TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
7 2015
Số 457

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

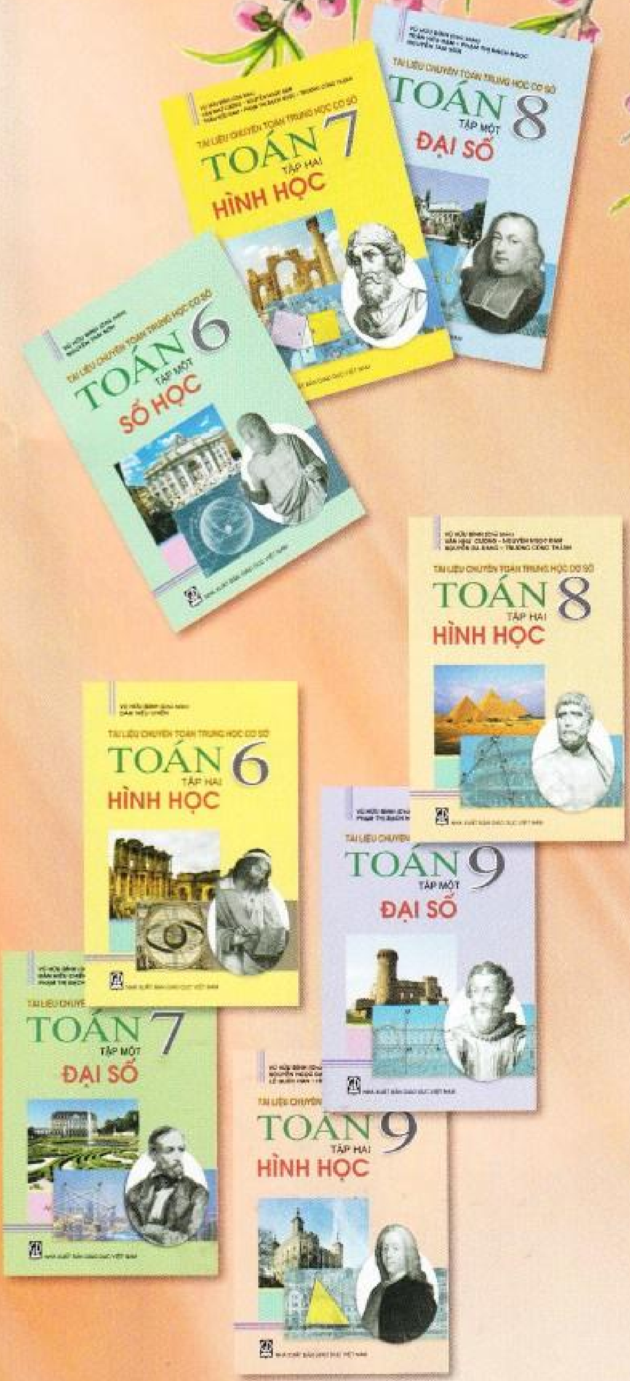
Bộ sách TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS

Bộ sách **"Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở"** có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là *Đại số* (ở lớp 6, tập một là *Số học*), tập hai là *Hình học*. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

Mỗi cuốn đều có hai phần: phần *Các chuyên đề cơ bản* (viết theo từng chương của SGK) và phần *Một số chuyên đề nâng cao*. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lí thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh hoạ và sau đó là các bài tập đề nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập trình bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá kĩ lưỡng, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những bài thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Olympic Toán, ... Bằng việc đọc, giải những ví dụ và bài tập này, HS sẽ được mở rộng, đào sâu những kiến thức đã học, qua đó được rèn luyện khả năng tư duy Toán học. Cuối sách sẽ là phần *Hướng dẫn giải* cho các bài tập được đưa ra ở cuối mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việ Nam, chẳng hạn như: NGND. *Vũ Hữu Bình* (chủ biên), NGUT *Nguyễn Tam Sơn*, nhà giáo *Đàm Hiếu Chiến*, PGS.TS. *Văn Như Cương*, PGS.TS *Đàm Văn Nhỉ*, TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc*, PGS.TS. *Lê Quốc Hán*, TS. *Trần Hữu Nam*, ...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, và góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.



Bạn đọc có thể đặt mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

HÃY ĐẶT MUA TC TH&TT TẠI CƠ SỞ BƯU ĐIỆN GẦN NHẤT !

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT DẤU HIỆU CHIA HẾT CHO 7

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5...a_n} \vdots 7$

NGUYỄN VĂN HIẾU
(GV THCS Vinh Hưng, Phú Lộc, Thừa Thiên Huế)

Môn toán ở chương trình giáo dục phổ thông hiện hành của nước ta chỉ đề cập đến dấu hiệu các số chia hết cho 2; 3; 5 và 9. Ngoài ra, trong quá trình tìm tòi, học hỏi, chúng ta còn được biết đến các dấu hiệu chia hết khác như dấu hiệu chia hết cho 4; 6; 8; 11; … Trên một số diễn đàn toán học cũng có đăng một vài kết quả khi xét dấu hiệu chia hết cho 7. Với niềm đam mê toán học, tôi đã tìm tòi và xin trình bày một dấu hiệu chia hết cho 7 nhờ các bộ số được sắp theo thứ tự mà tôi sẽ đặt tên trong phần trình bày dưới đây.

I. Nhận xét mở đầu

Xét các số có dạng 10^k với $k = 1, 2, 3$ … và mỗi số này khi chia cho 7 có các kết quả sau:

$10 = 7.1 + 3$
$10^2 = 7.14 + 2$
$10^3 = 7.142 + 6$
$10^4 = 7.1428 + 4$
$10^5 = 7.14285 + 5$
$10^6 = 7.142857 + 1$
$10^7 = 7.1428571 + 3$
$10^8 = 7.14285714 + 2$
$10^9 = 7.142857142 + 6$
$10^{10} = 7.1428571428 + 4$
$10^{11} = 7.14285714285 + 5$

Như vậy, với các số từ 10^1 đến 10^6 khi chia cho 7 thì số dư lần lượt theo thứ tự là: 3; 2; 6; 4; 5; 1. Điều thú vị là các số tiếp theo từ 10^7 đến 10^{12} khi chia cho 7 cũng lặp lại các số dư theo bộ số (3; 2; 6; 4; 5; 1). Điều này dẫn đến các dự đoán phải chăng có sự lặp lại thú vị nào đó về số dư? Các bộ số này liên quan gì đến "dấu hiệu chia hết cho 7"?

II. Nhận xét tổng quát

Khi chia các số có dạng 10^k và 10^{k+6} (với $k = 1; 2; 3; 4; \ldots$) cho 7 thì chúng có cùng số dư.

Chứng minh:

Dễ thấy 10^k không chia hết cho 7 ($10^k = 2^k.5^k$). Giả sử chia 10^k cho 7 được thương số là q và số dư là r: $10^k = 7q + r$ (1) ($q, r \in \mathbb{N}^*$ và $0 < r < 7$). Ta cần chứng minh khi chia 10^{k+6} cho 7 cũng được số dư là r. Thật vậy, từ (1) kết hợp với nhận xét mở đầu ta có: $10^{k+6} = 10^k.10^6$
$= (7q + r)(7.142857 + 1) = 7X + r$ ($X \in \mathbb{N}^*$).

III. Quy ước cách gọi tên

1) Các bộ số sắp thứ tự: (1; 3; 2; –1; –3; –2), (1; 3; 2; –1; –3; –2; 1), (1; 3; 2; –1; –3; –2; 1; 3), (1; 3; 2; –1; –3; –2; 1; 3; 2)… được gọi là các "bộ số tuần hoàn" tương ứng với các số $\overline{abcdef}$, $\overline{abcdefg}$, $\overline{abcdefgh}$, $\overline{abcdefghi}$, …

2) Không mất tính tổng quát, xét số tự nhiên $\overline{abcdef}$, khi đó nếu tổng $1.f + 3.e + 2.d - 1.c - 3.b - 2.a$ chia hết cho 7 thì ta nói "các chữ số của số $\overline{abcdef}$ thỏa mãn *bộ số tuần hoàn* tương ứng".

IV. Dấu hiệu chia hết cho 7

1) *Trước hết ta tìm điều kiện cần và đủ để số có 6 chữ số dạng $\overline{abcdef}$ chia hết cho 7.*

Đặt $A = \overline{abcdef} = a(7.14285 + 5) + b(7.1428 + 4) + c(7.142 + 6) + d(7.14 + 2) + e(7.1 + 3) + f = 7(14285a + 1428b + 142c + 14d + e) + 5a + 4b + 6c + 2d + 3e + f = 7(14285a + 1428b + 142c + 14d + e) + 7(a + b + c) - 2a - 3b - c + 2d + 3e + f$. Như vậy A chia hết cho 7 khi và chỉ khi tổng $R = -2a - 3b - c + 2d + 3e + f$ chia hết cho 7 (2).

Sắp xếp lại các hệ số –2; –3; –1; 2; 3; 1 có mặt trong tổng trên theo bộ (1; 3; 2; –1; –3; –2) với thứ tự: hệ số 1 ứng với chữ số hàng đơn vị f, hệ số 3 ứng với chữ số hàng chục e, hệ số 2 ứng với chữ số hàng trăm d, hệ số –1 ứng với chữ số hàng nghìn c, hệ số –3 ứng với chữ số hàng chục nghìn b, hệ số –2 ứng với chữ số hàng trăm nghìn a. Từ (2) suy ra "*Số tự nhiên có 6 chữ số* $A = \overline{abcdef}$ *chia hết cho 7 khi và chỉ khi* $f + 3e + 2d - c - 3b - 2a$ *chia hết cho 7*". (3)

Với quy ước cách gọi tên như trên, lúc này (3) diễn đạt như sau:

"Số tự nhiên có 6 chữ số $\overline{abcdef}$ *chia hết cho 7 khi và chỉ khi các chữ số của nó thỏa mãn bộ số tuần hoàn tương ứng* (1; 3; 2; –1; –3; –2)".

Chú ý rằng, trong chứng minh trên các chữ số a, b, c, d, e, f có thể đồng thời bằng 0 hoặc không đồng thời bằng 0 thì khi đó (3) vẫn đúng.

Thí dụ 1. Không dùng phép chia, xét xem số 3780 có chia hết cho 7 hay không?

Ta có: $1.0 + 3.8 + 2.7 - 1.3 = 24 + 14 - 3 = 35$ chia hết cho 7, suy ra 3780 chia hết cho 7.

Thí dụ 2. Số 120476 có tính chất: $1.6 + 3.7 + 2.4 - 1.0 - 3.2 - 2.1 = 27$ không chia hết cho 7 nên số 120476 không chia hết cho 7.

Thí dụ 3. Tìm giá trị của chữ số x để số $\overline{70x026}$ chia hết cho 7.

Xét tổng: $1.6 + 3.2 + 2.0 - 1x - 3.0 - 2.7 = -2 - x$, số $\overline{70x026}$ chia hết cho 7 $\Leftrightarrow -2 - x$ chia hết cho 7 $\Leftrightarrow x = 5$.

2) *Bây giờ ta xét điều kiện cần và đủ để các số có nhiều hơn 6 chữ số chia hết cho 7.* Từ nhận xét mở đầu ta thấy có sự lặp lại về số dư khi chia các số có dạng 10^k cho 7, do đó không làm mất tính tổng quát ta xét số có 7 chữ số có dạng $\overline{abcdefg}$. Do $\overline{abcdefg} = a.10^6 + \overline{bcdefg}$, để ý cách phân tích 10^6 như ở mục *Nhận xét mở đầu* và kết quả chứng minh trên cho số $\overline{bcdefg}$ ta có $\overline{abcdefg}$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi số $1.g + 3f + 2e - 1d - 3c - 2b + 1.a$ chia hết cho 7. Ta thấy xuất hiện *bộ số tuần hoàn*: (1; 3; 2; –1; –3; –2; 1).

Chứng minh tương tự như trên ta có *bộ số tuần hoàn* tổng quát sau: (1; 3; 2; –1; –3; –2; 1; 3 ; 2; –1; –3; –2; ...).

3) Dấu hiệu chia hết cho 7

Số tự nhiên $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5...a_n}$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi các chữ số của nó thỏa mãn "bộ số tuần hoàn" có n số tương ứng:

(1; 3; 2; –1; –3; –2; 1; 3 ; 2; –1; –3; –2; 1; ...).

Thí dụ 4. Số 10197824 có chia hết cho 7 hay không? Ta có:

$1.4 + 3.2 + 2.8 - 1.7 - 3.9 - 2.1 + 1.0 + 3.1$
$= 4 + 6 + 16 - 7 - 27 - 2 + 0 + 3 = -7$.

Vậy số 10197824 chia hết cho 7.

V. Áp dụng

Với dấu hiệu nhận biết một số chia hết cho 7 nói trên, ta có thể kiểm chứng được các kết quả sau:

1) Các số có 6 chữ số, 12 chữ số, 18 chữ số, ... giống nhau thì chia hết cho 7. Như 111111; 222222222222; 999999999999999999; ...

2) Các số dạng $\overline{abcabc}$; $\overline{abcabcabcabc}$; $\overline{abcabcabcabcabcabc}$; ...đều chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN Trường THPT chuyên LÊ QUÝ ĐÔN - TỈNH NINH THUẬN NĂM HỌC 2014 - 2015

(Đề thi đăng trên TH&TT số 456, tháng 6 năm 2015)

Bài 1. a) PT có hai nghiệm phân biệt

$$1-\sqrt{2\sqrt{2}-2} \text{ và } 1+\sqrt{2\sqrt{2}-2}.$$

b) Theo định lý Viète, ta có

$$x_1+x_2=2,\ x_1x_2=(m-1)^2,$$

nên $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4-4(m-1)^2\le 4,$

suy ra $|x_2-x_1|\le 2$.

Bài 2. Ta có $D=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow Dx^2-4x+D-3=0 \quad (1)$$

+ Nếu $D=0$ thì $x=\dfrac{-3}{4}$.

+ Nếu $D\neq 0$ thì (1) phải có nghiệm x, vì thế

$\Delta=16-4D(D-3)\ge 0$

$\Leftrightarrow -4D^2+12D+16\ge 0 \Leftrightarrow (2D-3)^2\le 25$

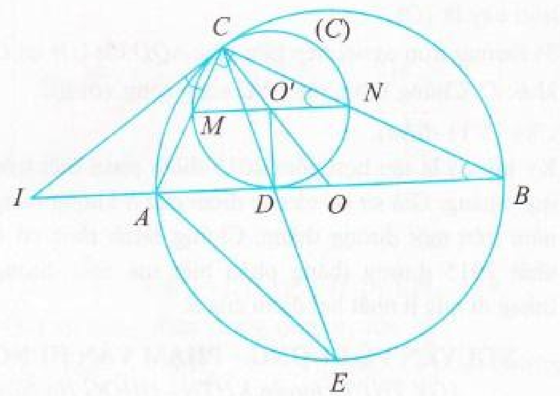
$\Leftrightarrow -5\le 2D-3\le 5 \Leftrightarrow -1\le D\le 4.$

Khi $D=-1$, (1) có nghiệm kép $x=\dfrac{2}{D}=-2.$

Khi $D=4$, (1) có nghiệm kép $x=\dfrac{2}{D}=\dfrac{1}{2}.$

Vậy $\max D=4$ khi $x=\dfrac{1}{2}$, $\min D=-1$ khi $x=-2$.

Bài 3.



a) Do $\widehat{MCN}=90°$ nên MN là đường kính của (C), kéo theo O' là trung điểm của MN.

Kẻ tiếp tuyến tại C của (O), cắt AB kéo dài tại I. Vì (O), (C) tiếp xúc nhau nên IC cũng là tiếp tuyến tại C của (C), suy ra $\widehat{CNM}=\widehat{ICM}$;

$\widehat{ICM}=\widehat{CBA}\Rightarrow \widehat{CNM}=\widehat{CBA}\Rightarrow MN\,//\,AB.$

b) Ta có $O'D\perp AB$ nên $O'D\perp MN$. Do đó $\overset{\frown}{MD}=\overset{\frown}{ND}$ hay CD là tia phân giác của $\widehat{ACB}$. Kéo dài CD cắt (O) tại điểm thứ hai E. Suy ra E là trung điểm của $\overset{\frown}{AB}$ (không chứa C), E cố định. Vậy CD luôn đi qua điểm E cố định.

c) Ta có $\widehat{EAD}=\widehat{ACD}$ (chắn hai cung $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$).

Xét đường tròn ngoại tiếp ΔACD, $\widehat{ACD}$ chắn $\overset{\frown}{AD}$, tia AE nằm ngoài ΔACD, suy ra AE tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔACD tại A.

Bài 4. Gọi $d=\text{ƯCLN}(n^2+4, n+5)$.

Do $n^2+4=(n+5)(n-5)+29$

nên $d=\text{ƯCLN}(n+5, 29)$. Ta có p là phân số chưa tối giản

$\Leftrightarrow d>1 \Leftrightarrow n+5\,\vdots\,29$ (vì 29 là số nguyên tố)

$\Leftrightarrow n=29k-5\ (k\in\mathbb{Z}).$

Theo giả thiết $1\le n\le 2015$

$\Leftrightarrow 1\le 29k-5\le 2015 \Leftrightarrow \dfrac{6}{29}\le k\le\dfrac{2020}{29}.$

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=1, 2, 3, ..., 69.$

Vậy $n=29k-5$ với $k=1, 2, 3, ..., 69.$

CAO TRẦN TỨ HẢI *(Ninh Thuận)*

Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐHQG HÀ NỘI NĂM HỌC 2014 - 2015

VÒNG 1 (120 *phút*)

Câu I (3 *điểm*). 1) Giả sử a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2+3a=b^2+3b=2$.

a) Chứng minh rằng $a+b=-3$

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3=-45$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+3y=5xy\\4x^2+y^2=5xy^2\end{cases}$.

Câu II (3 *điểm*). 1) Tìm các số nguyên x, y không nhỏ hơn 2 sao cho $xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$.

2) Với x, y là những số thực thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2+2y+1=0$, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy}{3y+1}$.

Câu III (3 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC không cân có tâm đường tròn nội tiếp là điểm I. Đường thẳng AI cắt BC tại D. Gọi E,F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC,IB.

1) Chứng minh rằng EF song song với BC.

2) Gọi M,N,J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DE,DF,EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN tại P khác A. Chứng minh rằng bốn điểm M,P,N,J cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh rằng ba điểm A,J,P thẳng hàng.

Câu IV (1 *điểm*). 1) Cho bảng ô vuông 2015×2015. Kí hiệu ô (i,j) là ô ở hàng thứ i, cột thứ j. Ta viết các số nguyên dương từ 1 đến 2015 vào các ô của bảng theo quy tắc sau:

i) Số 1 được viết vào ô $(1,1)$,

ii) Nếu số k được viết vào ô (i,j), với $i>1$, thì số $k+1$ được viết vào ô $(i-1,j+1)$,

iii) Nếu số k được viết vào ô $(1,j)$ thì số $k+1$ được viết vào ô $(j+1,1)$. (Xem hình 1)

1	3	6	10	...
2	5	9	...	
4	8	...		
7	...			
...				

Hình 1

Khi đó, số 2015 được viết vào ô (m,n). Hãy xác định m và n.

2) Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc\le4$. Chứng minh rằng
$$a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge2(ab+bc+ca).$$

VÒNG 2 (150 *phút*)

Câu I (3 *điểm*). 1) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $(3a+3b+3c)^3$
$$=24+(3a+b-c)^3+(3b+c-a)^3+(3c+a-b)^3.$$
Chứng minh rằng $(a+2b)(b+2c)(c+2a)=1$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases}2x+2y+xy=5\\27(x+y)+y^3+7=26x^3+27x^2+9x.\end{cases}$$

Câu II (3 *điểm*). 1) Tìm số tự nhiên n để $n+5$ và $n+30$ đều là số chính phương (số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên).

2) Tìm x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức
$$1+\sqrt{x+y+3}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

3) Giả sử x, y, z là những số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}.$$

Câu III (3 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC không cân với $AB<AC$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đoạn thẳng AM. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN=2MH$.

1) Chứng minh rằng $BN=AC$.

2) Gọi Q là điểm đối xứng với A qua N. Đường thẳng AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng bốn điểm B, D, N, C cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (O).

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD cắt (O) tại G khác D. Chứng minh rằng NG song song với BC.

Câu IV (1 *điểm*).

Ký hiệu S là tập hợp gồm 2015 điểm phân biệt trên mặt phẳng. Giả sử tất cả các điểm của S không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng có ít nhất 2015 đường thẳng phân biệt mà mỗi đường thẳng đi qua ít nhất hai điểm của S.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG – PHẠM VĂN HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội)

Giới thiệu

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 9

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Ta có $y'=3mx^2-6mx$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.(\forall m\neq 0)$.

Do y' đổi dấu khi qua $x=0$ và $x=2$ nên đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.

• Với $x=0$ thì $y=3(m-1)$; với $x=2$ thì $y=-m-3$.

Do vai trò của A và B như nhau, không mất tổng quát giả sử $A(0;\ 3m-3), B(2;\ -m-3)$.

Ta có $2AB^2-(OA^2+OB^2)=98$

$\Leftrightarrow 9(m-1)^2+4+(m+3)^2-2(4+16m^2)=-98$

$\Leftrightarrow 11m^2+6m-56=0 \Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=-\dfrac{28}{11}$.

Câu 2. a) $T=4030$.

b) Đặt $z=a+bi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=a-bi$. Ta có

$|iz-3|=|z-2-i|\Leftrightarrow|-b-3+ai|=|a-2+(b-1)i|$

$\Rightarrow a=-2b-1\Rightarrow z=(-2b-1)+bi$.

Ta có $|z|=\sqrt{5\left(b+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}}\geq\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $b=-\dfrac{2}{5}$.

Từ đó số phức cần tìm là $z=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$.

Câu 3. PT đã cho $\Leftrightarrow \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\cos x$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

Từ đó suy ra nghiệm của PT đã cho là

$$x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Câu 4. PT thứ hai của hệ tương đương với

$$(2x-1)^3=(x-y)^3\Rightarrow y=1-x.$$

Thay $y=1-x$ vào PT thứ nhất của hệ được

$$25x+9\sqrt{9x^2-4}=\frac{2}{x}+\frac{18x}{x^2+1}\qquad(1)$$

Giải (1). ĐK: $|x|\geq\dfrac{2}{3}$.

• Với $x\geq\dfrac{2}{3}$, PT (1) tương đương với

$$25+\frac{9\sqrt{9x^2-4}}{x}=\frac{2}{x^2}+\frac{18}{x^2+1}\qquad(2)$$

Ta có $\begin{cases}\text{VT(2)}>25\left(\text{do } x\geq\dfrac{2}{3}\right)\\ \text{VP(2)}\leq\dfrac{9}{2}+\dfrac{162}{13}<25\end{cases}$ nên PT (2) vô nghiệm, suy ra PT (1) vô nghiệm.

• Với $x\leq-\dfrac{2}{3}$, PT (1) tương đương với

$$25-9\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}=\frac{2}{x^2}+\frac{18}{x^2+1}\qquad(3)$$

Đặt $\dfrac{1}{x^2}=t\ \left(0<t\leq\dfrac{9}{4}\right)$, PT (3) trở thành

$$9\left(1-\sqrt{9-4t}\right)=2t+\frac{18t}{1+t}-16$$

$$\Leftrightarrow\frac{36(t-2)}{1+\sqrt{9-4t}}=\frac{2(t-2)(t+4)}{1+t}$$

$$\Leftrightarrow(t-2)\left(\frac{18}{1+\sqrt{9-4t}}-\frac{t+4}{1+t}\right)=0\qquad(4)$$

Với $0<t\leq\dfrac{9}{4}$ có $\dfrac{18}{1+\sqrt{9-4t}}>\dfrac{18}{4}$ và

$\dfrac{t+4}{1+t}=1+\dfrac{3}{1+t}<4<\dfrac{18}{4}$ nên $\dfrac{18}{1+\sqrt{9-4t}}-\dfrac{t+4}{1+t}>0$.

Do đó $(4)\Leftrightarrow t=2$. Suy ra $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$. Từ đó HPT đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Câu 5. Ta có $I=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x-2)e^x dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}}$.

• Tính $I_1=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x-2)e^x dx$. Đặt $\begin{cases}u=x-2\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$.

$$\Rightarrow I_1=(x-2)e^x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}e^x dx$$

$$=\left(-2+\frac{5}{2\sqrt{e}}\right)-e^x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}=-3+\frac{7}{2\sqrt{e}}.$$

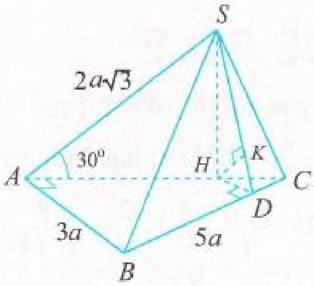
• Tính $I_2=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}}$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$, từ đó $I_2=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{3}}dt=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$.

Vậy $I=-3+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7}{\sqrt{e}}+\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$.

Câu 6. • Kẻ $SH\perp AC\ (H\in AC)$.

Do $(SAC)\perp(ABC)$ nên $SH\perp(ABC)$.



Ta có $SH = SA.\sin\widehat{SAC} = 2a\sqrt{3}.\frac{1}{2} = a\sqrt{3}.$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{6}AB.AC.SH$

$= \frac{1}{6}\cdot 3a.4a.a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}.$

• Kẻ $HD \perp BC$ $(D \in BC)$, $HK \perp SD$ $(K \in SD)$.

Khi đó $HK = d(H;(SBC))$. Vì $AH = SA.\cos\widehat{SAC}$

$= 2a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3a$, nên $AC = 4HC$

$\Rightarrow d(A;(SBC)) = 4d(H;(SBC)) = 4HK.$

Ta có $\frac{HD}{HC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow HD = \frac{3a}{5}\cdot$

Từ đó $d(A;(SBC)) = 4HK$

$$= \frac{4SH.HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{4a\sqrt{3}.\frac{3a}{5}}{\sqrt{3a^2 + \frac{9a^2}{25}}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 7. Đường tròn (C) có tâm $I(2;\ 2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$, $A \in (\Delta) \Rightarrow A(a\,; -a-1)$.

Đặt $IA = x$ $(x > 0)$, $\widehat{BAC} = 2\alpha$ thì $\sin\alpha = \frac{IB}{IA} = \frac{\sqrt{5}}{x}$,

$\cos\alpha = \frac{AB}{IA} = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}$ (với $x > \sqrt{5}$).

Ta có $S_{ABC} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin 2\alpha = 8$

$\Leftrightarrow AB.AC\sin\alpha.\cos\alpha = 8$. Suy ra

$\frac{(x^2-5)\sqrt{5(x^2-5)}}{x^2} = 8 \Rightarrow 5(x^2-5)^3 = 64x^4$

$\Leftrightarrow 5x^6 - 139x^4 + 375x^2 - 625 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-25)(5x^4 - 14x^2 + 25) = 0 \Rightarrow x = \pm 5.$

Đối chiếu với ĐK $x > \sqrt{5}$ ta chọn $x = 5$.

Từ đó $IA = 5 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (-a-3)^2 = 25$

$\Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ hoặc $a = -3$.

Với $a = 2$ thì $A(2;\ -3)$; với $a = -3$ thì $A(-3;\ 2)$.

Câu 8. • Mặt cầu (S) có tâm $I(1;\ -3;\ -2)$ và bán kính $R = 6$. Vì $d(I,(\alpha)) = 4 < R$ suy ra đpcm.

• Gọi H và r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến, ta thấy H là hình chiếu vuông góc của I trên (α). Ta có

$IH = d(I,(\alpha)) = 4,\ r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 2\sqrt{5}.$

Tọa độ điểm H là nghiệm của HPT

$$\begin{cases} x = 1 + 2t;\ y = -3 - 2t;\ z = -2 - t \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = -\frac{4}{3} \Rightarrow H\left(-\frac{5}{3};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right).$

Câu 9. Số hạng không chứa x là

$C_{12}^4(-1)^4 2^4 = 7920.$

Câu 10. • Đặt $M = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}}$

Ta có

$M \ge \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x + \frac{2}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2y + \frac{2}{y}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

(Theo BĐT Bunyakovsky)

$\ge \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(4\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} - 3\sqrt{xy}\right)$

$\ge \frac{4}{\sqrt{5}}\left(2\sqrt{4\sqrt{xy}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}} - \frac{3}{2}\right) = 2\sqrt{5}$ (do giả thiết).

Suy ra $M \ge 2\sqrt{5}$ (1)

• Đặt $N = \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1}\cdot$ Ta có

$$N = \frac{x}{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}} + \frac{y}{\left(y^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}}$$

$$\le \frac{x}{x + \frac{3}{4}} + \frac{y}{y + \frac{3}{4}} = \frac{4x}{4x+3} + \frac{4y}{4y+3}$$

Hơn nữa: $\frac{4x}{4x+3} + \frac{4y}{4y+3} = 2 - 3\left(\frac{1}{4x+3} + \frac{1}{4y+3}\right)$

$\le 2 - 3\frac{4}{4x+4y+6} \le 2 - 3\cdot\frac{4}{10} = \frac{4}{5}\cdot$ Do đó

$-N \ge -\frac{4}{5}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $P \ge 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}\cdot$

Khi $x = y = \frac{1}{2}$ thì $P = 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}\cdot$ Vậy

$$\min P = 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}\cdot$$

PHẠM TRỌNG THƯ
(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

DIỄN ĐÀN

DẠY HỌC TOÁN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

LÊ QUỐC HÁN
(GV Khoa Toán - ĐH Vinh, Nghệ An)

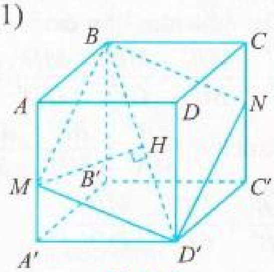
Khi giải các bài toán cực trị trong hình học không gian, ta thường gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của số đo một góc, độ dài một đoạn thẳng, diện tích của một hình phẳng, thể tích các khối đa diện hay khối tròn xoay. Tạp chí TH&TT đã giới thiệu một số phương pháp giải lớp toán này dựa vào *công cụ tọa độ*. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số phương pháp chủ yếu sử dụng *công cụ hình học thuần túy,* có thể kết hợp với *công cụ đại số* hay *công cụ vectơ*.

1. Phương pháp sử dụng thuần túy các định lý hình học

Các định lý quen thuộc thường được sử dụng là: đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên, mỗi cạnh tam giác nhỏ hơn tổng hai cạnh còn lại và lớn hơn hiệu của chúng, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn thẳng ngắn nhất trong các đoạn thẳng có hai đầu mút nằm trên hai đường thẳng ấy, …

✪Thí dụ 1. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và một điểm M chuyển động trên cạnh AA'. Mặt phẳng (BMD') cắt CC' tại N. Tìm vị trí điểm M để diện tích thiết diện $BMD'N$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Vì $(ABB'A')//(DCC'D')$ nên $BM//D'N$. Tương tự, $MD'//BN$. Vậy tứ giác $BMD'N$ là hình bình hành. Kẻ $MH \perp BD'$ thì

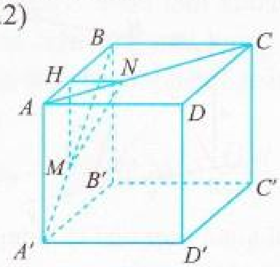
$$S_{BMD'N} = 2.S_{BMD'} = 2.\frac{1}{2}.BD'.MH = BD'.MH$$

Vậy $S_{BMD'N}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MH đạt giá trị nhỏ nhất, nghĩa là khi và chỉ khi MH là đường vuông góc chung của AA' và BD' (hay M là trung điểm của AA' và H là trung điểm của BD').

Chú ý. Ở đây, điểm M phải nằm trên *đoạn thẳng* AA' và N phải nằm trên *đoạn thẳng* CC'. Lời giải trên thỏa mãn cả hai điều kiện ấy. Tuy nhiên không phải bao giờ ta cũng gặp *may mắn* ấy. Trong một số bài toán, các chân đường vuông góc chung của hai đoạn thẳng lại nằm trên các đoạn thẳng ấy *kéo dài*. Trong một số bài toán khác, các điểm chuyển động lại phải thỏa mãn thêm một số *điều kiện bổ sung,* nên đoạn thẳng ngắn nhất chưa hẳn là đường vuông góc chung. Khi đó ta phải sử dụng kỹ thuật khác. Thí dụ sau đây minh họa cho nhận xét đó.

✪Thí dụ 2. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và hai điểm M, N lần lượt chuyển động trên các đường chéo $A'B$ và AC sao cho $A'M = AN$. Tìm vị trí của M, N để độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Cuối lời giải, ta sẽ thấy rằng khi độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất, MN không phải là đường vuông góc chung của $A'B$ và AC (ở đây, điều kiện ràng buộc là $A'M = AN$). Ký hiệu cạnh hình lập phương đã cho là a, $A'M = AN = x$ thì $0 \le x \le a\sqrt{2}, MB = NC = a\sqrt{2} - x$. Trên AB lấy điểm H sao cho $MH // AA'$ thì $\frac{AH}{HB} = \frac{A'M}{MB} = \frac{AN}{NC}$ nên theo định lý Thales đảo $HN // BC$.

Từ đó tam giác MHN vuông tại H. Vì các tam giác AHN và BHM vuông cân tại H nên $HN=\frac{AN}{\sqrt{2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $HM=\frac{BM}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$. Vậy

$$MN^2=MH^2+NH^2=\frac{x^2+\left(a\sqrt{2}-x\right)^2}{2}=x^2-a\sqrt{2}x+a^2.$$

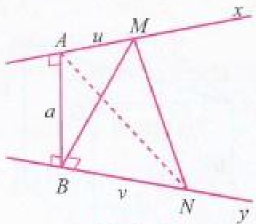
MN đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=\frac{a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow M,N$ tương ứng là trung điểm của $A'B, AC$. Khi đó $MN=BM=BN=\frac{a}{\sqrt{2}}$ nên BMN là tam giác đều, do đó góc giữa MN và $A'B$ bằng 60°. Tương tự, góc giữa MN và AC cũng bằng 60°.

2. Phương pháp thiết lập hệ thức xác định

Trong nhiều bài toán, để tìm cực trị của độ dài một đoạn thẳng, diện tích của một hình phẳng hay thể tích của một khối đa diện, trước hết ta phải thiết lập một số hệ thức liên quan đến các biến chứa trong các biểu thức biểu diễn các đại lượng nói trên. Sau đó dùng các BĐT quen thuộc (Cauchy, Bunyakovsky …) để tìm cực trị của các biểu thức trên.

✪**Thí dụ 3.** *Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau có $AB = a$ là đường vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt chuyển động trên Ax, By sao cho $MN = b$ (với b là độ dài cho trước). Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABMN$.*

Lời giải.



Hình 3

Đặt $AM = u$, $BN = v$. Vì $BN \perp AB$, $BN \perp AM$ theo giả thiết, nên $BN \perp (ABM)$,

Do đó $BN \perp BM$, nên $V_{ABMN}=V_{N.ABM}=\frac{1}{3}.S_{ABM}.BN$ $=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AM.AB.BN=\frac{1}{6}.auv$ (h.3).

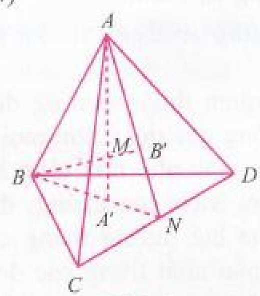
Theo định lý Pythagore có $BM^2=AB^2+AM^2=MN^2-BN^2$ suy ra $AM^2+BN^2=MN^2-AB^2=b^2-a^2$. Từ đó $u^2+v^2=b^2-a^2$ (không đổi) nên uv lớn nhất (nghĩa là V_{ABMN} lớn nhất) $\Leftrightarrow u=v=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$ theo BĐT Cauchy. Vậy $\max V_{ABMN}=\frac{a\left(b^2-a^2\right)}{12}$, đạt được $\Leftrightarrow AM=BN=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$.

✪**Thí dụ 4.** *Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm M chuyển động trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt $(BCD), (ADC), (ABD), (ABC)$ tại A', B', C', D' tương ứng.*

a) Xác định vị trí điểm M để biểu thức $P=\frac{AM}{MA'}+\frac{BM}{MB'}+\frac{CM}{MC'}+\frac{DM}{MD'}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Xác định vị trí điểm M để biểu thức $T=\sqrt{\frac{AM}{MA'}}+\sqrt{\frac{BM}{MB'}}+\sqrt{\frac{CM}{MC'}}+\sqrt{\frac{DM}{MD'}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. (h.4)



Hình 4

a) Từ $\frac{MA'}{AA'}=\frac{V_{M.BCD}}{V_{A.BCD}}$; $\frac{MB'}{BB'}=\frac{V_{M.ACD}}{V_{B.ACD}}$; $\frac{MC'}{CC'}=\frac{V_{M.ABD}}{V_{C.ABD}}$; $\frac{MD'}{DD'}=\frac{V_{M.ABC}}{V_{D.ABC}}$ và

$V_{M.BCD}+V_{M.ACD}+V_{M.ABD}+V_{M.ABC}=V_{ABCD}$, suy ra

$$\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}+\frac{MD'}{DD'}=1.$$

Theo BĐT Cauchy, $\frac{AA'}{MA'}+\frac{BB'}{MB'}+\frac{CC'}{MC'}+\frac{DD'}{MD'}$

$$=\left(\frac{MA'}{AA'}+\frac{MB'}{BB'}+\frac{MC'}{CC'}+\frac{MD'}{DD'}\right)\left(\frac{AA'}{MA'}+\frac{BB'}{MB'}+\frac{CC'}{MC'}+\frac{DD'}{MD'}\right)\geq 16.$$

Từ đó $\frac{AM}{MA'}+\frac{BM}{MB'}+\frac{CM}{MC'}+\frac{DM}{MD'}$

$$=\frac{AA'}{MA'}+\frac{BB'}{MB'}+\frac{CC'}{MC'}+\frac{DD'}{MD'}-4\geq 12.$$

Do đó $\min P = 12$, đạt được khi và chỉ khi

$\frac{MA'}{AA'}=\frac{MB'}{BB'}=\frac{MC'}{CC'}=\frac{MD'}{DD'}=\frac{1}{4}$, hay M là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

b) Đặt $V_{MBCD}=a^2, V_{MACD}=b^2, V_{MABD}=c^2$, $V_{MABC}=d^2$. Thế thì $\frac{AA'}{MA'}=\frac{V_{ABCD}}{V_{MBCD}}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a^2}$.

Do đó $\frac{AM}{MA'}=\frac{b^2+c^2+d^2}{a^2}$. Tương tự $\frac{BM}{MB'}=\frac{a^2+c^2+d^2}{b^2}$; $\frac{CM}{MC'}=\frac{a^2+b^2+d^2}{c^2}$. $\frac{DM}{MD'}=\frac{b^2+c^2+a^2}{d^2}$. Mặt khác do $3\left(b^2+c^2+d^2\right)\geq\left(b+c+d\right)^2$ nên nhận được $\sqrt{\frac{AM}{MA'}}=\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{a}\geq\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{b+c+d}{a}$ và ba BĐT tương tự. Từ đó

$$T\geq\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}\right)$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{3}}.12=4\sqrt{3}\ \left(\text{vì } \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2, \forall x,y>0\right).$$

Vậy $\min T=4\sqrt{3}$, đạt được khi và chỉ khi

$$a^2=b^2=c^2=d^2$$

$$\Leftrightarrow V_{M.BCD}=V_{M.ACD}=V_{M.ABD}=V_{M.ABC}\left(=\frac{1}{4}V_{ABCD}\right)$$

$\Leftrightarrow \frac{MA'}{AA'}=\frac{MB'}{BB'}=\frac{MC'}{CC'}=\frac{MD'}{DD'}=\frac{1}{4}$, hay M là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ (Bạn đọc hãy chứng minh chi tiết nhận xét này).

Chú ý. Một số bài toán cực trị hình học gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi hay Vô địch toán, nhiều khi phải tự xây dựng *Một lý thuyết mới* (so với hiểu biết thông thường) mới giải được chúng.

✪Thí dụ 5. *Cho tứ diện $ABCD$. Tìm các điểm X,Y,Z,T thuộc các mặt phẳng (BCD), (CDA), $(DAB),(ABC)$ sao cho tổng sau đây đạt giá trị nhỏ nhất $XY^2+XZ^2+XT^2+YZ^2+YT^2+ZT^2$.*

Lời giải. Để giải bài toán này, cần đưa vào các khái niệm và kết quả sau

Định nghĩa. Cho tứ diện $ABCD$, M là trung điểm cạnh CD. Mặt phẳng (MAB) được gọi là *mặt trung diện* xuất phát từ cạnh AB của tứ diện. Một tứ diện có sáu mặt trung diện. Dễ thấy sáu mặt trung diện của tứ diện đồng quy tại trọng tâm của tứ diện.

Định nghĩa. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $(\alpha),(\beta)$ tương ứng là mặt phân giác và mặt trung diện xuất phát từ cạnh AB của tứ diện. Gọi (γ) là ảnh của (β) qua phép đối xứng mặt (α). Khi đó (γ) được gọi là *mặt đối trung* xuất phát từ cạnh AB của tứ diện.

Một tứ diện có sáu mặt đối trung. Người ta đã chứng minh được rằng sáu mặt đối trung của tứ diện đồng quy tại một điểm. Điểm này được gọi là *điểm đối trọng tâm* của tứ diện.

Định lý. Cho tứ diện $ABCD$ và M là một điểm nằm trong tứ diện. Gọi H,I,J,K tương ứng là hình chiếu của M xuống các mặt phẳng (BCD), (CDA), $(DAB),(ABC)$. Khi đó các điều kiện sau tương đương:

i) M là điểm đối trọng tâm của tứ diện $ABCD$;

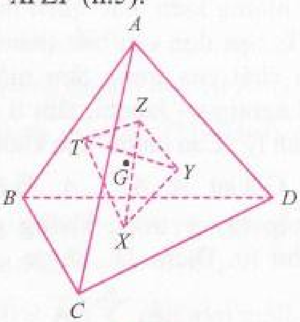
ii) $\frac{V_{MBCD}}{S_A^2}=\frac{V_{MACD}}{S_B^2}=\frac{V_{MABD}}{S_C^2}=\frac{V_{MABC}}{S_D^2}$;

iii) M là trọng tâm của tứ diện $HIJK$.

Ở đây S_A,S_B,S_C,S_D là kí hiệu diện tích các mặt $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ của tứ diện $ABCD$.

(Bạn đọc hãy chứng minh kết quả này).

Bây giờ ta trở lại Thí dụ 5. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $XYZT$ (h.5).



Hình 5

Khi đó $GX.S_A+GY.S_B+GZ.S_C+GT.S_D\geq 3V_{ABCD}$.

Theo BĐT Bunyakovsky, có

$$\left(GX^2+GY^2+GZ^2+GT^2\right)\left(S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2\right)\geq 9V_{ABCD}^2.$$

Chú ý rằng, vì G là trọng tâm của tứ diện $XYZT$ nên $XY^2+XZ^2+XT^2+YZ^2+YT^2+ZT^2$ $=4\left(GX^2+GY^2+GZ^2+GT^2\right)$. Từ đó

$$XY^2+XZ^2+XT^2+YZ^2+YT^2+ZT^2\geq\frac{36V_{ABCD}^2}{S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow G$ nằm trong tứ diện $ABCD$ sao cho GX, GY, GZ, GT tương ứng vuông góc với các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC)

và $\dfrac{GX}{S_A}=\dfrac{GY}{S_B}=\dfrac{GZ}{S_C}=\dfrac{GT}{S_D} \Leftrightarrow G$ nằm trong tứ diện $ABCD$ sao cho GX, GY, GZ, GT tương ứng vuông góc với các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) và $\dfrac{V_{GBCD}}{S_A^2}=\dfrac{V_{GCDA}}{S_B^2}=\dfrac{V_{GDAB}}{S_C^2}=\dfrac{V_{GABC}}{S_D^2}$

$\Leftrightarrow GX, GY, GZ, GT$ tương ứng vuông góc với các mặt phẳng $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ và G là điểm đối trọng tâm của tứ diện $ABCD \Leftrightarrow X,Y,Z,T$ tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm đối trọng tâm của tứ diện $ABCD$ lên các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC)(*). Vậy tổng

$XY^2+XZ^2+XT^2+YZ^2+YT^2+ZT^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi X,Y,Z,T thỏa mãn (*) và giá trị nhỏ nhất đó bằng $\dfrac{36V_{ABCD}^2}{S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2}$.

3. Phương pháp vectơ

Một số bài toán cực trị hình học được giải gọn hơn nếu ta biết sử dụng công cụ vectơ thích hợp. Ngoài những kiến thức quen thuộc đã học ở bậc THPT, bạn đọc cần biết thêm khái niệm và các tính chất của trọng tâm một hệ điểm, công thức Lagrange - Jacobi, tâm tỉ cự của một hệ điểm, Định lý "Con nhím" cho khối tứ diện…

Định nghĩa. Giả sử $A_1, A_2, ..., A_m$ là một hệ m điểm sắp xếp tùy ý trong không gian không phân biệt thứ tự. Điểm G được gọi là *trọng tâm* của hệ điểm trên nếu $\sum_{i=1}^{m}\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$.

Dễ thấy trọng tâm của một hệ điểm luôn tồn tại và duy nhất. Hơn nữa nếu G là trọng tâm của hệ điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ thì với mọi điểm M trong không gian, có $\overrightarrow{MG}=\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overrightarrow{MA_i}$.

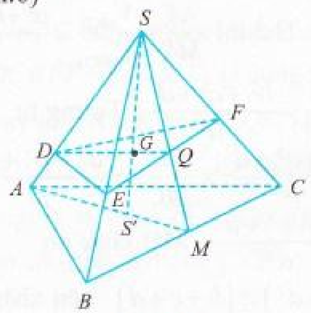
Định lý (Công thức Lagrange – Jacobi). Giả sử G là trọng tâm của hệ điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ và M là một điểm tùy ý trong không gian. Thế thì

$$MG^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}MA_i^2-\frac{1}{m^2}\sum_{1\le i<j\le m}A_iA_j^2.$$

✪Thí dụ 6. *Cho tứ diện $SABC$ với $SA=SB=SC=1$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt SA, SB, SC tương ứng tại D, E, F. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SF.SD}.$$

Lời giải. (h.6)



Hình 6

Vì G là trọng tâm của tứ diện $SABC$ nên đường thẳng SG đi qua trọng tâm S' của tam giác ABC và có hệ thức

$$\overrightarrow{SG}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{SS'}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right).$$

Từ đó $4\overrightarrow{SG}=\dfrac{SA}{SD}.\overrightarrow{SD}+\dfrac{SB}{SE}.\overrightarrow{SE}+\dfrac{SC}{SF}.\overrightarrow{SF}$.

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{SG}=\frac{1}{SD}\overrightarrow{SD}+\frac{1}{SE}\overrightarrow{SE}+\frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}.$$

Lại vì bốn điểm D,E,F,G đồng phẳng nên

$$\frac{1}{4SD}+\frac{1}{4SE}+\frac{1}{4SF}=1.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{1}{SD.SE}+\dfrac{1}{SE.SF}+\dfrac{1}{SF.SD}$ $\le\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{SD}+\dfrac{1}{SE}+\dfrac{1}{SF}\right)^2=\dfrac{16}{3}$. Do đó $\min P=\dfrac{16}{3}$, đạt được khi và chỉ khi $SD=SE=SF=\dfrac{3}{4}$, nghĩa là khi và chỉ khi mặt phẳng (DEF) đi qua G và song song với mặt phẳng (ABC).

✪Thí dụ 7. *Cho tứ diện $SABC$ với $SA=a$, $SB=b, SC=c$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt SA, SB, SC tương ứng tại D, E, F. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{SD^2}+\dfrac{1}{SE^2}+\dfrac{1}{SF^2}$.*

Lời giải. (h.6) Lập luận tương tự thí dụ 6 nhận được hệ thức $\dfrac{SA}{SD}+\dfrac{SB}{SE}+\dfrac{SC}{SF}=4$ hay $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=4$ trong đó $x=SD, y=SE, z=SF$, $0\le x\le a$, $0\le y\le b, 0\le z\le c$ (1). Theo BĐT Bunyakovsky,

$$16=\left(a.\frac{1}{x}+b.\frac{1}{y}+c.\frac{1}{z}\right)^2\le(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$$

Từ đó $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{16}{a^2+b^2+c^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a:b:c=\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=4$, nghĩa là khi và chỉ khi

$$x=\frac{a^2+b^2+c^2}{4a}, y=\frac{a^2+b^2+c^2}{4b}, z=\frac{a^2+b^2+c^2}{4c} \quad (2)$$

thỏa mãn điều kiện (1). Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{SE^2}+\frac{1}{SF^2}$ là $\frac{16}{a^2+b^2+c^2}$, đạt được $\Leftrightarrow x,y,z$ xác định bởi (2).

BÀI TẬP

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm M,N chuyển động trên AB và DD' sao cho $AM=DN$.

a) Chứng minh các đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Xác định vị trí của M,N để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

2. Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm M chuyển động trong tứ diện. Các đường thẳng AM,BM,CM,DM cắt các mặt đối diện của tứ diện lần lượt tại A',B',C',D'. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\left(\frac{MA}{AA'}\right)^2+\left(\frac{MB}{BB'}\right)^2+\left(\frac{MC}{CC'}\right)^2+\left(\frac{MD}{DD'}\right)^2.$$

3. Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm M chuyển động trong mặt (BCD). Xác định vị trí M để tổng các bình phương khoảng cách từ M đến ba mặt còn lại đạt giá trị nhỏ nhất.

4. Cho hai đường thẳng Ax,By chéo nhau có $AB=a$ là đường vuông góc chung. Hai điểm M,N chuyển động trên Ax,By tương ứng sao cho $AM+BN=MN$.

a) Chứng minh thể tích của tứ diện $ABMN$ không đổi.

b) Xác định vị trí M,N để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

c) Xác định vị trí M,N để diện tích toàn phần của tứ diện $ABMN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Trong không gian cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ và mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z-3=0$ cắt nhau tại A. Trên d lấy một điểm B cố định sao cho $AB=a$. Xét tỷ số $\frac{AM+AB}{BM}$ với M chuyển động trên (α). Chứng minh rằng tồn tại một vị trí M sao cho tỷ số đó đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất ấy.

6*. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tìm các điểm X,Y,Z,T thuộc các mặt phẳng $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ sao cho tổng độ dài các cạnh của tứ diện $XYZT$ đạt giá trị nhỏ nhất.

7*. Cho tứ diện $ABCD$ sao cho các cạnh AB,BC,CA đều nhỏ hơn các cạnh DA,DB,DC. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của PD, trong đó điểm P thỏa mãn điều kiện

$$PD^2=PA^2+PB^2+PC^2.$$

8*. Cho tứ diện $ABCD$ vuông ở D. Gọi α,β,γ tương ứng là góc giữa đường cao DH với các cạnh DA,DB,DC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+y}{z^2}+\frac{y+z}{x^2}+\frac{z+x}{y^2}$ trong đó $x=\cos\alpha, y=\cos\beta, z=\cos\gamma$.

9*. Xét các tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ cùng ngoại tiếp một mặt cầu cho trước. Mỗi tiếp diện của mặt cầu, song song với một mặt của tứ diện này, cắt ra khỏi tứ diện đó một tứ diện nhỏ. Gọi $v_i\,(i=1,2,34)$ là thể tích của khối tứ diện nhỏ có đỉnh A_i và V là thể tích của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{V}$ và xác định những tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ như thế.

10*. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy một điểm Q nằm trong tứ diện. Gọi Q' là điểm đối xứng với qua mặt phẳng (BCD). Qua Q' dựng mặt phẳng song song với mặt phẳng (BCD), mặt phẳng này cắt các đường thẳng AB,AC,AD tương ứng tại A_1,B_1,C_1 tạo thành hình chóp cụt $BCDB_1C_1D_1$. Bằng cách lấy điểm đối xứng với qua một mặt còn lại của tứ diện rồi dựng các mặt phẳng song song tương tự như trên, ta được ba hình chóp cụt nữa.

Hãy xác định vị trí điểm để tổng các thể tích của bốn chóp cụt tạo thành đạt giá trị nhỏ nhất.

DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU CHỈNH SỐ MŨ

NGUYỄN VĂN NHO
(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT) có sự đánh giá thay đổi số mũ của các lũy thừa thường làm cho học sinh lúng túng. Bài viết giới thiệu cho bạn đọc phương pháp sử dụng BĐT Cauchy để điều chỉnh số mũ của các lũy thừa trong chứng minh BĐT hoặc tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN).

I. PHƯƠNG PHÁP

Để đánh giá từ lũy thừa x^{α} sang lũy thừa x^{β} (với x là số thực dương), ta thường làm như sau:

- Xác định điểm rơi của BĐT;
- Dựa vào điểm rơi, đưa vào phần tử phụ (phần tử phụ thường là hằng số hoặc tổng quát là biểu thức có dạng x^{γ}), dựa vào BĐT Cauchy chúng ta thiết lập đánh giá sau:

$$mx^{\alpha}+nx^{\gamma}\ge (m+n).\sqrt[m+n]{x^{m\alpha}.x^{n\gamma}}$$
$$=(m+n)x^{\frac{m\alpha+n\gamma}{m+n}} \qquad (*)$$

(với m, n là các số nguyên dương). Từ (*) để có đánh giá từ x^{α} sang x^{β} ta cần chọn các số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m\alpha+n\gamma}{m+n}=\beta$.

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Giả sử x, y, z, t, s là các số thực dương thay đổi thỏa mãn:*

$$x^7+y^7+z^7+t^7+s^7\le 5.$$

Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=x^6+y^6+z^6+t^6+s^6.$$

Phân tích. Để sử dụng được giả thiết, ta phải thiết lập đánh giá từ x^7 sang x^6, nghĩa là giảm số mũ, ta chọn phần tử phụ là hằng số, dựa vào điểm rơi $x=y=z=t=s=1$, nên ta chọn phần tử đó là 1, khi đó với m, n là các số nguyên dương thì theo BĐT Cauchy ta có:

$$mx^7+n=\underbrace{x^7+x^7+\ldots+x^7}_{m\text{ số hạng}}+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{ số hạng}}$$
$$\ge (m+n)\sqrt[m+n]{x^{7m}}=(m+n)x^{\frac{7m}{m+n}}.$$

Để có x^6 ta chọn $\dfrac{7m}{m+n}=6\Leftrightarrow m=6n$, từ đó chọn $m=6$, $n=1$.

Lời giải. Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$x^7+x^7+x^7+x^7+x^7+x^7+1\ge 7\sqrt[7]{x^{42}}=7x^6.$$

Suy ra $6x^7+1\ge 7x^6$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^7=1\Leftrightarrow x=1$.

Tương tự, ta có: $6y^7+1\ge 7y^6$, $6z^7+1\ge 7z^6$
$6t^7+1\ge 7t^6$, $6s^7+1\ge 7s^6$.

Cộng các BĐT cùng chiều ở trên, ta được:

$$6(x^7+y^7+z^7+t^7+s^7)+5$$
$$\ge 7(x^6+y^6+z^6+t^6+s^6).$$

Mặt khác, theo giả thiết thì

$$x^7+y^7+z^7+t^7+s^7\le 5.$$

Từ hai BĐT trên ta suy ra $P \le 5$. Dễ thấy khi $x = y = z = t = s = 1$ thì $x^7 + y^7 + z^7 + t^7 + s^7 = 5$ và $P = 5$. Vậy $\max P = 5$.

Thí dụ 2. *Cho ba số thực dương thay đổi a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm GTLN của biểu thức:*

$$P = 5(a+b+c) - 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Phân tích. Từ giả thiết ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Để đánh giá cận trên của *P*, ta cần đánh giá từ a^4 sang *a*, dựa vào điểm rơi $a = b = c = 1$, ta cần đưa vào phần tử phụ là $\frac{1}{a}$. Khi đó với *m*, *n* là các số nguyên dương thì theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{m}{a} + na^4 \ge (m+n).\sqrt[(m+n)]{\frac{1}{a^m}.a^{4n}}$$
$$= (m+n)a^{\frac{4n-m}{m+n}}.$$

Để có *a* ta cần chọn *m*, *n* sao cho:

$\frac{4n - m}{m+n} = 1 \Leftrightarrow 3n = 2m$, từ đó chọn $m = 3, n = 2$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ (*).

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{3}{a} + 2a^4 = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + a^4 + a^4 \ge 5\sqrt[5]{\frac{1}{a^3}.a^8} = 5a.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{a} = a^4 \Leftrightarrow a = 1$.

Tương tự, ta có:

$$\frac{3}{b} + 2b^4 \ge 5b,\ \frac{3}{c} + 2c^4 \ge 5c.$$

Cộng ba BĐT cùng chiều ở trên, ta được:

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 2(a^4 + b^4 + c^4) \ge 5(a+b+c).$$

Kết hợp với hệ thức (*) suy ra $P \le 9$.

Khi $a = b = c = 1$ thì $ab + bc + ca = 3abc$ và $P = 9$. Vậy $\max P = 9$.

Thí dụ 3. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a+c}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{3}{2}} \ge \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Phân tích. Ta cần đánh giá từ $\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}}$ sang $\frac{a}{b+c}$, dựa vào điểm rơi $a = b = c$ khi đó $\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, từ đó ta chọn phần tử phụ là $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, khi đó với *m*, *n* là các số nguyên dương thì theo BĐT Cauchy ta thấy:

$$m\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}} + n\frac{1}{2\sqrt{2}} \ge (m+n).\sqrt[m+n]{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3m}{2}}}$$
$$= (m+n).\sqrt[m+n]{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n}.\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3m}{2(m+n)}}.$$

Ta cần chọn $\frac{3m}{2(m+n)} = 1 \Leftrightarrow m = 2n$, nên chọn $n = 1, m = 2$.

Lời giải. Theo BĐT Cauchy, ta có

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a}{b+c}\right)^3}$$

Suy ra: $2\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ge \frac{3a}{\sqrt{2}(b+c)}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2}.$$

Tương tự, ta có:

$$2\left(\frac{b}{a+c}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\geq\frac{3b}{\sqrt{2(a+c)}}$$

$$2\left(\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\geq\frac{3c}{\sqrt{2(a+b)}}.$$

Cộng các BĐT cùng chiều ở trên, ta được:

$$2\left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a+c}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{3}{2\sqrt{2}}$$
$$\geq\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Mặt khác, theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)$$
$$+(c+a)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

Từ hai BĐT ở trên suy ra:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a+c}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{3}{2}}\geq\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

BĐT đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{b}{a+c}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{c}{a+b}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$$

Thí dụ 4. *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$2\sqrt{x+y+z}+\sqrt{3}\geq\sqrt{3}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}).$$

Phân tích. Trước tiên ta cần chứng minh BĐT:

$$2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})+3\geq3(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}).$$

Ta cần đánh giá từ $\sqrt{x}$ sang $\sqrt[3]{x}$, nghĩa là ta cần đánh giá từ $x^{\frac{1}{2}}$ sang $x^{\frac{1}{3}}$, tức là đánh giá giảm số mũ, dựa vào điểm rơi $x=y=z=1$, ta đưa vào phần tử phụ là 1, khi đó với *m*, *n* là các số nguyên dương thì theo BĐT Cauchy, ta có:

$$mx^{\frac{1}{2}}+n.1\geq(m+n)\sqrt[m+n]{x^{\frac{m}{2}}}=(m+n)x^{\frac{m}{2(m+n)}}.$$

Để có $x^{\frac{1}{3}}$ ta chọn $\dfrac{m}{2(m+n)}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow m=2n$, từ đó chọn $m=2,\ n=1$.

Lời giải. Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x}+1\geq3\sqrt[3]{x}\Rightarrow2\sqrt{x}+1\geq3\sqrt[3]{x}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1.$$

Tương tự, ta có:

$$2\sqrt{y}+1\geq3\sqrt[3]{y};\ 2\sqrt{z}+1\geq3\sqrt[3]{z}.$$

Cộng các BĐT cùng chiều ở trên, ta được:

$$2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})+3\geq3(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}).$$

Mặt khác, cũng theo BĐT Cauchy ta có:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=x+y+z+2\sqrt{xy}$$
$$+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}\leq3(x+y+z).$$

Suy ra $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\sqrt{3(x+y+z)}.$

Kết hợp hai BĐT ở trên, ta được:

$$2\sqrt{x+y+z}+\sqrt{3}\geq\sqrt{3}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}),$$

BĐT đã cho được chứng minh. Đẳng thức trong BĐT đã cho xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Thí dụ 5. *Cho n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ thay đổi, thỏa mãn: $2^{\frac{x_1}{2}} + 2^{\frac{x_2}{2}} + ... + 2^{\frac{x_n}{2}} \geq n$, với n là số nguyên dương cho trước, và luôn thỏa mãn điều kiện $n \geq 2$. Tìm GTNN của biểu thức:*

$$P = 8^{x_1} + 8^{x_2} + ... + 8^{x_n}.$$

Lời giải. Theo BĐT Cauchy ta có:

$$8^{x_1} + 5 = 8^{x_1} + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \geq 6.\sqrt[6]{8^{x_1}}.$$

Suy ra $8^{x_1} + 5 \geq 6.2^{\frac{x_1}{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $8^{x_1} = 1$ hay $x_1 = 0$.

Tương tự, ta có:

$$8^{x_2} + 5 \geq 6.2^{\frac{x_2}{2}},$$

$$8^{x_3} + 5 \geq 6.2^{\frac{x_3}{2}},$$

....

$$8^{x_n} + 5 \geq 6.2^{\frac{x_n}{2}}.$$

Cộng n BĐT cùng chiều ở trên, ta có:

$$8^{x_1} + 8^{x_2} + ... + 8^{x_n} + 5n \geq 6(2^{\frac{x_1}{2}} + 2^{\frac{x_2}{2}} + ... + 2^{\frac{x_n}{2}}) \geq 6n.$$

Suy ra $P \geq n$. Dễ thấy khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ thì $2^{\frac{x_1}{2}} + 2^{\frac{x_2}{2}} + ... + 2^{\frac{x_n}{2}} = n$ và $P = n$. Vậy $\min P = n$.

Kết luận. Từ bài viết chúng ta rút ra một kinh nghiệm cho việc học toán đó là thường xuyên tìm cách để biến đổi vấn đề, biến đổi các tình huống của các bài toán. Từ đó sẽ góp phần cho chúng ta giải quyết được nhiều bài toán khó từ các bài toán cơ bản. Để thành thạo với phương pháp trên các em thử bắt tay vào giải các bài toán sau.

BÀI TẬP

1. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^{10} + y^{10} + z^{10} \leq 3072$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = x^8 + y^8 + z^8.$$

2. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^5 + b^5 + c^5 = 729$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$Q = \frac{a^6}{bc} + \frac{b^6}{ca} + \frac{c^6}{ab}.$$

3. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \geq 2$. Chứng minh rằng $a^{\frac{7}{8}} + b^{\frac{7}{8}} \geq 2$.

4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}} = 3$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$E = a^{\frac{2}{7}} + b^{\frac{2}{7}} + c^{\frac{2}{7}}.$$

5. Cho các số thực dương a, b, c.
Chứng minh rằng:

$$\frac{2(a^5 + b^5 + c^5 + a^2 + b^2 + c^2)}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 5.$$

6. Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn $x^{2000} + y^{2000} + z^{2000} \geq 3$. Tìm GTNN của biểu thức: $A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$.

7. Cho các số thực dương a, b, c.
Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{2b+3c}\right)^{\frac{5}{4}} + \left(\frac{b}{2c+3a}\right)^{\frac{5}{4}} + \left(\frac{c}{2a+3b}\right)^{\frac{5}{4}} \geq \frac{3}{5\sqrt[4]{5}}.$$

8. Với a, b, c, d, e là các số thực dương thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P = \left(\frac{4a}{b+c+d+e}\right)^{\frac{10}{9}} + \left(\frac{4b}{c+d+e+a}\right)^{\frac{10}{9}} + \left(\frac{4c}{d+e+a+b}\right)^{\frac{10}{9}} + \left(\frac{4d}{e+a+b+c}\right)^{\frac{10}{9}} + \left(\frac{4e}{a+b+c+d}\right)^{\frac{10}{9}}.$$

CÁC LỚP THCS

Bài T1/457 (Lớp 6). Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2.2^2+3.2^3+4.2^4+...+n.2^n=2^{n+34}$.

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Bài T2/457 (Lớp 7). Tìm các số nguyên a, b, c để có $|a-b|+|b-c|+|c-a|=2014^a+2015^a$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

Bài T3/457. Cho $f(x)$ là đa thức có hệ số nguyên và $f(1) = 2$. Chứng minh rằng $f(7)$ không thể là số chính phương.

NGUYỄN ĐÌNH SƠN
(GV THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ, Quảng Nam)

Bài T4/457. Cho tam giác nhọn ABC với các đường cao AH, BK. Gọi M là trung điểm của AB. Đường thẳng CM cắt HK tại D. Kẻ AL vuông góc với BD tại L. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm C, K, L tiếp xúc với đường thẳng BC.

LÊ VIẾT ÂN (*Thừa Thiên – Huế*)

Bài T5/457. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x^3+2x+(y-1)\sqrt{1-3y}=0 \\ 9x^2+y^2+\sqrt{5-6x}=6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

LƯƠNG CAO VINH
(GV THPT Cộng Hiền, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/457. Cho $f(x)$ là đa thức bậc ba với hệ số cao nhất là 2 và thỏa mãn:

$$f(2014)=2015, \quad f(2015)=2016.$$

Tính $f(2016)-f(2013)$.

LÂM QUỐC TOÀN
(GV THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Sóc Trăng)

Bài T7/457. Ký hiệu S_{tp}, V theo thứ tự là diện tích toàn phần và thể tích của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\left(\frac{1}{6}S_{tp}\right)^3 \geq \sqrt{3}V^2$.

LỤC BÌNH
(GV Trường Trung Vương, Đông Hà, Quảng Trị)

Bài T8/457. Cho đa giác lồi n cạnh $(n \geq 4)$ $A_1A_2...A_n$. Chứng minh rằng

$$n+\sin A_1+\sin A_2+...+\sin A_n$$
$$\leq 2\left(\cos\frac{A_1-A_2}{4}+\cos\frac{A_2-A_3}{4}+...+\cos\frac{A_n-A_1}{4}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/457. Tìm tất cả các bộ ba $(x; y; p)$ gồm hai số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x-y^p=1$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho, Tiền Giang)

Bài T10/457. Cho k là số thực lớn hơn 1. Xét dãy số: $x_1=\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}$; $x_2=\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}}$; ...;

$$x_n=\underbrace{\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+...+\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}}}}}_{n \text{ dấu căn bậc hai}}.$$

Chứng minh $\{x_n\}$ là dãy hội tụ và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

PHẠM HÙNG (*Hà Nội*)

Bài T11/457. Với mỗi số n nguyên dương, đặt $\psi(n)=\sum\limits_{d|n} d^2$.

1) Chứng minh rằng $\psi(n)$ là hàm nhân tính, nghĩa là: $\psi(ab)=\psi(a).\psi(b)$ nếu $(a,b)=1$.

2) Cho l là số nguyên dương lẻ. Chứng minh rằng : $\psi(n)=\psi(n+l)$ chỉ xảy ra tại hữu hạn số nguyên dương n.

NGUYỄN DƯ THÁI
(Lớp Toán K25, ĐHKH Huế)

Bài T12/457. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại T. Gọi M là trung điểm của BC; D là điểm chính giữa cung BC không chứa điểm A; AM cắt lại (O) tại E; AT cắt cạnh BC tại F; J là trung điểm của đoạn IF. Chứng minh rằng $\widehat{AEI} = \widehat{ADJ}$.

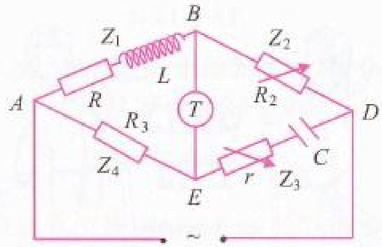
HỒ QUANG VINH (*Hà Nội*)

Bài L1/457. Để đo điện trở R và độ tự cảm L của cuộn dây, ta dùng cầu xoay chiều nối vào nguồn điện xoay chiều có tần số góc ω (Hình vẽ). C là một tụ điện có điện dung đã biết, R_3 là điện trở có giá trị đã biết ở hình dưới, R_2 và r là hai biến trở, r lắp nối tiếp với C. Biến đổi R_2 và r để cầu cân bằng (không có dòng điện qua T), ta đọc được R_2 và r. Gọi các tổng trở của đoạn AB, BD, AE, ED lần lượt là Z_1, Z_2, Z_3, Z_4.

a) Vẽ giản đồ Frê-nen. Suy ra mối liên hệ giữa R, L và C, r, ω.

b) Tính tổng trở Z_1 và tìm liên hệ giữa chúng. Suy ra mối liên hệ giữa R, L và C, r, R_3, R_2.

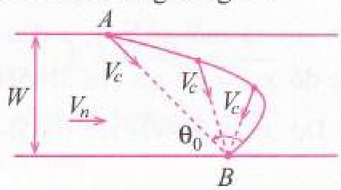
c) Tính R và L theo các giá trị đã biết R_3, R_2, C, r, ω.



Áp dụng số : $R_2 = R_3 = 1000\ \Omega$; r = 5000 Ω ; $C = 0{,}2\ \mu F$; ω = 1000 rad/s, tính R và L.

ĐINH THÁI QUỲNH (*Hà Nội*)

Bài L2/457. Trên một đoạn sông thẳng và bằng phẳng, vận tốc chảy của nước ổn định v_n. Một ca-nô xuất phát từ A với tốc độ không đổi v_c ($v_c > v_n$) và luôn hướng về B ở phía bờ đối diện như hình vẽ. Tìm quy luật chuyển động của ca-nô khi $\theta_0 = 120^o$? Bỏ qua mọi ma sát và xem kích thước ca-nô không đáng kể.



NGÔ AN HOA KỲ (*TP. Hồ Chí Minh*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/457 (For 6th Grade). Find all natural numbers n satisfying

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + ... + n.2^n = 2^{n+34}.$$

Problem T2/457 (For 7th Grade). Find integers a, b, and c such that

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2014^a + 2015^a.$$

Problem T3/457. Suppose that $f(x)$ is a polynomial with integral coefficients and $f(1) = 2$. Show that $f(7)$ is not a perfect square.

Problem T4/457. Given an acute triangle ABC with altitudes AH, BK. Let M be the midppoint of AB. The line through CM intersect HK at D. Draw AL perpendicular to BD at L. Prove that the circle containing C, K, and L is tangent to the line going through BC.

Problem T5/457. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} 9x^3 + 2x + (y-1)\sqrt{1-3y} = 0 \\ 9x^2 + y^2 + \sqrt{5-6x} = 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/457. Suppose that $f(x)$ is a polynomial of degree 3 and its leading coefficient is equal to 2. Also assume that

$$f(2014) = 2015,\ f(2015) = 2016.$$

Find $f(2016) - f(2013)$.

Problem T7/457. Let S_{tp} and V respectively be the surface area and the volume of the tetrahedron $ABCD$. Prove that

$$\left(\frac{1}{6}S_{tp}\right)^3 \geq \sqrt{3}V^2.$$

(Xem tiếp trang 26)

Bài T1/453. *Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x! + y! + z! = \overline{xyz}$, với $\overline{xyz}$ là số tự nhiên có ba chữ số, $n! = 1.2.3\ldots n$ và $0! = 1$.*

Lời giải. Ta có $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$. Nếu một trong các số x, y, z bằng 6 hoặc lớn hơn 6 thì $\overline{xyz} = x! + y! + z! \geq 720$, suy ra $x \geq 7$, mà $7! > 1000$, suy ra mỗi số x, y, z đều phải nhỏ hơn 6. Lúc đó $\overline{xyz} = x! + y! + z! \leq 5! + 5! + 5! = 360$ nên $x \leq 3$. Do $\overline{xyz} \leq 3! + y! + z! \leq 6 + 5! + 5! = 246$ nên $x \leq 2$.

• Xét $x = 2$. Từ $2! + y! + z! = \overline{2yz}$ suy ra $y! + z! > 197 > 4! + 5!$ nên $y = z = 5$.
Thử lại ta thấy không thỏa mãn.

• Xét $x = 1$. Từ $1! + y! + z! = \overline{1yz}$ suy ra $4! + 4! < 98 < y! + z! < 200 < 5! + 5!$ nên trong hai số y, z phải có một số bằng 5 và một số bằng 4. Thử với $y = 5, z = 4$ ta thấy không thỏa mãn; với $y = 4, z = 5$ thỏa mãn $(1! + 4! + 5! = 145)$.

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất là:

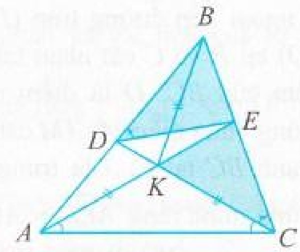
$$x = 1, y = 4, z = 5. \quad \square$$

➢***Nhận xét.*** Nhiều bạn lập luận không đầy đủ hoặc dài dòng. Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Chí Công*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Lê Minh Việt Anh*, 6A,THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, *Tạ Kim Thanh Hiền*, 6A4, THCS Yên Lạc, *Trần Minh Huy*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; **Hải Phòng:** *Bùi Thị Thùy Linh*, 6A, THCS Đại Thắng, Tiên Lãng.

VIỆT HẢI

Bài T2/453. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 50^o$, $\widehat{ABC} = 60^o$. Trên cạnh AB và BC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $\widehat{ACD} = \widehat{CAE} = 30^o$. Tính số đo góc $\widehat{CDE}$.*

Lời giải.



Từ giả thiết ta tính được $\widehat{BAE} = 20^o$, $\widehat{BCD} = 40^o$. Gọi K là giao điểm của AE và CD. Nối K với B. Theo giả thiết ta có $KA = KC$. Ta sẽ chứng minh: $KA = KB = KC$. Thật vậy, giả sử $KB < KA$. Khi đó $\widehat{KBA} > \widehat{KAB} = 20^o$; $KB < KC$ $\Rightarrow \widehat{KBC} > \widehat{KCB} = 40^o$,. suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{KBA} + \widehat{KBC} > 60^o$, trái giả thiết. Tương tự, không xảy ra $KB > KA$, do vậy ta có $KA = KB = KC$ (1). Ta có ΔKAB cân tại K nên $\widehat{BKE} = 2\widehat{BAK} = 40^o$; ΔKBC cân tại K nên $\widehat{KBE} = \widehat{KCB} = 40^o \Rightarrow \Delta BEK$ cân tại E và $EB = EK$ (2). Ta lại có $\widehat{DKB} = 2\widehat{DCB} = 80^o$; $\widehat{KDB} = \widehat{DAC} + \widehat{DCA} = 80^o \Rightarrow \Delta BDK$ cân tại B và $BD = BK$ (3). Xét hai tam giác EBD và EKC, có $EB = EK$ (theo (2)), $\widehat{EBD} = \widehat{EKC} = 60^o$, $BD = KC$ (theo (1) và (3)), do đó $\Delta EBD = \Delta EKC \Rightarrow ED = EC$ $\Rightarrow \Delta EDC$ cân tại E. Vậy $\widehat{CDE} = \widehat{DCE} = 40^o$. $\square$

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán này có dạng quen thuộc. Ngoài cách giải trên đây, một số bạn còn dùng phương pháp vẽ thêm tam giác đều.

2) Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho kết quả đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Lê Na*, 7A, THCS Thị trấn II, Yên Lập; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền*, 6A4, *Dương Tiến Đạt*, 7A2, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 7A5, THCS Cầu Giấy; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, *Đặng Nữ Quỳnh Anh*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Mai Thị Thu Thảo*, 7C, THCS Thị trấn Sông Vệ, *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư nghĩa, *Nguyễn Thị Kiều Mẫn*, 7B, THCS Kim Vang, *Trương Thị Mai Trâm*, *Đỗ Thị Mỹ Lan*, *Nguyễn Lê Hoàng Duyên*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/453. *Cho ba số thực dương a, b, c. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$T=\frac{a+b+c}{(4a^2+2b^2+1)(4c^2+3)}.$$

Lời giải. Đa số các bạn đều sử dụng BĐT Cauchy và BĐT Bunyakovsky để giải bài toán này:

$$(4a^2+2b^2+1)(4c^2+3)$$
$$=\left(4a^2+2b^2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+4c^2+2\right)$$
$$\geq\left(2a.\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}b.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}.2c+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\sqrt{2}\right)^2$$
$$=\frac{4}{3}(a+b+c+1)^2$$
$$\geq\frac{4}{3}.4.(a+b+c).1=\frac{16}{3}(a+b+c).$$

Suy ra $T=\dfrac{a+b+c}{(4a^2+2b^2+1)(4c^2+3)}\leq\dfrac{3}{16}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2a.\sqrt{3}=b.\sqrt{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}.2c}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ a+b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{6}\\ b=\dfrac{1}{3}.\\ c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Vậy T đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{3}{16}$. ❒

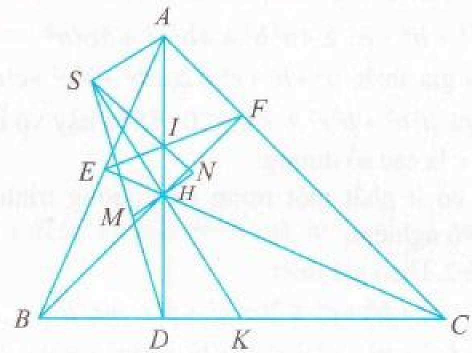
➤***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải tốt nhất: **Phú Thọ:** *Hoàng Thị Hồng Ngát, Đào Tuấn Minh, Phan Phú Dũng, Nguyễn Hải Dương*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội:** *Vương Tiến Đạt, Nguyễn Thành Long, Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Hoàng Cúc*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/453. *Cho tam giác ABC nhọn có ba đường cao AD, BF, CE cắt nhau tại H. Lấy K trên đoạn DC. Vẽ AS ⊥ HK tại S, EF cắt AH tại I. Chứng minh rằng SH là phân giác của $\widehat{DSI}$.*

Lời giải. Ta chứng minh được FH là phân giác trong của góc EFD. Vì $FA\perp FH$ nên FA là phân giác ngoài của góc EFD, ta có

$$\frac{AI}{AD}=\frac{HI}{HD}\Rightarrow\frac{HI}{AI}=\frac{HD}{AD}\qquad(1)$$



Qua H kẻ đường thẳng song song với AS, cắt SD và SI tại M, N tương ứng. Áp dụng định lí Thalès ta có $\dfrac{HN}{AS}=\dfrac{HI}{AI}$ (do $HN\,//\,AS$) (2)

$$\frac{HM}{AS}=\frac{HD}{AD}\ \text{(do } HM\,//\,AS)\qquad(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{HN}{AS}=\dfrac{HM}{AS}$, suy ra

$$HN=HM.$$

Vậy ΔSMN là tam giác cân tại S, do đó SK là phân giác của góc DSI. ❒

➤***Nhận xét.*** Chỉ có sáu bạn tham gia giải bài toán này và tất cả đều cho lời giải đúng. Xin nêu tên cả sáu bạn: **Hà Nội:** *Đặng Thanh Tùng, Nguyễn Thành Long, Vương Tiến Đạt*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hoà; **Nghệ An:** *Hoàng Trần Đức*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hoá:** *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, THCS Vĩnh Yên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/453. *Cho các số a, b,c dương thỏa mãn* $a^4+b^4+c^4\leq2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. *Chứng minh ít nhất một trong các phương trình sau vô nghiệm:* $ax^2+2bx+2c=0$, $bx^2+2cx+2a=0$, $cx^2+2ax+2b=0$.

Lời giải. *Cách* 1. Giả sử cả ba phương trình $ax^2+2bx+2c=0$ (1), $bx^2+2cx+2a=0$ (2), $cx^2+2ax+2b=0$ (3) đều có nghiệm. Khi đó

$\Delta_1' = b^2 - 2ac \ge 0; \Delta_2' = c^2 - 2ab \ge 0;$
$\Delta_3' = a^2 - 2bc \ge 0$. Suy ra

$$\begin{cases} b^2 \ge 2ac > 0 \\ c^2 \ge 2ab > 0 \\ a^2 \ge 2bc > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^4 \ge 4a^2c^2 \\ c^4 \ge 4a^2b^2 \\ a^4 \ge 4b^2c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \ge 4a^2b^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2$$

Theo giả thiết $a^4 + b^4 + c^4 \le 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

Suy ra $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le 0$. Điều này vô lí vì a, b, c là các số dương.

Vậy có ít nhất một trong ba phương trình đã cho vô nghiệm.

Cách 2. Theo giả thiết

$$a^4 + b^4 + c^4 \le 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \le 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (*)$$

Do a, b, c là các số dương nên $2abc(a+b+c) > 0$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) > a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)^2 > a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \; (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 < 4\left(ab + bc + ca\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow \Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca < 0$$

$\Rightarrow$ ít nhất một trong các số $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3'$ phải là số âm. Do đó ít nhất một trong ba phương trình đã cho vô nghiệm. ❐

➤***Nhận xét.*** Đa số các bạn đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Vũ Bá Sông*, 8C, THCS Thanh Thùy, Thanh Oai; **Phú Thọ:** *Trần Quốc Lập, Trần Thị Thu Huyền, Hoàng Thị Hồng Ngát,* 8A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Bích Hằng*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Hoàng Trần Đức*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Lê Tuấn Anh*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vĩnh Long.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/453. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \quad (1) \\ x^5 + y^5 = 1 \quad (2) \end{cases} \text{(I)}.$$

Lời giải. *Cách* 1 (của bạn *Đỗ Hoài Phương*, 9C, THCS Tuyết Nghĩa, Quốc Oai, **Hà Nội**).

Vì hệ (I) đối xứng đối với x và y nên ta có thể giả thiết $x \ge y$. Do (1) nên $x > 0$.

TH1: $y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (x; y) = (1; 0)$.

TH2: $y > 0$. Do (1) nên $x, y \in (0; 1)$. Suy ra $1 = x^3 + y^3 > x^5 + y^5 = 1$, mâu thuẫn.

TH3: $y < 0$. Ta có: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{y^3}{x^3} = 1 \\ \dfrac{1}{x^5} - \dfrac{y^5}{x^5} = 1 \end{cases}$.

Do đó, nếu hệ (I) có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì hệ (I) cũng có nghiệm $\left(\dfrac{1}{x_0}; \dfrac{-y_0}{x_0}\right)$. Tuy nhiên với $y < 0$ thì theo TH2, $\left(\dfrac{1}{x_0}; \dfrac{-y_0}{x_0}\right)$ không là nghiệm của (I).

Kết luận: hệ (I) có hai nghiệm là (1;0) và (0;1).

Cách 2 (của bạn *Vũ Minh Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên HưngYên, **Hưng Yên**).

Từ hệ (I) suy ra $(1 - y^3)^5 = (1 - y^5)^3$ (3). Khai triển và biến đổi (3) ta được:

$$y^3(y-1)^3\underbrace{(5y^6 + 15y^5 + 27y^4 + 31y^3 + 27y^2 + 15y + 5)}_{B} = 0$$

$\Leftrightarrow y = 0$ hoặc $y = 1$. Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ (I). (Chú ý rằng biểu thức

$$B = 5y^4\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{63}{4}y^2\left(y + \frac{62}{63}\right)^2 + \frac{740}{63}\left(y + \frac{189}{296}\right)^2 + \frac{125}{592} > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}).$$

Cách 3 (của nhiều bạn). Ta có:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 1 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x+y) = 1 \end{cases}.$$

Đặt: $x + y = a, xy = b$. Do (1) nên $a > 0$, khi đó hệ (I) trở thành: $\begin{cases} a^3 - 3ab = 1 & (4) \\ a^2 - 2b - ab^2 = 1 & (5) \end{cases}$. Từ (4) suy ra: $b = \dfrac{a^3 - 1}{3a}$, thay vào (5) và biến đổi, ta được:

$$a^6 - 5a^3 + 9a - 5 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^3(a^3 + 3a^2 + 6a + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow a - 1 = 0 \text{ (do } a > 0) \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 0.$$

Đến đây ta cũng tìm được nghiệm của (I). ❐

➤***Nhận xét.*** Tất các các bạn tham gia đều giải đúng bài này. Ngoài ba cách giải trên, một số bạn còn dùng bất đẳng thức, đạo hàm, ... cũng tìm được nghiệm của hệ. Ngoài bạn *Phương* và bạn *Thành*, các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Hà Nội:** *Ninh Đức Cường*, 10 Toán, THPT Chu Văn An, *Nguyễn Xuân Phương Tú*, 10 Toán, THPT Sơn Tây ; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 11A1, *Hà Hữu Linh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Nguyên:** *Ma Thị Khánh Huyền*, Toán K25, THPT chuyên Thái Nguyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định:** *Ngô Tuấn Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Tài*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; *Vũ Hữu Tùng*, *Nguyễn Hương Giang*, 10A1, THPT Hoằng Hóa IV, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Phùng Thái Cường*, 10A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, *Hồ Xuân Hùng*, 11T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Ngô Việt Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, *Phạm Hùng*, 11B1, THPT Cẩm Xuyên, Cẩm Xuyên; **Bình Định:** *Trần Văn Thiên*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Ninh Thuận:** *Trần Lê Xuân Trúc*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Nguyễn Huỳnh Huy Mân*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Long An:** *Đặng Thành Trung*, 10T2, THPT chuyên Long An; **Sóc trăng:** *Vương Hoài Thanh*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

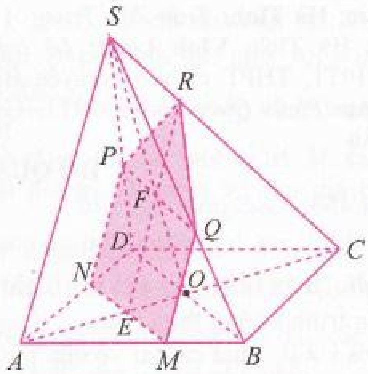
TRẦN HỮU NAM

Bài T7/453. *Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Một điểm M di động trên cạnh đáy AB (M khác A, B). Mặt phẳng (α) đi qua M đồng thời song song với SA, BD. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi (α) và tìm vị trí điểm M để thiết diện đó có diện tích lớn nhất.*

Lời giải. Kẻ $MN \,//\, BD$ $(N \in AD)$; $NP \,//\, SA$ $(P \in SD)$; $MQ \,//\, SA$ $(Q \in SB)$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD; $E = MN \cap AC$; $F = PQ \cap SO$; $R = SC \cap EF$. Khi đó thiết diện cần tìm là ngũ giác $MNPRQ$. Gọi ω là góc giữa SA và BD. Đặt $x = \dfrac{AM}{AB}$ $(0 < x < 1)$. Khi đó

$MN = x.BD$, $MQ = (1-x)SA$, suy ra

$$S_{MNPQ} = MN.MQ.\sin\omega = x(1-x).SA.BD.\sin\omega.$$



Mặt khác, $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AE}{AO} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2}x$

$$\Rightarrow \frac{RE}{SA} = \frac{EC}{AC} = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow RE = \left(1 - \frac{x}{2}\right).SA$$

$\Rightarrow RF = RE - EF = RE - MQ = \dfrac{x}{2}.SA$. Lưu ý rằng góc giữa RE và PQ bằng ω nên

$$S_{PRQ} = \frac{1}{2}PQ.RF.\sin\omega = \frac{1}{2}.MN.RF.\sin\omega = \frac{x^2}{4}.SA.BD.\sin\omega.$$

Vậy $S_{MNPRQ} = S_{MNPQ} + S_{PRQ}$

$$= x\left(1 - \frac{3x}{4}\right).SA.BD.\sin\omega\ (*).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{3x}{4}\left(1 - \frac{3x}{4}\right) \le \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{4} + 1 - \frac{3x}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow x\left(1 - \dfrac{3x}{4}\right) \le \dfrac{1}{3}$. Từ (*) suy ra

$S_{MNPRQ} \le \dfrac{1}{3}SA.BD.\sin\omega$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{3x}{4} = 1 - \dfrac{3x}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$. Do đó diện tích thiết diện $MNPRQ$ lớn nhất bằng $\dfrac{1}{3}SA.BD.\sin\omega$, đạt được khi và chỉ khi M thuộc đoạn AB sao cho $\dfrac{MA}{MB} = 2$. ❐

➤***Nhận xét.*** Một số bạn xác định không đúng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp *S.ABCD*, dẫn đến việc tìm vị trí điểm *M* không chính xác. Những bạn sau có lời giải tốt: **Thái Nguyên:** *Nguyễn Triều Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Thanh Hóa:** *Trần Trí Tấn*, 12A1, THPT Sầm Sơn, TX. Sầm Sơn; **Nghệ An:** *Đặng Hoàng Mạnh*, 11A1, THPT Anh Sơn 2, Anh Sơn; **Hà Tĩnh:** *Trần Bảo Trung*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Long:** *Lê Nguyễn Minh Long*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 10T1, THPT chuyên Long An.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/453. *Giải phương trình*

$$3\sin^3 x + 2\cos^3 x = 2\sin x + \cos x.$$

Lời giải. Nhận thấy nếu $\cos x = 0$ thì $\sin x = \pm 1$, phương trình không thỏa mãn.

Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ và thay $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, ta được:

$$3\tan^3 x + 2 = 2\tan x.\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + 2 = 2\tan x.(1+\tan^2 x) + 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 - 2t + 1$, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-2) < 0$; $f(0) > 0$; $f(1) < 0$; $f(2) > 0$ nên tồn tại các giá trị t_1, t_2, t_3 thỏa mãn:

$-2 < t_1 < 0 < t_2 < 1 < t_3 < 2$; $f(t_1) = f(t_2) = f(t_3) = 0$.

Như vậy phương trình bậc ba $f(t) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc $(-2\,;2)$.

Đặt $\tan x = 2\cos y$ với $y \in (0;\pi)$, PT (1) trở thành: $8\cos^3 y - 4\cos^2 y - 4\cos y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos y(2\cos^2 y - 1) = 3 - 4\sin^2 y \qquad (2).$$

Với $y \in (0;\pi)$, ta có $\sin y \neq 0$. Nhân hai vế của PT (2) với $\sin y$ và thay $2\cos^2 y - 1 = \cos 2y$ ta được: $4\sin y\cos y\cos 2y = 3\sin y - 4\sin^3 y$

$$\Leftrightarrow \sin 4y = \sin 3y$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4y = 3y + 2k\pi \\ 4y = \pi - 3y + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{7} + 2k.\dfrac{\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $y \in (0\,;\pi)$ nên $y \in \left\{\dfrac{\pi}{7}; \dfrac{3\pi}{7}; \dfrac{5\pi}{7}\right\}$. Từ đó:

$$\left[\begin{array}{l} \tan x = 2\cos\dfrac{\pi}{7} \\ \tan x = 2\cos\dfrac{3\pi}{7} \\ \tan x = 2\cos\dfrac{5\pi}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(2\cos\dfrac{\pi}{7}\right) + n\pi \\ x = \arctan\left(2\cos\dfrac{3\pi}{7}\right) + n\pi \\ x = \arctan\left(2\cos\dfrac{5\pi}{7}\right) + n\pi \end{array}\right.$$

$(n \in \mathbb{Z})$. ❒

➢***Nhận xét.*** Cách giải phương trình dạng

$$a\sin^3 x + b\cos^3 x + c\sin x + d\cos x + e = 0$$

Nếu $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ và thay $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, ta được một phương trình bậc ba của $\tan x$.

Cái hay trong bài toán trên là chứng minh $\tan x \in (-2;2)$ và đặt $\tan x = 2\cos y$ với $y \in (0;\pi)$, để được phương trình cơ bản $\sin 4y = \sin 3y$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Trần Bảo Trung*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Long An:** *Lê Ngọc Trí*, 11T, THPT chuyên Long An; **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 10 chuyên Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Hưng Yên:** *Nguyễn Mạnh Hiệp*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T9/453. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a;b) thỏa mãn 4a + 1 và 4b − 1 nguyên tố cùng nhau và a + b là ước của 16ab + 1.*

Lời giải. Giả sử (a, b) là cặp các số nguyên dương thoả mãn bài toán, tức là $(4a+1, 4b-1) = 1$ và $16ab + 1 \,\vdots\, (a+b)$ (1). Ta có

$$(4a+1)(4b+1) = (16ab+1) + 4(a+b) \,\vdots\, (a+b) \; (2)$$

Chú ý $(4a+1, 4b-1) = 1$ và

$$(4a+1) + (4b-1) = 4(a+b) \,\vdots\, (a+b).$$

Suy ra $(4a+1, a+b) = 1$ (vì nếu hai số $4a+1$, $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố p thì từ $(4a+1)+(4b-1) \,\vdots\, (a+b) \Rightarrow 4b-1 \,\vdots\, p$, mâu thuẫn với $(4a+1, 4b-1) = 1$).

Do đó từ (2) suy ra $4b+1 \,\vdots\, (a+b)$. $\qquad$ (3)

Ngược lại giả sử $(a; b)$ là cặp các số nguyên dương thoả mãn (3). Từ (2) ta có $16ab+1 \,\vdots\, (a+b)$. Ta thấy $(4a+1, 4b-1) = 1$ vì nếu hai số $4a+1$, $4b-1$ cùng chia hết cho số nguyên tố $p \Rightarrow p$ là số nguyên tố lẻ. Ta lại có

$$(4a+1) + (4b-1) = 4(a+b) \Rightarrow (a+b) \,\vdots\, p$$

$$\Rightarrow 4b+1 \,\vdots\, (a+b) \,\vdots\, p.$$

Mâu thuẫn với $(4b+1) - (4b-1) = 2 \not\vdots\, p$.

Như vậy các số nguyên dương a, b thoả mãn (1), tức là (1) tương đương với (3).

Chú ý $4b+1$ lẻ và $4b+1 < 4(a+b)$, ta suy ra

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4b+1 = a+b \\ 4b+1 = 3(a+b) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b+1 \\ b = 3a-1 \end{array}\right..$$

Vậy tất cả các số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $(a, b) \in \{(3c+1, c), (c, 3c-1), c \in \mathbb{N}^*\}$. ❐

➤***Nhận xét.*** Đề bài này đã được đăng ở TH&TT số 447, đáp án được đăng trên TH&TT số 451. Vậy Tòa soạn xin không chấm điểm các lời giải gửi về lần này. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

Bài T10/453. *Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0;\ n \geq 2)$ có các hệ số đều là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên k sao cho P(x) + k không phân tích được thành tích của hai đa thức hệ số nguyên với bậc lớn hơn 0.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Đức Thuận*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**)

Ta chọn $k = p - a_0$ với p là số nguyên tố thỏa mãn $p > \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. Vì có vô số số nguyên tố nên có vô số k như vậy. Khi đó ta sẽ chứng minh $Q(x) = P(x) + k = a_n x^n + ... + a_1 x + p$ là bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$. Trước hết nhận xét rằng: Nếu α là một nghiệm phức bất kỳ của $Q(x)$ thì $|\alpha| > 1$. Thật vậy nếu $|\alpha| \leq 1$ thì

$P = |a_n \alpha^n + ... + a_1 \alpha| \leq |a_n| + ... + |a_1|$, mâu thuẫn với cách chọn p. Giả sử trái lại $Q(x)$ là khả quy tức là $Q(x) = g(x).h(x)$ với $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg g \geq 1$, $\deg h \geq 1$. Ta có $p = Q(0) = g(0).h(0)$.

Vì p là số nguyên tố nên suy ra $\left[\begin{array}{l} |g(0)| = 1 \\ |h(0)| = 1 \end{array}\right.$.

Giả sử $|g(0)| = 1$ và $g(x) = b_k x^k + ... + b_1 x + 1$ $(k \geq 1)$.

Gọi $z_1, z_2, ..., z_k$ là các nghiệm của $g(x)$.

Vì $Q(x) = g(x).h(x)$ nên z_i $(i = 1, ..., k)$ cũng là nghiệm của $Q(x)$. Theo nhận xét $|z_i| > 1$ $(i = 1, ..., k)$ thành thử $|z_1 ... z_k| > 1$. Mặt khác theo định lý Viète ta lại có $|z_1 ... z_k| = \frac{1}{|b_k|} \leq 1$, mâu thuẫn. Vậy $Q(x)$ phải là bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$. ❐

➤***Nhận xét.*** Các bạn tham gia giải đều giải đúng với phương pháp như trên (dùng số phức). Ngoài bạn *Thuận*, các lời giải tốt bao gồm: **Nghệ An:** *Trần Quang Huy*, 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hà Nội:** *Vũ Bá Sang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Đồng Nai:** *Cao Đình Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Nam Định:** *Trần Thị Nhàn*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/453. *Cho hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là toàn ánh và hàm $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là đơn ánh thỏa mãn $f(n) \geq g(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng*

$$f(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lời giải. (theo đa số các bạn) Nhận xét rằng nếu tồn tại $m \in \mathbb{N}$ để $f(m) \neq g(m)$ thì $f(m) > g(m)$. Khi đó, do tập $A := \{n \in \mathbb{N} : f(n) > g(n)\}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ nên tập $B := \{g(n) : n \in A\}$ cũng là tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$. Do đó, tồn tại $m_0 = g(n_0) \in B$ là phần tử nhỏ nhất của B. Vì f là toàn ánh nên tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $f(n_1) = m_0$. Từ $f(n_1) = m_0 = g(n_0) < f(n_0)$ suy ra $n_1 \neq n_0$ (*). Theo giả thiết thì $f(n_1) \geq g(n_1)$.

– Nếu xảy ra $f(n_1) = g(n_1)$ thì $g(n_1) = m_0 = g(n_0)$ nên $n_1 = n_0$, mâu thuẫn với (*).

– Nếu xảy ra $f(n_1) > g(n_1)$ thì $g(n_1) \in B$ nên $g(n_1) < m_0 = g(n_0)$, trái với giả thiết m_0 là phần tử nhỏ nhất của B.

Kết luận: Vậy ta luôn có $f(n) = g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ❐

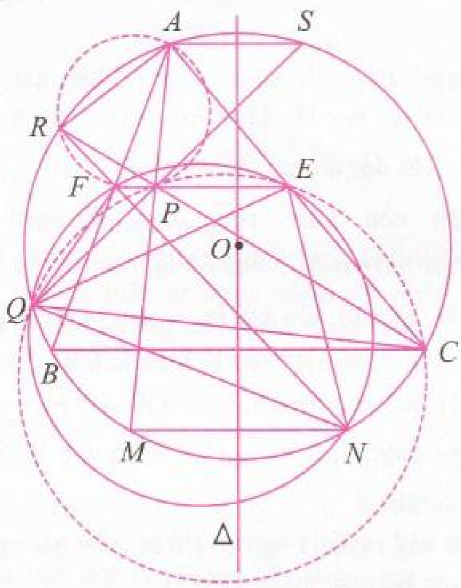
➤***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Lê Huy Cường*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Bình Định:** *Nguyễn Trường Giang*, *Trần Văn Thiên*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Gia Lai:** *Nguyễn Quang Nhật*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Lào Cai:** *Nguyễn Thu Huyền*, 10T, THPT chuyên Lào Cai; **Hà Nội:** *Vũ Bá Sang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nam Định:** *Ninh Quốc Cường*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong;

Nghệ An: *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Bình:** *Hồ Anh Tiến*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Tài*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/453. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M, N là hai điểm cố định trên (O) sao cho MN //BC. P là một điểm di chuyển trên đường thẳng AM. Đường thẳng qua P song song với BC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác NEF cắt đường tròn (O) tại Q khác N. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Lời giải.



Gọi R, S theo thứ tự là giao điểm thứ hai của FN, PQ và (O); Δ là đường thẳng qua O vuông góc với BC. Vì $FE \,//\, MN$ và A, R, M, N cùng thuộc (O) nên $(FR,FP) \equiv (RN,FE) \equiv (RN,MN)$ $\equiv (RA,MA) \equiv (AR,AP) (\bmod \pi)$. Ta có E, R, P, A cùng thuộc một đường tròn. Chú ý rằng A, B, C, M, N cùng thuộc (O) và Δ là trục đối xứng của hình thang cân $BCNM$, suy ra

$$\begin{aligned}(RP,RC) &\equiv (RP,RF)+(RN,RC)\\ &\equiv (AP,AF)+(RN,RC) (\bmod \pi)\end{aligned}$$

$\equiv (AM,AB)+(BN,BC) \equiv (CM,CB)+(CB,CM)$ $\equiv (CM,CM) \equiv 0 (\bmod \pi)$. Do đó R, P, C thẳng hàng. Chú ý rằng C, R, Q, N cùng thuộc (O) và N, F, Q, E cùng thuộc một đường tròn, suy ra

$$(CP,CQ) \equiv (CR,CQ) \equiv (NR,NQ) \equiv (NF,NQ)$$
$$\equiv (EF,EQ) \equiv (EP,EQ) (\bmod \pi).$$

Do đó P, Q, E, C cùng thuộc một đường tròn. Chú ý rằng $BC \,//\, EP$ và A, S, C, Q cùng thuộc một đường tròn, suy ra $(AS,BC) \equiv (AS,QS)+(QP,EP)$ $\equiv (AC,QC)+(QC,EC) \equiv (AC,EC) \equiv 0 (\bmod \pi)$.

Điều đó có nghĩa là $AS \,//\, BC$. Vậy PQ luôn đi qua một điểm cố định là điểm S. ❒

➤***Nhận xét.***

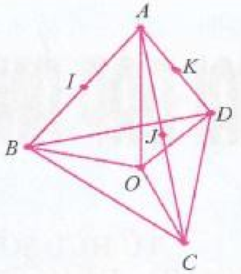
1) Khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Vì không sử dụng góc định hướng nên lời giải của một số bạn không chuẩn (với hình vẽ này thì lời giải đúng, nhưng với hình vẽ khác thì lời giải sai).

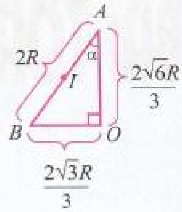
2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt: **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Yên Bái; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Đình Lương*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hoá; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế, Võ Duy Khánh*, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Hồ Anh Tiến*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Đà Nẵng:** *Lý Công Phước*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Bình Định:** *Trần Văn Thiên*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Nghệ An:** *Trần Quang Huy*, 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh, TP. Vinh; **Hà Nội:** *Phạm Ngọc Khánh*, 10T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

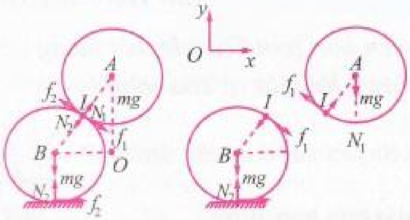
NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/453. *Cho 4 viên bi hình cầu đồng chất, cùng kích thước và được chế tạo chính xác. Sắp xếp chúng thành một khối đôi một tiếp xúc nhau trên một mặt bàn phẳng. Xác định μ_1, μ_2 lần lượt là hệ số ma sát giữa các viên bi và giữa bi với mặt bàn để cơ hệ có thể duy trì trạng thái cân bằng ban đầu.*

Lời giải. Gọi A, B, C và D lần lượt là tâm các viên bi đã cho, suy ra $ABCD$ là một tứ diện đều cạnh $2R$. Giải phóng liên kết cho các viên bi, lần lượt khảo sát các viên bi tâm A và B, ta được:







$$\begin{cases} \sum F_y^A = 3(N_1\cos\alpha + f_1\sin\alpha) - mg = 0 & (1) \\ \sum F_y^B = N_1\cos\alpha + f_1\sin\alpha + mg - N_2 = 0 & (2) \\ \sum F_x^B = f_1\cos\alpha + f_2 - N_1\sin\alpha = 0 & (3) \\ \sum M_z^B = -f_1\times R + f_2\times R = 0 & (4) \end{cases}$$

Mặt khác, khảo sát các điểm tiếp xúc của bi với mặt bàn, nhận thấy tổng trọng lực phân phối đều cho 3 điểm đó, ta có:

$$3N_2 = 4mg \to N_2 = \frac{4}{3}mg \quad (5)$$

Từ (1), (2), (3), (4) và (5), suy ra:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = \dfrac{1}{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})}mg \\ N_1 = \dfrac{1}{3}mg \\ N_2 = \dfrac{4}{3}mg \end{cases} \quad (*)$$

Để cơ hệ có thể duy trì trạng thái cân bằng ban đầu khi ma sát ở các mặt tiếp xúc đang còn ở trạng thái nghỉ, nghĩa là:

$$\begin{cases} f_1 \le N_1\mu_1 \\ f_2 \le N_2\mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \\ \mu_2 \ge \dfrac{1}{4(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \end{cases} \text{(theo (*))}$$

là điều kiện cần xác định. ❐

➤***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đắc Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/453. *Hai bản tụ điện đặt trong không khí có cùng diện tích S, có thể chuyển động không ma sát dọc theo một sợi dây cách điện nằm ngang xuyên qua tâm của chúng. Bản 1 có khối lượng m, điện tích Q, còn bản 2 có khối lượng 2m, điện tích –2Q. Ban đầu hai bản được giữ cách nhau một khoảng 3d (d rất nhỏ so với kích thước các bản)*

1. Xác định năng lượng điện trường giữa hai bản tụ điện.

2. Ở một thời điểm nào đó, người ta buông hai bản ra. Xác định vận tốc của mỗi bản khi chúng cách nhau một khoảng d.

Lời giải. 1) Cường độ điện trường tổng cộng trong tụ điện là:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 s} + \frac{2Q}{2\varepsilon_0 s} = \frac{3Q}{2\varepsilon_0 s}.$$

Năng lượng điện trường giữa hai bản tụ là:

$$W_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{3Q}{2\varepsilon_0 s}\right)^2 s.3d = \frac{27Q^2 d}{8\varepsilon_0 s}. \quad (1)$$

2) Khi hai bản cách nhau một khoảng d, gọi v_1, v_2 là vận tốc của hai bản, ta có:

$$mv_1 + 2mv_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -2v_2. \quad (2)$$

Năng lượng điện trường bên trong tụ khi đó là:

$$W_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 sd = \frac{9Q^2 d}{8\varepsilon_0 s}. \quad (3)$$

Cường độ điện trường bên ngoài tụ điện là:

$$E_n = E_2 - E_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 s}.$$

Khi hai bản cách nhau một khoảng d, thể tích bên ngoài tụ điện tăng một lượng là: $\Delta_V = s.2d$. Năng lượng điện trường bên ngoài tụ tăng thêm một lượng:

$$\Delta_W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_n^2.\Delta V = \frac{Q^2 d}{4\varepsilon_0 s}. \quad (4)$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có:

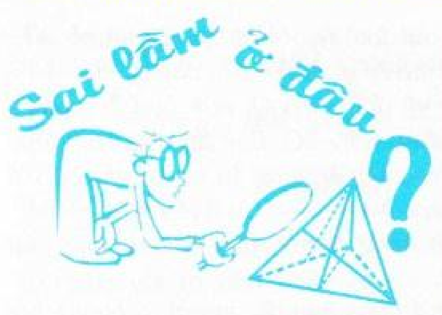
$$W_1 - W_2 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2} + \Delta_W. \quad (5)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5) suy ra:

$$v_1 = 2Q\sqrt{\frac{2d}{3\varepsilon_0 sm}} \text{ và } v_2 = -Q\sqrt{\frac{2d}{3\varepsilon_0 sm}}. ❐$$

➤***Nhận xét.*** Chúc mừng ba bạn có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đắc Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Phước:** *Phạm Văn Sơn*, AK11, THPT chuyên Quang Trung.

ĐINH THÁI QUỲNH



MỘT BÀI TOÁN HAI ĐÁP ÁN

TỪ HỮU SƠN
(Sở GD - ĐT Hà Tĩnh)

***LTS**: Để chuyên mục **Sai lầm ở đâu?** xuất hiện thường xuyên hơn trên Tạp chí, rất mong các Thầy cô giáo, các em học sinh và bạn đọc trên cả nước gửi đề bài và lời giải về Tòa soạn.*

Trong giờ học Toán, thầy giáo đưa ra bài toán: *Có 8 đội tuyển bóng đá quốc gia ở khu vực Đông Nam Á tham gia thi đấu giải AFF Suzuki Cup trong đó có đội tuyển Việt Nam và đội tuyển Thái Lan, các đội được chia làm hai bảng, ký hiệu là bảng A và bảng B, mỗi bảng có 4 đội. Việc chia bảng được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tìm xác suất để hai đội tuyển Việt Nam và Thái Lam nằm trong cùng một bảng đấu.*

Cách giải của bạn Nam:

Số cách chia 8 đội thành hai bảng là $C_2^1.C_8^4$.

Số cách chia 8 đội thành hai bảng, trong đó đội tuyển Thái Lan và Việt Nam nằm cùng bảng là $C_2^1.C_6^2$. Suy ra xác suất cần tìm là $P=\dfrac{C_2^1.C_6^2}{C_2^1.C_8^4}=\dfrac{3}{14}$.

Cách giải của bạn Bình:

Số cách chia 8 đội thành hai bảng là

$$C_2^1.\frac{C_8^4}{2}=C_8^4.$$

Số cách chia 8 đội thành hai bảng, trong đó đội tuyển Thái Lan và Việt Nam nằm cùng bảng là $C_2^1.C_6^2$. Suy ra xác suất cần tìm là

$$P=\frac{C_2^1.C_6^2}{C_8^4}=\frac{3}{7}.$$

Theo bạn, cách giải của bạn nào đúng? Vì sao?

PROBLEMS ...*(Tiếp theo trang 17)*

Problem T8/457. Given an n-sided convex polygon $(n\geq 4)$ $A_1A_2...A_n$. Prove that

$$n+\sin A_1+\sin A_2+...+\sin A_n \leq 2\left(\cos\frac{A_1-A_2}{4}+\cos\frac{A_2-A_3}{4}+...+\cos\frac{A_n-A_1}{4}\right).$$

When does the equality happen?

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/457. Find all triples $(x; y; p)$ where x and y are positive integers and p is a prime number satisfying $p^x-y^p=1$.

Problem T10/457. Let k be a real number which is greater than 1. Consider the following sequence

$$x_1=\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1},\ x_2=\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}},\ ...,$$

$$x_n=\underbrace{\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+...+\sqrt{\frac{k^2-1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}}}}}_{n\text{ square root symbols}}.$$

Prove that $\{x_n\}$ converges and find $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Problem T11/457. For each positive integer n, put $\psi(n)=\sum\limits_{d|n}d^2$.

1) Prove that $\psi(n)$ is multiplicative, i.e.

$$\psi(ab)=\psi(a).\psi(b) \text{ if } (a,b)=1.$$

2) Suppose that l is an odd positive integer. Prove that there are only finitely many positive integers n such that $\psi(n)=\psi(n+l)$.

Problem T12/457. Given a triangle ABC with the circumscribed circle (O) and the inscribed circle (I). The tangent lines to (O) at B and C intersect at T. Let M be the midpoint of BC and D be the midpoint of the arc BC which does not contain A. Suppose that AM intersects (O) at E and AT intersects the side BC at F. Let J be the midpoint of IF. Prove that $\widehat{AEI}=\widehat{ADJ}$.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

Toán học & Đời sống

THẮNG THUA TRONG THI ĐẤU THỂ THAO DƯỚI MẮT TOÁN HỌC

PHAN THANH QUANG
(*Theo La Recherche*)

Xác định trình độ của một đấu thủ trên cơ sở những thành tích đã đạt được là điều lâu nay vẫn thực hiện. Nhưng các nhà toán học Tây Ban Nha lại nhìn vấn đề này dưới con mắt "*không giống ai*" và theo họ là "*có tình, có lý, chính xác hơn*" hơn!

Khi hai đấu thủ quần vợt đấu với nhau để xem ai tài hơn thì quá dễ! Kết quả thắng thua sau trận đấu cho ngay câu trả lời.

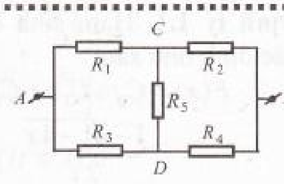
Nhưng khi số đấu thủ lớn hơn 2 thì vấn đề xếp loại đã có khác! Phải tổ chức nhiều cuộc đấu hơn để xác định thứ hạng chung cuộc.

Trong việc so sánh đơn giản (ví dụ tài sản, điểm số, cân nặng, vòng ngực, …) thì nếu A lớn hơn B, mà B lớn hơn C, thì hiển nhiên (không ai tranh cãi) A lớn hơn C. Nhưng trong việc so sánh tài năng khi thi đấu (bóng bàn, quần vợt, bóng đá, …) thì hiếm gì trường hợp A hơn B, B hơn C, mà A lại thua C! Vậy thì trong trường hợp này, làm sao so sánh tài năng các đấu thủ? Để giải quyết vấn đề này, người ta tìm cách toán học hóa việc so sánh, bằng cách gán cho mỗi đấu thủ một "*thế năng*" (potentiel) được xác định (là một hàm số) theo kết quả của cuộc thi đấu. Ví dụ, nếu A thắng B hai ván cách biệt thì thế năng của A cao hơn thế năng của B hai bậc và cứ thế mà tiến hành. Kết quả của những trận đấu khác nhau cho phép viết một hệ phương trình. Muốn hệ này có nghiệm thì khi A thắng cách biệt B hai ván, B thắng cách biệt một ván ta phải có A thắng C: $2 + 1 = 3$ (ván). Trường hợp này khó xảy ra lắm, và nói chung hệ vô nghiệm. Nhưng có thể dựa vào những thủ thuật toán học, tìm ra được một cách xếp loại gần sát hơn, nghĩa là sát nhất có thể được với nghiệm của phương trình. *Michel Brozos – Vasquez* và đồng nghiệp ở Tây Ban Nha đề cập đến bài toán bằng cách cho rằng sự kiện một đấu thủ có thế năng cao hơn đấu thủ khác không đảm bảo cho đấu thủ đó thắng, mà chỉ chứng tỏ rằng xác suất thắng là cao hơn thôi. Hai bàn thắng cách biệt chỉ là một chỉ số trên những giá trị tương đối của thế năng của hai đối thủ.

Phương pháp để xác định thế năng được tiến hành theo cách xuất phát từ những "*giá trị tiên khởi*" (a priori) cho trước và biến đổi theo kết quả của trận đấu. Để tránh trường hợp các kết quả ảnh hưởng quá nhiều đến việc xếp hạng chung cuộc, họ có ý tưởng là áp dụng phương pháp đó một lần nữa bằng cách lấy những kết quả đầu làm "*giá trị tiên khởi*" mới (ví dụ: một trận có nhiều ván, thì lấy kết quả của ván đầu). Rồi cứ như thế mà tiếp tục từ đầu. Các tác giả chứng tỏ rằng bằng cách đó cộng thêm một số kỹ thuật được thực hiện cẩn thận, người ta có thể tiếp cận đến một sự xếp loại không phụ thuộc vào sự chọn lựa thế năng xuất phát ban đầu, nói cách khác kết quả chung cuộc vẫn không đổi, dù sự lựa chọn thế năng ban đầu ra sao và cuối cùng có được một sự xếp loại khách quan, phản ánh đúng thực lực các đấu thủ, khiến cho người thua cũng "*tâm phục, khẩu phục*".

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG:

- Trên Tạp chí TH&TT số 456, Bài L2/456 trang 17, cột phải thiếu hình vẽ bên:
- TH&TT số 455, cột 1, trang 9 sửa lại là: $I=\frac{3}{2}\ln|1-t|\Big|_2^3-\frac{5}{2}\ln|1+t|\Big|_2^3=\frac{5}{2}\ln3-\frac{7}{2}\ln2.$



Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

CÁC BÀI TOÁN NỔI TIẾNG VỀ DÃY CATALAN

NGÔ THỊ NHÃ - NGUYỄN VĂN LỢI
(ĐHTH Budapest, Hungary)

Bài viết này trình bày những bài toán đặc trưng về dãy số Catalan, chỉ ra mối quan hệ mật thiết của các bài toán, đưa ra một cách nhìn mới thông qua Bài toán 3.6 có tên gọi *kiến hành quân*. Với cách nhìn mới này, việc phát biểu bài toán Catalan trở nên rõ ràng hơn và bài toán Catalan tổng quát (cho nhiều chiều) được trình bày một cách đơn giản. Chúng tôi hy vọng đóng góp một cách tiếp cận mới cho các nghiên cứu mở rộng đề tài này.

1. Dãy Catalan

Các số Catalan (hay còn gọi là dãy Catalan) lần đầu tiên được Leonard Euler (1707 – 1783) quan tâm đến khi ông nghiên cứu vấn đề: có bao nhiêu cách có thể chia một đa giác thành các tam giác. Nhưng tên của dãy này lại thuộc về Eugene Charles Catalan (1814 – 1894) – một nhà toán học người Bỉ khi ông giải quyết thành công bài toán: có bao nhiêu cách để đóng ngoặc và mở ngoặc một dãy số khi thực hiện phép tính. Năm 1838, Catalan đã phát hiện ra rằng các số này là lời giải chung của rất nhiều bài toán tưởng chừng xa lạ. Có những bài để ở dạng này thì vô cùng phức tạp, nhưng nếu chuyển sang một dạng ngôn ngữ khác, thì bài toán trở thành đơn giản.

Định nghĩa 1.1. Ta gọi dãy Catalan là dãy C_n được định nghĩa bởi công thức truy hồi

$$C_0 = 1, C_1 = 1;$$
$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0.$$

Định lý 1.1. Hàm sinh của dãy Catalan được xác định như sau:

$$F(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 \cdots + C_kx^k + \dots = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Chứng minh: Ta có $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_kx^k$. Khi đó

$$F(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_kx^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_kx^k$$

Mặt khác, $F^2(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_kx^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$, với $a_k = \sum_{i=0}^{k} C_iC_{k-i} = C_{k+1}$. Suy ra

$F^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}x^k = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} C_kx^k$, hay

$\sum_{k=1}^{\infty} C_kx^k = xF^2(x)$. Do đó $F(x) = 1 + xF^2(x)$.

Từ đó ta được $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ hoặc

$$F(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \ (*).$$

Do biểu thức (*) không khai triển được chuỗi lũy thừa tại $x = 0$ nên ta được $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ là hàm sinh của dãy Catalan.

Hệ quả 1.2. Đẳng thức sau đúng: $C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.

Chứng minh: Ta khai triển hàm $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Theo định lý Newton mở rộng, ta có

$(1+x)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{-1}{2}}^k x^k$. Như vậy,

$$(1+x)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k.$$

Thay x bởi $-4x$ ta được $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^k x^k$.

Ta có $\sqrt{1-4x} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} - \frac{4x}{\sqrt{1-4x}}$.

Suy ra $\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^k x^k - 4x\sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}^k x^k$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}^{k}x^{k}-4\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}^{k}x^{k+1}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}^{k}x^{k}-4\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k-2}^{k-1}x^{k}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}(C_{2k}^{k}-4C_{2k-2}^{k-1})x^{k}.$$

Mặt khác, $C_{2k}^{k}-4C_{2k-2}^{k-1}=\frac{(2k)!}{(k!)^2}-4C_{2k-2}^{k-1}$

$$=\frac{(2k-2)!}{((k-1)!)^2}\cdot\frac{(2k-1)2k}{k^2}-4C_{2k-2}^{k-1}$$

$$=C_{2k-2}^{k-1}\left(\frac{(2k-1)2k}{k^2}-4\right)=-2\frac{C_{2k-2}^{k-1}}{k}.$$

Suy ra $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{2k-2}^{k-1}}{k}x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}^{k}}{k+1}x^{k}.$

Vậy, công thức tổng quát của dãy Catalan là

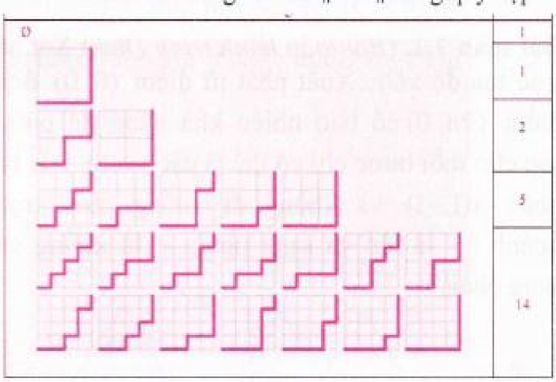
$$C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n} \text{ với } n=0,1,2,\ldots$$

2. Các bài toán liên quan đến dãy Catalan

Bài toán 2.1. (*Bài toán bàn cờ*) Có bao nhiêu cách bước trên bàn cờ $n \times n$ từ ô phía dưới cùng bên trái đến ô trên cùng bên phải sao cho không bao giờ bước qua hẳn đường chéo chính, mỗi lần bước chỉ có thể lên 1 đơn vị hoặc sang phải 1 đơn vị, không bước lùi hay sang trái?

Lời giải. Kí hiệu H_n là số cách đi từ tọa độ (0, 0) đến tọa độ (n, n) theo đúng điều kiện của bài toán – không vượt qua đường chéo chính. Ta sẽ chứng minh bài này bằng hai cách.

Cách thứ nhất. Chứng minh $H_n = C_n$ bằng quy nạp.



Hình 1: Minh họa Bài toán 2.1

Ta có $H_0=1, H_1=1, H_2=2, H_3=5, H_4=14.$

Giả sử đẳng thức đúng đến n, tức là

$H_n=H_0H_{n-1}+H_1H_{n-2}+\cdots+H_{n-1}H_0$. Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n+1$, tức là

$$H_{n+1}=H_0H_n+H_1H_{n-1}+\cdots+H_nH_0.$$

• *Trường hợp* 1. Khi di chuyển không bao giờ chạm vào đường chéo chính. Khi đó bước đầu tiên di chuyển phải là (0, 0) → (1, 0) và bước cuối cùng di chuyển phải là $(n+1, n) \to (n+1, n+1)$. Trong khoảng hai bước này, tình trạng chuyển động tương ứng với chuyển động của H_n. Như vậy trường hợp này có H_0H_n cách di chuyển.

• *Trường hợp* 2. Khi di chuyển có chạm vào đường chéo chính. Xét một chuyển động H_n như vậy. Kí hiệu (i, i) là vị trí lần đầu tiên khi chuyển động này chạm đường chéo chính. Rõ ràng, trong đoạn đầu từ $(0,0)$ đến (i, i) chuyển động của ta nằm trong chuyển động H_i.

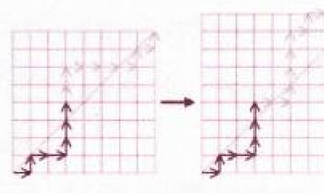
Từ (i,i) đến $(n+1, n+1)$ chuyển động của ta thuộc H_{n+1-i}. Do đó, chuyển động của H_n thuộc chuyển động của $H_{i-1}H_{n+1-i}$. Hiển nhiên chiều ngược lại cũng đúng, mỗi chuyển động thuộc $H_{i-1}H_{n+1-i}$ đều là một chuyển động của H_{n+1}. Kết hợp cả hai trường hợp ta có

$$H_{n+1}=H_0H_n+H_1H_{n-1}+\cdots+H_nH_0.$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có $H_n = C_n$ với mọi n.

Cách thứ hai. Chứng minh H_n trực tiếp mà không sử dụng công thức truy hồi.

Không gây hiểu lầm nếu ta thay H_n bằng C_n.



Hình 2: Minh họa Bài toán 2.1

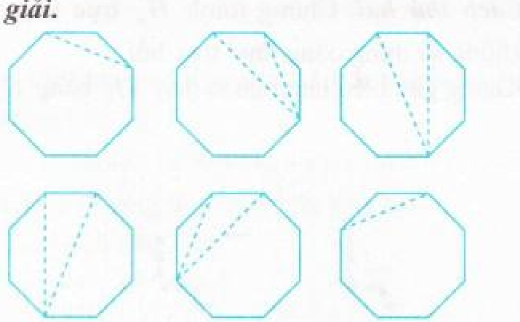
Ta sẽ chứng minh có $\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{n}$ cách đi từ góc cuối cùng bên trái lên góc trên cùng bên phải mà không bao giờ bước qua đường chéo chính (có thể chạm). Tổng số cách đi: C_{2n}^{n}. Ta sẽ tính cách đi phạm luật trước. Một cách đi gọi là phạm luật nếu bước qua đường chéo chính ít nhất một lần.

Ta xét một đường phạm luật tại lần đầu tiên. Khi đó quãng đường đi được đến nơi phạm luật sẽ phải có k bước sang phải và đúng $k+1$ bước lên trên. Như vậy để đi đến (n,n) thì cần $(n-k-1)$ bước đi lên và $(n-k)$ bước sang phải. Ta xét một phép biến hình sau: từ điểm phạm luật, ta lấy đối xứng qua đường chéo chính của quãng đường còn lại. Nếu đi sang phải thì đổi thành đi lên, và nếu là đi lên thì đổi thành sang phải. Vì phép biến hình này phân đường mới nhận được sẽ có $n-k$ bước đi lên và $n-k-1$ bước sang phải. Tổng cộng con đường mới sẽ có $k+1+(n-k)=n+1$ bước đi lên, và $k+(n-k-1)=n-1$ bước sang phải . Tức là điểm cuối cùng sẽ là $(n-1, n+1)$. Tất cả các con đường phạm luật sẽ có chung một điểm đến. Ta sẽ chỉ ra mỗi con đường từ $(0,0)$ đến $(n-1, n+1)$ đều tương ứng với một đường phạm luật. Cũng bằng phương pháp đối xứng qua đường chéo chính khi phạm luật đầu tiên, ta sẽ nhận được một lối đi phạm luật từ $(0,0)$ đến (n,n). Vậy, số đường phạm luật là C_{2n}^{n+1}. Suy ra số đường đúng luật là $C_n=C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n+1}=\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{n}$.

Công thức được chứng minh.

Bài toán 2.2. (*Bài toán Euler*) Có bao nhiêu cách chia một đa giác lồi thành các tam giác mà không có cạnh nào cắt nhau?

Lời giải.



Hình 3: Minh họa Bài toán 2.2

Gọi giá trị phải tìm là E_n. Đặt $E_2=1$. Khi $n\geq 3$ ta có $E_3=1, E_4=2, E_5=5$. Đa giác đều n đỉnh được kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n$.

Xét một phân hoạch đa giác thành các tam giác. Xuất phát từ cạnh A_1A_n cố định, đỉnh thứ ba của tam giác có cạnh A_1A_n là A_k. Các đường chéo A_kA_1, A_kA_n chia đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ thành ba phần: đa giác k đỉnh $A_1A_2\ldots A_k$, tam giác $A_1A_kA_n$ và đa giác $n-k+1$ đỉnh $A_kA_{k+1}\ldots A_n$. Số cách chia các đa giác còn lại sẽ là E_kE_{n-k+1} và phép tương ứng này với $A_1A_kA_n$ là song ánh. Cho k chạy từ 2 đến $n-1$ (với $n\geq 3$) nhận được: $E_n=\sum_{k=2}^{n-1}E_kE_{n-k+1}$.

Thay E_n bằng E_{n+2} vào công thức ta nhận được $E_{n+2}=\sum_{k=2}^{n+1}E_kE_{n-k+3}$. Thay E_{n+2} bằng E'_n vào công thức ta nhận được $E'_n=\sum_{k=2}^{n+1}E'_{k-2}E'_{n-k+1}$ hay $E'_n=\sum_{j=0}^{n-1}E'_jE'_{n-j-1}$. Công thức cuối chính là công thức Catalan. Do đó $E_n=C_{n-2}$.

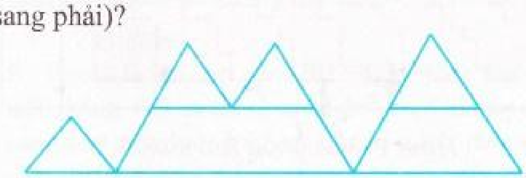
3. Các bài toán Catalan nổi tiếng khác

Bài toán 3.1. (*Bài toán dấu ngoặc*) Với n dấu ngoặc mở và n dấu ngoặc đóng (n bộ dấu ngoặc mở – đóng), có bao nhiêu cách sắp xếp các dấu ngoặc hợp lệ? (Hợp lệ ở đây được hiểu là kể từ trái sang phải, tại bất kì vị trí nào, thì số dấu ngoặc đóng đã sử dụng không vượt quá số ngoặc mở đã dùng và khi kết thúc thì đúng bằng nhau).

∅	**1**
()	**1**
(()), ()()	**2**
((())), (()()), (())(), ()(()), ()()()	**5**
(((()))), ((()))(), ((())()), (())(()), (())()(), ((()())), (()())(), (()())(), (()(())), (()()()), ()((())), ()(())(), ()(()()), ()()(()), ()()()()	**14**

Hình 4: Minh họa Bài toán 3.1

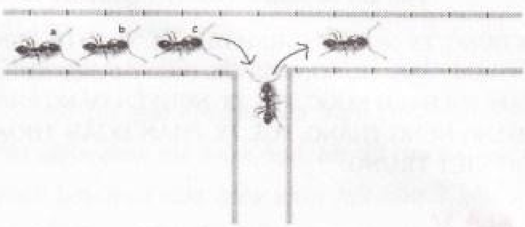
Bài toán 3.2. (*Bài toán hành trình Dick*) Xét hệ trục tọa độ xOy. Xuất phát từ điểm $(0, 0)$ đến điểm $(2n, 0)$ có bao nhiêu khả năng để bước sao cho mỗi bước chỉ có thể là các vectơ $y(1, 1)$ hoặc $x(1,-1)$ và không đi xuống dưới trục hoành (y là lên và sang phải, x là xuống và sang phải)?



Hình 5: Minh họa Bài toán 3.2

Bài toán 3.3. (*Bài toán phân vùng*) Có bao nhiêu bộ số x_i $(1\leq i\leq 2n)$, mỗi số x_i có giá trị là 1 hoặc -1 sao cho $x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=0$ và tất cả các giá trị $x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, \ldots, x_1+\cdots+x_{2n}$ đều không âm?

Bài toán 3.4. (*Bài toán đoàn quân kiến*) Có một đoàn quân kiến đang hành quân qua một con đường hầm chật hẹp. Không con nào có thể đổi chỗ cho nhau. Có một ngách nhỏ cũng chật hẹp như vậy, nếu con kiến nào muốn nghỉ thì có thể rẽ vào đó và các con khác lại tiếp tục đi. Nếu có nhiều con muốn nghỉ thì các con nghỉ trước lùi sâu vào ngách nhường chỗ cho con mới, theo thứ tự không được đổi chỗ. Khi ra thì trật tự ngược lại, con nào nghỉ sau thì ra trước. Hỏi có bao nhiêu cách ra khỏi đường hầm chật hẹp này?



Hình 6: Minh họa Bài toán 3.4

Bài toán 3.5. (*Bài toán mua vé xem phim*) Một lớp học có $2n$ học sinh đang đứng xếp hàng mua vé xem phim, giá vé là 10000 đồng/chiếc. Mỗi em học sinh chỉ có một trong hai tờ tiền là 10000 đồng và 20000 đồng.

Ban đầu quầy vé không có tiền. Có bao nhiêu cách mua vé để người bán vé luôn luôn trả lại được tiền thừa và công việc không bị gián đoạn?

Ta chứng minh các bài toán trên là tương đương:

– Bài toán Dấu ngoặc và bài toán Hành trình Dick: Với phép song ánh dấu ngoặc mở ứng với bước đi lên $y(1, 1)$ và dấu ngoặc đóng ứng với bước đi xuống $x(1, -1)$.

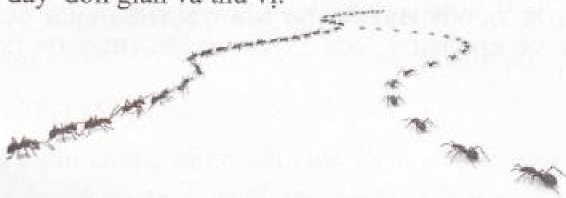
– Bài toán Hành trình Dick và bài toán Bàn cờ hoàn toàn là một khi ta xoay bàn cờ 45^o.

– Bài toán Phân vùng chính là bài toán Dấu ngoặc phát biểu dưới dạng đại số, thay ngoặc mở bằng +1 và ngoặc đóng bằng -1.

– Bài toán Đoàn quân kiến là bài toán Dấu ngoặc nếu với mỗi con kiến trước khi đến hẻm được phát một giấy kiểm tra (dấu ngoặc mở), sau khi nghỉ ngơi (hoặc tiếp tục đi luôn) qua hẻm thì thu hồi lại giấy thông hành (dấu ngoặc đóng).

– Tương tự như thế, bài toán Mua vé xem phim và bài toán Bàn cờ là tương đương khi trả tiền 10000 đồng tương ứng với bước sang phải 1 đơn vị và trả 20000 đồng tương ứng với bước lên trên 1 đơn vị.

Bài toán 3.6. (*Bài toán kiến hành quân*)
Hai đoàn quân kiến vàng (m chiến sĩ) và kiến đen (n chiến sĩ) đang hành quân về điểm tập trung. Đến ngã ba thì hai đường hợp nhau thành một. Đèn đỏ dẫn đường không hoạt động. Có bao nhiêu cách hành quân qua ngã ba mà không chen lấn xô đẩy nhau?
Nếu thêm điều kiện số kiến đen được qua cửa luôn luôn không bé hơn số kiến vàng được qua cửa, ta cũng nhận được bài toán Catalan dưới đây đơn giản và thú vị.



Hình 7: Minh họa Bài toán 3.6

Bài toán mở. (*Bài toán Catalan tổng quát*) Có n đoàn quân kiến nhập làm một theo quy tắc số kiến của đoàn i luôn luôn không nhỏ hơn số kiến của đoàn k khi nhập hàng $(k \geq i)$. Có bao nhiêu cách thực hiện?

4. Một số bài tập

Bài toán 4.1. Có bao nhiêu hàm số $f: 1,2\ldots,n \to 1,2,\ldots n$ sao cho f là một hàm tăng và với mọi k ta có $f(k) \leq k$?

Bài toán 4.2. Có bao nhiêu cách bắt tay nhau của $2n$ người ngồi quanh một cái bàn tròn mà không có cặp nào bắt chéo tay với cặp nào?

Bài toán 4.3. Chứng minh rằng $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1}$.

Bài toán 4.4. Có 15 học sinh nam và 12 học sinh nữ cùng bước vào phòng khiêu vũ, hỏi có bao nhiêu cách vào? Biết rằng ở bất kì thời điểm nào, số học sinh nam đều không ít hơn số học sinh nữ. Tổng quát với m nam, n nữ và $m \geq n$ (trong bài chỉ phân biệt nam – nữ, không xét từng cá nhân cụ thể).

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

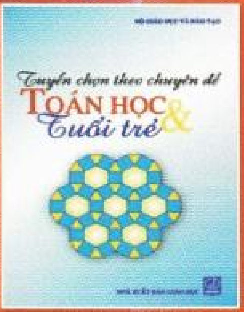
XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 457 (7.2015)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

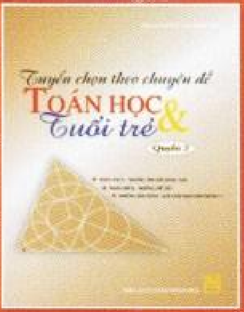
Bìa 1: Tháp Rùa - Hồ Gươm, Hà Nội – ảnh: Phan Ngọc Quang

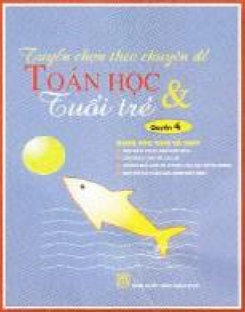
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC

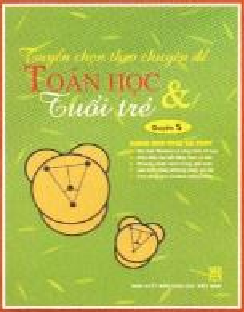
Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

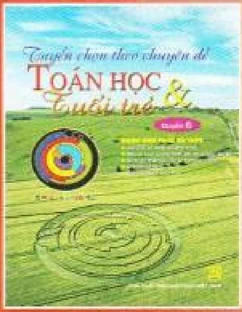


- ★ Quyển 1. 300 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 58.000 đồng
- ★ Quyển 2. 252 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 48.900 đồng
- ★ Quyển 3. 252 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 48.900 đồng
- ★ Quyển 4. 200 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 39.500 đồng
- ★ Quyển 5. 240 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 42.500 đồng
- ★ Quyển 6. 224 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 45.000 đồng





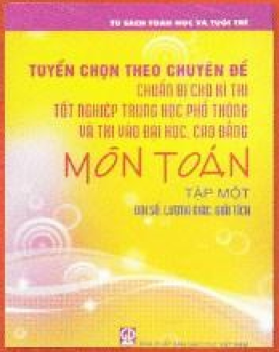




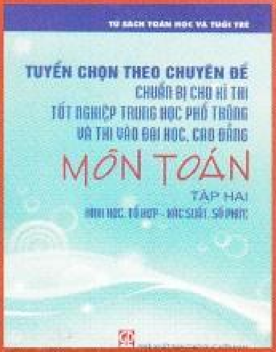
Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương với nhiều chuyên đề được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy trong cả nước, được sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Phần cuối mỗi cuốn giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.



260 trang, khổ 17×24 cm.
Giá bìa: 46.000 đồng.



240 trang, khổ 17×24 cm.
Giá bìa: 44.000 đồng.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B, Giảng Võ, Hà Nội
ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT7M5

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2015

Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng

HÃY ĐẶT MUA TC TH&TT TẠI CƠ SỞ BƯU ĐIỆN GẦN NHẤT !