.

Giải thích: Nếu tung *một con* súc sắc cân đối k lần thì số khả năng có thể có bằng 6^k. Trong số đó có 5^k số khả năng không xuất hiện mặt 1, và do đó xác suất để xuất hiện ít nhất một lần mặt 1 bằng :

$$P_k = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Dễ kiểm tra lại rằng $P_k > 1/2$ nếu $k \geq 4$. Tương tự xác suất xuất hiện ít nhất một lần hai mặt 1 khi tung k lần *hai con* súc sắc bằng :

$$Q_k = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k$$

$Q_k < 1/2$ với $k \leq 24$ và $Q_k > 1/2$ với $k \geq 25$. Vì vậy "giá trị giới hạn" của số lần tung để xảy ra điều trên đối với *một con* súc sắc là 4 và đối với *hai con* súc sắc là 25.

Chú thích.

* Nghịch lí trên là thắc mắc của Đờ Mêrê (De Méré) khi trao đổi với Pascan (Pascal), nhà học giả vĩ đại của thế kỉ 17. Năm 1654 Pascal và Phecma (Fermat) cũng tìm ra cách giải thích trên. Tuy vậy, cách giải thích này không làm De Méré thỏa mãn vì ông cho rằng "không phù hợp với nguyên lí tỉ lệ của giá trị tiêu chuẩn". Năm 1718 Moavrơ (Moivre) đã chỉ ra rằng "Nguyên lí tỉ lệ của các giá trị tiêu chuẩn" khá gần với chân lí, bởi vì, nếu p là xác suất của sự kiện nào đó, thì giá trị tiêu chuẩn k có thể tìm từ phương trình : $(1-p)^x = 1/2$ (phương trình này có nghiệm nếu $0 < p < 1$), k là số nguyên bé nhất lớn hơn x. Nghiệm của phương trình trên có dạng :

$$x = -\ln 2/\ln(1-p) = \ln 2/(p + p^2/2 + \ldots)$$

Từ đó suy ra rằng, nếu p^2 khá bé thì x gần bằng $\ln 2/p$, tức là p giảm tỉ lệ với sự tăng của giá trị tiêu chuẩn. Nghịch lí trên nảy sinh vì $p = \frac{1}{6}$, nên $\frac{p^2}{2} = \frac{1}{72}$ chưa bé đến mức có thể bỏ qua được.

* Cacđanô (Cardano) cũng đã từng phạm sai lầm khi giải thích những vấn đề tương tự. Ông lập luận như sau : xác suất để có hai mặt 1 bằng 1/36, vì vậy để với xác suất 1/2 nhận được ít nhất một lần hai mặt 1 cần phải tung cặp súc sắc đúng 18 lần. Theo cách lập luận của ông thì nếu tung cặp súc sắc nhiều hơn 36 lần thì xác suất có ít nhất 1 lần xuất hiện hai mặt 1 sẽ lớn hơn 1. Điều này vô lí.

* Năm 1693 tức 40 năm sau khi đã tìm ra cách giải thích cho nghịch lí trên, Pêpy (Pepys, Chủ tịch hội Hoàng gia Anh từ 1684) đặt cho Niutơn (Newton) bài toán gần tương tự. Newton cũng đã tìm được lời giải đúng, nhưng Pepys cũng không thỏa mãn.

Bạn xem, những người tài giỏi như thế vẫn có thể giải thích không rõ ràng hoặc gặp sai lầm như thường, và rất có thể bạn cũng giống như Pepys không thỏa mãn với cách lí giải ở trên.

(Theo *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics* (Các nghịch lí trong lí thuyết xác suất và thống kê toán học) của Gábor J.Székely)

"GẶP NHAU QUA NGÀY SINH"

Một con số kỉ lục từ đầu năm tới nay : có 8 bạn hội viên sinh vào **ngày 28 tháng 9**. Xin gửi quà chúc mừng sinh nhật tới các bạn :

1. *Nguyễn Văn Trung*, sinh năm 1983, lớp 11D, THPT Quảng Xương II, Thanh Hóa.

2. *Ngô Quý Thiện*, sinh năm 1987, lớp 8A, THCS Yên Phong, Bắc Ninh.

3. Lưu Đắc Ngọc Sơn, sinh năm 1984, 370 Nguyễn Đình Chiểu, Phước Hiệp, TX Bà Rịa, tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu.

4. *Ngô Mạnh Hoài*, sinh năm 1982, 12E, THPT Nam Lý, Lý Nhân, Hà Nam.

5. *Lê Đức Thọ*, sinh năm 1985, xóm Hồng Tiến, Nghĩa Hồng, Nghĩa Đàn, Nghệ An.

6. *Vương Trí Kiên*, sinh năm 1983, Khu tập thể Bao bì I, 583 đường Kim Ngưu, Vĩnh Tuy, Hà Nội.

7. *Đàm Văn Tưởng*, sinh năm 1978, Bùi Xá, Tam Hưng, Thanh Oai, Hà Tây.

8. *Đoàn Thu Hà*, sinh năm 1985, số 170, tổ 1, khu C, thị trấn Phúc Yên, Mê Linh, Vĩnh Phúc.

Các bạn thích ngày sinh 28 tháng 9 cũng được nhận quà :

1. *Trương Nguyên Minh Đoàn*, lớp 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

2. *Trần Diệp Hà*, 9A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên, Vĩnh Phúc

3. *Hà Trung Kiên*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TX Hòa Bình, Hòa Bình.

4. *Nguyễn Hữu Chung*, 11(A) Hóa, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.

Các bạn cần gửi gấp địa chỉ mới để CLB chuyển quà được kịp thời.

Cám ơn các bạn và chúng ta lại chờ... 1 tháng nữa !

C.L.B

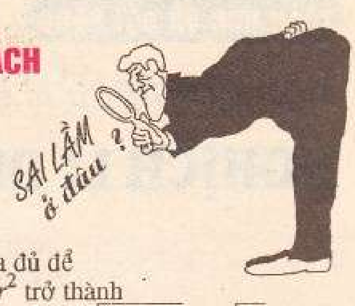
9 HÌNH VUÔNG KHÁC NHAU

Bạn An lấy một tờ giấy hình vuông và kẻ 9 đường thẳng song song với một cạnh của hình vuông, rồi lại kẻ 9 đường thẳng vuông góc với 9 đường thẳng đã kẻ. Như vậy tờ giấy được chia thành 100 hình chữ nhật. Bạn Bình nhìn kĩ và lấy thước đo cẩn thận rồi cho biết : "Trong 100 hình chữ nhật ấy, có đúng 9 hình vuông có kích thước khác nhau !".

Theo các bạn thì bạn Bình nói thế có đúng không ?

NGỌC MAI

MỘT BÀI TOÁN NHIỀU CUỐN SÁCH GIẢI... SAI !



Hầu hết các bạn đều thấy rằng điều kiện CM = CN chưa đủ để bất đẳng thức $S \ge 2r^2$ trở thành đẳng thức, bởi để ý rằng $\sqrt{CM.CN} \ge \sqrt{2S}$ chỉ trở thành đẳng thức khi $\angle ACB = 90^o$ mà điều này không xảy ra nếu bài toán cho tam giác *ABC* không vuông tại đỉnh *C*. Do đó với những tam giác *ABC* như thế thì không có đẳng thức $S = 2r^2$.

Một số bạn giải lại... lại bị sai.

Có bạn cho rằng : $S \ge \sqrt{CM.CN}\,.\,r$ nên *S* nhỏ nhất khi $S = \sqrt{CM.CN}\,.\,r$ (?) Có rất nhiều cách giải đúng cho bài này. Xin đưa ra một số cách sau đây :

Cách 1. Đặt $\angle ACB = \alpha$ thì :

$$S = \frac{1}{2}(CM+CN).r \ge \sqrt{CM.CN}\,.\,r$$

$$\Rightarrow S\,.\sqrt{\frac{1}{2}\sin\alpha} \ge \sqrt{\frac{1}{2}CM.CN\,.\sin\alpha}\,.\,r = \sqrt{S}\,.\,r$$

$$\Rightarrow S \ge \frac{2r^2}{\sin\alpha}\ (\text{cons}t\,)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $CM = CN \Leftrightarrow MN \perp OC$.

Cách 2. Giả sử đường thẳng qua *O* vuông góc với *CO* cắt *CA*, *CB* lần lượt tại *M'* và *N'*. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $CM \ge CN$. Gọi *I*, *J* là hình chiếu vuông góc của *M*, *N* trên *M'N'* thì

$$\frac{S_{\Delta OM'M}}{S_{\Delta ON'N}} = \frac{MI}{NJ} = \frac{MO}{NO} = \frac{CM}{CN} \ge 1.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CMN} \ge S_{\Delta CM'N'}$$

Do đó $S = S_{\Delta CMN}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $CM = CN\ (M \equiv M';\ N \equiv N')$.

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng qua *O* vuông góc với *CO*.

Các bạn phân tích và sửa sai tốt là : *Dương Thị Phương Hiền*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Hà Nội; *Đào Tiến Thành*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định; *Dương Công Đồng*, 11E7, THPT Đào Duy Từ, Thanh Hóa; *Lê Văn Dũng*, 10A5, THPT Chương Mĩ A, Hà Tây; *Hà Hoài Thu*, 10 Tin, THPT Lê Viết Thuận, Vinh, Nghệ An; *Nguyễn Tiến Yết*, 9E, THCS Dân Hòa, Thanh Oai, Hà Tây; *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 10 Lý, THPT Năng khiếu Hàn Thuyên, Bắc Ninh, *Nguyễn Đức Toàn*, khu II thông Tiên, thị trấn Yên Lạc, Vĩnh Phúc; *Trần Quyết Thắng*, đội 9, nông trường 720, EaKar, Đăklăk; *Nguyễn Xuân Nguyên*, 10 Toán, chuyên Thái Bình; *Lê Hùng Việt Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Hà Nội;

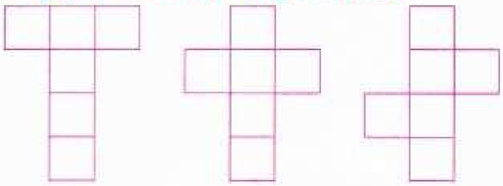
KIHIVI

Giải đáp bài

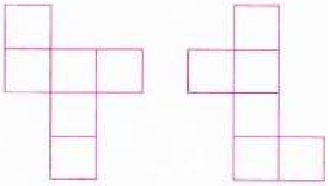
HÌNH NÀO

1) Những hình số 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14 không phải là hình khai triển của một hình lập phương vì khi gấp lại có 2mặt trùng vào nhau.

2) Ngoài các hình 1, 2, 3, 9, 10, 12, 13, 15 còn có các hình sau cũng là khai triển của một hình lập phương :



16 17 18



19 20

Nhận xét :

• Các hình là khác nhau nếu xoay, lật đều không thành trùng nhau.

• Các hình 2 và 10 coi là một hình khai triển, 3 và 9 coi là một.

• Nhiều bạn còn chỉ ra các hình khai triển khác nhưng thật ra chỉ là các hình 1, 2, 3, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20 lật lại mà thành. Tất cả chỉ có 11 trường hợp.

Các bạn có lời giải tốt : **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Hồng Quân*, 8B, THCS Yên Lạc, **Nam Định :** *Đỗ Minh Thành*, 9A, THCS Đào Sư Tích, Cổ Lễ, Trực Ninh, **Thanh Hóa :** *Ngô Thị Xuân*, THCS Phan Đình Phùng, Đông Hưng, **TP Hồ Chí Minh :** *Đỗ Thế Hiển*, 912 THCS Võ Trường Toản.

NAM HÀ

CỘNG XOAY

Bảng 1 biểu thị phép cộng 3 số với kết quả là 1368. Xoay bảng 1 đi 90° theo chiều kim đồng hồ ta được bảng 2 mà phép cộng cho kết quả là 2556. Bạn hãy chọn 9 chữ số khác nhau trong các chữ số 0, 1, 2, ..., 9 để điền vào bảng ô vuông kích thước 3×3 sao cho kết quả của phép cộng lúc đầu và sau khi xoay đều là 2000.

	1	2	3
+	4	5	6
	7	8	9
1	3	6	8

Bảng 1

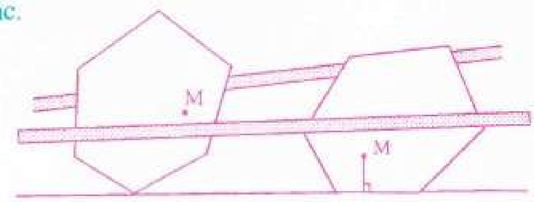
	7	4	1
+	8	5	2
	9	6	3
2	5	5	6

Bảng 2

NGUYỄN VĂN THIÊM
(*Sưu tầm*)

NHÀ VẬT LÍ THÔNG MINH ?

Con của một nhà vật lí hỏi bố bài toán sau đây : *Cho một đa giác lồi và một điểm M bất kì nằm trong đa giác. Chứng minh rằng : trong các hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh của đa giác ít nhất* có một hình chiếu nằm trong cạnh của đa giác.



Sau một hồi suy nghĩ, nhà vật lí giải cho con như sau :

Làm một đa giác lồi mỏng gần như trọng lượng không đáng kể. Tại điểm M, ta gắn vào một chất điểm có trọng lượng và đa giác có gắn chất điểm sẽ có trọng tâm chính là M. Hãy giữ đa giác ở vị trí thẳng đứng (không bị đổ) trên một mặt phẳng thì đa giác chỉ có thể lăn trên mặt phẳng này. Vì không có động cơ vĩnh cửu nên đa giác phải dừng lại (chứ không thể lăn mãi). Khi đó đa giác ở vị trí cân bằng nên hình chiếu vuông góc của M lên cạnh của đa giác thuộc mặt phẳng phải nằm trong chân đế, tức là nằm trong cạnh của đa giác.

Con của nhà vật lí theo dõi lời giải của bố xong và sung sướng thốt lên : Ôi ! Bố thông minh quá !

Còn các bạn, các bạn có hiểu cách chứng minh không ? Lời giải trên có tin được hay không ? Bạn có giải được bằng cách khác không ?

L.T.N

BẠN CÓ BIẾT ?

THIÊN NIÊN KỈ MỚI VÀ BẢY ĐIỀU BÍ ẨN

Paris 1900 - Paris2000. Sau một thế kỉ, thủ đô Paris lại có dịp trở thành tiêu điểm của thế giới toán học. Để chào mừng Năm Toán học thế giới, theo quyết định của UNESCO, ngày 26.5.2000 những người cự phách của khoa học này tổ chức hội thảo quốc tế. Với khoảng cách một thế kỉ, từ máy điện toán đến Internet, từ vật lí lí thuyết đến di truyền học, từ công nghiệp, kinh tế đến việc xử lí những cuộc thăm dò dư luận, khi mà toán học xâm nhập vào mọi ngành và trở thành công cụ nghiên cứu đắc lực thì người ta lại nhớ tới những thiên tài toán học có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển toán học của thế kỉ qua.

Năm 1900, nhà toán học Đức Đavit Hinbe (David Hilbert 1862-1943), khi nói về "sự trong sáng" của toán học, cho rằng : "Một ngành khoa học càng có nhiều vấn đề, ngành đó càng tràn đầy sức sống; thiếu vấn đề là biểu hiện sự chết hoặc chính ngành đó hết phát triển". Để động viên các đồng nghiệp của mình, ông đã đưa ra 23 bài toán để giải trong thế kỉ 20. Mất cả năm 1899 để chuẩn bị cho các bài toán đó, ông tin rằng thế kỉ 20 sẽ giải quyết được trọn vẹn. Nhưng ba trong các bài toán đó vẫn chưa có lời giải! Phải chờ đến năm 1995 mới có người Anh Anđriu Oailơ (Andrew Wiles) đưa ra chứng minh định lí Phecma (Fermat) nổi tiếng, đặt ra cách đây hơn 350 năm.

Tiếp bước đi của Hilbert, Viện toán học Clêi (Clay), một tổ chức tư nhân Mỹ ở Kembritgiơ (Cambridge bang Massachusetts) chuyên tâm ủng hộ toán học, vừa công bố ở trường Collège de France việc thiết lập những giải thưởng cho thiên niên kỉ. Hội đồng khoa học của tổ chức Clay, trong đó có người Pháp Alanh Cônơ (Alain Connes), cả người Anh Andrew Wiles lần này đã chọn không phải 23 mà 7 bài toán cho thiên niên kỉ tới.

- Giả thuyết của Riemann
- Giả thuyết của Poincaré
- Giả thuyết của Hodge
- Giả thuyết của Birch và Swinnerton Dyer
- Bài toán P và NP
- Những phương trình Navier-Stokes
- Những phương trình Yang-Mills.

Mỗi nhà toán học giải quyết trọn vẹn một trong những bí ẩn thách thức đó sẽ nhận giải một triệu đôla Mỹ. Một trong bảy bài toán đó (giả thuyết Riemann) thuộc ba đề xuất chưa giải được của Hilbert.

Sự say mê giải các vấn đề khó gỡ này có thể là một động lực phát triển toán học. Khi tìm tòi lời giải những người giỏi toán đã vỡ hoang được nhiều vùng nguyên vẹn tri thức, tạo ra được bao nhiêu là công cụ mới. Các nhà vật lí học rồi các kĩ sư đã chiếm lĩnh những công cụ này để mô tả lịch sử vũ trụ, hoàn thiện một hệ thống hạ cánh cho Airbus hoặc tạo ra những mã khóa cho Internet...

Một trăm năm sau hội nghị toán học quốc tế Paris 1900, cộng đồng toán học quốc tế, trong đó có vai trò lớn của người Pháp, vẫn được chia làm hai phe không thỏa hiệp, luôn luôn là hiện thân của Hilbert và Poincaré (nhà toán học Pháp 1854-1912). Đối với phe thứ nhất, những "người theo chủ nghĩa xây dựng", các đối tượng toán học là những bản thể lí trí, tồn tại trong tư duy con người. Đối với phe thứ hai, những "người theo thuyết duy thực", những đối tượng toán học là những chân lí mà các nhà toán học chỉ làm một việc là khám phá ra.

NGUYỄN VĂN THIÊM
(Theo *Le Point* tháng 5-2000)

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT80M0

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2000

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng