TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

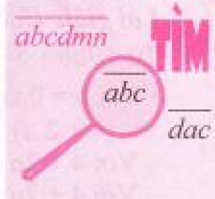
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
11 2015
Số 461

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Chào mừng Ngày Nhà giáo Việt Nam 20-11

BÀI TOÁN TÌM CÁC CHỮ SỐ CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN



VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Bài toán tìm chữ số của một số viết trong hệ thập phân thường gặp trong các đề thi học sinh giỏi từ lớp cuối tiểu học đến cấp THCS, THPT, trong đó học sinh được học nhiều vào năm học lớp 6 khi học về ƯC, BC, số nguyên tố, hợp số, số chính phương. Việc giải các bài toán dạng này có tác dụng lớn trong việc rèn luyện tư duy lôgic và khả năng sáng tạo cho học sinh. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc cách giải một số dạng toán của bài toán tìm chữ số của một số thông qua một số thí dụ cụ thể.

DẠNG 1. TÌM TỪNG CHỮ SỐ BẰNG CÁCH XÉT CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT TÍCH

Thí dụ 1. *Tìm số $\overline{abcd}$ biết rằng:*
$$\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=4574.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có
$$1000.a+200.b+30.c+4.d=4574 \quad (1).$$
Xét hàng đơn vị có tích $4.d = \ldots.4 \Rightarrow d=1$ hoặc $d=6$.

• Nếu $d=1$ thay vào (1) được
$$100.a+20.b+3.c=457 \quad (2).$$
Xét hàng đơn vị có tích $3.c=\ldots.7 \Rightarrow c=9$

Thay vào đẳng thức (2) ta có $10.a+2.b=43$.

Vế trái đẳng thức này là số chẵn, vế phải là số lẻ, do đó không tìm được a, b.

• Nếu $d=6$ thay vào (1) ta có
$$100.a+20.b+3.c=455 \quad (3).$$
Tích $3.c=\ldots.5 \Rightarrow c=5$, thay vào (3) ta có

$10.a+2.b=44 \Rightarrow$ tích $2.b=\ldots.4 \Rightarrow b=2$ hoặc $b=7$.

Với $b=2 \Rightarrow a=4$; với $b=7 \Rightarrow a=3$.

Vậy các số $\overline{abcd}$ cần tìm là: 4256; 3756.

Nhận xét. Lời giải bài toán trên đã dựa vào tích của một số nhân với 10 có tận cùng 0 và cách tìm chữ số tận cùng của các số.

Thí dụ 2. *Tìm số $\overline{abcd}$ biết: $\overline{abc}.c=\overline{dac}$ (a, b, c, d là các chữ số khác nhau).*

Lời giải. Từ giả thiết có
$$(100.a+10.b+c).c=100.d+10.a+c$$
$$\Rightarrow 100ac+10bc+c^2=100d+10a+c \quad (1).$$
Vì c^2 có tận cùng là c (khác 0), nên $c\in\{1, 5, 6\}$.

• Nếu $c=1$ thì $\overline{abc}=\overline{dac}$ (loại vì a, b, c, d khác nhau).

• Nếu $c=5$ thay vào (1) ta được:
$$500a+50b+25=100d+10a+5$$
$$\Rightarrow 50a+5b+2=10d+a \quad (2)$$
$\Rightarrow 49a+5b+2=10d\le 90 \Rightarrow a=1$. Thay vào (2) được: $50+5b+1=10d$. Khi đó tích $5b=\ldots.9$ $\Rightarrow$ không tìm được b.

• Nếu $c=6$ thay vào (1) ta được
$$60a+6b+3=10d+a \quad (3)$$
$$\Rightarrow 59a+6b+3=10d\le 90$$
$\Rightarrow a=1$. Thay vào (3)

$\Rightarrow 59+6b+3=10d \Rightarrow 62+6b=10d$

$\Rightarrow 6b<30$ và $6.b=\ldots.8 \Rightarrow b=3 \Rightarrow d=8$.

Vậy số $\overline{abcd}=1368$.

Nhận xét. Lời giải bài toán trên sử dụng tính chất c^2 và c có cùng chữ số tận cùng khi c có tận cùng là 0, 1, 5, 6 và cách tìm chữ số tận cùng của các số. Trong cách xét các chữ số tận cùng để tìm các chữ số ta tìm lần lượt từng chữ số.

DẠNG 2. SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT CHIA HẾT

Thí dụ 3. *Tìm các chữ số a, b, c biết:*
$$\overline{abc}-\overline{ca}=\overline{ca}-\overline{ac}.$$

Lời giải. Ta có $\overline{ca}-\overline{ac}<100$

$\Rightarrow \overline{abc}-\overline{ca}<100 \Rightarrow \overline{abc}<200$. Do đó $a=1$.

Ta có phép tính: $\overline{1bc}-\overline{c1}=\overline{c1}-\overline{1c}$

$\Rightarrow 100+10.b+c-10.c-1=10.c+1-10-c$

$\Rightarrow 10.b+108=18.c \Rightarrow 5.b+54=9.c \quad (1)$

$\Rightarrow 5.b \vdots 9 \Rightarrow b \vdots 9 \Rightarrow b\in\{0; 9\}$

• Với $b=0$ thay vào (1) $\Rightarrow 9.c=54 \Rightarrow c=6$.

• Với $b=9$ thay vào (1) $\Rightarrow 5.9+54=9.c$ $\Rightarrow c=11$ (loại).

Vậy $a=1$, $b=0$, $c=6$.

Nhận xét. Lời giải bài toán trên dựa vào số chữ số của các số sẽ tìm được giới hạn giá trị của các chữ số. Sau đó sử dụng dấu hiệu chia hết cho 9 tìm được các chữ số còn lại.

Thí dụ 4. *Tìm số $\overline{abcdmn}$ biết:*

$$\overline{abcdmn}.2=\overline{cdmnab}.$$

Lời giải. Từ $\overline{abcdmn}.2=\overline{cdmnab}$

$\Rightarrow (\overline{ab}.10000+\overline{cdmn}).2=\overline{cdmn}.100+\overline{ab}$

$\Rightarrow 20000.\overline{ab}+2.\overline{cdmn}=100.\overline{cdmn}+\overline{ab}$

$\Rightarrow 19999.\overline{ab}=98.\overline{cdmn}$

$\Rightarrow 2857.\overline{ab}=14.\overline{cdmn}\Rightarrow 14.\overline{cdmn}\,\vdots\,2857$

mà $(2857, 14)=1\Rightarrow \overline{cdmn}\,\vdots\,2857$

$\Rightarrow \overline{cdmn}=\{2857; 5714; 8571\}$

– Với $\overline{cdmn}=2857\Rightarrow \overline{ab}=14$

$\Rightarrow \overline{abcdmn}=142857.$

– Với $\overline{cdmn}=2.2857\Rightarrow \overline{ab}=28$

$\Rightarrow \overline{abcdmn}=285714.$

– Với $\overline{cdmn}=3.2857\Rightarrow \overline{ab}=42$

$\Rightarrow \overline{abcdmn}=428571.$

Vậy các số $\overline{abcdmn}$ cần tìm là:

142857; 285714; 428571.

Nhận xét. Lời giải trên sử dụng tính chất chia hết:

Với $a, b, c\in\mathbb{N}^*$, $a.b\,\vdots\,c$, mà $(b, c)=1$ thì $a\,\vdots\,c$.

Đồng thời dựa vào giả thiết bài toán ta chia số cần tìm ra thành 2 nhóm là số $\overline{ab}$, $\overline{cdmn}$ chứ không nên tìm đơn lẻ từng chữ số.

Thí dụ 5. *Tìm số $\overline{ab}$ biết:*

$$\overline{1999ab}=37.k\ \ (k\in\mathbb{N}^*).$$

Lời giải. Theo đề bài có:

$\overline{1999ab}\,\vdots\,37\Rightarrow(199900+\overline{ab})\,\vdots\,37$

$\Rightarrow(5402.37+26+\overline{ab})\,\vdots\,37\Rightarrow(26+\overline{ab})\,\vdots\,37;$

$0<26+\overline{ab}<126\Rightarrow 26+\overline{ab}\in\{37;74;111\}.$

– Với $26+\overline{ab}=37\Rightarrow\overline{ab}=11.$

– Với $26+\overline{ab}=74\Rightarrow\overline{ab}=48.$

– Với $26+\overline{ab}=111\Rightarrow\overline{ab}=85.$

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là: 11; 48; 85.

Nhận xét. Lời giải bài toán trên sử dụng tính chất chia hết của một tổng. Vận dụng tính chất này ta tách số bị chia đã cho thành hai phần trong đó có một phần chia hết cho số chia. Trong bài này ta tìm gộp cả hai chữ số a, b.

Thí dụ 6. *Tìm các chữ số a, b sao cho: $\overline{19ab}$ chia hết cho 5 và 8.*

Lời giải. *Cách 1.*

Từ $\overline{19ab}\,\vdots\,5\Rightarrow b=0$ hoặc $b=5$.

• Với $b=0$ ta có $\overline{19a0}\,\vdots\,8\Rightarrow(1900+10.a)\,\vdots\,8$

$\Rightarrow(4+2.a)\,\vdots\,8\Rightarrow(4+2.a)\in\{8; 16\}.$

– Với $4+2a=8\Rightarrow a=2\Rightarrow(a, b)=(2; 0).$

– Với $4+2a=16\Rightarrow a=6\Rightarrow(a, b)=(6; 0).$

• Với $b=5$ ta có $\overline{19a5}\,\vdots\,8$

$\Rightarrow(1905+10a)\,\vdots\,8\Rightarrow(1+2a)\,\vdots\,8$ (loại).

Vậy cặp (a, b) cần tìm là: (2; 0), (6; 0).

Cách 2. Từ $\overline{19ab}$ chia hết cho 5 và 8

$\Rightarrow\overline{19ab}\,\vdots\,\text{BCNN}(5; 8)$

$\Rightarrow\overline{19ab}\,\vdots\,40\Rightarrow(1900+\overline{ab})\,\vdots\,40$

$\Rightarrow(40.47+20+\overline{ab})\,\vdots\,40$

$\Rightarrow(20+\overline{ab})\,\vdots\,40$, mà $0\le\overline{ab}<100$

$\Rightarrow 20+\overline{ab}\in\{40; 80\}\Rightarrow\overline{ab}\in\{20; 60\}.$

Nhận xét. Trong cách 1) số cần tìm chia hết cho 5 và cho 8. Mà dấu hiệu chia hết cho 5 có tận cùng 0 và 5, vậy nên xét dấu hiệu chia cho 5 trước rồi mới xét tới các dấu hiệu khác. Trong cách 2) sử dụng tính chất chia hết là $A\,\vdots\,m$, $A\,\vdots\,n$ thì $A\,\vdots\,\text{BCNN}\,(m, n)$. Cách 2 làm bài gọn hơn nhưng chỉ nên sử dụng với 2 chữ số (3 chữ số) cần tìm viết liền nhau.

Thí dụ 7. *Tìm các chữ số a, b sao cho:*

$$\overline{62ab427}\,\vdots\,99.$$

Lời giải. *Cách 1.*

$A=\overline{62ab427}\,\vdots\,99\Leftrightarrow A\,\vdots\,11$ và $A\,\vdots\,9$.

• Với $A\,\vdots\,11\Leftrightarrow(7+4+a+6)-(2+b+2)\,\vdots\,11$

$\Leftrightarrow(13+a-b)\,\vdots\,11\Leftrightarrow(2+a-b)\,\vdots\,11$ (1).

• Với $A\,\vdots\,9\Leftrightarrow(6+2+a+b+4+2+7)\,\vdots\,9$

$\Leftrightarrow(a+b+21)\,\vdots\,9\Leftrightarrow(a+b+3)\,\vdots\,9$

$\Leftrightarrow(a+b+3)\in\{9; 18\}\Leftrightarrow a+b\in\{6; 15\}.$

Từ (1) suy ra $a-b=9$ $(a>b)$ hoặc $b-a=2$ $(b>a)$.

Ta có các trường hợp

• $\begin{cases}a-b=9\\a+b=6\end{cases}$ (loại) • $\begin{cases}a-b=9\\a+b=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=12\\b=3\end{cases}$ (loại)

• $\begin{cases}b-a=2\\b+a=15\end{cases}$ (loại) • $\begin{cases}b-a=2\\a+b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$

Vậy cặp (a, b) là (2; 4) và có số 6224427.

Cách 2. $\overline{62ab427}\,\vdots\,99\Leftrightarrow$

$(62630.99+57+99.10.\overline{ab}+10.\overline{ab})\,\vdots\,99$

$\Leftrightarrow(10.\overline{ab}+57)\,\vdots\,99\Leftrightarrow 10.\overline{ab}+57=k.99,$

$k \in \{1;2;3;...;10\}$, $k.$ 99 có tận cùng là 7.

Suy ra k = 3, do đó $10.\overline{ab} + 57 = 3.\ 99$ $\Rightarrow \overline{ab} = 24$.

Vậy cặp (a, b) là (2; 4) và có số 6224427.

Nhận xét. Lời giải cách 1 sử dụng dấu hiệu chia hết cho 11: số $A = \overline{...a_5a_4a_3a_2a_1a_0} \vdots 11$

$\Leftrightarrow |(a_0 + a_2 + a_4 + ...+) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...)| \vdots 11.$

và sử dụng tính chất:

Với $(m, n) = 1$ thì $A \vdots m$ và $A \vdots n \Leftrightarrow A \vdots (m.n)$.

Thí dụ 8. *Tìm các chữ số a, b, c, d và * biết:*

$$\overline{abcd0} + \overline{abcd} = \overline{5482*}$$

*(các chữ số a, b, c, d, và * có thể giống nhau).*

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$10.\ \overline{abcd} + \overline{abcd} = \overline{5482*}$

$\Rightarrow 11.\ \overline{abcd} = \overline{5482*} \Rightarrow \overline{5482*} \vdots 11$

$\Rightarrow (54820 + *) \vdots 11 \Rightarrow (11.\ 4983 + 7 + *) \vdots 11$

$\Rightarrow (7 + *) \vdots 11 \Rightarrow 7 + * = 11 \Rightarrow * = 4.$

Vậy $11.\ \overline{abcd} = 54824 \Rightarrow \overline{abcd} = 4984.$

Vậy bộ giá trị (a, b, c, d) là (4; 9; 8; 4) và * = 4.

Nhận xét. Trong lời giải trên đã chọn số $\overline{abcd}$ thành một nhóm. Từ đó sẽ tìm cả số $\overline{abcd}$ chứ không tìm đơn lẻ từng chữ số.

Thí dụ 9. *Tìm số* $\overline{abc}$ *biết:* $(\overline{abc}+\overline{cba}) \vdots 68$ *(các chữ số a, b, c có thể giống nhau).*

Lời giải. Từ $(\overline{abc}+\overline{cba}) \vdots 68$ và $68 = 4.\ 17$, ta có:

$(100.a + 10.b + c + 100.c + 10.b + a) \vdots 68.$

$\Rightarrow 101.(a + c) + 20.b \vdots 4.\ 17$, với $(4; 17) = 1$.

• Xét $101.(a + c) + 20.b \vdots 4 \Rightarrow 101.(a + c) \vdots 4$

$\Rightarrow (a + c) \vdots 4 \Rightarrow a + c = \{4; 8; 12; 16\}$ (1).

• Xét $101.(a + c) + 20.b \vdots 17$

$\Rightarrow 17.b + 102.(a + c) + 3.b - (a + c) \vdots 17$

$\Rightarrow 3.b - (a + c) \vdots 17 \Rightarrow 3.b - (a + c) \in \{0; 17\}$.

+ Nếu $3.b - (a + c) = 17 \Rightarrow 3.b > 17$

$\Rightarrow b \in \{6; 7; 8; 9\}$.

– Với $b = 6 \Rightarrow a + c = 1$ (loại) (vì $a + c \vdots 4$)

– Với $b = 7 \Rightarrow a + c = 4$ (chọn)

$\Rightarrow \overline{abc} \in \{173; 272; 371\}$.

– Với $b = 8 \Rightarrow a + c = 7$ (loại) (vì $a + c \vdots 4$).

– Với $b = 9 \Rightarrow a + c = 10$ (loại)

+ Nếu $3.b - (a + c) = 0 \Rightarrow 3.b = a + c$

$\Rightarrow 3.b \in \{4; 8; 12; 16\}$

$\Rightarrow 3.b = 12 \Rightarrow b = 4,\ a + c = 12.$

Các cặp $(a; c)$ là: (3; 9), (4; 8), (5; 7), (6; 6), (7; 5), (8; 4), (9; 3).

$\Rightarrow \overline{abc} \in \{349; 448; 547; 646; 745; 844; 943\}$.

Kết hợp các trường hợp các số $\overline{abc}$ cần tìm là: 173; 272; 371; 349; 448; 547; 646; 745; 844; 943.

Nhận xét. Lời giải trên đã sử dụng tính chất:

Với $(m, n) = 1$ thì $A \vdots (m, n) \Leftrightarrow A \vdots m$ và $A \vdots n$.

Cần chú ý vai trò a và c như nhau cho nên nhóm $(a + c)$ thành một nhóm.

Thí dụ 10. *Tìm các chữ số a, b, c biết:*

$$\overline{abbc} = \overline{ab}.\ \overline{ac}.\ 7.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$100.\ \overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ab}.\ \overline{ac}.\ 7$

$\Leftrightarrow \overline{bc} = \overline{ab}.(7.\ \overline{ac} - 100)$ (1).

Từ (1) suy ra $\overline{bc}$ chia hết cho $\overline{ab}$ và thương $k = 7.\ \overline{ac} - 100 \le 9 \Rightarrow 7.\ \overline{ac} \le 109 \Rightarrow a = 1.$

Ta có $k = 7.\ \overline{1c} - 100 \le 9$

$\Rightarrow k = 7.(10 + c) - 100 \le 9 \Rightarrow 7.c \le 39$

Từ $k = 7.c - 30 > 0 \Rightarrow c = 5, k = 5.$

Thay $k = 5$, $c = 5$ vào (1) suy ra:

$10b + 5 = (10 + b).5 \Rightarrow 5b = 45 \Rightarrow b = 9.$

Vậy bộ (a, b, c) cần tìm là (1; 9; 5).

Nhận xét. Lời giải trên vận dụng tính chất : Nếu số bị chia và số chia có hai chữ số thì thương là số có một chữ số. Tính chất này được sử dụng trong trường hợp số bị chia, số chia có hai, ba, bốn chữ số để giới hạn giá trị các chữ số.

Thí dụ 11. *Tìm các chữ số a, b, c biết:*

$$\frac{1}{\overline{ab}.\ \overline{bc}} + \frac{1}{\overline{bc}.\ \overline{ca}} + \frac{1}{\overline{ca}.\ \overline{ab}} = \frac{11}{3321}.$$

Lời giải. Quy đồng mẫu số ta được:

$81.41.(\overline{ca} + \overline{ab} + \overline{bc}) = 11.\ \overline{ca}.\ \overline{ab}.\ \overline{bc}$ (1)

Do 41 là số nguyên tố và là ước của vế phải (1) nên 41 phải là ước của một trong ba số $\overline{ca}, \overline{ab}, \overline{bc}$. Chẳng hạn $\overline{ca} \vdots 41 \Rightarrow \overline{ca} \in \{41; 82\}$.

Xét hai trường hợp:

• Nếu $\overline{ca} = 41 \Rightarrow a = 1;\ c = 4$. Thay vào (1) ta có $81.(41 + \overline{1b} + \overline{b4}) = 11.\ \overline{1b}.\ \overline{b4}$ (2).

Vì $(81, 11) = 1$ nên 81 là ước của $\overline{1b}.\ \overline{b4}$, mà $\overline{1b}$ không chia hết cho 27 suy ra $\overline{b4} \vdots 9 \Rightarrow b = 5$

Thay $b = 5$ vào (2) ta thấy thoả mãn.

Lập luận tương tự với $\overline{ab} \vdots 41$ hoặc $\overline{bc} \vdots 41$.

• Nếu $\overline{ca} = 82 \Rightarrow a = 2; c = 8$. Thay vào (1) ta có $81.(82 + \overline{2b} + \overline{b8}) = 22.\ \overline{2b}.\ \overline{b8}$ (3).
Vế phải của (3) chẵn nên ở vế trái (3) chẵn $\Rightarrow b$ là số chẵn.
Từ (3), do $(81; 22) = 1$ nên $\overline{2b}.\ \overline{b8} \vdots 81$, mà $\overline{2b}$ không thể chia hết cho 81
$\Rightarrow \overline{b8} \vdots 3$, b là số chẵn $\Rightarrow b = 4$.
Khi đó 24.48 không chia hết cho 81, do đó không tìm được b. Vậy các bộ số (a, b, c) cần tìm là: $(1; 5; 4), (5; 4; 1), (4; 1; 5)$.

Nhận xét. Trong bài toán trên sử dụng tính chất:
– Cho a là số nguyên tố, $m.\ n \vdots a$ thì $m \vdots a$ hoặc $n \vdots a$.
– Nếu $a.\ b \vdots 3^4$ và a không chia hết cho 3^3 thì $b \vdots 3^2$.

DẠNG 3. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Thí dụ 12. *Tìm các chữ số a, b sao cho:* $\overline{ab} + \overline{ba} = k^2\ (k \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải. Từ $\overline{ab} + \overline{ba} = k^2 \Leftrightarrow 11.(a + b) = k^2$ $(k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow (a + b) \vdots 11$, $0 < a + b < 20$
$\Rightarrow a + b = 11 = 9 + 2 = 2 + 9 = 8 + 3 = 3 + 8$
$= 7 + 4 = 4 + 7 = 6 + 5 = 5 + 6$.
Thử lại, các cặp (a, b) cần tìm là: $(9; 2), (2; 9), (8; 3), (3; 8), (7; 4), (4; 7), (6; 5), (5; 6)$.

Nhận xét. Trong lời giải trên đã sử dụng tính chất của số chính phương là: Với a là số nguyên tố, $a.\ b = k^2$ thì $b \vdots a$ (hoặc $b = a.\ m^2$).

Thí dụ 13. *Tìm chữ số a biết:* $\overline{(a+1)a(a+2)(a+3)} = k^2\ \ (k \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải. Để số đã cho là số chính phương thì $a + 3 \in \{4; 5; 6; 9\} \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 6\}$. Ta có các số tương ứng là: 2134; 3245; 4356; 7689.
Trong các số trên chỉ có $4356 = 66^2$ thoả mãn, vậy $a = 3$.

Nhận xét. Trong lời giải trên sử dụng tính chất số tận cùng của một số chính phương: Một số chính phương có tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9. Một số chính phương không thể có tận cùng là 2, 3, 7, 8.

Thí dụ 14. *Tìm các chữ số a, b biết :* $\overline{aabb} = k^2$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải. Từ $\overline{aabb} = k^2\ \ (k \in \mathbb{N}^*)$.
$\Rightarrow \overline{aa}.\ 100 + \overline{bb} = k^2 \Rightarrow 11.\ a.\ 100 + 11.\ b = k^2$
$\Rightarrow 11.(100.\ a + b) = k^2$ (1)
$\Rightarrow (100.a + b) \vdots 11 \Rightarrow 99.\ a + (a + b) \vdots 11$. Do đó: $(a + b) \vdots 11; 0 < a + b < 20 \Rightarrow a + b = 11$.
Thay $a + b = 11$ vào (1) ta có:
$11.(99.a + a + b) = k^2 \Rightarrow 11^2.(9.a + 1) = k^2$
$\Rightarrow 9.a + 1$ là số chính phương. Xét bảng sau:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9a$	9	18	27	36	45	54	63	72	81
$9a+1$	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Trong các số trên chỉ có $9.a + 1 = 64 = 8^2$ thoả mãn. Do đó $a = 7$, $b = 11 - 7 = 4$.

Nhận xét. Lời giải trên đã sử dụng tính chất của số chính phương là:
– Với a là số nguyên tố $a.\ b = k^2$ thì $b \vdots a$ (hoặc $b = a.\ m^2$).
– Cho $a^2.\ b = k^2$ thì b là số chính phương.

Thí dụ 15. *Tìm số* $\overline{abcd}$ *sao cho:* $\overline{abcd} = k^2$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ *và* $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.
(Các chữ số a, b, c, d có thể giống nhau).

Lời giải. Từ $\overline{abcd} = k^2$
$\Rightarrow k^2 = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 100.(1 + \overline{cd}) + \overline{cd}$
$\Rightarrow k^2 = 100 + 101.\ \overline{cd}$
$\Rightarrow 101.\ \overline{cd} = k^2 - 100$
$\Rightarrow 101.\ \overline{cd} = (k + 10).(k - 10)$.
Do $k < 100 \Rightarrow k - 10 < 101$ và 101 là số nguyên tố
$\Rightarrow k + 10 \vdots 101 \Rightarrow k + 10 = 101 \Leftrightarrow k = 91$.
Suy ra $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$.

Nhận xét. Để giải bài toán trên cần tìm được giá trị k thì sẽ tìm được số $\overline{abcd}$, và ta đã giới hạn giá trị của k dựa vào đánh giá $1000 < k^2 < 10000$.

Thí dụ 16. *Tìm số* $\overline{abcd}$ *sao cho:* $\overline{abcd} + 72 = k^2, (k \in \mathbb{N}^*)$ *và* $\overline{abd} = (b + d - 2.a)^2$.

Lời giải. Vì $a \geq 1$, $0 \leq b, c, d \leq 9$
$\Rightarrow b + d - 2.a \leq 16$.
Từ $\overline{abd} = (b + d - 2.a)^2 \Rightarrow 10^2 \leq \overline{abd} \leq 16^2$
$\Rightarrow \overline{abd} \in \{10^2; 11^2; 12^2; 13^2; 14^2; 15^2; 16^2\}$.
Do $\overline{abcd} + 72 = k^2, (k \in N^*)$ suy ra $d \in \{2; 3; 4; 7; 8; 9\}$. Khi đó $\overline{abd} = 12^2$; $\overline{abd} = 13^2$.
• Nếu $\overline{abd} = 12^2 = 144$ thì $144 = (4 + 4 - 2)^2$ (loại). Do đó $\overline{abd} = 12^2$ không xảy ra.
• Nếu $\overline{abd} = 13^2 = 169$ thì $169 = (6 + 9 - 2.1)^2$ (đúng). Do đó $\overline{abd} = 169$.
Suy ra $\overline{16c9} + 72 = k^2 \Rightarrow k$ là số lẻ.
Ta có $1609 + 72 \leq \overline{16c9} + 72 \leq 1699 + 72$
$\Rightarrow 41^2 \leq k^2 < 43^2 \Rightarrow k = 41$
Suy ra $\overline{abcd} + 72 = 41^2 \Rightarrow \overline{abcd} = 1609$.
Vậy số $\overline{abcd} = 1609$.

Thí dụ 17. *Tìm số $\overline{ab}$ sao cho: $\overline{ab}$ là số nguyên tố và $(\overline{ab}-\overline{ba})$ là số chính phương.*

Lời giải. Ta có $\overline{ab}-\overline{ba} = 10.a + b - (10.b + a) = 9.(a-b) = 3^2.(a-b)$.

Để cho $\overline{ab}-\overline{ba}$ là số chính phương ($a > b$) thì $a-b$ là số chính phương thỏa mãn $1 \le a-b \le 8$

Suy ra $a-b \in \{1; 4\}$.

– Với $a-b=1$

$\Rightarrow \overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$

Trong các số trên chỉ có số $\overline{ab} = 43$ là số nguyên tố.

– Với $a-b=4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$

Trong các số trên có số $\overline{ab} = 73$ là số nguyên tố. Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là: 43; 73.

DẠNG 4. ƯỚC LƯỢNG GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC NÀO ĐÓ CHỨA CÁC CHỮ SỐ ĐỂ GIẢM BỚT CÁC TRƯỜNG HỢP CẦN XÉT

Thí dụ 18. *Tìm số $\overline{abcd}$ sao cho:*

$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a = 4321.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$1111.a + 111.b + 11.c + d = 4321 \ (1).$$

Vì b, c, d đều nhỏ hơn 10 nên

$$1111.a = 4321 - (111.b + 11.c + d) > 4321 - (1110 + 110 + 10) = 3091$$

$\Rightarrow 3091 < 1111.a < 4321 \Rightarrow a = 3$.

Thay vào (1) ta có:

$$1111.3 + 111.b + 11.c + d = 4321$$

$\Rightarrow 111.b + 11.c + d = 988$ (2).

Lập luận tương tự có: $868 < 111.b < 988 \Rightarrow b = 8$

Thay vào (2) ta có : $111.8 + 11.c + d = 988$

$\Rightarrow 11.c + d = 100 \Rightarrow 90 < 11.c < 100$

$\Rightarrow c = 9 \Rightarrow d = 1$. Vậy $\overline{abcd} = 3891$.

Thí dụ 19. *Tìm các chữ số a, b, c, d, e, f trong mỗi phép tính sau, biết rằng hai chữ số a, b hơn kém nhau 1 đơn vị.*

a) $\overline{ab5}.\overline{cdef} = 2712960$;

b) $\overline{a0b}.\overline{cdef} = 600400$;

c) $\overline{ab5c}.\overline{bac} = 761436$.

Lời giải. a) Ta có $\overline{ab5} = 100.a + 10.b + 5$.

• Nếu $a = b + 1 \Rightarrow \overline{ab5} = 110.b + 105$

$$\Rightarrow \overline{cdef} = \frac{2712960}{110.b+105} \in \mathbb{N}^*.$$

Thay $b = 0; 1; 2;....; 8$ vào ta thấy các trường hợp này đều bị loại

• Nếu $b = a + 1 \Rightarrow \overline{ab5} = 110.a + 15$

$$\Rightarrow \overline{cdef} = \frac{2712960}{110.a+15} \in \mathbb{N}^*$$

Thay $a = 1; 2; 3.....; 8$ vào ta được trường hợp $a = 7$ thỏa mãn. Suy ra $b = 8$, $\overline{cdef} = 3456$.

b) Tương tự câu a) ta tìm được: $a = 1$, $b = 0$, $\overline{cdef} = 6004$ hoặc $a = 3$, $b = 4$, $\overline{cdef} = 1975$.

c) Từ $\overline{ab5c}.\overline{bac} = 761436 \Rightarrow c \in \{4; 6\}$

• Với $c = 4 \Rightarrow \overline{bac} = \overline{ba4} = 100b + 10a + 4$.

– Nếu $a = b + 1 \Rightarrow \overline{ba4} = 100b + 10(b+1) + 4 = 110b + 14 \Rightarrow \overline{ab54} = \dfrac{761436}{110b+14} \in \mathbb{N}^*$.

Thay $b = 1; 2; 3;... , 8$ vào được trường hợp $b = 2$ thỏa mãn. Suy ra $a = 3$.

– Nếu $b = a + 1 \Rightarrow \overline{ba4} = 100b + 10a + 4 = 110a + 104 \Rightarrow \overline{ab54} = \dfrac{761436}{110a+104} \in \mathbb{N}^*$

Thay $a = 1; 2; 3; ...., 8$ vào ta thấy các trường hợp này đều bị loại.

• Với $c = 6 \Rightarrow \overline{bac} = \overline{ba6} = 100b + 10a + 6$. Làm tương tự ta không tìm được a, b thỏa mãn bài toán. Vậy $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$.

Nhận xét. Để giải phần a) b), ta biểu diễn $\overline{cdef}$ theo chữ số a hoặc b dưới dạng phân số, mà $\overline{cdef}$ là số tự nhiên. Sau đó dùng phép thử sẽ tìm được số $\overline{cdef}$. (Có thể kết hợp với máy tính thì phép thử nhanh hơn).

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tìm các chữ số a, b sao cho : $\overline{1235679a4b} \vdots 24$.

2. Tìm số $\overline{abc}$ biết: $9a = 5b + 4c$ (a, b, c là các chữ số khác nhau).

3. Tìm số $\overline{ab}$ biết: $\overline{ab} = (a+b)^2$.

4. Tìm số $\overline{abc}$ biết: $\overline{abc} = (a+b+c)^3$.

5. Tìm số $\overline{abcd}$ biết: $\overline{abcd} = (\overline{ab}+\overline{cd})^2$.

6. Tìm các chữ số x, y, a, b biết: $\overline{xxyy} = \overline{aa}.\overline{bb}$.

7. Tìm các số $A = \overline{a_2a_3a_4....a_n}$ nhỏ nhất biết:

$$\overline{1a_2a_3a_4...a_n} = 2.\overline{a_2a_3a_4....a_n1}.$$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
Trường PT Năng Khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh NĂM HỌC 2015 - 2016

(Đề thi đăng trên TH&TT số 460, tháng 10 năm 2015)

VÒNG I

Câu 1. a) $(x^2-9)\sqrt{2-x}=x(x^2-9)$

$\Leftrightarrow (x^2-9)(\sqrt{2-x}-x)=0.$

Tìm được nghiệm của PT là $x_1=-3; x_2=1.$

b) Đặt $x^2+4y^2=t\ (t\geq 0)$. Phương trình

$(x^2+4y^2)^2-4(x^2+4y^2)=5$ trở thành $t^2-4t=5$

$\Leftrightarrow t=-1$ (loại), $t=5$ (nhận).

Do đó hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 3x^2+2y^2=5 \end{cases}$.

Tìm được nghiệm $(x;y)$ của HPT là:

$(1;1);\ (1;-1);\ (-1;1);\ (-1;-1).$

Câu 2. a) *Đáp số:* $m\neq \frac{1}{2}; m\neq 2; m\neq 1.$

b) PT có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq\frac{1}{2}; m\neq 2;$ $m\neq 1.$ Vì vai trò x_1, x_2 như nhau nên có thể giả sử $x_1=2m, x_2=3-m.$ Ta có $x_1^2+x_2^2-5x_1x_2$ $=14m^2-30m+4\Leftrightarrow m^2-6m+5=0\Leftrightarrow m=5.$

Câu 3. a) $Q=\dfrac{12\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$. b) $Q<0\Leftrightarrow 0<x<25,\ x\neq 9.$

Câu 4. a) Gọi độ dài hai cạnh góc vuông là x(cm), y(cm) (ĐK: $x>0, y>0$). Ta có HPT

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+3)(y+3)=\frac{1}{2}xy+33 \\ \frac{1}{2}(x-2)(y+1)=\frac{1}{2}xy-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=19 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=7 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ độ dài cạnh huyền là $\sqrt{12^2+7^2}=\sqrt{193}$ (cm).

b) Gọi số ngày An giải toán trước khi nghỉ bệnh là x (ngày) và số ngày An nghỉ giải toán là y (ngày) (ĐK: $x\in\mathbb{N}^*, x<31,\ y\in\mathbb{N}$). Thời gian từ ngày 1/3 đến ngày 30/4 là 31 + 30 = 61 (ngày). Do vậy số bài toán An dự định giải là 3 . 61 = 183 (bài toán). Ta có PT: $3x+16+4(61-x-y-7)=183$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{49-x}{4}$. Mà $x<31$, do đó $y>\dfrac{49-31}{4}=4{,}5.$

Vì $y\in\mathbb{N}$ nên y nhỏ nhất là $y=5$. Khi đó

$x=49-4y=29.$

Câu 5. a) $\widehat{BEC}=\widehat{ADC}=60^o$, $\widehat{EBC}=\widehat{ADC}=60^o$

$\Rightarrow \Delta BCE$ đều. Mặt khác $AE\ //\ DC\Rightarrow AECD$ là hình thang. Mà tứ giác $AECD$ nội tiếp nên $AECD$ là hình thang cân $\Rightarrow ID=IC.$ Do $OD=OC\Rightarrow I, O$ thuộc đường trung trực của $DC\Rightarrow IO\perp DC.$

b) Gọi $N=IO\cap DC$. Ta có $IN\perp DC, DN=NC; K$ là trung điểm của AC nên $OK\perp AC,\ KN//AD$

$\Rightarrow \widehat{ADM}=\widehat{KNC}.$ Tứ giác $MNKI$ nội tiếp (vì $\widehat{MNI}=\widehat{MKI}=90^o$) $\Rightarrow \widehat{KNC}=\widehat{MIK}$

$\Rightarrow \widehat{MIK}=\widehat{ADM}\ (=\widehat{KNC})\Rightarrow$ tứ giác $ADMI$ nội tiếp. Vậy A, M, D, I cùng thuộc một đường tròn.

c) Dễ thấy $\widehat{AOC}=\widehat{AJC}=120^o$, ΔOAC cân tại O, ΔJAC cân tại $J\Rightarrow \Delta OAC\backsim\Delta JAC\Rightarrow\dfrac{OA}{JA}=\dfrac{OC}{JC}=\dfrac{AC}{AC}=1$

$\Rightarrow OA=JA=OC=JC\Rightarrow OAJC$ là hình thoi $\Rightarrow K$ là trung điểm của OJ. Ta có $DE=AC=2AK,$ $OJ=2OK, \widehat{AOK}=60^o$. Do đó

$$\frac{OJ}{DE}=\frac{2OK}{2AK}=\frac{OK}{AK}=\cot\widehat{AOK}=\cot 60^o=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Lưu ý. Đề bài cần thêm điều kiện $AB>BC$.

VÒNG II

Câu 1. a) ĐK: $\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. PT đã cho tương đương với

$$2x-1+1-2x^2+2\sqrt{2x-1}.\sqrt{1-2x^2}=4(x-x^2)$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2x-1}-\sqrt{1-2x^2})^2=0\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

b) Từ $b-\dfrac{1}{4}<b\Rightarrow\sqrt[3]{b-\dfrac{1}{4}}<\sqrt[3]{b}$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b}=0\Rightarrow a<0.$$

Mặt khác $\sqrt[3]{b-\dfrac{1}{4}}\geq\sqrt[3]{b-\dfrac{1}{4}-3\left(\sqrt[3]{b}-\dfrac{1}{2}\right)^2}$

$=\sqrt[3]{b-3\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{b}-1}=\sqrt[3]{(\sqrt[3]{b}-1)^3}=\sqrt[3]{b}-1.$ Do đó

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b-\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{b}\geq\sqrt[3]{b}-1-\sqrt[3]{b}=-1\Rightarrow a\geq -1.$$

Câu 2. a) $a+b+c=0,\ ab+bc+ca+3=0$. Do đó
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=6 \Rightarrow a^2 \le 6$.

Mà $a \ne 0$, do đó $a^2 \in \{1;4\} \Rightarrow a \in \{1;-1;2;-2\}$.

• Nếu $a=1$ ta có

$$\begin{cases} b+c=-1 \\ b+c+bc+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1;\ c=-2 \\ b=-2;\ c=1 \end{array}\right.$$

Tương tự:

• Nếu $a=-1$ ta được: $(b;c)\in\{(-1;2),(2;-1)\}$.

• Nếu $a=2$ ta được: $(b;c)=(-1,-1)$.

• Nếu $a=-2$ ta được: $(b;c)=(1,1)$.

b) Ta có $a+b+c=0$, là số chẵn. Xét hai trường hợp:

• Trong ba số a, b, c có hai số lẻ, một số chẵn. Không mất tính tổng quát, giả sử a, b lẻ và c chẵn. Ta có: ab lẻ, bc chẵn, ca chẵn $\Rightarrow$ $ab+bc+ca+4m$ là số lẻ, trái với giả thiết.

• Ba số a, b, c đều chẵn. Đặt $a=2a'$, $b=2b'$, $c=2c'$ (a', b', c' là các số nguyên khác 0). Suy ra: $a'+b'+c'=0$ và $a'b'+b'c'+c'a'+m=0$.

c) Giả sử tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca+2^k=0$. Theo câu b) ta có a_1, b_1, c_1 các số nguyên khác 0 sao cho $a_1+b_1+c_1=0$, $a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1+2^{k-2}=0$. Tiếp tục áp dụng câu b) cho đến khi có các số nguyên a', b', c' khác 0 thỏa mãn: $a'+b'+c'=0,\ a'b'+b'c'+c'a'+1=0$ hoặc $a'b'+b'c'+c'a'+2=0$. Do đó $a'^2+b'^2+c'^2=2$ (1) hoặc $a'^2+b'^2+c'^2=4$ (2). Vì a', b', c' khác 0 nên (1) và (2) không xảy ra.

Câu 3. $\Delta'=a^2-2(1-b)\ge 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên của PT đã cho. Ta có $x_1+x_2=-a,\ x_1x_2=\dfrac{1-b}{2}$. Với $m\in\mathbb{Z}$ thì m^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1 (*). Ta có:

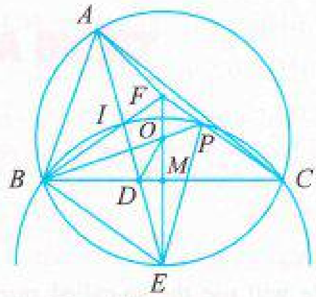
$$a^2-b^2+2=(x_1+x_2)^2-(1-2x_1x_2)^2+2$$
$$=(x_1^2+x_2^2+2x_1^2x_2^2+1)+6(x_1x_2-x_1^2x_2^2)\in\mathbb{Z}.$$

Xét các trường hợp hai số x_1, x_2 chia hết cho 3, một trong hai số chia hết cho 3 và cả hai số không chia hết cho 3, và dùng (*) ta thấy:

$(x_1^2+x_2^2+2x_1^2x_2^2+1)\not\vdots\, 3$. Do đó $(a^2-b^2+2)\not\vdots\, 3$.

Vậy a^2-b^2+2 là số nguyên và không chia hết cho 3.

Câu 4. a) Ta có E, M, O, F thẳng hàng, $ME=MF$ (E, F đối xứng qua M) $EF\perp BC \Rightarrow \Delta BEF$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{BFE}=\widehat{FEB}$. Mặt khác $OB=OE$ suy ra ΔOBE cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBE}=\widehat{OEB}$.



Ta có: $\widehat{BFE}=\widehat{FEB}=\widehat{OBE}\Rightarrow \Delta BEF \backsim \Delta OBE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{OB}=\dfrac{EF}{EB}\Rightarrow EB^2=EF.OB.\Rightarrow EB^2=EF.EO.$

b) Không mất tính tổng quát xét O nằm giữa M và F. Dễ thấy $\Delta EBD \backsim \Delta EAB$ (g.g) $\Rightarrow EB^2=ED.EA$.

Ta có $EF.EO=ED.EA\ (=EB^2)\Rightarrow \dfrac{EO}{EA}=\dfrac{ED}{EF}$.

Xét ΔEOD và ΔEAF có $\dfrac{EO}{EA}=\dfrac{ED}{EF}$, $\widehat{OED}$ chung

$\Rightarrow \Delta EOD \backsim \Delta EAF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EOD}=\widehat{EAF}$, dẫn đến tứ giác $DAFO$ nội tiếp. Vậy các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Ta có: $\widehat{EIB}=\widehat{ABI}+\widehat{BAI}$, $\widehat{ABI}=\widehat{IBC}$, $\widehat{BAI}=\widehat{CBE}$ $(\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{EC})\Rightarrow \widehat{EBI}=\widehat{IBC}+\widehat{CBE}=\widehat{ABI}+\widehat{BAI}=\widehat{EIB}$ $\Rightarrow \Delta EBI$ cân tại $E \Rightarrow EB=EI$. Mà $EB=EC$ nên $EB=EI=EC\Rightarrow E$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC. Do đó $EP=EB$ nên $EP^2=EF.EO$.

Xét ΔEPO và ΔEFP có $\widehat{PEO}$ chung, $\dfrac{EP}{EF}=\dfrac{EO}{EP}$

$\Rightarrow \Delta EPO \backsim \Delta EFP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EPO}=\widehat{EFP}\Rightarrow EP$ là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác POF. Vậy tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua điểm E cố định.

Câu 5. a) Xét đợt thi thứ nhất. Theo đầu bài có đúng một học sinh được trao giải trong hai đợt thi bất kì, vì vậy trong 7 đợt thi còn lại, trong ba học sinh được trao giải đợt thi thứ nhất có một học sinh được trao giải ít nhất 3 lần (vì 7 : 3 = 2 (dư 1)). Vậy có một học sinh được trao giải ít nhất bốn lần.

b) Từ a) giả sử A là số học sinh được trao giải ở bốn đợt thi. Xét một đợt thi bất kỳ trong bốn đợt thi còn lại. Vì có đúng một học sinh được trao giải trong hai đợt thi bất kì. Do vậy đợt thi này, bốn đợt thi, mỗi đợt thi, một học sinh được trao giải. Như vậy học sinh đó phải là A (nếu không đợt này có đến bốn học sinh được trao giải). Vì xét đợt thi bất kì nên A được trao giải trong bốn đợt thi còn lại. A được trao giải ở tất cả 8 đợt thi. Vậy có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

NGUYỄN ĐỨC TÂN (*TP. Hồ Chí Minh*)
Sưu tầm và hướng dẫn giải

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

Bài số 2

Problem. *Given positive integers d and n. How many ways can we write d as a sum of a sequence of n natural numbers?*

Remark. *Notice that by "sequence" we mean the order of terms is taken into account.*

Solution. We will use the so-called *stars and bars* argument which is well known in combinatorics. Let call each way to write d as a sum of a sequence of n natural numbers an n-composition of d. We can visualize an n-composition $d = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ as follows. In an array of d stars, we insert 1 bar between the stars i_1, i_1+1; 1 bar between the stars i_1+i_2, i_1+i_2+1;...; and 1 bar between the stars $i_1+\ldots+i_{n-1}$, $i_1+\ldots+i_{n-1}+1$ (n-1 bars in total). For example, in the case $d = 3$, $n = 3$, the 3-composition $3 = 1 + 0 + 2$ corresponds to * | | * *, the 3-composition $3 = 2 + 0 + 1$ corresponds to * * | | *, and the 3-composition $3 = 0 + 0 + 3$ corresponds to | | * * *. In different words, making an n-composition of d is equivalent to choosing n-1 positions among $d+(n-1)$ ones to place the bars. Therefore the number of n - composition of d is equal to C_{d+n-1}^{n-1}.

TỪ VỰNG

sequence	: dãy
take into account	: tính đến
so-called	: cái được gọi là (tính từ)
bar	: vách ngăn
combinatorics	: tổ hợp
composition	: phân tích, sự hợp thành (danh từ)
visualize	: hình dung
as follows	: như sau
array	: hàng, dãy
correspond to	: tương ứng với (động từ)
in different words	: nói một cách khác
place	: đặt vào vị trí (động từ)
therefore	: do đó

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Hạn gửi bài dịch: *Muộn nhất là hai tháng sau khi đăng bài.*

ĐỀ THI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH VĨNH PHÚC

NĂM HỌC 2014 - 2015

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (1,5 *điểm*). Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right):\left(2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$$

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm x để $A=-6$.

Câu 2 (1,5 *điểm*). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases} \text{(với } m \text{ là tham số).}$$

a) Giải hệ phương trình trên khi $m=10$.

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;\, y)$ thỏa mãn hệ thức

$$x+y-2014=\frac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}.$$

Câu 3 (3 *điểm*). a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{9a^3+3b^2+c}+\dfrac{b}{9b^3+3c^2+a}+\dfrac{c}{9c^3+3a^2+b}$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\, y)$ thỏa mãn:

$$x(1+x+x^2)=4y(y-1).$$

Câu 4 (3 *điểm*). Cho đoạn thẳng AC có độ dài bằng a. Trên đoạn AC lấy điểm B sao cho $AC=4AB$. Tia Cx vuông góc với AC tại điểm C, gọi D là một điểm bất kỳ thuộc tia Cx (D không trùng với C). Từ điểm B kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt hai đường thẳng AD và CD lần lượt tại K, E.

a) Tính giá trị $DC \,.\, CE$ theo a.

b) Xác định vị trí điểm D để tam giác BDE có diện tích nhỏ nhất .

c) Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên tia Cx thì đường tròn đường kính DE luôn có một dây cung cố định.

Câu 5 (1 *điểm*). Cho dãy gồm 2015 số: $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{2014};\frac{1}{2015}$. Người ta biến đổi dãy nói trên bằng cách xóa đi hai số u, v bất kỳ trong dãy và viết thêm vào dãy một số có giá trị bằng $u+v+uv$ vào vị trí của u hoặc v. Cứ làm như thế đối với dãy mới thu được và sau 2014 lần biến đổi, dãy cuối cùng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng giá trị của số cuối cùng đó không phụ thuộc vào việc chọn các số u, v để xóa trong mỗi lần thực hiện việc biến đổi dãy, hãy tìm số cuối cùng đó.

TRẦN MẠNH CƯỜNG
(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Sưu tầm và giới thiệu

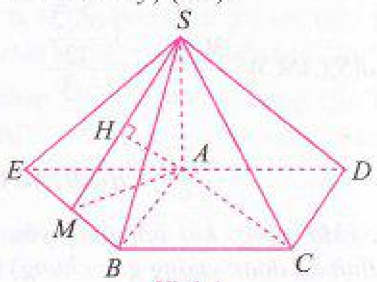
MỘT SỐ CÁCH GIẢI KHÁC NHAU BÀI HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TRONG ĐỀ THI THPT QUỐC GIA

NGUYỄN CHÍ THANH
(GV PTLC Vinschool, Hà Nội)

Để giúp các bạn học sinh chuẩn bị tốt kiến thức hình học không gian cho kỳ thi THPT Quốc gia, chúng tôi xin đưa ra một số cách giải khác nhau qua 2 thí dụ là 2 câu trong đề thi những năm vừa qua, qua đó hy vọng sẽ giúp ích được cho các em trong quá trình ôn tập để đạt kết quả cao trong các kì thi THPT Quốc gia.

Thí dụ 1 (THPT QG - 2015). *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45^o. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.*

Lời giải. **Cách 1.** (*Dùng kiến thức hình học không gian thuần túy*) (h.1).



Hình 1

• *Tính thể tích khối chóp S.ABCD*

Từ giả thiết, ta có: $\widehat{SCA}=45^o$ và $AC=SA=a\sqrt{2}$.

Suy ra thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}.a^2.a\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

• *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.*

Kẻ $BE//AC$ và lấy $BE=AC\ \Rightarrow AC//(SBE)$

$\Rightarrow d(AC,SB)=d\left(AC,(SBE)\right)=d\left(A,(SBE)\right).$

Kẻ $AM\perp BE$, do $SA\perp BE\ \Rightarrow BE\perp(SAM)\,(1)$

Kẻ $AH\perp SM$ kết hợp với (1) $\Rightarrow BE\perp AH$.

Suy ra $AH\perp(SBE)\Leftrightarrow d\left(A,(SBE)\right)=AH$.

Từ cách vẽ, ta có ΔEAB cân tại A, suy ra:

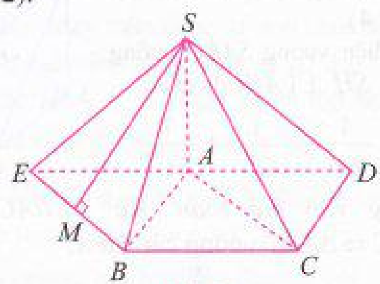
$$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

ΔSAM vuông tại A, nên: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AM^2}$

$$\Rightarrow AH=\frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\frac{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Suy ra: $d\left(AC,SB\right)=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Cách 2. (*Tính khoảng cách qua công thức thể tích*) (h.2).



Hình 2

• Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ như cách 1.

• Kẻ $BE//AC$ và lấy $BE=AC$, suy ra:

$AE=AB=a\Rightarrow SE=SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{3}.$

Kẻ $SM\perp BE$, suy ra:

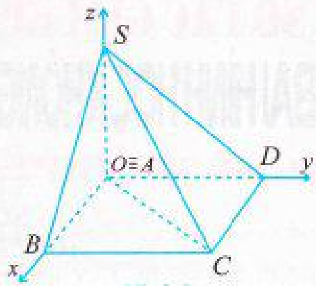
$$SM=\sqrt{SB^2-MB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Do đó: $S_{SBE}=\dfrac{1}{2}SM.BE=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{2}.a\sqrt{2}=\dfrac{a^2\sqrt{5}}{2}.$

Ta có: $V_{S.ABE}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

$$\Rightarrow d\left(A,(SBE)\right)=\frac{3.V_{S.ABE}}{S_{SBE}}=\frac{3.\frac{a^3\sqrt{2}}{6}}{\frac{a^2\sqrt{5}}{2}}=\frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Cách 3
(Dùng phương pháp tọa độ trong không gian).
Từ giả thiết ta có:
$\widehat{SCA}=45^{\circ}$
$\Rightarrow SA=AC=a\sqrt{2}.$
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình 3, ta có:



Hình 3

$O\equiv A(0;0;0),S(0;0;a\sqrt{2}),C(a;a;0),B(a;0;0)$

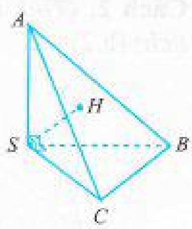
$\Rightarrow \overrightarrow{AS}(0;0;a\sqrt{2}),\overrightarrow{AC}(a;a;0),\overrightarrow{AB}(a;0;0)\Rightarrow$

$V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2.\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right|=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$

Ta có: $\overrightarrow{BS}(-a;0;a\sqrt{2})$

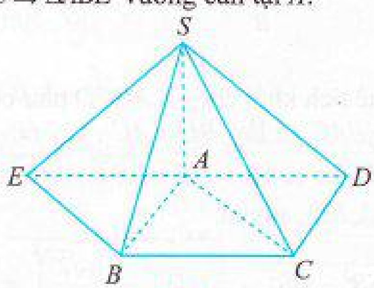
$$\Rightarrow d(SB,AC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Cách 4. (*Dùng tính chất của tứ diện vuông để tính khoảng cách*) (h.4).
Cho tứ diện vuông $SABC$ vuông tại S, với $SH\perp(ABC)$, ta có:



$$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}.$$

Áp dụng vào bài toán: Kẻ $BE//AC$ và lấy $BE=AC\Rightarrow\Delta ABE$ vuông cân tại A.



Hình 4

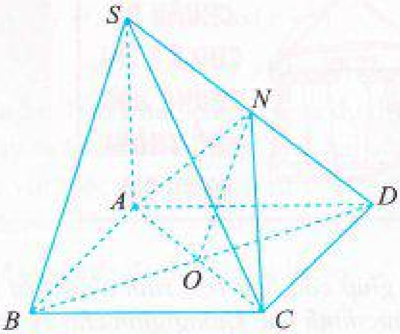
Từ giả thiết ta có:

$$\frac{1}{d^2(A,(SBE))}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{(a\sqrt{2})^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}.$$

$$\Rightarrow d(A,(SBE))=\frac{a\sqrt{10}}{5}=d(AC,SB).$$

Cách 5. (*Tính khoảng cách bằng cách dùng công thức Heron*) (h.5).
Gọi $O=AC\cap BD$ và N là trung điểm của SD
$\Rightarrow SB//ON\Rightarrow SB//(ANC)$

$\Rightarrow d(SB,AC)=d(SB,(ANC))=d(S,(ANC)).$



Hình 5

Ta có:

$$V_{S.ANC}=\frac{SN}{SD}V_{S.ADC}=\frac{SN}{SD}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a^3\sqrt{2}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Gọi p là nửa chu vi ΔANC, ta có:

$$AN=\frac{1}{2}SD=\frac{a\sqrt{3}}{2},CN=\sqrt{ND^2+DC^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2},$$

$AC=a\sqrt{2}$. Do đó:

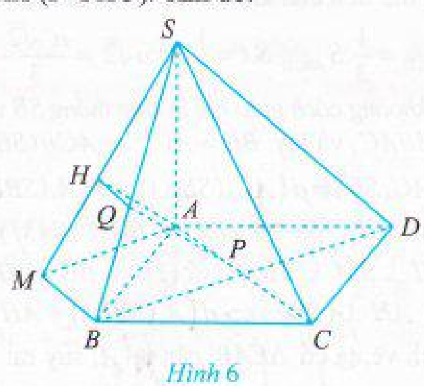
$$p=\frac{AN+CN+AC}{2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{4}a$$

$$\Rightarrow S_{ACN}=\sqrt{p(p-AN)(p-AC)(p-CN)}=\frac{a^2\sqrt{5}}{4}.$$

Suy ra: $d(S,(ANC))=\dfrac{3V_{S.ANC}}{S_{ANC}}=\dfrac{3.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{5}}{4}}$

$$=\frac{a\sqrt{10}}{5}=d(SB,AC).$$

Cách 6. (*Mở rộng: khi bài toán yêu cầu xác định và tính độ đoạn vuông góc chung*) (h.6).
Sau khi dựng AH, ta dựng đoạn vuông góc chung PQ của SB và AC như sau:
Từ H, kẻ $HQ//BM(Q\in SB)$, từ Q, kẻ $QP//HA$ $(P\in AC)$. Khi đó:



Hình 6

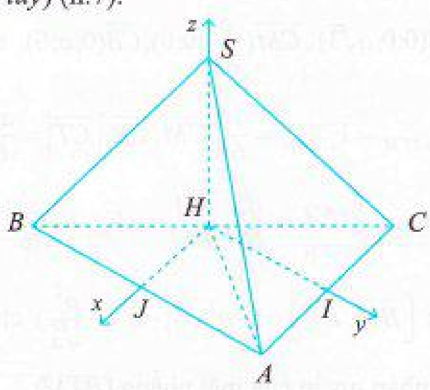
$AH \perp SB, AH \perp AC$, $PQ // AH$ suy ra PQ chính là đoạn vuông góc chung của SB và AC.
Để tính độ dài PQ, ta sẽ tính AH và tìm được:

$$d(SB, AC) = PQ = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Nhận xét. Thay vì tính khoảng cách từ SB đến AC thì ta có thể tính khoảng cách từ SD đến AC.

Thí dụ 2 (A - 2013). *Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).*

Lời giải. **Cách 1** (*Dùng hình học không gian thuần túy*) (h.7).



Hình 7

Kẻ $SH \perp BC$, do $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.
Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, AB. Suy ra: $HI \perp AC, HJ \perp AB$.

• Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AB.AC.SH$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{16}.$$

• Mặt khác: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{SAB}.d(C;(SAB))$.

Suy ra: $d(C;(SAB))$

$$= \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SAB}} = \frac{3.\frac{a^3}{16}}{\frac{1}{2}SJ.AB} = \frac{3.\frac{a^3}{16}}{\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Cách 2. (*Dùng phương pháp tọa độ trong không gian*).

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình 7, ta có:

$$O \equiv H(0;0;0), S(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}), A(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0),$$

$$B(\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};0), C(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0).$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SA}\right].\overrightarrow{SC}\right| = \frac{a^3}{16}.$$

Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là:

$$d(C;(SAB)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SAB}} = \frac{3\cdot\frac{a^3}{16}}{\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SA}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Cách 3. (*Kết hợp giữa cách 1 và cách 2*)

Như cách 1, ta có: $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{16}$ (đvtt).

Xét hệ trục tọa độ như hình 7 và ta xác định tọa độ các điểm như cách 2.
Phương trình mặt phẳng (SAB) đi qua điểm $S(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2})$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SA}\right]$ $= \left(\frac{3a^2}{4};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right)$ là: $12x + 2\sqrt{3}z - 3a = 0$.

Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là:

$$d(C;(SAB)) = \frac{\left|12\left(-\frac{a}{4}\right) + 2\sqrt{3}.0 - 3a\right|}{\sqrt{12^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Cách 4. (*Sử dụng định lý Thales để tìm khoảng cách*) (h.8).

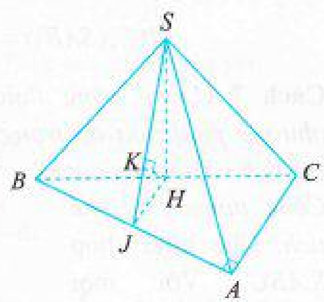
Kẻ $HK \perp SJ$, ta có HK chính là khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAB), do đó:

$$d(C;(SAB)) = 2d(H;(SAB)) = 2HK$$

$$= 2\frac{SH.HJ}{\sqrt{SH^2 + HJ^2}}$$

$$= 2.\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

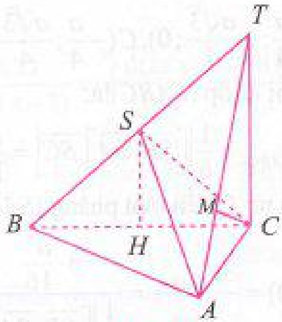


Hình 8

Cách 5 (h.9).

Kẻ $CT \perp CB$ $(T \in BS)$ và $CM \perp AT$ $(M \in AT)$, khi đó CM chính là khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB):

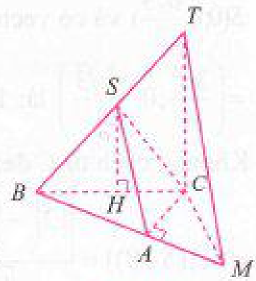
$$d(C,(SAB)) = CM = \frac{CT.CA}{\sqrt{CT^2 + CA^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$



Hình 9

Nhận xét. *Để tính khoảng cách từ C đến mp (SAB), ta có thể tính khoảng cách từ C đến đường thẳng AT bằng công thức:* $d(C,AT)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AT}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AT}\right|}$.

Cách 6. (*Dùng tính chất của tứ diện vuông để tính khoảng cách*) (h.10).



Hình 10

Kẻ $CT \perp BC$ $(T \in BS)$, $CM \perp CB$ $(M \in BA)$ thì $CTBM$ là tứ diện vuông tại C.

Áp dụng tính chất của tứ diện vuông ta có:

$$\frac{1}{d^2(C;(SAB))}=\frac{1}{CT^2}+\frac{1}{CM^2}+\frac{1}{CB^2}.$$

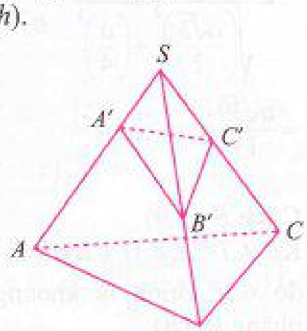
Với $CT=a\sqrt{3}, CB=a, CM=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, ta có:

$$d(C,(SAB))=\frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

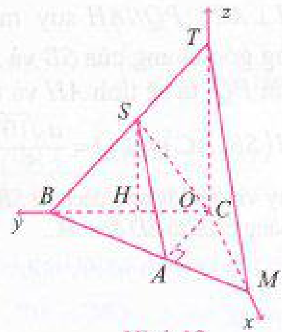
Cách 7 (*Dùng công thức tỉ số thể tích và phương pháp tọa độ trong không gian để tính thể tích và khoảng cách*).

Công thức tỷ số thể tích: Cho hình chóp $S.ABC$. Với mọi A', B', C' lần lượt nằm trên cạnh SA, SB, SC (khác A, B, C) (h.11) ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.$$



Hình 11



Hình 12

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình 12, ta có: $O\equiv C(0;0;0)$, $T(0;0;a\sqrt{3})$, $B(0;a;0)$, $M(\dfrac{a}{\sqrt{3}};0;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CT}(0;0;a\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CM}(\dfrac{a}{\sqrt{3}};0;0)$, $\overrightarrow{CB}(0;a;0)$, ta có:

$$V_{B.TCM}=V_{C.TBM}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB}\right].\overrightarrow{CT}\right|=\frac{a^3}{6}.$$

Mặt khác: $\dfrac{V_{B.SCA}}{V_{B.TCM}}=\dfrac{BS}{BT}.\dfrac{BA}{BM}\Rightarrow V_{B.SCA}=\dfrac{a^3}{16}$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BT}\right]=(-a^2\sqrt{3};-a^2;-\dfrac{a^2}{\sqrt{3}})$ chính là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (BTM).

Suy ra phương trình mặt phẳng (BTM) là:

$$-a^2\sqrt{3}x-a^2y-\frac{a^2}{\sqrt{3}}z+a^3=0.$$

Vậy ta có: $d(C,(SAB))=d(C,(BTM))$

$$=\frac{\left|-a^2\sqrt{3}.0-a^2.0-\dfrac{a^2}{\sqrt{3}}.0+a^3\right|}{\sqrt{\left(-a^2\sqrt{3}\right)^2+\left(-a^2\right)^2+\left(-\dfrac{a^2}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Đến đây chắc các bạn đã cảm nhận được những điều thú vị qua việc khai thác những cách giải khác nhau qua bài toán hình học không gian trong đề thi Đại học. Làm được như vậy, sẽ giúp các bạn rất nhiều trong việc rèn luyện tư duy toán học, giúp các bạn chuẩn bị tốt cho kỳ thi THPT Quốc Gia sắp tới.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) PT tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(0;-1)$ là $y=3x-1$.

Câu 2. a) Ta có

$$P=\frac{\cot\alpha.\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}{1+3\cot^3\alpha}=\frac{\cot\alpha(1+\cot^2\alpha)}{1+3\cot^3\alpha}=\frac{2}{5}.$$

b) Giả sử $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Từ giả thiết có $|z-(3-4i)|=1\Rightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=1.$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z đã cho là đường tròn có PT: $(x-3)^2+(y+4)^2=1.$

Câu 3. ĐK: $0<x\neq1$; PT $\Leftrightarrow(x+3)|x-1|=4x$ (1)

Trường hợp 1. $x>1$

$$(1)\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=3.$$

Trường hợp 2. $0<x<1$

$$(1)\Leftrightarrow x^2+6x-3=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{3}-3.$$

Vậy tập nghiệm của (1) là $T=\{3;2\sqrt{3}-3\}$.

Câu 4. Biến đổi vế trái của bất đẳng thức ta có

$$VT=\frac{x^2}{x^2+a^2}-\frac{y^2}{a^2+y^2}+a^2\left(\frac{1}{a^2+y^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)$$

$$=\frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+a^2)(a^2+y^2)}+a^2.\frac{x^2-y^2}{(x^2+a^2)(a^2+y^2)}$$

$$=\frac{2a^2(x-y)(x+y)}{(x^2+a^2)(a^2+y^2)}.$$

Do đó, BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{2a^2(x-y)(x+y)}{(x^2+a^2)(a^2+y^2)}\geq2.\frac{x-y}{x+y}.$$

- Nếu $x=y$ thì BĐT hiển nhiên đúng.
- Nếu $0<x<y$ thì BĐT trên tương đương với

$$\frac{a^2(x+y)}{(x^2+a^2)(a^2+y^2)}\leq\frac{1}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow a^2(x+y)^2\leq(x^2+a^2)(a^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow(ax+ay)^2\leq(x^2+a^2)(a^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow(xy-a^2)^2\geq0.$$

BĐT này đúng, suy ra đpcm.

Câu 5. Ta có

$$I=\int_0^2(x-2)\sqrt{\frac{x}{4-x}}\mathrm{d}x=\int_0^2(x-2)\sqrt{\frac{2-(2-x)}{2+(2-x)}}\mathrm{d}x.$$

Đặt $2-x=2\cos2t$, với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó

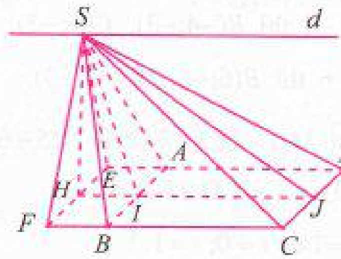
$\mathrm{d}x=4\sin2t\mathrm{d}t$. Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$$I=\int_0^2(x-2)\sqrt{\frac{2-(2-x)}{2+(2-x)}}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-2\cos2t)\frac{\sin t}{\cos t}\sin2t\mathrm{d}t$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2t.(\cos2t-1)\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos4t-2\cos2t)\mathrm{d}t$$

$$=4\left(t+\frac{1}{4}\sin4t-\sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-4.$$

Câu 6.



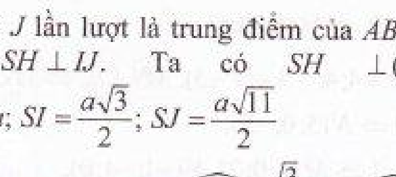
Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; kẻ $SH\perp IJ$. Ta có $SH\perp(ABCD)$; $IJ=a$; $SI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SJ=\frac{a\sqrt{11}}{2}$

Theo định lý côsin $\cos\widehat{SIH}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\sin\widehat{SIH}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. $V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (đvtt).

Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng d đi qua S và song song với AD. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt các đường thẳng AD, BC lần lượt tại E và F. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là $\widehat{ESF}$. Ta có $SE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\cos\widehat{ESF}=\frac{1}{3}$.

Câu 7.



Kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$ thì $H(1;-3)$ và $HA = HD = 5$. Ta có $HB.HC = HA^2 = HD^2$ (1)

Gọi $I = HD \cap EF$ thì $ID = IH$ (2). Từ (1), (2) có $\frac{IE}{ID} = \frac{HB}{HD} = \frac{HD}{HC} = \frac{ID}{IF} = \frac{IH}{IF}$. Do đó $\Delta EID \backsim \Delta HIF$ (c.g.c), vậy $\widehat{IED} = \widehat{IHF}$, hay tứ giác $DEHF$ nội tiếp được. Đường tròn ngoại tiếp ΔDEF đi qua 3 điểm $D(4;1)$, $M(2;-1+\sqrt{6})$; $H(1;-3)$ có PT là: $(C): x^2 + y^2 - 5x + 2y + 1 = 0$.

Gọi $B(x_0;-3) \Rightarrow E\left(\frac{x_0+4}{2};-1\right)$. Vì $E \in (C)$ nên $\left(\frac{x_0+4}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{x_0+4}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -4 \\ x_0 = 6 \end{array}\right.$.

• Với $x_0 = -4$ thì $B(-4;-3)$, $C(6;-3)$.

• Với $x_0 = 6$ thì $B(6;-3)$, $C(-4;-3)$.

Câu 8. Gọi $M(1+2t;3-3t;2t)$, $N(5+6t';4t';-5-5t')$. Ta có $d(M;(P)) = 2$

$\Leftrightarrow |2t-1| = 1 \Leftrightarrow t = 0; t = 1$.

• Với $t = 0 \Rightarrow M(1;3;0)$,

$\overrightarrow{MN} = (6t'+4;4t'-3;-5t'-5)$. $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P} = 0$

$\Rightarrow t' = 0 \Rightarrow N(5;0;-5)$.

• Với $t = 1 \Rightarrow M(3;0;2), N(-1;-4;0)$.

Câu 9. Không gian mẫu Ω là tập hợp các cách chia 8 đội thành 2 bảng. Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_8^4$.

Gọi A là biến cố " hai *đội Việt Nam và Thái Lan nằm ở 2 bảng khác nhau*" thì $\overline{A}$ là biến cố " *hai đội Việt Nam và Thái Lan nằm cùng một bảng*".

Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\overline{A}$ bằng $|\Omega_{\overline{A}}| = C_2^1.C_6^2$.

Xác suất của biến cố $\overline{A}$ là $P(\overline{A}) = \frac{|\Omega_{\overline{A}}|}{|\Omega|} = \frac{C_2^1.C_6^2}{C_8^4}$.

Xác suất cần tìm $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_2^1.C_6^2}{C_8^4} = \frac{4}{7}$.

Câu 10. ĐK: $\begin{cases} |x| > 1 \\ |x| \neq \sqrt{2} \end{cases}$ (*). Khi đó PT đã cho tương đương với $\frac{x(x^2-2)}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-1)} = a$

$\Leftrightarrow \frac{x(\sqrt{x^2-1}+1)}{\sqrt{x^2-1}} = a \Leftrightarrow x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = a$ (1).

Từ (1) suy ra $x > 0$, cùng với ĐK (*) ta sẽ chỉ giải PT đã cho với $x > 1; x \neq \sqrt{2}$. Khi đó biến đổi (1) về PT tương đương $\frac{1}{\frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = a$.

Vì $x > 1; x \neq \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1; \frac{1}{x} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, đặt $\frac{1}{x} = \cos\alpha$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \alpha \neq \frac{\pi}{4}$ ta được PT

$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} = a \Leftrightarrow \sin\alpha + \cos\alpha = a\sin\alpha\cos\alpha$.

Đặt $\sin 2\alpha = t$ thì bài toán đã cho trở thành: *Giải và biện luận PT*: $a^2t^2 - 4t - 4 = 0$ (2), với $0 < t < 1$ $(a > 0)$. Đặt $f(t) = a^2t^2 - 4t - 4 = 0$ có $\Delta' = 4 + 4a^2 > 0, \forall a$. Do đó $f(t) = a^2t^2 - 4t - 4$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Ta có $f(0) = -4; f(1) = a^2 - 8$.

• Nếu $a^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 2\sqrt{2}$ thì (2) không có nghiệm trong khoảng $(0;1)$, nên PT đã cho vô nghiệm.

• Nếu $a^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow a > 2\sqrt{2}$ thì (2) có một nghiệm $t = \frac{2+2\sqrt{1+a^2}}{a^2} = t_0 \in (0;1)$. Khi đó $\sin 2\alpha = t_0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-\cos^2\alpha}.\cos\alpha = t_0$

$\Leftrightarrow 4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + t_0^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{1 \pm \sqrt{1-t_0^2}}}$.

Kết luận.

• Nếu $0 < a \leq 2\sqrt{2}$ thì PT đã cho vô nghiệm.

• Nếu $a > 2\sqrt{2}$ thì PT đã cho có hai nghiệm là $x = \sqrt{\frac{2}{1 \pm \sqrt{1-t_0^2}}}$ $\left(t_0 = \frac{2+2\sqrt{1+a^2}}{a^2}\right)$.

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (1 *điểm*). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Câu 2 (1 *điểm*). Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}) - \sqrt{(x+1)(7-x)}$.

Câu 3 (1 *điểm*). 1) Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức của số phức z sao cho $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$.

2) Giải PT $(\sqrt{5}+2)^{x-1} = (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Câu 4 (1 *điểm*). Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$.

Câu 5 (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 9 = 0$. Chứng minh rằng (P) cắt (S). Khi đó, tìm tâm và bán kính của đường tròn thiết diện của (P) cắt (S).

Câu 6 (1 *điểm*). 1) Cho $\tan a = 3$. Hãy tính

$$B = \frac{8\cos^3 a + 4\sin^3 a + 3\cos a}{2\cos a - 5\sin^3 a}.$$

2) Tìm số hạng đứng chính giữa trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$, biết rằng $C^1_{2n+1} + C^2_{2n+1} + \ldots + C^n_{2n+1} = 2^{20} - 1$.

Câu 7 (1 *điểm*). Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, góc giữa AA' và $A'G$ bằng 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ và khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ theo a.

Câu 8 (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A. Cạnh BC có phương trình $2x - y + 1 = 0$, đường cao hạ từ đỉnh B có phương trình $x + 3y - 4 = 0$ và điểm $H(1;4)$ nằm trên đường cao hạ từ đỉnh C. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Câu 9 (1 điểm). Giải bất phương trình

$$x(x+1)(x-3) \geq \sqrt{4-x} + \sqrt{1+x} - 3, \ (x \in \mathbb{R}).$$

Câu 10 (1 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{2(z+x)y} + \frac{y^3}{2(x+y)z} + \frac{z^3}{2(y+z)x}.$$

NGUYỄN QUANG THI
(GV THPT Bảo Lộc, Lâm Đồng)

PHẤN VÀ DIÊM

NGUYỄN THÀNH NHÂN
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Bình Dương)

Giữa cuộc đời đầy rẫy những bon chen
Ta chọn cho mình một nghề lặng lẽ
Những đam mê khát khao một thời tuổi trẻ
Cháy bùng lên theo bụi phấn hồng

Từng thế hệ học trò lần lượt sang sông
Có một mái chèo âm thầm vỗ sóng
Chở trên mình tình yêu và khát vọng
Đến bến bờ tươi sáng của ngày mai

Viên phấn hồng nằm trọn trên tay
Như những que diêm sáng một lần rồi tắt
Mà cháy hết những gì tinh túy nhất
Hóa thân mình vào Nhạc và Thơ

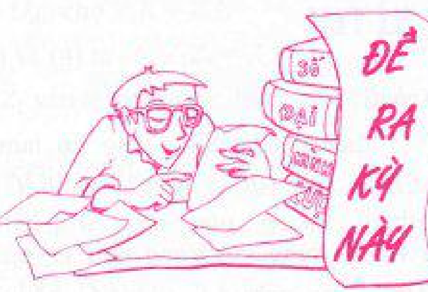
Cháy hết mình như trái tim Đan- Kô (*)
Tỏa sáng cả vùng thảo nguyên lộng gió
Trong bài giảng hãy vẫn còn nguyên đó
Thoảng đâu đây những bụi phấn hồng

Mỗi một học trò bước chân sang sông
Ai không một lần cầm viên phấn trắng
Để giờ này tháng năm dài xa vắng
Có mong không giây phút được quay về?

Bên mái trường rộn rã tiếng ve
Có người giáo già tảo tần sớm tối
Chở đi qua từng tuổi thơ vời vợi
Để mai sau tất cả được nên người

Mỗi một thầy cô mỗi một cuộc đời
Như mỗi que diêm mỗi viên phấn trắng
Cháy đến tận cùng cái thân diêm ấy
Cho sự nghiệp trồng người rạng rỡ vẻ vang

Chú thích: (*) **Đan-Kô** là tên của một chàng trai trong truyện ngắn **Bà lão Indecghin** của đại văn hào Nga Macxim Gorki. Chuyện kể về chàng trai Đan-Kô sống cuộc đời du mục trên vùng thảo nguyên nước Nga. Trong một đêm bão tố chàng trai đã xé toang lồng ngực của mình, dùng trái tim làm đuốc soi đường đường cho dân làng đi trong đêm tối để tới được vùng đất yên bình. Hình ảnh ***trái tim Đan-Kô*** là một hình ảnh rất đẹp về sự hi sinh của cá nhân cho tập thể, về sự cháy hết mình trong công việc được giao.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/461 (Lớp 6). Ký hiệu

$1.3.5...(2n-1)=(2n-1)!!$, $2.4.6...(2n)=(2n)!!$.

Chứng minh rằng số $A=(2013)!!+(2014)!!$ chia hết cho 2015.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/461 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A}=3\widehat{B}$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC, chứa điểm A, vẽ tia Cy sao cho $\widehat{BCy}=132^0$. Tia Cy cắt tia phân giác Bx của góc B tại D. Tính số đo góc ADB.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T3/461. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}=\frac{2}{x+1}.$$

TRẦN XUÂN HÒA

(GV THPT Triệu Thái, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T4/461. Cho tam giác đều ABC và O là một điểm nằm trong tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AO, BO, CO với ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{BN}+\dfrac{1}{CP}\le\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{OM}+\dfrac{1}{ON}+\dfrac{1}{OP}\right)$;

b) $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{BN}+\dfrac{1}{CP}\le\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{OA}+\dfrac{1}{OB}+\dfrac{1}{OC}\right)$.

LỤC BÌNH

(GV THPT Nguyễn Huệ, TX. Quảng Trị, Quảng Trị)

Bài T5/461. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{9(x\sqrt{x}+y^3+z^3)}=x+y+z\\ x^2+\sqrt{y}=2z\\ \sqrt{y}+z^2=\sqrt{1-x}+2\end{cases}.$$

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/461. Giải phương trình:

$$(x+1)(x+2)(x+3)=\frac{720}{(x+4)(x+5)(x+6)}.$$

NGUYỄN VĂN NHO

(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài T7/461. Xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau

a) $\sin x=\dfrac{x}{1964}$; b) $\sin x=\log_{100}x$.

HOÀNG CHI *(Hà Nội)*

Bài T8/461. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của các góc A, B, C lần lượt cắt đường tròn tại các điểm D, E, F. Kí hiệu h_a, h_b, h_c, S thứ tự là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C và diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$AD.h_a+BE.h_b+CF.h_c\ge4\sqrt{3}S.$$

LÊ XUÂN DƯƠNG

(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Bài T9/461. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=ab+ac+ad+bc+bd+3cd.$$

LÊ ANH TUẤN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/461. Cho $k\ge1$ và các số dương x, y. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n\ge2$ ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{xy}\le\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n+k\left[(x+y)^n-x^n-y^n\right]}{2+k(2^n-2)}}\le\frac{x+y}{2}.$$

VŨ TIẾN VIỆT

(GV Toán-Tin, Học viện An Ninh, Hà Nội)

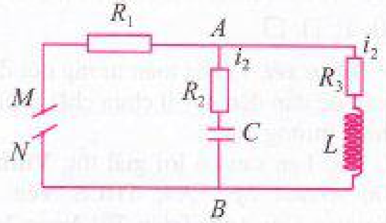
Bài T11/461. Cho n số nguyên dương khác nhau. Mỗi cặp số được lấy từ n số nguyên dương đã cho được gọi là *tốt* nếu tỷ số giữa hai số này là 2 hoặc 3. Hỏi khi cho $n = 2015^{2016}$ số nguyên dương khác nhau tùy ý thì số cặp số *tốt* lớn nhất bằng bao nhiêu ?

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T12/461. Cho tam giác ABC. Gọi E, F tương ứng là hình chiếu của B, C trên AC, AB; T là hình chiếu của A trên EF và M, N lần lượt là trung điểm của BE, CF. Giả sử TM, TN cắt AB, AC tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của PQ.

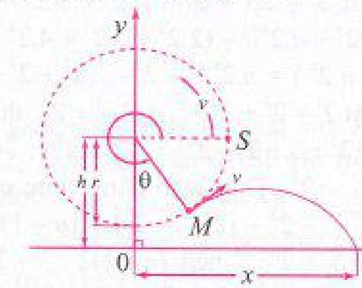
NGUYỄN THANH DŨNG
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Lạng Sơn)

Bài L1/461. Một mạch điện xoay chiều có sơ đồ như hình vẽ. Trong đó $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Cuộn dây có điện trở không đáng kể. Độ tự cảm L của cuộn dây và điện dung C của tụ điện được chọn sao cho $LC\omega^2 = 1$. Với ω là tần số góc của dòng điện xoay chiều. Với giá trị nào của R thì cường độ dòng điện trong mạch chính nhỏ hơn cường độ dòng điện qua mỗi nhánh n lần (giá trị hiệu dụng)? Tính tổng trở đoạn AB và công suất tiêu thụ toàn đoạn mạch trong trường hợp đó. Cho $U_{AB} = U$.



THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/461. Một vật được treo vào dây tại một điểm cố định, thực hiện một chuyển động tròn đều xuất phát từ S. Tại M - góc quay θ dây đột ngột bị đứt. Xác định li độ x của điểm vật rơi đối với gốc tọa độ theo θ. Các dữ liệu khác cho trong hình vẽ. Giả thiết dây mảnh, không giãn, khối lượng không đáng kể và $h > r$.



NGÔ AN HÒA KỲ *(TP. Hồ Chí Minh)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/461 (For 6th grade).
Let $(2n-1)!!$ and $(2n)!!$ denote the products $1.3.5...(2n-1)$ and $2.4.6...(2n)$ respectively. Prove that the number $A=(2013)!!+(2014)!!$ is divisible by 2015.

Problem T2/461 (For 7th grade).
Given an isosceles triangle ABC with $AB=AC$ and $\hat{A} = 3\hat{B}$. On the half-plane determined by BC that contains A, draw the array Cy such that $\widehat{BCy} = 132^0$. The array Cy intersects the bisector Bx of the angle B at D. Calculate $\widehat{ADB}$.

Problem T3/461. Solve the equation

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}} = \frac{2}{x+1}.$$

Problem T4/461. Given an equilateral triangle ABC and a point O inside the triangle. Let M, N, P respectively be the intersections between AO, BO, CO and the sides of the triangle. Prove that

a) $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{BN} + \dfrac{1}{CP} \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{ON} + \dfrac{1}{OP}\right)$,

b) $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{BN} + \dfrac{1}{CP} \le \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} + \dfrac{1}{OC}\right)$.

Problem T5/461. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt[3]{9(x\sqrt{x} + y^3 + z^3)} = x + y + z \\ x^2 + \sqrt{y} = 2z \\ \sqrt{y} + z^2 = \sqrt{1-x} + 2 \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 38)

Bài T1/457. *Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện* $2.2^2+3.2^3+4.2^4+...+n.2^n=2^{n+34}$.

Lời giải. Đặt $S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \ldots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n$ thì $S = 2S - S = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \ldots + (n-1)2^n + n.2^{n+1} - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \ldots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n) = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n)$. Đặt $T = 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$ thì $T = 2T - T = 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} - (2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n) = 2^{n+1} - 2^3$. Thay vào đẳng thức của S được $S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^{n+1} - 2^3) = (n-1)2^{n+1}$. Theo giả thiết $S = 2^{n+34}$ nên $(n-1)2^{n+1} = 2^{n+34}$, suy ra $n - 1 = 2^{33}$, hay là $n = 1 + 2^{33} = 8589934593$. ❐

➤ ***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Nguyễn Chí Công*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Trần Đan Trường*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Linh Đan*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Đặng Đình Huy, Cao Thị Khánh Linh, Nguyễn Tiến Đức, Trần Ngọc Khiêm*, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Hồ Thiên Phương*, 6D, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức, *Lê Tuấn Kiệt, Nguyễn Trung Phú, Phạm Thị Thu Nhung*, 6A, *Nguyễn Thị Yến Nhi*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, *Mai Thị Thu Thảo*, 6C, THCS TTr. Sông Vệ; **Cần Thơ:** *Nguyễn Hoàng Oanh*, 6A7, *Võ Yến Oanh*, 6A6, THCS Thốt Nốt.

VIỆT HẢI

Bài T2/457. *Tìm các số nguyên a, b, c để có* $|a-b|+|b-c|+|c-a|=2014^a+2015^a$.

Lời giải. Với $x \in \mathbb{Z}$ ta có $|x|+x=\begin{cases}2x \text{ nếu } x>0\\ 0 \text{ nếu } x\le 0\end{cases}$, do đó $|x|+x$ luôn là số chẵn $\forall x \in \mathbb{Z}$. Đặt $A=|a-b|+|b-c|+|c-a|$, ta có

$A=|a-b|+(a-b)+|b-c|+(b-c)+|c-a|+(c-a)$

suy ra A là số chẵn. Xét các trường hợp:

a) Nếu a là số nguyên âm thì 2014^a+2015^a không là số nguyên (không thỏa mãn).

b) Nếu a là số nguyên dương thì 2014^a+2015^a là số lẻ (không thỏa mãn).

c) Nếu $a=0$ thì ta có $|b|+|b-c|+|c|=2$. Vì $|b|+|b-c|+|c|\ge|b|+|b|=2|b|$ nên $|b|\le 1$, suy ra $b\in\{-1;0;1\}$.

• Với $b=-1$ ta có $|-1-c|+|c|=1 \Rightarrow c=0, c=-1$.

• Với $b=0$ ta có $|c|=1 \Rightarrow c=\pm 1$.

• Với $b=1$ ta có $|1-c|+|c|=1 \Rightarrow c=0, c=1$.

Vậy các bộ số nguyên $(a; b; c)$ cần tìm là $(0; -1; 0)$, $(0; -1; -1)$, $(0; 0; 1)$, $(0; 0; -1)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 1; 1)$. ❐

➤ ***Nhận xét.*** 1) Bài toán tương đối dễ, nhiều bạn lập luận để dẫn đến $a = 0$ chưa chặt chẽ. Một số bạn xét thiếu trường hợp.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Khánh Ly*, 7A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Nguyễn Đài Anh, Triệu Thị Ngọc Minh*, 7A, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Lê Vân Nhi, Phạm Hiếu Ngân, Bùi Thị Minh Thư, Nguyễn Hải Ly, Nguyễn Ngọc Ánh, Phạm Thị Thu Hoài, Trần Thị Kim Oanh, Nguyễn An Na, Phạm Phương Chi, Lê Thị Hằng Nhi*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A, *Lê Tuấn Kiệt*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, *Nguyễn Thị Kiều Mẫn*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; *Mai Thị Thu Thảo*, 7C, THCS T.T Sông Vệ, *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/457. *Cho f(x) là đa thức có hệ số nguyên và f(1) = 2. Chứng minh rằng f(7) không thể là số chính phương.*

Lời giải.

• Ta có bổ đề: *"Nếu f(x) là một đa thức có các hệ số nguyên và a, b là hai số nguyên thì f(a) – f(b) chia hết cho a – b"*.

Thật vậy, đặt: $f(x) = \alpha_0x^n + \alpha_1x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ với $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là các số nguyên.

Khi đó $f(a) - f(b) = \alpha_0(a^n - b^n) + \alpha_1(a^{n-1} - b^{n-1}) + ... + \alpha_{n-1}(a - b)$. Mà với $k \in \mathbb{N}^*$ ta có $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.

Suy ra $f(a) - f(b) \vdots a - b$.

• Áp dụng bổ đề trên ta có $f(7) - f(1) \vdots 7 - 1$, suy ra $f(7) - 2 \vdots 6$ (do $f(1) = 2$) hay $f(7) = 6q + 2$.

Mặt khác, ta dễ dàng kiểm tra một số chính phương khi chia cho 6 chỉ có thể dư 0, 1, 3, 4.

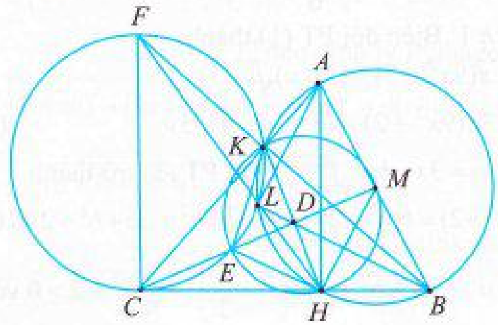
Suy ra $f(7)$ không thể là số chính phương. ❒

➤ ***Nhận xét.*** Đa số các bạn đều chứng minh theo cách trên. Ngoài ra, bạn *Đồng Xuân Luân*, 9B, THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương** đã chứng minh $f(7)$ chia cho 6 dư 2 với một lập luận khác như sau: Do $f(1) = 2$ nên đa thức $f(1) - 2$ có một nghiệm là $x = 1$. Suy ra tồn tại đa thức $q(x)$ với các hệ số nguyên để $f(x) - 2 = (x - 1)q(x)$ (do $f(x)$ có các hệ số nguyên). Như vậy $f(7) - 2 = (7 - 1)q(7)$ hay $f(7) = 6q(7) + 2$, trong đó $q(7)$ là một số nguyên. Được khen kì này gồm có bạn *Luân* và các bạn: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền*, 6A4, *Phạm Thị Kiều Trang*, *Nguyễn Thị Hương*, 7A2, *Nguyễn Văn Trung*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, *Phạm Ngọc Hoa*, 9A1, THCS Sông Lô, Sông Lô; **Nghệ An:** *Nguyễn Trọng Bằng*, 8A2, THCS Thị Trấn Quán Hành, Nghi Lộc, *Nguyễn Thị Như Quỳnh B*, *Nguyễn Thị Như Quỳnh A*, 8ª, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tùng Lâm*, 7A3, *Nguyễn Thùy Dương*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Thanh Hóa:** *Trần Quốc Phương*, 9A, THCS Thị Trấn, Thường Xuân, *Nguyễn Thị Hoàng Cúc*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Hà Nội:** *Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Thanh*, 9ª, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum; **Hải Phòng:** *Đỗ Tiến Đạt*, 8A2, THCS Hồng Bàng, Hồng Bàng.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/457. *Cho tam giác nhọn ABC với các đường cao AH, BK. Gọi M là trung điểm của AB. Đường thẳng CM cắt HK tại D. Kẻ AL vuông góc với BD tại L. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm C, K, L tiếp xúc với đường thẳng BC.*

Lời giải.



Cách 1. Từ giả thiết suy ra năm điểm *A, B, H, K, L* cùng thuộc đường tròn tâm *M* đường kính *AB*. Gọi *E* là giao điểm thứ hai của *CM* với đường tròn ngoại tiếp tam giác *MHK*.

Dễ thấy $\Delta DBH \backsim \Delta DKL$, $\Delta DMH \backsim \Delta DKE$.

Suy ra $\dfrac{DB}{DK} = \dfrac{DH}{DL}$ và $\dfrac{DM}{DK} = \dfrac{DH}{DE}$, do đó

$DB.DL = DK.DH = DM.DE \Rightarrow \dfrac{DB}{DE} = \dfrac{DM}{DL}$.

Suy ra $\Delta DBM \backsim \Delta DEL$ (c.g.c), nên $\widehat{DBM} = \widehat{DEL}$.

Mặt khác, vì tứ giác *BLKA* nội tiếp nên $\widehat{LBA} = \widehat{CKL}$, do đó $\widehat{CKL} = \widehat{LED} \Rightarrow$ tứ giác *CKLE* nội tiếp. Ta có $\widehat{CKE} = \widehat{CKH} - \widehat{EKH} = \widehat{ABH} - \widehat{EMH} = \widehat{MHB} - \widehat{CMH} = \widehat{ECH}$.

Vậy *BC* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *CKE*, hay đường tròn ngoại tiếp tam giác *CKL* tiếp xúc với *BC*.

Cách 2. Gọi *F* là giao điểm của *BK* và *HL*. Vì $\widehat{CKF} = \widehat{CLF} = 90°$ nên tứ giác *CLKF* nội tiếp đường tròn đường kính *CF*.

Kết hợp với tứ giác *AKLH* nội tiếp ta có $\widehat{HAK} = \widehat{KLF} = \widehat{KCF}$. Suy ra *AH* // *FC*, nên $FC \perp BC$. Do đó *BC* tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác *CKL*. ❒

➤***Nhận xét.*** Chỉ có ba bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Trần Quốc Lập*, *Trần Mạnh Cường*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Trọng Bằng*, 8A2, THCS thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/457. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 9x^3 + 2x + (y-1)\sqrt{1-3y} = 0 & (1) \\ 9x^2 + y^2 + \sqrt{5-6x} = 6 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. ĐK: $x \le \frac{5}{6}$; $y \le \frac{1}{3}$.

Cách 1. Biến đổi PT (1) thành

$$x(9x^2+2) = (1-y)\sqrt{1-3y}$$

$$\Leftrightarrow 3x(9x^2+2) = (3-3y)\sqrt{1-3y} \qquad (3)$$

Đặt $a = 3x$; $b = \sqrt{1-3y}$ thì PT (3) trở thành

$$a(a^2+2) = b(b^2+2) \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+2) = 0.$$

Do $a^2+ab+b^2+2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + 2 > 0$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$; suy ra $a = b$.

Từ đó $3x = \sqrt{1-3y}$ (4) $\Rightarrow 9x^2 = 1-3y$; $6x = 2\sqrt{1-3y}$.

Thay vào PT (2) ta được

$$y^2-3y+1+\sqrt{5-2\sqrt{1-3y}} = 6$$

$$\Leftrightarrow (y^2-3y-4)+(\sqrt{5-2\sqrt{1-3y}}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y-4)+\frac{4-2\sqrt{1-3y}}{\sqrt{5-2\sqrt{1-3y}}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\left[y-4+\frac{6}{\left(\sqrt{5-2\sqrt{1-3y}}+1\right)\left(2+\sqrt{1-3y}\right)}\right] = 0.$$

Do $y \le \frac{1}{3}$ nên biểu thức trong ngoặc vuông ở trên không vượt quá $\frac{1}{3}-4+\frac{6}{1.2} = -\frac{2}{3} < 0$. Suy ra $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$ (thỏa mãn ĐK). Thay vào (4) ta tìm được $x = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{2}{3}; -1\right)$.

Cách 2. Ta có

$$\text{PT}(1) \Leftrightarrow 27x^3+6x+3(y-1)\sqrt{1-3y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x)^3-(\sqrt{1-3y})^3+2(3x-\sqrt{1-3y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-\sqrt{1-3y})(9x^2+3x\sqrt{1-3y}+3-3y) = 0.$$

Do $9x^2+3x\sqrt{1-3y}+3-3y$

$$= \left(3x+\frac{\sqrt{1-3y}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\sqrt{1-3y}\right)^2+2 > 0$$

suy ra $3x = \sqrt{1-3y}$.

Đến đây giải tiếp như cách 1. ❒

➢ ***Nhận xét.*** a) Mấu chốt của bài toán là việc chỉ ra $3x = \sqrt{1-3y}$. Đa số các bạn gửi bài đều giải theo hai cách trên. Tuy nhiên, có bạn sau khi biến đổi đến PT (3) đã xét hàm số $f(t) = t(t^2+2)$ rồi tính đạo hàm $f'(t) = 3t^2+2 > 0$ để chỉ ra $f(t)$ là hàm số đồng biến, từ (3) suy ra $3x = \sqrt{1-3y}$ nhưng cách làm này không phù hợp với chương trình của cấp THCS.

b) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Đỗ Hoài Phương*, 9C, THCS Tuyết Nghĩa, Quốc Oai; *Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hải Dương:** *Đồng Xuân Luân*, 9B, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Quảng Bình:** *Phan Trần Hưởng*, thôn 5, xã Trung Trạch, huyện Bố Trạch; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Mạnh*, *Nguyễn Như Quỳnh B*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Đoàn Nhật Thanh*, 8D, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Kiều*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Nguyễn Thị Kiều Mẫn*, 9B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/457. *Cho f(x) là đa thức bậc ba với hệ số cao nhất là 2 và thỏa mãn:*

$$f(2014) = 2015, \quad f(2015) = 2016.$$

Tính $f(2016) - f(2013)$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Đặt $g(x) = f(x) - x - 1 \Rightarrow f(x) = g(x) + x + 1$. Suy ra $g(2014) = g(2015) = 0$. Vậy $x = 2014$ và $x = 2015$ là hai nghiệm của $g(x)$. Vì $f(x)$ là đa thức bậc ba với hệ số cao nhất là 2 nên $g(x)$ cũng là đa thức bậc ba với hệ số cao nhất là 2. Do đó: $g(x) = 2(x-2014)(x-2015)(x-a)$.

Ta có: $f(2016)-f(2013) = g(2016)-g(2013)+3$

$$= 2.2.1.(2016-a)-2.(-1)(-2)(2013-a)+3 = 15. \text{ ❒}$$

➢ ***Nhận xét.*** 1) Một số bạn viết $f(x)$ dưới dạng bậc ba dạng tổng quát (có hệ số cao nhất là 2) và dùng giả thiết biến đổi, cũng được kết quả trên.

Dùng đa thức nội suy Lagrange, có thể giải bài này như sau: Áp dụng đa thức suy Lagrange cho đa thức bậc ba với 4 mốc nội suy là: 2013, 2014, 2015, 2016, ta có: $f(x) = \sum_{k=2013}^{2016} \frac{f(x_k)\varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x-x_k)}$,

ở đó $\varphi(x) = (x-2013)(x-2014)(x-2015)(x-2016)$.

Do hệ số cao nhất của $f(x)$ là 2 nên ta có:

$$2 = -\frac{1}{6}f(2013)+\frac{1}{2}f(2014)-\frac{1}{2}f(2015)+\frac{1}{6}f(2016)$$

$$\Leftrightarrow f(2016)-f(2013) = 15\,.$$

b) Đa số các bạn đều tìm đúng kết quả, một số ít bạn còn tính nhầm. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Hà Nội: *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 8A5, THCS Cầu Giấy; **Nam Định:** *Nguyễn Hoàng Huy*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Vĩnh Phúc:** *Hà Hữu Linh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, THCS Vĩnh Yên; **Bắc Ninh:** *Lê Huy Cường*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hưng Yên:** *Chu Minh Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; *Dương Hồng Sơn*, *Nguyễn Mạnh Hiệp*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Tài*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Cao Hữu Đạt*, *Nguyễn Đình Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; *Đậu Thị Khánh Linh*, 11T1, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** *Phạm Hùng*, 11B2, THPT Cẩm Xuyên; **Bình Định:** *Trần Văn Thiên*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Kim Hoàng*, 10A12, THPT Nguyễn Trãi, Ninh Hòa; **Bến Tre:** *Hồ Trần Minh Tâm*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vi*, 10T2, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi; **Long An:** *Đặng Thành Trung*, 11T2, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Phước:** *Đoàn Thành Đạt*, 12T1, THPT chuyên Bình Long.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/457. *Ký hiệu S_{tp}, V theo thứ tự là diện tích toàn phần và thể tích của tứ diện ABCD. Chứng minh rằng $\left(\frac{1}{6}S_{tp}\right)^3 \geq \sqrt{3}V^2$.*

Lời giải. Trước hết xin phát biểu không chứng minh một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề. Với mọi tam giác ABC ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$), ta có $(a+b+c)^2 \geq 12\sqrt{3}S_{ABC}$. Đẳng thức xảy khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Trở lại giải bài toán **T7/457**.

Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC); E, F, G theo thứ tự là hình chiếu của H trên BC, CA, AB. Đặt $DH=h; HE=x; HF=y;$ $HG=z;$ $S_{BCD}=S_A; S_{CDA}=S_B; S_{DAB}=S_C;$ $S_{ABC}=S_D$. Dễ thấy $S_A+S_B+S_C$

$$=\frac{1}{2}\left((BC.DE+CA.DF+AB.DG)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{h^2+x^2}+b\sqrt{h^2+y^2}+c\sqrt{h^2+z^2}\right)$$

(Theo định lý Pythagoras)

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(ah)^2+(ax)^2}+\sqrt{(bh)^2+(by)^2}+\sqrt{(ch)^2+(cz)^2}\right)$$

$$\geq\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^2h^2+(ax+by+cz)^2}$$

(theo BĐT Minkowski)

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^2h^2+4\left(S_{HBC}+S_{HCA}+S_{HAB}\right)^2}$$

$$\geq\frac{1}{2}\sqrt{12\sqrt{3}S_Dh^2+4S_D^2}$$ (theo bổ đề trên).

Do đó $(S_A+S_B+S_C+S_D)(S_A+S_B+S_C-S_D)2S_D$

$$\geq 6\sqrt{3}(S_D.h)^2=54\sqrt{3}V^2.$$

Vậy theo bất đẳng thức *Cauchy*, ta có

$$S_{tp}\left(\frac{S_A+S_B+S_C-S_D+2S_D}{2}\right)^2\geq 54\sqrt{3}V^2.$$

Điều đó có nghĩa là $\left(\frac{1}{6}S_{tp}\right)^3\geq\sqrt{3}V^2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{ax}{ah}=\frac{by}{bh}=\frac{cz}{ch}$; ΔABC đều; H nằm trong tam giác ABC; $S_A+S_B+S_C-2S_D=S_D$

$\Leftrightarrow$ $ABCD$ là tứ diện đều. ❐

➤ ***Nhận xét.*** 1) Bài toán trên rất quen thuộc nhưng lời giải trên không quen thuộc. Có thể tìm thấy lời giải trên trong bài *Vài ước lượng trong tứ diện* (trang 9, TH&TT số 279, tháng 9 năm 2000).

2) Chỉ có hai bạn tham gia giải bài toán này: **Hà Nội**: *Vũ Bá Sang*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TX Hà Đông; **Hà Tĩnh:** *Phạm Thế Hùng*, THPT Cẩm Xuyên, Cẩm Xuyên.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T8/457. *Cho đa giác lồi n cạnh ($n\geq 4$) $A_1A_2...A_n$. Chứng minh rằng*

$$n+\sin A_1+\sin A_2+...+\sin A_n$$

$$\leq 2\left(\cos\frac{A_1-A_2}{4}+\cos\frac{A_2-A_3}{4}+...+\cos\frac{A_n-A_1}{4}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Vì $A_1, A_2\in(0;\pi)$ nên: $0<\frac{A_1+A_2}{2}<\pi,$

$$0\leq\frac{|A_1-A_2|}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\frac{A_1+A_2}{2}\leq 1,\ \cos\frac{A_1-A_2}{2}>0.$$

Do đó $\sin A_1 + \sin A_2 = 2\sin\frac{A_1+A_2}{2}\cos\frac{A_1-A_2}{2}$

$\le 2\cos\frac{A_1-A_2}{2}$. Lại vì $0 < \cos\frac{A_1-A_2}{4} \le 1$

$\Rightarrow \cos^2\frac{A_1-A_2}{4} \le \cos\frac{A_1-A_2}{4}$, nên

$1+\frac{1}{2}(\sin A_1 + \sin A_2) \le 1+\cos\frac{A_1-A_2}{2}$

$= 2\cos^2\frac{A_1-A_2}{4} \le 2\cos\frac{A_1-A_2}{4}$ (1).

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $\sin\frac{A_1+A_2}{2} = 1$, $\cos\frac{A_1-A_2}{4} = 1 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = \frac{\pi}{2}$.

Tương tự: $1+\frac{1}{2}(\sin A_2 + \sin A_3) \le 2\cos\frac{A_2-A_3}{4}$ (2).

....

$1+\frac{1}{2}(\sin A_n + \sin A_1) \le 2\cos\frac{A_n-A_1}{4}$ (n).

Cộng theo vế n bất đẳng thức trên, ta được:

$n + \sin A_1 + \sin A_2 + ... + \sin A_n$

$\le 2\left(\cos\frac{A_1-A_2}{4} + \cos\frac{A_2-A_3}{4} + ... + \cos\frac{A_n-A_1}{4}\right)$.

Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh. Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi đa giác có tất cả các góc là vuông. Nghĩa là $n = 4$, hay $A_1A_2A_3A_4$ là hình chữ nhật. ❒

➢ ***Nhận xét.*** Điều mấu chốt của bài toán là chứng minh bất đẳng thức (1). Hầu hết các bạn gửi bài giải đều làm theo cách trên. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Bắc Ninh:** *Nghiêm Chi, Nguyễn Duy Diễn*, 11A1-K10, THPT Yên Phong số 2, *Lê Huy Cường*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hưng Yên:** *Nguyễn Mạnh Hiệp, Dương Hồng Sơn*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, H. Văn Giang; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Phan Đức Tiến, Cao Hữu Đạt*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T9/457. *Tìm tất cả các bộ ba (x; y; p) gồm hai số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn* $p^x - y^p = 1$ *(1).*

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Xét hai trường hợp:

1) Khi $p = 2$ thì (1) có dạng $2^x - 2 = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$, suy ra $(y-1)(y+1)$ chia hết cho 2. Do $y-1$ và $y+1$ cùng tính chẵn lẻ nên $(y-1)(y+1)$ chia hết cho 4, kéo theo $2^x - 2$ chia hết cho 4.

Do đó $x = 1$ và suy ra $y = 1$. Bộ $(x; y; p) = (1,1,2)$ thỏa mãn (1).

2) Khi $p > 2$ thì p là số nguyên tố lẻ và $y > 1$. Khi đó, viết (1) dưới dạng

$p^x = y^p + 1 = (y+1)T, T = y^{p-1} - y^{p-2} + ... - y + 1 > 1$ (2).

Từ (2) suy ra $(y+1)$ chia hết cho p.

i) Nếu $y + 1 = p$ thì từ (1) suy ra $p^x - (p-1)^p = 1$ (3).

• Ta thấy $x = 1$ thì $(p-1)^p = p-1$, không xảy ra.

• Xét $x = 2$ thì từ (1) suy ra $p^2 = (p-1)^p + 1$ $\Leftrightarrow (p-1)^{p-1} = (p-1) + 2$ nên 2 chia hết cho $p-1$. Do đó $p = 3$ và $y = 2$.

Ta thấy bộ $(x; y; p) = (2; 2; 3)$ thỏa mãn.

• Xét $x \ge 3$ thì từ (3) suy ra $(p-1)^p + 1$ chia hết cho p^3. Điều này không xảy ra vì

$(p-1)^p + 1 = p^p - C_p^1 p^{p-1} + ... + C_p^{p-3} p^3 - C_p^2 p^2 + p^2$

chỉ chia hết cho p^2.

ii) Nếu $\begin{cases} y+1 = p^k \\ T = p^{x-k}, x > k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

thì do $y \equiv -1 \pmod{p^k}$ nên $y^{p-1} - y^{p-2} + ... - y + 1 \equiv p \pmod{p^k}$. Suy ra $p^{x-k} = p < y+1$, vô lí vì $p^{x-k} > y+1$. Vậy chỉ có hai bộ số $(x; y; p) \in \{(1;1;2), (2;2;3)\}$ thỏa mãn (1). ❒

➢ ***Nhận xét.*** Nhiều bạn còn biết sử dụng định lí nhỏ Fermat vào tính toán cho đơn giản.

Bạn *Vũ Đức Văn* (10T1, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**) nhận xét đây là câu Số học trong Czech Slovakia Olympiad 1996. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Lê Huy Cường*, 12T, THPT, chuyên Bắc Ninh. **Bình Định:** *Trần Văn Thiên*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Bình Phước:** *Đoàn Thành Đạt*, 12T1, *Bùi Công Mạnh, Bùi Văn Bình, Phạm Ngọc Huy*, AK11, THPT chuyên Quang Trung. **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 10T, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển. **Hà Nội:** *Phạm Thiện Long*, 11T2, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Trần Bá Khôi*, 11T2, *Vũ Đức Văn*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Vũ Bá Sang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ. **Hải Dương:** *Lê Huy Dũng*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi. **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Minh Hải*, 10T, THPT chuyên Quốc học Huế. **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn*, *Nguyễn Mạnh Hiệp*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm. **Khánh Hòa:** *Nguyễn Kim Hoàng*, 10A12, THPT Nguyễn Trãi. **Nam Định:** *Nguyễn Hoàng Huy*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Nghệ An:** *Phan Đức Tiến, Cao Hữu Đạt, Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu. **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương. **Phú Yên:** *Phan Xuân Thành Nam*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh. **Quảng Nam:** *Nguyễn Công Thảo*, 12/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông. **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Tài*, 12T, *Nguyễn Đình Lương*, 10T, *Vũ Duy Mạnh*, 11T THPT chuyên Lam Sơn. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, THCS Vĩnh Yên, *Đỗ Văn Quyết, Hà Hữu Linh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/457. *Cho k là số thực lớn hơn 1. Xét dãy số:* $x_1=\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}$; $x_2=\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}}$; ...;

$$x_n=\underbrace{\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+...+\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}}}}}_{n \text{ dấu căn bậc hai}}.$$

Chứng minh $\{x_n\}$ *là dãy hội tụ và tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Lời giải. Đặt $a=\frac{k^2-1}{4}, a>0$. Ta có $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $\forall n\geq 1$. Nhận xét

$$x_{n+1}=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a}}}}_{n+1 \text{ số } a}>\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a}}}}_{n \text{ số } a}=x_n$$

suy ra $x_1<x_2<x_3<...$ Mặt khác $x_{n+1}^2=a+x_n<a+x_{n+1}\Rightarrow x_{n+1}^2-x_{n+1}-a<0$

$\Rightarrow x_{n+1}<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ (đặt là b).

Như vậy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số tăng bị chặn trên. Do đó $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số có giới hạn hữu hạn.

Chú ý b là nghiệm dương của phương trình giới hạn $x^2-x-a=0$, $b=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}=\frac{1+\sqrt{1+k^2-1}}{2}=\frac{1+k}{2}$.

Bởi vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\frac{1+k}{2}$. ❒

➤ ***Nhận xét.*** Đây là bài toán giới hạn dãy số đơn giản. Hoan nghênh các bạn học sinh lớp 9, lớp 10 sau tham gia và có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Phạm Ngọc Hoa*, 9A1, THCS Sông Lô; **Hà Nội:** *Vũ Đức Văn*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân, Dương Hồng Sơn*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Phú Yên:** *Phan Xuân Thành Lâm*, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/457. *Với mỗi số n nguyên dương, đặt* $\psi(n)=\sum\limits_{d|n} d^2$.

1) Chứng minh rằng $\psi(n)$ *là hàm nhân tính, nghĩa là:* $\psi(ab)=\psi(a).\psi(b)$ *nếu* $(a,b)=1$.

2) Cho l là số nguyên dương lẻ. Chứng minh rằng: $\psi(n)=\psi(n+l)$ *chỉ xảy ra tại hữu hạn số nguyên dương n.*

Lời giải. (Dựa theo lời giải của *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**)

1) Gọi $\{a_1,...,a_m\}$ là tất cả các ước của a và $\{b_1,...,b_n\}$ là tất cả các ước của b. Do $(a, b) = 1$ nên $\{a_ib_j(1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)\}$ là tập hợp tất cả các ước của ab. Vậy

$$\psi(ab)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_i^2b_j^2=\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)=\psi(a)\psi(b)$$

2) Dễ thấy $\psi(n)=\sum\limits_{d|n}\frac{n^2}{d^2}$.

Bổ đề: $S_k=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(2k+1)^2}<\alpha$ $(\forall k\in\mathbb{N})$,

trong đó $\alpha=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{14}<\frac{5}{4}$.

Thật vậy vì

$$\frac{1}{(2i+1)^2}<\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right).$$

Vậy $\sum\limits_{i=4}^{k}\frac{1}{(2i+1)^2}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)<\frac{1}{2}.\frac{1}{7}$.

Do đó $S_k<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{7}=\alpha$.

Ta chứng minh rằng:

a) Với mọi n lẻ thì $\psi(n)\neq\psi(n+l)$. Thật vậy, giả sử $\psi(n)=\psi(n+l)$, vì $n+l, \frac{n+l}{2}$ là ước của $n + l$ nên ta thấy

$$(n+l)^2+\left(\frac{n+l}{2}\right)^2+1^2 \le \psi(n+l)=\psi(n)$$

$$=n^2\sum_{d|n}\frac{1}{d^2} \le n^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)<\alpha n^2<\frac{5}{4}n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}n^2+\frac{5}{2}nl+\frac{5}{4}l^2+1<\frac{5}{4}n^2 \text{ (vô lý).}$$

b) $\psi(n)=\psi(n+l)$ với mọi số hữu hạn n chẵn. Thật vậy, giả sử $A=\{n\in\mathbb{N}^*, n \text{ chẵn: } \psi(n)=\psi(n+l)\}$.

Với $n\in A$: Do $n, \frac{n}{2}, 1$ là ước của n nên

$$n^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2+1\le\psi(n)=\psi(n+l)=(n+l)^2\sum_{d|n+l}\frac{1}{d^2}$$

$$\le(n+l)^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n+l)^2}\right)<\alpha(n+l)^2$$

$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{4}-\alpha\right)n^2+Bn+C<0$ ở đó $B=-2\alpha l$; $C=1-\alpha l^2$. Do $\frac{5}{4}-\alpha>0$ nên bất phương trình trên chỉ có một số hữu hạn nghiệm nguyên dương. Do đó $|A|<\infty$. ❐

➤ **Nhận xét.** Ngoài bạn *Khôi* chỉ có hai bạn tham gia giải bài toán này. Lời giải của hai bạn có ý nhưng chưa được hoàn chỉnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/457. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại T. Gọi M là trung điểm của BC; D là điểm chính giữa cung BC không chứa điểm A; AM cắt lại (O) tại E; AT cắt cạnh BC tại F; J là trung điểm của đoạn IF. Chứng minh rằng* $\widehat{AEI}=\widehat{ADJ}$.

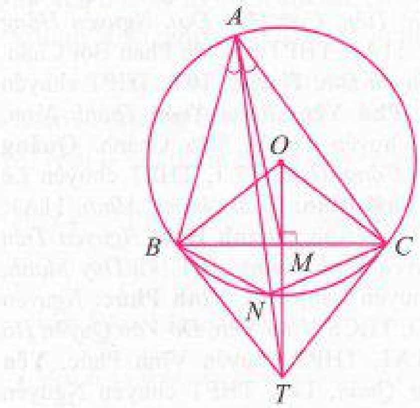
Lời giải. *Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại T. Chứng minh rằng AT chứa đường đối trung của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A.*

Chứng minh. (h.1) Gọi M là trung điểm của BC; N là giao điểm thứ hai của AT với đường tròn (O). Vì $ABNC$ là *tứ giác điều hòa* nên

$$BN.AC = AB.NC \qquad (1)$$

Sử dụng *định lý Ptolemy* cho tứ giác nội tiếp $ABNC$ ta thấy

$$BN.AC + AB.NC = AN.BC \qquad (2)$$

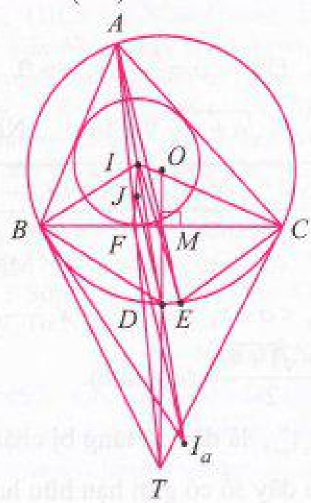


Hình 1

Từ (1) và (2) suy ra $BN.AC=\frac{1}{2}AN.BC=AN.CM$ hay $\frac{BN}{AN}=\frac{AC}{CM}$, kết hợp với $\widehat{ANB}=\widehat{ACM}$ ta thấy $\Delta ABN\backsim\Delta AMC\,(c.g.c)\Rightarrow\widehat{BAN}=\widehat{MAC}$.

Từ đó lưu ý rằng M là trung điểm của BC, ta suy ra AN, hay AT chứa *đường đối trung* của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán (h.2).



Hình 2

Từ giả thiết bài ra ta thấy AF là *đường đối trung* của tam giác ABC (Theo Bổ đề). Do đó AF và AM là hai đường đẳng giác đối với góc $\widehat{BAC}$.

Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp tương ứng với đỉnh A của tam giác ABC thế thì ta có kết quả quen thuộc sau : $DI = DB = DC = DI_a$. Suy ra DJ là đường trung bình của tam giác IFI_a. Khi đó $\widehat{ADJ} = \widehat{AI_aF}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\widehat{AI_aF} = \widehat{AEI}$. Thật vậy, do $\widehat{ABF} = \widehat{AEC}$; $\widehat{BAF} = \widehat{EAC}$, nên $\Delta ABF \backsim \Delta AEC$ (g.g), suy ra

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AB}{AE} \quad \text{hay } AE.AF = AB.AC \qquad (3)$$

Mặt khác $\widehat{ABI_a} = \widehat{ABI} + \widehat{IBI_a} = 90^0 + \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{AIC}.$

Kết hợp với $\widehat{BAI_a} = \widehat{CAI} \Rightarrow \Delta ABI_a \backsim \Delta AIC$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AC}{AI_a} \text{ hay } AI.AI_a = AB.AC \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $AE.AF = AI.AI_a$ $\Rightarrow \frac{AE}{AI} = \frac{AI_a}{AF}$. Kết hợp với $\widehat{IAE} = \widehat{I_aAF}$

$\Rightarrow \Delta AI_aF \backsim \Delta AEI$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{AI_aF} = \widehat{AEI}$ (đpcm). ❐

➢ ***Nhận xét.*** Các lời giải gửi về Tòa soạn khá phong phú theo những hướng: Sử dụng tính chất của *tứ giác điều hòa*; *hàng điểm điều hòa*; *chùm điều hòa*, *định lý Menelaus* … Một số bạn kẻ $IK // BC$ ($K \in AT$), gọi $X = DK \cap (O)$ ($X \neq D$) sau đó đi chứng minh X, I, E thẳng hàng và đường thẳng DK đi qua J cũng cho lời giải gọn. Các bạn sau có lời giải tốt. **Hà Nội:** *Vũ Đức Văn, Phạm Ngọc Khánh*, 11Toán 1, *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Hà Hữu Linh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định:** *Đoàn Thị Nhài*, 11Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đình Lương*, 10T, *Vũ Duy Mạnh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Cao Hữu Đạt, Phan Đức Tiến*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** *Ngô Việt Hoàng, Phan Anh Tuấn*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Phước:** *Bùi Văn Bình, Phạm Ngọc Huy*, AK11, *Bùi Công Minh*, 12A, THPT chuyên Quang Trung, *Đoàn Thành Đạt*, 12T1, THPT chuyên Bình Long; **Phú Yên:** *Lê Bảo Đại*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Cần Thơ:** *Nguyễn Trần Hữu Thịnh*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Duy*, 10 Toán, PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

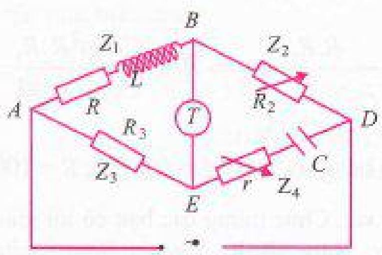
HỒ QUANG VINH

Bài L1/457. *Để đo điện trở R và độ tự cảm L của cuộn dây, ta dùng cầu xoay chiều nối vào nguồn điện xoay chiều có tần số góc ω (Hình vẽ). C là một tụ điện có điện dung đã biết, R_3 là điện trở có giá trị đã biết ở hình dưới, R_2 và r là hai biến trở, r lắp nối tiếp với C. Biến đổi R_2 và r để cầu cân bằng (không có dòng điện qua T), ta đọc được R_2 và r. Gọi các tổng trở của đoạn AB, BD, AE, ED lần lượt là Z_1, Z_2, Z_3, Z_4.*

a) *Vẽ giản đồ Frê-nen. Suy ra mối liên hệ giữa R, L và C, r, ω.*

b) *Tính tổng trở Z_1 và tìm liên hệ giữa chúng. Suy ra mối liên hệ giữa R, L và C, r, R_3, R_2.*

c) *Tính R và L theo các giá trị đã biết R_3, R_2, C, r, ω.*



Áp dụng số: $R_2 = R_3 = 1000\ \Omega$; $r = 5000\ \Omega$; $C = 0{,}2\ \mu F$; $\omega = 1000$ rad/s, *tính R và L.*

Lời giải. a) Vì cầu cân bằng, E và B có cùng điện áp. Ta có giản đồ như hình dưới. Ta thấy: $AF // BD$ vì Ri_1 và R_2i_1 đều đồng pha với i_1, $\widehat{EDM} = \widehat{AEF}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Tam giác AFB đồng dạng với tam giác BMD, nên ta có : $\frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega Cr}$ hay $\omega^2 LCr = R$ (1)

b) $Z_1 = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$; $Z_2 = R_2$; $Z_3 = R_3$;

$$Z_4 = \sqrt{r^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \qquad (2)$$

$U_{AB} = U_{AE}$ cho $Z_1I_1 = Z_3I_3$ (3)

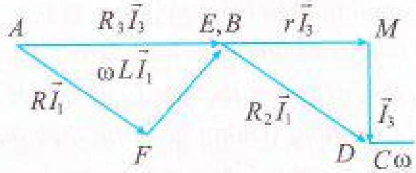
$U_{BD} = U_{AD}$ cho $Z_2I_1 = Z_4I_3$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$ (5)

Thay Z_1 vào (5) bằng các biểu thức (2) ta có:

$$(R^2 + L^2\omega^2)\left(r^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}\right) = (R_2R_3)^2 \text{ hay}$$

$$R^2r^2 + \frac{L^2}{C^2} + \frac{R^2}{C^2\omega^2}(L\omega r)^2 = (R_2R_3)^2 \quad (6)$$



Từ (1) và (6) ta có:

$$\left(Rr + \frac{L}{C}\right)^2 = (R_2R_3)^2 \Rightarrow Rr + \frac{L}{C} = R_2R_3 \quad (7)$$

c) Từ các phương trình (1) và (7) ta thấy

$$L\left(Cr^2\omega^2 + \frac{1}{C}\right) = R_2R_3$$

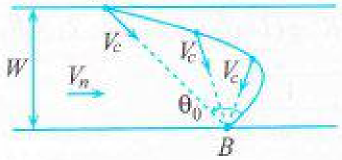
$$\Rightarrow L = \frac{R_1R_3}{Cr^2\omega^2 + \frac{1}{C}} \Rightarrow R = \frac{Cr^2\omega^2R_2R_3}{C^2r^2\omega^2 + 1}.$$

Áp dụng bằng số, ta có: $L = 0,1$ (H); $R = 100$ (Ω). ❒

➢ ***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn có lời giải đúng đề ra kì này: **Nam Định:** *Nguyễn Nam Khánh, Phạm Ngọc Nam, Nguyễn Văn Quân*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; *Nguyễn Đắc Nam*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh.

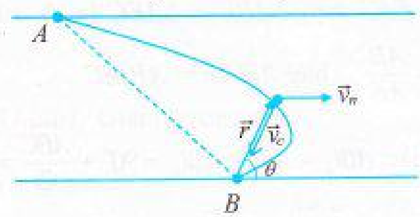
ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/457. *Trên một đoạn sông thẳng và bằng phẳng, vận tốc chảy của nước ổn định v_n. Một ca-nô xuất phát từ A với tốc độ không đổi v_c ($v_c > v_n$) và luôn hướng về B ở phía bờ đối diện như hình vẽ. Tìm quy luật chuyển động của ca-nô khi $\theta_0 = 120^o$? Bỏ qua mọi ma sát và xem kích thước ca-nô không đáng kể.*



Lời giải. Kí hiệu bề rộng của sông là d.

Xét bài toán trong hệ tọa độ cực $(\vec{r};\theta)$, trong đó $\vec{r}$ là vectơ vị trí gốc ở B, còn θ là góc lập bởi $\vec{r}$ và trục Bx. Trong hệ tọa độ này thì điểm A có tọa độ $A(r_0;\theta_0) = \left(\frac{2\sqrt{3}d}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$.



Khi canô có vị trí (r,θ) thì

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{dr}{dt} = -v_c + v_n\cos\theta \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = -v_n\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \left(\frac{v_c}{c_n\sin\theta} - \cot\theta\right)d\theta$$

Nguyên hàm hai vế được

$$\ln r = \frac{v_c}{v_n}\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) - \ln(\sin\theta) + C \quad (1)$$

Tọa độ A thỏa mãn (1) tức là

$$C = \ln r_0 - \frac{v_c}{v_n}\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right) + \ln(\sin\theta_0)$$

$$\Rightarrow \ln\frac{r}{r_0} = \frac{v_c}{v_n}\ln\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\right) + \ln\left(\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\frac{r}{r_0} = \ln\left[\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\right)^{\frac{v_c}{v_n}} \cdot \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}\right]$$

$$\Rightarrow r = r_0 \cdot \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta} \cdot \left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\right)^{\frac{v_c}{v_n}} \quad (2)$$

Thay số ta được $r = \dfrac{d}{\sin\theta} \cdot \left(\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{v_c}{v_n}}$. ❒

➢ ***Nhận xét:*** *Rất tiếc, không có bạn nào gửi lời giải cho bài vật lý này.*

NGUYỄN XUÂN QUANG

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

MỘT SỐ KỸ NĂNG CẦN LƯU Ý KHI TÍNH TÍCH PHÂN

NGUYỄN VĂN CƯỜNG
(GV THPT Mỹ Đức A, Hà Nội)

MỘT SỐ KỸ NĂNG CẦN LƯU Ý KHI TÍNH TÍCH PHÂN

Phép tính tích phân là một phần quan trọng của giải tích toán học nói riêng và trong toán học nói chung, không những như là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của giải tích mà còn có đắc lực trong nghiên cứu lý thuyết về phương trình, lý thuyết về hàm số. Trong các kỳ thi tốt nghiệp, Cao đẳng và Đại học thường xuất hiện, gây nhiều khó khăn cho học sinh khi học và thi. Bài viết này xin trình bày *một số kỹ năng cần lưu ý khi tính tích phân*, hy vọng sẽ giúp ích cho học sinh trong kỳ thi sắp tới.

1.Kỹ thuật chọn hệ số cho v. Công thức tính tích phân từng phần

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

Mục đích khi sử dụng công thức trên là đưa một tích phân phức tạp về một tích phân đơn giản hơn.

Khi chọn: $\begin{cases} u = p(x) \\ \mathrm{d}v = q(x).\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = p'(x).\mathrm{d}x \\ v = \int q(x).\mathrm{d}x = Q(x) + C \end{cases}$

với C là hằng số bất kỳ và theo một "thói quen" thì ta thường chọn $C = 0$. Nhưng đôi khi việc chọn $C = 0$ lại làm cho tích phân $\int_a^b v.du$ khó tính toán. Vì C là hằng số bất kỳ nên ta sẽ chọn hệ số C thích hợp để cho $\int_a^b v du$ dễ tính nhất.

Thí dụ 1. *Tính tích phân* $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

Phân tích: Nếu chọn

$$\begin{cases} u = \ln(\sin x + 2\cos x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x \\ v = \tan x \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \tan x.\ln(\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - 2\sin x)\tan x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x}_{A}.$$

Tính tính phân A rất phức tạp.

Lời giải. Chọn

$$\begin{cases} u = \ln(\sin x + 2\cos x) \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x \\ v = \tan x + 2 = \dfrac{\sin x + 2\cos x}{\cos x} \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x}.\ln(\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - 2\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= 3\ln 3 - \frac{7}{2}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$$

$$= 3\ln 3 - \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} - 2\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 3\ln 3 - \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}. \ \square$$

Thí dụ 2. *Tính tích phân* $I = \int_0^1 \frac{\ln(4x^2 + 8x + 3)}{(x+1)^3}\mathrm{d}x.$

Phân tích. Ta xét cách giải thông thường như sau. Chọn:

$$\begin{cases} u = \ln(4x^2 + 8x + 3) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{8x + 8}{4x^2 + 8x + 3}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{2(x+1)^2} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = -\frac{\ln(4x^2 + 8x + 3)}{2(x+1)^2}\Big|_0^1 + 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(4x^2 + 8x + 3)}$$

$$= -\frac{\ln 15}{8} + \frac{\ln 3}{2} + 4J.$$

Lúc này tính J cần đến kỹ năng đồng nhất thức như sau: $\dfrac{1}{(x+1)(4x^2 + 8x + 3)}$

$$= \frac{1}{(x+1)(2x+1)(2x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(2x+1)(2x+3) + B(x+1)(2x+3) + C(x+1)(2x+1) \quad (1)$$

Chọn $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$ thay lần lượt vào (1) ta được: $A = -1$, $B = C = 1$, khi đó:

$$\frac{1}{(x+1)(4x^2+8x+3)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} \Rightarrow$$

$$J = \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} \right) dx$$

$$= \left(-\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{2}\ln|2x+3| \right)\Bigg|_0^1$$

$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\ln\frac{15}{3} - \ln 2$ và

$$I = -\frac{\ln 15}{8} + \frac{\ln 3}{2} + 4J = \frac{15}{8}\ln 15 - \frac{3}{2}\ln 3 - 4\ln 2.$$

Lời giải. Chọn

$$\begin{cases} u = \ln(4x^2+8x+3) \\ dv = \dfrac{1}{(x+1)^3}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{8(x+1)}{4x^2+8x+3}dx \\ v = -\dfrac{1}{2(x+1)^2} + 2 = \dfrac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2}.\ln(4x^2+8x+3) \right]\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{4dx}{x+1}$$

$$= \frac{15}{8}\ln 15 - \frac{3}{2}\ln 3 - 4\ln|x+1|\Big|_0^1 = \frac{15}{8}\ln 15 - \frac{3}{2}\ln 3 - 4\ln 2.$$

Thí dụ 3. *Tính tích phân* $I = \int_2^3 \ln(x^3-3x+2)dx.$

Lời giải. Chọn $\begin{cases} u = \ln(x^3-3x+2) \\ dv = dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{3(x^2-1)}{(x-1)^2(x+2)}dx = \dfrac{3(x+1)dx}{(x-1)(x+2)} \\ v = x-1 \end{cases}$$

$$I = (x-1)\ln(x^3-3x+2)\Big|_2^3 - 3\int_2^3 \frac{x+1}{x+2}dx$$

$$= 2\ln 5 + 2\ln 2 - 3\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= 2\ln 5 + 2\ln 2 - 3\left(x - \ln|x+2|\right)\Big|_2^3$$

$= 5\ln 5 - 4\ln 2 - 3.$ ❑

Thí dụ 4. *Tính tích phân*

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log_2(3\sin x + \cos x)}{\sin^2 x}dx.$$

Lời giải. Sử dụng công thức $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ ta được $I = \frac{1}{\ln 2}.\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(3\sin x + \cos x)}{\sin^2 x}dx.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(3\sin x + \cos x) \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{3\cos x - \sin x}{3\sin x + \cos x}dx \\ v = -\cot x - 3 = -\dfrac{3\sin x + \cos x}{\sin x} \end{cases}$$

Khi đó $I.\ln 2 = (-\cot x - 3).\ln(3\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos x - \sin x}{\sin x}dx$$

$$\Rightarrow I.\ln 2 = 6\ln 2 - 3\ln 3 + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \frac{15}{2}\ln 2 - 3\ln 3 - \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $I = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{15}{2}\ln 2 - 3\ln 3 - \frac{\pi}{4} \right)$. ❑

Thí dụ 5. *Tính tích phân* $I = \int_0^2 x^3 \ln\frac{9-x^2}{9+x^2}dx.$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln\dfrac{9-x^2}{9+x^2} \\ dv = x^3dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{36x}{x^4-81}dx \\ v = \dfrac{x^4-81}{4} \end{cases}.$

$$\text{Vậy } I = \frac{x^4-81}{4}\ln\frac{9-x^2}{9+x^2}\Bigg|_0^2 - \int_0^2 9x dx$$

$$= \frac{65}{4}\ln\frac{13}{5} - \left(\frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{65}{4}\ln\frac{13}{5} - 18.$$

✪ **Bài tập tương tự.** Tính các tích phân sau

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}dx.$$

$$I_2 = \int_0^2 (x^3+x)\ln(1+x^2)dx.$$

2. Đưa biểu thức dưới dấu tích phân về đạo hàm của một hàm số

- $\int \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right) dx =$

$= \int d\big(u(x)v(x)\big) = u(x)v(x) + c.$

• $\displaystyle\int \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}dx = \int d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{u(x)}{v(x)} + c.$

Thí dụ 6. *Tính tích phân* $I = \displaystyle\int_e^{e^2}\left(2\sqrt{\ln x} + \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right)dx.$

Lời giải. Ta có

$2\sqrt{\ln x} + \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}.(x)' + x(2\sqrt{\ln x})' = (2x\sqrt{\ln x})'.$

Do đó $I = \displaystyle\int_e^{e^2}\left(2\sqrt{\ln x} + \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right)dx$

$$= \int_e^{e^2} d(2x\sqrt{\ln x}) = 2x\sqrt{\ln x}\Big|_e^{e^2} = 2\sqrt{2}e^2 - 2e.$$

Thí dụ 7. *Tính tích phân* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx.$

Lời giải. Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x + e^x\tan\frac{x}{2}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(e^x\tan\frac{x}{2}\right) = \left(e^x\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Nhận xét. Ngoài cách giải trên ta còn có thể giải như sau

Cách 2. Phân tích $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}e^x dx = K_1 + K_2.$$

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d(\tan\frac{x}{2}) = e^x\tan\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}e^x dx$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}e^x dx$$

$$\Rightarrow J = e^{\frac{\pi}{2}} - K_2 + K_2 = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Cách 3. Có thể đặt

$$\begin{cases} u = \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x} \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left[\dfrac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} + \dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\right]dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Từ đó

$$J = \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(1+\cos x)e^x}{(1+\cos x)^2} + \frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}\right]dx$$

$$= 2e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^x}{(1+\cos x)}\right)' dx$$

$$= 2e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} - \left(\frac{e^x}{1+\cos x}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Thí dụ 8. *Tính tích phân* $I = \displaystyle\int_0^{e}\frac{x^2.e^x}{(x+2)^2}dx.$

Lời giải. Ta có

$$I = \int_0^e\frac{x^2.e^x}{(x+2)^2}dx = \int_0^e\left[e^x - \frac{4x+4}{(x+2)^2}e^x\right]dx$$

$$= e^x\Big|_0^e - 4\int_0^e\frac{x+2-1}{(x+2)^2}e^x dx$$

$$= e^e - 1 - 4\int_0^e\left[\frac{1}{x+2}(e^x)' + \left(\frac{1}{x+2}\right)' e^x\right]dx$$

$$= e^e - 1 - 4\int_0^e\left(\frac{e^x}{x+2}\right)' dx = e^e - 1 - 4\frac{e^x}{x+2}\Bigg|_0^1 = e^e + 1 - \frac{4e}{3}.$$

✪Bài tập tương tự. Tính các tích phân sau

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[4x\tan\frac{x}{2} + x^2(1+\tan^2\frac{x}{2})\right]dx.$$

$$I_4 = \int_0^1\frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}dx.$$

3. Biến đổi tử số theo mẫu số và đạo hàm của mẫu số

Lưu ý. $dx = \dfrac{1}{a}d(ax+b)$; $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$;

$\cos x dx = d(\sin x + c)$; $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$....

Thí dụ 9. *Tính tích phân* $I = \displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x\ln ex}dx.$

Lời giải. Ta có

$$I=\int_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x(\ln x+1)}=\int_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x}-\int_e^{e^2}\frac{d(1+\ln x)}{1+\ln x}$$

$$=\ln(\ln x)\Big|_e^{e^2}-\ln(1+\ln x)\Big|_e^{e^2}=2\ln 2-\ln 3.$$

Thí dụ 10. *Tính tích phân* $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}dx.$

Lời giải. Ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\cos x-\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\left(\cos x+\sin x\right)}{\cos x+\sin x}=\ln|\cos x+\sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Thí dụ 11. *Tính tích phân* $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}dx.$

Lời giải. Ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{\tan x-1}{1+\tan x}}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan x-1}{(1+\tan x)(1-\tan^2 x)}.\frac{dx}{\cos^2 x}=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d(\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\tan x)^{-2}d(1+\tan x)=\frac{1}{1+\tan x}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Thí dụ 12. *Tính tích phân*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx.$$

Lời giải. Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$

$$=x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(x\sin x+\cos x\right)}{x\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln|x\sin x+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\ln\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right].$$

Thí dụ 13. *Tính tích phân*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+1)(\sin x+\cos x)+\cos x}{(x+1)\sin x+\cos x}dx.$$

Lời giải. Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+1)\cos x dx}{(x+1)\sin x+\cos x}$

$$=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d((x+1)\sin x+\cos x)}{(x+1)\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\ln((x+1)\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\ln\frac{\pi+2}{2}.$$

Thí dụ 14. *Tính tích phân* $I=\int_0^1\frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx.$

Lời giải. Ta có $I=\int_0^1\frac{x^2\left(1+2e^x\right)+e^x}{1+2e^x}dx$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1\frac{e^x}{1+2e^x}dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1+2e^x)}{1+2e^x}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln(1+2e^x)\,|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}.$$

Thí dụ 15. *Tính tích phân* $I=\int_1^e\frac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx.$

Lời giải. Ta có

$$I=\int_1^e\frac{(x+x^2\ln x)+(1-x)}{x+x^2\ln x}dx=\int_1^e dx+\int_1^e\frac{1-x}{x+x^2\ln x}dx$$

$$=x\Big|_1^e+\int_1^e\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}dx=e-1-\int_1^e\frac{d\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)}{\frac{1}{x}+\ln x}$$

$$=e-1-\ln\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\Big|_1^e=e-\ln(e+1).$$

Thí dụ 16. *Tính tích phân* $I=\int_0^1\frac{2xe^x-1}{1+x^2e^x}dx.$

Lời giải. Ta có

$$I=\int_0^1\frac{(2x+x^2)e^x-(1+x^2e^x)}{1+x^2e^x}dx$$

$$=\int_0^1\frac{(2x+x^2)e^x}{1+x^2e^x}dx-\int_0^1 dx$$

$$=\int_0^1\frac{d(1+x^2e^x)}{1+x^2e^x}-1=\ln(1+x^2e^x)\Big|_0^1-1=\ln(e+1)-1.$$

✪ Bài tập tương tự. Tính các tích phân sau

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-\sin x+x^2}{x+\cos x}dx.$$

$$J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x\cos x+(x-2)\sin x}{x\cos x-\sin x}dx.$$

$$K=\int_0^1\frac{(x^2e^x+2x+1)e^x}{xe^x+1}dx.$$

THAM SỐ HÓA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Chúng ta đã quen kỹ thuật tham số hóa trong các bài toán về phương trình, hệ phương trình. Trong bài viết này xin trình bày kỹ thuật giải các bài toán bất đẳng thức (BĐT) bằng cách tham số hóa. Ý tưởng chính của phương pháp là tìm mối quan hệ giữa các biến trong bài toán để có thể đưa thêm biến phụ. Lưu ý rằng với mọi số thực a,b thì luôn tồn tại số thực k sao cho $a=b+k$ và trong một số trường hợp, bài toán có nhiều biến thì ta có thể tham số hóa thêm một vài biến khác. Mục tiêu chính của phương pháp là sử dụng "*phép tịnh tiến trên trục số*" để chuyển các biến đang được xem xét thành các biến nhận giá trị nhỏ hơn rất nhiều, và từ đây ta sẽ dễ dàng đánh giá các biến mới với điều kiện chặt hơn so với các biến ban đầu.

Phương pháp này thường áp dụng cho lớp các bài toán BĐT đồng bậc và đối xứng. Sau đây là một số bài toán minh họa.

✪ **Bài toán 1.** *(Bất đẳng thức Cauchy cho ba số). Cho ba số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$.*

Lời giải. Bất đẳng thức Cauchy vốn đã quá nổi tiếng và có nhiều cách chứng minh cũng như ứng dụng. Ta sẽ cùng xem xét một cách chứng minh mới cho bài toán này. Một cách tương đương, ta chỉ cần chứng minh $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ với mọi $a,b,c\geq 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Đặt $b=a+x, c=a+y$ khi đó $x\geq 0, y\geq 0$. Thay vào BĐT cần chứng minh, ta có

$$a^3+\left(a+x\right)^3+\left(a+y\right)^3\geq 3a\left(a+x\right)\left(a+y\right)$$

$$\Leftrightarrow 3ax^2+3ay^2+x^3+y^3\geq 3axy.$$

BĐT này luôn đúng vì nó tương đương với

$$3a\left(x-y\right)^2+3axy+x^3+y^3\geq 0.$$

✪ **Bài toán 2.** *Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc+\frac{3}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

Nhận xét. Bài này là một kết quả chặt hơn so với bài toán 1, nên chúng ta sẽ gặp nhiều khó khăn trong việc tìm lời giải. Mặc dù BĐT đang xét có dạng đồng bậc và đối xứng nhưng khó khăn mà chúng ta gặp phải là làm thế nào phá bỏ được dấu trị tuyệt đối. May mắn thay, vì tính chất đối xứng, nên không mất tính tổng quát, ta có thể "sắp xếp thứ tự" các số a,b,c, từ đó ta có thể bỏ dấu trị tuyệt đối và biến đổi tiếp để có lời giải.

Lời giải. Giả sử $a\leq b\leq c$. Khi đó tồn tại các số $x\geq 0, y\geq 0$ sao cho $b=a+x, c=a+y, y\geq x$.

BĐT cần chứng minh tương đương với

$$a^3+(a+x)^3+(a+y)^3-3a(a+x)(a+y)-\frac{9}{4}xy(y-x)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow(3ay^2-3axy)+3ax^2+x^3+y^3-\frac{9}{4}xy^2+\frac{9}{4}x^2y\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3ay(y-x)+3ax^2+(y-x)^3+\frac{3}{4}xy(y-x)+2x^3\geq 0.$$

BĐT cuối đúng vì $y\geq x\geq 0$.

Ta sẽ cùng xem xét một số ví dụ khác.

✪ **Bài toán 3.** *Cho các số thực không âm a,b,c và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $(a-b)(b-c)(c-a)\leq\frac{\sqrt{3}}{18}$.*

Phân tích. Khó khăn chúng ta gặp phải là biểu thức không đối xứng. Nếu dùng phép biến đổi đại số thì phải chứng minh một BĐT bậc 3 không đối xứng. Tuy nhiên, với lưu ý rằng $A \le |A|$, với mọi số thực A, ta sẽ chuyển biểu thức thành dạng đối xứng như ở bài toán 2.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh $|(a-b)(b-c)(c-a)| \le \frac{\sqrt{3}}{18}$. Giả sử rằng $a \le b \le c$. Khi đó tồn tại các số thực $x \ge 0, y \ge 0$ sao cho $y \ge x$ và $b = a + x; c = a + y$. Cần chứng minh $xy(y-x) \le \frac{\sqrt{3}}{18}$.

Vì $a+b+c=1$, nên $3a+x+y=1 \Rightarrow x+y \le 1$ hay $y \le 1-x$. Từ điều kiện $x \le y$, suy ra $0 \le x \le \frac{1}{2}$. Do đó

$xy(y-x) \le x(1-x)(1-2x) = 2x^3 - 3x^2 + x$. Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x + 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ (nhận) hoặc $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ (loại).

Khi đó $f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}$.

Vì $f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ nên $f(x) \le \frac{\sqrt{3}}{18}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, y = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ hay $a = 0, b = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, c = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

Như vậy, không chỉ giải được bài toán đã cho mà ta còn chứng minh được BĐT "kép":

$$-\frac{\sqrt{3}}{18} \le (a-b)(b-c)(c-a) \le \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Bài toán 4. *Cho $a, b, c \in [1,2]$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \le 5abc$.*

Lời giải. Vì vai trò của a, b, c là như nhau nên có thể giả sử $a \le b \le c$. Khi đó tồn tại $y \ge x \ge 0$ sao cho $b = a + x, c = a + y$. Vì $a, b, c \in [1,2]$, nên $x, y \in [0,1]$. BĐT cần chứng minh được viết lại $a^3 + (a+x)^3 + (a+y)^3 \le 5a(a+x)(a+y)$

$$\Leftrightarrow 2a^3 + 2a^2x - 3ax^2 - x^3 + 2a^2y - 3ay^2 - y^3 + 5axy \ge 0 \quad (*).$$

BĐT cuối đúng vì nó tương đương với

$$2(a^3 - y^3) + x(a^2 - x^2) + 3ax(y-x) + a^2x + 2axy + y(a-y)(2a-y) \ge 0.$$

Bình luận. Trong bài toán trên, ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi một số bằng 2 và hai số bằng 1. Từ đó, với việc sắp xếp thứ tự của các biến, ta nhận được $a = 1$ và $x = 0, y = 1$. Do đó, trong BĐT (*) ta phải đánh giá đại lượng a^3 và y^3, tức là cần phân tích $-y^3 = -2y^3 + y^3$. Công việc kế tiếp là làm thế nào để có thể nhóm các hạng tử và vẫn đảm bảo đẳng thức xảy ra đồng thời như cách trình bày trên.

Bài toán 5. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a \ge b \ge c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Chứng minh rằng $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \ge -4$.*

Lời giải. Vì $a \ge b \ge c$ nên tồn tại $x \ge y \ge 0$ sao cho $a = c + x, b = c + y$. Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 5$, ta có $3c^2 + 2c(x+y) + x^2 + y^2 = 5$. BĐT cần chứng minh trở thành

$$(x-y)xy(3c^2 + 2c(x+y) + xy) \le 4$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)(5 - x^2 - y^2 + xy) \le 4.$$

Đặt $m = x - y$ và $n = xy$, $m \ge 0, n \ge 0$. BĐT trở thành $m^3n + mn^2 + 4 \ge 5mn$.

BĐT cuối đúng vì $m^3n + mn^2 + 4$

$$= m^3n + \frac{mn^2}{2} + \frac{mn^2}{2} + 2 + 2 \ge 5\sqrt[5]{m^5n^5} = 5mn.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$m^3n = \frac{mn^2}{2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^3n = 2 \\ mn^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

hay $a = 2, b = 1, c = 0$ hoặc $a = 0, b = -1, c = -2$.

Bài toán 6. *(Vietnam 2008). Cho a, b, c là các thực không âm phân biệt. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \ge \frac{4}{ab+bc+ca}.$$

Lời giải. Vì BĐT đồng bậc nên có thể chuẩn hóa $ab + bc + ca = 4$. Giả sử $a > b > c \ge 0$. Đặt $b = c + x$ và $a = c + y$, với $y > x > 0$. Ta có $4 = 3c^2 + 2c(x+y) + xy \ge xy$. BĐT cần chứng minh trở thành $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \ge 1$

$\Leftrightarrow x^2y^2+(x^2+y^2)(x-y)^2 \ge x^2y^2(x-y)^2$.

Đặt $m=y-x, n=xy$ thì $m>0, 4\ge n>0$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$n^2+(m^2+2n)m^2 \ge m^2n^2 \Leftrightarrow n^2+m^4+2nm^2 \ge m^2n^2$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$n^2+m^4+nm^2+nm^2 \ge 4\sqrt[4]{m^8n^4}=4m^2n \ge m^2n^2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{5}-1 \\ y=\sqrt{5}+1 \end{cases}$ hay $a=\sqrt{5}+1, b=\sqrt{5}-1, c=0$.

Bài toán 7. *Cho a,b,c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng*

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\ge\frac{27}{4}.$$

Lời giải. Giả sử $a=\min\{a,b,c\}$.

Đặt $b=a+x, c=a+y$. Vì a,b,c đôi một phân biệt nên $x>0, y>0$ và $x\ne y$. BĐT cần chứng minh trở thành $(x^2-xy+y^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x-y)^2}\right)\ge\frac{27}{4}$

$$\Leftrightarrow (x^2-xy+y^2)\frac{(x^2-xy+y^2)^2}{x^2y^2(x-y)^2}\ge\frac{27}{4},$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2-xy+y^2}{xy}\right)^3\cdot\frac{1}{\frac{x^2-xy+y^2}{xy}-1}\ge\frac{27}{4}.$$

Đặt $t=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1$. Vì $x>0, y>0$ nên $t\ge1$. Ta viết BĐT trên dưới dạng

$$\frac{4t^3}{t-1}\ge 27 \Leftrightarrow (2t-3)^2(t+3)\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Các bài toán tiếp theo sẽ minh họa thêm cho tính ưu việt của kỹ thuật này.

Bài toán 8. (*Arkady Alt, San Jose, USA*). *Cho tam giác với độ dài các cạnh là a,b,c. Chứng minh:* $(a+b+c).\min\{a,b,c\}$

$$\le 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2.$$

Lời giải. Giả sử rằng $a=\min\{a,b,c\}$. Đặt $b=a+x, c=a+y$, thì $x,y\ge0$. Bất đẳng thức trở thành $(a+b+c)a\le 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2$

$\Leftrightarrow 2a^2+b^2+c^2\le ab+ac+2bc$

$\Leftrightarrow 2a^2+(a+x)^2+(a+y)^2$

$\qquad\le a(a+x)+a(a+y)+2(a+x)(a+y)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\le x(a+y)+y(a+x)$.

BĐT cuối luôn đúng, vì $a+b>c$ và $a+c>b$ hay $a+x>y$ và $a+y>x$.

Bài toán 9. *Cho $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $2a^2+3ab+2b^2\le7$. Chứng minh rằng*

$$\max\{2a+b, 2b+a\}\le 4.$$

Lời giải. Vì vai trò của a và b là như nhau nên ta có thể giả sử $a\ge b$. Khi đó

$$\max\{2a+b,2b+a\}=2a+b.$$

Ta sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh BĐT. Giả sử ta có $2a+b>4$ hay $b>4-2a$. Khi đó tồn tại $x>0$ sao cho $b=4-2a+x$. Khi đó $2a^2+3ab+2b^2\le7$

$\Leftrightarrow 2a^2+3a(4-2a+x)+2(4-2a+x)^2\le7$

$\Leftrightarrow 4a^2-20a+25+2x^2-5xa+16x\le0$

$\Leftrightarrow \left(2a-5-\frac{5}{4}x\right)^2+\frac{7}{16}x^2+\frac{7}{2}x\le0$ (vô lý vì $x>0$).

Bài toán 10. (*Marian Tetiva, Romania, CRUX problem #3246*).

Cho $a,b,c,d>0$, $d=\min\{a,b,c,d\}$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd$

$\ge 4d\left[(a-d)^3+(b-d)^3+(c-d)^3-3(a-d)(b-d)(c-d)\right]$.

Lời giải. Vì $d=\min\{a,b,c,d\}$ nên ta có thể đặt $a=x+d, b=y+d, c=z+d$, với $x,y,z\ge0$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$(x+d)^4+(y+d)^4+(z+d)^4$

$\qquad+d^4-4d(x+d)(y+d)(z+d)$

$\qquad\ge 4d(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

Ta có $(x+d)^4+(y+d)^4+(z+d)^4+d^4$

$=x^4+y^4+z^4+4d^4+4d(x^3+y^3+z^3)$

$$+6d^2(x^2+y^2+z^2)+4d^3(x+y+z);$$

$$4d(x+d)(y+d)(z+d)=4d^4+4d^3(x+y+z)$$
$$+4d^2(xy+yz+zx)+4xyzd.$$

Do đó BĐT trên trở thành

$$x^4+y^4+z^4+6d^2(x^2+y^2+z^2)$$
$$-4d^2(xy+yz+zx)+8xyzd\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4+4d^2\left[(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\right]$$
$$+2d^2(x^2+y^2+z^2)+8xyzd\ge 0.$$

BĐT cuối cùng luôn đúng vì

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ và $x,y,z,d\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$ hay $a=b=c=d$.

Bài toán 11. *Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$4(a+b+c)^3\ge 27(ab^2+bc^2+ca^2+abc).$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Đặt $b=a+x, c=a+y$, trong đó $x\ge 0, y\ge 0$. BĐT cần chứng minh trở thành $9(x^2-xy+y^2)a+(2x-y)^2(x+4y)\ge 0.$

BĐT cuối đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=0$ hoặc $a=0, 2x=y$, tức là $a=b=c$ hoặc $a=0, c=2b$ và các hoán vị.

Bài toán 12. (*Gabriel Dospinescu*). *Cho các số thực dương a,b,c và thỏa mãn điều kiện $\max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\}\le 1$. Chứng minh rằng*

$$1+a^3+b^3+c^3+6abc\ge 3a^2b+3b^2c+3c^2a.$$

Lời giải. Giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Đặt $b=a+x, c=a+y, x,y\in[0,1]$. Ta có

$$a^3+b^3+c^3-3abc=3a(x^2-xy+y^2)+x^3+y^3$$

và $a^2b+b^2c+c^2a-3abc=a(x^2-xy+y^2)+x^2y.$

BĐT cần chứng minh trở thành $1+x^3+y^3\ge 3x^2y.$

BĐT cuối đúng vì $1+x^3+y^3\ge 3xy\ge 3x^2y$, do $0\le x,y\le 1$.

BÀI TẬP

1. (*Spain* 1996) Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 3(b-c)(a-b).$

2. (*Bosnia* 2008) Cho x,y,z là các số thực. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$$\ge\max\left\{\frac{3(x-y)^2}{4},\frac{3(y-z)^2}{4},\frac{3(z-x)^2}{4}\right\}.$$

3. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3-3abc\ge 2\left(\dfrac{b+c}{2}-a\right)^3.$

4. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng $(a+b+c)^3\ge 6\sqrt{3}(a-b)(b-c)(c-a).$

5. Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

$$6(a^2+b^2+c^2+d^2)+(a+b+c+d)^2\ge 12(ab+bc+cd).$$

6. Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

$$2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\ge(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

7. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

8. Cho $x,y,z\in[0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

9. (*BĐT Schur*) Cho a,b,c,r là các số thực không âm. Chứng minh

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\ge 0.$$

10. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$
$$\ge\frac{3}{2}+\frac{7}{16}\cdot\frac{\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}}{ab+bc+ca}.$$

11. Cho các số thực phân biệt a,b,c. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\ge\frac{9}{2}.$$

12. (*Vasile Cirtoaje*). Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $(a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a).$

13. Cho a,b,c là các số thực không âm phân biệt. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]$$
$$\times\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right].$$

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ *Năm học 2014 - 2015*

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2014 – 2015 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2014 đến tháng 8 năm 2015. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu Toán và Vật lý cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài rất sôi nổi. ***Hà Nội, Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Hà Tĩnh, Quảng Ngãi*** *là những tỉnh, thành phố có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải cao hơn cả. Giải Xuất sắc về môn Toán thuộc về bạn Nguyễn Văn Thế, 10T1, THPT chuyên* ***Hà Tĩnh****. Giải Nhất môn Vật lý thuộc về bạn Phạm Ngọc Nam, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong,* ***Nam Định****. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2015 – 2016. Sau đây là danh sách* ***86*** *bạn đoạt giải Toán và* ***17*** *bạn đoạt giải Vật lý năm học 2014 – 2015.*

MÔN TOÁN

☆ Giải Xuất sắc (1 giải)

Nguyễn Văn Thế, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

☆ Giải Nhất (3 giải)

1. *Đặng Quang Anh*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hóa**.
2. *Vũ Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**.
3. *Vũ Bá Sang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**.

☆ Giải Nhì (14 giải)

1. *Nguyễn Đình Tuấn*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
2. *Nguyễn Lê Hoàng Duyên*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
3. *Nguyễn Minh Hiếu*, 8A5, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
4. *Vương Tiến Đạt*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**.
5. *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.
6. *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
7. *Hồ Xuân Hùng*, 10T1,THPT Đô Lương I, **Nghệ An**.
8. *Trần Văn Thiên*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**.
9. *Dương Hồng Sơn*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**.
10. *Ngô Việt Hoàng*, 10 T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
11. *Vũ Đức Văn*, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**.
12. *Phạm Quốc Thắng*, 10T1, THPT chuyên Long An, **Long An**.
13. *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11A$_2$ Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
14. *Võ Duy Khánh*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

☆ Giải Ba (23 giải)

1. *Tạ Kim Thanh Hiền*, 6A4, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
2. *Thái Bá Bảo*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
3. *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
4. *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
5. *Nguyễn Trọng Bằng*, 7A2, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**.

6. *Đặng Thanh Tùng*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**.
7. *Nguyễn Tiến Long*, 8A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
8. *Võ Thành Hy*, 8A, THCS Hành Trung, **Quảng Ngãi**.
9. *Bùi Thị Liễu Dương*, 8A4, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
10. *Trần Quốc Lập*, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
11. *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
12. *Nguyễn Hữu Huy*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
13. *Nguyễn Thành Long*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**.
14. *Nguyễn Văn Cao*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**.
15. *Trần Quang Minh*, $9A_4$, THCS Nguyễn Đức Cảnh, TT. Diêm Điền, Thái Thụy, **Thái Bình**.
16. *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh, **Hà Nội**.
17. *Nguyễn Huỳnh Huy*, 9H, THCS Nguyễn Chí Thanh, Đông Hòa, **Phú Yên**.
18. *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
19. *Lê Văn Trường Nhật*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
20. *Phan Nhật Duy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hà Tĩnh**.
21. *Nghiêm Văn Nghĩa*, 10A1, THPT Lạng Giang 3, **Bắc Giang**.
22. *Trần Mạnh Hùng*, 11Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**.
23. *Trần Quang Huy*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.

☆ Giải Khuyến khích (45 giải)

1. *Lê Tuấn Kiệt*, 6A,THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
2. *Mai Thị Thu Thảo*, 6C, THCS Thị trấn Sông Vệ, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**.
3. *Nguyễn Bảo Trân*, 7A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn, **Bình Định**.
4. *Trương Thị Mai Trâm*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
5. *Nguyễn Đình Nhật*, 7A, THCS Thị trấn Cẩm Xuyên, **Hà Tĩnh**.
6. *Nguyễn Văn Mạnh*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
7. *Trần Lê Hiệp*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
8. *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**.
9. *Hoàng Trần Đức*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
10. *Phan Trần Hướng*, 8Đ, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch, **Quảng Bình**.
11. *Nguyễn Hồng Anh*, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
12. *Nguyễn Thảo Chi*, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
13. *Ngô Lê Phương Trinh*, 9E, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hoà, **Phú Yên**.
14. *Hoàng Văn Hiếu*, 9E, THCS Vĩnh Yên, TP Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.
15. *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.
16. *Lê Viết Lưu Thanh*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Kon Tum**.
17. *Phạm Tiến Duật*, 9A, THCS Bình Minh, Khoái Châu, **Hưng Yên**.
18. *Nguyễn Hoàng Huy*, 9A2, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, **Nam Định**.
19. *Nguyễn Ánh Triều*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
20. *Phan Đức Tiến*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
21. *Triệu Ninh Ngân*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**.
22. *Nguyễn Trọng Khiêm*, 10A1, THPT Quang Trung, Tây Sơn, **Bình Định**.
23. *Vũ Duy Mạnh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
24. *Bùi Huyền Trang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hà Tĩnh**.
25. *Cao Hữu Đạt*, 10A1, THPT Chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
26. *Lê Bảo Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**.
27. *Lê Minh Tuấn*, 10 T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

28. *Nguyễn Chí Lương*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**.
29. *Vương Hoài Thanh*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng**.
30. *Cao Đình Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa, **Đồng Nai**.
31. *Hồ Anh Tiến*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
32. *Lê Huy Cường*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.
33. *Nguyễn Tiến Tài*, 11 Toán, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
34. *Trần Bảo Trung*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
35. *Hoàng Thanh Việt*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
36. *Phạm Việt Anh*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu 1, **Nghệ An**.
37. *Nguyễn Minh Thông*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho, **Tiền Giang**.
38. *Nguyễn Trần Lê Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Ninh Thuận**.
39. *Nguyễn Triều Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**.
40. *Nguyễn Việt Anh*, 11Toán1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**.
41. *Ông Tùng Dương*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
42. *Trần Duy Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.
43. *Mai Tiến Luật*, 12Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**.
44. *Trần Bá Trung*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.
45. *Trần Hậu Mạnh Cường*, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

MÔN VẬT LÝ

☆ Giải Nhất (1 giải)

1. *Phạm Ngọc Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

☆ Giải Nhì (3 giải)

1. *Ngô Văn Khoa*, $11A_2$, THPT Bắc Đông Quan, Đông Hưng, **Thái Bình**.
2. *Nguyễn Đắc Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.
3. *Nguyễn Văn Hùng*, 12B, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước**.

☆ Giải Ba (6 giải)

1. *Trần Lê Huỳnh Đức*, 10 Lý, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**.
2. *Trần Bảo Trung*, $11T_1$, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
3. *Chu Minh Thông*, $11A_3$-K41, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
4. *Hồ Thanh Tùng*, 12C1, THPT Kim Liên, Nam Đàn, **Nghệ An**.
5. *Huỳnh Hữu Hạng*, 12A1, THPT Nguyễn Việt Hồng, Quận Ninh Kiều, **Cần Thơ**.
6. *Nguyễn Nam Khánh*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

☆ Giải Khuyến khích (7 giải)

1. *Vũ Hoàng Yến*, 11A7, Trường THPT Uông Bí, **Quảng Ninh**.
2. *Trần Hoàng Nhựt*, 11Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.
3. *Tô Đặng Xuân Hinh*, 11Anh 2, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.
4. *Phan Văn Khải*, 11A1, THPT Cửa Lò, **Nghệ An**.
5. *Nguyễn Mạnh Dân*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
6. *Lê Nguyễn Khánh Ly*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
7. *Phan Xuân Sang*, 12A1, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành, **Nghệ An**.

Các bạn đoạt giải nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại (04) 35121606 để nhận Giấy chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

GIỚI THIỆU VỀ KỲ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN HỌC HOA KỲ (AMC)

LÊ ANH VINH
(ĐHGD - ĐHQG Hà Nội)

Kỳ thi Học sinh giỏi Toán học Hoa Kỳ (American Mathematics Competitions - AMC) là kì thi có lịch sử lâu đời được tổ chức bởi Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ (Mathematical Association of America) từ năm 1950. Mục tiêu quan trọng nhất của kỳ thi AMC là tạo cơ hội cho các thí sinh được làm quen với những dạng toán có chiều sâu trong chương trình giáo dục phổ thông, với nhiều câu hỏi liên quan tới các ứng dụng toán học trong thực tế. Đề thi luôn hướng tới việc thúc đẩy khả năng tư duy và kĩ năng giải quyết vấn đề của học sinh. Từ cách tiếp cận đó, kì thi hướng tới việc thúc đẩy sự hứng thú, niềm đam mê và thái độ học tập tích cực của thí sinh không chỉ trong phạm vi môn Toán. Kì thi AMC được chia theo các khối lớp 8,10 và 12. Hàng năm có khoảng 350 000 thí sinh đến từ 6 000 trường trên toàn thế giới tham dự.

Trong số 350 000 thí sinh tham dự các kì thi AMC có khoảng 10000 thí sinh đạt đủ điều kiện để được mời tham dự vòng tiếp theo AIME. Các kì thi AMC và AIME được mở cho tất cả các thí sinh trên thế giới tham gia, tuy nhiên chỉ có các công dân Mỹ mới được tham gia vòng thi tiếp theo. Cụ thể, chỉ có khoảng 300 bạn đạt kết quả tốt nhất trong các kì thi AMC 12 và AIME được mời tham dự kì thi USAMO (United States of America Mathematical Olympiad). Từ đó, khoảng 30 bạn được mời tham dự Chương trình hè Toán học để chọn ra 6 bạn đại diện cho Hoa Kỳ tham dự kì thi Toán Quốc tế IMO.

Bắt đầu từ năm học 2015 -2016, Trung tâm Nghiên cứu và Ứng dụng Khoa học Giáo dục, Trường Đại học Giáo dục là đơn vị đại diện chính thức của Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ để tổ chức các kì thi AMC và AIME tại Việt Nam. Ban tổ chức hi vọng việc tiếp cận các kì thi quy mô quốc tế, sẽ giúp tăng cường tính cạnh tranh, khả năng hội nhập của học sinh Việt Nam với bạn bè quốc tế.

PROBLEMS ... (*Tiếp theo trang 17*)

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/461. Solve the equation

$$(x+1)(x+2)(x+3)=\frac{720}{(x+4)(x+5)(x+6)}.$$

Problem T7/461. Determine the number of solutions of each following equation

a) $\sin x=\frac{x}{1964}$; b) $\sin x=\log_{100}x$

Problem T8/461. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). The bisectors of the angles A, B, and C respectively intersects the circle at D, E, and F. Denote respectively by h_a, h_b, h_c, S the heights from A, B, C and the area of ABC. Prove that

$$AD.h_a+BE.h_b+CF.h_c\ge 4\sqrt{3}S.$$

Problem T9/461. Given real numbers a, b, c, d satisfying $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Find the maximum and minimum values of the expression

$$P=ab+ac+ad+bc+bd+3cd.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/461. Given $k\ge 1$ and positive numbers x and y. For any positive integer $n\ge 2$, show the following inequalities

$$\sqrt{xy}\le\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n+k\left[(x+y)^n-x^n-y^n\right]}{2+k(2^n-2)}}\le\frac{x+y}{2}.$$

Problem T11/461. A pair of positive integers is called a *good* pair if their quotient is either 2 or 3. What is the most number of good pairs we can get among 2015^{2016} arbitrary different positive integers?

Problem T12/461. Given a triangle ABC. Let E, F respectively be the perpendicular projections of B, C on AC, AB; and then let T be the perpendicular projection of A on EF. Denote the midpoints of BE and CF by M and N respectively. Suppose that TM, TN intersects AB, AC respectively at P, Q. Prove that EF goes through the midpoint of PQ.

Translated by ***NGUYEN PHU HOANG LAN***
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi

GIẢI ĐÁP:
MỘT BÀI TOÁN HAI ĐÁP ÁN

(Đề đăng trên TH&TT số 457, tháng 7 năm 2015)

Cách giải của bạn *Nam* sai, bạn *Bình* đúng.

Bạn *Nam* sai ở chỗ: Số cách chia 8 đội thành 2 bảng là $C_2^1.C_8^4$. Khi bạn *Nam* chọn $C_2^1.C_8^4$ cách, có nghĩa là bạn đã chọn trùng lặp các trường hợp vì khi lấy C_8^4 cách có nghĩa đã chọn tất cả các trường hợp phân biệt cần sắp xếp vào hai bảng *A*, *B*. Ví dụ: khi chọn C_8^4 thì có trường hợp bảng *A* có 4 đội *a*, *b*, *c*, *d*; bảng *B* có 4 đội *e*, *f*, *g*, *h* và cũng đã có trường hợp bảng *A* có 4 đội *e*, *f*, *g*, *h*; bảng *B* có 4 đội *a*, *b*, *c*, *d*. Như vậy không cần nhân thêm C_2^1.

Nhận xét: 1) Tuyên dương hai bạn sau đã phát hiện đúng sai lầm: **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Nghệ An:** *Hồ Thanh Tùng*, 12C1, THPT Kim Liên, Nam Đàn.

KIHIVI

CHỈ CÓ 3 TIẾP TUYẾN CHUNG !

Trong buổi ôn tập về đường tròn, Hình học lớp 10, thầy giáo ra bài toán: "*Viết PT tiếp tuyến chung của hai đường tròn*

$(C_1): x^2+y^2-4x-5=0,\ (C_2): x^2+y^2+8x-6y+16=0.$"

Lời giải của bạn *Yên* và bạn *Phong* như sau:

Lời giải của Yên. (C_1) có tâm $I_1(2;0)$ bán kính $R_1=3$; (C_2) tâm $I_2(-4;3)$, bán kính là $R_2=3$. Gọi tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) là $\Delta: ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$. Khi đó $\begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1\\ d(I_2,\Delta)=R_2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\\ \dfrac{|-4a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2+4ac+c^2=9a^2+9b^2\\ |-4a+3b+c|=|2a+c|\end{cases}$$

* TH1: $\begin{cases} 4a^2+4ac+c^2=9a^2+9b^2\\ -4a+3b+c=2a+c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41a^2-4ac-c^2=0\\ b=2a\end{cases}.$

Chọn $b=2$ thì $a=1$ và $c^2+4c-41=0$ $\Leftrightarrow c=-2\pm 3\sqrt{5}$. Ta được hai tiếp tuyến chung là $x+2y-2\pm 3\sqrt{5}=0$.

* TH2: $\begin{cases} 4a^2+4ac+c^2=9a^2+9b^2\\ -4a+3b+c=-2a-c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4ac+c^2=5a^2+9b^2\\ 3b=2a-2c\end{cases}.$

Chọn $b=4$ thì

$$\begin{cases} 4ac+c^2=5a^2+144\\ a=6+c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(6+c)c+c^2=5(6+c)^2+144\\ a=6+c\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36c+324=0\\ a=6+c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-9\\ a=-3\end{cases}.$$

Ta được tiếp tuyến chung

$-3x+4y-9=0 \Leftrightarrow 3x-4y+9=0.$

Vậy có 3 tiếp tuyến chung giữa (C_1) và (C_2) là

$$x+2y-2\pm 3\sqrt{5}=0,\ 3x-4y+9=0.$$

Lời giải của Phong. (C_1) có tâm $I_1(2;0)$ bán kính $R_1=3$; (C_2) tâm $I_2(-4;3)$, bán kính là $R_2=3$. Gọi tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2) là $\Delta: y=kx+m$ $\Leftrightarrow kx-y+m=0$. Khi đó $\begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1\\ d(I_2,\Delta)=R_2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2k+m|}{\sqrt{k^2+1}}=3\\ \dfrac{|-4k-3+m|}{\sqrt{k^2+1}}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k^2+4km+m^2=9k^2+9\\ |2k+m|=|-4k-3+m|\end{cases}.$$

* TH1: $\begin{cases} 4k^2+4km+m^2=9k^2+9\\ 2k+m=-4k-3+m\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-8m-41=0\\ k=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{2\pm 3\sqrt{5}}{2}\\ k=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Ta được hai tiếp tuyến chung là

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2\pm 3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x+2y-2\pm 3\sqrt{5}=0.$

* TH2: $\begin{cases} 4k^2+4km+m^2=9k^2+9\\ 2k+m=4k+3-m\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36k-27=0\\ 2m=2k+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{9}{4}\\ k=\dfrac{3}{4}\end{cases}.$$

Ta được tiếp tuyến chung là:

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4} \Leftrightarrow 3x-4y+9=0.$$

Vậy có 3 tiếp tuyến chung giữa (C_1) và (C_2) là

$$x+2y-2\pm 3\sqrt{5}=0,\ 3x-4y+9=0.$$

Bạn *Yên* và bạn *Phong* rất tin tưởng vào kết quả của mình, vì thấy đáp số giống nhau.

Bạn có đồng ý với các kết quả này không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 461 (11.2015)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1: Hội đồng Sư phạm Trường THCS Lê Quý Đôn, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội.

TỔ TOÁN - LÝ - CÔNG NGHỆ - TIN HỌC - TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN CẦU GIẤY, THÀNH PHỐ HÀ NỘI

20 NĂM XÂY DỰNG VÀ TRƯỞNG THÀNH

Cô giáo **Đàm Thu Hương**
Bí thư chi bộ - Hiệu trưởng nhà trường

Tổ Toán - Lý - Công nghệ - Tin học - Trường THCS Lê Quý Đôn

Tổ Toán – Lý – Công Nghệ – Tin học Trường THCS Lê Quý Đôn khởi đầu chính là tổ Toán Trường THCS chuyên Từ Liêm được thành lập từ năm 1995, sau đó là tổ Toán – Lý – Công nghệ Trường THCS chuyên của Quận Cầu Giấy rồi sau này là Trường THCS Lê Quý Đôn.

Nhiều năm liên tục tổ được công nhận là tổ lao động giỏi xuất sắc. Các giáo viên trong tổ có tinh thần trách nhiệm cao, không ngừng học hỏi, nâng cao trình độ chuyên môn. Đổi mới sinh hoạt tổ nhóm, xây dựng các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi, phổ biến sáng kiến kinh nghiệm, ... là các biện pháp nhằm nâng cao trình độ chuyên môn của giáo viên và chất lượng bộ môn. Nhiều đồng chí trong tổ nhiều năm liền đạt các danh hiệu *Chiến sĩ thi đua* cấp cơ sở, *Giáo viên dạy giỏi* cấp Quận và Thành phố; nhiều đồng chí cũng đã được tặng *Bằng khen* của Thành phố, của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, Thủ tướng Chính phủ, được tặng *Huân chương Lao động* của Chủ tịch nước, như các đồng chí *Hoàng Ngọc Đan, Nguyễn Thị Minh Châu, Vũ Ngọc Liên, Hàn Thu Thủy, Phạm Thúy Quỳnh*,... Đặc biệt hai đồng chí *Hoàng Ngọc Đan* và *Nguyễn Thị Minh Châu* đã vinh dự được nhận danh hiệu *Nhà giáo Ưu tú*. Các giáo viên trẻ cũng rất nỗ lực tự học hỏi nâng cao trình độ chuyên môn như: *Đỗ Thị Minh Anh, Nguyễn Cao Thắng, Nguyễn Thị Thanh Huyền, Nguyễn Quỳnh Anh, Dương Văn Sự*,...

Trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi tổ đã đạt được nhiều thành tích rất đáng tự hào. Học sinh của trường đã tích cực tham gia và đạt được nhiều thành tích cao trong các cuộc thi cấp quận, thành phố, quốc gia, khu vực và quốc tế. Năm 2012, trong kỳ thi Toán Châu Á Thái Bình Dương trường đạt 28 giải trong đó em *Nguyễn Nam Anh* đạt giải Bạch kim. Kỳ thi Toán Hà Nội mở rộng trường đạt 57 giải trong đó có 13 giải Nhất. Trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia nhiều học sinh đạt giải Nhất, Nhì, Ba như các em: *Nguyễn Hữu Quỳnh, Phan Hồng Thu, Đặng Giáng Hương, Nguyễn Đình Quang Minh, Nguyễn Nam Anh, Nguyễn Thành Vinh, Vương Hoàng Long*, ... Trong 20 năm qua, đã có khoảng 1000 học sinh đạt giải trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp trong các môn Toán, Lý, Tin học. Hàng năm trong kỳ thi vào lớp 10 THPT, có hơn 80 % học sinh trong hệ thống lớp *H, I* thi đỗ vào các trường chuyên ĐHSP Hà Nội; chuyên KHTN-ĐHQG Hà Nội; chuyên Hà Nội-Amterdam, chuyên Chu Văn An,... nhiều học sinh đạt danh hiệu Thủ khoa, Á khoa trong các kỳ thi này.

Nhiều thế hệ học sinh cũ của nhà trường vẫn tiếp tục phát huy thành tích học tập cao trong các trường chuyên THPT, nhiều em đã đạt huy chương Vàng, Bạc, Đồng... trong các kỳ thi học sinh giỏi Olympic Toán và Tin học Quốc gia, Quốc tế như em *Nguyễn Trọng Cảnh, Đậu Hải Đăng* (Huy chương Vàng Olympic Toán Quốc tế), *Trần Thanh Hoài* (Huy chương Bạc, Đồng Olympic Tin học Quốc tế), *Nguyễn Nguyên Hùng* (Huy chương Đồng Olympic Toán Quốc tế),...

Thời gian 20 năm chưa phải là nhiều nhưng cũng đủ để nói lên thương hiệu của Trường THCS Lê Quý Đôn nói chung và tổ Toán-Lý- Tin - Công nghệ nói riêng. Các giáo viên trong tổ luôn hiểu rằng mình còn phải phấn đấu rất nhiều để giữ gìn và phát huy truyền thống nhà trường, xứng đáng với sự tín nhiệm, tin yêu của các cấp lãnh đạo, của phụ huynh và học sinh trên địa bàn quận Cầu Giấy. Chúng tôi luôn tự hào và tin tưởng Tổ Toán – Lý – Công Nghệ – Tin học trường THCS Lê Quý Đôn mãi sẽ là nơi ươm mầm tài năng cho đất nước!

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT11M5
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2015
Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng