PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY (Chủ biên) - ThS. NGUYỄN VĂN NHO

40 NĂM OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ (1959 - 2000)

(Tái bản lần thứ ba - có chỉnh lí và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) được tổ chức lần đầu tiên tại Romania vào năm 1959. Từ đó đến nay đã tổ chức được 40 kì thi do nhiều nước trên thế giới đăng cai. Chất lượng và quy mô kì thi IMO ngày càng tăng đã góp phần tác động tích cực đến phong trào bồi dưỡng học sinh giỏi toán ở từng quốc gia riêng biệt. Nước ta đã tham gia kì thi IMO lần đầu tiên vào năm 1974, đạt thành tích cao ngay từ kì thi ấy và từ đó đến nay luôn luôn được bạn bè Quốc tế đánh giá là một trong những đoàn mạnh của các kì thi IMO.

Để tìm hiểu về các kì thi Toán Quốc tế, bạn đọc có thể đọc thêm một số tài liệu tiêu biểu sau:

1. *Các đề thi vô địch toán các nước* (sách dịch của các tác giả Liên Xô, NXBGD xuất bản năm 1996, 2 tập). *Sách gồm các bài thi vô địch của 19 nước, trong đó có Việt Nam*.

2. *Những bài thi học sinh giỏi các nước và Quốc tế*, tập thể tác giả trường ĐHSP Hà Nội I, GS. Đoàn Quỳnh và GS. Hoàng Xuân Sính chủ biên. *Sách tập hợp một số đề thi của các nước, ngoài ra có giới thiệu các đề thi dự bị ở IMO (xem mục 3), nhưng không có lời giải.*

3. *Thi vô địch toán Quốc tế*, Lê Hải Châu, NXB TPHCM, 1992. Sách gồm các đề thi có kèm theo lời giải của các kì thi IMO từ 1981 đến 1991.

Ngoài ra, bạn đọc có thể tham khảo thêm trên *Internet - Amazon.com*:

1. Otago, Booklets 1 - 15. *The Tool-Chest*, Australian Mathematical Olympiad Committee, 1989.
2. D. Shklarsky, N. Chentzov, I. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book*, W.H. Freeman and Co., 1962.
3. Samuel L. Greitzer, *International Mathematical Olympiads, 1959-1977*, in New mathematical library 27, Mathematical Association of America, Washington, 1978.

4. Samuel L. Greitzer (ed.), *International Mathematical Olympiads, 1955-1977*. MAA, 1979.

5. Murray S. Klamkin (ed.) *International Mathematical Olympiads, 1978-1985, and Forty Supplementary Problems*. MAA, 1986.

Cuốn sách *40 năm Olympic toán học Quốc tế* này được chúng tôi phân thành 2 phần. *Phần 1* gồm tất cả những bài toán về Hình học (trừ một số bài Hình học tổ hợp chúng tôi để lại cho phần sau) đã ra trong các kì thi IMO từ năm 1959 đến năm 2000 (đó là giai đoạn 41 năm nhưng năm 1980 không tổ chức), *Phần 2* với số lượng trang nhiều hơn, gồm các vấn đề còn lại. Ngoài ra, ở cuối mỗi phần còn có thêm phần *phụ lục*, gồm một số tư liệu về kì thi IMO và một số đề thi vô địch toán của một số nước.

Tài liệu tham khảo chính của chúng tôi là các *Website trên Internet*, kết hợp với những *tài liệu đã nêu trên* cùng với một số *tài liệu khác* có liên quan.

Nhân đây, cho phép chúng tôi ngỏ lời cám ơn TS. Nguyễn Xuân My, khoa Toán - Cơ - Tin trường ĐHKHTN thuộc Đại học QGHN, đã cung cấp cho chúng tôi bốn tập tài liệu bằng tiếng Anh nhan đề *South Africa and the 33rd* (34, 35, 36th) *International Mathematical Olympiad*. Các tài liệu này đăng tải các kì thi tuyển chọn học sinh giỏi Quốc gia Nam Phi, có kèm theo những đề thi IMO 1992, 1993, 1994, 1995 với lời giải thật đẹp của nhiều nhà toán học.

Chúng tôi hi vọng cuốn sách này sẽ đem đến cho bạn đọc yêu toán một số thông tin bổ ích về các kì thi IMO, cũng như khơi dậy hứng thú, nhiệt tình học tập và nghiên cứu Toán học của các bạn. Chúng tôi xin đón nhận và hoan nghênh mọi ý kiến xây dựng của bạn đọc để lần tái bản tới cuốn sách sẽ tốt hơn.

Mọi góp ý xin vui lòng chuyển đến:
Ban Biên tập - Chi nhánh NXBGD tại Đà Nẵng
15. Nguyễn Chí Thanh - Đà Nẵng.

Tháng tư, năm 2001

PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY

ThS. NGUYỄN VĂN NHO

LỜI NÓI ĐẦU
(CỦA BẢN IN LẦN THỨ HAI)

Nhân dịp bộ sách *40 NĂM OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ* được tái bản, chúng tôi xin chân thành cảm ơn bạn đọc gần xa đã thực sự quan tâm và chuyển đến cho chúng tôi nhiều nhận xét hữu ích.

Trong lần tái bản này, chúng tôi cho trích đăng nguyên bản tiếng Anh kèm theo mỗi bài toán thuộc các đề thi IMO. Việc dùng song ngữ Việt - Anh cho các bài toán sẽ giúp bạn đọc tiện lợi trong việc đối chiếu, so sánh với các tài liệu tham khảo gốc và kích thích bạn đọc trau dồi thêm ngoại ngữ của bộ môn Toán để chuẩn bị tham dự các kì thi Quốc tế. Ngoài ra, trong lần tái bản này, *40 năm Olympic Toán học Quốc tế* tập 1 và tập 2 được nhập lại thành một tập duy nhất.

Tháng hai, năm 2002

LỜI NÓI ĐẦU
(CỦA BẢN IN LẦN THỨ BA)

Các tác giả xin chân thành cảm ơn bạn đọc yêu toán và quý thầy cô giáo ở các trường THPT chuyên toán trong cả nước đã nồng nhiệt đón nhận tập sách cũng như có nhiều ý kiến đóng góp để tập sách được hoàn thiện hơn trong mỗi lần in sau.

Trong lần in thứ ba này, chúng tôi có chỉnh lí và bổ sung thêm 20 trang so với lần in thứ hai, trong đó có đề thi và hướng dẫn giải IMO 2001 tại Mĩ và IMO 2002 tại Anh.

Tháng mười hai, năm 2002

PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY

ThS. NGUYỄN VĂN NHO

GIỚI THIỆU SƠ LƯỢC
KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ

(Các thông tin dưới đây được trích lược từ "*Tổng quan về IMO - Overview of the IMO*" đăng trong Website của hội Toán học Canada, nước chủ nhà đăng cai IMO năm 1995)

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế (viết tắt là IMO: *International Mathematics Olympiad*) được tổ chức hàng năm cho học sinh cuối bậc phổ thông. Vào năm 1959, tại Romania, lần đầu tiên IMO được tổ chức, đánh dấu một bước phát triển từ cuộc thi mang tên Olympic khoa học Quốc tế (*International Science Olympiad*) mà vào lúc đó Toán học chỉ là một bộ môn trong nhiều môn thi. Thực chất, trong lần tổ chức đầu tiên này, IMO được hiểu như là cuộc tranh tài của các học sinh xuất sắc về toán ở châu Âu.

Một đoàn đại biểu đến dự IMO có nhiều nhất là 8 người, gồm 6 thí sinh và 2 trưởng phó đoàn. Trong 2 ngày thi liên tiếp, các thí sinh sẽ làm hai bài thi, mỗi bài gồm 3 bài toán, mỗi bài được 7 điểm tối đa.

Với thời hạn không quá 4 tháng, mỗi nước được mời sẽ gởi đến nhiều nhất là 6 bài toán dự tuyển. Tất cả sẽ được tuyển chọn thành một tập gồm khoảng chừng 30 bài bởi Ban Tuyển chọn đề thi IMO của nước chủ nhà (*host country's competitions committee*), và sẽ được đệ trình lên Ban Giám khảo Quốc tế (*International Jury*).

Ban Giám khảo Quốc tế sẽ có cuộc họp trước kì thi vài ngày nhằm tuyển chọn ra 6 bài toán cuối cùng làm đề thi. Tại đây, người ta sử dụng 5 ngôn ngữ chính là Anh, Pháp, Đức, Nga và Tây Ban Nha. Những năm gần đây, người ta sử dụng tiếng Anh là chính, các thứ tiếng khác sẽ được phiên dịch sang mỗi khi có nhu cầu. Riêng các bài thi được dịch ra từng thứ tiếng của mỗi nước tham gia dưới sự kiểm soát của Ban Giám khảo Quốc tế.

Các thí sinh tập trung về nước chủ nhà trước đó vài hôm để chuẩn bị tinh thần và làm quen với khí hậu. Họ cần phải có sức khoẻ để trải qua 2 ngày thi căng thẳng liên tiếp nhau, mỗi ngày 4 giờ rưỡi không giải lao. Thông thường, bài toán 1 dễ nhất và bài toán 6 thì khó nhất. Sau khi thi, trong lúc Ban Giám khảo chấm bài và chuẩn bị công bố kết quả (thông thường khoảng 3 ngày), ấy là thời gian các thí sinh cảm thấy nhẹ nhàng thoải mái với những chương trình giải trí và giao lưu văn hoá.

Về việc chấm điểm, trước hết, mỗi Trưởng đoàn sẽ chấm điểm bài thi cho các thí sinh của nước mình, nhưng không được đánh dấu hoặc viết gì lên các bài thi ấy. Sau đó, các Trưởng đoàn sẽ làm việc với Ban Chấm điểm (*coordinators - Ban này được nước chủ nhà chỉ định*) cùng với các trưởng đoàn khác. Nếu thống nhất ý kiến, cả hai phía cùng kí vào và đó chính là điểm chính thức. Nếu có tranh cãi không đi đến thoả thuận được thì vị Trưởng Ban (*Chief Coordinator*) sẽ nỗ lực tìm cách hoà giải. Trong trường hợp vị này cũng bất lực, mọi việc sẽ được đệ trình lên Ban Giám khảo Quốc tế và thường thì người ta sẽ giải quyết bằng một cuộc bỏ phiếu.

IMO đơn thuần là một cuộc tranh tài cá nhân, nó chưa hề được tuyên bố chính thức rằng đó là cuộc tranh tài đồng đội. Tuy vậy, một số đoàn đã tự mình cộng điểm cho đoàn mình và các đoàn khác và công bố thứ hạng toàn đội khi về nước. Nếu có một ai đó nói rằng nước *A* đứng thứ *b* trong *n* quốc gia tham dự thì đó chỉ là đánh giá của cá nhân họ, chưa bao giờ đó là tin chính thức được công nhận bởi Ban Tổ chức IMO.

Các giải thưởng chiếm không quá nửa số thí sinh tham dự, được chia làm 3 hạng là huy chương vàng, bạc và đồng theo tỉ lệ 1 : 2 : 3. Số huy chương vàng chiếm không quá 1/12 tổng số thí sinh dự thi. Để khuyến khích, ngoài các thí sinh nhận được huy chương, thí sinh nào đạt điểm tối đa cho ít nhất một bài toán sẽ được cấp bằng Tuyên dương danh dự (*Certificate of Honourable Mention*) không kèm theo huy chương.

Theo truyền thống, IMO kết thúc bằng hai sự kiện lớn là *lễ trao giải* và *buổi tiệc chia tay*.

Các thí sinh giỏi nhất sẽ tận hưởng niềm vinh quang và hạnh phúc của mình, và họ xứng đáng được như vậy, khi nhận huy chương trước đông đảo mọi người.

Còn buổi tiệc sau cùng, tất cả tràn đầy tình hữu nghị, bao trùm lên đó là một bầu không khí vui tươi vượt hẳn lên những biên giới chính trị, tôn giáo, quốc gia. Thế giới lung linh và mãi mãi tươi đẹp này chỉ còn đọng lại ở những bàn tay nắm chặt những bàn tay của những nhà Toán học đã trưởng thành, đang phát triển của hiện tại hoặc tương lai.

* * *

Phần 1

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

KIẾN THỨC BỔ TRỢ

Những kiến thức bổ trợ được trình bày dưới đây bao gồm các khái niệm và định lí mà đa số không có mặt trong chương trình THPT hiện hành. Chúng thực sự cần thiết cho những học sinh giỏi toán ở phổ thông. Một phần kiến thức bổ trợ sẽ được sử dụng trực tiếp trong sách này, số còn lại là những định lí toán học nổi tiếng mà việc chứng minh chúng cũng đã là một bài toán khó đối với bậc phổ thông. Các tác giả trước đây đã bỏ qua phần chứng minh vì ý đồ sư phạm hoặc mục tiêu sử dụng sách. Ở đây, chúng tôi cố gắng đưa vào phần chứng minh, nhưng dĩ nhiên không chi tiết ở đa số trường hợp. Thực ra, mọi điều tự nó đã rõ ràng và có thể nó sẽ được hoàn thiện chi tiết đối với những bạn đọc nào quan tâm một cách nghiêm túc.

Định nghĩa 1

Trong không gian, cho trong hệ trục tọa độ trực chuẩn hai vector $\vec{a}(m,n,p)$ và $\vec{b}(q,r,s)$.Ta nói tích hữu hướng của chúng là vector $\vec{c}$, kí hiệu $[\vec{a},\vec{b}]$, xác định bởi:

$$\vec{c} = (ns - pr, pq - ms, mr - qn).$$

Tính chất 1.1

Nếu tam giác ABC trong không gian có các đỉnh có thành phần tọa độ nguyên thì tích hữu hướng của cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cũng có thành phần tọa độ nguyên.

Chứng minh:

Vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cũng có thành phần tọa độ nguyên nên từ Định nghĩa 1 ta suy ra điều phải chứng minh.

Tính chất 1.2

Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$.

Chứng minh:

Xem *Hình học 12*, ban KHTN, tài liệu giáo khoa thí điểm, NXBGD, 1995, p. 61.

Định nghĩa 2

Hai đa giác $A_1A_2....A_n$ và $B_1B_2...B_n$ được gọi là đồng dạng nhau nếu chúng có các góc ở các đỉnh A_1, A_2, ... A_n bằng các góc tương ứng ở các đỉnh $B_1, B_2, ..., B_n$, đồng thời:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = ... = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = k.$$

Số k được gọi là tỉ đồng dạng của hai đa giác.

Từ Định nghĩa 2, dễ dàng chứng minh được:

Tính chất 2.1

Đối với hai đa giác đồng dạng, tỉ các đường chéo tương ứng bằng tỉ đồng dạng. Hơn nữa, nếu hai đa giác ấy ngoại tiếp thì tỉ số các bán kính đường tròn nội tiếp cũng bằng tỉ đồng dạng.

***Nguyên tắc 3** (Nguyên tắc Dirichlet)*

Không thể nhốt n con thỏ vào m lồng, với $n > m$, sao cho mỗi lồng chỉ chứa một con.

Chú ý: Có nhiều cách phát biểu khác nhau, nhưng phát biểu trên là phổ biến nhất. Chẳng hạn, trong chương trình bồi dưỡng đội tuyển học sinh thi Vô địch Toán Quốc tế, giáo sư Greg Gamble gọi đó là *Nguyên lí Lỗ chuồng bồ câu* (*Pigeon - Hole Principle*: If 5 pegeons fly into 4 pigeon - holes then at least one pigeon - hole contains 2 or more pigeons).

Nguyên tắc này thoạt trông đơn giản nhưng lại có nhiều ứng dụng trong lập luận giải toán. Trong Hình học, ta có những mệnh đề tương ứng, chẳng hạn:

Mệnh đề : Nếu trên đoạn thẳng có độ dài l ta đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn l thì ít nhất hai trong số những đoạn thẳng đó phải có điểm chung.

***Định nghĩa 4** (trọng tâm của một hệ điểm)*

Cho n bộ (A_i, m_i), với $i = 1, 2, \ldots, n$, trong đó A_i là các điểm còn m_i là những số thực dương. Ta nói trọng tâm của hệ n bộ (A_i, m_i) là một điểm T sao cho:

$$m_1\overrightarrow{TA_1} + m_2\overrightarrow{TA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{TA_n} = 0.$$

(Có thể hiểu m_i là các trọng lượng đặt vào vị trí A_i. Khi $n = 3$ và $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, ta gặp lại khái niệm trọng tâm của một tam giác).

Định nghĩa này hợp lí, vì ta có:

Tính chất 4.1

Với mọi n bộ như đã nói trên, trọng tâm luôn luôn tồn tại và duy nhất.

Chứng minh:

Chọn O là điểm cố định trong mặt phẳng, gốc toạ độ chẳng hạn, dễ thấy:

$$m_1\overrightarrow{TA_1} + m_2\overrightarrow{TA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{TA_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overrightarrow{TO} + m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n} = 0$$

$$\overrightarrow{OT} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Như thế, T tồn tại và duy nhất.

Định nghĩa 5

Trong mặt phẳng cho n điểm. Ta nói *bao lồi* của hệ n điểm này là đa giác lồi nhỏ nhất chứa tất cả các điểm đó, nghĩa là đa giác này không chứa bất cứ một đa giác lồi nào khác cũng với tính chất đó.

(Ta nói một đa giác là *lồi* nếu kéo dài một cạnh bất kì thì nó sẽ không cắt bất cứ cạnh nào khác).

Chú ý: Khái niệm hình học này được mở rộng thành khái niệm *bao lồi* trong Giải tích hiện đại, cụ thể là ở ngành *Giải tích* lồi. Bạn đọc có thể chứng minh được rằng bao lồi của một hệ hữu hạn điểm luôn luôn tồn tại và duy nhất.

Các tính chất sau đây nói về đường trung tuyến của một tam giác.

Tính chất 6.1

Nếu AM là trung tuyến của tam giác ABC thì $AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

Chứng minh:

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành BACD, để ý AD = 2AM, dùng bất đẳng thức tam giác trong tam giác ABD để suy ra kết quả.

Tính chất 6.2

Trong một tam giác, trung tuyến ứng với cạnh dài hơn thì sẽ ngắn hơn trung tuyến ứng với cạnh ngắn hơn.

Chứng minh:

Gọi AM, BN là hai đường trung tuyến của tam giác ABC, khi đó, áp dụng Định lí cosin cho hai tam giác ABM và ACM ta dễ dàng chứng minh được:

$$AM^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2),\ BN^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2).$$

Từ đó: $AM^2 - BN^2 = \frac{3}{4}(a-b)^2 > 0$, suy ra đpcm.

Tính chất 6.3

Điều kiện ắt có và đủ để tam giác ABC có góc A nhọn là trung tuyến AM lớn hơn một nửa cạnh BC.

Chứng minh:

Nếu $AM < \frac{1}{2}BC = BM = CM$ thì Định lí liên quan đến góc và cạnh đối cho ta: $\widehat{BAM} > \widehat{ABM}$ và $\widehat{CAM} > \widehat{ACM}$. Từ đó

$$\hat{A} = \widehat{BAM} + \widehat{CAM} > B + C, \text{ hay } \hat{A} > 90^0.$$

Tương tự, nếu AM > $\frac{1}{2}$BC thì ta có $\hat{A} < 90^0$.

Tính chất 7

Cho tam giác ABC, một đường thẳng cắt hai cạnh AB, AC ở A' và B' tương ứng. Lúc đó:

$$\frac{S_{AC'B'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'.AC'}{AB.AC}.$$

Chứng minh:

Dùng công thức $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$.

Tính chất 8

Với S là diện tích một tam giác, R là bán kính vòng tròn ngoại tiếp, a, b, c là độ dài ba cạnh, ta có: $abc = 4SR$.

Chứng minh:

Thật vậy, gọi O là tâm vòng tròn. Kéo dài AO gặp vòng tròn tại K. Cho AH là đường cao của tam giác ABC. Khi đó dễ thấy hai tam giác ABH và AKC đồng dạng. Suy ra:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AK}{AC} \text{ hay } \frac{c}{AH} = \frac{2R}{b}.$$

Từ đó $abc = 2R.a.AH = 4SR$.

Định lí 9 (Định lí Sti-oa-tơ)

Với M là điểm tuỳ ý trên cạnh BC của tam giác ABC, ta có hệ thức: $AB^2.MC + AC^2.BM - AM^2.BC = BC.MC.BM$.

Chứng minh:

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC, hãy sử dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông AHB, ACH và AMH để chứng minh rằng $AM^2 = MH^2 + AH^2$. Từ đó:

$AB^2.MC + AC^2.BM - AM^2.BC$

$= (BM^2 + MH^2 - 2BM.MH).MC + (CM^2 - 2CM.MH + MH^2).BM$

$\quad + AH^2.MC + AH^2.BM - MH^2.BC - AH^2.BC$

$= BM^2.MC + CM^2.BM + MH^2.(MC + MB)$

$\quad + AH^2.(BM + MC) - MH^2.BC - AH^2.BC$

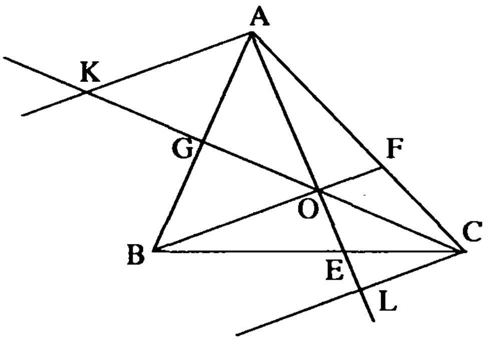
$= BM.MC.(BM + MC) = BM.MC.BC.$

Định lí 10 (Định lí Céva)

Gọi E, F, G là ba điểm tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Lúc đó, ba đường thẳng AE, BF, CG cắt nhau tại một điểm O khi và chỉ khi:

$$\frac{AG}{GB}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=1. \qquad (1)$$

Chứng minh:



Phần thuận:

Từ A và B, kẻ các đường song song với BF, chúng lần lượt cắt CG và AE tại K, L tương ứng.

Ta có: $\frac{CF}{FA}=\frac{CO}{OD}$ và $\frac{LC}{AK}=\frac{CO}{OD}$

(sử dụng Định lí Thalès và các tam giác đồng dạng AKO, LCO).

Từ đó ta được: $\frac{CF}{FA}=\frac{LC}{AK}$.

Các cặp tam giác đồng dạng LEC và OEB, AKG và BOG lại cho ta:

$$\frac{BE}{CE}=\frac{BO}{CL} \text{ và } \frac{AG}{BG}=\frac{AK}{BO}.$$

Do đó: $$\frac{AG}{GB}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=\frac{AK}{BO}.\frac{BO}{CL}.\frac{CL}{AK}=1.$$

Phần đảo:

Giả sử ta có $\frac{AG}{GB}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=1$. Qua giao điểm của các đường thẳng AE và BF, ta kẻ đường thẳng CC_1, với C_1 nằm trên cạnh AB. Khi đó, theo chứng minh ở phần thuận ta có:

$$\frac{AC_1}{C_1B}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=1=\frac{AG}{GB}.\frac{BE}{EC}.\frac{CF}{FA}=1,$$

suy ra: $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AG}{GB}$, hay $C_1 \equiv G$, ta có điều phải chứng minh.

Chú ý:

Định lí Céva thường được sử dụng để chứng minh các đường thẳng đồng quy.

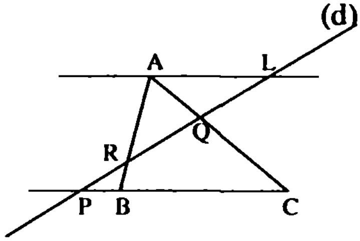
Định lí 11 (*Định lí Ménélaus*)

Cho tam giác ABC. Một đường thẳng (d) bất kì cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R. Khi đó:

$$\frac{\overline{BR}}{\overline{AR}}.\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{BP}}=1. \qquad (1)$$

Đảo lại, giả sử các điểm P, Q, R tương ứng nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho (1) được thoả. Lúc đó, P, Q, R thẳng hàng.

Chứng minh:



Phần thuận:

Qua A, kẻ đường thẳng song song với BC, cắt đường thẳng (d) tại L. Sử dụng các hệ thức của những tam giác đồng dạng để chứng minh:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}} \Leftrightarrow \overline{AL}=\frac{\overline{CP.AQ}}{\overline{CQ}}, \quad \frac{\overline{BR}}{\overline{AR}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{AL}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BR}}{\overline{AR}}.\frac{\overline{AL}}{\overline{BP}}=1.$$

Thay $\overline{AL}$ ở đẳng thức thứ nhất vào đẳng thức thứ hai ta được điều phải chứng minh.

Phần đảo:

Giả sử (1) được thoả. Gọi C_1 là giao điểm của đường thẳng QP và AB. Ta cần chứng minh $C_1 \equiv R$.

Theo chứng minh ở phần thuận ta có:

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}}.\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{BP}}=1=\frac{\overline{BR}}{\overline{AR}}.\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{BP}}.$$

Suy ra $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}}=\frac{\overline{BR}}{\overline{AR}}=m.$

Để chứng minh $C_1 \equiv R$, ta để ý rằng phương trình

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{AX}}=m \quad (m\neq 1)$$

có không quá một nghiệm khi $A\neq B$. Thật vậy, chọn gốc toạ độ là A, trục toạ độ AB với chiều dương là chiều từ A đến B. Cho tọa độ của X là x, tọa độ điểm A là a, lúc đó phương trình trên trở thành:

$$\frac{x}{x-a}=m \Leftrightarrow x=\frac{ma}{m-1}.$$

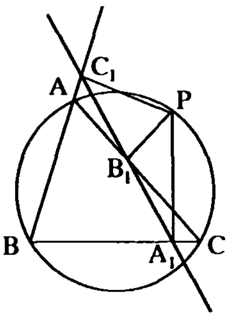
Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Chú ý:

Định lí Ménélaus thường được sử dụng để chứng minh tính thẳng *hàng của các giao điểm của một số đường thẳng.*

Định lí 12 *(Định lí về đường thẳng Simson)*

Từ một điểm P trên vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta lần lượt hạ các đường vuông góc xuống BC, CA, AB, chúng tương ứng gặp BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Khi đó, các điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng, và đường thẳng tạo bởi 3 điểm này được gọi là *đường thẳng Simson*.



Chứng minh:

Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trên cung AC của vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì:

$$A\hat{B}C + A\hat{P}C = 180^0,$$

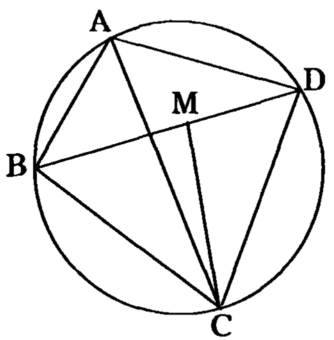
$$A\hat{B}C + A_1\hat{P}C_1 = 180^0$$

nên $A\hat{P}C = A_1\hat{P}C_1$. Từ đó ta suy ra $A\hat{P}C_1 = A_1\hat{P}C_1$ và một trong các điểm A_1, C_1 nằm trên cạnh của tam giác, điểm còn lại nằm trên phần kéo dài của cạnh.

Các điểm B_1 và A_1 nằm trên vòng tròn đường kính CP, do đó $A_1\hat{B}_1C = A_1\hat{P}C$. Tương tự $A\hat{B}_1C_1 = A\hat{P}C_1$. Vì $A\hat{P}C_1 = A_1\hat{P}C$ nên suy ra $A_1\hat{B}_1C = A\hat{B}_1C_1$, tức là A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Định lí 13 (Định lí Ptolémé)

Với một tứ giác nội tiếp, tích các đường chéo bằng tổng của hai tích các cạnh đối.



Chứng minh:

Xét tứ giác nội tiếp ABCD. Trên đường chéo BD ta lấy điểm M sao cho MCD = BCA. Khi đó, dễ thấy các tam giác ABC và DMC đồng dạng nhau, suy ra:

$$\frac{CD}{MD} = \frac{CA}{AB} \Leftrightarrow CD.AB = CA.MD.$$

Cũng dễ dàng chứng minh rằng hai tam giác BCM và ACD đồng dạng, do đó ta có:

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AD} \Leftrightarrow BC.AD = AC.BM.$$

Cọng các đẳng thức đã nhận được ta đi đến:

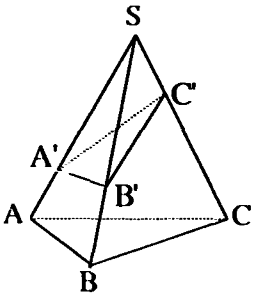
$$CD.AB + BC.AD = AC.BM + CA.MD = AC.BD,$$

là điều phải chứng minh.

Định lí 14 *(về tỉ thể tích)*

Cho tứ diện S.ABCD có thể tích V. Một mặt phẳng tùy ý cắt 3 cạnh SA, SB, SC tương ứng tại các điểm A', B', C'. Gọi V' là thể tích tứ diện S.A'B'C'. Lúc đó ta có: $\frac{V'}{V}=\frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$.

Chứng minh:



Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB), hiển nhiên đây cũng là góc giữa SC' và mặt phẳng (SA'B'); gọi β là góc đỉnh S của 3 là góc đỉnh S của tam giác SAB, đây cũng là góc đỉnh S của tam giác SA'B'. Dễ thấy:

$$V=SC.\sin\alpha.dt(SAB)\,,\ V'=SC'.\sin\alpha.dt(SA'B')\,.$$

Sử dụng các công thức:

$$dt(SAB)=\frac{1}{2}SA.SB.\sin\beta\,,\ dt(SA'B')=\frac{1}{2}SA'.SB'.\sin\beta\,,$$

bạn đọc dễ dàng đi đến điều cần chứng minh.

Định lí 15 *(Định lí Ménélaus trong không gian)*

Trên các cạnh AB, BC, CD, DA tạo bởi 4 điểm A, B, C, D trong không gian, ta lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q. Điều kiện ắt có và đủ để M, N, P, Q đồng phẳng là:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}.\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=1\,. \qquad (1)$$

Chứng minh:

* Giả sử M, N, P, Q đồng phẳng, chúng xác lập một mặt phẳng α. Từ A, B, C, D, ta lần lượt dựng các mặt phẳng song song với α. Một đường thẳng Δ tương ứng cắt các mặt phẳng vừa dựng tại các điểm A', B', C', D' và Δ cắt mặt phẳng α tại O.

Định lí Thalès trong không gian cho ta:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}\,,\ \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}\,,\ \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OD'}}\,,\ \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{OD'}}{\overline{OA'}}\,.$$

Từ đó ta được:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}.\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}.\frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}.\frac{\overline{OC'}}{\overline{OD'}}.\frac{\overline{OD'}}{\overline{OA'}}=1\,.$$

* Đảo lại, giả sử ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}.\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=1. \qquad (1)$$

Xét mặt phẳng (MNP), giả sử mặt phẳng này cắt cạnh DA tại Q'. Theo chứng minh ở phần thuận ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}.\frac{\overline{QD'}}{\overline{QA}}=1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{QD'}}{\overline{QA}}.$$

Hệ thức này chứng tỏ rằng D' trùng D (xem chứng minh ở Định lí 11); nói cách khác, 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

***Định lí 16** (Định lí Céva trong không gian)*

Bên trong tứ diện ABCD, lấy tùy ý một điểm S. Các mặt phẳng (SCD), (SDA), (SAB), (SCB) lần lượt cắt AB, BC, CD, DA tại các điểm tương ứng A', B', C', D'. Lúc đó:

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}}.\frac{\overline{B'B}}{\overline{B'C}}.\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'D}}.\frac{\overline{D'D}}{\overline{D'A}}=1.$$

Đảo lại, gọi A', B', C', D' là các điểm tương ứng nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ diện ABCD. Khi đó, 4 mặt phẳng (ABC'), (BCD'), (CDA'), (DAB') có chung nhau một điểm S nếu:

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}}.\frac{\overline{B'B}}{\overline{B'C}}.\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'D}}.\frac{\overline{D'D}}{\overline{D'A}}=1.$$

Chứng minh:

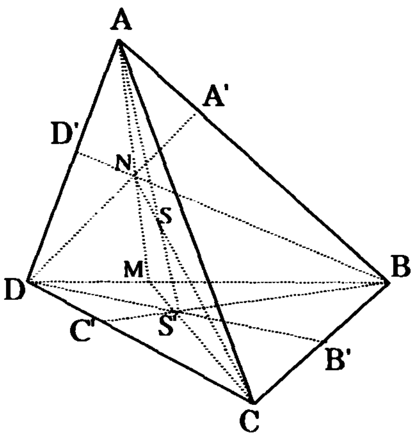
Định lí thuận:

Kéo dài AS, cắt mặt phẳng (BCD) tại S'; DS' cắt BC tại B', BS' cắt DC tại C'; B' và C' lần lượt chính là giao điểm của mặt phẳng (SAD) với CB và (SAB) với CD; CS' cắt BD tại M.

Kéo dài CS cắt MA tại N. DN và BN cắt AB, AD tương ứng tại A', D'. Hai điểm này lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (SCD) với AB và (SCB) với DA.

Định lí Ceva (*xem Định lí 10*) trong các tam giác BCD và ABD cho ta:

$$\frac{CC'}{C'D}.\frac{DM}{MB}.\frac{BB'}{B'C}=1, \qquad (1)$$



$$\frac{AA'}{A'B}.\frac{BM}{MD}.\frac{DD'}{D'A}=1. \qquad (2)$$

Nhân (1) và (2) vế theo vế ta được:

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}}.\frac{\overline{B'B}}{\overline{B'C}}.\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'D}}.\frac{\overline{D'D}}{\overline{D'A}}=1.$$

Định lí đảo:

Hệ thức đã cho chứng tỏ rằng các điểm A', B', C', D' đồng phẳng theo Định lí Ménélaus trong không gian. Từ đây dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

CÁC ĐỀ TOÁN
VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

phần Hình học - trích từ các kì thi IMO từ 1959 - 2000

(Có kèm theo đề thi nguyên bản tiếng Anh)

Bài 1. (1959)

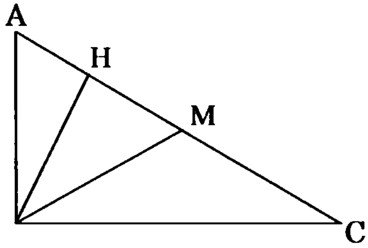
Cho trước độ dài của cạnh AC, hãy dựng tam giác ABC có góc $\widehat{ABC} = 90^0$ và có trung tuyến BM thỏa điều kiện $BM^2 = AB.AC$.

Given the length AC, construct a triangle ABC with angle $\widehat{ABC} = 90^0$, *and the median BM satisfying* $BM^2 = AB.AC$.

Hướng dẫn:

Giả sử bài toán đã giải xong, ta dựng được tam giác ABC thỏa điều kiện đầu bài. Đặt AC = *c* (độ dài cho trước). Vì

$$BM = AM = MC = \frac{c}{2}$$



nên diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{AB.BC}{2} = \frac{BM^2}{2} = \frac{c^2}{8}.$$

Hạ BH $\perp$ AC, ta có:

$$S = \frac{AH.AC}{2} = \frac{AH.c}{2} = \frac{c^2}{8},$$

suy ra $AH = \frac{c}{4}$. Từ đó , để dựng tam giác ABC, ta dựng giao điểm B của đường tròn đường kính AC = *c* và đường thẳng song song với AC, cách AC một đoạn bằng $\frac{c}{4}$.

Rõ ràng là bài toán luôn luôn có hai nghiệm hình với A, C cho trước.

Bài 2. (1959)

Cho điểm M tùy ý nằm trên đoạn thẳng AB. Dựng các hình vuông AMCD và MBEF ở cùng về một phía đối với AB. Các đường tròn ngoại tiếp hai hình vuông này (có tâm P và Q tương ứng) cắt nhau tại M và N.

a) Chứng minh AF và BC cắt nhau tại N.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN đi ngang qua một điểm cố định S (không phụ thuộc vào M).

c) Tìm quỹ tích trung điểm của PQ khi M thay đổi.

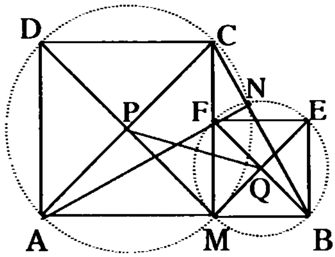
An arbitrary point M is taken in the interior of the segment AB. Squares AMCD and MBEF are constructed on the same side of AB. The circles circumscribed about these squares, with centers P and Q, intersect *at M and N.*

a) Prove that AF and BC intersect at N;

b) Prove that the lines MN pass through a fixed point S (independent of M);

c) Find the locus of the midpoints of the segments PQ as M varies.

Hướng dẫn:



a) Ta có:

$\widehat{ANM} = \widehat{ACM} = 45^0$

và $\widehat{BNM} = \widehat{MEB} = 45^0$

(theo tính chất góc nội tiếp)

nên suy ra: $\widehat{ANM} = \widehat{BNM}$.

Do đó $\widehat{ANB} = 90^0$. Mặt khác, N nằm trên nửa đường tròn đường kính AC nên $\widehat{ANC} = 90^0$. Từ đây ta suy ra $\widehat{CNB} = 90^0$, nghĩa là ba điểm C, N, B thẳng hàng, hay $N \in BC$. (*)

Từ tính chất tứ giác nội tiếp ta được $\widehat{NFM} + \widehat{NBM} = 180^0$. Ngoài ra, dễ thấy hai tam giác vuông CMB và AMF bằng nhau nên ta có $\widehat{AFM} = \widehat{CBM} = \widehat{NBM}$. Kết quả là ta có $\widehat{NFM} + \widehat{AFM} = 180^0$; nói cách khác, ba điểm A, F, N thẳng hàng, hay $N \in AF$. (**)

Từ (*) và (**) ta kết luận AF và BC cắt nhau tại N.

b) và c): Bạn đọc tự giải.

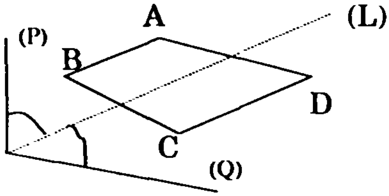
***Bài 3.* (1959)**

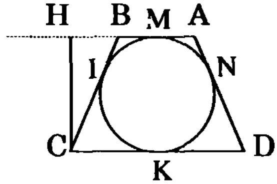
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) không song song nhau, điểm A nằm trong (P) nhưng không thuộc (Q), điểm C nằm trong (Q) nhưng không thuộc (P). Hãy dựng các điểm B, D lần lượt thuộc (P) và (Q) sao cho tứ giác ABCD thoả mãn các điều kiện sau: ABCD là tứ giác phẳng có AB song song với CD, AD = BC và tồn tại một vòng tròn tiếp xúc với các cạnh của ABCD.

The planes (P) and (Q) are not parallel. The point A lies in (P) but not (Q), and the point C lies in (Q) but not (P). Construct points B in (P) and D in (Q) such that the quadrilateral ABCD satisfies the following conditions: it lies in a plane, AB is parallel to CD, AD = BC, and a circle can be inscribed in ABCD touching the sides.

Hướng dẫn:

Giả sử bài toán đã được giải xong, gọi (L) là giao tuyến của (P) và (Q). Rõ ràng AB và CD phải song song với (L), vì nếu không thế thì AB, (L) và CD đồng phẳng. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB. Giả sử vòng tròn nội tiếp ABCD tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, I, K, N.





Do ABCD ngoại tiếp một vòng tròn nên từ tính chất tiếp tuyến ta suy ra được:

$$AH = AM + MH = AN + CK$$
$$= AN + CI = AN + ND = AD.$$

Như vậy, AH = AD = BC.

Từ phân tích trên, *ta suy ra cách dựng* B *và* D *như sau*:

Dựng giao tuyến (L) của (P) và (Q). Qua A và C, lần lượt kẻ các đường thẳng (D) và (D') song song với (L). Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống (D). Dựng hai đường tròn tâm C và tâm A với bán kính bằng độ dài AH trong mặt phẳng ((D), (D')). Hai đường tròn này theo thứ tự cắt (D) và (D') tại B và D. Đó chính là hai điểm phải dựng.

Chứng minh: Dễ dàng. Đề nghị bạn đọc tự chứng minh.

Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình nếu CH < AH, trong đó một nghiệm hình thoả điều kiện AB>CD và nghiệm hình kia thoả điều kiện AB < CD.

***Bài 4*. (1960)**

Cho tam giác vuông ABC với cạnh huyền BC có độ dài *a*. Chia BC thành *n* phần bằng nhau, với *n* là số nguyên dương lẻ. Khi đó, tam giác ABC được chia thành *n* tam giác nhỏ và tam giác nhỏ ở chính giữa có góc tại đỉnh A bằng α. Gọi *h* là khoảng cách từ A đến BC. Chứng minh rằng:

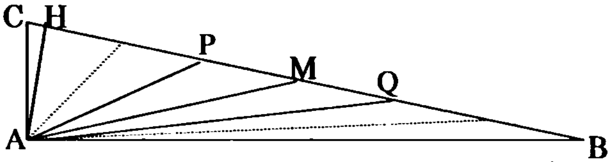
$$tg\alpha = \frac{4nh}{an^2 - a}.$$

In a given right triangle ABC, the hypoteneuse BC, length a, is *divided into n equal parts with n an odd integer. The central part subtends an angle α at A. Let h be the perpendicular distance from A to BC. Prove that:*

$$tg\alpha = \frac{4nh}{an^2 - a}.$$

Hướng dẫn:

Gọi M là trung điểm BC, P và Q là hai điểm chia nằm hai bên nó, với P ở gần B. Khi đó ta có $\alpha = \widehat{PAQ} = \widehat{QAH} - \widehat{PAH}$ (không mất tính tổng quát, ta xem như cả P lẫn Q đều nằm bên phải điểm H, trong trường hợp ngược lại, nghĩa là khi P hoặc Q nằm bên trái H, ta quy ước lấy góc âm).



Dùng công thức lượng giác $tg(x-y) = \dfrac{tgx - tgy}{1 + tgx.tgy}$ ta có:

$$tg\alpha = \frac{\dfrac{QH}{AH} - \dfrac{PH}{AH}}{1 + \dfrac{QH.PH}{AH^2}} = \frac{(QH - PH)AH}{AH^2 + QH.PH} = \frac{PQ.AH}{AH^2 + QH.PH}.$$

Mặt khác, ta lại có:

$$PQ = \frac{a}{n},\ AH = h,\ QH = MH + MQ = MH + \frac{a}{2n},$$

$$PH = MH - MP = MH - \frac{a}{2n},\ MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2},$$

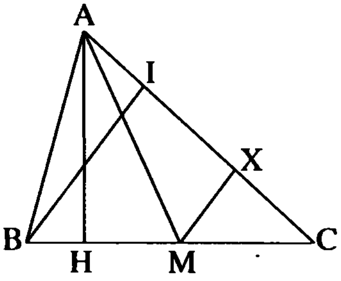
nên thay vào ta được điều phải chứng minh:

$$tg\alpha = \frac{\dfrac{ah}{n}}{h^2 + \left(\dfrac{a^2}{4} - h^2 - \dfrac{a^2}{4n^2}\right)} = \frac{4nh}{an^2 - a}.$$

Bài 5. (1960)

Dựng tam giác ABC biết các độ dài đường cao kẻ từ A, B và độ dài đường trung tuyến kẻ từ A.

Construct a triangle ABC given the lengths of the altitudes from A and B and the length of the median from A.



Hướng dẫn:

Giả sử bài toán đã giải xong, ta dựng được tam giác ABC có các đường cao AH = h, BI = k và trung tuyến AM = m (với h, k, m là các độ dài cho trước). Hạ MX $\perp$ AC. Vì M là trung điểm BC, đồng thời MX song song với BI nên rõ ràng $MX = \frac{BI}{2} = \frac{k}{2}$.

Từ phân tích trên ta đi đến cách dựng:

Ta bắt đầu bằng cách dựng tam giác vuông AHM với các độ dài AM = m và AH = h cho trước. Tiếp đến, ta dựng đường tròn tâm M bán kính bằng độ dài cho trước $k/2$, đường tròn này cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông AHM tại X. Hai đường thẳng HM và AX gặp nhau ở C. Gọi B là điểm đối xứng của C qua M. Ta được ABC là tam giác phải dựng.

Chứng minh:

Theo cách dựng trên, rõ ràng AH = h ; M là trung điểm AB nên AM là trung tuyến và AM = m. Hạ đường cao BI. Tam giác AXM vuông tại X vì nó nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AM. Suy ra MX // BI và vì vậy BI = 2MX = k.

Biện luận:

Với điều kiện $h < m$, ta luôn dựng được tam giác vuông AHM. Ngoài ra, để dựng được điểm X, đường tròn đường kính AM và đường tròn (M ; $\frac{k}{2}$) phải cắt nhau; muốn thế ta phải có $\frac{b}{2} < m \Leftrightarrow b < 2m$.

***Bài 6.* (1960)**

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có A ở phía trên A', B trên B' và tương tự như thế. X là một điểm di động trên đường chéo AC và Y là điểm di động trên B'D'.

a) Tìm quỹ tích trung điểm của XY.

b) Tìm quỹ tích những điểm Z nằm trên đoạn XY và thoả mãn

$$ZY = 2XZ.$$

The cube ABCDA'B'C'D' has A above A', B above B' and so on. X is any point of the face diagonal AC and Y is any point of B'D'.

a) Find the locus of the midpoint of XY;

b) Find the locus of the point Z which lies one-third of the way along XY, so that ZY = 2XZ.

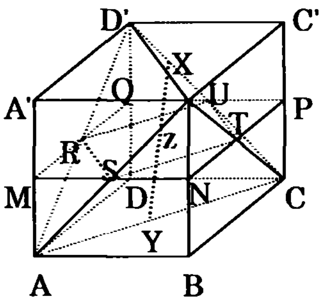
Hướng dẫn:

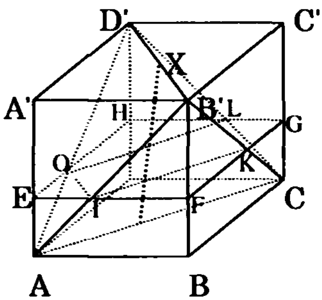
a) Gọi (P) là mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng (ABCD) và (A'B'C'D'), (P) cắt các cạnh A'A, B'B, C'C, D'D lần lượt tại M, N, P, Q. Rõ ràng là trung điểm của XY phải nằm trên (P).

Gọi R, S, T, U lần lượt là trung điểm của MN, NP, PQ và QR. Dễ dàng nhận thấy trung điểm của XY chỉ nằm trên hình vuông RSTU.

Đảo lại, lấy bất kì điểm I trên hình vuông RSTU, mặt phẳng xác định bởi I và AC sẽ cắt đoạn B'D' tại Y. Khi đó, IY kéo dài trong tam giác ACY sẽ cắt AC ở X. Vì mặt phẳng (RSTU) song song và cách đều hai mặt phẳng (ABCD) và (A'B'C'D') nên theo Định lí Thales trong không gian, hiển nhiên I là trung điểm của XY.

Tóm lại, quỹ tích các trung điểm của XY là hình vuông RSTU.





b) Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh A'A, B'B, C'C, D'D sao cho

$$A'E = 2EA,\ B'F = 2FB$$

và tương tự như thế. AB', CB', CD' và AD' lần lượt cắt các cạnh EF, FG, GH, HE tương ứng tại I, K, L, O. Dễ dàng chứng minh được IKLO là hình chữ nhật. Ta có:

$$EO = EI = EA = \frac{a}{3}\ ;\ IF = FK = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3},$$

với a là cạnh hình vuông đã cho. Từ đó ta được:

$$OI = \frac{\sqrt{2}}{3}a \text{ và } IK = \frac{2\sqrt{2}}{3}a.$$

Tương tự như ở câu a), dễ dàng chứng minh được quỹ tích các điểm Z là hình chữ nhật IKLO.

Bài 7. (1960)

Cho một hình cầu nội tiếp trong một hình nón tròn xoay. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và của hình trụ.

a) Chứng minh rằng $V_1 \neq V_2$.

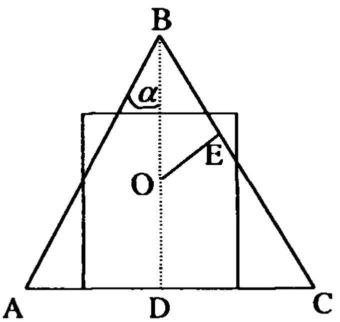
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Trong trường hợp đó (khi tỉ số nói trên nhỏ nhất), hãy trình bày cách dựng góc tạo bởi đường sinh và trục của hình nón.

A cone of revolution has an inscribed sphere tangent to the base of the cone (and to the sloping surface of the cone). A cylinder is circumscribed about the sphere so that its base lies in the base of the cone. The volume of the cone is V_1 and the volume of the cylinder is V_2.

a) Prove that $V_1 \neq V_2$;

b) Find the smallest possible value of V_1/V_2. For this case const- -ruct the half angle of the cone.



Hướng dẫn:

a) Ta giả sử hình nón có đường cao BD = h, bán kính đáy là DC = a, góc giữa đường sinh và trục là α; bán kính hình cầu nội tiếp hình nón là r. Ta có:

$$V_1 = \frac{\pi h a^2}{3}, \qquad (*)$$

$$h = OB + OD = \frac{r}{\sin\alpha} + r = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha},\ a = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}.tg\alpha.$$

Thay các kết quả trên vào (*) ta được:

$$V_1 = \frac{\pi . r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{\pi . r^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha.(1-\sin\alpha)}.$$

Thể tích hình trụ ngoại tiếp hình cầu là $V_2 = 2\pi . r^3$, do đó

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)} = \frac{(1+s)^2}{6s(1-s)},$$

ở đây ta đặt $s = \sin\alpha$, $0 < s < 1$.

Giả sử rằng $\frac{V_1}{V_2} = 1$ (tức là $V_1 = V_2$), ta được phương trình $7s^2 - 4s + 1 = 0$, phương trình bậc hai theo s này lại vô nghiệm; điều này có nghĩa không tồn tại α để $V_1 = V_2$ và khẳng định ở đề bài được chứng minh.

b) Đặt $\frac{V_1}{V_2} = k$, ta có phương trình $(1+6k)s^2 + 2(1-3k)s + 1 = 0$, để phương trình này có nghiệm, ta phải có

$$\Delta' = (1-3k)^2 - (1+6k) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{4}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2} = k$ là $\frac{4}{3}$, ứng với $s = \sin\alpha = \frac{1}{3}$ và OB = $3r$.

Đến đây, việc dựng góc α trở nên hoàn toàn đơn giản.

***Bài 8.* (1961)**

Gọi a, b, c là các độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích là A. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$. Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

Let a, b, c be the sides of a triangle and A be its area. Prove that $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$. *When do we have equality?*

Hướng dẫn:

Ta có công thức Heron:

$$A = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}.$$

Do tính chất *tổng hai cạnh trong một tam giác luôn luôn lớn hơn cạnh thứ ba*, ta thấy rằng tất cả các thừa số trên đều dương. Vì vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27}$$

cho ba số $x = (a+b-c)$, $y = (a-b+c)$, $z = b+c-a$ ta được:

$$4A = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$$

$$\leq \sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}. \qquad (*)$$

Mặt khác, ta lại có:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$\le a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2),$$

nên thay vào (*) ta được:

$$4A \le \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}A.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi các dấu "=" xảy ra đồng thời ở các bất đẳng thức Cauchy nói trên, nghĩa là khi $a = b = c$.

***Bài 9.* (1961)**

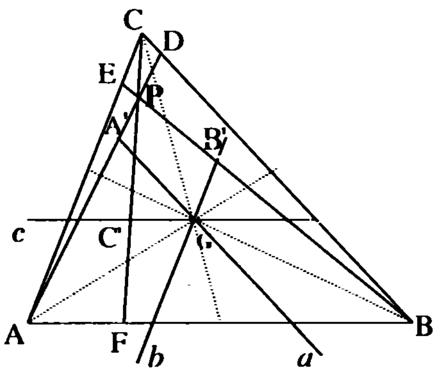
Gọi P là điểm tuỳ ý nằm trong tam giác ABC. PA cắt BC ở D, PB cắt AC ở E, PC cắt AB ở F. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các tỉ số sau đây không lớn hơn 2:

$$\frac{AP}{PD}, \frac{BP}{PE}, \frac{CP}{PF}$$

và cũng có ít nhất một trong các tỉ số trên không nhỏ thua 2.

P is inside the triangle ABC. PA intersects BC in D, PB intersects AC in E, and PC intersects AB in F. Prove that at least one of AP/PD, BP/PE, CP/PF does not exceed 2, and at least one is not less than 2.

Hướng dẫn:



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Dựng qua G các đường thẳng a, b, c lần lượt song song với BC, CA, AB. Trọng tâm G chia mỗi trung tuyến theo tỉ số 2:1 kể từ đỉnh. Do vậy đường thẳng a chia đoạn thẳng AB cũng theo tỉ số 2:1 kể từ A. Tương tự như thế đối với b và BC, c và CA.

Đường thẳng a chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng; một trong hai nửa mặt phẳng này chứa A, ta gọi là mặt phẳng (a), nửa mặt phẳng còn lại được gọi là (a'). Tương tự như thế ta cũng có các nửa mặt phẳng (b) và (b'), (c) và (c') đối với các đường thẳng b và c. (*)

Gọi A', B' C' tương ứng là các giao điểm của AD và a, BE và b, CF và c.

Dễ thấy rằng nếu $P \in (a)$ thì

$$\frac{AP}{PD} \leq \frac{AA'}{A'D} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ngược lại, nếu $P \in (a')$ thì $\dfrac{AP}{PD} \geq \dfrac{AA'}{A'D} = \dfrac{2}{1} = 2.$

Lập luận này được lặp lại với các tỉ số $\dfrac{BP}{PE}$ và $\dfrac{CP}{PF}$ theo các nửa mặt phẳng tương ứng. Rõ ràng là các nửa mặt phẳng (a), (b) và (c) nói ở (*) phủ kín toàn mặt phẳng, và do vậy, điểm P tuỳ ý ắt phải rơi vào một trong chúng. Như thế, theo trên, ít nhất một trong các tỉ số

$$\frac{AP}{PD}, \frac{BP}{PE}, \frac{CP}{PF}$$

sẽ không lớn hơn 2.

Lại xét các nửa mặt phẳng (a'), (b'), (c'); các nửa mặt phẳng này cũng phủ kín toàn mặt phẳng, do đó P phải rơi vào một trong chúng. Do vậy, ít nhất một trong các tỉ số

$$\frac{AP}{PD}, \frac{BP}{PE}, \frac{CP}{PF}$$

sẽ không nhỏ thua 2. Ta có điều phải chứng minh.

***Bài 10.* (1961)**

Dựng tam giác ABC, cho biết AC = b, AB = c và góc nhọn $\widehat{AMB} = \alpha$, với M là trung điểm BC. Chứng minh rằng tam giác này dựng được nếu và chỉ nếu $b.tg\dfrac{\alpha}{2} \leq c < b$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

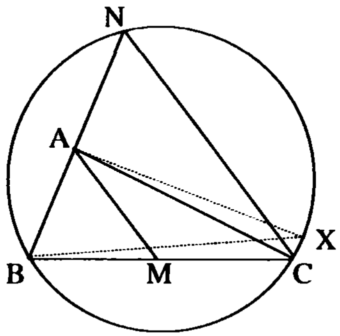
Construct the triangle ABC, given the lengths AC = b, AB = c and the acute angle AMB =a, where M is the midpoint of BC. Prove that the construction is possible if and only if $b.tg\dfrac{\alpha}{2} \leq c < b$. When does equality hold?

Hướng dẫn:

Giả sử ta dựng được tam giác ABC như đề bài đòi hỏi. Vì $\widehat{AMB}$ là góc nhọn nên ta có $c < b$.

Gọi N là điểm trên đường thẳng BA sao cho điểm A là trung điểm của NB. Khi đó, AM là đường trung bình của tam giác BNC nên suy ra $\widehat{BCN} = \widehat{AMB} = \alpha$.

Ta suy ra cách dựng như sau:



Dựng đoạn AB có độ dài bằng c. Dựng điểm N sao cho A là trung điểm NB. Dựng trên đoạn thẳng BN một cung (L) chứa góc α. Tiếp đến, vẽ đường tròn (C) có tâm A và bán kính bằng b, đường tròn này cắt cung (L) tại C. Ta được tam giác ABC phải dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng, rõ ràng tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$. Gọi M là trung điểm AB thì AM // NC nên ta có $A\hat{M}B = \alpha$.

Biện luận: Với điều kiện $c < b$, bài toán có lời giải khi và chỉ khi (C) cắt (L).

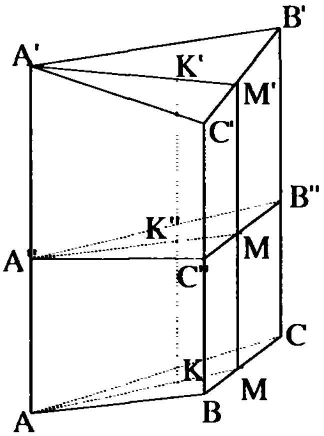
Bây giờ, từ A ta kẻ đường thẳng vuông góc với BN, đường thẳng này cắt (L) ở X. Theo tính chất dây cung, rõ ràng ta có $A\hat{X}B = \frac{\alpha}{2}$. Hơn nữa, dễ thấy (C) cắt (L) khi và chỉ khi $AX \geq AC > AB$.

Nhưng $\frac{AB}{AX} = tg\frac{\alpha}{2}$ nên đến đây ta có điều kiện ắt có và đủ để bài toán có nghiệm hình là $b.tg\frac{\alpha}{2} \leq c < b$. Trong trường hợp tổng quát, (C) cắt (L) tại hai điểm, bài toán có hai nghiệm hình. Đặc biệt, bài toán có một nghiệm hình khi và chỉ khi C trùng X, lúc đó, dấu "=" ở bất đẳng thức trên xảy ra và ta có $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{b}$ (tam giác BAC vuông tại A).

***Bài 11.* (1961)**

Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và mặt phẳng (P) không song song với (ABC) sao cho cả ba điểm A, B, C đều ở về cùng một phía với (P). Lấy ba điểm tuỳ ý A', B' C' trên (P). Gọi A", B", C" lần lượt là những trung điểm của A'A, B'B và C'C. Cho O là trọng tâm tam giác A"B"C". Tìm quỹ tích điểm O khi A', B', C' di động trên mặt phẳng (P).

Given 3 non-collinear points A, B, C and a plane (P) not parallel to ABC and such that A, B, C are all on the same side of (P). Take three arbitary points A', B', C' in (P). Let A", B", C" be the midpoints of AA', BB', CC' respectively, and let O be the centroid of the triangle A"B"C". What is the locus of O as A', B', C' vary?



Hướng dẫn:

Gọi K', K lần lượt là trọng tâm các tam giác A'B'C' và ABC. Ta có K cố định vì ABC cố định. Cho M, M' lần lượt là trung điểm của BC và B'C'. Giả sử M'M cắt mặt phẳng (A"B"C") tại M", K'K cắt (A"B"C") tại K". Ngoài ra, ta gọi T là trung điểm B"C". Ta sẽ chứng minh rằng K" trùng O.

Ta có B'M' = M'C' và BM = MC nên theo Định lí Thales đảo trong không gian, B'B, C'C và M'M nằm trên ba mặt phẳng song song với nhau; từ đó, lại theo Định lí Thales, ta được: B"M" = M"C", nghĩa là M" nằm trên trung trực của B"C". (*)

Cũng theo các định lí nói trên, vì ta có $\frac{A'K'}{K'M'} = \frac{1}{2} = \frac{AK}{KM}$ nên dễ dàng suy ra: $\frac{A''K''}{K''M''} = \frac{1}{2}$. Như vậy ta được $\frac{A''K''}{K''M''} = \frac{A''O}{OT} = \frac{1}{2}$, suy ra K"O // M"T, điều này có nghĩa OK" $\perp$ B"C" (do theo (*) ta có M"T $\perp$ B"C").

Vừa rồi ta đã thực hiện với điểm A, A' và cặp cạnh BC, B'C'. Tiến trình này được lặp lại một cách hoàn toàn tương tự như trên với (B, B', AC, A'C') và (C, C', AB, A'B') để có: OK" $\perp$ A"C" và OK" $\perp$ A"B".

Tóm lại, ta đã chứng minh được O trùng với K". Nói cách khác, trọng tâm O của tam giác A"B"C" nằm trên đường nối hai trọng tâm K (cố định) của tam giác ABC và K' của tam giác A'B'C'.

Hơn nữa, cũng dựa vào Định lí Thales thuận và đảo trong không gian, dễ thấy O là trung điểm K'K. Khi A', B', C' di động trên (P), K' cũng di động trên toàn mặt phẳng (P); do đó, O di động trên mặt phẳng α song song và cách đều (P) với điểm K.

Đó cũng là kết luận cho quỹ tích của điểm O, vì phần đảo lại cũng đơn giản khi sử dụng Định lí Thales thuận và đảo trong không gian.

***Bài 12.* (1962)**

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có ABCD và A'B'C'D' tương ứng là đáy trên và đáy dưới, A'A // B'B // C'C // D'D. Một điểm X chuyển động với tốc độ không đổi dọc theo chu vi hình vuông ABCD; Y cũng chuyển động cùng tốc độ đó dọc theo chu vi hình vuông B'C'CB. X xuất phát từ A đi về phía B còn Y rời từ B' để đi về hướng C'.

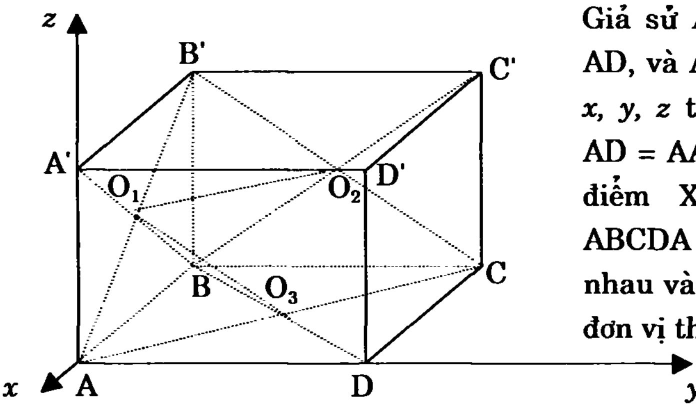
Tìm quỹ tích trung điểm XY.

The cube ABCD.A'B'C'D' has upper face ABCD and lower face A'B'C'D' with A directly above A' and so on. The point X moves at const--ant speed along the perimeter of ABCD, and the point Y moves at the same speed along the perimeter of B'C'CB. X leaves A towards B at the same moment as Y leaves B' towards C'.

What is the locus of the midpoint of XY?

Hướng dẫn:

Ta kí hiệu O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của các mặt ABB'A', BB'C'C và ABCD. Ta sẽ chứng minh rằng quỹ tích các trung điểm Z của XY là đường gấp khúc $O_1O_2CO_3O_1$.



Giả sử A là gốc toạ độ; AB, AD, và AA' là các trục toạ độ x, y, z tương ứng. Đặt AB = AD = AA' = 1. Chia thời gian điểm X chạy trên đường ABCDA làm 4 phần bằng nhau và lấy mỗi phần ấy làm đơn vị thời gian.

Ta biết rằng nếu điểm K chuyển động thẳng đều thì sự phụ thuộc toạ độ của nó vào thời gian là sự phụ thuộc tuyến tính và ngược lại, nếu sự phụ thuộc toạ độ của điểm K vào thời gian là tuyến tính thì K chuyển động thẳng đều.

Nếu T là trung điểm của đoạn OP với:

$$O = (x_1, y_1, z_1) \text{ và } P = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\text{thì } T = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Ứng dụng các mệnh đề đã phát biểu trên, ta lập bảng phụ thuộc toạ độ của các điểm X, Y, Z vào t sau đây:

		$0 \le t \le 1$	$1 \le t \le 2$	$2 \le t \le 3$	$3 \le t \le 4$
X	x	t	1	$3-t$	0
	y	0	$t-1$	1	$4-t$
	z	0	0	0	0
Y	x	1	1	1	1
	y	t	1	$3-t$	0
	z	1	$2-t$	0	$t-3$
Z	x	$\frac{1+t}{2}$	1	$\frac{4-t}{2}$	$\frac{1}{2}$
	y	$\frac{t}{2}$	$\frac{t}{2}$	$\frac{4-t}{2}$	$\frac{4-t}{2}$
	z	$\frac{1}{2}$	$\frac{2-t}{2}$	0	$\frac{t-3}{2}$

Khi $t = 0,1,2,3,4$, dễ dàng thấy được Z tương ứng ở các vị trí O_1, O_2, O_3, O_1 ; còn trên các đoạn giữa chúng, toạ độ của Z thay đổi tuyến tính, nghĩa là Z vẽ trong không gian các đoạn thẳng O_1O_2, O_2C, CO_3, O_3O_1, và có nghĩa là Z chuyển động theo hình thoi $O_1O_2CO_3O_1$.

Quá trình chứng minh này cho thấy điều đảo lại là rõ ràng.

***Bài 13.* (1962)**

Cho ba điểm phân biệt A, B, C nằm trên vòng tròn (K). Hãy dựng điểm D trên (K) sao cho tồn tại một vòng tròn nội tiếp trong tứ giác ABCD.

Given three distinct points A, B, C on a circle (K), construct a point D on (K), such that a circle can be inscribed in ABCD.

Hướng dẫn:

Giả sử bài toán đã được giải xong, gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ABCD ta có:

$$A\hat{O}C + A\hat{O}D + D\hat{O}C = 360^0$$

$$\Leftrightarrow A\hat{O}C + 180^0 - O\hat{A}D - O\hat{D}A + 180^0 - O\hat{D}C - O\hat{C}D = 360^0$$

$$\Leftrightarrow A\hat{O}C - \frac{B\hat{A}D}{2} - \frac{B\hat{C}D}{2} - A\hat{D}C = 0,$$

(vì theo tính chất tiếp tuyến, AO là phân giác của góc BAD và OC là phân giác của góc BCD).

Do ABCD là tứ giác nội tiếp trong (K) nên ta có

$$B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^0 \text{ và } A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180^0,$$

vì vậy ta được: $A\hat{O}C - 90^0 - 180^0 + A\hat{B}C = 0 \Leftrightarrow A\hat{O}C = 270^0 - A\hat{B}C$.

Ta suy ra cách dựng:

Trước hết, ta dựng cung chứa góc $(270^0 - A\hat{B}C)$ dựng trên đoạn AC. Sau đó, gọi O là giao điểm của cung này với đường phân giác của góc ABC. Tiếp đến, dựng đường tròn (O) có tâm O và tiếp xúc với BA, BC. Từ A kẻ tiếp tuyến đến (O), tiếp tuyến này và (K) cắt nhau tại D. ABCD là tứ giác phải dựng (nếu điều kiện ở phần *biện luận* được thoả).

Việc chứng minh hoàn toàn đơn giản.

Biện luận: Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để bài toán có nghiệm hình là AB + CD = BC + AD.

Thật vậy, nếu bài toán dựng được, gọi M, N, K, P là 4 tiếp điểm của (O) với AB, BC, CD, DA tương ứng, theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$$AB + CD = AM + MB + CK + KD$$
$$= AP + BN + NC + DP = BC + AD.$$

Đảo lại, giả sử ta có

$$AB + CD = BC + AD, \text{ hay } CD = BC + AD - AB,$$

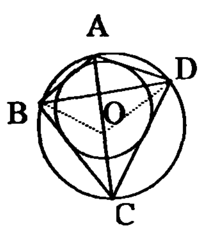
lúc đó, ta dựng D như đã nói ở phần *cách dựng*. Từ C, kẻ tiếp tuyến của (O), cắt AD tại D', ta sẽ chứng minh D trùng D', nghĩa là cách dựng của ta thoả yêu cầu đề bài. Theo tính chất tiếp tuyến ta có:

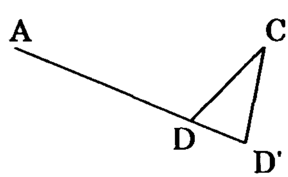
$$AB + CD' = BC + AD' \text{ hay } CD' = BC + AD' - AB.$$

Từ đó : $CD' - CD = BC + AD' - AB - (BC + AD - AB)$

$$= AD' - AD = DD' \text{ (hoặc } -DD').$$

Điều này chứng tỏ D trùng D', điều phải chứng minh.





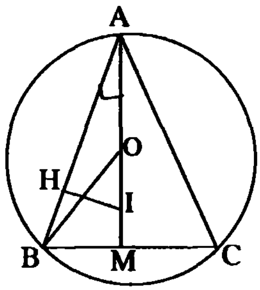
***Bài 14.* (1962)**

Cho *R, r* lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của một tam giác cân. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai tâm của hai đường tròn này là $\sqrt{R(R-2r)}$.

The radius of the circumcircle of an isosceles triangle is R and the radius of its inscribed circle is r. Prove that the distance between the two centers is $\sqrt{R(R-2r)}$.

Hướng dẫn:

Giả sử ABC là tam giác có AB = AC, gọi O và I tương ứng là tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Đặt d là khoảng cách IO, ta quy ước rằng $d > 0$ nếu O gần A hơn I, và $d < 0$ nếu I gần A hơn O. Ở đây ta trình bày và vẽ hình khi O gần A hơn I, trường hợp còn lại kết quả vẫn không thay đổi với quy ước trên. Gọi α là góc OAB, M là trung điểm BC. Kẻ IH $\perp$ AB. Khi đó:



$\sin\alpha = \dfrac{\text{HI}}{\text{AI}} = \dfrac{\text{HI}}{\text{AO}+\text{OI}} = \dfrac{r}{R+d}$, hay

$$r = (R+d)\sin\alpha \; ; \qquad (*)$$

$\cos 2\alpha = \cos \widehat{\text{BOM}} = \dfrac{\text{OM}}{\text{OB}} = \dfrac{\text{OI}+\text{IM}}{\text{OB}} = \dfrac{r+d}{R}$,

hay $r + d = R\cos 2\alpha$. $\qquad$ (**)

Kết hợp (*), (**) và sử dụng công thức $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ ta tìm được hệ thức: $(d+R+r)[d^2 - R(R-2r)] = 0$. Nếu $d > 0$ như trường hợp ta đang xét thì hiển nhiên $(d+R+r) > 0$, còn nếu $d < 0$ như trường hợp còn lại thì do ta luôn có $\text{OI} < \text{OA}$ nên ta cũng có $(d+R+r) > 0$. Vì vậy:

$$[d^2 - R(R-2r)] = 0 \Leftrightarrow d = \sqrt{R(R-2r)} \text{ (đpcm).}$$

***Bài 15.* (1963)**

Cho điểm A và đoạn thẳng BC, hãy xác định quỹ tích các điểm P trong không gian sao cho góc APX bằng 90^0, với X là một điểm nào đó nằm trên đoạn BC.

Given a point A and a segment BC, determine the locus of all points P in space for which angle APX = 90^0 for some X on the segment BC.

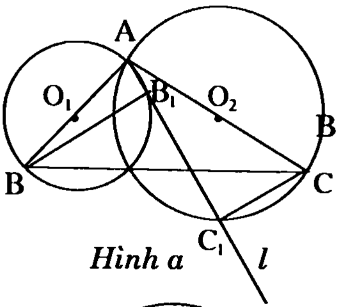
Hướng dẫn:

Trước hết, ta hãy tìm quỹ tích trong mặt phẳng ABC. Qua A, vẽ một đường thẳng l tùy ý; gọi B_1C_1 là hình chiếu của đoạn BC lên l. Ta thấy rằng bất kì một điểm P_1 nào trong đoạn B_1C_1 cũng thuộc quỹ tích phải tìm, bởi vì nếu gọi X_1 là điểm trong đoạn BC sao cho P_1 là hình chiếu của X_1 lên B_1C_1 thì góc X_1P_1A hiển nhiên vuông góc, có một cạnh qua A và một cạnh cắt đoạn BC tại X_1.

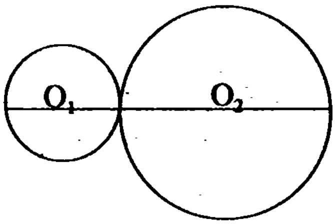
Bất kì một điểm N nào trên đường thẳng l nhưng ở ngoài đoạn B_1C_1 cũng không thuộc quỹ tích phải tìm vì đường vuông góc với l vạch từ N không thể cắt đoạn BC.

Như vậy, trên đường thẳng l thì quỹ tích phải tìm là đoạn thẳng B_1C_1. Khi cho l quay xung quanh A thì các điểm B_1, C_1 vạch nên hai đường tròn (O_1), (O_2) có đường kính lần lượt là AB, AC và đoạn B_1C_1 sẽ quét nên một hình gồm tất cả những điểm của hai hình tròn (O_1), (O_2) - kể cả đường tròn biên - trừ những điểm ở trong cả hai hình tròn, nên quỹ tích là miền có gạch chéo trên các hình a (trường hợp A ở ngoài đường thẳng BC), là miền được tô đậm trên các hình b, c, d (trường hợp A ở trên đường thẳng BC).

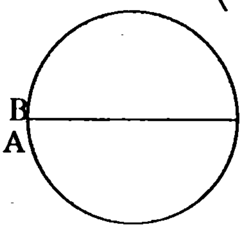
Quỹ tích trong không gian có được bằng cách quay quỹ tích trong mặt phẳng trên đây xung quanh đường nối tâm O_1O_2 của hai hình tròn: quỹ tích là hai hình cầu, kể cả mặt cầu biên, trừ phần không gian chung bên trong hai hình cầu.



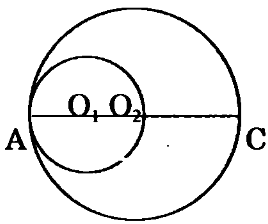
Hình a



Hình b



Hình c



Hình d

Bài 16. **(1964)**

Cho 5 điểm trong một mặt phẳng sao cho trong số tất cả những đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào trùng nhau, song song hoặc vuông góc với nhau.

Qua mỗi điểm, vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng xác định bởi hai trong số 4 điểm còn lại. Hãy xác định số lớn nhất các giao điểm mà những đường vuông góc này có thể giao nhau.

5 points in a plane are situated so that no two of the lines joining a pair of points are coincident, parallel or perpendicular.

Through each point lines are drawn perpendicular to each of the lines through two of the other 4 points. Determine the maximum number of intersections these perpendiculars can have.

Hướng dẫn:

Gọi 5 điểm thoả mãn yêu cầu của đề toán là A, B, C, D, E. Xét cố định một điểm, thế thì 4 điểm còn lại sẽ cho ta 6 đường thẳng. Do đó có cả thảy 6 đường vuông góc đi qua điểm cố định đó. Như thế, tổng cọng có 30 đường thẳng vuông góc.

Tính nôm na, cứ hai đường thì cắt nhau tại một điểm, do vậy, nhiều lắm là có cả thảy $C_{30}^2 = \frac{30.29}{2} = 435$ giao điểm.

Thế nhưng, lại có một số giao điểm trùng nhau.

Có ba nhóm điểm trùng nhau.

Đầu tiên, 6 đường thẳng qua A (chẳng hạn) giao nhau tại một điểm (đó là điểm A), trong khi tính theo kiểu trên là $C_6^2 = \frac{6.5}{2} = 15$ giao điểm. Như vậy ta mất đi 5.14 = 70 điểm.

Tiếp đến, các đường thẳng qua C, D và E cùng vuông góc với AB sẽ song song với nhau, điều này loại thêm 3 giao điểm. Như thế, ta mất thêm $C_5^3 \times 3 = \frac{5.4.3}{3.2} = 10.3 = 30$ điểm.

Thứ ba, đường thẳng qua A vuông góc với BC là đường cao trong tam giác ABC; cũng thế với đường thẳng qua B vuông góc với AC, đường thẳng qua C vuông góc với AB, chúng đồng quy tại trực tâm của tam giác ABC. Với tam giác ABC này ta phải loại đi 2 giao điểm. Như thế phải loại thêm tất cả $C_5^3 \times 2 = 10.2 = 20$ giao điểm.

Rõ ràng, các giao điểm trùng lặp nói trên đều phân biệt nhau (do ba miền điểm vừa xét rời nhau), do vậy, giá trị lớn nhất có thể có của số các giao điểm là 435 - 120 = 315.

Bài toán đến đây vẫn chưa thực sự được giải quyết nếu chúng ta không chỉ ra được một trật tự đặc biệt về cách sắp xếp 5 điểm đã cho sao cho số giao điểm thực sự là 315, nghĩa là cách sắp xếp các điểm đó bảo đảm được rằng không còn một giao điểm trùng lặp nào ngoài các trùng lặp kể trên. Đề nghị bạn đọc tiếp tục công việc này hoặc chỉ ra một cách giải khác tối ưu hơn.

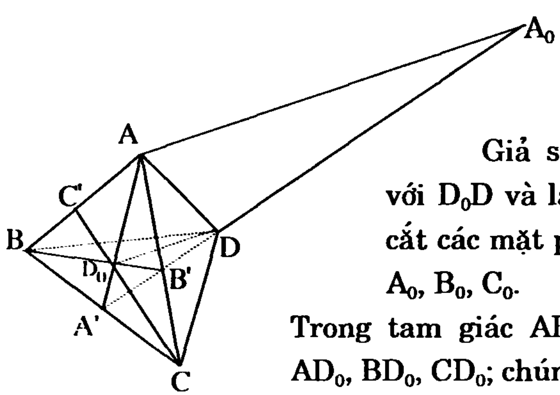
***Bài 17.* (1964)**

Cho tứ diện ABCD, D_0 là trọng tâm của tam giác ABC. Những đường thẳng song song với D_0D và lần lượt qua A, B, C tương ứng cắt các mặt phẳng (BCD), (CAD), (ABD) tại A_0, B_0, C_0. Chứng minh rằng thể tích tứ diện ABCD bằng một phần ba thể tích tứ diện $A_0B_0C_0D_0$.

Nếu D_0 là một điểm tuỳ ý nằm bên trong tam giác ABC, liệu kết quả này có còn đúng không?

ABCD is a tetrahedron and D_0 is the centroid of ABC. Lines parallel to DD_0 are drawn through A, B and C and meet the planes (BCD), (CAD) and (ABD) in A_0, B_0, and C_0 respectively. Prove that the volume of ABCD is one-third of the volume of $A_0B_0C_0D_0$. Is the result true if D_0 is an arbitary point inside ABC?

Hướng dẫn:



Ta giải bài toán trong trường hợp tổng quát, khi D_0 là điểm tuỳ ý trong tam giác ABC.

Giả sử các đường thẳng song song với D_0D và lần lượt qua A, B, C tương ứng cắt các mặt phẳng (BCD), (CAD), (ABD) tại A_0, B_0, C_0.

Trong tam giác ABC, ta dựng các đường thẳng AD_0, BD_0, CD_0; chúng lần lượt cắt các cạnh đối diện tại A', B', C'. Dễ thấy A_0D là giao tuyến của mặt phẳng (DBC) và mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song A_0A và D_0D. Ta lại có A' là điểm chung của hai mặt phẳng này. Do đó A_0, D, A' thẳng hàng. Hoàn toàn tương tự ta cũng có B_0, D, B' thẳng hàng và C_0, D, C' thẳng hàng. Tại các đỉnh A', B', C' ta đặt lần lượt các trọng lượng là *x, y, z* sao cho trọng tâm của chúng là D_0. Chẳng hạn, ta đặt sao cho $\frac{AB'}{B'C} = \frac{z}{x}, \frac{CA'}{A'B} = \frac{y}{z}, \frac{BC'}{C'A} = \frac{x}{y}$. Có thể ta chỉ lấy:

$$x = \mathrm{B'C},\ y = \frac{\mathrm{CA'}}{\mathrm{A'B}}.\mathrm{AB'},\ \mathrm{AB'} = z.$$

Ta có: $\dfrac{S_{\mathrm{AC'B'}}}{S_{\mathrm{ABC}}} = \dfrac{\mathrm{AB'.AC'}}{\mathrm{AB.AC}} = \dfrac{yz}{(x+y)(x+z)}$. Tương tự ta cũng có:

$$\frac{S_{\mathrm{BC'A'}}}{S_{\mathrm{ABC}}} = \frac{xz}{(y+x)(y+z)} \text{ và } \frac{S_{\mathrm{A'B'C}}}{S_{\mathrm{ABC}}} = \frac{xy}{(x+z)(z+y)}.$$

Từ đó: $\dfrac{S_{\mathrm{A'B'C'}}}{S_{\mathrm{ABC}}} = 1 - \dfrac{xy}{(x+z)(z+y)} - \dfrac{xz}{(y+x)(y+z)} - \dfrac{yz}{(x+y)(x+z)}$

$$= \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Vì hai tứ diện ABCD và A'B'C'D có chung đường cao nên

$$\frac{V_{\mathrm{A'B'C'D}}}{V_{\mathrm{ABCD}}} = \frac{S_{\mathrm{A'B'C'}}}{S_{\mathrm{ABC}}} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}. \qquad (*)$$

Ngoài ra ta có: $\dfrac{\mathrm{A'D}}{\mathrm{DA_0}} = \dfrac{\mathrm{A'D_0}}{\mathrm{D_0A}} = \dfrac{x}{y+z}$ và tương tự :

$$\frac{\mathrm{B'D}}{\mathrm{DB_0}} = \frac{y}{x+z},\ \frac{\mathrm{C'D}}{\mathrm{DC_0}} = \frac{z}{x+y}.$$

Do các góc tam diện D.A'B'C' và D.$A_0B_0C_0$ bằng nhau nên thể tích các tứ diện A'B'C'D và $A_0B_0C_0D$ tỉ lệ với tích các cạnh bên, tức là:

$$\frac{V_{\mathrm{A'B'C'D}}}{V_{\mathrm{A_0B_0C_0D}}} = \frac{\mathrm{A'D.B'D.C'D}}{\mathrm{A_0D.B_0D.C_0D}} = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}. \qquad (**)$$

(*) và (**) cho ta: $\dfrac{V_{\mathrm{A'B'C'D}}}{V_{\mathrm{ABCD}}} = 2\dfrac{V_{\mathrm{A'B'C'D}}}{V_{\mathrm{A_0B_0C_0D}}}$, hay $V_{\mathrm{A_0B_0C_0D}} = 2V_{\mathrm{ABCD}}$.

Bây giờ, ta chuyển chỗ các trọng lượng trong tam giác ABC sao cho tại điểm A' có trọng lượng $\dfrac{y+z}{2}$, tại điểm B' có trọng lượng $\dfrac{x+z}{2}$ và tại điểm C' có trọng lượng $\dfrac{x+y}{2}$. Khi đó, trọng tâm vẫn là D_0.

Tiếp đến, ta đặt tại các đỉnh A_0, B_0, C_0 các trọng lượng tương ứng $\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{2}, \dfrac{z}{2}$. Lúc đó, trọng tâm của cặp điểm (A_0, A') sẽ là điểm D, bởi vì:

$$\frac{\mathrm{A_0D}}{\mathrm{DA'}} = \frac{\mathrm{AD_0}}{\mathrm{D_0A'}} = \frac{y+z}{x} = \frac{\frac{y+z}{2}}{\frac{x}{2}}.$$

Tương tự như thế, trọng tâm của mỗi cặp điểm (B_0, B'), (C_0, C') cũng là điểm D. Mặt khác, trọng tâm của các điểm A', B', C' là D_0 và trọng khối của nó bằng $x+y+z$. Còn trọng tâm của các điểm A_0, B_0, C_0 nằm trong mặt phẳng ($A_0B_0C_0$), đồng thời cũng nằm trên đường thẳng D_0D, tức là điểm D_0, nhưng trọng khối của nó bằng $\frac{x+y+z}{2}$. Do đó

$$\frac{D_0D}{DD'} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{D'D_0}{D'D} = \frac{3}{2}.$$

Điều này có nghĩa là tỉ số các đường cao hạ từ các điểm D_0 và D lên mặt phẳng ($A_0B_0C_0$) bằng $3/2$. Nhưng các tứ diện $A_0B_0C_0D$ và $A_0B_0C_0D_0$ có chung đáy $A_0B_0C_0$ nên từ đây ta suy ra:

$$\frac{V_{A_0B_0C_0D_0}}{V_{A_0B_0C_0D}} = \frac{3}{2}.$$

Theo chứng minh trên ta lại có $V_{A_0B_0C_0D} = 2V_{ABCD}$, vì vậy:

$$V_{A_0B_0C_0D_0} = 3V_{ABCD},$$

là điều phải chứng minh.

Cách khác: *Bài toán trên có thể giải được bằng phương pháp toạ độ. Sau đây là lời giải vắn tắt:*

Chọn D làm điểm gốc của một hệ trực chuẩn sao cho các vector $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tương ứng. Khi đó, vector DD_0 là

$$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}, \text{ với } p+q+r=1 \text{ và } p, q, r > 0.$$

Vì vậy, điểm bất kì nằm trên đường thẳng đi qua A và song song với D_0D sẽ có: $\overrightarrow{DA} = \vec{a} + s(p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c})$, và điểm này nằm trên mặt phẳng (DBC) nếu $s = -\frac{1}{p}$.

Mà ta có A_0 thoả mãn điều kiện này nên :

$$\overrightarrow{DA_0} = -\frac{q}{p}\vec{b} - \frac{r}{p}\vec{c}.$$

Tương tự, các vector DB_0 và DC_0 tương ứng là:

$$-\frac{p}{q}\vec{a} - \frac{r}{q}\vec{c} \text{ và } -\frac{p}{r}\vec{a} - \frac{q}{r}\vec{b}.$$

Thể tích ABCD bằng $\frac{1}{6}\left|\vec{a} \times \vec{b}.\vec{c}\right|$ và thể tích $A_0B_0C_0D_0$ là

$$\frac{1}{6}\left|\left(p\vec{a}+\left(q+\frac{q}{p}\right)\vec{b}+\left(r+\frac{r}{p}\right)\vec{c}\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\left(p+\frac{p}{q}\right)\vec{a}+q\vec{b}+\left(r+\frac{r}{q}\right)\vec{c}\right).\left(\left(p+\frac{p}{r}\right)\vec{a}+\left(q+\frac{q}{r}\right)\vec{b}+r\vec{c}\right)\right|.$$

Suy ra rằng tỉ số thể tích ABCD và thể tích $A_0B_0C_0D_0$ là giá trị tuyệt đối của định thức:

$$\begin{vmatrix} p & q+\frac{q}{p} & r+\frac{r}{p} \\ p+\frac{p}{q} & q & r+\frac{r}{q} \\ p+\frac{p}{r} & q+\frac{q}{r} & r \end{vmatrix}$$

và ta tính được giá trị này là $2+p+q+r=3$, điều phải chứng minh.

***Bài 18.* (1964)**

Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là *a, b, c*. Ta lần lượt vẽ các tiếp tuyến với đường tròn nội tiếp của tam giác này song song với 3 cạnh tam giác. Mỗi tiếp tuyến hợp với hai cạnh kia của tam giác để tạo thành một tam giác mới, như thế ta được 3 tam giác mới tạo thành. Lại vẽ 3 đường tròn nội tiếp ở 3 tam giác mới đó. Hãy tính tổng diện tích 4 hình tròn nội tiếp nói trên.

Triangle ABC has sides a, b, c. Tangents to the inscribed circle are constructed parallel to the sides. Each tangent forms a triangle with the other two sides of the triangle and a circle is inscribed in each of these three triangles. Find the total area of all four inscribed circles.

Hướng dẫn:

Gọi các bán kính của 4 vòng tròn lần lượt là r_1, r_2, r_3, r_4 và S là diện tích tam giác ABC (xem hình bên dưới). Ta có:

$$r_1=\frac{S}{p}\quad\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)\text{ và } S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ba tam giác mới đồng dạng với tam giác ABC nên:

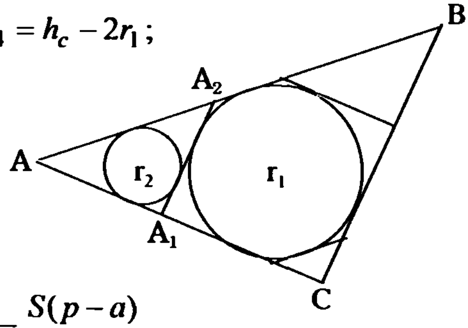
$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{h_2}{h_a};\frac{r_3}{r_1}=\frac{h_3}{h_b};\frac{r_4}{r_1}=\frac{h_4}{h_c},$$

trong đó h_i (i = 2, 3, 4) là các đường cao của các tam giác mới tương ứng với h_a, h_b, h_c là các đường cao của tam giác ABC ứng với 3 cạnh a, b, c.

Khoảng cách của các đường song song (chẳng hạn như A_1A_2 và BC) là $2r_1$. Từ đó :

$$h_2 = h_a - 2r_1\,;\ h_3 = h_b - 2r_1\,;\ h_4 = h_c - 2r_1\,;$$

$$h_a = \frac{2S}{a};\ h_b = \frac{2S}{b};\ h_c = \frac{2S}{c}.$$



Do vậy ta suy ra:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_a - 2r_1}{h_a} = 1 - \frac{2r_1}{h_a}.$$

$$\text{Vậy } r_2 = r_1 - \frac{2r_1^{\,2}}{h_a} = \frac{S}{p} - \frac{2a.S^2}{p^2.2S} = \frac{S(p-a)}{p^2}.$$

$$\text{Tương tự: } r_3 = \frac{S(p-b)}{p^2}\,;\ r_4 = \frac{S(P-c)}{p^2}.$$

Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích 4 vòng tròn, ta có:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \pi(r^2{}_1 + r^2{}_2 + r^3{}_2 + r^2{}_4) =$$

$$= \pi\left[\frac{S^2}{p^2} + \frac{S^2(p-a)^2}{p^4} + \frac{S^2(p-b)^2}{p^4} + \frac{S^2(p-c)^2}{p^4}\right] =$$

$$= \pi\frac{S^2}{p^4}\left[p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)^3}.$$

Tóm lại, tổng diện tích 4 hình tròn cần tính là:

$$S = \frac{\pi(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)^3}.$$

***Bài 19.* (1965)**

Cho tứ diện ABCD. Giả sử tứ diện này được chia làm hai phần bởi một mặt phẳng song song với AB và CD, khoảng cách từ mặt phẳng này đến AB bằng k lần khoảng cách đến CD.

Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

The tetrahedron ABCD is divided into two parts by a plane parallel to AB and CD. The distance of the plane from AB is k times its distance from CD.

Find the ratio of the volumes of the two parts.

Hướng dẫn:

Ta giả sử AB và CD lần lượt có độ dài là a và b, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD là d, góc giữa hai đường thẳng này là ω. Gọi (P) là mặt phẳng song song với hai cạnh đối AB và CD.

Giả sử (P) cắt tứ diện theo thiết diện là tứ giác EFGL. Dễ thấy EFGL là hình bình hành.

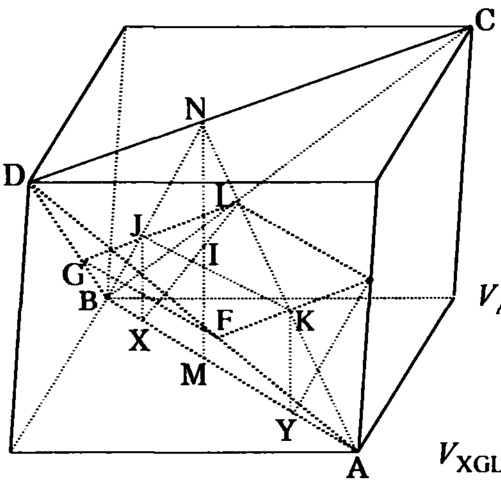
Gọi MN là đường vuông góc chung của AB và CD, giao điểm của MN với (P) là I. Mặt phẳng qua I và AB sẽ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến JK // AB. Dễ thấy rằng B, J, N thẳng hàng và N, K, A thẳng hàng.

Ta có hai tam giác JNK và BNA đồng dạng nhau, với NI và NM là hai đường cao của hai tam giác đó. Từ giả thiết ta có:

$$\frac{NI}{IM} = \frac{1}{k} \text{ với } NM = NI + IM;$$

$$\frac{NM}{NI} = \frac{AB}{KJ} = \frac{a}{KJ} \Leftrightarrow \frac{NI + IM}{NI} = 1 + \frac{IM}{NI} = 1 + k = \frac{a}{KJ}.$$

Suy ra $KJ = \dfrac{a}{k+1}$. Mặt khác ta lại có $\dfrac{GL}{DC} = \dfrac{BJ}{BN} = \dfrac{IM}{MN} = \dfrac{k}{k+1}$. Từ đó ta được $GL = \dfrac{kb}{k+1}$ và $IM = \dfrac{kd}{k+1}$.



Dựng JX và KY song song với IM; với X, Y nằm trên AB, suy ra các mặt phẳng (XGL) và (YEF) vuông góc với (P). Dễ thấy rằng khối XGL.YEF là lăng trụ đứng, do đó:

$$V_{AEF.BGL} = V_{XGL.YEF} + V_{AEFY} + V_{BGLX},$$

$$V_{XGL.YEF} = S_{YEF}.JK = \frac{1}{2}EF.YK.JK,$$

$$V_{XGL.YEF} = \frac{1}{2}\frac{kb}{k+1}.\frac{kd}{k+1}.\frac{a}{k+1} = \frac{abdk^2}{2(k+1)^3},$$

$$V_{AEFY} + V_{BGLX} = \frac{1}{3}S_{YEF}.AY + \frac{1}{3}S_{XGL}.BX = \frac{1}{6}YK.EF(AY + BX)$$

$$= \frac{1}{6}IM.GL(AB - JK) = \frac{1}{6}\frac{kd}{k+1}.\frac{kb}{k+1}\left(a - \frac{a}{k+1}\right) = \frac{abdk^3}{6(k+1)^3}.$$

Như vậy: $V_{AEF.BGL} = \frac{abdk^2}{2(k+1)^3} + \frac{abdk^3}{6(k+1)^3} = \frac{abdk^2}{6(k+1)^3}(3+k)$.

Chứng minh tương tự ta được: $V_{CEL.DGF} = \frac{abd(1+3k)}{6(k+1)^3}$.

Vậy tỉ số thể tích của hai phần do mặt phẳng (P) chia tứ diện ABCD là:

$$\frac{V_{AEF.BGL}}{V_{CEL.DGF}} = \frac{k^2(k+3)}{(3k+1)}.$$

***Bài 20.* (1965)**

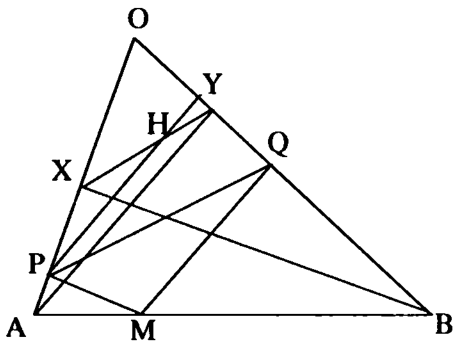
Tam giác OAB có góc O nhọn, M là một điểm tuỳ ý trên AB, P và Q lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống OA và OB tương ứng. Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác OPQ. Quỹ tích của H sẽ là gì nếu M di động trong miền trong của tam giác OAB?

The triangle OAB has angle O acute. M is an arbitary point on AB. P and Q are the feet of the perpendiculars from M to OA and OB respectively. What is the locus of H, the orthocenter of the triangle OPQ (the point where its altitudes meet)? What is the locus if M is allowed to vary of the interior of OAB?

Hướng dẫn:

Gọi X, Y lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ B, A tương ứng xuống OA và OB. Ta sẽ chứng minh rằng trực tâm của tam giác OPQ nằm trên XY. Thật vậy, dễ thấy rằng MP // BX, do đó

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PX}. \quad (1)$$



Gọi H là giao điểm của XY và đường vuông góc hạ từ P xuống OB. Ta có PH // AY vì chúng cùng vuông góc với OB, suy ra

$$\frac{YH}{HX} = \frac{AP}{PX}. \quad (2)$$

Mặt khác, ta cũng có MQ // AY nên

$$\frac{AM}{MB} = \frac{YQ}{BQ}. \quad (3)$$

(1), (2) và (3) cho ta: $\frac{YQ}{BQ} = \frac{YH}{HX}$, đẳng thức này chứng tỏ rằng QH song

song với BX, và vì vậy QH $\perp$ AO. Điều này cho ta kết luận H là trực tâm của tam giác OPQ, khẳng định trên được chứng minh.

Khi M trùng A thì H trùng X, M trùng B thì H trùng Y.

Để chứng minh phần đảo lại, ta lấy H bất kì trên đoạn XY. Qua H, lần lượt kẻ các đường song song với BX và AY, chúng tương ứng cắt OB, OA tại Q và P. Như thế, rõ ràng H là trực tâm của tam giác OPQ.

Từ P, kẻ đường song song với BX, đường này cắt AB tại M. Từ Q, kẻ đường song song với AY, cắt AB tại M'. Dùng các hệ thức Thales như trên, ta dễ dàng chứng minh được M trùng M'. Từ đó, suy ra H là điểm của quỹ tích.

Tóm lại, quỹ tích điểm H, trực tâm của tam giác OPQ, là đoạn thẳng XY, với X, Y được xác định như trên.

Bây giờ, ta giả sử M nằm trên A'B' song song với AB (với A' trên OA, B' trên OB) thì chứng minh trên cũng cho thấy quỹ tích H là đường song song với XY. Sự dịch chuyển của A'B' như thế trên toàn miền trong của tam giác OAB cũng cho ta hình ảnh của điểm M di chuyển trên toàn miền trong tam giác OAB. Khi ấy, đoạn song song với XY cũng quét toàn miền trong tam giác OXY. Vì vậy, khi M chuyển động trên toàn miền trong tam giác OAB, quỹ tích điểm H cũng là toàn miền trong tam giác OXY, với X, Y đã được xác định như trên.

***Bài 21.* (1966)**

Chứng minh rằng nếu BC + AC = $\text{tg}\frac{C}{2}$(BCtgA+ACtgB) thì ABC là tam giác cân.

Prove that if BC + AC = tg/2 (BCtg A +ACtgB), then the triangle ABC is isosceles.

Hướng dẫn:

Đặt BC = a, AC = b, nhân hai vế của $a + b = \text{tg}\frac{C}{2}(a\text{tg}A+b\text{tg}B)$ cho $\cos A.\cos B.\cos\frac{C}{2}$ ta được:

$$(a+b)\cos A.\cos B.\cos\frac{C}{2} = \text{tg}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}(a.\text{tg}A+b.\text{tg}B).\cos A.\cos B$$

$$\Leftrightarrow a.\cos A.\cos B.\cos\frac{C}{2} + b.\cos A.\cos B.\cos\frac{C}{2} =$$

$$= a\sin A.\cos B\sin\frac{C}{2} + b\cos A.\sin B.\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow a\cos B.\left(\cos A\cos\frac{C}{2} - \sin A\sin\frac{C}{2}\right) = b.\cos A\left(\sin B\sin\frac{C}{2} - \cos B\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a\cos B.\cos\left(A + \frac{C}{2}\right) = -b\cos A\cos\left(B + \frac{C}{2}\right)$$

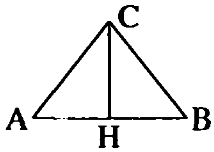
$$\Leftrightarrow a\cos B.\cos\left(A + \frac{C}{2}\right) + b\cos A\cos\left(B + \frac{C}{2}\right) = 0. \qquad (*)$$

Mặt khác ta có $\frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$ nên:

$$\cos\left(A + \frac{C}{2}\right) = \cos\left(A + 90^0 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) = \cos\left(90^0 + \frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right),$$

và tương tự $\cos\left(B + \frac{C}{2}\right) = -\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)$. Do vậy (*) trở thành:

$$\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)(a\cos B - b\cos A) = 0.$$



Từ đây ta suy ra:

* Hoặc $\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) = 0$, khi đó $\hat{A} = \hat{B}$;

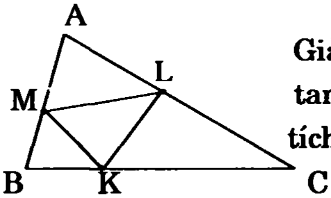
* Hoặc $(a\cos B - b\cos A) = 0 \Leftrightarrow a\cos B = b\cos A$, hay AH = HB, với H là chân đường cao hạ từ C của tam giác ABC.

Vậy tam giác ABC cân tại C.

***Bài 22.* (1966)**

Gọi K, L, M lần lượt là các điểm tuỳ ý nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng trong các tam giác AML, BKM, CLK có ít nhất một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng 1/4 diện tích tam giác ABC.

Take any points K, L, M on the sides BC, CA, AB of the triangle ABC. Prove that at least one of the triangles AML, BKM, CLK has area $\leq 1/4$ area ABC.



Hướng dẫn:

Giả sử điều ngược lại xảy ra, nghĩa là diện tích các tam giác AML, BKM, CLK đều lớn hơn 1/4 diện tích tam giác ABC. Khi đó, xét tam giác ALM, ta có:

$$4S_{ALM} > S_{ABC} \Leftrightarrow 4AL.AM.\sin A > AB.AC.\sin A$$

$$\Leftrightarrow 4AL.AM > AB.AC \Leftrightarrow 4AL.AM > (AM + BM)(AL + CL)$$

$$\Leftrightarrow 3AL.AM > AM.CL + BM.AL + BM.CL.$$

Đặt $k = \frac{BK}{CK}$, $l = \frac{CL}{AL}$, $m = \frac{AM}{BM}$, bất đẳng thức trên trở thành:

$$3 > l + \frac{1}{m} + \frac{l}{m}. \qquad (1)$$

Xét hoàn toàn tương tự đối với hai tam giác BKM và CLK, ta được:

$$3 > k + \frac{1}{l} + \frac{k}{l}, \qquad (2)$$

$$3 > m + \frac{1}{k} + \frac{m}{k}. \qquad (3)$$

Cọng (1), (2) và (3) vế theo vế ta có bất đẳng thức:

$$9 > k + l + m + \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l} + \frac{k}{l} + \frac{l}{m} + \frac{m}{k}. \qquad (4)$$

Tuy nhiên, theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có:

$$k + l + m + \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l} + \frac{k}{l} + \frac{l}{m} + \frac{m}{k} = k + \frac{1}{k} + m + \frac{1}{m} + l + \frac{1}{l} + \frac{k}{l} + \frac{l}{m} + \frac{m}{k}$$

$$\geq 2 + 2 + 2 + 3.\sqrt[3]{\frac{k}{l}.\frac{l}{m}.\frac{m}{k}} = 9. \qquad (5)$$

Mâu thuẫn giữa hai bất đẳng thức (4) và (5) cho ta điều phải chứng minh.

***Bài 23.* (1966)**

Trong không gian cho một hình tứ diện đều. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm nào đó đến các đỉnh của tứ diện là nhỏ nhất nếu và chỉ nếu điểm đó trùng với tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện đều đã cho.

Prove that a point in space has the smallest sum of the distances to the vertices of a regular tetrahedron iff it is the center of the tetrahedron.

Hướng dẫn:

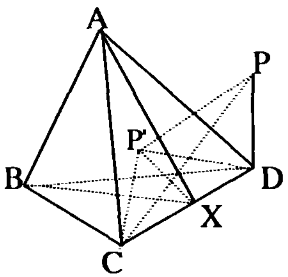
Giả sử ABCD là tứ diện đều có O là tâm hình cầu ngoại tiếp và P là điểm tuỳ ý trong không gian.

Gọi X là trung điểm CD. Cho P' là chân đường vuông góc hạ từ P xuống mặt phẳng (ABX). Ta sẽ chứng minh rằng nếu P không trùng với P' thì PA + PB + PC + PD > P'A + P'B + P'C + P'D.

Thật vậy, giả sử P không trùng P', ta có PA > P'A vì góc PP'A vuông; cũng vậy, ta có PB > P'B. Do BX và AX vuông góc CD nên (ABX) là mặt phẳng trung trực của CD. Suy ra P'CD là tam giác cân tại P', còn PCD thì không cân tại P (nếu ngược lại thì P trùng P' bởi khi ấy P cũng thuộc mặt phẳng (ABX)).

Mặt khác, PP' và CD nằm trên hai mặt phẳng song song nhau nên khoảng cách giữa P và CD cũng bằng khoảng cách giữa P' và CD. Điều này kéo theo PC + PD > P'C + P'D. Để thấy điều này, ta gọi C' và D' lần lượt là các điểm đối xứng của C và D qua đường thẳng P'P, ta có:

$$PC + PD = PC' + PD > C'D = P'C' + P'D = P'C + P'D.$$



Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Từ chứng minh trên, ta suy ra được rằng nếu P là điểm sao cho PA + PB + PC + PD nhỏ nhất, P phải nằm trong mặt phẳng (ABX); hoàn toàn tương tự, nó cũng phải nằm trong mặt phẳng (CDY), với Y là trung điểm AB. Suy ra rằng P phải nằm trên XY, đường nối trung điểm của cặp cạnh đối AB và CD.

Lặp lại lí luận này một cách tương tự như trên, P cũng nằm trên đường nối trung điểm hai cặp cạnh còn lại của tứ diện ABCD; nói cách khác, P trùng với tâm của tứ diện.

***Bài 24.* (1967)**

Cho hình bình hành ABCD có AB = a, AD = 1, $\widehat{BAD} = \alpha$, tam giác ABD có tất cả các góc đều nhọn (tam giác nhọn). Hãy chứng minh rằng các vòng tròn bán kính 1 có tâm lần lượt là A, B, C, D sẽ phủ kín hình bình hành này nếu và chỉ nếu $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha \ge a$.

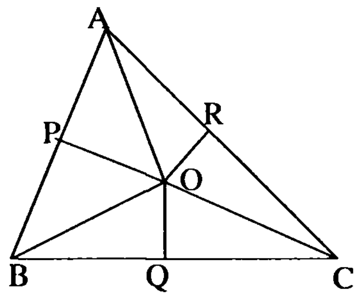
The parallelogram ABCD has AB = a, AD = 1, angle $\widehat{BAD} = \alpha$, *and the triangle ABD has all angles acute. Prove that circles radius 1 and center A, B, C, D cover the parallelogram iff* $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha \ge a$.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau đây:

Bổ đề: Gọi O là tâm và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó, các hình tròn tâm A, B, C với bán kính x sẽ phủ kín tam giác ABC nếu và chỉ nếu $x \ge R$.

Chứng minh: Rõ ràng các hình tròn tâm A, B, C bán kính x phủ tam giác ABC, muốn vậy nó phải phủ điểm O, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nhưng khoảng cách từ O đến A, B, C bằng R, vì vậy ta phải có $x \geq R$, do đó điều kiện cần là hiển nhiên.



Đảo lại, giả sử $x \geq R$, với O, R là tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta xét các vòng tròn tâm A, B, C bán kính R. Khi đó, gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu của O xuống các cạnh AB, BC, CA tương ứng, thì hình tròn tâm A bán kính R sẽ phủ tứ giác OAPR ; tương tự như thế, hình tròn tâm B bán kính R sẽ phủ tứ giác BPOQ và hình tròn tâm C bán kính R phủ tứ giác CQOR. Nói cách khác, các hình tròn tâm A, B, C bán kính R phủ kín tam giác ABC. Theo giả thiết, ta có $x \geq R$ nên hiển nhiên các hình tròn tâm A, B, C bán kính x phủ kín tam giác ABC.

Điều kiện đủ đã được chứng minh.

Trở lại bài toán:

Hiển nhiên rằng các hình tròn đơn vị (có bán kính 1) tâm A, B, C, D phủ kín hình bình hành nếu và chỉ nếu 3 vòng tròn đơn vị với tâm là A, B, D phủ kín tam giác ABD.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, áp dụng bổ đề trên, điều kiện cần và đủ để 3 vòng tròn đơn vị với tâm là A, B, D phủ kín tam giác ABD là: $1 \geq R$. (*)

Ta có: $BD = 2R\sin\alpha$, ngoài ra ta cũng có: $BD^2 = a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$.

Từ đó, $4R^2\sin^2\alpha = a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$.

Do (*) nên điều này tương đương với:

$$4\sin^2\alpha \geq a^2 + 1 - 2a\cos\alpha \Leftrightarrow 3\sin^2\alpha \geq a^2 + 1 - 2a\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2\alpha \geq a^2 - 2a\cos\alpha + \cos^2\alpha. \qquad (**)$$

Mặt khác, vì ABD là tam giác nhọn nên chân đường cao H kẻ từ D xuống AB phải nằm trên đoạn AB, do vậy ta suy ra $\cos\alpha \leq a$. Từ đó, giả thiết $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha \geq a$ của bài toán trở thành:

$$\sqrt{3}\sin\alpha \geq a - \cos\alpha \Leftrightarrow 3\sin^2\alpha \geq a^2 - 2a\cos\alpha + \cos^2\alpha. \qquad (***)$$

(**) và (***) cho ta điều phải chứng minh.

Bài 25. **(1967)**

Chứng minh rằng nếu một tứ diện chỉ có đúng một cạnh có độ dài lớn hơn 1 thì thể tích của tứ diện đó lớn nhất là $1/8$.

Prove that a tetrahedron with just one edge length greater than 1 has volume at most $1/8$.

Hướng dẫn:

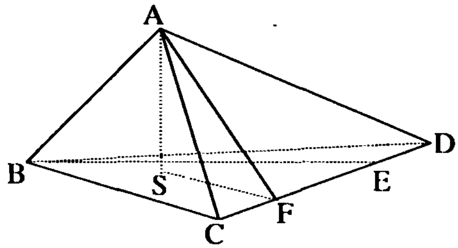
Giả sử hình tứ diện ABCD có cạnh lớn nhất là AB. Như vậy, trong các tam giác ACD và BCD, tất cả các cạnh đều không lớn hơn 1; các chiều cao tương ứng AF và BE của chúng không lớn hơn

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{4}},$$

trong đó $CD = a \le 1$.

Chiều cao của hình tứ diện là

$$AS \le AF \le \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$



(do tam giác ASF vuông tại S có AF là cạnh huyền).

Thể tích của hình tứ diện là:

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD}.AS = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.BE.CD.AS \le \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\times a\left(1-\frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{24}a(4-a^2).$$

Để tìm cực đại của V, ta xét biểu thức $a(4-a^2)$. Vì $0 \le a \le 1$, nên $a(4-a^2) \le 3$ và $V \le \frac{1}{24}a(4-a^2) \le \frac{1}{8}$, ta có điều phải chứng minh.

***Bài 26.* (1967)**

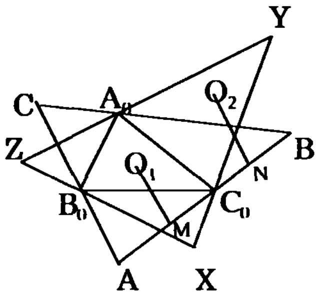
$A_0B_0C_0$ và $A_1B_1C_1$ là các tam giác nhọn. Hãy dựng tam giác ABC có diện tích lớn nhất sao cho nó đồng dạng với tam giác $A_1B_1C_1$ và ngoại tiếp $A_0B_0C_0$ (nghĩa là cạnh BC chứa điểm A_0, cạnh CA chứa B_0 và cạnh AB chứa điểm C_0).

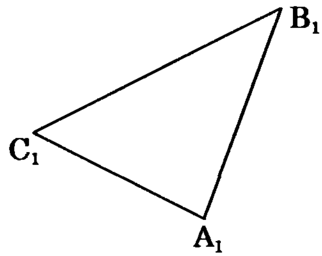
$A_0B_0C_0$ and $A_1B_1C_1$ are acute-angled triangles. Construct the tria--ngle ABC with the largest possible area which is circumscribed about $A_0B_0C_0$ (BC contains A_0, CA contains B_0 and AB contains C_0) and similar to $A_1B_1C_1$.

Hướng dẫn:

Lấy bất kì một tam giác đồng dạng với $A_1B_1C_1$ và ngoại tiếp $A_0B_0C_0$ theo nghĩa đã nói ở đầu bài, chẳng hạn, qua A_0, B_0, C_0 lần lượt kẻ các đường song song với các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ta được tam giác XYZ với A_0 nằm giữa YZ, B_0 nằm giữa ZX và C_0 nằm giữa XY.

Bây giờ, giả sử ABC là một tam giác đồng dạng với $A_1B_1C_1$ và ngoại tiếp $A_0B_0C_0$ sao cho cạnh BC chứa điểm A_0, cạnh CA chứa B_0 và cạnh AB chứa điểm C_0. Khi đó, C phải nằm trên đường tròn đi qua 3 điểm A_0, B_0, Z, vì dễ thấy các góc C, Z, C_1 bằng nhau. Tương tự như thế, B nằm trên đường tròn đi qua 3 điểm C_0, A_0, Y và A nằm trên đường tròn đi qua 3 điểm B_0, C_0, X.





Ta xét cạnh AB, cạnh này đi qua C_0. Dễ thấy độ dài AB bằng 2 lần độ dài đoạn nối tâm của hai đường tròn (B_0, C_0, X, A) và (C_0, A_0, Y, B), đó là hai đường tròn chứa A và B như đã nói, bởi vì nếu ta hạ đường vuông góc từ 2 tâm O_1, O_2 xuống AB thì chân các đường vuông góc tương ứng (M, N) là trung điểm của AC_0 và BC_0. Như thế, AB lớn nhất khi O_1O_2 // AB. Vì tất cả các tam giác ABC đang xét đều đồng dạng với nhau nên diện tích tam giác ABC lớn nhất khi AB lớn nhất.

Hoàn toàn tương tự với các cạnh khác, ta đi đến cách dựng tam giác ABC thoả mãn yêu cầu đề bài như sau:

Dựng tam giác XYZ như trên. Tiếp đến, dựng các tâm điểm O_1, O_2, O_3 của 3 đường tròn ngoại tiếp các tam giác B_0C_0X, C_0A_0Y, A_0B_0Z. Qua A_0 , B_0, C_0 ta lần lượt dựng các đường song song với các cạnh của tam giác $O_1O_2O_3$, chúng cắt nhau ở A, B, C sao cho BC chứa điểm A_0, cạnh CA chứa B_0 và cạnh AB chứa điểm C_0. Dễ dàng chứng minh được đó là tam giác phải dựng.

***Bài 27.* (1968)**

Tìm tất cả các tam giác có độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp, và tam giác này có số đo một góc gấp đôi số đo góc thứ hai.

Find all triangles whose side lengths are consecutive integers, and one of whose angles is twice another.

Hướng dẫn:

Giả sử tam giác ABC có số đo các cạnh BC, AC và AB lần lượt là

a, a + 1 và a + 2, với a là một số tự nhiên. Định lí hàm số cosin cho ta:

$$a^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2 - 2(a+1)(a+2)\cos A$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 + 6a + 4)\cos A = a^2 + 6a + 5$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2 + 6a + 5}{2a^2 + 6a + 4} = \frac{(a+1)(a+5)}{(a+1)(2a+4)} = \frac{(a+5)}{(2a+4)}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta tính được:

$$\cos B = \frac{a+1}{2a}, \quad \cos C = \frac{a-3}{2a}.$$

Sử dụng công thức $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ta được:

$$\cos C = 2\cos^2 A - 1 \Leftrightarrow \frac{a-3}{2a} = \frac{2(a+5)^2}{(2a+4)^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-3}{a} = \frac{-a^2 + 2a + 17}{a^2 + 4a + 4} \Leftrightarrow 2a^3 - a^2 - 25a - 12 = 0.$$

Nghiệm nguyên dương của phương trình này nếu có là ước của 6. Thử lại, ta tìm được $a = 4$. Hoàn toàn tương tự, từ B = 2A ta tìm được $a = 1$ và từ C = 2B ta không tìm được a.

Khi a = 1, ta được tam giác với 3 cạnh 1, 2, 3, tức là tam giác suy biến với 3 đỉnh thẳng hàng. Với $a = 4$, ta được tam giác có ba cạnh là 4, 5, 6 thoả mãn điều kiện ở đề bài.

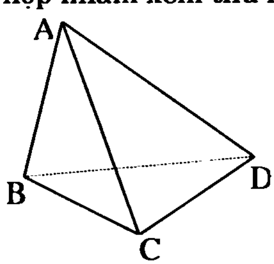
***Bài 28.* (1968)**

Chứng minh rằng mọi tứ diện đều có một đỉnh mà 3 cạnh xuất phát từ đỉnh đó có độ dài thích hợp để lập thành một tam giác.

Prove that every tetrahedron has a vertex whose three edges have the right lengths to form a triangle.

Hướng dẫn:

Điểm mấu chốt của bài toán ở đây là ta phải xét cạnh dài nhất của tứ diện. Điều này rất có lợi vì nó tránh cho ta phải xét nhiều trường hợp nhằm xem thử một cạnh có dài hơn tổng hai cạnh kia hay không.



Cho AB là cạnh dài nhất của tứ diện ABCD. Giả sử ngược lại, khẳng định của bài toán là sai, nghĩa là không có đỉnh nào trong tứ diện ABCD để cho 3 cạnh xuất phát từ đỉnh đó có độ dài thích hợp để lập thành một tam giác.

Lúc đó, ta phải có:

$$AB > AC + AD \text{ (xét đỉnh A)},$$
$$BA > BC + BD \text{ (xét đỉnh B)}.$$

Từ đó suy ra

$$2AB > AC + AD + BC + BD. \quad (*)$$

Nhưng trong các tam giác ABC và ABD ta lại có:

$$AB < AC + CB, \quad AB < AD + DB$$

nên ta được $$2AB < AC + CB + AD + DB. \quad (**)$$

Mâu thuẫn giữa (*) và (**) cho ta điều phải chứng minh.

***Bài 29.* (1969)**

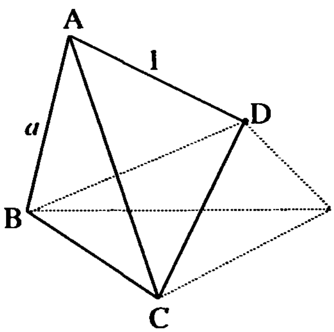
Giả sử a là một số dương cho trước. Với mỗi $k = 1, 2, 3, 4, 5$, hãy tìm điều kiện cho số a để tồn tại một tứ diện mà độ dài k cạnh là bằng a, các cạnh còn lại có độ dài 1.

For each of k =1, 2, 3, 4, 5 find necessary and sufficient conditions on a > 0 such that there exists a tetrahedron with k edges length a and the remainder length 1.

Hướng dẫn:

Ta xét tứ diện ABCD.

* Giả sử $k = 1$, AB có độ dài a, các cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1.



Khi đó, ta có thể xoay các tam giác ACD và BCD quanh trục CD và làm thay đổi độ dài AB. Trong quá trình xoay này, các tam giác ACD và BCD vẫn đều với cạnh bằng 1, còn AB thì thay đổi từ độ dài bé nhất là 0 (khi A trùng B) cho đến độ dài lớn nhất là lúc A và B đối xứng nhau qua CD, dễ thấy độ dài lớn nhất của AB lúc đó là $\sqrt{3}$.

Ta sẽ loại trừ hai giá trị cực trị đó của AB, khi mà tứ diện ABCD suy biến thành một hình phẳng, do đó, khoảng xác định của a (hay điều kiện để tồn tại tứ diện theo yêu cầu đề bài khi $k = 1$) là: $0 < a < \sqrt{3}$.

* Khi $k = 5$, tiến hành tương tự ta có:

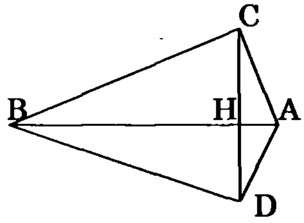
$$0 < 1 < \sqrt{3}a \Leftrightarrow a > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

* Khi $k = 2$, có hai trường hợp xảy ra: hoặc hai cạnh có độ dài a kề nhau (chung đỉnh), hoặc chúng là hai cạnh đối nhau trong tứ diện.

+ Xét trường hợp thứ nhất, ta giả sử hai cạnh AC và AD có độ dài a. Cũng tiến hành quay quanh CD như trên, ta có hai trường hợp A, B, C, D đồng phẳng, đó là:

a) A và B nằm khác phía đối với CD. Lúc đó, ta có:

$$BH = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

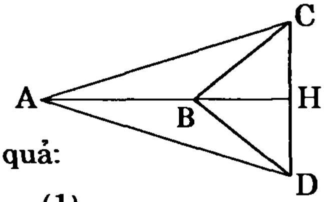


$$AH = AB - BH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

suy ra $$a = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

b) A và B nằm cùng phía với CD.

Dễ dàng tính được: $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.



Như vậy trong trường hợp này ta thu được kết quả:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}. \qquad (1)$$

+ Xét trường hợp thứ hai, giả sử AB = CD = a. Cũng xoay như thế, ta được $a = 0$ lúc A trùng B. Ta tăng a dần để đến khi tứ diện ABCD trở thành tứ giác ADBC, đây là hình vuông có cạnh bằng 1 và do đó $a = \sqrt{2}$. Từ đó ta được: $0 < a < \sqrt{2}$. (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có điều kiện của a là $\sqrt{2-\sqrt{3}} < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

* Tiến hành tương tự cho trường hợp $k = 4$, ta có:

$$a > \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

* Với $k = 3$, mọi giá trị $a > 0$ đều chấp nhận được. Khi $a \le 1$, ta có thể dựng một tam giác đều có cạnh bằng a, và dựng đỉnh thứ tư của tứ diện sao cho đỉnh này cách 3 đỉnh của tam giác đó một đoạn bằng 1. Khi $a \ge 1$, ta lại dựng một tam giác đều có cạnh bằng 1, còn đỉnh thứ tư thì cách đều 3 đỉnh của tam giác đó một đoạn bằng a.

***Bài 30.* (1969)**

Gọi C là một điểm trên nửa đường tròn đường kính AB, D là chân đường vuông góc với AB kẻ từ C. Gọi (K_1) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC; (K_2) là đường tròn tiếp xúc với CD, DA và nửa đường tròn; (K_3) là đường tròn tiếp xúc với CD, DB và nửa đường tròn. Chứng minh rằng (K_1), (K_2), (K_3) còn có thêm một tiếp tuyến chung nữa ngoài AB.

C is a point on the semicircle diameter AB, between A and B. D is the foot of the perpendicular from C to AB. The circle (K_1) is the incircle of ABC, the circle (K_2) touches CD, DA and the semicircle, the circle (K_3) touches CD, DB and the semicircle. Prove that (K_1), (K_2) and (K_3) have another common tangent apart from AB.

Hướng dẫn:

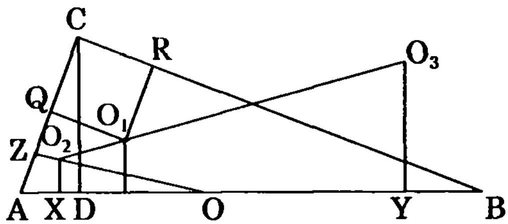
Giả sử O_1, O_2, O_3 tương ứng là tâm của 3 đường tròn (K_1), (K_2), (K_3). Bài toán sẽ được giải xong nếu ta chứng minh được rằng O_1 nằm trên đường thẳng O_2O_3, bởi vì lúc đó, chỉ cần lấy ảnh đối xứng của AB qua đường thẳng O_2O_3 thì ta sẽ có tiếp tuyến chung thứ hai của 3 đường tròn. Đặt AB = c, BC = a, CA = b. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là các bán kính các đường tròn (K_1), (K_2), (K_3). Vòng tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB tại P, AC tại Q và BC tại R. Khi đó, dễ thấy $\widehat{ACB} = 90^0$, O_1QCR là hình vuông, AQ = AP và BP = BR, do đó ta có:

$$r_1 = O_1R = AC - AQ = AC - AP = b - AP,$$

$$r_1 = O_1Q = BC - BR = BC - BP = a - (c - AP),$$

và cọng vế theo vế ta được:

$$r_1 = \frac{a+b-c}{2}, \ AP = \frac{b+c-a}{2}.$$



Giả sử (K_2) tiếp xúc AB tại X, (K_3) tiếp xúc AB tại Y. gọi O là trung điểm AB. Xét tam giác vuông O_2XO. Vì O_2 là tâm vòng (K_2) tiếp xúc với nửa đường tròn đường kính AB nên nếu gọi Z là điểm tiếp xúc này thì dễ thấy

$$OO_2 = OZ - O_2Z = OA - O_2Z = \frac{c}{2} - r_2.$$

Ta cũng có $OX = OD + DX = \frac{c}{2} - AD + r_2$.

Sử dụng hệ thức về hai tam giác đồng dạng ta được:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AD = \frac{b^2}{c}.$$

Từ đó, áp dụng Định lí Pythagore ta suy ra:

$$\left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2 = r_2^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{c} + r_2\right)^2,$$

khai triển và sắp xếp lại ta được hệ thức:

$$r_2^2 - 2r_2\left(c - \frac{b^2}{c}\right) - \left(b^2 - \frac{b^4}{c^2}\right) = 0.$$

Nhưng ABC là tam giác vuông, do đó $c^2 = a^2 + b^2$, suy ra:

$$c - \frac{b^2}{c} = \frac{a^2}{c} \text{ và } b^2 - \frac{b^4}{c^2} = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

Từ đó ta được: $r_2^2 - 2r_2\frac{a^2}{c} - \frac{a^2b^2}{c^2} = 0$, phương trình bậc hai theo r_2 này cho ta hai nghiệm:

$$r_2 = a - \frac{a^2}{c} \ (> 0) \text{ và } r_2 = -a + \frac{a^2}{c} \ (< 0).$$

Vậy $r_2 = a - \dfrac{a^2}{c}$. Tương tự: $r_3 = b - \dfrac{b^2}{c}$. Do đó:

$$O_2X + O_3Y = XY = r_2 + r_3 = a + b - c = 2r_1,$$

$$XP = AP - AX = AP - (AD - DX) =$$

$$\frac{b+c-a}{2} - \left(\frac{b^2}{c} - r_2\right) = \frac{b+c-a}{2} - (c-a) = \frac{a+b-c}{2} = r_1.$$

Tóm lại, ta có được $XP = PY = PO_1$ và $XO_2 + YO_3 = 2PO_1$, nên ta suy ra O_1 nằm trên đường thẳng O_2O_3, đó là điều phải chứng minh.

***Bài 31.* (1969)**

Cho n điểm trong mặt phẳng, với $n > 4$ và không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng tỏ rằng có ít nhất $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ giác lồi có đỉnh nằm trong số n điểm đã cho.

Given $n > 4$ points in the plane, no three collinear. Prove that there are at least $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$ convex quadrilaterals with vertices amongst the n points.

Hướng dẫn:

Trước tiên, ta xét 5 điểm bất kì, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Ta vạch một bao lồi từ 5 điểm đó. Nếu bao lồi này có hơn 3 điểm thì hiển nhiên có ít nhất 1 tứ giác lồi. Nếu chỉ gồm 3 điểm, chẳng hạn A, B, C, thì hai điểm D, E còn lại ắt phải nằm trong tam giác ABC. Khi đó, có hai đỉnh của tam giác ABC nằm cùng phía đối với đường thẳng DE, và cùng với D, E, hai đỉnh đó tạo thành một tứ giác lồi. Như vậy, mệnh đề cần chứng minh đúng với $n = 5$ (để ý $\frac{(5-3)(5-4)}{2} = 1$).

Xét n điểm với $n > 5$. Vì không có 3 điểm nào thẳng hàng nên số tất cả các cách chọn n điểm như trên là:

$$C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}.$$

Mỗi cách chọn này cho ta ít nhất 1 tứ giác lồi; tuy nhiên, bất kì tứ giác lồi nào trong số đó cũng có thể được lập từ $(n-4)$ tập hợp khác nhau gồm 5 điểm nói trên, do vậy, có ít nhất

$$\frac{1}{n-4}.C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}$$

số tất cả các tứ giác lồi được thành lập từ n điểm đã cho.

Để kết thúc chứng minh, ta sẽ chứng tỏ rằng:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120} \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2},\ \forall n \geq 5.$$

Điều phải chứng minh này tương đương với:

$$n(n-1)(n-2) \geq 60(n-4) \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - 60(n-4) \geq 0.$$

Dễ dàng thấy rằng các số $n = 5$ và $n = 6$ là nghiệm của phương trình $n(n-1)(n-2) - 60(n-4) = 0$, do đó ta có thể phân tích thành nhân tử như sau: $n(n-1)(n-2) - 60(n-4) = (n-5)(n-6)(n+8)$.

Với mọi n nguyên dương và ≥ 5, lập bảng xét dấu, dễ thấy dấu của $(n-5)(n-6)(n+8)$ cũng là dấu của $(n-5)(n-6)$, và ta được

$$(n-5)(n-6) = 0 \text{ khi } n = 5, 6;\ (n-5)(n-6) > 0 \text{ khi } n > 6,$$

suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 32.* (1970)**

Cho điểm M tuỳ ý trên cạnh BC của tam giác ABC. Gọi r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC, AMC, BMC. Gọi q là bán kính đường tròn bàng tiếp của góc C (tức là đường tròn nằm phía đối diện với C so với cạnh AB, tiếp xúc với AB và các cạnh AC, BC kéo dài). Tương tự, gọi q_1, q_2 tương ứng là các bán kính các đường tròn bàng tiếp của hai góc B và A. Chứng minh rằng

$$r_1 r_2 q = r q_1 q_2.$$

M is any point on the side AB of the triangle ABC. r, r_1, r_2 are the radii of the circles inscribed in ABC, AMC, BMC. q is the radius of the circle on the opposite side of AB to C, touching the three sides of AB and the extensions of CA and CB. Similarly, q_1 and q_2. Prove that

$$r_1r_2q = rq_1q_2.$$

Hướng dẫn:

Ta bắt đầu bằng việc tính toán để biểu thị r/q. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và X là tâm đường tròn bàng tiếp của góc C. Vì O là giao điểm của hai đường phân giác hai góc A và B nên nếu gọi M là tiếp điểm của đường tròn (O) với AB ta có:

$$\text{BM} = \text{OM}.\cot g\frac{\text{B}}{2} = r\cot g\frac{\text{B}}{2},\ \text{AM} = \text{OM}.\ \cot g\frac{\text{A}}{2} = r\cot g\frac{\text{A}}{2},$$

suy ra: $$c = \text{AB} = \text{AM} + \text{BM} = r\left(\cot g\frac{\text{A}}{2} + \cot g\frac{\text{B}}{2}\right). \quad (1)$$

Vì X nằm trên phân giác các góc ngoài của góc A và góc B nên

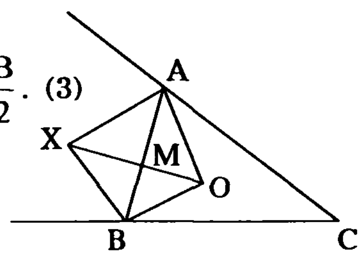
$$\text{X}\hat{\text{A}}\text{B} = 90^0 - \frac{\text{A}}{2} \text{ và } \text{X}\hat{\text{B}}\text{A} = 90^0 - \frac{\text{B}}{2}, \text{ từ đó:}$$

$$\text{AM} = \text{XM.cotg}\left(90^0 - \frac{\text{A}}{2}\right) = q.\text{tg}\frac{\text{A}}{2},\ \text{BM} = \text{XM.cotg}\left(90^0 - \frac{\text{B}}{2}\right) = q.\text{tg}\frac{\text{B}}{2},$$

suy ra $$c = \text{AB} = \text{AM} + \text{BM} = q\left(tg\frac{\text{A}}{2} + tg\frac{\text{B}}{2}\right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được:

$$\frac{r}{q} = \frac{tg\frac{\text{A}}{2} + tg\frac{\text{B}}{2}}{\cot g\frac{\text{A}}{2} + \cot g\frac{\text{B}}{2}} = \frac{tg\frac{\text{A}}{2} + tg\frac{\text{B}}{2}}{\dfrac{tg\frac{\text{A}}{2} + tg\frac{\text{B}}{2}}{tg\frac{\text{A}}{2}.tg\frac{\text{B}}{2}}} = tg\frac{\text{A}}{2}.tg\frac{\text{B}}{2}. \quad (3)$$



Lí luận và tính toán như trên được lặp lại hoàn toàn tương tự đối với các tam giác khác, ta được:

$$\frac{r_1}{q_1} = \text{tg}\frac{\text{A}}{2}.\text{tg}\frac{\text{C}\hat{\text{M}}\text{A}}{2},\ \frac{r_2}{q_2} = \text{tg}\frac{\text{B}}{2}.\text{tg}\frac{\text{C}\hat{\text{M}}\text{B}}{2},$$

nhưng vì $\frac{\text{C}\hat{\text{M}}\text{B}}{2} = 90^0 - \frac{\text{C}\hat{\text{M}}\text{A}}{2}$, hay $\text{tg}\frac{\text{C}\hat{\text{M}}\text{B}}{2} = \dfrac{1}{\text{tg}\frac{\text{C}\hat{\text{M}}\text{A}}{2}}$ nên:

$$\frac{r_1}{q_1}.\frac{r_2}{q_2} = \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{C\hat{M}A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C\hat{M}B}{2} = \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 33.* (1970)**

Tứ diện ABCD có góc $B\hat{D}C = 90^0$ và chân đường vuông góc hạ từ D xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$.

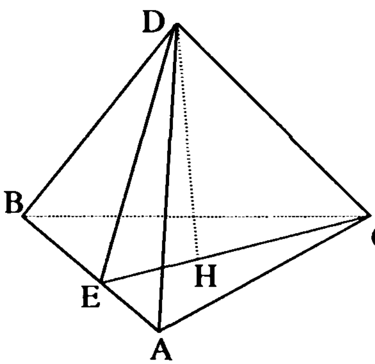
Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

In the tetrahedron ABCD, angle $B\hat{D}C = 90^0$ and the foot of the perpendicular from D to (ABC) is the intersection of the altitudes of ABC. Prove that: $(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$.

When do we have equality?

Hướng dẫn:

Trước tiên, ta sẽ chứng minh rằng $C\hat{D}A = 90^0$.



Thật vậy, gọi H là hình chiếu của D xuống mặt phẳng (ABC), giả sử CH cắt AB tại E. Do AB $\perp$ CE và AB $\perp$ DH nên AB $\perp$ (DEC), suy ra AB $\perp$ DE. Từ đó, các tam giác vuông BED và CEB cho ta:

$$BD^2 = DE^2 + BE^2,\ CB^2 = CE^2 + BE^2.$$

Trừ vế theo vế hai đẳng thức trên ta được:

$$CB^2 - BD^2 = CE^2 - DE^2.$$

Nhưng vì tam giác BDC vuông nên ta lại có $CB^2 - BD^2 = CD^2$, suy ra $CE^2 = CD^2 + DE^2$, tức là tam giác CDE vuông tại D.

Tóm lại, ta có CD $\perp$ DB và CD $\perp$ DE nên CD $\perp$ AD. Nói cách khác, $C\hat{D}A = 90^0$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $A\hat{D}B = 90^0$.

Từ đó, ta được:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2). \qquad (1)$$

Mặt khác, bất đẳng thức Cauchy cho ta:

$$(AB + BC + CA)^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2AB.BC + 2BC.CA + 2CA.AB$$
$$\le 3(AB^2 + BC^2 + CA^2). \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được $(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi AB = BC = CA.

***Bài 34.* (1971)**

Cho tứ diện ABCD có tất cả các mặt đều là các tam giác nhọn. Lấy các điểm tuỳ ý X, Y, Z, T tương ứng nằm bên trong các đoạn AB, BC, CD và AD.

a) Giả sử rằng $\mathrm{D\hat{A}B} + \mathrm{B\hat{C}D} \neq \mathrm{C\hat{D}A} + \mathrm{A\hat{B}C}$, hãy chứng minh rằng không thể có một đường khép kín XYZTX nào có chiều dài cực tiểu.

b) Giả sử $\mathrm{D\hat{A}B} + \mathrm{B\hat{C}D} = \mathrm{C\hat{D}A} + \mathrm{A\hat{B}C}$, khi đó, hãy chứng minh rằng có vô số đường khép kín XYZTX có chiều dài bé nhất là 2ACsin$k$, với $2k = \mathrm{B\hat{A}C} + \mathrm{C\hat{A}D} + \mathrm{D\hat{A}B}$.

All faces of the tetrahedron ABCD *are acute-angled. Take a point* X *in the interior of the segment* AB, *and similarly* Y *in* BC, Z *in* CD *and* T *in* AD.

a) If $D\hat{A}B + B\hat{C}D \neq C\hat{D}A + A\hat{B}C$, *then prove that none of the closed paths* XYZTX *has minimal length;*

b) If $D\hat{A}B + B\hat{C}D = C\hat{D}A + A\hat{B}C$, *then there are infinitely many shortest paths XYZTX, each with length* 2ACsin*k*, *where*

$$2k = B\hat{A}C + C\hat{A}D + D\hat{A}B.$$

Hướng dẫn:

Ta giả sử tứ diện đã cho có các mặt được làm bằng bìa cạc-tông, và ta có thể rọc tứ diện này theo các cạnh để trải các mặt ấy ra trên một mặt phẳng. Giả sử rằng khi ấy ta được hình lục giác CAC'BDB'.

Lúc này, đường khép kín như đã nói ở đầu bài là đường nối Y trên B'C và Y' trên cạnh đối diện BC' của hình lục giác. Rõ ràng là đường này có độ dài cực tiểu khi nó là đường thẳng.

Nếu B'C và BC' song song với nhau thì ta có thể lấy Y tuỳ ý trên cạnh đó, khi đó, độ dài đường khép kín đạt giá trị nhỏ nhất.

Nhưng nếu BC' và B'C không song song thì độ dài đường khép kín chỉ đạt cực tiểu ở một vị trí nào đó.

Giả sử CC' < BB'. Nếu góc $\mathrm{C\hat{A}C'}$ bên trong lục giác bé hơn 180^0, cực tiểu của đường khép kín sẽ đạt được khi Y trùng với C. Điều này không thể được vì đề bài đòi hỏi Y nằm bên trong cạnh BC.

Nếu góc $\mathrm{C\hat{A}C'}$ bên trong lục giác lớn hơn 180^0, cực tiểu của đường khép kín sẽ đạt được khi X và T trùng nhau tại A. Điều này cũng không được phép như đã nói.

Đến đây, bài toán rút lại là: tìm điều kiện để B'C và BC' song song nhau. Dễ thấy điều kiện đó là

$$\widehat{BCD} + \widehat{DCA} + \widehat{CAD} + \widehat{BAD} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 360^0,$$

nhưng vì $\widehat{DCA} + \widehat{CAD} = 180^0 - \widehat{ADC}$, $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{ABC}$ nên ta có điều phải chứng minh.

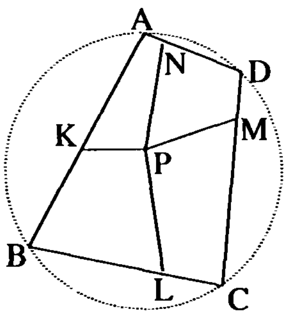
***Bài 35.* (1972)**

Cho n là số tự nhiên lớn hơn 4, chứng minh rằng mọi tứ giác nội tiếp đều có thể được phân chia làm n tứ giác nội tiếp.

Given n > 4, prove that every cyclic quadrilateral can be dissected into n cyclic quadrilaterals.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta nhận xét rằng tứ giác nội tiếp ABCD luôn luôn có thể được phân chia thành 4 tứ giác nội tiếp.



Thật vậy, ta lấy P tùy ý bên trong tứ giác ABCD, gọi K là một điểm trên cạnh AB. Nối PK. Tiếp đến, ta lấy trên cạnh BC một điểm L sao cho $\widehat{KPL} = 180^0 - \hat{B}$ (điều này chứng tỏ tứ giác KPLB nội tiếp). Ta lại lấy M trên CD sao cho $\widehat{LPM} = 180^0 - \hat{C}$; sau đó, lấy N trên AD sao cho $\widehat{MPN} = 180^0 - \hat{D}$.

Lúc đó, dễ dàng chứng minh được rằng

$$\widehat{NPK} = 180^0 - \hat{A}.$$

Tuy nhiên, ta còn phải chứng minh rằng các điểm P, L, M lấy như trên thoả mãn ý định của chúng ta, nghĩa là nó phải nằm trên các cạnh như đã nói. Điều này tuỳ thuộc vào cách lấy điểm các K và P mà phần trình bày sau đây sẽ rõ.

Rõ ràng là, nếu tứ giác nội tiếp ABCD có hai cạnh song song với nhau (AB // CD) thì bài toán xem như được giải quyết, bởi vì lúc đó, ta có thể chia nhỏ tứ giác ABCD thành n tuỳ ý tứ giác (cũng nội tiếp) bằng n đường thẳng song song AB // CD. Vì vậy, bài toán sẽ được giải xong nếu ta chọn các điểm K và P thế nào cho một trong các tứ giác nội tiếp mới thành lập có hai cạnh song song nhau. Điều này thì dễ, bởi K tuỳ ý, do đó, ta lấy PK // AD, lúc này, chắc chắn PL // CD vì:

$$K\hat{P}L = 180^0 - \hat{B} = \hat{D}.$$

Vấn đề còn lại là xem xét sao cho các điểm K, L, M, N tương ứng nằm trên các cạnh AB, BC, CD, AD.

Trước hết, xét K và L. K không thể nằm trên AD vì ta có PK // AD. Như thế, chỉ cần lấy P đủ gần điểm D thì K sẽ nằm trên cạnh AB (tránh tình trạng đường PK cắt BC). Tương tự như thế, ta cũng lấy P đủ gần D để bảo đảm cho L nằm trên cạnh BC. Lúc đó, ta giả sử cả M lẫn N đều nằm trên AD, thế thì bằng cách giữ cho K cố định, ta kéo P tiến về gần sát với CD, N sẽ dịch chuyển lên CD, để lại M nằm trên AD. Bài toán đã được chứng minh.

Bài 36. **(1973)**

Cho $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, ..., \overrightarrow{OP_{2n+1}}$ là các vector đơn vị trong một mặt phẳng. Các điểm P_1, P_2, ..., P_{2n+1} đều cùng nằm về một phía của một đường thẳng qua O. Chứng minh rằng:

$$\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{2n+1}}\right| \geq 1.$$

$\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, ..., \overrightarrow{OP_{2n+1}}$ *are unit vectors in a plane.* P_1, P_2, ... , P_{2n+1} *all lie on the same side of a line through* O. *Prove that*

$$\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{2n+1}}\right| \geq 1.$$

Hướng dẫn:

Ta tiến hành chứng minh bằng quy nạp theo n.

Hiển nhiên mệnh đề đúng với $n = 1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $2n - 1$, tức là nó đúng với hệ vector $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, ..., \overrightarrow{OP_{2n-1}}$. Ta xét hệ vector $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, ..., \overrightarrow{OP_{2n+1}}$, và sắp xếp lại sao cho OP_i, i = 1, 2,... 2n - 1, nằm giữa OP_{2n} và OP_{2n+1}. Lúc đó, rõ ràng vector $\vec{u} = \overrightarrow{OP_{2n}} + \overrightarrow{OP_{2n+1}}$ có phương nằm trên phân giác của góc $P_{2n}\hat{O}P_{2n+1}$, suy ra vector này lập thành một góc bé hơn 90^0 với vector $\vec{v} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{2n-1}}$. ($\vec{v}$ chắc chắn nằm giữa $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_{2n-1}}$ nên suy ra nó nằm giữa $\overrightarrow{OP_{2n}}, \overrightarrow{OP_{2n+1}}$).

Theo giả thiết quy nạp, ta có $\left|\vec{v}\right| \geq 1$. Mặt khác, dùng công thức cosin ta được $\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \geq \left|\vec{v}\right|$. Do đó, ta suy ra mệnh đề đã cho đúng với số

$2n + 1$, điều phải chứng minh. Để có đẳng thức, ta lấy:

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} = ... = \overrightarrow{OP_n} = -\overrightarrow{OP_{n+1}} = ... = -\overrightarrow{OP_{2n}},$$

còn $\overrightarrow{OP_{2n+1}}$ là vector đơn vị có hướng tuỳ ý.

***Bài 37.* (1973)**

Hãy chỉ ra một tập hợp các điểm không đồng phẳng, sao cho với bất kì hai điểm A và B cho trước trong tập hợp này, tồn tại hai điểm C và D khác (cũng trong tập hợp đó) mà AB và CD song song với nhau.

Can we find a finite set of non-coplanar points, such that given any two points of this set, A and B, there are two others, C and D (of this set), with the lines AB and CD parallel and distinct?

Hướng dẫn:

Xét hai lục giác đều có chung đường chéo chính (đó là đường chéo phân lục giác thành hai hình thang cân bằng nhau), chúng nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau. Tập hợp các đỉnh của hai lục giác này chính là tập hợp các điểm cần phải chỉ ra.

Thật vậy, nếu ta lấy hai điểm A, B cùng là đỉnh của một trong hai lục giác đó thì rõ ràng có thể tìm thấy ngay C, D cũng là hai đỉnh của lục giác này sao cho AB // CD. Còn nếu ta lấy A là đỉnh của lục giác này và B là đỉnh của lục giác kia thì ta sẽ chọn C là đỉnh đối diện trên đường chéo chính CA thuộc lục giác thứ nhất, và lấy D là đỉnh đối diện trên đường chéo chính BD thuộc lục giác thứ hai. Lúc đó, dễ dàng chứng minh được ABCD là hình thoi, và do vậy, AB // CD, điều phải chứng minh.

***Bài 38.* (1974)**

Chứng minh rằng trên cạnh AB của một tam giác ABC, có một điểm D sao cho CD là trung bình hình học của AD và DB khi và chỉ khi

$$\sin A.\sin B \le \sin^2 \frac{C}{2}.$$

Prove that there is a point D *on the side* AB *of the triangle* ABC, *such that* CD *is the geometric mean of* AD *and* DB *if and only if*

$$\sin A.\sin B \le \sin^2 \frac{C}{2}.$$

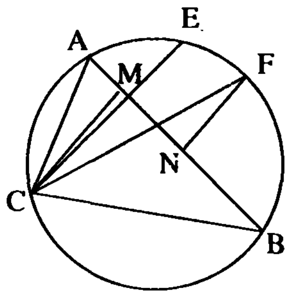
Ghi chú: Ta nói CD là trung bình hình học (tức trung bình nhân) của AD và DB, nghĩa là hệ thức sau được thoả mãn: $CD^2 = AD.DB$.

Hướng dẫn:

Giả sử D là điểm nằm trên cạnh AB sao cho

$$CD^2 = AD.DB. \qquad (*)$$

Kéo dài CD, đường này cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại E. Hệ thức lượng trong đường tròn cho ta: CD.DE = AD.DB.



Vì vậy, (*) xảy ra khi và chỉ khi CD = DE. Lúc đó, nếu gọi F là trung điểm cung AB và FN là khoảng cách từ F đến AB, CM là khoảng cách từ C đến AB thì

$$FN \geq CM \qquad (**)$$

(vì CM cũng bằng khoảng cách từ E đến AB, mà FN lại là khoảng cách lớn nhất trong tất cả các khoảng cách từ một điểm bất kì trên cung AB đến AB). Ta lại có $\widehat{FAB} = \widehat{FCA} = \frac{C}{2}$, suy ra:

$$FN = AN.\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{c}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}, \quad CM = BC.\sin B = a.\sin B,$$

với c = AB, b = CA và a = BC, kí hiệu như thường lệ. Như vậy, từ (**) ta được $\frac{c}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} \geq a.\sin B$, nhưng từ Định lí hàm sin ta có $a = c\frac{\sin A}{\sin C}$ nên điều kiện trên trở thành

$$\frac{\sin\frac{C}{2}\sin C}{2\cos\frac{C}{2}} \geq \sin A.\sin B \Leftrightarrow \sin A.\sin B \leq \sin^2\frac{C}{2}.$$

Điều đảo lại dễ dàng bằng cách đi ngược lại quá trình trên.

***Bài 39.* (1975)**

Cho tam giác ABC bất kì. Ta dựng bên ngoài tam giác đó các tam giác BCP, CAQ, ABR sao cho:

$$\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^0,\ \widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^0,\ \widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^0.$$

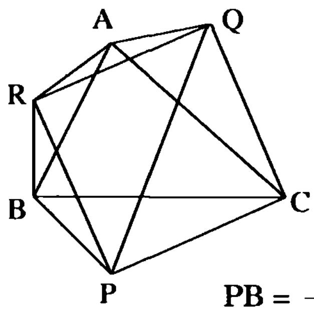
Chứng minh rằng $\widehat{QRP} = 90^0$ và QR = RP.

Given any triangle ABC, construct external triangles ABR, BCP, CAQ *on the sides, so that*

$$\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^0,\ \widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^0,\ \widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^0.$$

Prove that angle $\widehat{QRP} = 90^0$ *and* QR = RP.

Hướng dẫn:



Trước hết, đặt BC = a, CA = b, CA = b, sử dụng Định lí hàm sin trong tam giác AQC, ta tính được:

$$AQ = \frac{b}{2\sin 105^0} = \frac{b}{2\cos 15^0}.$$

Tương tự ta cũng có:

$$PB = \frac{a}{2\cos 15^0}, \ AR = RB = \frac{c}{2\cos 15^0}.$$

Từ đó, dùng Định lí hàm cosin ta được:

$$RP^2 = \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0)}{4\cos^2 15^0}, \ RQ^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^0)}{4\cos^2 15^0}.$$

Như thế, đẳng thức QR = RP tương đương với:

$$\frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0)}{4\cos^2 15^0} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^0)}{4\cos^2 15^0}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ac\cos(B + 60^0) = b^2 - 2bc\cos(A + 60^0)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ac\cos B + \sqrt{3}ac\sin B = b^2 - bc\cos A + \sqrt{3}bc\sin A.$$

Nhưng theo Định lí hàm sin, $a\sin B = b\sin A$ nên đẳng thức trên tương đương với:

$$a(a - c\cos B) = b(b - c\cos A). \qquad (*)$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được rằng:

$$b = c\cos A + a\cos C \Leftrightarrow b - c\cos A = a\cos C,$$

$$a = c\cos B + b\cos C \Leftrightarrow a - c\cos B = b\cos C,$$

nên (*) hiển nhiên đúng.

Điều này có nghĩa là ta đã chứng minh được QR = RP.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng tính được PQ^2, và suy ra $PQ^2 = 2RP^2$, từ đó có điều phải chứng minh.

Cách khác:

Dùng lượng giác, ta tính được:

$$AQ = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})AC}{2}, \ BP = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})BC}{2},$$

$$QC = AQ\sqrt{2}, \ PC = BP\sqrt{2}, \ RA = RB = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})AB}{2}.$$

Lần lượt xét các tam giác ARQ, BRP, CPQ ta có:

$$RQ^2 = AR^2 + AQ^2 - 2AR.AQ.\cos(A + 60^0)$$
$$= AB^2(2-\sqrt{3}) + AC^2(2-\sqrt{2}) - 2AB.AC(2-\sqrt{3}).\cos(A + 60^0).$$

Thay $\cos(A + 60^0) = \frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$ và thực hiện một số biến đổi, cuối cùng ta được: $RQ^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + S\sqrt{3})$.

Bằng cách tiến hành tương tự, ta cũng có:

$$RP^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + S\sqrt{3}),\ QP^2 = (2-\sqrt{3})(a^2 + b^2 + c^2 + S\sqrt{3}).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 40.* (1976)**

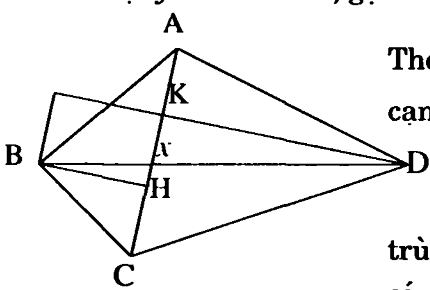
Một tứ giác lồi trong mặt phẳng có diện tích 32, tổng của hai cạnh đối diện và một đường chéo bằng 16. Hãy xác định những độ dài có thể có của đường chéo kia.

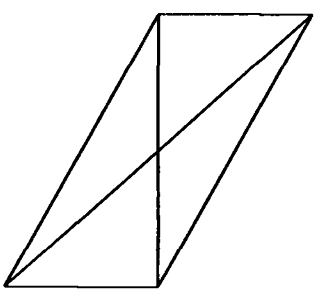
A plane convex quadrilateral has area 32, and the sum of two opposite sides and a diagonal is 16. Determine all possible lengths for the other diagonal.

Hướng dẫn:

Giả sử rằng x là độ dài của đường chéo AC mà tổng của nó với hai cạnh đối diện AD, BC của tứ giác là 16. Hạ DK $\perp$ AC và BH $\perp$ AC.

Đặt y = BH + DK, gọi S là diện tích tứ giác, ta có: $S = \frac{xy}{2}$.





Theo giả thiết, $AD + BC = (16 - x)$, mà vì cạnh huyền là cạnh lớn nhất trong một tam giác vuông nên y có giá trị lớn nhất là $(16 - x)$, điều này xảy ra khi K trùng A, H trùng C. Lúc đó, tứ giác đã cho có AD và BC vuông góc với AC (xem hình vẽ bên trái). Mặt khác, ta có:

$$\frac{x(16-x)}{2} = \frac{64-(x-8)^2}{2} \le \frac{64}{2} = 32,$$

và đẳng thức xảy ra khi $x = 8$. Vì theo giả thiết, diện tích tứ giác là 32 nên ta có $x = 8$. Ta chỉ có thể đạt được điều này khi

$$y = BH + DK = 8.$$

Lúc này, dễ thấy độ dài đường chéo kia là $BD = BI + ID = 2.4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

***Bài 41.* (1976)**

Một hình hộp chữ nhật có thể được lấp đầy bằng những hình lập phương có cạnh bằng đơn vị. Ngoài ra, người ta có thể sắp xếp các hình lập phương có thể tích bằng 2 chồng lên nhau, cạnh song song với cạnh của hình hộp, và lấp đầy được 40% hình hộp. Hãy xác định kích thước có thể có của hình hộp đã cho.

A rectangular box can be completely filled with unit cubes. If one places as many cubes as possible, each with volume 2, in the box, with their edges parallel to the edges of the box, one can fill exactly 40% of the box. Determine the possible dimensions of the box.

Hướng dẫn:

Ta gọi k là căn bậc ba của 2. Với mọi số tự nhiên n, ta kí hiệu n' là số tự nhiên lớn nhất thoả mãn: $n'k \le n$. Gọi kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c. Hiển nhiên a, b, c là những số tự nhiên. Vì người ta có thể sắp xếp các hình lập phương có thể tích bằng 2 chồng lên nhau, cạnh song song với cạnh của hình hộp, và lấp đầy được 40% hình hộp nên ta cần phải có:

$$40\%.k.k.k.a'.b'.c' = a.b.c, \text{ hay } 5a'.b'.c' = a.b.c. \qquad (*)$$

Dễ dàng thấy rằng, với n lần lượt bằng 1, 2, ..., 10, ta có:

$$1' = 0,\ 2' = 1,\ 3' = 2,\ 4' = 3,\ 5' = 3,\ 6' = 4,\ 7' = 5,\ 8' = 6,\ 9' = 7,\ 10' = 7.$$

Cũng dễ thấy $n'k \ge n - 2$. Nhưng $6^3 > 0,4.8^3$, suy ra:

$$(n'k)^3 \ge (n-2)^3 > 0,4.n^3, \text{ với mọi } n \ge 8.$$

Ta có thể kiểm tra trực tiếp được rằng $(n'k)^3 > 0,4.n^3$ với n = 3, 4, 5, 6, 7. Vì vậy, suy ra $a = 2$ (không thể có $a = 1$, vì $1' = 0$). Từ (*), ta phải có b hay c chia hết cho 5. Ta giả sử rằng một trong hai cạnh đó bằng 5. Vì $5' = 3$, nên nếu cạnh còn lại có độ dài n thì từ (*) ta phải ta phải có:

$$5.2'.5'.n' = 2.5.n \Leftrightarrow n' = \frac{2}{3}n. \qquad (**)$$

Ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng $\frac{2k}{3} < \frac{6}{7}$, và suy ra:

$$\frac{2}{3}nk + 1 < n,\ \forall n \ge 7,$$

do đó ta được

$$n' > \frac{2}{3}n \ , \ \forall n \geq 7 . \qquad (***)$$

Bất đẳng thức (***) mâu thuẫn với (**) nên việc còn lại là kiểm tra khi $n < 7$. Tuy vậy, vì $n' = \frac{2}{3}n$ là số tự nhiên nên n là bội của 3. Do đó chỉ cần kiểm tra với $n = 3$ và $n = 6$. Cả hai kết quả này đều chấp nhận được. Do vậy, kích thước của hình hộp đã cho là $2 \times 3 \times 5$ hoặc $2 \times 3 \times 6$.

Cuối cùng, với một cạnh bằng 2, ta còn phải tính đến khả năng một cạnh bằng 10 trở lên (như trên, có một cạnh chia hết cho 5). Giả sử cạnh đó là m (m là bội của 5). Dễ dàng kiểm tra được rằng $\frac{m'}{m} \geq \frac{7}{10}$. Gọi r là cạnh còn lại. Từ (*) ta suy ra r phải thoả mãn: $\frac{r'}{r} \leq \frac{4}{7}$. Kết hợp với những tính toán về n' với n nhỏ ở trên, ta suy ra $r = 2$. Vậy $a = b = 2$. Nhưng giờ đây c phải thoả điều kiện $c' = \frac{4}{5}c$. Điều này không thể được vì ta phải có $\frac{4}{5}k > 1$. Tóm lại, kích thước của hình hộp đã cho là

$$2 \times 3 \times 5 \text{ hoặc } 2 \times 3 \times 6 .$$

***Bài 42.* (1977)**

Về phía bên trong hình vuông ABCD, ta dựng các tam giác đều ABK, BCL, CDM, DAN. Chứng minh rằng các trung điểm của KL, LM, MN, NK và các trung điểm của AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN tạo thành một đa giác đều 12 cạnh.

Construct equilateral triangles ABK, BCL, CDM, DAN on the inside of the square ABCD. Show that the midpoints of KL, LM, MN, NK and the midpoints of AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN form a regular dodecahedron.

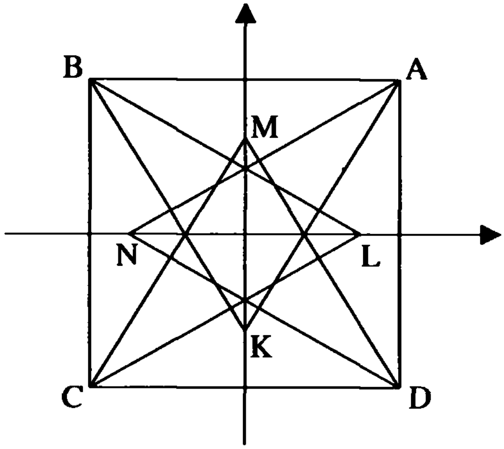
Hướng dẫn:

Ta dùng phương pháp toạ độ để giải bài toán này.

Gọi O là tâm hình vuông, lập hệ trục xOy sao cho các điểm A, B, C, D lần lượt có toạ độ là $(1,1)$, $(-1;1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.

Khi đó, dễ dàng tính được toạ độ các điểm K, L, M, N lần lượt là: $(0,-2k)$, $(2k,0)$, $(0,2k)$, $(-2k,0)$, với

$$k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$



Từ đó, dùng công thức tính toạ độ trung điểm, ta tính được toạ độ các trung điểm E, F, G, H tương ứng của KL, LM, MN, NK là:

$$(k,-k),\ (k,k),\ (-k,k),\ (-k,-k).$$

Suy ra rằng các khoảng cách từ E, F, G, H đến O đều bằng nhau và bằng:

$$\sqrt{k^2+k^2} = k\sqrt{2},$$

đồng thời các vector gốc O, điểm mút tương ứng là E, F, G, H hợp với trục hoành các góc lần lượt là 315^0, 45^0, 135^0, 225^0.

Tiếp đến, từ toạ độ đã xác định được của các điểm trên, ta dễ dàng tính được toạ độ tương ứng của các trung điểm P, Q, R, S, T, U, V, X của các cạnh AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN lần lượt là:

$(h,j),(-h,j),(-j,h),(-j,-h),\ (-h,-j),(h,-j),(j,-h),(j,h)$, ở đây:

$$h = \frac{1}{2},\ j = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Suy ra những điểm P, Q, R, S, T, U, V, X cách đều O một đoạn bằng

$$\sqrt{h^2+j^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = k\sqrt{2}.$$

Các điểm này cũng là đầu mút của những vector gốc O lần lượt hợp với trục hoành các góc tương ứng 15^0, 165^0, 105^0, 255^0, 195^0, 345^0, 285^0, 75^0.

Tiếp đến, ta cần xét các góc của tam giác vuông có ba cạnh là k, h, j. Góc x giữa h và k có

$$\sin x = \frac{j}{k},\ \cos x = \frac{h}{k}.$$

Do đó $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2hj}{k^2} = \frac{1}{2}$. Suy ra $x = 15^0$.

Như vậy, 12 điểm nói trên cách đều gốc O và là đầu mút của những vector gốc O hợp với trục hoành các góc $15^0 + 30n$, với

$$n = 0, 1, 2, ..., 11.$$

Từ đó, suy ra rằng chúng lập thành một đa giác đều 12 cạnh. (điều phải chứng minh)

***Bài 43.* (1978)**

Cho P là một điểm cố định nằm bên trong một hình cầu cho trước. Ba đoạn thẳng PA, PB, PC, vuông góc nhau từng đôi một, có ba đầu mút A, B, C nằm trên mặt cầu. Gọi Q là đầu mút thứ hai của đường chéo PQ của hình hộp chữ nhật mà các cạnh là PA, PB, PC.

Tìm quỹ tích của điểm Q khi ba điểm A, B, C chạy trên mặt cầu.

P is a point inside a sphere. Three mutually perpendicular rays from P intersect the sphere at points A, B and C. Q denotes the vertex diagonally opposite P in the parallelepiped determined by PA, PB, PC.

Find the locus of Q for all possible sets of such rays from P.

Hướng dẫn:

Theo bài ra ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ nên

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{PG}. \quad (1)$$

Do đó $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PG}$, vì thế quỹ tích của Q là ảnh của quỹ tích của G qua phép vị tự tâm P tỉ số bằng 3.

Phần thuận: Từ (1) ta có:

$$9\overrightarrow{PG}^2 = \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 + 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA}. \quad (2)$$

Do PA, PB, PC vuông góc với nhau từng đôi một nên

$$9PG^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2. \quad (2')$$

Mặt khác: $\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB})^2$

$$= 3\overrightarrow{PG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{PG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}).$$

Do $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ nên ta được

$$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = 3\overrightarrow{PG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2. \quad (3)$$

Hoàn toàn tương tự thay P bằng điểm O vào đẳng thức (3) ta có:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \quad (4)$$

Từ (2'), (3) và (4) ta suy ra:

$$6PG^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2,\ 3R^2 = 3OG^2 + 6PG^2.$$

Từ đó $R^2 = OG^2 + 2PG^2$, do vậy $OG \le R$.

Nếu lấy $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PO}$ thì $2\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IO} = 0$. Khi đó:

$$R^2 = OG^2 + 2PG^2 = (\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IG})^2 + 2(\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IG})^2 =$$

$$= \overrightarrow{OI}^2 + \overrightarrow{IG}^2 + 2\overrightarrow{PI}^2 + 2\overrightarrow{IG}^2 + 2\overrightarrow{IG}(\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{PI}) = OI^2 + 2PI^2 + 3IG^2$$

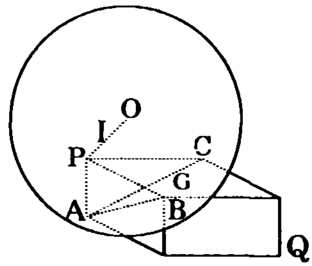
$$\Leftrightarrow IG^2 = \frac{R^2 - OI^2 - 2PI^2}{3} = h^2. \qquad (5)$$

$$h^2 > \frac{R^2 - OP^2}{3} > 0 \Rightarrow h \text{ xác định.}$$

Vì vậy điểm G chạy trên mặt cầu tâm I bán kính h xác định theo hệ thức (5).

Phần đảo:

Ta lấy một điểm G bất kì thuộc mặt cầu tâm I bán kính h. Ta có $R^2 = OG^2 + 2PG^2$, suy ra GO < R, tức là điểm G nằm bên trong mặt cầu tâm O. Bạn đọc tiếp tục chứng minh rằng tồn tại ba điểm A, B, C thỏa mãn: G là trọng tâm tam giác ABC và A, B, C nằm trên mặt cầu (O), ngoài ra PA, PB, PC đôi một vuông góc nhau.



Kết luận: Quỹ tích điểm Q phải tìm là mặt cầu tâm O, bán kính $R' = 3h$, với:

$$R' = \sqrt{3(R^2 - OI^2 - 2IP^2)} = \sqrt{3\left(R^2 - \frac{4}{9}OP^2 - \frac{2}{9}OP^2\right)} = \sqrt{3R^2 - 2OP^2}.$$

***Bài 44.* (1978)**

Cho tam giác ABC, trong đó AB = AC. Một đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và cũng tiếp xúc với các cạnh AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

In the triangle ABC, AB = AC. A circle is tangent internally to the circumcircle of the triangle and also to AB, AC at P,Q respectively. Prove that the midpoint of PQ is the center of the incircle of the triangle.

Hướng dẫn:

Gọi O' là tâm đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với AB, AC lần lượt ở P, Q. Ta thấy đường tròn (O') không thể nằm trong phần mặt phẳng của viên phân AmB (xem hình vẽ) vì nếu (O') nằm trong phần đó thì nó không thể tiếp xúc với AC.

Tương tự (O') không thể nằm trong phần mặt phẳng của viên phân AnC.

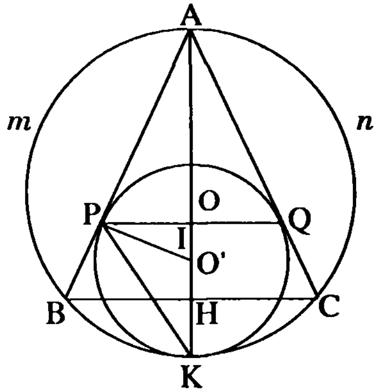
Do đó (O') nằm trong phần mặt phẳng giới hạn bởi cạnh AB, AC và cung BKC. Nối AO', ta có

$$AP = AQ \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow PQ // BC.$$

Do AP = AQ nên suy ra AO' là trung trực của PQ. Gọi giao điểm của AO' với PQ là I. Vì PQ // BC, tam giác ABC cân tại A, nên từ AO' là trung trực của PQ ta suy ra được AO' là trung trực của BC.

Thật vậy: $PQ//BC \Rightarrow$ AO' vuông góc với BC. Gọi giao điểm của AO' với BC là H, ta có:

$$\frac{PI}{BH} = \frac{AI}{AH} = \frac{IQ}{HC} \Rightarrow BH = HC.$$



Do đó AO' là trung trực của BC và AO' đi qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kéo dài AO' cắt (O) tại K ta có:

$\widehat{ABK} = 90^0$, $\widehat{O'PA} = 90^0$.

Vậy $O'P//BK \Rightarrow \widehat{O'BK} = \widehat{PKB}$.

Do $O'P = O'K$ nên $\widehat{O'PK} = \widehat{O'KP}$.

Suy ra: $\widehat{PKB} = \widehat{PKA} \Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{KB}{KA}$.

Xét hai tam giác vuông đồng dạng API và AKB ta có:

$$\frac{KB}{KA} = \frac{PI}{PA} \Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{PI}{PA} \Rightarrow PB = PI.$$

Từ đó $\widehat{PIB} = \widehat{PBI}$. Mặt khác $\widehat{PIB} = \widehat{IBC}$ (do PQ // BC). Suy ra $\widehat{PBI} = \widehat{IBC}$. Ta đã có $\widehat{PAI} = \widehat{IAQ}$ (tam giác cân APQ có AI là trung trực và phân giác). Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 45. **(1979)**

Cho hai đường tròn giao nhau trong cùng một mặt phẳng. Gọi A là một trong hai giao điểm đó. Xuất phát từ A, có hai điểm chuyển động với tốc độ không đổi, mỗi điểm chuyển động trên một đường tròn, theo cùng một hướng. Sau một vòng chuyển động, cả hai điểm cùng trở về A.

Chứng minh rằng có một điểm cố định S trên mặt phẳng sao cho hai điểm chuyển động nói trên luôn luôn cách đều S.

Two circles in a plane intersect. A is one of the points of intersection. Starting simultaneously from A two points move with constant speed, each traveling along its own circle in the same sense. The *two points return to A simultaneously after one revolution.*

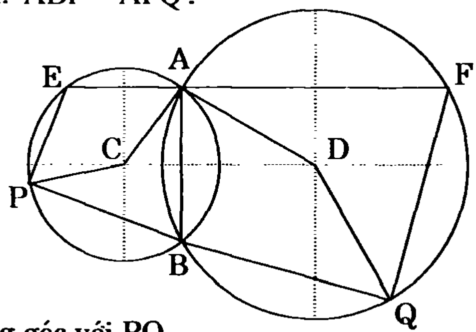
Prove that there is a fixed point P in the plane such that the two points are always equidistant from P.

Hướng dẫn:

Giả sử B là giao điểm thứ hai của hai đường tròn. Gọi C và D lần lượt là tâm của hai đường tròn. Lấy E trên (C) và F trên (D) sao cho EF $\perp$ AB tại A. Giả sử P, Q tương ứng là hai điểm chuyển động trên (C) và (D) như đã nói ở đầu bài, ta có:

$$A\hat{B}P = \frac{1}{2}A\hat{C}P,\ A\hat{F}Q = \frac{1}{2}A\hat{D}Q.$$

Nhưng theo giả thiết, P, Q chuyển động cùng chiều và cùng trở về A một lúc nên $A\hat{C}P = A\hat{D}Q$, suy ra: $A\hat{B}P = A\hat{F}Q$.



Từ đó ta được:

$A\hat{B}Q = 180^0 - A\hat{F}Q = 180^0 - A\hat{B}P$,

tức là ba điểm P, B, Q thẳng hàng.

Ta cũng có:

$B\hat{P}E = 180^0 - B\hat{A}E = 180^0 - 90^0 = 90^0$,

$B\hat{Q}F = 180^0 - B\hat{A}F = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

Nói cách khác, EP và FQ vuông góc với PQ.

Lúc này, ta gọi S là trung điểm EF và G là trung điểm PQ thì SG là đường trung bình của hình thang vuông EPQF nên SG là đường trung trực của PQ. Mà S cố định nên điều này có nghĩa là P, Q luôn cách đều điểm S cố định trong suốt quá trình chuyển động của chúng (điều phải chứng minh).

***Bài 46.* (1979)**

Cho mặt phẳng (K) và một điểm P trong mặt phẳng đó. Q là điểm ngoài (K). Hãy tìm các điểm R trong (K) sao cho tỉ số

$$\frac{QP + PR}{QR} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Given a plane (K), a point P in the plane and a point Q not in the plane, find all points R in (K) such that the ratio

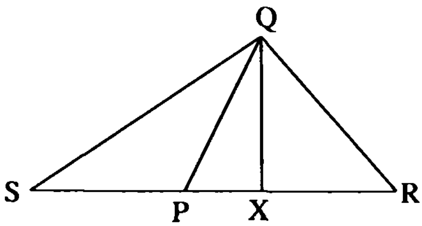
$$\frac{QP + PR}{QR} \textit{ is a maximum.}$$

Hướng dẫn:

Ta xét điểm R trên đường tròn tâm P trong mặt phẳng (K).

Gọi X là chân đường vuông góc hạ từ Q xuống (K).

* *Giả sử* P *khác* X. Ta nhận thấy rằng khi R chuyển động trên đường tròn tâm P thì QR sẽ nhận giá trị nhỏ nhất khi R ở cùng phía với X so với P và đồng thời R nằm trên đường thẳng PX (lúc đó, $\frac{QP + PR}{QR}$ đạt giá trị lớn nhất, vì PR thì bằng bán kính đường tròn, còn QP không đổi). Nhận xét này giúp ta đi đến kết luận rằng điểm R làm cho $\frac{QP + PR}{QR}$ đạt giá trị lớn nhất ắt phải nằm trên tia PX.



Gọi S là điểm trên đường thẳng PX về phía đối diện với X qua điểm P sao cho PS = PQ. Lúc đó, với R trên tia PX, ta có:

$$\frac{QP+PR}{QR} = \frac{PS+PR}{QR} = \frac{SR}{QR} = \frac{\sin R\hat{Q}S}{\sin Q\hat{S}R}$$

(áp dụng Định lí hàm sin cho tam giác SQR). Nhưng góc QSR cố định nên $\sin Q\hat{S}R$ không đổi, do đó, tỉ số $\frac{QP + PR}{QR}$ đạt cực đại khi

$$\sin R\hat{Q}S = 1 \Leftrightarrow R\hat{Q}S = 90^0.$$

Tóm lại, nếu P khác X thì tồn tại duy nhất điểm R xác định như trên thoả mãn yêu cầu của đề bài.

* *Nếu* P *trùng* X, ta vẫn có thể chọn R sao cho $R\hat{Q}S = 90^0$, và khi ấy điểm R cũng thoả mãn đề bài. Tuy nhiên, lúc này R không còn nằm trên tia PX nữa, nó có thể nằm bất cứ đâu trên đường tròn tâm P bán kính PS = PQ.

***Bài 47.* (1981)**

Cho P là một điểm nằm trong tam giác ABC và D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P trên BC, CA, AB.

Tìm tất cả những điểm P sao cho tổng

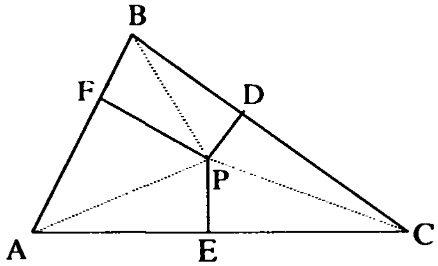
$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

đạt giá trị cực tiểu.

P is a point inside the triangle ABC. D, E, F are the feet of the perpendiculars from P to the lines BC, CA, AB respectively. Find all P which minimise:

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}.$$

Hướng dẫn:



Gọi ba cạnh của tam giác ABC là

$$AB = a, AC = b, BC = c$$

và chọn ba biến

$$x = PF, y = PE, z = PD.$$

Ta phải tìm điểm cực tiểu của hàm số ba biến: $f(P)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$.

Trước hết, ta nhận xét rằng theo đề bài, điểm P nằm trong tam giác ABC nên gọi S là diện tích tam giác ta có:

$$S = S_{BPC} + S_{APC} + S_{ABP}.$$

Suy ra: $ax + by + cz = 2S$ (S là hằng số). (*)

Giới hạn vị trí của điểm P trên đoạn MN song song với cạnh BC ta được các giá trị cz và c/z không đổi với mọi điểm trên đoạn này. Như vậy bài toán quy về tìm điểm cực tiểu của hàm số chỉ có 2 biến:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}.$$

Nhưng các biến này lại liên hệ với nhau bởi điều kiện (*) có dạng $ax + by = D$, trong đó $D = 2S - cz$ không đổi. Vậy ta phải tìm số cực trị của hàm số

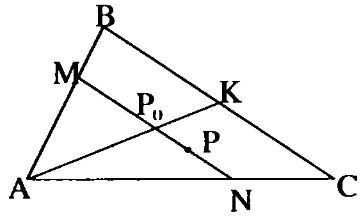
$$f_1(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{a}{x}+\frac{b^2}{D-ax}.$$

Để xét dấu của đạo hàm $f'_1(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{ab^2}{(D-ax)^2}$, cách tiện nhất là dùng ẩn $y=\frac{D-ax}{b}$ để có: $f'_1(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{ab^2}{b^2y^2}=\frac{a}{x^2y^2}(x-y)(x+y)$.

Bây giờ ta thấy rằng $f'_1(x) = 0$ khi $x = y$, tức là khi $x=\frac{D-ax}{b}$, và đây là điểm cực tiểu.

Từ đó, theo tính chất đường phân giác, ta được điểm P_0 là giao điểm của MN với phân giác góc A, đây là điểm duy nhất để giá trị của $f(x)$ trên khoảng MN đạt cực tiểu.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số f chỉ có thể là điểm thuộc đường phân giác AK.



Nếu P không thuộc AK thì ta kẻ qua P đường song song với BC và ta tìm giao điểm P_0 của đường thẳng này với AK. Ta chỉ cần chứng minh rằng $f(P_0) < f(P)$. Với các điểm của phân giác AK ta có $x=y$. Theo điều kiện (*) ta tìm được $z = \dfrac{2S-(a+b)x}{c}$ và như thế với các điểm của đoạn AK ta có:

$$f(\mathrm{P}) = f_2(x) = \frac{a+b}{x} + \frac{c^2}{2S-(a+b)x}.$$

Việc xét dấu đạo hàm của hàm số này tương tự như ở trên và ta tìm được điểm cực đại của hàm số $f_2(x)$ là điểm của phân giác mà $x = z$, tức là điểm cực tiểu của hàm số f là duy nhất, đó là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

***Bài 48.* (1981)**

Qua điểm O nằm trong một tam giác cho trước, ta vẽ ba đường tròn có bán kính bằng nhau, mỗi đường tròn nằm trong tam giác và tiếp xúc với hai cạnh tam giác. Chứng minh rằng các điểm O, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp tam giác cùng nằm trên một đường thẳng.

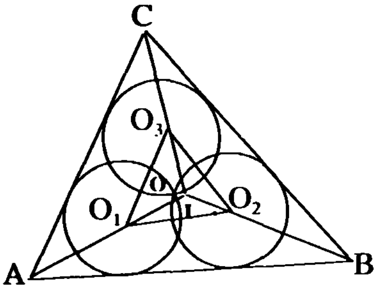
Three circles of equal radius have a common point O and lie inside a given triangle. Each circle touches a pair of sides of the triangle. Prove that the incenter and the circumcenter of the triangle are collinear with the point O.

Hướng dẫn:

Do hai đường tròn tâm O_1 và O_2 tiếp xúc với cạnh AB và bán kính của chúng bằng nhau nên các điểm O_1 và O_2 cách đều AB, vậy O_1O_2 // AB. Chứng minh tương tự ta có: O_2O_3 // BC, O_1O_3 // AC.

Điểm O chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$. Theo bài ra, mỗi đường tròn đã cho tiếp xúc với hai cạnh của tam giác ABC cho nên các điểm O_1, O_2, O_3 theo thứ tự nằm trên phân giác các góc A, B, C. Giả sử I là giao điểm các phân giác đó, tức I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ở trên ta đã chứng minh O_1O_2 // AB, O_2O_3 // BC,

O_1O_3 // AC, vậy suy ra I cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $O_1O_2O_3$. Trong phép vị tự tâm I, tam giác $O_1O_2O_3$ biến thành tam giác



ABC, điểm I không thay đổi vị trí, còn tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$ sẽ biến thành tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nói cách khác, điểm O và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là vị tự đối với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Vậy, ba điểm này nằm trên một đường thẳng.

***Bài 49.* (1982)**

Cho tam giác không cân $A_1A_2A_3$. Giả sử a_i (i = 1, 2, 3) là cạnh đối diện đỉnh A_i, M_i là trung điểm cạnh a_i, T_i là tiếp điểm của cạnh a_i với đường tròn nội tiếp tam giác đã cho và S_i là điểm đối xứng của T_i qua phân giác góc A_i. Chứng minh rằng các đường thẳng M_1S_1, M_2S_2 và M_3S_3 đồng quy.

A non-isosceles triangle $A_1A_2A_3$ has sides a_1, a_2, a_3 with a_i opposite A_i. M_i is the midpoint of side a_i and T_i is the point where the incircle touches side a_i. Denote by S_i the reflection of T_i in the interior bisector of angle A_i. Prove that the lines M_1S_1, M_2S_2 and M_3S_3 are concurrent.

Hướng dẫn:

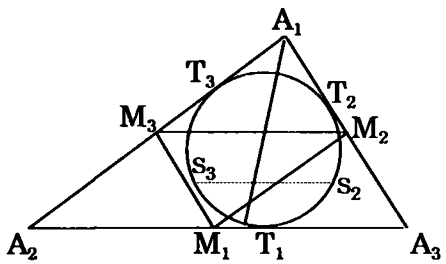
Các cạnh của tam giác $M_1M_2M_3$ theo thứ tự song song với các cạnh của tam giác $A_1A_2A_3$.

Ta chứng minh rằng các cạnh của tam giác $S_1S_2S_3$ cũng song song với các cạnh của tam giác $A_1A_2A_3$. Từ đó suy ra tam giác $S_1S_2S_3$ vị tự với tam giác $M_1M_2M_3$ (hoặc trùng với nó bằng phép tịnh tiến, nhưng trường hợp này không thể xảy ra do đường tròn ngoại tiếp tam giác $M_1M_2M_3$ lớn hơn đường tròn ngoại tiếp tam giác $S_1S_2S_3$).

Vậy các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng của hai tam giác $S_1S_2S_3$ và $M_1M_2M_3$ phải cắt nhau tại một điểm, điểm đó là tâm vị tự.

Bây giờ ta chứng minh, chẳng hạn, hai đường thẳng S_1S_2 và A_1A_2 song song với nhau. Do đối xứng qua phân giác góc A_1 nên điểm S_1 tới T_1, điểm T_3 tới T_2, do đó các cung S_1T_3 và T_1T_2 của đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ bằng nhau.

Tương tự, do đối xứng qua phân giác góc A_2 nên các cung S_1T_3 và



T_3T_2 bằng nhau. Suy ra hai cung S_1T_3 và T_3S_2 bằng nhau, do đó các điểm S_1 và S_2 cách đều đường thẳng A_1A_2, tức là $S_1S_2 \parallel A_1A_2$. Chứng minh tương tự ta có hai cạnh khác của tam giác $S_1S_2S_3$ tương ứng song song với hai cạnh của tam giác $A_1A_2A_3$.

Chú ý: Hai tam giác $S_1S_2S_3$ và $M_1M_2M_3$ không thể bằng nhau, vì ba điểm S_1, S_2, S_3 nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ còn ba điểm M_1, M_2, M_3 lại nằm trên đường tròn chín điểm (đường tròn Euler). Chúng lại có bán kính khác nhau vì tam giác $A_1A_2A_3$ không phải là tam giác đều.

Bài 50. **(1982)**

Trên các đường chéo AC và CE của lục giác đều ABCDEF ta lấy hai điểm M và N sao cho

$$\frac{AM}{MC} = \frac{CN}{CE} = k.$$

Biết rằng B, M và N thẳng hàng, hãy tìm k.

The diagonals AC *and* CE *of the regular hexagon* ABCDEF *are divided by inner points* M *and* N *respectively, so that:*

$$\frac{AM}{MC} = \frac{CN}{CE} = k.$$

Determine k if B, M *and* N *are collinear.*

Hướng dẫn:

Do AC = EC ta suy ra, từ tỉ lệ thức đã cho, CM = EN và tam giác BMC bằng tam giác DNE. Từ đó $\widehat{NBC} = \widehat{EDN}$.

Vì $\widehat{ECD} = 90^\circ$ và $\widehat{CED} = 30^\circ$ nên $\widehat{BND} = \widehat{BNC} + \widehat{CND} =$

$$= (90^\circ - \widehat{NBC}) + (\widehat{CED} + \widehat{NDE}) = 90^\circ - \widehat{NBC} + 30^\circ + \widehat{NBC} = 120^\circ.$$

Như thế N nhìn BD dưới một góc 120^0 nên N nằm trên cung tròn tâm C bán kính CO (O là tâm của lục giác đều). Do đó CD = CN = CB.

Góc $\widehat{EBC} = 60^\circ$. Vậy $k = \frac{CN}{CE} = \frac{CB}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 51. **(1983)**

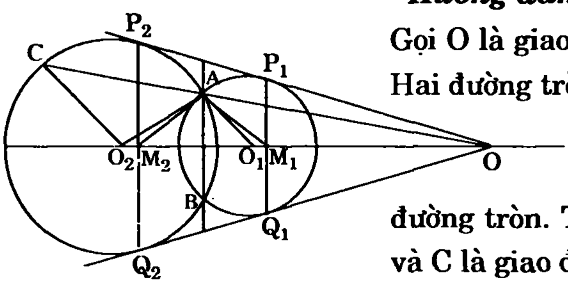
Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau, có bán kính không bằng nhau và tâm theo thứ tự là O_1 và O_2. Ta gọi A là một trong hai điểm chung của (C_1) và (C_2); các tiếp điểm của một tiếp tuyến chung với (C_1) và (C_2) là P_1, P_2 (P_1 thuộc (C_1), P_2 thuộc (C_2)) và các tiếp điểm của tiếp tuyến chung còn lại là Q_1, Q_2 (Q_1 thuộc (C_1), Q_2 thuộc C_2). Giả sử M_1, M_2 theo thứ tự là trung điểm của P_1Q_1 và P_2Q_2.

Chứng minh rằng $O_1\hat{A}O_2 = M_1\hat{A}M_2$.

Let A be one of the two distinct points of intersection of two unequal coplanar circles (C_1) and (C_2) with centers O_1 and O_2 respectively. One of the common tangents to the circles touches (C_1) at P_1 and (C_2) at P_2, while the other touches (C_1) at Q_1 and (C_2) at Q_2. Let M_1 be the midpoint of P_1Q_1 and M_2 the midpoint of P_2Q_2.

Prove that angle $O_1\hat{A}O_2 =$ *angle* $M_1\hat{A}M_2$.

Hướng dẫn:



Gọi O là giao điểm của P_2P_1, Q_2O_1 và O_2O_1. Hai đường tròn là ảnh vị tự của nhau và O chính là tâm vị tự. Gọi B là giao điểm thứ hai của hai đường tròn. T là giao điểm của AB với P_2P_1 và C là giao điểm khác của OA với C_2. Vì ta có $TA.TB = TP_2^2 = TP_1^2$ nên TA là trung trực của M_2M_1. Từ đó ta được:

$$\alpha = A\hat{M}_1O_1 = A\hat{M}_2O_1 = B\hat{M}_2O_1.$$

Do phép vị tự mà $\alpha = C\hat{M}_2O_2$. Như thế M_2, C và B thẳng hàng.

Do tính đối xứng mà ta có $\beta = O_2\hat{A}M_2 = O_2\hat{B}M_2$.

Xét tam giác cân CO_2B ta có $O_2\hat{C}M_2 = \beta$ và do vị tự ta có

$$O_1\hat{A}M_1 = \beta.$$

Vậy $O_1\hat{A}O_2 = M_1\hat{A}M_2$ vì cả hai đều bằng $\beta + M_2\hat{A}O_1$.

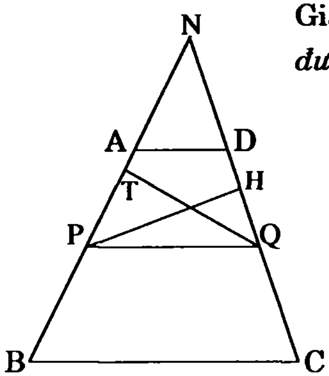
***Bài 52.* (1984)**

Giả sử ABCD là một tứ giác lồi sao cho đường thẳng CD là tiếp tuyến với đường tròn đường kính AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng AB trở thành tiếp tuyến với đường tròn đường kính CD là các đường thẳng BC và AD song song.

Let ABCD be a convex quadrilateral with the line CD tangent to the circle on diameter AB. Prove that the line AB is tangent to the circle on diameter CD if and only if BC and AD are parallel.

Hướng dẫn:

Đối với trường hợp AB và CD song song thì xét dễ dàng. Giả sử AB và CD cắt nhau tại N, còn P và Q theo thứ tự là trung điểm của AB và CD (hình 13), PH và QT là các đường vuông góc với CD và AB, α và β theo thứ tự là $\widehat{PQN}$ và $\widehat{QPN}$.



Giả thiết "*đường thẳng* AB *tiếp xúc với đường tròn đường kính* CD" tương đương với

$$\frac{QT}{DQ} = \frac{PH}{AP} \text{ hay } \frac{AP}{DQ} = \frac{PH}{QT}. \qquad (*)$$

Vì PH = PQ sin α và QT = PQ sin β nên (*) tương đương với: $\frac{AP}{DQ} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, như thế

$$\frac{AP}{DQ} = \frac{PN}{QN} \text{ hay } \frac{AP}{PN} = \frac{DQ}{QN},$$

điều này chứng tỏ AD // PQ hay AD // BC.

***Bài 53.* (1985)**

Cho một đường tròn mà tâm của nó ở trên cạnh AB của một tứ giác lồi ABCD và tiếp xúc với ba cạnh còn lại của tứ giác đó. Chứng minh rằng nếu tứ giác ABCD nội tiếp thì ta có AD + BC = AB.

A circle has center on the side AB of the quadrilateral ABCD. The other three sides are tangent to the circle. Prove that if ABCD is a cyclic quadrilateral then AD + BC = AB.

Hướng dẫn:

Gọi O là tâm đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tứ giác ABCD, r là bán kính của nó, G và I là chân các đường vuông góc hạ từ O theo thứ tự xuống BC, DA. Ta có:

$$BG = r\text{cotg}B,\ CG = r\text{cotg}\frac{C}{2},\quad DI = r\text{cotg}\frac{D}{2},\ AI = r\text{cotg}A,$$

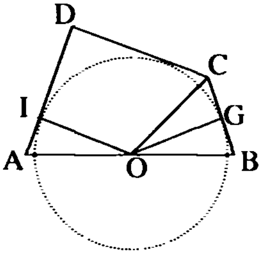
$$OB = \frac{r}{\sin B},\ OA = \frac{r}{\sin A}.$$

Do tứ giác ABCD nội tiếp (giả thiết) nên $B + D = \pi$, $A + C = \pi$,

$$\frac{(1-\cos A)}{\sin A} = \text{tg}\frac{A}{2} = \text{cotg}\frac{C}{2},$$

$$\frac{(1-\cos B)}{\sin B} = \text{tg}\frac{B}{2} = \text{cotg}\frac{D}{2}.$$

Ta có:



$$AI + ID + BG + CG = AD + BC$$

$$= r(\text{cotg}A + \text{cotg}\frac{D}{2} + \text{cotg}B + \text{cotg}\frac{C}{2})$$

$$= r\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1-\cos B}{\sin B} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{1-\cos A}{\sin A}\right)$$

$$= r\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\cos A}\right) = OA + OB = AB.$$

Vậy AD + BC =AB.

***Bài 54.* (1985)**

Cho tam giác ABC. Một đường tròn tâm O đi qua các điểm A và C và lại cắt các đoạn AB và BC theo thứ tự tại hai điểm phân biệt K và N. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và KBN cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt B và M. Chứng minh góc OMB vuông.

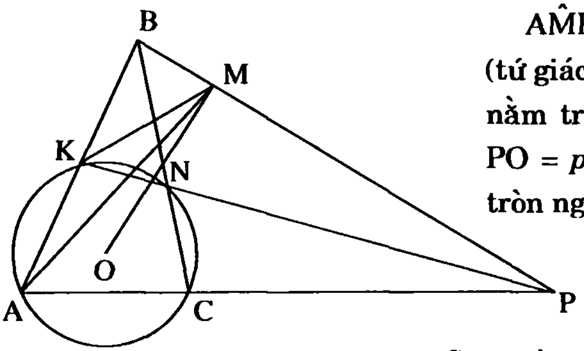
A circle center O passes through the vertices A and C of the triangle ABC and intersects the segments AB and BC again at distinct points K and N respectively. The circumcircles of ABC and KBN intersect at exactly two distinct points B and M. Prove that angle OMB is a right angle.

Hướng dẫn:

Gọi P là giao điểm các đường thẳng AC và KN. Do

$$K\hat{M}A = B\hat{M}A - B\hat{M}K = B\hat{C}A - B\hat{N}K = K\hat{P}A,$$

nên bốn điểm M, P, A, K nằm trên một đường tròn. Ngoài ra:



$$A\hat{M}P = A\hat{K}P = \pi - A\hat{C}B = \pi - A\hat{M}B$$

(tứ giác ACNK nội tiếp). Vậy điểm M nằm trên đoạn BP. Ta đặt BO = b, PO = p và gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ACNK, ta có:

$$BM.BP = BK.BA = b^2 - R^2;$$
$$PM.PB = PK.PN = p^2 - R^2.$$

Cộng từng vế hai đẳng thức này ta được:

$BP^2 = b^2 + p^2 - 2R^2$, khi đó

$$BM^2 - PM^2 = \left(\frac{b^2 - R^2}{BP}\right)^2 - \left(\frac{p^2 - R^2}{BP}\right) =$$

$$= \frac{(b^2 + p^2 - 2R^2)(b^2 - p^2)}{BP^2} = b^2 - p^2 = BO^2 - PO^2.$$

Từ đó OM $\perp$ BP.

***Bài 55.* (1986)**

Trong mặt phẳng cho tam giác $A_1A_2A_3$ và điểm P_o. Đặt $A_s = A_{s-3}$ với mọi số nguyên $s \geq 4$. Người ta dựng dãy điểm P_o, P_1, P_2,..., sao cho P_{k+1} là ảnh của điểm P_k qua phép quay quanh điểm A_{k+1} theo chiều kim đồng hồ với góc quay 120^0, với k = 0, 1, 2,... . Chứng minh rằng nếu $P_{1986} = P_o$ thì tam giác $A_1A_2A_3$ là tam giác đều.

Given a point P_0 in the plane of the triangle $A_1A_2A_3$. Define $A_s = A_{s-3}$ for all $s \geq 4$. Construct a set of points P_1, P_2, P_3, ... such that P_{k+1} is the image of P_k under a rotation center A_{k+1} through an angle 120 clockwise for k = 0, 1, 2, ... Prove that if $P_{1986} = P_0$, then the triangle $A_1A_2A_3$ is equilateral.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta chứng minh mệnh đề sau:

"*Nếu thực hiện vài phép quay với tổng các góc là bội của* 360^0 *thì phép biến hình thu được trong mặt phẳng là phép tịnh tiến*".

Chứng minh: Giả sử rằng qua phép biến hình nói trên, điểm M biến thành điểm M_1 và điểm N biến thành điểm N_1. Mệnh đề sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được rằng $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$.

Xét vectơ $\overrightarrow{MN}$, sau mỗi phép quay, độ dài của nó không đổi, nhưng phương của nó thay đổi theo góc quay. Sau phép quay cuối cùng phương của nó trùng với phương ban đầu, vì thế vectơ có được $\overrightarrow{M_1N_1}$ bằng vectơ $\overrightarrow{MN}$, vậy tứ giác MNM_1N_1 là hình bình hành, suy ra điều khẳng định trên.

Trở lại bài toán: Nếu điểm P_3 không trùng với điểm P_0 thì sau ba phép quay liên tiếp theo góc 120^0 trong mặt phẳng ta sẽ được phép tịnh tiến theo vectơ $-\overrightarrow{P_3P_0}$ và 1986 phép quay sẽ cho ta 1986 : 3 = 662 phép tịnh tiến như thế, tức là $\overrightarrow{P_0P_{1986}} = 662.\overrightarrow{P_0P_3}$.

Vậy điểm P_{1986} chỉ trùng với điểm P_0 trong trường hợp điểm P_3 trùng với điểm P_0, tức là phép tịnh tiến được thực hiện theo vectơ không.

Ta lấy điểm A_1 thay cho điểm P_0, thế thì điểm P_1 cũng trùng với A_1.

Bây giờ ta để ý đến điểm P_2.

Điểm A_3 phải nằm ở đâu để cho phép quay quanh nó theo chiều kim đồng hồ biến điểm P_2 thành điểm P_1? Từ các khoảng cách bằng nhau của điểm A_3 tới các điểm A_1 và P_2, suy ra điểm A_3 phải nằm trên phân giác góc $A_1A_2P_2$ với góc $P_2A_3A_1$ bằng 120^0.

Từ đó, ta được tam giác $A_1A_2A_3$ là tam giác đều, vì

$$A_1\hat{A}_2A_3 = A_2\hat{A}_3A_1 = 60^0.$$

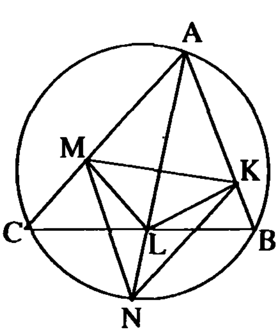
***Bài 56.* (1987)**

Trong tam giác nhọn ABC, đường phân giác trong của góc A cắt BC tại L và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại N. Từ L ta hạ các đường vuông góc LK và LM theo thứ tự xuống các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng diện tích tứ giác AKMN bằng diện tích tam giác ABC.

In an acute-angled triangle ABC the interior bisector of angle A meets BC at L and meets the circumcircle of ABC again at N. From L perpendiculars are drawn to AB and AC, with feet K and M respectively. Prove that the quadrilateral AKNM and the triangle ABC have equal areas.

Hướng dẫn:

Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2}$AB.AC.sinα, trong đó $\alpha = B\hat{A}C$, còn diện tích tứ giác AKNM bằng $\frac{1}{2}$AN.KM (vì các đường chéo AN và KM vuông góc). Ta chỉ cần chứng minh rằng: AB.AC.sinα = AN. KM.



Xét hai tam giác ACL và ANB, ta có $C\hat{A}L = N\hat{A}B$ vì AL là phân giác và $A\hat{C}L = A\hat{N}B$ vì cùng chắn một cung AB của đường tròn ABC. Vậy hai tam giác ACL và ANB đồng dạng nhau, suy ra:

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AL}{AC} \text{ hay AB.AC = AL.AN.}$$

Chỉ còn phải nhận xét rằng KM = AL.sinα (KM là dây cung của đường tròn đường kính AL mà góc KAM là góc nội tiếp bằng α).

***Bài 57.* (1988)**

Trong mặt phẳng cho hai đường tròn đồng tâm, bán kính *R*, *r* (*R* > *r*). P là điểm cố định trên đường tròn bán kính *r* còn B là điểm chuyển động trên đường tròn bán kính R.

Đường thẳng BP cắt đường tròn bán kính R ở điểm thứ hai C và đường thẳng l vuông góc với đường thẳng BP tại P cắt đường tròn bán kính r ở điểm thứ hai A (nếu l là tiếp tuyến của đường tròn thì $A \equiv P$).

a) Tìm tập hợp các giá trị của biểu thức:

$$BC^2 + CA^2 + AB^2.$$

b) Tìm quỹ tích trung điểm của AB.

Consider two coplanar circles of radii r, R (R > r) with the same center. Let P be a fixed point on the smaller circle and B a variable point on the larger circle. The line BP meets the larger circle again at C.

The perpendicular to BP at P meets the smaller circle again at A (if it is tangent to the circle at P, then A = P).

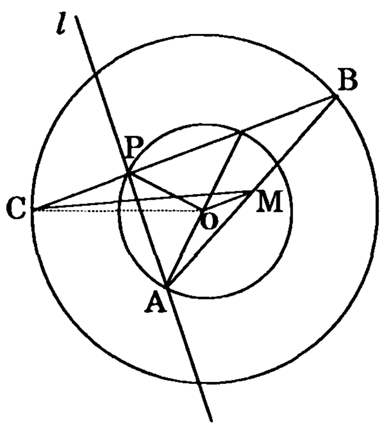
a) Find the set of values of $AB^2 + BC^2 + CA^2$.

b) Find the locus of the midpoint of BC.

Hướng dẫn:

a) Ta biểu thị tổng $T = AB^2 + BC^2 + CA^2$ qua độ dài các đoạn AP, CP và PD bằng cách áp dụng định lí Pitago và các đẳng thức CP = DB, BC = CP + PD + DB. Ta được:

$$T = (AB^2 + (PD + DB)^2) + (4CP^2 + 4CP.PD + PD^2) + (CP^2 + AP^2)$$
$$= (2AP^2 + 2PD^2) + (6CP^2 + 6CP.PD).$$



Theo định lí Pitago, biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất bằng Sr^2, và theo định lí về cát tuyến trong đường tròn thì $CP(CP + PD) = R^2 - r^2$, vậy biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai bằng $6R - 6r^2$. Ta được $T = 6R^2 + 2r^2$ là một đại lượng không đổi và tập hợp các giá trị của biểu thức $BC^2 + CA^2 + AB^2$ chỉ gồm một số duy nhất là $6R^2 + 2r^2$.

b) Gọi O là tâm đường tròn và M là trung điểm của AB. Thế thì OM sẽ là đường trung bình của tam giác ADB và ta dễ dàng thấy rằng điểm M là ảnh của điểm C qua phép vị tự tỉ số $1/2$ với tâm vị tự là điểm nằm trên OP và chia nó theo tỉ số $1/2$.

Nếu điểm B chạy trên đường tròn lớn thì điểm C cũng chạy trên đường tròn này, còn điểm M chạy trên đường tròn vị tự với nó có bán kính $R/2$ và tâm là trung điểm của OP.

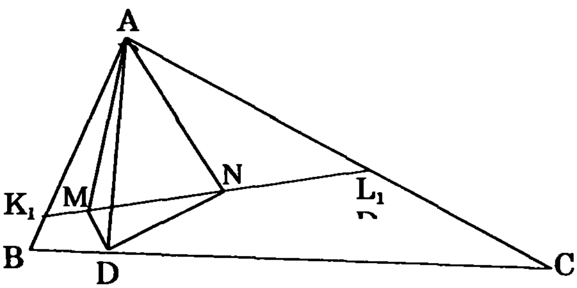
Vậy quỹ tích trung điểm M của AB là đường tròn bán kính $R/2$ có tâm là trung điểm của OP.

***Bài 58.* (1988)**

Cho tam giác ABC vuông tại A, D là chân đường cao qua A. Đường thẳng nối tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD cắt AB, AC lần lượt tại K và L. Gọi S và T lần lượt là diện tích các tam giác ABC và AKL. Chứng minh $S \geq 2T$.

ABC is a triangle, right-angled at A, and D is the foot of the altit- -ude from A. The straight line joining the incenters of the triangles ABD and ACD intersects the sides AB, AC at K, L respectively. Let S, T be the area of the triangle ABC and the area of the triangle AKL respectively. Prove that $S \geq 2T$.

Hướng dẫn:



Lấy các điểm K_1, L_1 lần lượt trên AB, AC sao cho $AK_1 = AL_1 = AD$. Nối K_1L_1 và kẻ phân giác các góc BAD và DAC theo thứ tự cắt K_1L_1 tại M và N. Ta có

$\Delta AK_1M = \Delta ADM$ (c.g.c),

suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{AK_1M}$. Tam giác AK_1L_1 vuông cân nên $\widehat{AK_1M} = 45^o$, từ đó ta có $\widehat{ADM} = 45^o$ nên DM là phân giác góc ADB, do đó M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD. Tương tự ta có N là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD. Vậy K_1 trùng với K, L_1 trùng với L. Ta có:

$$T = S_{AKL} = \frac{1}{2}AK_1.AL_1 = \frac{1}{2}AD^2,$$

$$\frac{1}{2T} = \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \geq \frac{2}{AB.AC} = \frac{1}{S}.$$

Vậy $S \geq 2T$.

***Bài 59.* (1989)**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_o là giao điểm của phân giác trong AA_1 với các phân giác ngoài của các góc B và C. Các điểm B_o và C_o được định nghĩa một cách tương tự.. Chứng minh rằng:

a) Diện tích tam giác $A_0B_0C_0$ bằng 2 lần diện tích lục giác $AC_1BA_1CB_1$.

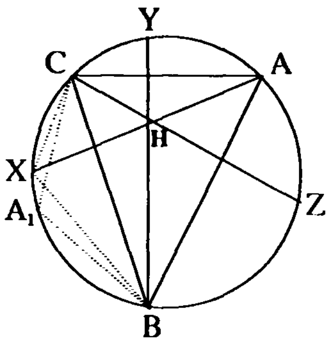
b) Diện tích tam giác $A_0B_0C_0$ không nhỏ hơn 4 lần diện tích tam giác ABC.

In an acute-angled triangle ABC, the internal bisector of angle A meets the circumcircle again at A_1. Points B_1 and C_1 are defined similarly. Let A_0 be the point of intersection of the line AA_1 with the external bisectors of angles B and C. Points B_0 and C_0 are defined similarly. Prove that

a) The area of the triangle $A_0B_0C_0$ is twice the area of the hexagon $AC_1BA_1CB_1$.

b) The area of the triangle $A_0B_0C_0$ is at least four times the area of the triangle ABC.

Hướng dẫn:



a) Gọi I là giao điểm các phân giác của tam giác ABC. Ta chứng minh rằng

$$IA_1 = A_1A_0. \qquad (*)$$

Do $A_1\hat{I}B = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$ và $B_1\hat{B}A_1 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2}$ nên $A_1\hat{I}B = I\hat{B}A$, vì thế $IA_1 = A_1B$. Các điểm A_o, B_o và C_o là giao điểm các phân giác của các góc ngoài tương ứng của tam giác ABC, nên A_oA, B_oB, C_oC là những đường cao của tam giác $A_oB_oC_o$. Vậy:

$$A_1\hat{A}_0B = \frac{\pi}{2} - A_1\hat{I}B,\ A_1\hat{B}A_0 = \frac{\pi}{2} - I\hat{B}A_1.$$

Từ đó $A_1B = A_1A_o$ và (*) đã được chứng minh.

Từ (*) ta suy ra $S_{IA_1B} = S_{A_1A_0B}$.

Chứng minh tương tự ta được các đẳng thức như vậy đối với năm tam giác đỉnh I còn lại do lục giác $AB_1CA_1BC_1$ được phân chia thành 6 tam giác, suy ra đpcm.

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC và các điểm X, Y, Z đối xứng của H theo thứ tự qua BC_1, AC, AB. Ba điểm X, Y, Z này nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì A_1 là điểm chính giữa cung BC nên $S_{BA_1C} \geq S_{BXC}$. Tương tự

$$S_{A_1BC} \geq S_{AYC}; S_{BC_1A} \geq S_{BZA}.$$

Vậy: $S_{AC_1BA_1CB_1} \geq S_{AZBXCY} = 2(S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB}) = 2.S_{ABC}$.

***Bài 60.* (1989)**

Một tứ giác lồi ABCD có các tính chất sau:

a) Các cạnh AB, AD và BC thỏa mãn AB = AD + BC;

b) Có một điểm P bên trong tứ giác cách đường thẳng CD một khoảng cách h sao cho AP = h + AD, BP = h + BC.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{AD}} + \dfrac{1}{\sqrt{BC}}$.

Let ABCD *be a convex quadrilateral such that the following properties is satisfied:*

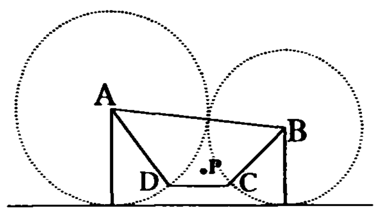
a) The sides AB, AD, BC *satisfy* AB = AD + BC.

b) There exists a point P *inside the quadrilateral at a distance h from the line* CD *such that*

AP = h + AD *and* BP = h + BC.

Show that: $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{AD}} + \dfrac{1}{\sqrt{BC}}$.

Hướng dẫn:



Tứ giác ABCD và điểm P thỏa mãn điều kiện của bài toán được biểu diễn ở hình bên. Dễ dàng thấy rằng với AD = R và BC = r cho trước, đại lượng h sẽ có giá trị lớn nhất khi đường thẳng CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tâm A và B. Vì thế trong trường hợp này chỉ cần chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}. \qquad (*)$$

Giả sử PM $\perp$ CD. Theo định lí Pitago ta có:

$$CD = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

và $CD = CM + MD = \sqrt{(r+h)^2 - (r-h)^2} + \sqrt{(R+h)^2 - (R-h)^2} =$

$$= 2\sqrt{rh} + 2\sqrt{Rh}.$$

Từ đó $\sqrt{Rr} = \sqrt{rh} + \sqrt{Rh}$ hay $1 = \dfrac{\sqrt{rh} + \sqrt{Rh}}{\sqrt{Rr}} = \sqrt{\dfrac{h}{R}} + \sqrt{\dfrac{h}{r}}$.

Suy ra: $\dfrac{1}{\sqrt{h}} = \dfrac{1}{\sqrt{R}} + \dfrac{1}{\sqrt{r}}$, tức là (*).

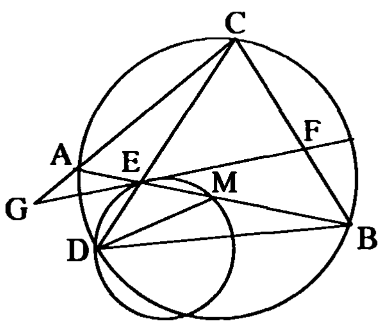
***Bài 61.* (1990)**

Cho A, B, C, D là bốn điểm phân biệt thuộc một đường tròn sao cho các đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại một điểm E. Trên đoạn thẳng BE lấy điểm M khác B và E. Tiếp tuyến tại E của đường tròn đi qua ba điểm D, E, M cắt các đường thẳng BC và AC theo thứ tự tại F và G.

Tính tỉ số $\dfrac{EG}{EF}$ theo $t = \dfrac{AM}{AB}$.

Chords AB *and* CD *of a circle intersect at a point* E *inside the circle. Let* M *be an interior point of the segment* EB. *The tangent at* E *to the circle through* D, E *and* M *intersects the lines* BC *and* AC *at* F *and* G *respectively.*

Find $\dfrac{EG}{EF}$ *in terms of* $t = \dfrac{AM}{AB}$.



Hướng dẫn:

Trước hết, ta chứng tỏ dễ dàng rằng điểm E nằm giữa các điểm G và F. Nối D với các điểm A, M và B. Vì $\widehat{CEF} = \widehat{DEG} = \widehat{EMD}$ và $\widehat{ECF} = \widehat{MAD}$ nên hai tam giác CEF và AMD đồng dạng. Từ đó:

$$CE.MD = AM.EF. \qquad (1)$$

Mặt khác, vì $\widehat{ECG} = \widehat{MBD}$ và

$$\widehat{CGE} = \widehat{CEF} - \widehat{GCE} = \widehat{EMD} - \widehat{MBD} = \widehat{BDM}$$

nên hai tam giác CGE và BDM cũng đồng dạng. Do vậy:

$$EG.MB = CE.MD. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: EG.MB = AM.EF, tức là

$$\frac{EG}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{t.AB}{(1-t).AB} = \frac{t}{1-t}.$$

Chú ý: Nếu điểm M nằm giữa các điểm A và E thì có thể đổi chỗ vai trò của các điểm A và B, F và G và đặt $t' = 1 - t$.

Bằng lí luận tương tự ta có:

$$\frac{EF}{GE} = \frac{MB}{AM} = \frac{t'}{1-t'} = \frac{1-t}{t} \text{ và } \frac{GE}{EF} = \frac{t}{1-t}.$$

***Bài 62.* (1991)**

Cho tam giác ABC và điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Các đường phân giác trong của các góc A, B, C lần lượt cắt các cạnh đối diện tại A', B', C'. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}.$$

Given a triangle ABC, *let* I *be the incenter. The internal bisectors of angles* A, B, C *meet the opposite sides in* A', B', C' *respectively. Prove that:*

$$\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}.$$

Hướng dẫn:

Trước hết ta hãy chứng minh $\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'} \le \frac{8}{27}$.

Muốn vậy, ta tìm tỉ số $\frac{AI}{AA'}$ theo ba cạnh của tam giác ABC. Ta biết rằng độ dài phân giác AA' của góc A theo các cạnh kề của góc là

$$AA' = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

(chứng minh bằng cách dùng: $S_{ABC} = S_{AA'B} + S_{AA'C}$). Mặt khác, ta lại có:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

(chứng minh bằng định lí hàm số cosin), vì vậy:

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}} : \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{(p-a)(b+c)}{2bc.\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{(p-a)(b+c)}{2p(p-a)} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{BI}{BB'} = \frac{a+c}{a+b+c}, \frac{CI}{CC'} = \frac{a+b}{a+b+c}$.

Như vậy ta được: $\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}\right)\geq\frac{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}{a+b+c}.$$

Từ đó: $\dfrac{\text{AI.BI.CI}}{\text{AA'.BB'.CC'}}\leq\dfrac{8}{27}$. (1)

Bây giờ ta chứng minh tỉ số $\dfrac{\text{AI.BI.CI}}{\text{AA'.BB'.CC'}}>\dfrac{1}{4}$.

Muốn vậy ta nhớ lại rằng:

a) Nếu $x+y=x_1+y_1$ và $|x-y|<|x_1-y_1|$ thì $x^3+y^3<x_1^3+y_1^3$ với x, y, x_1, y_1 là các số thực dương.

b) Với các số thực a, b, c ta có đẳng thức sau:

$$3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$$

Giả sử $a\geq b\geq c$. Vì $\dfrac{a+b+c}{2}>0$, $\dfrac{a+b+c}{2}-\dfrac{a+b-c}{2}=c>|a-b|$ và

$$\frac{a+b+c}{2}>\left|\frac{a+b-c}{2}-c\right| \text{ nên}$$

$$\frac{\text{AI.BI.CI}}{\text{AA'.BB'.CC'}}=\frac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{3(a+b+c)^3}>$$

$$>\frac{(a+b+c)^3-\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^3-\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^3-c^3}{3(a+b+c)^3}>$$

$$>\frac{(a+b+c)^3-\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^3-\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^2-c^3}{3(a+b+c)^3}=\frac{1}{4}.$$

Vậy $\dfrac{\text{AI.BI.CI}}{\text{AA'.BB'.CC'}}>\dfrac{1}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

***Bài 63.* (1991)**

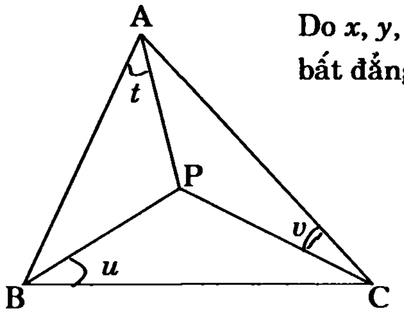
Cho tam giác ABC và một điểm P nằm trong tam giác. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba góc $\widehat{PAB}, \widehat{PBC}, \widehat{PCA}$ nhỏ hơn hoặc bằng 30^0.

Let ABC *be a triangle and* P *an interior point of* ABC. *Show that at least one of the angles* $\widehat{PAB}, \widehat{PBC}, \widehat{PCA}$ *is less than or equal to* 30^0.

Hướng dẫn:

Để cho gọn ta đặt

$x = \widehat{BAC}, y = \widehat{ABC}, z = \widehat{ACB}$, $t = \widehat{PAB}, u = \widehat{PBC}, v = \widehat{PCA}$.



Do x, y, z là ba góc của tam giác ABC ta sử dụng 2 bất đẳng thức lượng giác quen thuộc sau đây:

$$\sin x.\sin y.\sin z \le \frac{3\sqrt{3}}{8}, \qquad (1)$$

$$\cot gx + \cot gy + \cot gz \ge \sqrt{3}. \qquad (2)$$

Trong trường hợp góc z tù, ta có thể viết (2) dưới dạng:

$$\text{cotg}x + \text{cotg}y + \text{cotg}z \ge 2\cot g\frac{x+y}{2} + \cot gz \ge \cot g\frac{x+y}{2} - \cot g(x+y),$$

hay nếu đặt $m = \text{cotg}\frac{x+y}{2}$ thì ta có:

$$\cot gx + \cot gy + \cot gz \ge 2m - \frac{m^2-1}{2m} \ge \frac{3}{2}m + \frac{1}{2m} \ge \sqrt{3}.$$

Xét tam giác PAB, theo định lí hàm số sin ta có $\frac{PA}{PB} = \frac{\sin(y-u)}{\sin t}$.

Tương tự, $\frac{PB}{PC} = \frac{\sin(z-v)}{\sin u}, \frac{PC}{PA} = \frac{\sin(x-t)}{\sin v}$. Từ đó ta được:

$$\frac{\sin(x-t)\sin(y-u)\sin(z-v)}{\sin t\sin u\sin v} = 1.$$

Vì $\frac{\sin(x-t)}{\sin t} = \sin x(\cot gt - \cot gx)$ nên ta có:

$$(\cot gt - \cot gx)(\cot gu - \cot gy)(\cot gv - \cot gz) = \frac{1}{\sin x\sin y\sin z}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có thể viết:

$$(\cot gt - \cot gx)(\cot gu - \cot gy)(\cot gv - \cot gz) \le$$

$$\le \left(\frac{\cot gt + \cot gu + \cot gv - \cot gx - \cot gy - \cot gz}{3}\right)^3.$$

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức (1) ở trên ta được:

$$\cot gt + \cot gu + \cot gv - \cot gx - \cot gy - \cot gz \ge 2\sqrt{3}.$$

Kết hợp với (2) ta được: $\cot gt + \cot gu + \cot gv \ge 3\sqrt{3}$.

Vậy một trong ba góc t, u, v mà có $\text{cotg} \ge \sqrt{3}$ thì góc đó phải nhỏ hơn hoặc bằng 30^0. Ta có đpcm.

***Bài 64.* (1992)**

Gọi (L) là tiếp tuyến của đường tròn (C) và M là một điểm trên (L). Hãy tìm quỹ tích các điểm P thoả mãn tính chất: tồn tại hai điểm R, Q trên (L) sao cho RM = QM và tam giác PQR nhận (C) làm đường tròn nội tiếp.

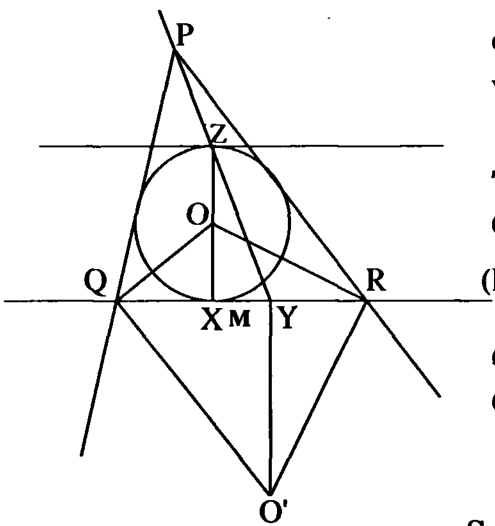
L is a tangent to the circle (C) and M is a point on L. Find the loc--us of all points P such that there exist points Q and R on L equidistant from M with (C) the incircle of the triangle PQR.

Hướng dẫn:

Cho X là giao điểm của (C) và (L), O là tâm của (C). Giả sử XO cắt (C) tại điểm thứ hai Z; Y là điểm trên QR sao cho M là trung điểm XY. Gọi (C') là đường tròn tiếp xúc với cạnh QR, các đường thẳng PQ, PR nhưng ở về phía khác với (C) so với cạnh QR (tức đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PQR). Giả sử (C') tiếp xúc với QR tại Y'.

Phép vị tự tâm P, tỉ số $\frac{PY'}{PZ}$ biến (C) thành (C'), tiếp tuyến với (C) tại Z biến thành đường thẳng QR, suy ra Z biến thành Y'.

Ta sẽ chứng minh rằng QX = RY'.



Thật vậy, hiển nhiên X và Y' là chân các đường vuông góc với QR hạ từ O và O' tương ứng. Ta cũng có

$$\widehat{OQO'} = \widehat{ORO'} = 90^0.$$

Từ đó suy ra hai tam giác QY'O' và OXQ đồng dạng nhau, do đó:

$$\frac{QY'}{Y'O'} = \frac{OX}{XQ}.$$

Cũng vậy, hai tam giác RXO và O'Y'R đồng dạng nhau nên:

$$\frac{RX}{XO} = \frac{O'Y'}{Y'R}.$$

Suy ra: $QY'.XQ = Y'O'.OX = RX.Y'R$.

Từ đó ta được: $\frac{QX}{RX} = \frac{QX}{QR - QX} = \frac{RY'}{QR - RY'} = \frac{RY'}{QY'}$, suy ra QX = RY'.

Mặt khác, QX = RY vì M vừa là trung điểm của XY, vừa là trung điểm QR, do đó ta có Y trùng Y'. Như vậy, điểm P di động nhưng luôn

luôn nằm trên tia YZ (dễ thấy Z cố định, Y cố định nên tia YZ cố định).

Đảo lại, lấy điểm P bất kì trên tia YZ, thì bằng cách lí luận tương tự như trên ta cũng có QX = RY. Nhưng M là trung điểm XY nên suy ra M là trung điểm QR, như thế P là điểm của quỹ tích.

Tóm lại, quỹ tích của P là tia YZ.

***Bài 65.* (1993)**

Cho D là điểm nằm bên trong tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^0$ và AC.BD = AD.BC.

a) Tính tỉ số $\dfrac{AB.CD}{AC.BD}$.

b) Chứng minh rằng hai tiếp tuyến tại điểm C của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD và BCD vuông góc nhau.

Let D *be a point inside the acute-angled triangle* ABC *such that* $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^0$, *and* AC.BD = AD.BC.

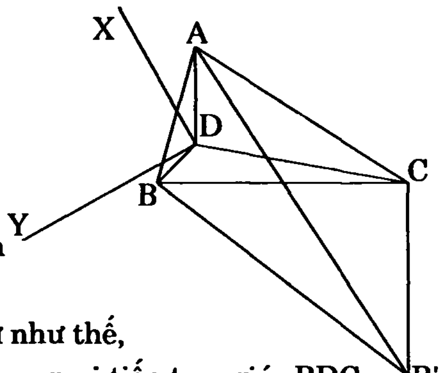
(a) Calculate the ratio $\dfrac{AB.CD}{AC.BD}$.

(b) Prove that the tangents at C *to the circumcircles of* ACD *and* BCD *are perpendicular.*

Hướng dẫn:

a) Lấy điểm B' sao cho CB = CB', $\widehat{BCB'} = 90^0$ và B' nằm khác phía của A so với cạnh BC. Dễ dàng kiểm tra được rằng các cặp tam giác ADB và ACB', DAC và BAB' đồng dạng với nhau. Từ đó suy ra:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AB'}{B'C}, \frac{CD}{AC} = \frac{BB'}{AB'},$$



và điều này kéo theo

$$\frac{AB.CD}{AC.BD} = \frac{BB'}{B'C} = \sqrt{2}.$$

b) Gọi XD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC tại D, với XD nằm trong góc ADB. Tương tự như thế, lấy YD là tiếp tuyến tại D của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDC. Lúc đó, $\widehat{ADX} = \widehat{ACD}$, $\widehat{BDY} = \widehat{BCD}$, do đó $\widehat{ADX} + \widehat{BDY} = \widehat{ACB}$, suy ra

$$\widehat{XDY} = \widehat{ADB} - (\widehat{ADX} + \widehat{BDY}) = \widehat{ADB} - \widehat{ACB} = 90^0.$$

Nói cách khác, hai tiếp tuyến tại D nói trên vuông góc với nhau. Từ đây, gọi (L) là đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADC và BDC, bằng phép đối xứng qua (L), ta suy ra hai tiếp tuyến tại C cũng vuông góc nhau.

***Bài 66.* (1993)**

Cho ba điểm P, Q, R trong mặt phẳng, ta đặt $m(PQR)$ là độ dài bé nhất của 3 đường cao của tam giác PQR, và quy ước rằng $m(PQR) = 0$ nếu P, Q, R thẳng hàng. Chứng minh rằng với 4 điểm bất kì A, B, C, X ta có: $m(ABC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$.

For three points P, Q, R in the plane, define m(PQR) as the minimum length of the three altitudes of the triangle PQR (or zero if the points are collinear). Prove that for any points A, B, C, X:

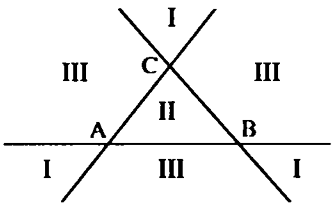
$$m(ABC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

Hướng dẫn:

Trước hết ta có các chú ý sau:

(1) $m(ABC)$ bằng 2 lần diện tích tam giác ABC chia cho cạnh dài nhất của tam giác đó.

(2) Bất kì đoạn thẳng nào nằm bên trong một tam giác cũng ngắn hơn cạnh dài nhất của tam giác đó.



Tuỳ thuộc vào vị trí tương đối của X đối với tam giác ABC, ta có 3 trường hợp I, II, III để xét sau đây:

Trường hợp I:

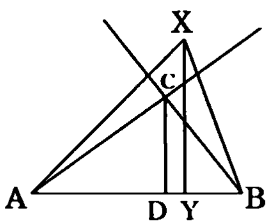
Xét các đường cao của tam giác ABC và ABX. Hạ XY và AB vuông góc xuống AB. Rõ ràng XY ≥ CD.

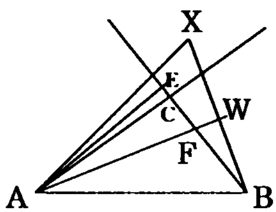
Tiếp đến, kẻ AW ⊥ BX và AE ⊥ BC. Nếu AW cắt BC tại F, thì AW ≥ AF ≥ AE.

Tương tự như thế cho các đường cao hạ từ A.

Như thế, mọi đường cao của tam giác ABX đều dài hơn đường cao của tam giác ABC. Do đó:

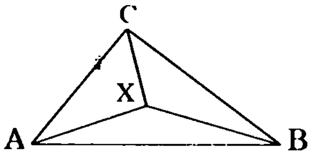
$$m(ABC) \le m(ABX) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$



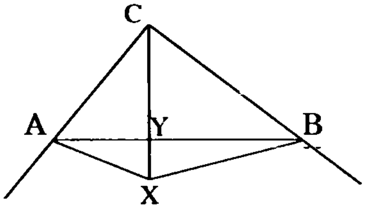


Trường hợp II:

Không mất tính tổng quát, ta giả sử AB là cạnh dài nhất trong tam giác ABC. Lúc đó: dt(ABC) = dt(ABX) + dt(BCX) + dt(CAX). Chia vế theo vế đẳng thức trên cho $\frac{1}{2}$ cạnh dài nhất của tam giác ABC (cạnh này luôn ngắn hơn $\frac{1}{2}$ AB), ta được:



$m(ABC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$.



Trường hợp III:

Để ý: $m(ABY) = 0$ (A, Y, B thẳng hàng), ta có:

$$m(ABC) \le m(ABY) + m(BCY) + m(CAY)$$

(theo trường hợp II)

$$\le m(ABX) + m(BCX) + m(CAY)$$

(theo trường hợp I).

***Bài 67.* (1994)**

Cho tam giác cân ABC với AB = AC. Giả sử:

i) M là trung điểm BC và O là điểm nằm trên đường thẳng AM sao cho OB $\perp$ AB.

ii) Q là điểm tuỳ ý trên cạnh BC, không trùng với B và C.

iii) E, F là hai điểm tương ứng nằm trên các đường thẳng AB, AC sao cho E, Q, F là 3 điểm phân biệt và thẳng hàng.

Chứng minh rằng OQ $\perp$ EF khi và chỉ khi QE = QF.

ABC is an isosceles triangle with AB = AC. Suppose that

i) M is the midpoint of BC and O is the point on the line AM such that OB is perpendicular to AB.

ii) Q is an arbitary point on BC different from B and C.

iii) E lies on the line AB and F lies on the line AC such that E, Q, F are distinct and collinear.

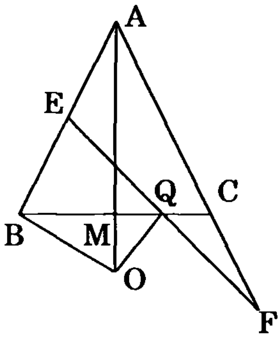
Prove that OQ is perpendicular to EF if and only if QE = QF.

Hướng dẫn:

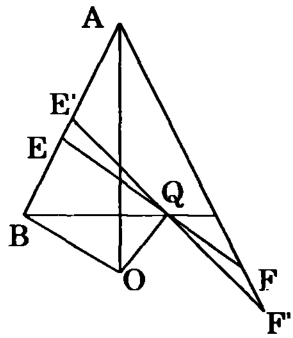
Trước tiên ta giả sử $\widehat{OQE} = 90^0$. Khi đó, các tứ giác EBQO và QCOF nội tiếp được (hình a). Suy ra:

$$\widehat{OFQ} = \widehat{OCQ} = \widehat{OBQ} = \widehat{OEQ}.$$

Từ đó ta có Δ OEQ = Δ OFQ (g.c.g.), do vậy QE = QF.



Hình a.



Hình b.

Đảo lại , giả sử QE = QF, nhưng $O\hat{Q}E \neq 90^0$. Trên AB và AC ta lần lượt lấy E' và F' sao cho E', Q, F' thẳng hàng và $O\hat{Q}E' = 90^0$. Khi đó, theo chứng minh trên ta có E'Q = F'Q (hình b).

Từ đó, $\Delta E'QE = \Delta F'QF$ và do vậy $Q\hat{F}'C = Q\hat{E}'B$. Điều này kéo theo AB // AC. Ta có điều mâu thuẫn, suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 68.*(1995)**

Cho A, B, C và D là bốn điểm phân biệt trên một đường thẳng và được sắp theo thứ tự đó. Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại các điểm X và Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại B và N. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, DN và XY đồng quy.

Let A, B, C, D be four distinct points on a line, in that order. The circles with diameter AC and BD intersect at X and Y. The line XY meets BC at Z. Let P be a point on the line XY other than Z. The line CP intersects the circle with diameter AC at C and M, and the line BP intersects the circle with diameter BD at B and N. Prove that the lines AM, DN, XY are concurrent.

Hướng dẫn:

a) Xét trường hợp $P \neq X, P \neq Y$.

Do XY là trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AC và BD nên $\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PN}.\overline{PB}$. (1)

Đồng thời, XY $\perp$ AD kéo theo $P\hat{Z}D = 90^0$.

Giả sử $AM \cap XY = \{K\}$. Vì M nằm trên đường tròn đường kính AC nên $A\hat{M}C = 90^0$ và $K\hat{M}C = 90^0$. Vậy $K\hat{M}C = K\hat{Z}C = 90^0$. Suy ra bốn điểm K, M, C, Z cùng thuộc một đường tròn mà ta gọi đường tròn đó là (v). Xét phương tích của điểm P đối với vòng tròn (v) ta có:

$$\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PK}.\overline{PZ}. \qquad (2)$$

Tương tự, nếu $DN \cap XY = \{K'\}$ thì

$$\overline{PN}.\overline{PB} = \overline{PK'}.\overline{PZ}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $\overline{PK}.\overline{PZ} = \overline{PK'}.\overline{PZ}$. Do $P \neq Z$ nên $K' \equiv K$.

Vậy AM, DN, XY đồng quy.

b) Trường hợp $P \equiv X$. Khi đó $M \equiv X$ và $N \equiv X$. Do vậy AM, DN và XY đồng quy.

c) Trường hợp $P \equiv Y$ được xét tương tự như (b).

***Bài 69.*(1995)**

Xác định tất cả các số nguyên $n > 3$ sao cho tồn tại n điểm A_1, $A_2,\dots, A_n$ trong mặt phẳng và các số thực $r_1, r_2,\dots, r_n$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

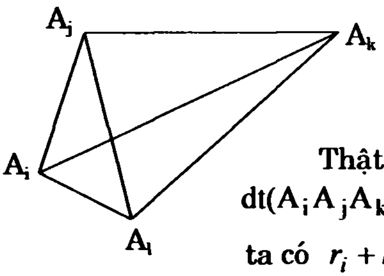
i) Không có 3 điểm nào trong số các điểm $A_1, A_2,\dots, A_n$ thẳng hàng.

ii) Với mỗi bộ số (i,j,k) $(1 \le i < j < k \le n)$, các tam giác $A_iA_jA_k$ có diện tích bằng $r_i + r_j + r_k$.

Determine all integers n > 3 for which there exist n points $A_1, \dots, A_n$ in the plane, no three collinear, and real numbers $r_1, \dots, r_n$ such that for any distinct i, j, k, the area of the triangle $A_iA_jA_k$ is $r_i + r_j + r_k$.

Hướng dẫn:

Ta thấy $n = 4$ thỏa mãn các tính chất (i) và (ii) của bài ra. Thật vậy, chỉ cần chọn 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 là 4 đỉnh của hình vuông cạnh 1 và bộ 4 số $r_j = \frac{1}{6}, j = 1,2,3,4$. Ta sẽ chứng minh $n \ge 5$ không thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Ta thấy ngay, chỉ cần xét trường hợp $n = 5$ là đủ. Ta có các nhận xét sau đây.



Nhận xét 1. Nếu 4 điểm A_i, A_j, A_k, A_l là 4 đỉnh của tứ giác lồi $A_iA_jA_kA_l$ thì

$$r_i + r_k = r_j + r_l.$$

Thật vậy, theo giả thiết (xem hình vẽ), từ hệ thức $dt(A_iA_jA_k) + dt(A_iA_kA_l) = dt(A_iA_jA_l) + dt(A_kA_jA_l)$ ta có $r_i + r_j + r_k + r_i + r_k + r_l = r_i + r_j + r_l + r_j + r_l$ hay

$$r_i + r_j = r_j + r_l.$$

Nhận xét 2. Nếu A_l nằm bên trong tam giác $A_iA_jA_k$ thì

$$3r_l + r_i + r_j + r_k = 0.$$

Thật vậy, ta có:

$\mathrm{dt}(A_iA_kA_l) + \mathrm{dt}(A_iA_jA_l) + \mathrm{dt}(A_kA_jA_l) = \mathrm{dt}(A_iA_jA_k)$, hay

$$r_i + r_k + r_l + r_i + r_j + r_l + r_k + r_j + r_l = r_i + r_j + r_k.$$

Từ đây ra có ngay hệ thức cần chứng minh.

Trở lại bài toán: Xét bao lồi của 5 điểm $A_1, \ldots, A_5$.

Có các trường hợp sau đây:

1) Bao lồi là tam giác $A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}$, còn A_{i_1}, A_{i_2} nằm trong tam giác đó. Theo *nhận xét 2* thì $3r_{i_1} + r_{i_3} + r_{i_4} + r_{i_5} = 0$, (1)

$$3r_{i_2} + r_{i_3} + r_{i_4} + r_{i_5} = 0. \quad (2)$$

(1) và (2) kéo theo $3r_{i_4} + 3r_{i_2} + 2r_{i_3} + 2r_{i_4} + 2r_{i_5} = 0$ và dẫn đến điều vô lí sau :

$$\mathrm{dt}(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) + \mathrm{dt}(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_4}) + \mathrm{dt}(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_5}) + \mathrm{dt}(A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}) = 0.$$

2) Bao lồi là tứ giác $A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}$ và A_{i_1} nằm trong tứ giác đó.

Không mất tính tổng quát, coi A_{i_1} thuộc $\Delta A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}$. Khi đó theo *nhận xét 1* thì:

$$\left.\begin{array}{l} r_{i_3} + r_{i_4} = r_{i_2} + r_{i_4} \\ r_{i_1} + r_{i_5} = r_{i_2} + r_{i_4} \end{array}\right\} \Rightarrow r_{i_1} = r_{i_3}.$$

3) Bao lồi là ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Do các tứ giác $A_1A_3A_4A_5$ và $A_2A_3A_4A_5$ là tứ giác lồi, nên

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + r_4 = r_3 + r_5 \\ r_2 + r_4 = r_3 + r_5 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 = r_2.$$

Tương tự, ta cũng có: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$.

Như vậy, $\mathrm{dt}(A_1A_2A_3) = \mathrm{dt}(A_1A_2A_4) = \mathrm{dt}(A_1A_2A_5)$ và A_3, A_4, A_5 thẳng hàng (vô lí). Kết luận: $n = 5$.

***Bài 70.* (1995)**

Cho ABCDEF là một lục giác lồi có AB = BC = CD, DE = EF = FA và $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60^0$. Cho G và H là 2 điểm nằm bên trong lục giác sao cho $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^0$. Chứng minh rằng

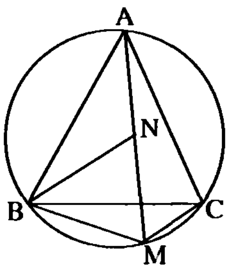
$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

Let ABCDEF *be convex hexagon with* AB = BC = CD *and* DE = EF = FA, *such that angle* BCD = *angle* EFA = 60^0. *Suppose that* G *and* H *are points in the interior of the hexagon such that angle* AGB = *angle* DHE = 120^0. *Prove that* $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta chứng minh Bổ đề sau:

Cho tam giác đều ABC *nội tiếp trong đường tròn tâm* O *và* M *là một điểm trên cung nhỏ* BC, *khi đó:* MA = MB + MC.



Thật vậy, lấy N trên AM sao cho MN = MB thì BN = BM và $\widehat{ABN} = \widehat{MBC}$ Suy ra $\Delta ABN = \Delta CBN$. Từ đó AN = CM và do đó

$$AM = AN + NM = CM + BM.$$

Trở lại bài toán: Từ BC = CD và góc $\widehat{BCD} = 60^0$ ta suy ra BD = BC = AB.

Tương tự, từ EF = FA, $\widehat{EFA} = 60^0$ ta có AE = EF = DE. Vậy BE là trục đối xứng của tứ giác ABDE. Lấy K đối xứng với C, L đối xứng với F qua BE thì hai lục giác ABCDEF và DBKAEL là ảnh của nhau qua phép đối xứng trên và vì vậy KL = CF. Vì AKB, DEL là các tam giác đều và $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^0$ nên theo bổ đề trên thì

$$KG = AG + GB, HL = DH + HE.$$

Do đó $AG + GB + GH + DH + EH = KG + GH + HL \geq KL$ hay

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi K, G, H, L thẳng hàng.

***Bài 71.* (1996)**

Gọi P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho

$$\widehat{APB} - \widehat{ACP} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}.$$

Cho D, E là tâm các vòng tròn nội tiếp tương ứng của các tam giác APB, APC. Chứng minh rằng các đường thẳng AP, BD, CE đồng quy tại một điểm.

Let P *be a point inside triangle* ABC *such that*

$$\widehat{APB} - \widehat{ACP} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}.$$

Let D, E *be the incenters of triangles* APB, APC, *respectively. Show that* AP, BD, CE *meet at a point.*

Hướng dẫn:

Trước hết, ta có bổ đề sau đây:

Bổ đề: Gọi P là một điểm nằm trong tam giác ABC và X, Y, Z lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P tương ứng xuống BC, CA, AB.

Khi đó: $PA = \dfrac{YZ}{\sin A}$ và $\widehat{APB} - \widehat{ACP} = \widehat{XYZ}$.

Chứng minh: Để ý rằng tứ giác AYPZ nội tiếp và từ định lí hàm sin ta có đẳng thức thứ nhất:

$$PA = \frac{AY}{\sin\widehat{APY}} = \frac{AY}{\sin\widehat{AZY}} = \frac{YZ}{\sin A}.$$

Đẳng thức thứ hai được chứng minh như sau:

$$\widehat{XZY} = \widehat{XZP} + \widehat{YZP} = \widehat{XBP} + \widehat{YAP}$$
$$= 90^0 - \widehat{XPB} + 90^0 - \widehat{YPA} = 180^0 - (360^0 - \widehat{APB} - \widehat{XPY})$$
$$= -180^0 + APB + (180^0 - \widehat{ACB}) = \widehat{APB} - \widehat{ACB}.$$

Trở lại bài toán: Ta có:

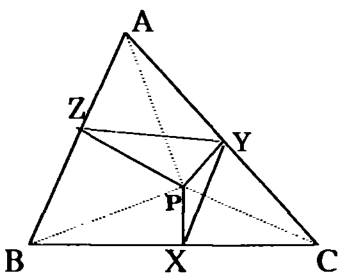
$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{XYZ} \text{ và } \widehat{APC} - \widehat{ABC} = \widehat{XYZ}.$$

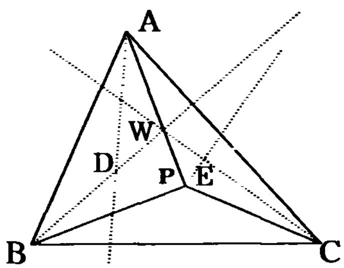
Suy ra tam giác XYZ cân, với XY = XZ. Từ đó:

$$PC.\sin ACB = PB.\sin ABC,$$

nhưng AC.sinACB = AB.sinABC, do đó ta được: $\dfrac{AB}{PB} = \dfrac{AC}{PC}$.

Giả sử BD cắt AP tại W. Khi đó, theo định lí về đường phân giác ta có $\dfrac{AB}{PB} = \dfrac{AW}{PW}$, suy ra $\dfrac{AW}{PW} = \dfrac{AC}{PC}$, từ đó CW cũng là phân giác của góc $\widehat{ACP}$, ta có điều phải chứng minh.





Bài 72. (1996)

Cho đa giác lồi ABCDEF thoả điều kiện

AB // DE, BC // EF, CD // FA.

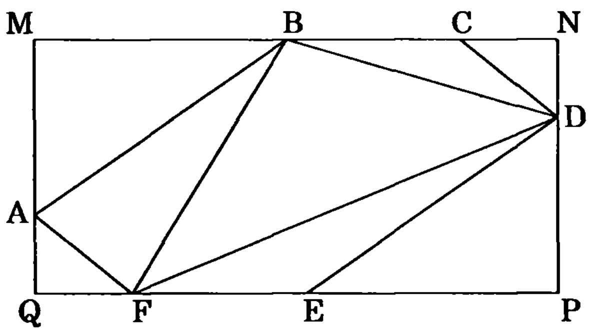
Gọi R_A, R_C, R_E lần lượt là bán kính các vòng tròn ngoại tiếp của các tam giác FAB, BCD, DEF tương ứng; kí hiệu p là chu vi đa giác.

Chứng minh rằng $R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$.

Let ABCDEF be a convex hexagon such that AB is parallel to DE, BC is parallel to EF and CD is parallel to FA. Let R_A, R_C, R_E denote the circumradii of triangles FAB, BCD, DEF, respectively, and let p denote the perimeter of the hexagon.

Prove that $R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$.

Hướng dẫn:



Từ công thức:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ta suy ra

$$2R_A = \frac{BF}{\sin A},$$

$$2R_C = \frac{BD}{\sin C},$$

$$2R_E = \frac{FD}{\sin E}$$

(để đơn giản, ta gọi A, B, C, D, E lần lượt là các góc ở đỉnh của đa giác lồi đã cho). Mặc dù điều này đúng khi $\widehat{FAB} \geq 120^0$, nhưng trong trường hợp tổng quát, điều đó không đúng khi

$$\frac{BF}{\sin A} > BA + AF,$$

do đó, trước tiên ta phải nói rằng đa giác đã cho phải thoả mãn điều kiện trên. Kéo dài BC và FE, từ A và D, kẻ những đường vuông góc với chúng, ta được hình chữ nhật MNPQ như hình vẽ.

Rõ ràng ta có BF $\geq$ MQ = NP. Mặt khác:

$$MQ = AB.\sin B + AF.\sin F,\ NP = CD.\sin C + DE.\sin E$$

(để ý rằng hai góc bù nhau thì có sin bằng nhau). Suy ra:

$$2BF \geq AB.\sin B + AF.\sin F + CD.\sin C + DE.\sin E.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có:

$$2BD \geq BC.\sin B + CD.\sin D + AF.\sin A + EF.\sin E,$$

$$2FD \geq AB.\sin A + BC.\sin C + DE.\sin D + EF.\sin F.$$

Từ đây ta được: $\frac{2BF}{\sin A} + \frac{2BD}{\sin C} + \frac{2FD}{\sin E} \geq$

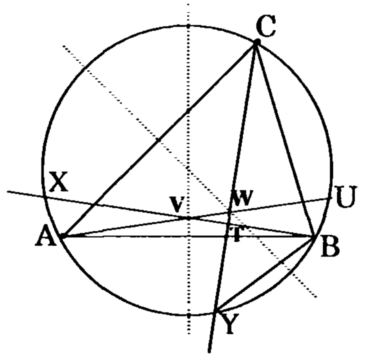
$$\geq AB\left(\frac{\sin A}{\sin E}+\frac{\sin B}{\sin A}\right)+BC\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin E}\right)+CD\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin D}{\sin C}\right)$$
$$+DE\left(\frac{\sin E}{\sin A}+\frac{\sin D}{\sin E}\right)+EF\left(\frac{\sin E}{\sin C}+\frac{\sin F}{\sin E}\right)+AF\left(\frac{\sin F}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right).$$

Tiếp đến, từ giả thiết các cặp cạnh đối của đa giác song song, ta suy ra được các cặp góc bằng nhau: A = D, B = E, C = F. Từ đây, để ý đến công thức $x+\frac{1}{x}\geq 2$ (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$), ta suy ra $2\left(\frac{BF}{\sin A}+\frac{BD}{\sin C}+\frac{FD}{\sin E}\right)\geq 2p$ và có điều phải chứng minh.

***Bài 73.* (1997)**

Cho tam giác ABC có góc A bé nhất. Hai điểm B và C chia vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành hai cung (chứa A và không chứa A). Gọi U là một điểm nằm trên cung BC không chứa A. Các đường trung trực của AB và AC lần lượt cắt đường thẳng AU tại V và W tương ứng. BV và CW cắt nhau tại T, chứng minh rằng AU = TB + TC.

The angle at A is the smallest angle of triangle ABC. The points B and C divide the circumcircle of the triangle into two arcs. Let U be an interior point of the arc between B and C which does not contain A. The perpendicular bisectors of AB and AC meet the line AU at V and W, respectively. The lines BV and CW meet at T. Show that AU = TB + TC.



Hướng dẫn:

Kéo dài BV, đường này cắt vòng tròn tại điểm thứ hai X, kéo dài CW, cắt vòng tròn tại điểm thứ hai Y. Từ tính chất đối xứng (để ý các đường trung trực của tam giác ABC giao nhau tại tâm vòng tròn) ta có

AU = BX và AU = CY.

Ta cũng có $\overset{\frown}{AX}=\overset{\frown}{BU}$ và $\overset{\frown}{AY}=\overset{\frown}{UC}$. Suy ra $\overset{\frown}{XY}=\overset{\frown}{BC}$. Từ đó $B\hat{Y}C = X\hat{B}Y$ và suy ra TY = TB. Vậy: AU = CY = CT + TY = CT + TB.

***Bài 74.* (1998)**

Cho tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, các cạnh đối AB và CD không song song nhau. Gọi P là giao điểm hai đường trung trực của AB và DC, biết rằng P nằm bên trong ABCD.

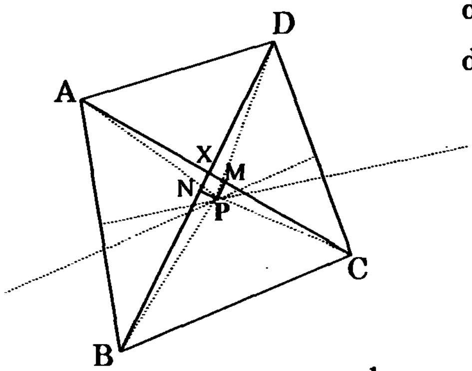
Chứng minh rằng ABCD nội tiếp được khi và chỉ khi hai tam giác ABP và CDP có cùng diện tích.

In the convex quadrilateral ABCD, the diagonals AC and BD are perpendicular and the opposite sides AB and DC are not parallel. Suppose that the point P, where the perpendicular bisectors of AB and DC meet, is inside ABCD. Prove that ABCD is a cyclic quadrilateral if and only if the triangles ABP and CDP have equal areas.

Hướng dẫn:

Giả sử AC và BD gặp nhau tại X. Gọi M, N là chân các đường vuông góc hạ từ P tương ứng xuống AC, BD.

Ta sẽ biểu diễn diện tích các tam giác ABP và CDP thành các thành phần thuận lợi để chứng minh. Ta có:



dt(PAB)= dt(ABX) + dt(PAX) + dt(PBX),

dt(PCD)= dt(CDX) - dt(PCX) - dt(PDX).

Như vậy, dt(PAB) = dt(PCD) tương đương với:

dt(ABX) - dt(CDX) + dt(PAX) + dt(PBX) + dt(PCX) + dt(PDX) = 0. (*)

Mặt khác, hai tam giác ABX và CDX vuông nên:

$$dt(ABX) = \frac{1}{2}AX.BX \text{ và } dt(CDX) = \frac{1}{2}CX.DX.$$

Ta lại có: AX = AM - MX = AM - PN , BX = BN - PM ,
CX = CM + PN , DX = DN + PM.

Ngoài ra: dt(PAX) + dt(PBX) + dt(PCX) + dt(PDX) =

$$= dt(ACP) + dt(BDP) = \frac{1}{2}(AC.PM + BD.PN).$$

Từ đó, (*) cho ta AM.BN = CM.DN. (**)

Bây giờ, dựa vào kết quả phân tích trên ta sẽ giải bài toán. Giả sử ABCD là tứ giác nội tiếp, khi đó, dễ thấy P chính là tâm vòng tròn ngoại tiếp và ta có: AM = CM, BN = DN. Như thế, điều kiện (**) được thoả và do đó hai tam giác PAB và PCD có diện tích bằng nhau.

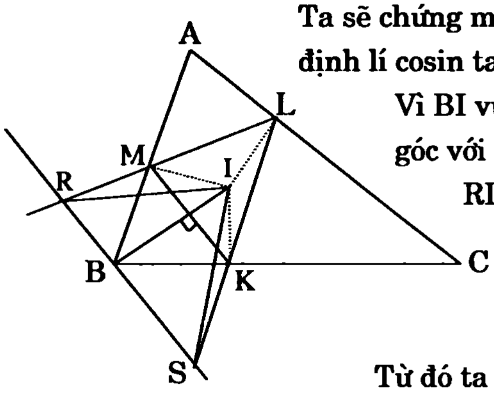
Đảo lại, giả sử hai tam giác PAB và PCD có diện tích bằng nhau, tức là (**) được thoả mãn. Nếu PA > PC thì AM > CM. Nhưng từ cách dựng điểm P ta có PA = PB và PC = PD nên PB > PD, suy ra BN > DN. Từ đó AM.BN > CM.DN, mâu thuẫn với (**). Vậy PA không thể lớn hơn PC. Hoàn toàn tương tự ta cũng có PA không thể nhỏ hơn PC. Suy ra PA = PC. Điều này kéo theo PA = PB = PC = PD, tức là tứ giác ABCD nội tiếp được trong một vòng tròn.

***Bài 75.* (1998)**

Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC, vòng tròn này tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại K, L, M tương ứng. Qua B, ta kẻ đường thẳng song song với MK, đường này cắt LM và LK lần lượt tại R và S. Chứng minh $\widehat{RIS}$ là góc nhọn.

Let I be the incenter of triangle ABC. Let the incircle of ABC touch the sides BC, CA, and AB at K, L, and M, respectively. The line through B parallel to MK meets the lines LM and LK at R and S, respectively. Prove that angle RIS is acute.

Hướng dẫn:



Ta sẽ chứng minh: $RI^2 + SI^2 - RS^2 > 0$, khi đó, từ định lí cosin ta dễ dàng suy ra kết quả.

Vì BI vuông góc với MK nên nó cũng vuông góc với RS. Do đó :

$$RI^2 = BR^2 + BI^2 \text{ và } IS^2 = BI^2 + BS^2.$$

Hiển nhiên ta có RS = RB + BS, do vậy:

$$RS^2 = RB^2 + BS^2 + 2BR.BS.$$

Từ đó ta được $RI^2 + SI^2 - RS^2 = 2BI^2 - 2BR.BS$.

Xét tam giác BRM. Ta có: $\widehat{RBM} = 90^0 - \frac{A}{2}$, $\widehat{RMB} = 90^0 - \frac{A}{2}$ nên $\widehat{MRB} = 90^0 - \frac{C}{2}$. Dùng định lí hàm sin ta được: $\frac{BR}{BM} = \cos\frac{A}{2}/\cos\frac{C}{2}$.

Tương tự, xét tam giác BKS ta cũng có : $\frac{BS}{BK} = \cos\frac{C}{2}/\cos\frac{A}{2}$.

Do đó $BR.BS = BM.BK = BK^2$, và cuối cùng suy ra:

$$RI^2 + SI^2 - RS^2 = 2(BI^2 - BK^2) = 2IK^2 > 0, \text{ đpcm.}$$

***Bài 76.* (1999)**

Tìm tất cả các tập hợp hữu hạn S trong mặt phẳng có ít nhất 3 điểm, sao cho với bất kì 2 điểm phân biệt A, B thuộc S, đường trung trực của AB cũng là trục đối xứng của tất cả các điểm trong S.

Find all finite sets S of at least three points in the plane such that for all distinct points A, B in S, the perpendicular bisector of AB is an axis of symmetry for S.

Hướng dẫn:

Các tập hợp S cần tìm là tất cả những đa giác đều n đỉnh, với $n > 2$. Thật vậy, xét tập S gồm những điểm thoả mãn yêu cầu bài toán. Giả sử A_1, A_2, A_3, ... A_k là những đỉnh của bao lồi của S. Ta sẽ chứng tỏ những đỉnh này tạo thành đa giác đều k cạnh. A_{i+1} phải nằm trên trung trực của A_iA_{i+2} (nếu không, ảnh đối xứng của nó qua trung trực của A_iA_{i+2} sẽ nằm ngoài bao lồi). Suy ra rằng tất cả các cạnh của đa giác đó bằng nhau. Tương tự, A_{i+1} và A_{i+2} phải là ảnh đối xứng của nhau qua trung trực của A_iA_{i+3} (nếu không, một trong hai điểm đó sẽ nằm ngoài bao lồi). Do đó, tất cả các góc đều bằng nhau. Vậy $A_1A_2...A_k$ là đa giác đều. Bây giờ, bất kì trục đối xứng nào cho các điểm thuộc S cũng phải là một trục đối xứng cho các điểm A_i, $i = 1, ..., k$, ta suy ra rằng trục này phải đi qua tâm C của đa giác đều k cạnh $A_1A_2...A_k$. Giả sử X là một điểm tuỳ ý nằm bên trong đa giác $A_1A_2...A_k$. Khi đó, X phải nằm bên trong hoặc ngoài tam giác $A_iA_{i+1}C$. C phải là tâm vòng tròn ngoại tiếp $A_iA_{i+1}X$ (vì C là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác đó, mỗi đường trung trực này là một trục đối xứng của S), do vậy, X phải nằm trên vòng tròn tâm C, vòng tròn này qua A_i và A_{i+1}. Thế nhưng, tất cả các điểm của tam giác $A_iA_{i+1}X$ thực sự nằm bên trong đường tròn, ngoại trừ hai điểm A_i và A_{i+1}. Vì vậy, X không thể nào nằm bên trong đa giác lồi $A_1A_2...A_k$. Ta có điều phải chứng minh.

***Bài 77.* (1999)**

Cho hai vòng tròn (C_1) và (C_2) nằm bên trong và tiếp xúc với vòng tròn (C) theo thứ tự tại M và N. Giả sử (C_1) đi qua tâm của (C_2). Đường nối hai điểm chung của (C_1) và (C_2) cắt (C) tại A và B. Các đường thẳng MA, MB cắt (C_1) tương ứng tại E và F.

Chứng minh rằng đường thẳng EF là tiếp tuyến của (C_2).

The circles (C_1) and (C_2) lie inside circle (C), and are tangent to it at M and N, respectively. It is given that (C_1) passes through the center of (C_2). The common chord of (C_1) and (C_2), when extended, meets (C) at A and B. The lines MA and MB meet (C_1) again at E and F.

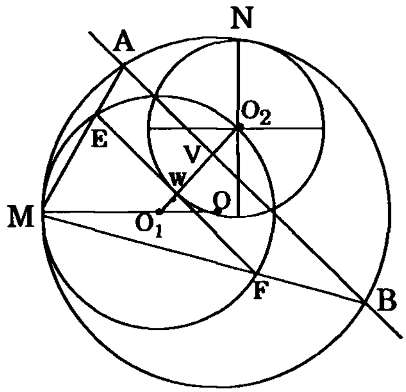
Prove that the line EF is tangent to (C_2).

Hướng dẫn:

Gọi O, O_1, O_2 , r_1, r_2, r_3 lần lượt là tâm và bán kính của các vòng tròn (C), (C_1) và (C_2) tương ứng. Giả sử EF cắt O_1O_2 tại W, đặt $O_2W = x$. Ta cần chứng minh $x = r_2$. Chọn hệ trục trực chuẩn có gốc là O_2, O_2O_1 là trục hoành, giả sử O có toạ độ (a, b). Để ý rằng nói chung, O và M không nằm trên O_2O_1. Giả sử AB cắt O_2O_1 tại V.

Dễ thấy $O_2V = \frac{r_2^2}{2r_1}$.(Chẳng hạn, gọi X là một giao điểm của (C_1) và (C_2), Y là trung điểm O_2X. Khi đó, các tam giác O_1YO_2 và XV O_2 đồng dạng, suy ra $\frac{O_2V}{O_2X} = \frac{O_2Y}{O_2O}$.)

Phép vị tự tâm M, tỉ số $\frac{r}{r_1}$, biến O_1 thành O, biến EF thành AB. Do đó EF $\perp$ O_1O_2. Cũng vậy, khoảng cách từ O_1 đến EF bằng $\frac{r_1}{r}$ lần khoảng cách từ O đến AB, suy ra:



$$(r_1 - x) = \frac{r_1}{r}\left(a - \frac{r_2^2}{2r_1}\right). \qquad (*)$$

Bây giờ ta cần xác định a. Bằng cách tính khoảng cách từ O đến O_1 và O_2 ta nhận được hai phương trình chứa a và b sau đây:

$$(r - r_1)^2 = (r_1 - a)^2 + b^2,$$
$$(r - r_2)^2 = a^2 + b^2.$$

Khử b từ hai phương trình trên ta có: $a = \frac{r_2^2}{2r_1} + r - r\frac{r_2}{r_1}$.

Thay vào (*), ta nhận được $x = r_2$, đpcm.

***Bài 78.* (2000)**

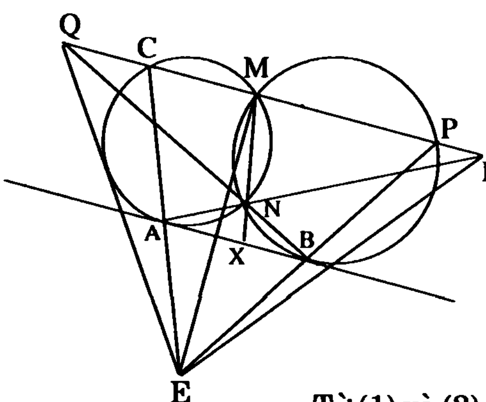
Cho 2 đường tròn cắt nhau tại M và N; C và A là 2 điểm trên đường tròn thứ nhất và B, D là 2 điểm trên đường tròn thứ hai sao cho AB là tiếp tuyến của cả hai đường tròn. Điểm M nằm giữa C và D, trên đường thẳng CD, và AB // CD. Các dây cung NA và CM, NB và MD cắt nhau tại P, Q tương ứng. Hai tia CA và DB gặp nhau tại E.

Chứng minh rằng PE = QE.

AB is tangent to the circles CAMN and NMBD. M lies between C and D on the line CD, and CD is parallel to AB. The chords NA and CM meet at P; the chords NB and MD meet at Q. The rays CA and DB meet at E. Prove that PE = QE.

Hướng dẫn:

Vì CD // AB, ta có $\widehat{EBA} = \widehat{BDM}$; mặt khác, theo tính chất tiếp tuyến, $\widehat{ABM} = \widehat{BDM}$, suy ra AB là phân giác $\widehat{EBM}$. Tương tự, ta cũng có BA là phân giác góc $\widehat{EAM}$. Từ đó, E đối xứng với M qua đường thẳng AB. Nói cách khác, $EM \perp AB$ và suy ra



$EM \perp CD$. (1)

Gọi X là giao điểm của MN và AB. Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $XA^2 = XN.XM = XB^2$, suy ra XA = XB. Nhưng theo Định lí Thalès:

$$\frac{XA}{MA} = \frac{AN}{NP} = \frac{XN}{NM} = \frac{XB}{MQ}.$$

Như vậy, MP = MQ. (2)

Từ (1) và (2) ta được EP = EQ (đpcm).

***Bài 79.* (2000)**

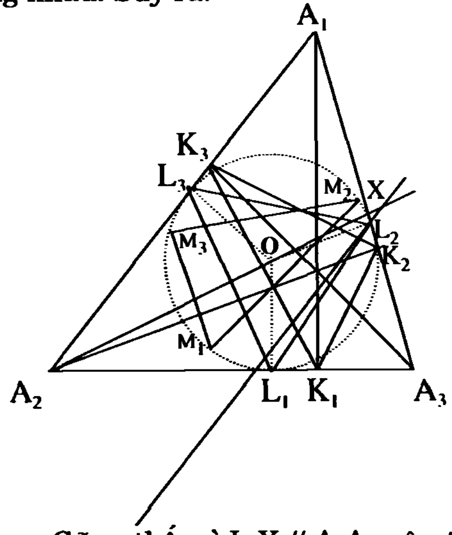
Cho tam giác nhọn $A_1A_2A_3$. Với i = 1, 2, 3, ta gọi K_i là chân đường cao tương ứng hạ từ đỉnh A_i, và gọi L_i là điểm tiếp xúc của vòng tròn nội tiếp tam giác với cạnh đối của đỉnh A_i. Qua đường thẳng L_1L_2, ta lấy đường thẳng đối xứng với đường thẳng K_1K_2. Tương tự như thế, lấy các đường thẳng đối xứng của K_2K_3, K_3K_1 lần lượt qua các đường thẳng L_2L_3, L_3L_1 tương ứng. Chứng minh rằng 3 giao điểm của 3 đường thẳng mới này tạo thành một tam giác có đỉnh nằm trên vòng tròn nội tiếp của tam giác $A_1A_2A_3$.

$A_1A_2A_3$ is an acute-angled triangle. The foot of the altitude from A_i is K_i and the incircle touches the side opposite A_i at L_i. The line K_1K_2 is reflected in the line L_1L_2. Similarly, the line K_2K_3 is reflected in L_2L_3 and K_3K_1 is reflected in L_3L_1. Show that the three new lines form a triangle with vertices on the incircle.

Hướng dẫn:

Gọi O là tâm vòng nội tiếp. Giả sử đường thẳng qua L_2 và song song với A_1A_2 cắt A_2O tại X. Ta sẽ chứng minh rằng X là ảnh đối xứng của K_2 qua đường thẳng L_2L_3.

Gọi B_2 là giao điểm của A_1A_3 và A_2O. Khi đó, A_2K_2 vuông góc với K_2B_2 và OL_2 vuông góc L_2B_2, do đó hai tam giác $A_2K_2B_2$ và OL_2B_2 đồng dạng nhau. Suy ra:



$$\frac{K_2L_2}{L_2B_2} = \frac{A_2O}{OB_2}.$$

Nhưng OA_3 là phân giác góc $A_2\hat{A}_3B_2$, do đó:

$$\frac{A_2O}{OB_2} = \frac{A_2A_3}{B_2A_3}.$$

Lấy B'_2 trên đường thẳng A_2O sao cho $L_2B_2 = L_2B'_2$ (B'_2 khác với B_2, trừ khi L_2B_2 vuông góc với đường thẳng đó). Lúc đó,

$$L_2\hat{B}'_2X = A_3\hat{B}_2A_2.$$

Cũng thế, vì $L_2X \parallel A_2A_1$ nên ta có $L_2\hat{X}B'_2 = A_3\hat{A}_2B_2$. Từ đó, các tam giác $L_2XB'_2$ và $A_3A_2B_2$ đồng dạng. Suy ra (vì $B_2'L_2 = B_2L_2$):

$$\frac{A_2A_3}{B_2A_3} = \frac{XL_2}{B_2'L_2} = \frac{XL_2}{B_2L_2}.$$

Như thế, ta đã chứng minh được $\frac{K_2L_2}{L_2B_2} = \frac{XL_2}{B_2L_2}$, suy ra $K_2L_2 = XL_2$,

do đó : $A_2\hat{A}_1A_3 = A_1\hat{L}_2X = L_2\hat{X}K_2 + L_2\hat{K}_2X = 2L_2\hat{X}K_2$, suy ra

$$L_2\hat{X}K_2 = \frac{1}{2}A_2\hat{A}_1A_3 = A_2\hat{A}_1O.$$

$L_2X \parallel A_2A_1$, do đó ta có $K_2X \parallel OA_1$. Nhưng $OA_1 \perp L_2L_3$, nên $K_2X \perp L_2L_3$ và vì vậy X là ảnh đối xứng của K_2 qua đường thẳng L_2L_3.

Tiếp đến, ta có $K_3\hat{K}_2A_1 = A_1\hat{A}_2A_3$, vì chúng bằng

$$90^0 - K_3\hat{K}_2A_2 = 90^0\ K_3\hat{A}_3A_2 = A_1\hat{A}_2A_3$$

(để ý $A_2A_3K_2K_3$ nội tiếp trong vòng tròn đường kính A_2A_3). Do đó, ảnh đối xứng của K_2K_3 qua đường thẳng L_2L_3 là một đường thẳng qua X và tạo với L_2X một góc bằng $A_1\hat{A}_2A_3$; nói cách khác, đó là đường thẳng qua X và song song với A_2A_3.Gọi M_i là ảnh đối xứng của L_i qua đường thẳng A_iO. Ta có :

$$M_2\hat{X}L_2 = 2O\hat{X}L_2 = 2A_1\hat{A}_2O = A_1\hat{A}_2A_3$$

(để ý A_1A_2 // L_2X). Do đó, M_2X // A_2A_3; nói cách khác, M_2 nằm trên đường thẳng ảnh nói trên (ảnh đối xứng của K_2K_3 qua đường thẳng L_2L_3).

Tương tự, ta cũng có M_3 nằm trên đường thẳng ảnh này, có nghĩa rằng đường thẳng M_2M_3 là ảnh đối xứng của K_2K_3 qua L_2L_3.

Cũng vậy, hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được đường thẳng M_1M_3 là ảnh đối xứng của K_1K_3 qua L_1L_3 và đường thẳng M_1M_2 là ảnh đối xứng của K_1K_2 qua L_1L_2. Nói cách khác, giao điểm của 3 đường thẳng ảnh (đối xứng) là tam giác $M_1M_2M_3$, suy ra điều phải chứng minh.

Phụ lục

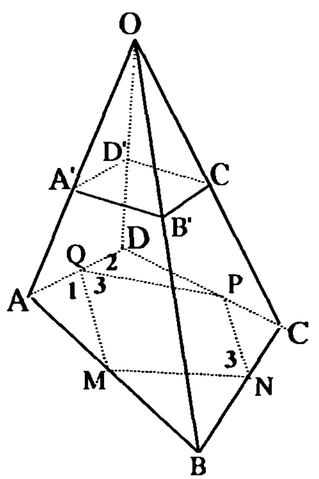
MỘT SỐ ĐỀ THI VÔ ĐỊCH TOÁN CÁC NƯỚC VÀ KHU VỰC
(Phần Hình học)

Bài 1. (*Thi vô địch Bungari, vòng I - 1997*)

Trong mỗi mặt bên của một hình chóp tứ giác, ta giả sử nội tiếp được một đường tròn. Hai mặt bên kề nhau bất kì của hình chóp này tiếp xúc với nhau. Chứng minh rằng bốn tiếp điểm của bốn đường tròn nói trên với các cạnh đáy của hình chóp là các đỉnh của một tứ giác nội tiếp được.

Hướng dẫn:

Giả sử các tiếp điểm trên các cạnh bên OA, OB, OC, OD lần lượt là A', B', C', D'; các tiếp điểm trên các cạnh đáy AB, BC, CD, DA lần lượt là: M, N, P, Q. Suy ra: $AA' = AQ = AM$, $DD' = DQ = DP$, từ đó ΔQAM và ΔQDP là các tam giác cân. Do vậy ta có:



$$\hat{Q}_1 = 90^0 - \frac{B\hat{A}D}{2},$$

$$\hat{Q}_2 = 90^0 - \frac{A\hat{D}C}{2},$$

$$\hat{Q}_3 = \frac{1}{2}(B\hat{A}D - A\hat{D}C).$$

Tương tự ta có:

$$\hat{N}_3 = \frac{1}{2}(B\hat{C}D - C\hat{B}A).$$

Từ đó: $\hat{O}_3 + \hat{N}_5 = 180^0$.

Vậy tứ giác MNPQ là nội tiếp (đpcm).

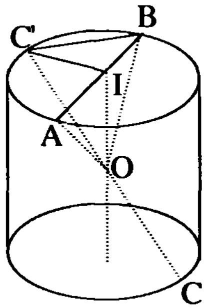
Bài 2. (*Đề thi vô địch toán Liên Xô, 1982*)

Trên đường tròn đáy của một hình trụ đứng, ta lấy hai điểm xuyên tâm A và B; trên đường tròn đáy thứ hai ta lấy điểm C (C không nằm trên mặt phẳng (AOB), với O là trung điểm của trục hình trụ).

Chứng minh rằng tổng các góc nhị diện của góc tam diện với đỉnh O và các cạnh OA, OB, OC bằng 360^0.

Hướng dẫn:

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua tâm O. Khi đó, nếu ở góc tam diện OABC có các góc nhị diện với các cạnh OA, OB, OC lần lượt bằng α, β, γ thì ở góc tam diện OABC' có các góc nhị diện với các cạnh OA, OB, OC' lần lượt bằng $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, γ. Gọi I là tâm đường tròn đường kính AB, lúc đó, trong tứ diện OABC', các góc nhị diện với cạnh



OA và OC' bằng nhau (vì tứ diện này nhận mặt phân giác của góc nhị diện cạnh OI làm mặt phẳng đối xứng); ngoài ra, trong tứ diện OBIC', các góc nhị diện với cạnh OB và OC' bằng nhau. Từ đó ta được:

$$(180^0-\alpha)+(180^0-\beta)=\gamma$$
$$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Bài 3. (*CHDC Đức, vòng 4, 1980*)

Cho 4 hình cầu có cùng bán kính r và chúng được sắp xếp sao cho đôi một tiếp xúc với nhau. Ta dựng 4 mặt phẳng sao cho mỗi mặt phẳng đều tiếp xúc với ba hình cầu và không cắt hình cầu còn lại. Bốn mặt phẳng đó tạo nên một tứ diện đều.

Hãy tính thể tích của khối tứ diện đó theo r.

Hướng dẫn:

Gọi M_1, M_2, M_3 và M_4 là tâm của 4 hình cầu đã cho. Dễ dàng thấy rằng đó là 4 đỉnh của một tứ diện đều có cạnh bằng $2r$ và do đó có chiều cao là $h_1=\frac{2}{3}r\sqrt{6}$ và thể tích là $V_1=\frac{2}{3}r^3\sqrt{2}$. Gọi O là tâm của tứ diện đều $M_1M_2M_3M_4$. Dễ dàng thấy rằng tứ diện đã cho đồng dạng phối cảnh với tứ diện $M_1M_2M_3M_4$, hơn nữa O chính là tâm đồng dạng. Ta gọi các đỉnh của tứ diện đã cho là A_1, A_2, A_3 và A_4 sao cho trong phép biến đổi đồng dạng nói trên M_1 biến đổi thành A_i (i = 1, 2, 3, 4).

Gọi k là tỉ số đồng dạng đó, ta tìm tỉ số đồng dạng.

Trước hết, ta để ý rằng hai mặt phẳng $(M_2M_3M_4)$ và $(A_2A_3A_4)$ song song với nhau và có khoảng cách đúng bằng bán kính r. Gọi G là tâm của mặt $(M_1M_2M_3)$ và G' là tâm của mặt $(A_1A_2A_3)$. Khi đó, ta có tỉ số đồng dạng k = OG' : OG. Ta lại có

$$OG=\frac{1}{4}h_1=\frac{r\sqrt{6}}{6};\ OG'=OG+r=r\left(1+\frac{\sqrt{6}}{r}\right).$$

Vậy $k=1+\sqrt{6}$. Do đó thể tích của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là:

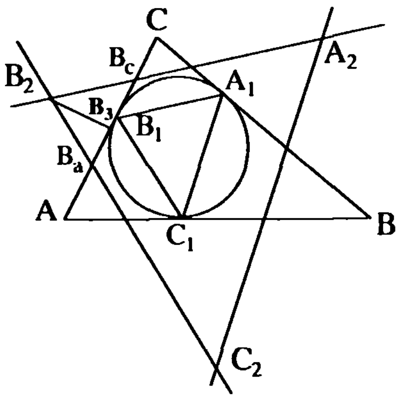
$$V=V_1.k^3=\frac{2}{3}r^3\sqrt{2}(1+\sqrt{6})^3.$$

Bài 4. (*Cuộc thi Toán học Mùa Đông, Varna, 1999*)

Cho tam giác ABC với vòng tròn ngoại tiếp có tâm O và bán kính R. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính r và tiếp xúc với AB, BC, CA tương ứng tại các điểm C_1, A_1 và B_1. Các đường thẳng nối trung điểm các cặp đoạn thẳng AB_1 và AC_1, BA_1 và BC_1, CA_1 và CB_1 gặp nhau tại các điểm C_2, A_2 và B_2. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ cũng có tâm O và bán kính bằng $R + \frac{r}{2}$.

Hướng dẫn:

Trước tiên ta chứng minh rằng hình chiếu B_3 của B_2 lên AC là trung điểm của AC. Gọi B_a và B_c lần lượt là trung điểm AB_1 và CB_1. Ở đây ta cũng sẽ dùng các kí hiệu quen thuộc cho các độ dài liên quan đến tam giác ABC.



Ta có:

$$\frac{B_aB_3}{B_2B_3} = tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a},$$

$$\frac{B_cB_3}{B_2B_3} = tg\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Từ đó ta được

$$\frac{B_aB_3}{B_cB_3} = \frac{p-c}{p-a}.$$

Từ $B_aB_c = \frac{b}{2}$ ta suy ra

$$B_aB_3 = \frac{p-c}{2} = \frac{CB_c}{2} \text{ và } B_cB_3 = \frac{p-a}{2} = \frac{AB_a}{2},$$

do đó $AB_3 = CB_3$. Vì vậy ta có:

$$B_2O = B_2B_3 + B_3O = \frac{(p-c)(p-a)}{2r} + R\cos\beta \qquad (*)$$

(ở đây α, β, γ lần lượt là số đo 3 góc tương ứng A, B, C của tam giác ABC). Để kết thúc, ta sẽ chứng minh rằng vế phải của (*) bằng $R + \frac{r}{2}$, rồi tương tự $A_2O = C_2O = R + \frac{r}{2}$.

Để làm điều này, ta sử dụng biến đổi tương đương:

$$\frac{(p-c)(p-a)}{2r} + R\cos\beta = R + \frac{r}{2} \qquad .$$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{2(p-b)} - \frac{S}{2p} = R(1-\cos\beta) \Leftrightarrow \frac{Sb}{2p(p-b)} = 2R\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{p-b}=\frac{4R}{b}\sin^2\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow tg\frac{\beta}{2}=\frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin\beta} \Leftrightarrow \sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Bài 5. ***(Cuộc thi Toán mùa Xuân, Kazanlâk, 30 - 3 - 1999)***

Một vòng tròn tiếp xúc ngoài với vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC và với hai tia AB, AC tương ứng tại các điểm M, N. Chứng minh rằng tâm vòng tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC nằm trên đoạn thẳng MN.

Hướng dẫn:

Gọi O là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là tâm vòng tròn tiếp xúc ngoài với (O) và hai tia AB, AC. Giả sử R, r_a lần lượt là bán kính các vòng tròn ngoại tiếp, bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Trước tiên ta tính bán kính ρ của vòng tròn này. Từ tam giác OAL ta có

$$\text{AL} = \frac{\rho}{\sin\frac{\text{A}}{2}},\ \text{AO} = R,\ \text{OL} = R+\rho,\ \widehat{\text{AOL}} = \frac{|\hat{\text{B}}-\hat{\text{C}}|}{2}.$$

Định lí hàm cosin cho ta:

$$(R+\rho)^2 = R^2 + \frac{\rho^2}{\sin^2\frac{\text{A}}{2}} - \frac{2R\rho\cos\frac{\text{B}-\text{C}}{2}}{\sin\frac{\text{A}}{2}},$$

sau khi đơn giản, ta được:

$$\rho\cos^2\frac{\text{A}}{2} = 2R\sin\frac{\text{A}}{2}\left(\sin\frac{\text{A}}{2}+\cos\frac{\text{B-C}}{2}\right) = 2R\sin\frac{\text{A}}{2}\cos\frac{\text{B}}{2}\cos\frac{\text{C}}{2}.$$

Mặt khác, vì

$$\sin\frac{\text{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \cos\frac{\text{B}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},$$

$$\cos\frac{\text{C}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},\ abc = 4R.S$$

nên ta được: $\rho = \dfrac{r_a}{\cos^2\frac{\text{A}}{2}}$. Gọi I là giao điểm của AL và MN, T là hình chiếu của I lên AB. Do AL $\perp$ MN nên:

$$\text{IT} = \frac{\text{AI.IM}}{\text{AM}} = \frac{\text{AI.AM.LM}}{\text{AM.AL}} = \frac{\text{AI.LM}}{\text{AL}} = \text{LM}\cos^2\frac{\text{A}}{2} = r_a.$$

Ngoài ra, I nằm trên phân giác góc A nên đẳng thức trên chứng tỏ I chính là tâm vòng tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, ta có điều phải chứng minh.

Bài 6. (*Vô địch toán Quốc gia Ba Lan, 5 - 1999*)

Cho tam giác nhọn ABC có các đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên các cạnh B_1C_1, C_1A_1 và A_1B_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ và

$$A\hat{B}C = A_1\hat{B}_1C_1,\ B\hat{C}A = B_1\hat{C}_1A_1,\ C\hat{A}B = C_1\hat{A}_1B_1.$$

Chứng minh rằng các trực tâm của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ cách đều tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn:

Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Vì

$$C\hat{H}B = 180^0 - C\hat{A}B = 180^0 - C_1\hat{A}_1B_1$$

nên ta có A_1 nằm trên vòng tròn (K_1) ngoại tiếp tam giác BHC. Tương tự, B_1 và C_1 tương ứng nằm trên các vòng tròn (K_2) và (K_3) ngoại tiếp các tam giác CHA và AHB. Từ đó:

$$B_1\hat{H}C_1 = B_1\hat{H}A + C_1\hat{H}A = B_1\hat{C}A + C_1\hat{B}A = 2B_1\hat{A}_1C_1,$$

$$C_1\hat{H}A_1 = 2C_1\hat{B}_1A_1,\ A_1\hat{H}B_1 = 2A_1\hat{C}_1B_1,$$

và ta suy ra H là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

Từ các đỉnh của đường thẳng ABC, ta lần lượt kẻ các đường thẳng song song với các cạnh đối tương ứng, kí hiệu các giao điểm của 3 đường thẳng này là A_0, B_0 và C_0. Vì:

$$A_0\hat{B}_0C_0 = A_1\hat{B}_1C_1,\ B_0\hat{C}_0A_0 = B_1\hat{C}_1A_1,\ C_0\hat{A}_0B_0 = C_1\hat{A}_1B_1$$

nên ta suy ra rằng A_0H, B_0H, C_0H có độ dài lần lượt bằng đường kính các vòng tròn (K_1), (K_2), (K_3) nói trên.

Rõ ràng, tồn tại một phép hợp giữa một phép quay và một phép vị tự có cùng tâm H sao cho qua phép vị tự này, tam giác $A_1B_1C_1$ biến thành tam giác $A_0B_0C_0$. Như thế, trực tâm H_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ biến thành trực tâm H_0 của tam giác $A_0B_0C_0$. Vì vậy $H\hat{H}_1H_0 = H\hat{A}_1A_0 = 90^0$.

Cuối cùng, để kết thúc, ta sẽ chứng minh rằng tâm O của vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm HH_0.

Thật vậy, ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm là trọng tâm của tam giác ABC, tỉ số -2, là tam giác $A_0B_0C_0$. Do đó $\overrightarrow{MH_0} = -2\overrightarrow{MH}$ và từ $\overrightarrow{MH} = -2\overrightarrow{MO}$, ta thu được: $\overrightarrow{OH_0} = -\overrightarrow{OH}$.

Bài 7. *(Kì thi Olympic 30-4 lần thứ 5, khối 10, VN, 4 - 1999)*

Gọi R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$tg\frac{A}{2}\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)+tg\frac{B}{2}\left(1+\cos\frac{B}{2}\right)+tg\frac{C}{2}\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)$$
$$\geq \frac{p(R+r)+R(4R+r)}{pR}.$$

Hướng dẫn:

Ta có vế trái và vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh lần lượt bằng $\left[tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right]+\left[\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right]$ và

$$\frac{pR+pr+4R^2+Rr}{pR}=1+\frac{r}{R}+\frac{4R+r}{p}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng: $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\geq 1+\frac{r}{R}$.

Thật vậy: $2\sin\frac{A}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}\geq 2\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}=\cos B+\cos C$.

Tương tự:: $2\sin\frac{B}{2}\geq \cos A+\cos C$, $2\sin\frac{C}{2}\geq \cos B+\cos A$. Suy ra:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\geq \cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}.$$

(dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C)

Ta sẽ chứng minh: $\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$. (1)

Ta có:

$$\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-a}+\frac{r}{p-b}+\frac{r}{p-c}=r\left(\frac{-p^2+ab+bc+ca}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right).$$

Ngoài ra:

$$\frac{4R+r}{p}=\frac{abc}{pS}+\frac{S}{p^2}=\frac{pabc+S^2}{p^2S}=\frac{pabc+p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2S}$$
$$=\frac{pabc+p^4-p^3(a+b+c)+p^2(ab+bc+ca)-pabc}{p^2S}$$
$$=\frac{p^4-p^3.2p+p^2(ab+bc+ca)}{p^2S}=\frac{-p^2+ab+bc+ca}{S}$$

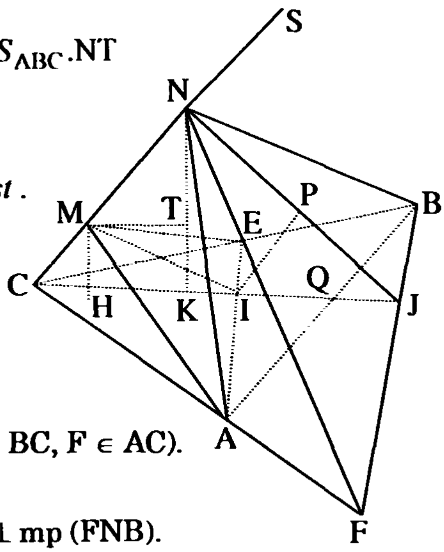
$$= \frac{p.r(-p^2 + ab + bc + ca)}{S^2} = \frac{r(-p^2 + ab + bc + ca)}{(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 8. (*Kì thi Olympic 30-4 lần 5, khối 11, VN, 4 - 1999*)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC cố định, AC = AB = a, góc $\widehat{ACB} = 30^0$, các điểm M, N lần lượt là hình chiếu của A, B trên SC và thỏa điều kiện M ở giữa C và N. Khi S biến thiên, hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện ABMN. Hãy chỉ ra một cách dựng của khối tứ diện này.

Hướng dẫn:



- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M, N trên (ABC).

  Khi đó: $V_{ABMN} = V_{NABC} - V_{MABC}$

  $$= \frac{1}{3}S_{ABC}(NK - MH) = \frac{1}{3}S_{ABC}.NT$$

(T là hình chiếu của M trên NK).

- $S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = const$.

Suy ra V_{ABMN} lớn nhất khi và chỉ khi NT lớn nhất.

- Đặt $\varphi = \widehat{MCH}, \alpha = \text{góc}(BA, CK)$.

  Khi đó: NT = MN.sinφ.

  Dựng ME // NB và NF // AM (E ∈ BC, F ∈ AC).

  Khi đó mp (AME) // mp (FNB) và

  SC ⊥ mp (AME), SC ⊥ mp (FNB).

Nếu gọi I, J lần lượt là giao điểm của đường thẳng CK với AE và BF, P là hình chiếu của I trên NJ thì MNPI là hình chữ nhật và: MN = PI = I J.cosφ = AB. $\cos\alpha$ .cosφ.

Từ đó NT = AB. sinφ cosφ .$\cos\alpha$ $= \frac{a}{2}\sin 2\varphi.\cos\alpha$.

Suy ra rằng NT lớn nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sin 2\varphi = 1 \\ \cos\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 45^0 \\ \alpha = 0^0 \end{cases}.$$

Khi đó: $\max NT = \frac{a}{2}$ và $\max V_{ABMN} = \frac{1}{24}a^3\sqrt{3}$.

Cách dựng: Để dựng khối tứ diện này, ta dựng hai điểm M, N thuộc tia phân giác của góc xCy với Cx vuông góc với mặt phẳng (ABC) và Cy song song với BC.

Bài 9. (*Đề thi chọn học sinh giỏi toán toàn quốc, VN, 1989*)

Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Chứng minh rằng nếu đường thẳng Δ cắt các đường thẳng AB_1, BC_1, CD_1 thì hoặc Δ cắt A_1D hoặc Δ // A_1D.

Hướng dẫn:

Giả sử Δ là đường thẳng cắt B_1A tại R ; BG tại K ; CD_1 tại Q. Mặt phẳng (AB_1Q) cắt DC tại F, cắt CC_1 tại L, khi đó FL // AB_1.

Gọi E là giao của A_1D và B_1F.

Cần chứng minh E, Q, R thẳng hàng. Để chứng minh E, Q, R thẳng hàng ta chứng minh:

$$\frac{EF}{EB_1} = \frac{FQ}{B_1R}.$$

Thật vậy, một mặt

$$\frac{FQ}{B_1R} = \frac{QL}{B_1R} = \frac{LK}{LB_1} = \frac{LC_1}{BB_1} = \frac{DF}{DC} = \frac{DF}{A_1B_1}, \tag{1}$$

và mặt khác ta cũng có $\frac{EF}{EB_1} = \frac{DF}{A_1B_1}$. (2)

Từ các hệ thức (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 10. (*Trại Rhodes *, Nam Phi, tháng 4 - 1995*)

* Đây là cuộc thi được tổ chức bởi Rhodes University nhằm kiểm tra lại đội ngũ lần cuối cùng trước lúc đội Nam Phi lên đường dự IMO 1995 tại Canada. Đa số các bài thi trong đợt này được trích từ các đề thi IMO và vô địch quốc gia trước đó của các nước. Riêng bài hình học này Nam Phi đã trích từ cuộc thi vô địch Toán Quốc gia Úc năm 1985.

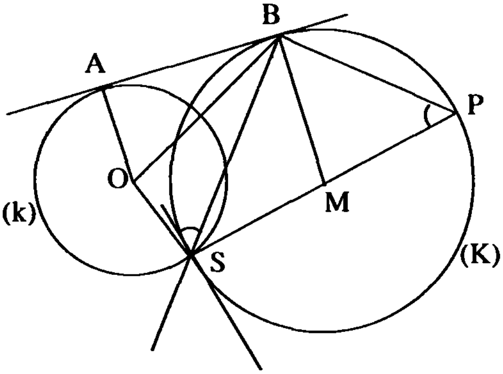
Trong cùng một mặt phẳng, cho (K) và (k) là hai đường tròn có bán kính tương ứng là R và r. Giả sử (K) và (k) cắt nhau tại đúng hai điểm S và T. Tiếp tuyến với (k) tại S cắt (K) ở B, và B thì nằm trên tiếp tuyến chung của (k) và (K). Chứng minh rằng nếu ϕ là góc trong của hai tiếp tuyến tại S với (k) và (K) thì ta có:

$$\frac{r}{R} = \left(2\sin\frac{\phi}{2}\right)^2.$$

Hướng dẫn:

Giả sử tiếp tuyến chung tiếp xúc với (k) tại A và (K) tại B.

Cho tâm của (k) và (K) lần lượt là O và E. Kéo dài SM, cắt (K) tại P. Ta có $\widehat{SBM} = \widehat{BSM} = 90^0 - \phi$, suy ra $\widehat{ABS} = \phi$ vì $\widehat{ABM} = 90^0$. Do BA và BS cùng là tiếp tuyến với (k) nên SB = AB,



$$\widehat{BAO} = \widehat{SBO} = \frac{\phi}{2}.$$

Vì vậy, xét tam giác OBA ta có:

$$\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} = \frac{r}{AB} = \frac{r}{SB}.$$

Theo tính chất tiếp tuyến, $\widehat{BPS} = \phi$, vì thế tam giác SBP cho ta $\sin\phi = \dfrac{SB}{2R}$.

Từ đó ta được: $\dfrac{r}{R} = 2\dfrac{r}{SB}.\dfrac{SB}{2R} = 2\operatorname{tg}\dfrac{\phi}{2}.\sin\phi$,

và suy ra điều phải chứng minh, với chú ý rằng

$$\sin\phi = 2\sin\frac{\phi}{2}.\cos\frac{\phi}{2}.$$

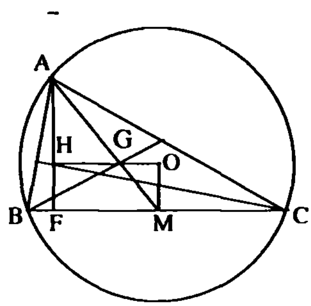
Các bài sau đây được trích từ các kì thi William Lowell Putnam từ 1997 đến năm 2000. Đây là cuộc thi dành cho sinh viên các nước Mĩ và Canada, nhưng những bài hình học trích ở đây phù hợp với học sinh giỏi Toán phổ thông ở nước ta.

Bài 11. (*Cuộc thi William Lowell Putnam, 1997*)

Một hình chữ nhật HOMF có HO = 11 và OM = 5. Một tam giác ABC nhận điểm H làm trực tâm, O làm tâm đường tròn ngoại tiếp, M là trung điểm BC và F là chân đường cao kẻ từ A. Tính độ dài đoạn BC.

Hướng dẫn:

Trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên đường thẳng HO (đường thẳng Euler), và trọng tâm này cũng nằm trên AM, cách A và M theo tỉ số 2:3. Do vậy H cũng cách A và F theo tỉ số 2:3, suy ra AF = 15. Các tam giác vuông BFH và AFC đồng dạng vì:



$$\widehat{HBC} = \frac{\pi}{2} - C = \widehat{CAF},$$

do đó ta có $\dfrac{BF}{FH} = \dfrac{AF}{FC}$, hay BF.FC = FH.AF = 75. Ta lại có:

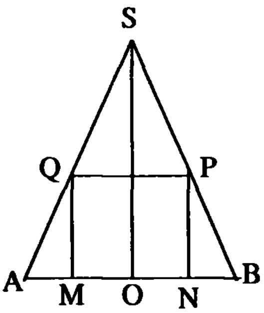
$$BC^2 = (BF + FC)^2 = (BF - FC)^2 + 4BF.FC,$$

nhưng $BF - FC = BM + MF - (MC - MF) = 2MF = 22$, do đó:

$$BC = \sqrt{22^2 + 4.75} = \sqrt{784} = 28.$$

Bài 12. (*Cuộc thi William Lowell Putnam, 1998*)

Một hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 3, có đáy là hình tròn có bán kính 1. Một hình lập phương nội tiếp trong đó sao cho một mặt thì nằm trên mặt phẳng đáy, 4 đỉnh của mặt đối diện của hình lập phương thì tựa trên mặt nón. Hãy tìm chiều dài của cạnh hình lập phương.



Hướng dẫn:

Ta xét mặt phẳng chứa trục hình nón và hai đỉnh đối diện của đáy hình lập phương. Mặt phẳng này sẽ cắt hình lập phương theo thiết diện là hình chữ nhật MNPQ (*xem hình*) có một cạnh bằng $MQ = s$, cạnh kia bằng $MN = s\sqrt{2}$, với s là độ dài cạnh của hình lập phương.

Mặt phẳng nói trên cũng cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Các tam giác đồng dạng AQM và ASO cho ta:

$$\frac{s}{3} = \frac{1 - \frac{s\sqrt{2}}{2}}{1}, \text{ suy ra } s = \frac{9\sqrt{2} - 6}{7}.$$

Bài 13. (*Cuộc thi William Lowell Putnam, 1999*)

Cho tam giác ABC có AC = 1, góc $\widehat{ACB} = 90°$, và góc $\widehat{BAC} = f$. Gọi D là điểm nằm giữa A và B sao cho AD = 1; E là điểm nằm giữa B và C sao cho $\widehat{EDC} = f$. Đường vuông góc với BC tại E cắt AB tại F.

Hãy tính $\lim\limits_{f \to 0} EF$.

Hướng dẫn:

Xét tam giác ACD, ta có:

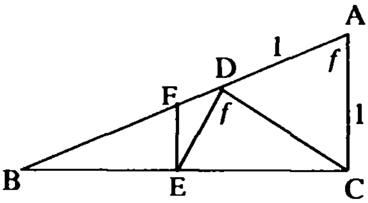
$$\widehat{ACD} = \widehat{ADC} = 90° - \frac{f}{2}, \text{ suy ra } \widehat{DCE} = \frac{f}{2}.$$

Từ đó, áp dụng Định lí hàm số sin cho tam giác CDE ta được:

$$\frac{CE}{DE} = \frac{\sin f}{\sin\frac{f}{2}},$$

tỉ số này tiến đến 2 khi $f \to 0$. Ta lại có:

$$E\hat{B}D = 90^\circ - f,\ E\hat{D}B = 90^\circ - \frac{f}{2}.$$



Do đó $\dfrac{DE}{BE} = \dfrac{\cos f}{\cos\dfrac{f}{2}}$ tiến đến 1 khi $f \to 0$.

Suy ra $\dfrac{EB}{EC} \to \dfrac{1}{2}$ hay $\dfrac{EB}{BC} \to \dfrac{1}{3}$. Nhưng $\dfrac{EF}{AC} = \dfrac{EB}{BC}$, do đó EF tiến đến

$$\frac{AC}{3} = \frac{1}{3}.$$

Bài 14. *(Cuộc thi William Lowell Putnam, 2000)*

Cho A, B, C là các điểm có toạ độ nguyên và nằm trên một vòng tròn bán kính R trong hệ trục Decartes vuông góc. Chứng tỏ rằng có ít nhất một trong các khoảng cách AB, BC, CA lớn hơn

$$R^{\frac{1}{3}}.$$

Hướng dẫn:

Như lệ thường, ta kí hiệu độ dài ba cạnh của tam giác ABC là *a, b, c*. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng abc = $4SR$, với S là diện tích tam giác, R là bán kính vòng tròn ngoại tiếp.

Thật vậy, gọi O là tâm vòng tròn. Kéo dài AO gặp vòng tròn tại K. Cho AH là đường cao của tam giác ABC. Khi đó dễ thấy hai tam giác ABH và AKC đồng dạng. Suy ra:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AK}{AC} \text{ hay } \frac{c}{AH} = \frac{2R}{b}.$$

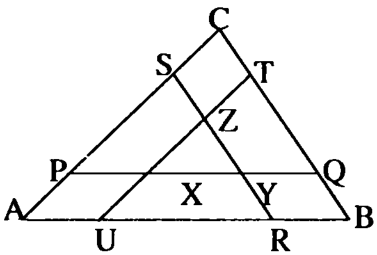
Từ đó $abc = 2R.a.\mathrm{AH} = 4SR$.

Bây giờ ta để ý đến giả thiết rằng các điểm A, B, C có toạ độ nguyên. Xét hai vector là hai cạnh của tam giác có gốc cùng một đỉnh. Rõ ràng một nửa độ lớn tích hữu hướng của hai vector này là diện tích tam giác ABC, nhưng các thành phần toạ độ của chúng là số nguyên nên suy ra độ lớn của vector tích cũng vậy, nghĩa là phải lớn hơn hoặc bằng 1. Suy ra $S \geq \dfrac{1}{2}$, do đó abc $\geq 2R > R$.

Từ đó, ít nhất là một trong 3 cạnh *a, b, c* phải lớn hơn $R^{\frac{1}{3}}$.

Cuộc thi USAMTS chọn tài năng Toán học của Mĩ (USA Mathematical Talent Search) được giáo sư George Bezsenyi tổ chức lần đầu tiên vào năm 1989, dưới sự tài trợ của Học viện Kĩ thuật Rose-Hulman và COMAP (Consortium for Mathematics and It's Applications - Hội Toán học và ứng dụng). Đây là một chuyên mục thường xuyên của tờ báo mang tên Consortium, được COMAP xuất bản. Dưới đây, chúng tôi trích giới thiệu cùng các bạn hai bài Hình học từ cuộc thi USA Mathematical Talent Search năm học 2000 - 2001.

Bài 15. (*USAMTS*, vòng 2, 2000 - 2001)



Trong tam giác ABC, như hình bên, các đoạn PQ, RS, TU tương ứng song song với các cạnh AB, BC, CA; chúng giao nhau tại X, Y, Z. Hãy xác định diện tích tam giác ABC nếu mỗi một trong các cạnh PQ, RS và TU chia tam giác ABC thành 2 phần có diện tích bằng nhau và nếu diện tích tam giác XYZ bằng 1. Đáp số của bạn nên đặt dưới dạng $a+b\sqrt{2}$, với a, b là các số nguyên dương.

Hướng dẫn:

Đặt AB = x. Vì PQ chia tam giác ABC thành 2 phần có diện tích bằng nhau nên $\left(\frac{PQ}{AB}\right)^2=\frac{1}{2}$, suy ra $PQ=\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Vì các tam giác PCQ, UTB và ASR đồng dạng nhau, hơn nữa, lại có cùng diện tích, nên chúng bằng nhau. Từ đó:

$$PX = YQ = \frac{2x-x\sqrt{2}}{2},\ XY=\frac{x\sqrt{2}}{2}-\frac{4x-2x\sqrt{2}}{2}=\frac{3x\sqrt{2}-4x}{2}.$$

Hai tam giác XYZ và ABC đồng dạng nên:

$$\frac{dt(XYZ)}{dt(ABC)}=\left(\frac{XY}{AB}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right)^2=\frac{17-12\sqrt{2}}{2}.$$

Mà dt(XYZ) = 1 nên ta có: $dt(ABC)=\frac{2}{17-12\sqrt{2}}=34+24\sqrt{2}$.

Bài 16. (*USAMTS*, vòng 2, 2000 - 2001)

Chứng minh rằng trong một đa diện, tồn tại 2 đỉnh sao cho chúng có cùng số các cạnh gặp nhau tại mỗi đỉnh.

Hướng dẫn:

Trước hết, trong một đa diện, mỗi đỉnh phải có ít nhất 3 cạnh gặp nhau (tức là phải có ít nhất 3 cạnh xuất phát từ cùng một đỉnh).

Giả sử đa diện có n đỉnh. Nếu như số các cạnh gặp nhau tại các đỉnh là những số khác nhau (từng đôi một) thì có một đỉnh có số cạnh gặp nhau lớn nhất là $n + 2$ (3, 4, ..., n+2). Thế nhưng, đa diện có n đỉnh thì tại mỗi đỉnh sẽ không thể có nhiều hơn $n-1$ cạnh gặp nhau, vì mỗi cạnh là một tổ hợp của 2 đỉnh phân biệt.

Mâu thuẫn này chứng tỏ không thể nào số các cạnh gặp nhau tại các đỉnh là những số khác nhau.

Nói cách khác, phải tồn tại 2 đỉnh sao cho chúng có cùng số các cạnh gặp nhau tại mỗi đỉnh đó.

Bài 17. (*USAMO- Đề thi vô địch Toán toàn nước Mĩ*, 1997)

Cho tam giác ABC, bên ngoài tam giác này, vẽ các tam giác cân BCD, CAE, ABF. Chứng minh các đoạn vuông góc kẻ từ A, B, C tương ứng xuống EF, FD, DE bằng nhau.

Hướng dẫn:

Trước tiên, ta chứng minh rằng với 4 điểm tuỳ ý W, X, Y, Z trong mặt phẳng, $WX \perp YZ$ nếu và chỉ nếu

$$WY^2 - WZ^2 = XY^2 - XZ^2. \qquad (*)$$

Để chứng minh, ta xét hệ trục vuông góc sao cho

$$W = (0, 0), X = (1, 0), Y = (x_1, y_1), Z = (x_2, y_2).$$

Khi đó, (*) trở thành $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = (x_1 - 1)^2 + y_1^2 - (x_2 - 1)^2 - y_2^2$, tương đương với $x_1 = x_2$. Điều này đúng khi và chỉ khi YZ vuông góc với trục hoành WX.

Bây giờ, gọi P là giao điểm hai đường vuông góc hạ từ B và C tương ứng xuống FD và DE, từ mệnh đề trên suy ra

$$PF^2 - PD^2 = BF^2 - BD^2, PD^2 - PE^2 = CD^2 - CE^2.$$

Từ giả thiết về các tam giác cân ta có AF = AF, BD = CD, CE = AE, do đó, $PF^2 - PE^2 = AF^2 - AE^2$, suy ra PA cũng vuông góc với EF, là điều phải chứng minh.

Bài 18. (*Đề đề nghị cho IMO của Canada*, 1993)

Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ABC, còn p là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác trực tâm A'B'C' (nghĩa là, AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC). Chứng minh

$$p \leq 1 - \frac{1}{3}(1 + r)^2.$$

Hướng dẫn:

(i) Xét tam giác ABC, ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} = 1 + r \quad (R = 1).$$

(để chứng minh công thức trên, dùng Định lí hàm số cosin và các công thức tính diện tích $S = pr = \frac{abc}{4R}$, với p là nửa chu vi)

(ii) Tiếp đến, ta chứng minh $p = 2\cos A.\cos B.\cos C$. Để ý, trực tâm H của tam giác ABC cũng là tâm vòng nội tiếp của tam giác A'B'C'. Từ H, kẻ HX vuông góc xuống A'C' thì ta có HX = p. Tam giác A'BH cho ta:

$$\text{tg}\,A'\hat{B}H = HA'/BA', \text{ suy ra}$$

$$HA' = c\cos B\,tg(90^0 - C) = c\cos B\cot gC.$$

Mặt khác, tứ giác CA'HB' nội tiếp nên $X\hat{A}'H = H\hat{A}'B' = B'\hat{C}H$,

từ đó: $\sin X\hat{A}'H = \sin(90^0 - A) = HX/HA' = p/HA'$. Vậy:

$$p = HA'.\sin(90^0 - A) = c.\cos B.\cot gC.\cos A$$

$$= \frac{c}{\sin C}\cos A.\cos B.\cos C = 2\cos A.\cos B.\cos C.$$

(iii) Tiếp đến, để ý rằng ta có

$$2\cos A.\cos B.\cos C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

Thật vậy, điều này xảy ra vì ta có:

$$4\cos A.\cos B.\cos C = 2(2\cos A.\cos B).\cos C$$
$$= 2(\cos(A+B) + \cos(A-B)).\cos C = 2\cos(A+B).\cos C + 2\cos(A-B).\cos C$$
$$= \cos(A+B+C) + \cos(A+B-C) + \cos(A-B+C) + \cos(A-B-C)$$
$$= -1 - \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C = 2 - 2\cos^2 A - 2\cos^2 B - 2\cos^2 C.$$

(iii) Sau cùng, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$\frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \le \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C.$$

Từ đó: $p + \frac{1}{3}(1+r)^2 = 2\cos A.\cos B.\cos C + \frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2$

$$\le 2\cos A.\cos B.\cos C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

và suy ra bất đẳng thức cần chứng minh: $p \le 1 - \frac{1}{3}(1+r)^2$.

Phần 2

CÁC BÀI TOÁN

SỐ HỌC - ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH
HÌNH HỌC TỔ HỢP

KIẾN THỨC BỔ TRỢ

Những kiến thức bổ trợ được trình bày dưới đây bao gồm các khái niệm và định lí mà đa số không có mặt trong chương trình THPT hiện hành. Chúng thực sự cần thiết cho những học sinh giỏi toán ở phổ thông. Một phần kiến thức bổ trợ sẽ được sử dụng trực tiếp trong sách này, số còn lại là những định lí toán học nổi tiếng mà việc chứng minh chúng cũng đã là một bài toán khó đối với bậc phổ thông. Các tác giả trước đây đã bỏ qua phần chứng minh vì ý đồ sư phạm hoặc mục tiêu sử dụng sách. Ở đây, chúng tôi cố gắng đưa vào phần chứng minh, nhưng dĩ nhiên không chi tiết ở đa số trường hợp. Thực ra, mọi điều tự nó đã rõ ràng và có thể nó sẽ được hoàn thiện chi tiết đối với những bạn đọc nào quan tâm một cách nghiêm túc.

I. SỐ NGUYÊN

1.1. Phép chia có dư

Định lí 1

Với hai số nguyên bất kì a và b, $b \neq 0$, luôn tồn tại duy nhất một cặp số nguyên q và r sao cho $a = bq + r$ và $0 \leq r < |b|$.

Chứng minh:

Ta sẽ xét từng trường hợp tuỳ theo dấu của a và b như sau:

Trường hợp 1: $a \geq 0$ và $b > 0$. Lúc đó:

Nếu $a = 0$ thì $q = 0$ và $r = 0$.

Nếu $a > 0$, $b > 0$ và $a < b$ thì $q = 0$ và $r = a$.

Nếu $a > 0$, $b > 0$ và $a > b$, xét dãy số b, 2b, 3b, ... , ta tìm được số qb sao cho $qb \leq a < (q+1)b$.

Đặt $r = a - bq$, ta có $a = bq + r$ và $0 \leq r < b$.

Trường hợp 2: $a < 0$ và $b > 0$. Lúc đó, để ý $-a > 0$ và ta áp dụng trường hợp 1 cho $-a > 0$.

Trường hợp 3: $a < 0$ hoặc $a > 0$ và $b < 0$. Lúc đó, để ý $-b > 0$ và ta áp dụng các trường hợp 1 và 2 cho $-b > 0$.

Như vậy, ta chứng minh được sự tồn tại của cặp số nguyên q và r như đã nói. Để chứng minh tính duy nhất, ta giả sử còn có thêm cặp q' và r' thoả mãn Định lí, ta có:

$$a = bq + r \text{ và } 0 \leq r < |b|,\ a = bq' + r' \text{ và } 0 \leq r' < |b|.$$

Trừ vế theo vế hai đẳng thức trên ta được $r - r' = b(q' - q)$, từ đó suy ra $|r - r'| = |b(q' - q)| = |b||q' - q|$. Nhưng vì $0 \leq r < |b|$ và $0 \leq r' < |b|$ nên ta suy ra $0 \leq |r - r'| < |b|$, từ đó, ta có: $|b||q' - q| < |b| \Rightarrow |q' - q| < 1$.

Đến đây, nhớ rằng $|q' - q|$ là một số tự nhiên, ta suy ra q = q' và có điều phải chứng minh.

1.2. Ước chung lớn nhất (UCLN) và bội chung nhỏ nhất (BCNN)

Xem như bạn đọc đã biết rõ về khái niệm ước số và bội số, ở đây chúng tôi nhắc lại các định nghĩa sau:

Định nghĩa 2

Số nguyên d được gọi là UCLN của n số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$ nếu d là ước chung của $a_1, a_2, ..., a_n$ và nếu e là một ước chung khác của chúng thì $e \mid d$. Ta thường kí hiệu $d = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Định lí 3

UCLN của n số nguyên khác 0 luôn tồn tại (và dĩ nhiên duy nhất).

Chứng minh:

Định lí này có phần chứng minh khá dài, bạn đọc quan tâm có thể tìm thấy ở các giáo trình Số học ở bậc đại học (kiến thức được sử dụng hoàn toàn có thể hiểu được ở trình độ khá giỏi bậc Phổ thông).

Lược đồ chứng minh như sau:

Giả sử ta có các số nguyên khác 0: $a_1, a_2, ..., a_n$. Đặt

$$A = \left\{ k \mid k = \sum_{i=1}^{n} z_i a_i \ , \ z_i \in Z \right\}.$$

Tồn tại phần tử bé nhất d trong A. Khi đó, d sẽ là UCLN của các số $a_1, a_2, ..., a_n$. Để chứng minh d chia hết các số $a_1, a_2, ..., a_n$, Định lí 1 được sử dụng, sau cùng, chứng minh rằng nếu $c \mid a_i$, i = 1, 2... n thì $c \mid k$ với mọi $k \in A$, suy ra $c \mid d$.

Để tìm UCLN của 2 số nguyên a, b, ta có thuật toán Euclide sau đây:

***Bổ đề 4** (cơ sở của thuật toán Euclide)*

Nếu a = bq + r thì (a, b) = (b, r).

(Euclid of Alexandria, sinh khoảng 325 BC, mất vào khoảng 265 BC tại Alexandria, Egypt)

Chứng minh:

Đặt d = (a, b) và u = (b, r). Từ $d \mid a$ và $d \mid b$, ta suy ra:

$$d \mid (a - bq) = r,$$

do đó ta có $d \mid r$ và $d \mid b$, vậy d là ước chung của b và r, suy ra $d \mid u$, do u = (b, r). Hoàn toàn tương tự, ta có thể suy ra $u \mid (bq + r)$ và từ đó ta được $u \mid d$. Vậy u = d.

Từ bổ đề trên, ta có ***thuật toán Euclide*** như sau:

Để đơn giản, ta trình bày với a, b nguyên dương.

Chia a cho b, ta được thương q_1 và số dư r_1;

Chia b cho r_1, ta được thương q_2 và số dư r_2;

Chia r_1 cho r_2, ta được thương q_3 và số dư r_3...

Khi tiếp tục quá trình trên, ta được một dãy giảm b, r_1, r_2, r_3... .

Dãy này dần đến 0, và đó là các số tự nhiên nên ta sẽ thực hiện không quá b phép chia. Thuật toán sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước và bổ đề trên cho ta: $(a, b) = (b, r_1) = \dots r_n$.

Định nghĩa 5

Ta nói b là bội chung nhỏ nhất (BCNN) của n số nguyên khác 0: $a_1, a_2, \dots, a_n$ nếu b là bội chung của $a_1, a_2, \dots, a_n$ và nếu e là một bội chung khác của chúng thì $b \mid e$. Ta thường kí hiệu $d = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Định lí 6

Nếu x, y là hai số nguyên khác 0, BCNN của chúng luôn luôn tồn tại và bằng $\frac{xy}{(x,y)}$.

Chứng minh:

Do (x, y) là UCLN của x và y nên hiển nhiên $\frac{x}{(x,y)}$ và $\frac{y}{(x,y)}$ đều là những số nguyên. Từ đó, $b = \frac{xy}{(x,y)}$ là bội chung của x và y, bởi vì:

$$b = x.\frac{y}{(x,y)} = y.\frac{x}{(x,y)}.$$

Tiếp theo, ta giả sử c là bội chung khác của x và y, suy ra tồn tại số nguyên m sao cho c = xm và ta có $y \mid c$ nên:

$$\frac{y}{(x,y)} \mid \frac{c}{(x,y)} \Leftrightarrow \frac{y}{(x,y)} \mid \frac{xm}{(x,y)}.$$

Nhưng ta lại có $\left(\frac{y}{(x,y)}, \frac{x}{(x,y)}\right) = 1$ nên $\frac{y}{(x,y)} \mid m$, hay $m = u\frac{y}{(x,y)}$, với u là số nguyên nào đó. Thay vào đẳng thức c = xm ta được

$$c = xu\frac{y}{(x,y)} = \frac{xy}{(x,y)}u,$$

hay c là bội của $b = \frac{xy}{(x,y)}$, suy ra điều phải chứng minh.

Bằng quy nạp, bạn đọc có thể mở rộng định lí trên để có được khẳng định về sự tồn tại BCNN của n số nguyên khác 0.

1.3. Phép chia hết và số nguyên tố

Cũng như trên, xem như các bạn đã biết rõ các khái niệm và tính chất thông thường.

Nhắc lại rằng hai số nguyên a và b được gọi là *nguyên tố cùng nhau*, kí hiệu (a, b) = 1, nếu ước chung lớn nhất của chúng là 1.

Các số a, b, n, m... được sử dụng dưới đây đều là các số nguyên. Nếu m chia hết cho n ta cũng nói n chia hết m.

Dễ dàng chứng minh các tính chất đơn giản sau đây:

(1) Nếu d chia hết a và d chia hết b thì d chia hết a + b.

(2) d chia hết b nếu và chỉ nếu d chia hết -b.

(3) Cho d chia hết a. Khi đó, d chia hết b nếu và chỉ nếu d chia hết a + b.

(4) UCLN (a, b) = UCLN (a, a+b). Từ đó, (a, b) = 1 khi và chỉ khi (a, a + b) = 1.

***Định lí 7** (Định lí cơ bản về số nguyên tố)*

Mọi số nguyên dương n, n > 1, đều có thể được viết một cách duy nhất (không tính đến việc sắp xếp các nhân tử) dưới dạng:

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k},$$

với k, e_i là số tự nhiên và p_i là các số nguyên tố thoả mãn:

$$1 < p_1 < p_2 < \dots < p_k.$$

Khi đó, dạng phân tích trên được gọi là *dạng phân tích chính tắc của* số n.

Định lí này khá dài về chứng minh, mặc dù kiến thức được sử dụng không mới, chúng tôi đề nghị bạn đọc quan tâm tham khảo ở các giáo trình về Số học.

***Định lí 8** (Bổ đề cơ bản của số nguyên tố - Bổ đề Euclide)*

Nếu một số nguyên tố p chia hết tích ab của 2 số nguyên a và b thì p phải chia hết ít nhất một trong hai số a và b.

Chứng minh:

Giả sử $p \mid ab$ nhưng p không chia hết a và không chia hết b. Khi đó, (a, p) = 1 và (b, p) = 1, từ đó (ab, p) = 1, trái giả thiết, suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét: Thay cho hai số a và b, ta có thể mở rộng bổ đề trên cho nhiều số.

***Định lí 9** (Định lí Fermat nhỏ)*

(*Pierre de Fermat, 1601 - 1605, nhà Toán học Pháp*)

Nếu n là một số nguyên và p là số nguyên tố thì $p \mid (n^p - n)$.

Định lí này là một hệ quả của định lí Euler sẽ trình bày dưới đây.

Ví dụ 1: Nếu n là số nguyên và p là số nguyên tố thì $p \mid n$ hoặc

$$p \mid (n^{p-1} - 1).$$

Giải:

Ta có $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$. Kết quả được suy ra ngay từ hai định lí trên (*Bổ đề Euclide và Định lí Fermat nhỏ*).

1.4. Quan hệ đồng dư

Định nghĩa 10 (*Quan hệ đồng dư*)

Cho hai số nguyên a và b. Ta nói a có *quan hệ đồng dư modulo m* với b, kí hiệu $a \equiv b \pmod m$ nếu và chỉ nếu $m \mid (a-b)$, trong đó m là một số nguyên dương.

Từ các tính chất về sự chia hết ở trên, ta suy ra được các tính chất của phép đồng dư. Chẳng hạn, sau đây là một vài tính chất tiêu biểu.

Tính chất 11

Nếu $b \equiv 0 \pmod a$ và $c \equiv 0 \pmod a$ thì $bm + cn \equiv 0 \pmod a$.

Định lí 8' (*Bổ đề Euclide)*

Nếu p là số nguyên tố và $ab \equiv 0 \pmod p$ thì

$$a \equiv 0 \pmod p \text{ hay } b \equiv 0 \pmod p.$$

Định lí 9' (*Định lí Fermat nhỏ)*

Nếu p là một số nguyên tố và $a \not\equiv 0 \pmod p$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Định nghĩa 12 (*Hàm Euler)*

Với mọi số tự nhiên n, hàm Euler $\varphi(n)$ là hàm biểu thị số tất cả các số tự nhiên bé hơn n và nguyên tố cùng nhau với n.

Ví dụ: $\varphi(6) = 2$, do $(1, 6) = (5, 6) = 1$;

$\varphi(p) = p - 1$, với p là số nguyên tố.

Người ta chứng minh được Hàm Euler thoả mãn:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n),$$

với mọi số tự nhiên m, n. Dùng tính chất này người ta chứng minh được công thức tính $\varphi(n)$ như sau:

$$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

trong đó, $n = p_1^{c_1} p_2^{c_2} ... p_k^{c_k}$ là phân tích chính tắc của n.

Bằng cách xây dựng *các lớp thặng dư* trong Số học, người ta chứng minh được:

***Định lí 13** (Định lí Euler)*

Cho m là số nguyên dương, a là số nguyên nguyên tố với m. Lúc đó: $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Nhận xét: Định lí 9' (*Định lí Fermat nhỏ*) là hệ quả của Định lí Euler. Thật vậy, khi m = p là số nguyên tố, ta có $\varphi(p) = p - 1$. Mặt khác, từ giả thiết a không chia hết cho p, nghĩa là a và p nguyên tố cùng nhau, giả thiết của Định lí Euler được thoả mãn nên áp dụng định lí này ta có ngay Định lí Fermat.

1.5. Dãy Fibonacci

***Định nghĩa 14** (Dãy Fibonacci)*

Một dãy các số tự nhiên F_0 , F_1 , F_2 , ..., F_n, ... được gọi là dãy Fibonacci nếu nó thoả mãn: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$;

$$F_n + F_{n+1} = F_{n+2},\ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Fibonacci là tên thường gọi của nhà toán học người Ý Leonardo of Pisa (1170 - 1250).

Tính chất 15

Gọi S_n là tổng của (n +1) số đầu tiên trong dãy Fibonacci F_0 , F_1, F_2 , ..., F_n, ... Khi đó, $S_n = F_{n+2} - 1$.

Chứng minh:

Từ định nghĩa ta có $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ nên:

$$\begin{aligned} S_n &= F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_n \\ &= (F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \dots + (F_{n+1} - F_n)(F_{n+2} - F_{n+1}) \\ &= -F_1 + (F_2 - F_2) + (F_3 - F_3) + \dots + (F_{n+1} - F_{n+1}) + F_{n+2} \\ &= F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1 . \end{aligned}$$

1.6. Hệ nhị phân

Rất nhiều bài thi trong sách này được giải bằng cách sử dụng hệ thống ghi số cơ số 2 (*hệ nhị phân*). Hệ thống ghi số này chỉ sử dụng 2 chữ số 0 và 1. Hai kí hiệu đó cũng đã được dùng trong máy tính điện tử để biểu diễn tất cả các số và thực hiện các phép toán.

Một số tự nhiên k trong hệ nhị phân được viết

$$k = \overline{a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_1 a_0},$$

với a_i, $i = 0,1,2,\ldots n$ là một trong các chữ số 1 và 2, $a_n \neq 0$, có nghĩa là

$$k = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0.$$

Ví dụ: $k = \overline{1011} = 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1 = 11.$

Các phép tính cộng và nhân trong hệ nhị phân được cho bởi bảng sau:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Tổng quát, giả sử g là số tự nhiên lớn hơn 1 và

$$M = \{0,1,2,\ldots,g-1\}$$

là tập hợp gồm g kí hiệu các số tự nhiên đầu tiên. Ta nói số tự nhiên s được viết trong *hệ g - phân* (hoặc *trong hệ thống ghi cơ số g*) nếu

$$s = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \ldots + a_1 g + a_0,$$

trong đó n là một số nguyên dương và $a_i \in M$, $a_n \neq 0$.

Thông thường, khi đó ta kí hiệu là: $s = \overline{a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_1 a_0}$ (g), hoặc bỏ (g) phía sau đi nếu không sợ nhầm lẫn.

Định nghĩa trên được thiết lập dựa trên cơ sở một định lí liên quan đến tính tồn tại và duy nhất cho biểu diễn của s theo dạng trên.

1.7. Nguyên tắc Dirichlet

Một cách phổ biến trong sách này, ta thường gặp sự ứng dụng của *Nguyên tắc Dirichlet* (Peter Gustav Dirichlet, 1851 - 1931, nhà toán học người Đức). Nguyên tắc này thoạt trông đơn giản nhưng lại có nhiều ứng dụng trong lập luận giải toán, thường được phát biểu như sau:

Không thể nhốt n con thỏ vào m lồng, với n > m, sao cho mỗi lồng chỉ chứa một con.

Chú ý: Có nhiều cách phát biểu khác nhau, nhưng phát biểu trên là phổ biến nhất. Chẳng hạn, trong chương trình bồi dưỡng đội tuyển học sinh thi Vô địch Toán Quốc tế, giáo sư Greg Gamble gọi đó là *Nguyên lí Lồ chuồng bồ câu (Pigeon - Hole Principle: If 5 pegeons fly into 4 pigeon-holes then at least one pigeon-hole contains 2 or more pigeons).*

1.8. Một số công thức về tổ hợp và nhị thức Newton

(Sir Isaac Newton, 1643 - 1727, người Anh)

Từ công thức tính tổ hợp $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ta dễ dàng chứng minh được các công thức thường xuyên được sử dụng sau đây:

$$C_n^k = C_n^{n-k},\ C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Bằng quy nạp, sử dụng các công thức về tổ hợp nêu trên, ta cũng chứng minh được công thức *nhị thức Newton:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

II. SỐ THỰC

2.1. Một số kiến thức cơ bản

Định nghĩa 16 *(cận trên và cận dưới)*

Cho tập A các số thực. Số thực a được gọi là cận trên của A nếu mọi $x \in A$ ta có $x \le a$. Định nghĩa tương tự cho cận dưới của A.

Nguyên lí supremum

Mọi tập con A khác rỗng và bị chặn trên (tương ứng, bị chặn dưới) của R đều có cận trên bé nhất (tương ứng, cận dưới lớn nhất).

Nguyên lí Archimede (Archimede, 287 - 212 B.C., Hy Lạp)

Với mọi số thực r, tồn tại số tự nhiên n sao cho $r < n$.

2.2. Phần nguyên và phần phân

Định nghĩa 17

Phần nguyên, kí hiệu $[x]$, của số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt khỏi x.

Phần phân của x, kí hiệu $\{x\}$, được định nghĩa bởi: $\{x\} = x - [x]$.

Ngoài tên gọi thông thường là phần nguyên (*intergal part)*, một số tác giả nước ngoài còn gọi đó là *floor function* - kí hiệu $\lfloor x \rfloor$. Sở dĩ thế vì người ta có nêu ra *ceiling function* - kí hiệu $\lceil x \rceil$, như định nghĩa sau đây (cf. Abraham P. Hillman and Gerald L. Alexanderson, *Algebra Through Problem Solving*, Allyn and Bacon, Inc. 150 Tremont Street, Boston, 1996): $\lceil x \rceil$ là số nguyên bé nhất không nhỏ hơn x.

Dễ dàng thấy rằng $\lceil x \rceil = \begin{cases} x = \lfloor x \rfloor \text{ khi } x \in Z \\ \lfloor x \rfloor + 1 \text{ khi } x \notin Z. \end{cases}$

Tính chất 18

1) $x = [x] + \{x\}$; 2) $x = [x] \Leftrightarrow x \in Z$;

3) $x = \{x\} \Leftrightarrow 0 \le x < 1$; 4) $x - 1 < [x] \le x$;

5) Nếu $k \in Z$ thì $[x + k] = [x] + k$, $\{x + k\} = \{z\} + k$;

6) $[x + y] - [x] - [y] = \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right.$, suy ra: $[x + y] \ge [x] + [y]$, $\{x + y\} \le \{x\} + \{y\}$.

Chứng minh:

Bạn đọc tự chứng minh các tính chất trên. Chẳng hạn, ở đây ta chứng minh tính chất 6. Theo tính chất 4., ta có:

$x + y - 1 < [x + y] \le x + y$, $x - 1 < [x] \le x$ (hay $-x \le -[x] < -x + 1$),

$y - 1 < [y] \le y$ (hay $-y \le -[y] < -y + 1$).

Từ đó ta được: $-1 < [x + y] - [x] - [y] < 2$.

Nhưng ta lại có $[x + y] - [x] - [y] \in Z$ nên

$$[x + y] - [x] - [y] = \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right. \Rightarrow [x + y] - [x] - [y] \ge 0 \text{ hay } [x + y] \ge [x] + [y].$$

Áp dụng đẳng thức (1), bất đẳng thức sau cùng cho ta kết quả:

$$\{x + y\} \le \{x\} + \{y\}.$$

Tính chất 19

Giả sử $0 < \alpha \in R$ và $n \in N$. Lúc đó, $\left[\frac{\alpha}{n}\right]$ là số tất cả các số nguyên dương là bội của n nhưng không vượt quá α.

Chứng minh:

Gọi k là số tất cả các số nguyên dương vừa là bội của n, vừa không vượt quá α thì k số đó có dạng $n, 2n, 3n, ..., kn$. Lúc đó, ta có $kn \le \alpha \le (k + 1)n$ hay $k \le \frac{\alpha}{n} \le (k + 1)$, suy ra $k = \left[\frac{\alpha}{n}\right]$.

Tương tự như thế, bạn đọc dễ dàng chứng minh được tính chất sau:

Tính chất 20

Giả sử $0 < \alpha \in R$ và $n \in N$. Lúc đó, $\left[\frac{n}{\alpha}\right]$ là số tất cả các số nguyên dương là bội của α nhưng không vượt quá n.

Tính chất sau đây được sử dụng ở bài 45 (1972):

Tính chất 21

Nếu a và b là hai số không âm, thì :

$$[2a]+[2b]\geq[a]+[b]+[a+b]. \tag{1}$$

Chứng minh:

Gọi α và β là các phần lẻ của a và b, tức là:

$$a=[a]+\alpha\ ,\ b=[b]+\beta,$$

thế thì : $0\leq\alpha<1$ và $0\leq\beta<1$. Ta hãy xét hai trường hợp :

1) $\alpha+\beta<1$. Khi đó:$[a+b]=[a]+[b]$, $[2a]\geq 2[a],[2b]\geq 2[b]$, nên rõ ràng bất đẳng thức (1) đúng.

2) $1\leq\alpha+\beta<2$. Khi đó: $[a+b]=[a]+[b]+1$. Vì $2\leq 2\alpha+2\beta$, nên trong các số 2α và 2β phải có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1, chẳng hạn $2\alpha\geq 1$. Khi đó: $[2a]=2[a]+1$, và vì $[2b]\geq 2[b]$, nên bất đẳng thức (1) đúng.

Mệnh đề được chứng minh.

2.3. Hàm lồi

Định nghĩa 22

Hàm $f(x)$ xác định trên [a, b] được gọi là *lồi* trên khoảng đó nếu với mọi $x_1, x_2\in[a,b]$ ta có:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2$.

Ta cũng nói hàm f *lõm* trên [a, b] nếu bất đẳng thức trên có chiều ngược lại.

Từ định nghĩa trên, người ta chứng minh được một trường hợp đặc biêt của bất đẳng thức Jensen sau đây (Johan Ludwig William Valdermar **Jensen** (1859 - 1925), người Đan Mạch, một kĩ sư và là một nhà toán học nghiên cứu nhiều về Giải tích, Đại số, các đóng góp của ông rất quan trọng cho ngành *Giải tích lồi - Convex Analysis*).

Một trong các phương pháp chứng minh là dùng phương pháp quy nạp *kiểu* Cauchy: *trước tiên, giả sử công thức đúng với* n, *chứng minh công thức đúng với* 2n, *rồi từ đó, chứng minh công thức đúng cho* n + 1.

Định lí 23 *(Trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Jensen)*

Nếu f(x) là hàm lồi trên [a, b] thì với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ ta có

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{2},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

2.4. Một số bất đẳng thức

Định nghĩa 24

Ta nói *trung bình cộng* (hoặc *trung bình số học- arithmetic mean*) của các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ là:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},$$

trung bình nhân (hoặc *trung bình hình học - geometric mean*) của các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ là: $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, và *trung bình điều hoà* (*har--monic mean*) của các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ là:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}.$$

Định lí 25 *(Bất đẳng thức về trung bình cộng và nhân)*

Với các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n},$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chứng minh:

Xét hàm $f(x) = \ln x$. Dễ thấy f(x) là hàm lồi trên miền xác định của nó.

Từ bất đẳng thức Jensen (Định lí 1) ta suy ra

$$\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n}{n} \le \ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},$$

từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. Bạn đọc dễ dàng chứng minh trường hợp dấu bằng xảy ra.

Bất đẳng thức trên còn được gọi là bất đẳng thức Cauchy (Augustin Cauchy, nhà toán học Pháp, 1789 - 1857).

Hệ quả 26 *(Bất đẳng thức giữa TB nhân và TB điều hòa)*

Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực dương. Khi đó:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Chứng minh:

Áp dung Định lí 25 cho các số thực dương $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$.

Định lí 27 *(Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz)*

Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \ge (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b_i = ka_i$, $i = 1, \dots, n$, với k là số thực dương nào đó.

Chú ý: Một số nơi gọi bất đẳng thức trên là bất đẳng thức Schwarz (Hermann Amandus Schwarz, 1843 - 1921), trong khi một số nơi khác, đặc biệt là Nga, thì gọi là bất đẳng thức Cauchy - Buniakowski (Buniakowski, 1804 - 1889).

Cauchy đã đề cập đến vào năm 1821, Buniakowski thì vào năm 1859, còn Schwarz là năm 1884. Đôi khi, bất đẳng thức trên còn được gọi là Cauchy-Buniakowski-Schwarz. (cf. S.M. Nikolsky, *A Cours of Mathe--matical Analysis*, V.1, Mir Publishers, Moscow, p. 183).

Chứng minh:

Một trong những cách chứng minh bất đẳng thức trên là đặt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2,$$

và dễ dàng biến đổi f(x) thành $f(x) = Ax^2 + 2Bx + C$, trong đó,

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2,\ B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \text{ và } C = \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2.$$

Từ đó, ta đi đến điều phải chứng minh bằng cách để ý rằng

$$f(x) \ge 0, \forall x \Leftrightarrow B^2 - AC \le 0.$$

Định lí 28 *(Bất đẳng thức Bernoulli)*

Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực cùng dấu và lớn hơn -1.

Khi đó ta có: $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge 1+\sum_{i=1}^{n} x_i$.

(Daniel Bernoulli, nhà toán học Thụy sĩ, 1700 - 1782)

Chứng minh:

Dễ thấy bất đẳng thức cần chứng minh đúng với n = 1, 2. Giả sử nó đúng với n, nghĩa là

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge 1+\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ta có: $\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) = (1+x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1+x_{n+1})$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) + x_{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \left(1+\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)$$

Ở đây, $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực cùng dấu và lớn hơn -1 nên

$$x_{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i \ge 0.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 29

Nếu $a > -1$ thì với mọi số tự nhiên n ta đều có: $(1+a)^n \ge 1+na$.

Chứng minh:

Dễ thấy đây là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Bernoulli nói trên.

Đa số các sách phổ thông thường trình bày bất đẳng thức Bernoulli dưới dạng này (xem *Đại số 10*, Ban KHTN, *tài liệu giáo khoa thí điểm*, NXB Giáo Dục, 1995).

Dưới đây là bất đẳng thức được sử dụng ở Bài 137 (1995).

Định lí 30 (Bất đẳng thức T-sê-bư-sep)

Cho hai dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$.

Khi đó:

a) Nếu cả hai dãy số trên cùng tăng hoặc cùng giảm thì ta có

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}.$$

a) Nếu một trong hai dãy số trên tăng và dãy số còn lại giảm thì ta có

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}.$$

Dấu đẳng thức ở a) và b) xảy ra khi và chỉ khi

hoặc $a_1 = a_2 = ... = a_n$, hoặc $b_1 = b_2 = ... = b_n$.

Chứng minh:

Chứng minh hơi dài, đề nghị bạn đọc tham khảo, chẳng hạn, GS. Phan Đức Chính, *Bất đẳng thức (sách dùng cho học sinh các lớp chọn và các lớp chuyên Toán)*, NXB. Giáo Dục, 1994, p. 53 - 56.

T-sê-bư-sep (P. L. Chebyshev, 1821 - 1894), nhà toán học Nga có nhiều đóng góp đáng kể cho *Lí thuyết số (Theory of Numbers)*. Tên của ông có khi được một số sách tiếng Anh phiên thành Tschebycheff, do vậy, kí hiệu $T_n(x)$ để chỉ *đa thức* Chebyshev rất thường được dùng trong các sách về Phương trình vi phân (*differential equations)*.

III. MỘT SỐ CHÚ Ý VỀ ĐA THỨC

Tính chất 31 (*về nghiệm hữu tỉ của đa thức nguyên*)

Cho đa thức khác 0 với các hệ số nguyên, n > 0:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n.$$

Khi đó, nếu $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì nó sẽ có nghiệm hữu tỉ dạng $\frac{r}{s}$, với $r \mid a_0$ và $s \mid a_n$.

Chứng minh:

Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ $c = m/q$, ta gọi d là UCLN của m và q, ta có m = rd, q = sd, khi đó: $c = r/s$, với (r, s) = 1. Vì $f(c) = 0$ nên ta suy ra:

$$a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + ... + a_{n-1} r^{n-1} s + a_n r^n = 0.$$

Từ đẳng thức này ta suy ra $s \mid a_n r^n$ và $r \mid a_0 s^n$. Mặt khác, từ (r, s) = 1 ta được $(s, r^n) = 1$ và $(r, s^n) = 1$. Đến đây ta suy ra $s \mid a_n r^n$, điều này kéo theo $s \mid a_n$ và $r \mid a_0 r^n$, từ đó suy ra $r \mid a_0$, do vậy ta được điều phải chứng minh.

Hệ quả 32

Nếu tất cả các hệ số của phương trình $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ đều là các số nguyên thì tất cả các nghiệm hữu tỉ nếu có của phương trình này cũng đều là các số nguyên và là một trong các ước số (âm, dương) của a_n.

Tính chất 33 *(Tiêu chuẩn bất khả quy Eisenstein - Eisenstein's irreducibility criterion)*

Cho đa thức với các hệ số nguyên $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ thỏa mãn điều kiện: tồn tại một số nguyên tố p sao cho

$$p \mid a_0, p \mid a_1, \ldots, p \mid a_{n-1},$$

nhưng p^2 không chia hết a_0 và p không chia hết a_n. Khi đó, đa thức f không thể phân tích được thành tích của 2 đa thức với hệ số nguyên.

Chứng minh:

Giả sử ngược lại rằng $f(x) = g(x).h(x)$, trong đó g(x) và h(x) là các đa thức với hệ số nguyên không tầm thường:

$$h(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k,\ g(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m.$$

Ta có $0 < k, m < n$. Vì $a_0 = b_0 c_0$ ta được $a_0 \equiv 0$ (mod p) nhưng $c_0 \not\equiv 0$ (mod p). Gọi r là chỉ số lớn nhất sao cho $b_r \equiv 0$ (mod p). Khi đó:

$$a_r = b_r c_0 + b_{r-1} c_1 + \ldots + b_0 c_r,$$

do đó $a_r \equiv b_r c_0 \not\equiv 0$ (mod p). Suy ra r = n. Điều này mâu thuẫn với điều kiện $r \le k < n$, ta có điều phải chứng minh.

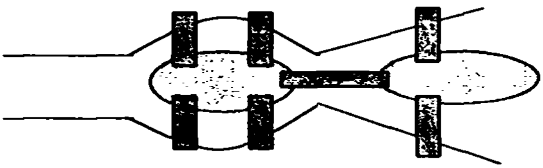
Chú ý: Tiêu chuẩn này đôi khi tỏ ra khá quan trọng. Chẳng hạn, bạn đọc hãy dùng tiêu chuẩn này để giải bài toán sau đây (*trích từ cuộc thi chọn tài năng Toán học* (The Talent Search) *Nam Phi năm* 1994):

Chứng minh rằng đa thức $2x^4 + 21x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ không thể phân tích được thành tích của 2 đa thức có hệ số nguyên.

IV. SƠ LƯỢC VỀ ĐỒ THỊ

Khái niệm *đồ thị (graph)* đã gắn liền với cuộc sống trong mọi lĩnh vực và người ta luôn có khuynh hướng vạch trên giấy những đồ hình để thuận tiện trong tư duy. Ngày nay, kết hợp với những công cụ toán học hiện đại, *lí thuyết đồ thị* tự nó đã là một mục tiêu nghiên cứu đa dạng và hấp dẫn cho các nhà toán học khắp nơi. Để có thể hiểu được lí thuyết này một cách hệ thống, cần rất nhiều phương tiện toán học, chẳng hạn, ngay từ định nghĩa mở đầu, cũng cần phải có kiến thức về *ánh xạ đa trị (multivalue mapping)*. Vì vậy, trong phạm vi phổ thông, ta chỉ có thể hiểu được một số khái niệm của đồ thị theo nghĩa *nôm na* nhất.

Có thể nói rằng bài toán về *bảy chiếc cầu trên sông Konisberg* là một trong những bài toán nổi tiếng trong thời kì phôi thai của lí thuyết đồ thị. Đó là bài toán được đề nghị bởi Euler *(sinh tại Thụy sĩ năm* 1707, *chết tại* St. Petersburg, Nga, *năm* 1783) vào năm 1735.

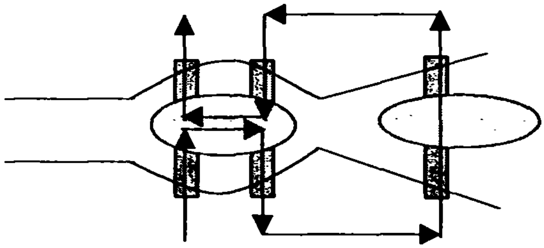


Ở Konisberg, một thành phố của Đức, có một dòng sông chạy ngang qua thành phố, bao quanh một hòn đảo nằm chính giữa, con sông bởi thế đã bị tách đôi dòng. Bảy chiếc cầu được dựng xây để tiện đường qua lại cho nhân dân.

Bài toán thứ nhất mà Euler đặt ra là: *có cách nào để đi qua tất cả 7 chiếc cầu làm một cuộc dạo chơi quanh thành phố mà chỉ qua mỗi chiếc cầu đúng* 1 *lần* ?

Euler đã thất bại trong việc tìm ra lời giải.

Bài toán thứ hai, cũng vấn đề trên, nhưng giả sử rằng người ta chỉ xây có 6 chiếc cầu?



Bài toán này có khả năng giải được.

Euler đã tổng quát hóa những suy nghĩ của mình và đưa ra một số khái niệm như sau:

- Một ***mạng lưới*** *(network)* là một hình tạo bởi các điểm (ta gọi là ***đỉnh*** - *vertices*) nối nhau bằng các đường (cung) không cắt nhau.
- Một ***đỉnh*** được gọi là *chẵn* nếu có số chẵn các cung dẫn đến nó, và gọi là *lẻ* trong trường hợp ngược lại.
- Một ***đường đi*** (path) ***Euler*** là một con đường liên tục qua mỗi đỉnh chỉ đúng một lần.

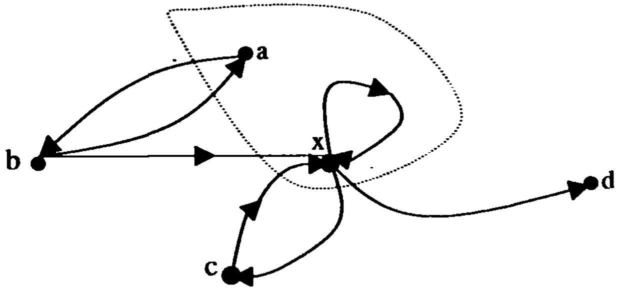
Euler đã phát biểu và chứng minh được định lí sau:

Định lí 34

Nếu mạng lưới có nhiều hơn 2 đỉnh lẻ thì sẽ không bao giờ tồn tại một đường đi Euler. Đảo lại, nếu mạng lưới có số đỉnh lẻ nhỏ hơn hoặc bằng 2 thì sẽ tồn tại ít nhất một đường đi Euler.

Sau đây, chúng tôi trình bày một số khái niệm cần thiết về *Đồ thị* bằng ngôn ngữ phổ thông.

Ta gọi G = (X, U) là một *đồ thị* khi X là tập hợp các điểm trong mặt phẳng (mỗi điểm được gọi là *đỉnh*), còn U là tập hợp các *cung* (có hướng) nối hai điểm tuỳ ý của X.



Ví dụ: Ở hình vẽ bên, G = (X, U) là đồ thị, với X gồm các đỉnh

a, b, c, d, x;

U gồm các cung:

(a, b), (b, a), (b, x), (x, x), (x, c), (c, x), (x, d).

Đồ thị con của G = (X, U) có thể được hiểu là đồ thị G'= (X', U'), với $X' \subset X$, $U' \subset U$. Ở ví dụ trên, ta có một đồ thị con trong vòng có chấm. Nếu vẫn giữ nguyên các *đỉnh* của X, chỉ bớt một số *cung* (phần tử của U), ta được một *đồ thị bộ phận* của G.

Với một cung u = (a, b), ta nói a là *đỉnh đầu* còn b là *đỉnh cuối* của nó. Để ý rằng hai cung (a, b) và (b, a) thì khác nhau. Trong khi đó, ta nói *cạnh* (khác với cung) là đoạn nối hai đỉnh với nhau.

Hai đỉnh được gọi là *kề nhau* nếu chúng khác nhau và tồn tại một cung nối liền hai đỉnh đó (một cách nôm na, *kề* nhau chưa hẳn là *gần* nhau và ngược lại).

Hai cung được gọi là *kề nhau* nếu chúng khác nhau và có một đỉnh chung (bất luận đó là đỉnh đầu hay đỉnh cuối của cung này hoặc cung kia).

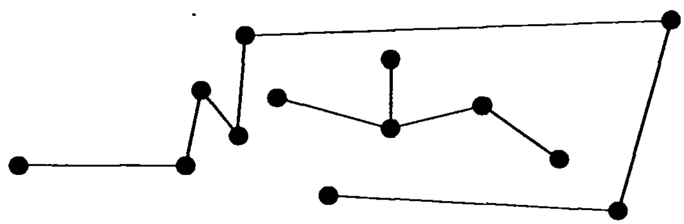
Ta gọi *đường đi* là một dãy các cung sao cho đỉnh cuối của mỗi cung trùng với đỉnh đầu của cung tiếp đến. Ta nói một đường đi là *đơn* nếu nó không đi hai lần qua cùng một cung, và gọi nó là *hợp* trong trường hợp ngược lại.

Đường đi nào không qua một đỉnh 2 lần thì được gọi là *đường đi sơ cấp* (như thế, đường đi Euler trong *Bài toán về 7 chiếc cầu* nói trên là đường đi sơ cấp, ở đây, mỗi chiếc cầu được biểu trưng bằng một đỉnh).

Số cung trên một đường đi được gọi là *độ dài* của đường đi đó. Tuỳ theo độ dài này hữu hạn hay vô hạn mà ta bảo rằng đường đi *hữu hạn* hoặc *vô hạn*. Nếu đường đi *hữu hạn* có đỉnh đầu tiên trùng với đỉnh cuối cùng, ta bảo ấy là một *mạch*. Mạch có độ dài 1 (chẳng hạn (x, x)) được gọi là một *khuyên*.

Một *dây chuyền* là một dãy các cạnh $(a_1, a_2, ...)$ sao cho mỗi cạnh a_k được nối với cạnh a_{k+1} bằng một trong hai đầu mút của nó và nối với a_{k-1} bằng đầu mút còn lại.

Một đồ thị được gọi là *liên thông mạnh* nếu giữa hai đỉnh phân biệt bất kì đều tồn tại một đường đi. Ta nói đồ thị là *liên thông* nếu giữa hai đỉnh phân biệt bất kì đều tồn tại một dây chuyền. Có thể thấy được rằng đồ thị liên thông mạnh thì sẽ liên thông, nhưng điều ngược lại thì không đúng.



Sau cùng, bạn đọc có thể hình dung một đồ thị không liên thông bằng ví dụ như hình bên cạnh.

V. SỐ PHỨC

Trong khuôn khổ của cuốn sách, chúng tôi không thể trình bày nhiều khái niệm và tính chất của số phức. Bạn đọc có thể tìm ở nhiều sách, chẳng hạn, *Giải tích 12*, ban KHTN, NXB Giáo Dục, 1995. Ở bài 13 (1963) và bài 124 (1990) có sử dụng căn bậc n của đơn vị. Vì thế chúng tôi nhắc lại nơi đây vấn đề này.

Một số phức $z = a + bi$ (dạng *đại số*) còn có thể biểu diễn được dưới dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, trong đó r được gọi là *modulus* và φ được gọi là *argument* của z.

Định nghĩa 35

Ta nói số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là căn bậc n của số phức $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kí hiệu $\sqrt[n]{w} = z$, nếu $z^n = w$.

Bằng các công thức về phép tính các số phức, để ý rằng hai số phức bằng nhau nếu chúng có các modulus và argument tương ứng bằng nhau, ta chứng minh được rằng w có n căn bậc n cho bởi các công thức sau đây, khi $w \neq 0, k = 0, 1, ..., n-1$:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right),$$

Căn bậc n của đơn vị

Từ công thức trên, vì $1 = \cos 0 + i\sin 0$ nên đơn vị có n căn bậc n cho bởi các công thức: $c_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, ..., n-1$.

Trong mặt phẳng phức, khi $n \neq 3$, các giá trị trên có thể được biểu diễn thành các điểm nằm trên đường tròn đơn vị, tâm ở gốc toạ độ, chúng là các đỉnh của đa giác đều nội tiếp đường tròn này.

VI. BẢN SỐ CỦA TẬP HỢP

Bản số (*cardinality*) của tập hợp là khái niệm cơ sở trong nhiều giáo trình giải tích hoặc đại số hiện đại. Các kiến thức này có phần nào liên quan đến một số cách giải toán trong sách này, cụ thể, bài 109 (1987) và bài 119 (1989). Phải gọi là *liên quan* thôi, chứ không cần thiết, nhưng việc mở rộng thêm một ít kiến thức liên quan theo chúng tôi cũng là điều có ích.

Tuy nhiên, việc trình bày chúng ở đây rất dễ bị vướng mắc vào những kiến thức mà bạn đọc là học sinh phổ thông sẽ khó lĩnh hội. Chúng tôi sẽ cố gắng trực quan hóa vấn đề đến mức có thể được để trình bày những điều cơ bản nhất.

Tập hợp hữu hạn bao giờ cũng gắn liền với một con số nào đó, cụ thể, đó là *số các phần tử* của tập hợp đó. Bây giờ, ta xét thật nhiều tập hợp, mỗi tập hợp đều có số phần tử là n. Khi đó, nếu bỏ qua phần *định tính* của từng tập hợp (chẳng hạn, ta không quan tâm rằng các phần tử đó méo hay tròn, to hay nhỏ...) thì những tập hợp đang xét này có chung cùng một đặc trưng: *chúng có n phần tử ở mỗi tập hợp*. Vì thế, ta sẽ không gọi số các tập hợp đó là n, mà gọi bằng một tên mới, đó là: *bản số của chúng là* n.

Nhưng khi người ta muốn gán cho sự vật hoặc hiện tượng một tên gọi mới, bao giờ người ta cũng muốn nói đến một điều xa hơn cái thông thường. Để ý rằng, khi ta đếm các phần tử, ta đã gán cho mỗi phần tử đó một con số, theo tương ứng 1 - 1. Vì các tương ứng 1 - 1 thì có tính chất bắc cầu, nên ta có thể hình dung được rằng các tập hữu hạn đang xét (có cùng bản số n) đều có liên hệ nhau đôi một bằng những song ánh. Điều này được mở rộng ra cho mọi tập hợp, dù hữu hạn hay vô hạn.

Định nghĩa 36

Hai tập hợp A và B (hữu hạn hoặc vô hạn) được gọi là có cùng bản số nếu tồn tại một song ánh từ A lên B. Kí hiệu bản số của A là cardA (hoặc $|A|$), khi đó ta viết: cardA = cardB.

Tập hợp **N** các số tự nhiên rõ ràng hình thành từ việc *đếm* mà ra. Do vậy, ta nói A là *tập đếm được* khi cardA = card**N**.

Có rất nhiều tập hợp cũng vô hạn, nhưng do không thiết lập được song ánh giữa nó và **N**, nên nó là tập hợp *không đếm được*.

Tập **N**, cũng như những tập hợp *đếm được*, là những tập hợp có số phần tử nhiều vô kể, đếm đến hết bao nhiêu cuộc đời cũng chẳng hết. Thế nhưng, xem ra, loại tập hợp này lại nhỏ bé nhất trong các tập vô hạn, vì ta có:

Định lí 37

Nếu B là một tập vô hạn, nó phải chứa một tập con đếm được.

Ngoài tập **N** ra, người ta đã chứng minh được **Z** , **Q**... là những tập đếm được. Vấn đề là có tồn tại các tập hợp "*nhiều phần tử*" hơn tập đếm được hay không? Câu trả lời là có. Chẳng hạn, người ta đã chỉ ra được một tập hợp cụ thể, đó là tập hợp F tất cả những ánh xạ từ **N** vào $\{0,1\}$. Cuối cùng, ta để ý:

Nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B, ta kí hiệu cardA $\leq$ cardB. Và nếu lúc đó A và B không cùng bản số, ta viết cardA < cardB.

Các kí hiệu < và $\leq$ ở đây là trừu tượng, nhưng người ta đã chứng minh được chúng cũng có những tính chất giống hệt như < và $\leq$ mà ta quen sử dụng (ở phổ thông).

CÁC ĐỀ TOÁN
VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

(phần Số học - Đại số - Giải tích - Hình học tổ hợp trích từ các kì thi IMO từ 1959 - 2000)

***Bài 1.* (1959)**

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, phân số sau đây tối giản:

$$\frac{21n+4}{14n+3}.$$

Prove that (21n+4)/(14n+3) is irreducible for every natural number n.

Hướng dẫn:

Để giải bài toán, ta cần chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n, các số $21n+4$ và $14n+3$ là nguyên tố cùng nhau. Quả vậy, gọi $d\ (d \geq 1)$ là ước chung lớn nhất của hai số ấy. Ta có $21n+4 = kd$, $14n+3 = hd$, với k và h là những số nguyên dương. Từ đây suy ra $7n+1 = (k-h)d$, do đó: $21n+3 = 3(k-h)d$. Vì vậy:

$$1 = (21n+4)-(21n+3) = kd-3(k-h)d = (3h-2k)d,$$

tức là 1 là tích của hai số nguyên $3h-2k$ và d. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $d = 3h-2k = 1$.

***Bài 2.* (1959)**

Với những giá trị thực nào của x thì mỗi đẳng thức sau đây là đúng:

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 1$;

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$?

For what real values of x is

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = A$$

given (a) A = 2, (b) A = 1, (c) A = 2, where only non-negative real numbers are allowed in square roots and the root always denotes the non-negative root?

Hướng dẫn:

Để vế trái của mỗi đẳng thức đã cho có nghĩa, ta phải đặt điều kiện :

$$2x-1 \geq 0, \qquad (1)$$

$$x+\sqrt{2x-1} \geq 0, \qquad (2)$$

$$x-\sqrt{2x-1} \geq 0. \qquad (3)$$

Từ (1) ta suy ra $x \geq \frac{1}{2}$. Khi đó (2) được thoả mãn. Đối với điều kiện (3), ta có thể viết : $x \geq \sqrt{2x-1}$. Vì $x \geq \frac{1}{2}$, cả hai vế của bất đẳng thức này đều không âm, nên có thể bình phương của hai vế và ta được

$$x^2 \geq 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0,$$

bất đẳng thức cuối cùng đúng. Tóm lại, điều kiện của bài toán là:

$$x \geq \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Bây giờ ta hãy giải lần lượt các phương trình đã cho.

a) Bình phương hai vế của phương trình, ta được

$$x + \sqrt{2x-1} + x - \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x^2 - (2x-1)} = 2$$

hay sau khi đơn giản: $x + |x-1| = 1$, tức là ta có: $|x-1| = 1 - x = -(x-1)$.

Để đẳng thức này xảy ra, ta thấy rằng: $x - 1 \leq 0$ hay $x \leq 1$. Kết hợp với điều kiện (4), ta thấy rằng nghiệm của phương trình (a) là :

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

b) Cũng biến đổi như trên, ta được:

$$x + |x-1| = \frac{1}{2} \text{ hay } |x-1| = \frac{1}{2} - x. \qquad (5)$$

Vế trái không âm, vậy vế phải cũng không âm, tức là : $\frac{1}{2} \geq x$.

Kết hợp với điều kiện (4), ta đi đến $x = \frac{1}{2}$. Nhưng giá trị này không thoả mãn (5). Vậy phương trình (b) vô nghiệm.

c) Cũng biến đổi như đối với phương trình (a), ta được

$$x + |x-1| = 2 \text{ hay } |x-1| = 2 - x.$$

Như vậy ta có $2 \geq x$. Với điều kiện nay, ta có thể bình phương cả hai vế để đi đến phương trình tương đương $x^2 - 2x + 1 = 4 - 4x + x^2$, hay $2x = 3$, vậy $x = \frac{3}{2}$. Nghiệm này thoả mãn điều kiện $2 \geq x$ và (4).

Vậy phương trình (c) có một nghiệm là $x = \frac{3}{2}$.

***Bài 3.* (1959)**

Cho các số thực a, b, c và phương trình bậc 2 theo cosx:

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0.$$

Hãy xây dựng phương trình bậc 2 theo cos2x mà nghiệm của nó vẫn là giá trị x. Hãy so sánh các phương trình theo cosx và cos2x với

$$a = 4,\ b = 2,\ c = -1.$$

Let a, b, c be real numbers. Given the equation for cos x:

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0,$$

form a quadratic equation in cos2x whose roots are the same values of x. Compare the equations in cos x and cos2x for $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$.

Hướng dẫn:

Ta có $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, thay vào và biến đổi ta có:

$$a^2\cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + (4c^2 + 4ac - 2b^2 + a^2) = 0.$$

Với các giá trị a, b, c cho trước, phương trình đã cho và phương trình trên tương đương. Giải ra ta được các nghiệm $\frac{2\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$.

***Bài 4.* (1960)**

Xác định tất cả các số có 3 chữ số, chia hết cho 11, sao cho thương số trong phép chia số ấy cho 11, bằng tổng bình phương các chữ số của số ấy.

Determine all 3 digit numbers N which are divisible by 11 and where $N/11$ is equal to the sum of the squares of the digits of N.

Hướng dẫn:

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, thì bài toán đưa về việc giải phương trình:

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2), \quad (1)$$

trong đó a, b, c là những số nguyên, có giá trị là một trong các số $0,1,2,\ldots,9$, ngoài ra $a \neq 0$. Để ý rằng:

$$100a + 10b + c = 99a + 11b + a - b + c \quad (2)$$

nên từ (1) và (2), suy ra rằng $a - b + c$ phải chia hết cho 11.

Nhưng $-8 \le a - b + c \le 18$, vì vậy $a - b + c = k.11$ với $k = 0$ hoặc $k = 1$. Ta hãy xét từng trường hợp.

1) $k = 0$. Từ (1) và (2), ta có:

$$99a + 11b = 11(a^2 + b^2 + c^2) \text{ hay } 9a + b = a^2 + b^2 + c^2 \quad (3)$$

Nhớ rằng $a - b + c = 0$, tức là $b = a + c$, nên thay vào (3), ta được:

$$10a + c = 2(a^2 + ac + c^2). \quad (4)$$

Từ (4) suy ra rằng c phải là một số chẵn. Giả sử $c = 2n$, thay giá trị này vào (4), ta đi đến: $a^2 - (5 - 2n)a + 4n^2 - n = 0$. Vậy

$$a = \frac{5 - 2n \pm \sqrt{25 - 16n - 12n^2}}{2}$$

Ta hãy xét tam thức bậc hai $-12n^2 - 16n + 25$: các nghiệm của nó là $\frac{-4 \pm \sqrt{91}}{6}$. Để $25 - 16n - 12n^2 \geq 0$, ta phải có:

$$\frac{-4 - \sqrt{91}}{6} \leq n \leq \frac{-4 + \sqrt{91}}{6} < 1.$$

Vì n là một số nguyên không âm, nên phải có $n = 0$. Khi đó $c = 0$, từ đó suy ra $a = b = 5$. Như vậy trong trường hợp này, số phải tìm là 550.

2) $k = 1$. Từ (1) và (2), ta có: $99a + 11b + 11 = 11(a^2 + b^2 + c^2)$ hay

$$9a + b + 1 = a^2 + b^2 + c^2. \quad (5)$$

Nhớ rằng $a - b + c = 11$, tức là $b = a + c - 11$. Thay giá trị này vào (5), ta được: $10a + c - 10 = a^2 + c^2 + (a + c - 11)^2$ hay

$$2a^2 + 2c^2 + 2ac - 32a - 23c + 131 = 0. \quad (6)$$

Từ đây suy ra rằng c là một số lẻ. Giả sử $c = 2n + 1$. Thay giá trị này vào (6), ta đi đến: $a^2 - (15 - 2n)a + 4n^2 - 19n + 55 = 0$.

Vậy $a = \dfrac{15 - 2n \pm \sqrt{5 + 16n - 12n^2}}{2}$.

Tam thức bậc hai $-12n^2 + 16n + 5$ có nghiệm là $\dfrac{4 \pm \sqrt{31}}{6}$, do đó

$$\frac{4 - \sqrt{31}}{6} \leq n \leq \frac{4 + \sqrt{31}}{6} < 2.$$

Vì n nguyên và không âm, nên $n = 0$ hoặc $n = 1$.

Nếu $n = 0$, thì $a = \dfrac{15 \pm \sqrt{5}}{2}$ là một số vô tỉ, điều này trái với điều kiện a là một số nguyên.

Nếu $n = 1$, thì $a = \dfrac{15 - 2 \pm 3}{2}$, tức là:

- hoặc $a = 5$, khi đó $c = 3$ và $b = -3$. Nhưng b phải là một số nguyên không âm, vậy không thể chọn các giá trị này;

- hoặc $a = 8$, khi đó $c = 3, b = 0$, và ta đi đến số 803.

Tóm lại các số phải tìm là 550 và 803.

***Bài 5.* (1960)**

Với những giá trị thực nào của x thì bất phương trình sau đây được nghiệm đúng: $\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$?

For what real values of x does the following inequality hold:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9?$$

Hướng dẫn:

Để vế trái của bất phương trình có nghĩa, ta phải đặt điều kiện

$$1+2x \geq 0 \text{ và } 1-\sqrt{1+2x} \neq 0,$$

tức là

$$x \geq -\frac{1}{2}, x \neq 0. \qquad (1)$$

Khi đó, để ý rằng $\dfrac{2x}{1-\sqrt{1+2x}} = \dfrac{2x(1+\sqrt{1+2x})}{1-(1+2x)} = -(1+\sqrt{1+2x})$ ta được

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} = (1+\sqrt{1+2x})^2 = 2+2x+2\sqrt{1+2x},$$

và bất phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$2+2x+2\sqrt{1+2x} < 2x+9, \text{ hay } \sqrt{1+2x} < \frac{7}{2}.$$

Cả hai vế của bất phương trình đều không âm, vì vậy có thể bình phương hai vế và đi đến: $1+2x < \dfrac{49}{4}$, hay $x < \dfrac{45}{8}$. Kết hợp với điều kiện (1), ta thấy rằng bất phương trình đã cho có nghiệm $-\dfrac{1}{2} \leq x < \dfrac{45}{8}$, trừ ra giá trị $x = 0$.

***Bài 6.* (1961)**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2, \\ xy=z^2 \end{cases}$$

trong đó a, b là những số cho trước.

Các số a, b phải thoả mãn điều kiện gì để các nghiệm x, y, z của hệ phương trình là dương và khác nhau?

Solve the following equations for x, y and z:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2, \\ xy=z^2 \end{cases}$$

where a, b are given. What conditions must a and b satisfy for x, y and z to be distinct positive numbers?

Hướng dẫn:

Bình phương cả hai vế của phương trình thứ nhất, ta được:

$$a^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2(x+y)z.$$

Để ý rằng $x+y=a-z$, và sử dụng các phương trình thứ hai và thứ ba, thì đi đến: $a^2=b^2+2z^2+2(a-z)z$ hay $a^2=b^2+2az$, từ đó

$$z=\frac{a^2-b^2}{2a}.$$

Từ đây ta tìm ra x, y bởi các hệ thức:

$$x+y=a-z=\frac{a^2+b^2}{2a}, \ xy=z^2=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}.$$

Vậy $$x=\frac{a^2+b^2}{4a}\pm\frac{\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a},$$

$$y=\frac{a^2+b^2}{4a}\mp\frac{\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}, \ z=\frac{a^2-b^2}{2a}.$$

Để x,y,z dương, cần phải có $x+y>0$ hay $\frac{a^2+b^2}{2a}>0$. Vậy $a>0$. Với điều kiện này thì x và y dương, bởi vì $xy>0$.

Từ điều kiện $z=\frac{a^2-b^2}{2a}>0$, với $a>0$ ta suy ra rằng

$$a^2>b^2, \text{ hay } a>|b|. \tag{1}$$

Để $x\neq y$, ta thấy rằng cần phải có :

$$10a^2b^2-3a^4-3b^4>0. \tag{2}$$

Đặt $t=\frac{|b|}{a}$, thì theo (1), ta có $1>t\geq 0$, và có thể viết (2) dưới dạng :

$$-3t^4+10t^2-3>0, \text{ hay } -3(t+\sqrt{3})\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(t-\sqrt{3})>0. \tag{3}$$

Vì $t \geq 0$, nên $t+\sqrt{3}>0$, $t+\frac{1}{\sqrt{3}}>0$, và vì $t<1$, nên $t-\sqrt{3}<0$,

và bất phương trình (3) tương đương với $t-\frac{1}{\sqrt{3}}>0$. Như vậy

$$1>t>\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hay } 1>\frac{|b|}{a}>\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ tức là } a>|b|>\frac{a}{\sqrt{3}} \quad (a>0).$$

***Bài 7.* (1961)**

Giải phương trình $\cos^n x-\sin^n x=1$, với n là số tự nhiên.

Solve the equation $\cos^n x-\sin^n x=1$, *where n is a natural number.*

Hướng dẫn:

Vì $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ nên phương trình vô nghiệm khi

$$n \neq 2 \text{ và } 0<|\cos x|, |\sin x|<1.$$

Nếu n = 2 và $0<|\cos x|, |\sin x|<1$ cũng dễ thấy phương trình vô nghiệm vì vế trái luôn bé hơn 1. Như vậy phương trình chỉ có nghiệm khi sinx = 0 hoặc cosx = 0. Từ đây ta có:

- n chẵn: $x = k\pi$, $k \in Z$.
- n lẻ: $\cos x=0$ và $\sin x=1$, cho ta $x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$; hoặc $\cos x=1$ và $\sin x=0$, cho ta $x=2k\pi$.

***Bài 8.* (1962)**

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất có các tính chất sau đây:

a) Viết dưới dạng thập phân, số ấy có tận cùng bằng 6.

b) Nếu bỏ chữ số 6 cuối cùng và đặt chữ số 6 lên trước các chữ số còn lại, sẽ được một số lớn gấp 4 lần số ban đầu.

Find the smallest natural number with 6 as the last digit, such that if the final 6 is moved to the front of the number it is multiplied by 4.

Hướng dẫn:

Giả thử số phải tìm là một số có $n+1$ chữ số.

Theo điều kiện a), số ấy là: $\overline{a_1a_2...a_n6}$. Theo điều kiện b), ta có:

$$\overline{6a_1a_2...a_n}=4.\overline{a_1a_2...a_n6}. \quad (1)$$

Đặt $a=\overline{a_1a_2...a_n}$, thì: $\overline{a_1a_2...a_{n6}}=10a+6$, $\overline{6a_1a_2...a_n}=6.10^n+a$, và đẳng thức (1) trở thành $6.10^n+a=4(10a+6)$ hay $2(10^n-4)=13a$. (2)

Đẳng thức này chứng tỏ vế trái chia hết cho 13, nhưng vì 2 và 13 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $10^n - 4$ chia hết cho 13. Vì các phương trình (1) và (2) là tương đương nhau, nên bài toán quy về tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để $10^n - 4$ chia hết cho 13, khi đó sẽ tìm ra số a và số phải tìm là $10a + 6$.

Ta hãy cho n lần lượt bằng 1,2,... thì $10^n - 4$ sẽ lần lượt có các giá trị 6, 96, 996, 9996, 99996,.... Bằng cách thử trực tiếp, ta thấy rằng số đầu tiên chia hết cho 13 trong các số ấy là 99996. Khi đó $a = 15384$.

Vậy số phải tìm là 153846.

***Bài 9.* (1962)**

Xác định tất cả các số thực x thoả mãn bất phương trình:

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

Find all real x satisfying: $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn:

Để vế trái của bất phương trình đã cho là có nghĩa, ta phải đặt điều kiện: $3 - x \geq 0$ và $x + 1 \geq 0$, như vậy

$$-1 \leq x \leq 3. \qquad (1)$$

Khi đó bất phương trình đã cho có thể viết dưới dạng tương đương

$$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}.$$

Vì cả hai vế đều không âm, nên có thể bình phương hai vế và bất phương trình tương đương với

$$3 - x > \frac{1}{4} + x + 1 + \sqrt{x+1}, \text{ hay } \frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}. \qquad (2)$$

Vế phải là không âm, vì vậy $\frac{7}{4} - 2x \geq 0$ hay $x \leq \frac{7}{8}$. (3)

Với điều kiện (3), có thể bình phương hai vế của bất phương trình (2) và được bất phương trình tương đương:

$$\frac{49}{16} - 7x + 4x^2 > x + 1 \text{ hay } 4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0. \qquad (4)$$

Tam thức bậc hai $4x^2 - 8x + \frac{33}{16}$ có hai nghiệm là $1 \pm \frac{\sqrt{31}}{8}$, vì vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$, $1 + \frac{\sqrt{31}}{8} < x$.

Kết hợp với các điều kiện (1) và (3) ta thấy rằng bất phương trình đã cho có nghiệm $-1 \le x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

***Bài 10.* (1962)**

Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Find all real solutions to $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

Hướng dẫn:

Đặt $c = \cos x$, sử dụng các công thức

$$\cos 3x = 4c^3 - 3c,\ \cos 2x = 2c^2 - 1$$

để đưa phương trình đã cho về phương trình theo c. Từ đó:

$$c = 0,\ \text{hay}\ c^2 = \frac{1}{2}\ \text{hay}\ c^2 = \frac{3}{4}.$$

và suy ra các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

***Bài 11.* (1963)**

Với những giá trị nào của số thực p, phương trình sau đây có nghiệm thực? Tìm các nghiệm đó: $\sqrt{x^2 - p + 2\sqrt{x^2 - 1}} = x$.

For which real values of p does the following equation have real roots? What are the roots?

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

Hướng dẫn:

Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng tương đương

$$\sqrt{x^2 - p} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}. \qquad (1)$$

Để vế phải của (1) có nghĩa, thì phải có $x^2 \ge 1$ hay $|x| \ge 1$. Hơn nữa, vế trái không âm, nên vế phải cũng không âm, tức là: $x \ge 2\sqrt{x^2 - 1}$. (2)

Từ đây ta thấy rằng $x \ge 0$. Bình phương cả hai vế của bất đẳng thức (2), ta được: $x^2 \ge 4(x^2 - 1)$, hay $4 \ge 3x^2$, và nhớ rằng $x \ge 0$, vậy $2 \ge \sqrt{3}x$.

Thành thử để vế phải của (1) có nghĩa và không âm, ta phải có

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \ge x \ge 1. \qquad (3)$$

Để giải phương trình (1), ta hãy phân biệt các trường hợp sau đây:

1) $p < 0$. Khi đó vế trái của (1) luôn luôn có nghĩa, ta có thể bình phương hai vế của (1) và được $x^2 - p = x^2 - 4x\sqrt{x^2-1} + 4(x^2-1)$, hay

$$-p = 4x^2 - 4 - 4x\sqrt{x^2-1}. \qquad (4)$$

Có thể viết phương trình này dưới dạng $-p = 4\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1} - x)$, hay, bởi vì $x \geq 1$ theo điều kiện (3), nên $x = |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{(x^2-1)+1}$,

$$-p = 4\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{(x^2-1)+1}). \qquad (5)$$

Vế trái của (5) là $-p > 0$, trong khi đó vế phải (nếu nó có nghĩa) luôn luôn nhỏ hơn hay bằng 0, vậy phương trình (5), tức là phương trình đã cho, là vô nghiệm.

2) $p \geq 0$. Khi đó để vế trái của phương trình (1) có nghĩa, ta cần phải đặt điều kiện $x^2 \geq p$ hay (vì theo (3), $x > 0$): $x \geq \sqrt{p}$. (6)

Như vậy, nghiệm của phương trình (1) phải thoả mãn đồng thời các điều kiện (3) và (6). Thành thử:

a) Nếu $\sqrt{p} > \frac{2}{\sqrt{3}}$, tức là $p > \frac{4}{3}$, thì các điều kiện (3) và (6) mâu thuẫn với nhau, do đó phương trình (1) vô nghiệm.

b) Nếu $\sqrt{p} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, thì có thể thống nhất các điều kiện (3) và (6) dưới dạng sau (kí hiệu $\max\{1, \sqrt{p}\}$ chỉ số lớn nhất trong các số 1 và $\sqrt{p}$):

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \geq x \geq \max\{1, \sqrt{p}\}. \qquad (7)$$

Với điều kiện (7), ta có thể biến đổi phương trình (1) và đi đến phương trình (4). Viết phương trình ấy dưới dạng $4x\sqrt{x^2-1} = 4(x^2-1) + p$, thì cả hai vế đều không âm, do đó có thể bình phương hai vế và đi đến phương trình tương đương $16x^2(x^2-1) = 16(x^2-1)^2 + 8p(x^2-1) + p^2$, hay $16(x^2-1) - 8p(x^2-1) - p^2 = 0$; từ đó suy ra $x^2 - 1 = \frac{p^2}{8(2-p)}$, vậy

$$x^2 = \frac{p^2}{8(2-p)} + 1 = \frac{(4-p)^2}{8(2-p)}. \qquad (8)$$

Theo (7), $\frac{2}{\sqrt{3}} \geq x \geq p$, nên $4 - p > 0$ và $2 - p > 0$. Vậy $x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$.

Để hoàn thành phép chứng minh trong trường hợp này, ta phải chứng tỏ rằng giá trị của x đã tìm được thoả mãn điều kiện (7), hay cũng vậy (vì $4-p>0$ và $2-p>0$): $\frac{4}{3}\ge x^2\ge \max\{1,p\}$. (9)

α) Bất đẳng thức $\frac{4}{3}\ge x^2$ tương đương với

$$\frac{4}{3}\ge \frac{p^2}{8(2-p)}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ge \frac{p^2}{8(2-p)} \Leftrightarrow 8(2-p)\ge 3p^2 \Leftrightarrow 0\ge 3p^2+8p-16. \quad (10)$$

Tam thức bậc 2 ở vế phải của (10) có hai nghiệm là -4 và $\frac{4}{3}$, do đó bất phương trình (1) có nghiệm $-4\le p\le \frac{4}{3}$. Điều kiện này hiển nhiên đúng vì ta đang xét trường hợp $0\le p\le \frac{4}{3}$.

β) Từ (8) ta suy ra rằng $x^2\ge 1$.

γ) Cuối cùng, ta hãy kiểm nghiệm điều kiện $x^2\ge p$, tức là $\frac{(4-p)^2}{8(2-p)}\ge p$. Biến đổi, bất đẳng thức này tương đương với $(3p-4)^2\ge 0$.

Từ các kết quả này, ta thấy rằng điều kiện (9), và do đó điều kiện (7), được thoả mãn. Như vậy, có thể kết luận:

- Nếu $p<0$: phương trình vô nghiệm.

- Nếu $0\le p\le \frac{4}{3}$: phương trình có một nghiệm xác định bởi công thức $x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$.

- Nếu $\frac{4}{3}<p$: phương trình vô nghiệm.

***Bài 12.* (1963)**

Tìm tất cả các nghiệm (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_5+x_2=yx_1 \\ x_1+x_3=yx_2 \\ x_2+x_4=yx_3 \\ x_3+x_5=yx_4 \\ x_4+x_1=yx_5, \end{cases}$$

trong đó y là tham số.

Find all solutions $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *to the system of equations*

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5. \end{cases},$$

where y is a parameter.

Hướng dẫn:

Cộng cả 5 phương trình của hệ, ta được :

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = y(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5). \quad (1)$$

Đẳng thức này chỉ đúng trong hai trường hợp :

1) $y = 2$. Khi đó hệ đã cho có thể viết dưới dạng

$$\begin{cases} x_5 - x_1 = x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 = x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 = x_3 - x_4 \\ x_3 - x_4 = x_4 - x_5 \\ x_4 - x_5 = x_5 - x_1. \end{cases}$$

Đặt $x_5 - x_1 = t$. Thế thì

$$\begin{cases} x_5 = x_1 + t \\ x_4 = (x_4 - x_5) + x_5 = x_1 + 2t \\ x_3 = (x_3 - x_4) + x_4 = x_1 + 3t \\ x_2 = (x_2 - x_3) + x_3 = x_1 + 4t \\ x_1 = (x_1 - x_2) + x_2 = x_1 + 5t. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $t = 0$ và $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$(= số tuỳ ý).

2) Nếu $y \neq 2$, thì theo (1) ta phải có

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \quad (2)$$

Từ đẳng thức này và từ các phương trình của hệ đã cho, ta suy ra:

$$y^2 x_1 = y.yx_1 = y(x_2 + x_5) = yx_2 + yx_5 = (x_1 + x_3) + (x_4 + x_1)$$
$$= x_1 + (x_1 + x_3 + x_4) = x_1 - (x_2 + x_5) = x_1 - yx_1$$

hay $(y^2 + y - 1)x_1 = 0$. Tương tự, ta cũng có :

$$(y^2+y-1)x_i=0 \quad (1\le i\le 5).$$

Thành thử đến đây ta lại xét hai trường hợp :

a) Nếu $y^2+y-1\neq 0$ thì $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$.

b) Giả sử $y^2+y-1=0$ (tức là $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$).

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta suy ra : $x_3=-x_1+yx_2$. (3)

Cộng hai phương trình đầu của hệ, ta được :

$x_1+x_2+x_3+x_5=y(x_1+x_2)$, hay, do (2): $x_4=-y(x_1+x_2)$. (4)

Hơn nữa, có thể viết phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$x_5=yx_1-x_2. \quad (5)$$

Ta hãy chứng tỏ rằng trong trường hợp này, nghiệm của hệ phương trình là : x_1, x_2 tuỳ ý, còn x_3, x_4, x_5 được xác định lần lượt bởi các công thức (3), (4), (5), nghiệm ấy thoả mãn điều kiện (2). Quả vậy :

α) Phương trình đầu được nghiệm đúng do (5).

β) Phương trình thứ hai cũng được nghiệm đúng do có (3).

γ) Do (3) và (4), cùng với giả thiết $y^2+y-1=0$, ta có :

$$x_2+x_4=x_2-y(x_1+x_2)=-yx_1-(y-1)x_2$$
$$=-yx_1+y^2x_2=y(-x_1+yx_2)=yx_3.$$

Vậy phương trình thứ ba được nghiệm đúng.

δ) Do (3), (4) và (5), cùng với giả thiết $y^2+y-1=0$, ta có :

$$x_3+x_5=(-x_1+yx_2)+(yx_1-x_2)$$
$$=(y-1)(x_1+x_2)=y^2(x_1+x_2)=yx_4.$$

Vậy phương trình thứ tư được nghiệm đúng.

ε) Do (4), (5), cùng với giả thiết $y^2+y-1=0$, ta có :

$$x_4+x_1=-y(x_1+x_2)+x_1=(1-y)x_1-yx_2$$
$$=y^2x_1-yx_2=y(yx_1-x_2)=yx_5.$$

Vậy phương trình thứ năm được nghiệm đúng.

Cuối cùng, từ (3), (4) và (5), ta thấy rằng : $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=$

$$=x_1+x_2+(-x_1+yx_2)-y(x_1+x_2)+(yx_1-x_2)=0.$$

Tóm lại, các kết quả tìm được như sau :

1) Nếu $y\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ và $y\neq 2$, thì hệ phương trình có nghiệm :

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

2) Nếu $y = 2$, thì hệ có nghiệm: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ (số tuỳ ý).

3) Nếu $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, thì hệ có nghiệm: x_1 tuỳ ý, x_2 tuỳ ý,

$$x_3 = -x_1 + yx_2,\ x_4 = -y(x_1 + x_2),\ x_5 = yx_1 - x_2.$$

Cần để ý rằng trong trường hợp này, vì các điều kiện của đầu bài sẽ không đổi nếu ta hoán vị vòng quanh các chỉ số của các ẩn, nên cũng có thể thực hiện phép hoán vị ấy đối với biểu thức của nghiệm. Chẳng hạn: x_4 tuỳ ý, x_5 tuỳ ý, $x_1 = -x_4 + yx_5, x_2 = -y(x_4 + x_5), x_3 = yx_4 - x_5$.

***Bài 13.* (1963)**

Chứng minh rằng $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Prove that $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn:

Xét phương trình $x^7 + 1 = 0$, nghiệm của phương trình này là

$$e^{\frac{i\pi}{7}}, e^{\frac{i3\pi}{7}}, \ldots, e^{\frac{i13\pi}{7}},$$

hãy chứng minh rằng tổng các nghiệm này bằng 0. Đặc biệt, ta suy ra tổng các phần thực của chúng bằng 0. Nhưng $\cos\frac{7\pi}{7} = -1$, còn các cặp còn lại bằng nhau, do $\cos(2\pi - x) = \cos x$. Từ đó:

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Sau cùng, để ý rằng $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$, ta đi đến điều phải chứng minh.

***Bài 14.* (1963)**

Có 5 học sinh A, B, C, D, E trải qua một kì thi và kết quả xếp hạng được đánh số từ 1 đến 5. Người ta dự đoán rằng kết quả cuộc thi sẽ xếp theo thứ tự A, B, C, D, E. Thế nhưng lại không có học sinh nào đạt kết quả vị trí như đã dự đoán và cũng không có hai học sinh nào đạt kết quả kề nhau (thứ tự gần nhau) như dự đoán. Ví dụ, hai học sinh C và D không đạt kết quả tương ứng là 1, 2 hay 2, 3, hay 3, 4, hay 4, 5. Một dự đoán khác cho rằng thứ tự xếp hạng là D, A, E, C, B. Kết quả sau khi thi, có đúng 2 học sinh đã đạt vị trí như dự đoán và cũng đã có được hai cặp học sinh khác nhau xếp thứ tự kề nhau như đã dự đoán. Hãy xác định kết quả xếp hạng của 5 học sinh đó.

Five students A, B, C, D, E were placed 1 to 5 in a contest with no ties. One prediction was that the result would be the order A, B, C, D, E. But no student finished in the position predicted and to two students predicted to finish consecutively did so. For example, the outcome for C and D was not 1, 2 (respectively), or 2, 3, or 3, 4 or 4, 5. Another prediction was the order D, A, E, C, B. Exactly two students finished in the places predicted and two disjoint pairs predicted to finish consecutively did so. Determine the outcome.

Hướng dẫn:

Ta bắt đầu từ dự đoán thứ hai. Theo dự đoán này, các cặp học sinh khác nhau chỉ có thể là DA và EC, DC và CB hay AE và CB. Cũng theo dự đoán đó, có đúng hai học sinh đã đạt được vị trí như dự đoán, do vậy, thứ tự xếp hạng là một trong những khả năng sau:

DABEC,	(1)	DACBE,	(2)
EDACB,	(3)	AEDCB.	(4)

Đến đây, ta xét kết hợp với dự đoán ban đầu. Kết quả (1) không thể xảy ra vì AB đã rơi đúng vị trí liên tiếp như dự đoán ban đầu. Kết quả (2) cũng không xảy ra bởi C xếp đúng vị trí như dự đoán ban đầu. Cũng vậy, kết quả (4) không xảy ra vì nếu thế thì A lại xếp đúng vị trí của dự đoán ban đầu. Tóm lại, E, D, A, C, B xếp theo thứ tự tương ứng từ 1 đến 5, đó là kết quả sau kì thi.

***Bài 15.* (1964)**

a) Xác định tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 7.

b) Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên dương n, số $2^n + 1$ không chia hết cho 7.

a) Find all natural numbers n for which 7 divides $2^n - 1$.

b) Prove that there is no natural number n for which 7 divides

$$2^n + 1.$$

Hướng dẫn:

Trước hết, ta hãy để ý rằng nếu cho n lần lượt bằng $1,2,3,4,5,6$ thì

2^n sẽ lần lượt là $2,4,8,16,32,64$, do đó phần dư của phép chia 2^n cho 7 sẽ lần lượt là $2,4,1,2,4,1$. Điều đó gợi ý rằng phần dư của phép chia 2^n cho 7 sẽ lần lượt là: 2,4,1 nếu n lần lượt bằng $3k+1, 3k+2, 3k$ (k nguyên dương). Quả vậy, nếu $n = 3k$ thì:

$$2^n = 2^{3k} = 8^k = (7+1)^k = 7m+1,$$

nếu $n = 3k+1$ thì: $2^n = 2^{3k+1} = 2^{3k}.2 = 2(7m+1) = 14m+2$, và cuối cùng nếu $n = 3k+2$ thì: $2^n = 3^{3k+2} = 2^{3k}.4 = 4(7m+1) = 28m+4$.

Từ kết quả này ta suy ra rằng:

a) Số $2^n - 1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi n có dạng $3k$, tức là khi n là một bội của 3.

b) Phần dư của phép chia $2^n + 1$ cho 7 lần lượt là 2, 3, 5, khi n lần lượt bằng $3k$, $3k+1$, $3k+2$; vậy $2^n + 1$ không bao giờ chia hết cho 7.

***Bài 16.* (1964)**

Kí hiệu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \le 3abc$.

Suppose that a, b, c are the sides of a triangle. Prove that:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

Hướng dẫn:

Để ý : $abc - a^2(b+c-a) = a(bc - ab - ac + a^2) = a(a-b)(a-c)$,

$$abc - b^2(c+a-b) = b(b-c)(b-a),$$

$$abc - c^2(a+b-c) = c(c-a)(c-b).$$

Vì vậy bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với bất đẳng thức :

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c((c-a)(c-b) \ge 0. \qquad (*)$$

Ta hãy chứng minh rằng bất đẳng thức (*) vẫn đúng (và do đó, bất đẳng thức đã cho là đúng) với giả thiết rộng hơn: a, b, c là ba số không âm. Quả vậy, vế trái của (*) không thay đổi khi thay đổi vai trò của a, b, c vì vậy ta có thể giả thiết $a \ge b \ge c \ge 0$. Khi đó có thể biến đổi vế trái của (*) như sau : $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) =$

$$= a(a-b)[(a-b)+(b-c)] - b(a-b)(b-c) + c(a-c)(b-c)$$

$$= a(a-b)^2 + a(a-b)(b-c) - b(a-b)(b-c) + c(a-c)(b-c)$$

$$= a(a-b)^2 + (a-b)^2(b-c) + c(a-c)(b-c).$$

Vế cuối cùng là không âm vì ta đã giả thiết $a \geq b \geq c \geq 0$.

***Bài 17*. (1964)**

Mỗi nhà bác học trong số 17 nhà bác học đều viết thư cho các bác học kia. Họ chỉ trao đổi với nhau về ba vấn đề. Mỗi cặp hai nhà bác học chỉ trao đổi với nhau về một vấn đề. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà bác học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Each pair from 17 people exchange letters on one of three topics. Prove that there are at least 3 people who write to each other on the same topic.

Hướng dẫn:

Xem một nhà bác học A nào đó. Vì A viết thư cho 16 nhà bác học còn lại về ba vấn đề (gọi là các vấn đề I, II, III), nên A phải trao đổi ít nhất với 6 nhà bác học về cùng một vấn đề. Giả thử đó là một vấn đề I, và 6 nhà bác học ấy là B, C, D, E, F, G.

Sáu nhà bác học này cũng trao đổi với nhau về các vấn đề I, II, III. Nếu có một cặp nào đó, chẳng hạn cặp B, C, trao đổi với nhau về vấn đề I, thì bài toán được chứng minh: các nhà bác học A, B, C cùng trao đổi nhau về vấn đề I.

Ta hãy xét trường hợp B, C, D, E, F, G chỉ trao đổi với nhau về các vấn đề II và III. Vì B trao đổi với 5 người kia về hai vấn đề, nên B phải trao đổi ít nhất với 3 người cùng một vấn đề. Giả thử đó là vấn đề II và 3 nhà bác học ấy là C, D, E.

Nhớ lại rằng C, D, E chỉ trao đổi với nhau về các vấn đề II và III. Nếu có hai người nào đó, chẳng hạn C, D, trao đổi với nhau về vấn đề II, thì bài toán được chứng minh: các nhà bác học B, C, D cùng trao đổi với nhau về vấn đề II.

Khả năng còn lại là các nhà bác học C, D, E chỉ trao đổi với nhau về vấn đề III: trong trường hợp này, bài toán cũng được chứng minh.

***Bài 18*. (1964)**

Cho 5 điểm trong một mặt phẳng sao cho trong số tất cả những đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào trùng nhau, song song hoặc vuông góc với nhau. Qua mỗi điểm, vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng xác định bởi hai trong số 4 điểm còn lại. Hãy xác định số lớn nhất các giao điểm mà những đường vuông góc này có thể giao nhau.

5 points in a plane are situated so that no two of the lines joining a pair of points are coincident, parallel or perpendicular. Through each point lines are drawn perpendicular to each of the lines through two of the other 4 points. Determine the maximum number of intersections these perpendiculars can have.

Hướng dẫn:

Gọi 5 điểm thoả mãn yêu cầu của đề toán là A, B, C, D, E. Xét cố định một điểm, thế thì 4 điểm còn lại sẽ cho ta 6 đường thẳng. Do đó có cả thảy 6 đường vuông góc đi qua điểm cố định đó. Như thế, tổng cọng có 30 đường thẳng vuông góc.

Tính nôm na, cứ hai đường thì cắt nhau tại một điểm, do vậy, nhiều lắm là có cả thảy $C_{30}^2 = \dfrac{30.29}{2} = 435$ giao điểm.

Thế nhưng, lại có một số giao điểm trùng nhau.

Có ba nhóm điểm trùng nhau.

Đầu tiên, 6 đường thẳng qua A (chẳng hạn) giao nhau tại một điểm (đó là điểm A), trong khi tính theo kiểu trên là $C_6^2 = \dfrac{6.5}{2} = 15$ giao điểm. Như vậy ta mất đi 5.14 = 70 điểm.

Tiếp đến, các đường thẳng qua C, D và E cùng vuông góc với AB sẽ song song với nhau, điều này loại thêm 3 giao điểm. Như thế, ta mất thêm $C_5^3 \times 3 = \dfrac{5.4.3}{3.2} = 10.3 = 30$ điểm.

Thứ ba, đường thẳng qua A vuông góc với BC là đường cao trong tam giác ABC; cũng thế với đường thẳng qua B vuông góc với AC, đường thẳng qua C vuông góc với AB, chúng đồng quy tại trực tâm của tam giác ABC. Với tam giác ABC này ta phải loại đi 2 giao điểm. Như thế phải loại thêm tất cả $C_5^3 \times 2 = 10.2 = 20$ giao điểm.

Rõ ràng, các giao điểm trùng lặp nói trên đều phân biệt nhau (do ba miền điểm vừa xét rời nhau), do vậy, giá trị lớn nhất có thể có của số các giao điểm là 435 - 120 = 315.

Bài toán đến đây vẫn chưa thực sự được giải quyết nếu chúng ta không chỉ ra được một trật tự đặc biệt về cách sắp xếp 5 điểm đã cho sao cho số giao điểm thực sự là 315, nghĩa là cách sắp xếp các điểm đó bảo đảm được rằng không còn một giao điểm trùng lặp nào ngoài các trùng lặp kể trên. Đề nghị bạn đọc tiếp tục công việc này hoặc chỉ ra một cách giải khác tối ưu hơn.

***Bài 19.* (1965)**

Tìm tất cả các giá trị x thuộc $[0,2\pi]$ sao cho:

$$2\cos x \le \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \le 2.$$

Find all x in the interval $[0,2\pi]$ *which satisfy:*

$$2\cos x \le \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \le 2.$$

Hướng dẫn:

Đặt $y=\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|$, lúc đó: $y^2=2-2|\cos 2x|$.

- Nếu cosx ≥ 0, do giả thiết $2\cos x \le 2$, ta suy ra

$$|\cos 2x|=|2\cos^2 x-1|=1-2\cos^2 x,$$

và y = 2cosx, trong trường hợp này các bất đẳng thức đã cho ở đề bài trở thành $\cos x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, do vậy ta được: $x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$.

- Nếu cosx < 0:

* Giả sử $|\cos x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, ta có

$$\cos x \le |\cos x| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right].$$

* Giả sử $|\cos x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, ta có

$$|\cos 2x|=2\cos^2 x-1 \Rightarrow y=2|\sin x| \Rightarrow x \in \left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right].$$

Tóm lại, bài toán có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

***Bài 20.* (1965)**

Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0, \end{cases}$$

với các hệ số thoả mãn các điều kiện sau đây:

a) a_{11},a_{22},a_{33} dương;

b) tất cả các hệ số còn lại đều âm;

c) trong mỗi phương trình, tổng các hệ số là dương.

Chứng minh rằng nghiệm $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình ấy.

The coefficients a_{ij} of the following equations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

satisfy the following:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} are positive;

b) other a_{ij} are negative;

c) the sum of the coefficients in each equation is positive.

Prove that the only solution is $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Hướng dẫn:

Giả thử (x_1, x_2, x_3) là một nghiệm của hệ phương trình đã cho. Từ điều kiện của bài toán, ta thấy rằng nếu cần thì sẽ thay đổi cách đánh số các x_1, x_2, x_3, nên có thể giả thiết rằng: $|x_1| \geq |x_2|$ và $|x_1| \geq |x_3|$.

Phương trình thứ nhất của hệ có thể viết được dưới dạng:

$a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - a_{13}x_3$, do đó $|a_{11}x_1| = |a_{12}x_2 + a_{13}x_3| \leq |a_{12}x_2| + |a_{13}x_3|$.

Vì $a_{11} > 0, a_{12} < 0, a_{13} < 0$, nên ta có:

$$a_{11}|x_1| \leq -a_{12}|x_2| - a_{13}|x_3| \leq -a_{12}|x_1| - a_{13}|x_1|,$$

hay $(a_{11} + a_{12} + a_{13})|x_1| \leq 0$.

Nhưng $a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$, vậy $|x_1| = 0$, và do đó $|x_2| = 0, |x_3| = 0$,

tức là : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

***Bài 21.* (1965)**

Tìm bốn số thực x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho mỗi số cộng với tích các số còn lại đều bằng 2.

Find all sets of four real numbers such that the sum of any one and the product of the other three is 2.

Hướng dẫn:

Bài toán quy về phép giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \\ x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \\ x_3 + x_1x_2x_4 = 2 \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Để ý rằng nếu $x_1 = 0$ thì ta sẽ có :

$$x_2x_3x_4 = 2,\ x_2 = x_3 = x_4 = 2.$$

Điều này vô lý. Vì vậy $x_1 \neq 0$, và vì vai trò của x_1, x_2, x_3, x_4 là như nhau, nên ta cũng có $x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, x_4 \neq 0$. Thành thử nhân phương trình thứ i $(i = 1,2,3,4)$ của hệ (1) với x_i, thì ta được hệ tương đương:

$$x_i^2 + x_1x_2x_3x_4 = 2x_i \ (i = 1,2,3,4).$$

Đặt $p = x_1x_2x_3x_4$, thì rõ ràng mỗi x_i là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 2x + p = 0$. Như vậy mỗi x_i chỉ có thể lấy một trong hai giá trị $1 \pm \sqrt{1-p}$. Do đó, chỉ có thể xảy ra một trong 3 trường hợp sau đây:

1) Cả 4 số x_i đều bằng nhau, tức là: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = t$. Khi đó hệ phương trình (1) thu về một phương trình:

$$t^3 + t - 2 = 0 \text{ hay } (t-1)(t^2 + t + 2) = 0.$$

Vì $t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$, nên ta phải có $t = 1$, tức là:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1.$$

2) Trong 4 số x_i, chỉ có 3 số bằng nhau. Khi đó, có thể giả thiết: $x_1 = x_2 = x_3 = t \neq x_4$. Hệ phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} t + t^2x_4 = 2 \\ t^3 + x_4 = 2. \end{cases} \qquad (2)$$

Lấy phương trình thứ nhất trừ cho phương trình thứ hai, ta được :

$$(t - t^3) + (t^2 - 1)x_4 = 0 \text{ hay } (t^2 - 1)(x_4 - t) = 0.$$

Vì $x_4 \neq t$, nên ta phải có $t^2 = 1$. Do đó:

- hoặc $t = 1$, từ phương trình thứ hai của hệ (2) ta suy ra $x_4 = 1$, nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết $t \neq x_4$.

- hoặc $t = -1$, từ phương trình thứ hai của hệ (2) ta suy ra

$$x_4 = 3.$$

Vai trò của 4 số x_i là như nhau, nên trong trường hợp này ta đi đến kết luận: trong 4 số $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 3 số bằng -1, số còn lại bằng 3.

3) Bốn số x_i lập thành hai cặp số bằng nhau, tức là chẳng hạn: $x_1 = x_2 = t \neq x_3 = x_4 = u$. Khi đó hệ (1) trở thành :

$$\begin{cases} t + tu^2 = 2 \\ u + ut^2 = 2 \end{cases}. \qquad (3)$$

Lấy phương trình thứ nhất trừ cho phương trình thứ hai, ta đi đến: $(t-u)(1-tu) = 0$. Vì $t \neq u$, nên $tu = 1$. Đồng thời trong hệ (3) ta cũng có $(t+u)(1+tu) = 4$. Và vì $tu = 1$, nên $t + u = 2$. Như vậy t và u là các nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - 2z + 1 = 0$, phương trình này chỉ có nghiệm $z = 1$, tức là $t = u = 1$.Nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết $t \neq u$.

Tổng kết lại các trường hợp đã xét, ta đi đến kết luận: hệ (1) có các nghiệm sau đây :

a) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$; b) 3 số x_i bằng -1, số còn lại bằng 3.

***Bài 22.* (1965)**

Cho n điểm trong mặt phẳng với n > 2. Chứng minh rằng có nhiều nhất là n cặp điểm có khoảng cách cực đại.

Given n > 2 points in the plane, prove that at most n pairs of points are the maximum distance apart (of any two points in the set).

Hướng dẫn:

Trước hết, ta để ý rằng nếu có hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau d mà không cắt nhau thì ta có thể tìm hai đầu mút trong 4 đầu mút của hai đoạn thẳng đó để tạo thành một đoạn thẳng có độ dài lớn hơn d. Thật vậy, giả sử hai đoạn thẳng đó là PQ và RS, với PQ = RS = d. Nếu điều ngược lại với khẳng định trên xảy ra, ta có góc $\widehat{PQR} > 90^0$ (vì nếu không thì PR > PQ = d). Tương tự, ta chứng minh được tất cả các góc của tứ giác đều bé hơn 90^0, điều này mâu thuẫn.

Ta dùng kết quả trên để chứng minh bài toán. Giả sử rằng có hơn n cặp điểm có khoảng cách cực đại (là d). Như thế, dễ thấy rằng tại một đỉnh A nào đó phải có 3 đoạn AB, AC, AD có độ dài d (cực đại). Giả sử AC nằm giữa AB và AD. Khi đó, C không thể nối được với một điểm nào nữa, mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh (thật vậy, giả sử C nối với X, theo mệnh đề trên, suy ra CX phải cắt cả AB lẫn AD, mâu thuẫn!).

***Bài 23.* (1966)**

Trong một đề thi có ba bài toán A, B, C. Có 25 thí sinh, mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 bài đó. Biết rằng:

- trong số các thí sinh không giải được bài A thì số thí sinh đã giải được bài B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được bài C;
- số thí sinh chỉ giải được bài A nhiều hơn số thí sinh giải được bài A và thêm bài khác là 1 người;
- số thí sinh chỉ giải được bài A bằng số thí sinh chỉ giải được bài B cọng với số thí sinh chỉ giải được bài C.

Hỏi có bao nhiêu số thí sinh chỉ giải được bài B ?

Problems A, B and C were posed in a mathematical contest. 25 competitors solved at least one of the three.

Amongst those who did not solve A, twice as many solved B as C. The number solving only A was one more than the number solving A and at least one other. The number solving just A equalled the number solving just B plus the number solving just C. How many solved just B?

Hướng dẫn:

Gọi a là số thí sinh chỉ giải được bài A, b là số thí sinh chỉ giải được bài B, c là số thí sinh chỉ giải được bài C, d là số thí sinh giải được 2 bài B và C nhưng không giải được bài A. Khi đó, số thí sinh giải được bài A và thêm ít nhất một trong hai bài B và C là $25-a-b-c-d$.

Các điều kiện ở đề bài cho ta:

$$b+d=2(c+d),\ a=1+25-a-b-c-d,\ a=b+c.$$

Từ các đẳng thức trên ta được $\begin{cases}4b+c=26\\ d=b-2c>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=6\\ c=2\end{cases}$.

Vậy số thí sinh đã giải được chỉ mỗi bài B là 6.

***Bài 24.* (1966)**

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n và mọi số thực x sao cho $\sin 2^n x \neq 0$ $(n=1,2,...)$ ta có:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot gx-\cot g2^n x.$$

Prove that we have

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot gx-\cot g2^n x$$

for any natural number n and any real x (with $\sin 2^n x$ non-zero).

Hướng dẫn:

Ta có:

$$\text{cotgy}-\text{cotg2y}=\frac{\text{cosy}}{\text{siny}}-\frac{2\cos^2 y-1}{2\text{sinycosy}}=\frac{1}{2\sin y\cos y}=\frac{1}{\sin 2y}. \quad (*)$$

Tiếp tục, ta dùng quy nạp để chứng minh đẳng thức ở đề bài. Hiển nhiên đẳng thức đúng với n = 1 (lấy x = y ở (*)). Giả sử đẳng thức đúng với n, từ (*) ta chọn $y=2^n x$ và được:

$$\frac{1}{\sin 2^{n+1}x}=\cot g2^n x-\cot g2^{n+1}x,$$

suy ra kết quả đúng với n +1, điều phải chứng minh.

***Bài 25.* (1966)**

a_1,a_2,a_3,a_4 là bốn số thực khác nhau cho trước. Giải hệ:

$$\begin{cases}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1\\ |a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\ |a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1\\ |a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1.\end{cases}$$

Solve the system of equations

$$\begin{cases}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1\\ |a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\ |a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1\\ |a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1.\end{cases},$$

where a_i are distinct reals, i = 1, 2, 3, 4.

Hướng dẫn:

Để ý rằng nếu thay đổi vai trò hai chỉ số (của các hệ số và các ẩn số) thì hệ phương trình không thay đổi. Vì vậy có thể giả thiết:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4.$$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 = 1 \\ (a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 = 1 \\ (a_1 - a_3)x_1 + (a_2 - a_3)x_2 + (a_3 - a_4)x_4 = 1 \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1. \end{cases}$$

Biến đổi bằng cách trừ các phương trình trên cho nhau ta được:

$$(a_1 - a_2)(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

$$(a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

$$(a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0,$$

thành thử hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, & (1) \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, & (2) \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, & (3) \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1. & (4) \end{cases}$$

Cộng (1) với (3), thì suy ra : $x_1 = x_4$.

Cộng (1) với (2), ta được: $x_1 = x_3 + x_4$, vậy $x_3 = 0$.

Cộng 2) với (3), ta được: $x_1 + x_2 = x_4$, vậy $x_2 = 0$.

Mang các giá trị này vào (4), thì được : $x_1 = x_4 = \dfrac{1}{a_1 - a_4}$.

Như vậy với giả thiết $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, thì hệ phương trình đã cho có nghiệm: $x_2 = x_3 = 0, x_1 = x_4 = \dfrac{1}{a_1 - a_4}$. Nếu giả thiết trên không đúng, mà ta có chẳng hạn: $a_1 > a_4 > a_3 > a_1$, thì do nhận xét ở đầu bài giải, ta thấy rằng nghiệm của hệ phương trình là :

$$x_3 = x_4 = 0,\ x_1 = x_2 = \frac{1}{a_2 - a_1}.$$

***Bài 26.* (1967)**

Cho các số tự nhiên k, m, n sao cho m + k + 1 là số nguyên tố lớn hơn n + 1. Đặt $c_s = s(s+1)$. Chứng minh rằng tích số

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\ldots(c_{m+n} - c_k)$$

chia hết cho $c_1c_2...c_n$.

Let k, m, n be natural numbers such that m + k+ 1 is a prime greater than n + 1. Let $c_s = s(s+1)$. Prove that:

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)...(c_{m+n}-c_k)$$

is divisible by the product $c_1c_2...c_n$.

Hướng dẫn:

Trước hết, hãy chứng minh: $c_a - c_b = (a-b)(a+b+1)$. Từ đó suy ra rằng $(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)...(c_{m+n}-c_k)$ là tích của n số nguyên liên tiếp $(m-k+1), ..., (m-k+n)$ nhân với tích của n số nguyên liên tiếp

$$(m-k+2), ..., (m-k+n+1).$$

Dùng công thức tổ hợp để chứng minh tích thứ nhất chia hết cho n!, tích thứ hai chia hết cho (n +1)!, để ý đến giả thiết m + k + 1 là số nguyên tố lớn hơn n + 1. Cuối cùng, hãy chứng minh $c_1c_2...c_n = n!(n+1)!$, từ đó suy ra kết quả.

***Bài 27.* (1967)**

Xem dãy số $\{c_n\}$ được xác định bởi: $c_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_8^n$, với mọi n = 1, 2, 3, ..., trong đó $a_1, a_2, ..., a_8$ là những số (thực) không đồng thời bằng không. Biết rằng trong các số hạng của dãy số $\{c_n\}$, có vô số số hạng bằng không. Tìm tất cả các số n sao cho $c_n = 0$.

$a_1, a_2, ..., a_8$ are reals, not all zero. Let $c_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_8^n$ for n = 1, 2, 3, ... Given that an infinite number of c_n are zero, find all n for which c_n is zero.

Hướng dẫn:

Các số $a_1, a_2, ..., a_8$ không đồng thời bằng không, nên

$$c_{2k} = a_1^{2k} + a_2^{2k} + ... + a_8^{2k} > 0 \ (k = 1, 2, 3, ...).$$

Vì vậy nếu $c_m = 0$ thì m phải là một số lẻ. Nếu $a_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., 8)$ thì $a_i^m \geq 0$ khi m lẻ, từ đây suy ra $c_m > 0$ khi m lẻ (vì có ít nhất một số $a_i > 0$), do đó $c_n \neq 0$ với mọi n, trái với giả thiết. Tương tự, cũng không thể xảy ra trường hợp $a_i \leq 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., 8$. Thành thử trong các số a_i, có những số dương và có những số âm. Có thể coi rằng số) thì hệ phương trình không thay đổi. Vì vậy có thể giả thiết:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4.$$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1\\(a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1\\(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1\\(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1.\end{cases}$$

Biến đổi bằng cách trừ các phương trình trên cho nhau ta được:

$$(a_1-a_2)(-x_1+x_2+x_3+x_4)=0$$

$$(a_2-a_3)(-x_1-x_2+x_3+x_4)=0$$

$$(a_3-a_4)(-x_1-x_2-x_3+x_4)=0,$$

thành thử hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3+x_4=0, & (1)\\-x_1-x_2+x_3+x_4=0, & (2)\\-x_1-x_2-x_3+x_4=0, & (3)\\(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1. & (4)\end{cases}$$

Cộng (1) với (3), thì suy ra : $x_1 = x_4$.

Cộng (1) với (2), ta được: $x_1 = x_3 + x_4$, vậy $x_3 = 0$.

Cộng 2) với (3), ta được: $x_1 + x_2 = x_4$, vậy $x_2 = 0$.

Mang các giá trị này vào (4), thì được : $x_1 = x_4 = \dfrac{1}{a_1 - a_4}$.

Như vậy với giả thiết $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, thì hệ phương trình đã cho có nghiệm: $x_2 = x_3 = 0, x_1 = x_4 = \dfrac{1}{a_1 - a_4}$. Nếu giả thiết trên không đúng, mà ta có chẳng hạn: $a_1 > a_4 > a_3 > a_1$, thì do nhận xét ở đầu bài giải, ta thấy rằng nghiệm của hệ phương trình là :

$$x_3 = x_4 = 0,\ x_1 = x_2 = \frac{1}{a_2 - a_1}.$$

Bài 26. **(1967)**

Cho các số tự nhiên k, m, n sao cho m + k + 1 là số nguyên tố lớn hơn n + 1. Đặt $c_s = s(s+1)$. Chứng minh rằng tích số

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\ldots(c_{m+n} - c_k)$$

chia hết cho $c_1c_2...c_n$.

Let k, m, n be natural numbers such that m + k+ 1 is a prime greater than n + 1. Let $c_s = s(s+1)$. Prove that:

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)...(c_{m+n} - c_k)$$

is divisible by the product $c_1c_2...c_n$.

Hướng dẫn:

Trước hết, hãy chứng minh: $c_a - c_b = (a-b)(a+b+1)$. Từ đó suy ra rằng $(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)...(c_{m+n} - c_k)$ là tích của n số nguyên liên tiếp $(m-k+1), ..., (m-k+n)$ nhân với tích của n số nguyên liên tiếp

$$(m-k+2), ..., (m-k+n+1).$$

Dùng công thức tổ hợp để chứng minh tích thứ nhất chia hết cho n!, tích thứ hai chia hết cho (n +1)!, để ý đến giả thiết m + k + 1 là số nguyên tố lớn hơn n + 1. Cuối cùng, hãy chứng minh $c_1c_2...c_n = n!(n+1)!$, từ đó suy ra kết quả.

***Bài 27.* (1967)**

Xem dãy số $\{c_n\}$ được xác định bởi: $c_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_8^n$, với mọi n = 1, 2, 3, ..., trong đó $a_1, a_2, ..., a_8$ là những số (thực) không đồng thời bằng không. Biết rằng trong các số hạng của dãy số $\{c_n\}$, có vô số số hạng bằng không. Tìm tất cả các số n sao cho $c_n = 0$.

$a_1, a_2, ..., a_8$ are reals, not all zero. Let $c_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_8^n$ for n = 1, 2, 3, ... Given that an infinite number of c_n are zero, find all n for which c_n is zero.

Hướng dẫn:

Các số $a_1, a_2, ..., a_8$ không đồng thời bằng không, nên

$$c_{2k} = a_1^{2k} + a_2^{2k} + ... + a_8^{2k} > 0 \ (k = 1, 2, 3, ...).$$

Vì vậy nếu $c_m = 0$ thì m phải là một số lẻ. Nếu $a_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., 8)$ thì $a_i^m \geq 0$ khi m lẻ, từ đây suy ra $c_m > 0$ khi m lẻ (vì có ít nhất một số $a_i > 0$), do đó $c_n \neq 0$ với mọi n, trái với giả thiết. Tương tự, cũng không thể xảy ra trường hợp $a_i \leq 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., 8$. Thành thử trong các số a_i, có những số dương và có những số âm. Có thể coi rằng

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_7 \geq a_8,$$

như vậy a_1 là số dương lớn nhất trong tất cả các số a_i dương và a_8 là số âm với trị số tuyệt đối lớn nhất trong tất cả các a_i âm. Ta hãy chứng tỏ rằng $|a_1| = |a_8|$, tức là $a_1 = -a_8$. Quả vậy, giả thử $|a_1| > |a_8|$. Ta có:

$$c_m = a_1^m \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^m + \ldots + \left(\frac{a_8}{a_1} \right)^m \right]. \quad (1)$$

Vì $\left|\frac{a_8}{a_1}\right| < 1$, nên với m khá lớn, ta sẽ có chẳng hạn $\left|\frac{a_8}{a_1}\right|^m < \frac{1}{8}$.

Nếu $a_i < 0$ thì $|a_i| \leq |a_8|$, do đó ta cũng có $\left|\frac{a_i}{a_1}\right|^m < \frac{1}{8}$, với các giá trị đã nói của m. Thành thử nếu m lẻ và m khá lớn, thì trong tổng số trong ngoặc vuông ở vế phải của (1), không có quá 7 số hạng âm, mỗi số hạng ấy có trị số tuyệt đối nhỏ hơn $1/8$, từ đó suy ra rằng tổng số trong ngoặc vuông là số khác 0, và do đó $c_m \neq 0$.

Tóm lại ta đã chứng minh rằng nếu $|a_1| > |a_8|$, thì khi m lẻ và m khá lớn, ta có $c_m \neq 0$; như vậy trong dãy số $\{c_n\}$ chỉ có một số hữu hạn những số hạng bằng không, trái với giả thiết. Tương tự ta cũng chứng minh được nếu $|a_1| < |a_8|$ thì cũng đi đến kết quả trái với giả thiết.

Thành thử $a_1 = -a_8$, do đó khi $c_m \neq 0$ lẻ ta có

$$a_1^m = -a_8^m, \text{ và } c_m = a_2^m + a_3^m + \ldots + a_7^m \text{ (m lẻ).}$$

Tiếp tục lập luận như trên với cặp a_2, a_7, ta chứng minh được rằng $a_2 = -a_7$, sau đó lại suy ra: $a_3 = -a_6$, $a_4 = -a_5$. Như vậy 8 số a_i chia ra làm 4 cặp số trái dấu nhau và ta có: $c_n = 0$ khi n lẻ.

***Bài 28.* (1967)**

Trong một cuộc thi đấu thể thao, tổng số huy chương là m, được phát trong n ngày thi đấu. Trong ngày thứ nhất, người ta phát 1 huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại. Ngày thứ hai, người ta phát 2 huy chương và một phần bảy số huy chương còn lại. Những ngày còn lại được tiếp tục và tương tự như thế. Ngày sau cùng, còn lại n huy chương để phát. Hỏi có tất cả bao nhiêu huy chương được thưởng và đã phát trong bao nhiêu ngày?

In a sports contest a total of m medals were awarded over n days. On the first day one medal and 1/7 of the remaining medals were awarded. On the second day two medals and 1/7 of the remaining medals were awarded, and so on. On the last day, the remaining n medals were awarded. How many medals were awarded, and over how many days?

Hướng dẫn:

Giả sử số huy chương còn lại khi bắt đầu ngày thi đấu thứ r là m_r. Khi đó, $m_1 = m$, $m_n = n$ và với mọi $k < n$ ta có:

$$\frac{6(m_k - k)}{7} = m_{k+1}.$$

Sau vài biến đổi, ta nhận được:

$$m = 1 + 2.\frac{7}{6} + 3\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \dots + n.\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$$

$$= 36.\left[1 - (n+1)\left(\frac{7}{6}\right)^n + n\left(\frac{7}{6}\right)^{n+1}\right] = 36 + (n-6)\frac{7^n}{6^{n-1}}.$$

Để ý rằng 6 và 7 nguyên tố cùng nhau, do đó 6^{n-1} phải chia hết $n-6$. Nhưng ta lại có $6^{n-1} > n-6$ nên n = 6 và m = 36.

***Bài 29.* (1968)**

Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho tích các chữ số của nó (viết dưới dạng thập phân) bằng $x^2 - 10x - 22$.

Find all natural numbers x the product of whose decimal digits is

$$x^2 - 10x - 22.$$

Hướng dẫn:

Giả thử tồn tại một số x thoả mãn điều kiện của bài toán. Vì tích các chữ số của x là một số nguyên không âm, nên

$$0 \le x^2 - 10x - 22 = [x - (5 - \sqrt{47})][x - (5 + \sqrt{47})].$$

Nhưng do $x > 0$ nên $x - (5 + \sqrt{47}) \ge 0$, vậy ta phải có

$$x \ge 5 + \sqrt{47} = 11,\dots . \qquad (1)$$

Giả thử số x có dạng $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, trong đó $a_0, a_1, \dots, a_n$ là những số nguyên, với $0 \le a_i \le 9$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ và $a_n \ne 0$. Thế thì

$$x^2 - 10x - 22 = a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n \le 9^n a_n < a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n = x,$$

vậy $x^2 - 11x - 22 < 0$, hay $\left(x - \frac{11-\sqrt{209}}{2}\right)\left(x - \frac{11+\sqrt{209}}{2}\right) < 0$.

Vì $x - \frac{11-\sqrt{209}}{2} > 0$, nên $x < \frac{11+\sqrt{209}}{2} = 12,...$. (2)

Số x là nguyên, nên từ (1) và (2) ta suy ra được rằng $x = 12$ (nếu nó tồn tại). Thử lại: $(12)^2 - 10.12 - 22 = 144 - 120 - 22 = 2 = 1.2$, do đó bài toán có nghiệm $x = 12$.

***Bài 30.* (1968)**

Cho hệ phương trình của các ẩn số $x_1, x_2, ... x_n$:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1, \end{cases}$$

trong đó a, b, c là những số thực và $a \neq 0$. Chứng minh rằng:

a) hệ không có nghiệm thực, nếu $(b-1)^2 - 4ac < 0$,

b) hệ có một nghiệm duy nhất, nếu $(b-1)^2 - 4ac = 0$,

c) hệ có hơn một nghiệm thực, nếu $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

a, b, c are real with a non-zero. x_1, x_2, ... , x_n satisfy the n equations:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1, \end{cases} .$$

Prove that the system has zero, 1 or >1 real solutions according as $(b-1)^2 - 4ac < 0$, $(b-1)^2 - 4ac = 0$ or $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

Hướng dẫn:

Trước hết ta hãy xét trường hợp $a > 0$. Đề toán gợi ý xét tam thức bậc hai : $f(z) = az^2 + (b-1)z + c$.

Biến đổi hệ phương trình đã cho thành hệ tương đương

$$\begin{cases} ax_1^2+(b-1)x_1+c=x_2-x_1 \\ ax_2^2+(b-1)x_2+c=x_3-x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_n^2+(b-1)x_n+c=x_1-x_n \end{cases} \qquad (1)$$

Đặt $y_1=x_2-x_1$, $y_2=x_3-x_2, y_3=x_4-x_3,\dots y_n=x_1-x_n$, thì hệ (1) có thể viết được dưới dạng : $y_i=f(x_i)\quad(i=1,2,\dots,n)$, (2)

và để ý rằng $\qquad y_1+y_2+\dots+y_n=0.$ (3)

a) Nếu $(b-1)^2-4ac<0$, thì ta có $f(z)>0$ với mọi z (vì $a>0$), nên $y_i>0\ (i=1,2,\dots,n)$, nhưng điều này mâu thuẫn với (3). Vì vậy trong trường hợp này, hệ (2) không thể có nghiệm thực.

b) Nếu $(b-1)^2-4ac=0$, thì tam thức $f(z)$ có một nghiệm duy nhất $z_0=\dfrac{1-b}{2a}$, và nếu $z\neq z_0$ thì $f(z)>0$. Từ (2) ta thấy rằng

$$y_i\geq 0\ (i=1,2,\dots,n),$$

do đó đẳng thức (3) chỉ xảy ra nếu : $y_1=y_2=\dots y_n=0$, vì vậy ta phải có $f(x_i)=0\ (i=1,2,\dots,n)$, hay $x_1=x_2=\dots=x_n=\dfrac{1-b}{2a}$.

c) Nếu $(b-1)^2-4ac>0$, tam thức $f(z)$ có hai nghiệm phân biệt:

$$z_1=\frac{1-b-\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a},\quad z_2=\frac{1-b+\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a}.$$

Rõ ràng khi đó hệ (1) (tức là hệ đã cho) được nghiệm đúng nếu ta lấy $x_1=x_2=\dots=x_n=z_1$, hoặc $x_1=x_2=\dots=x_n=z_2$. Như vậy trong trường hợp này, hệ đã cho ít nhất là hai nghiệm đã nêu.

Trường hợp $a<0$ cũng được xét tương tự.

***Bài 31.* (1968)**

Cho hàm số $f:R^+\to R$ thỏa điều kiện: với a là 1 số dương, ta có:

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)},\forall x\in R^+.$$

Chứng tỏ rằng f là hàm tuần hoàn. Cho ví dụ về một hàm như thế (không phải hàm hằng) khi $a=1$.

Let f be a real-valued function defined for all real numbers, such *that for some $a > 0$ we have* $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}, \forall x \in R^+$. *Prove that f is periodic, and give an example of such a non-constant f for a = 1.*

Hướng dẫn:

Từ điều kiện đã cho ta suy ra :

$$f(x+a) \geq \frac{1}{2}, \forall x \in R^+, \text{ từ đó } f(x) \geq \frac{1}{2}, x \in R^+.$$

Do vậy: $f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)} = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a)(1 - f(x+a))}$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x).$$

Vậy *f* tuần hoàn với chu kỳ $2a$.

Ví dụ: $f:[0,2) \to R$, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ khi } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} \text{ khi } 1 \leq x < 2 \end{cases}$.

Lúc đó, sử dụng điều kiện $f(x+2) = f(x)$ ta xác định được hàm *f* trên cả tập hợp R^+.

Bài 32. (1968)

Với mọi số tự nhiên n, tính tổng:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots,$$

trong đó, kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của số thực x.

For every natural number n evaluate the sum

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots,$$

where [x] denotes the greatest integer $\leq x$.

Hướng dẫn:

Với mọi số thực x ta có: $[x] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right]$. (*)

Thật vậy, nếu x = 2n + 1 + t, với n là số nguyên và $0 \leq t < 1$, ta có

$$[x] = 2n+1 \text{ và } \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = n+n+1$$

nên kết quả trên đúng khi x = 2n + 1 + t.

Tương tự như thế khi x = 2n + t.

Từ (*), ta suy ra với mọi số tự nhiên n, k:

$$\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^k}+1\right)\right]=\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

Đến đây, lần lượt cho k = 1, 2, 3, 4, ..., đồng thời để ý rằng khi k đủ lớn để $n<2^k$ thì $\left[\frac{n}{2^k}\right]=0$, ta suy ra tổng cần tính bằng n:

$$n=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots.$$

***Bài 33.* (1969)**

Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương a với tính chất: số $z=n^4+a$ không phải là số nguyên tố với mọi số nguyên dương n.

Prove that there are infinitely many positive integers a, such that n^4+a is not prime for any positive integer n.

Hướng dẫn:

Ta hãy chứng tỏ rằng nếu $a=4k^4$, với k là một số nguyên dương lớn hơn 1, thì với mọi số nguyên dương n, số $z=n^4+a$ luôn luôn là một hợp số. Quả vậy, khi đó:

$$n^4+a=n^4+4k^4=n^4+4n^2k^2+4k^4-4n^2k^2$$
$$=(n^2+2k^2)^2-(2nk)^2=(n^2+2nk+2k^2)(n^2-2nk+2k^2).$$

Để ý rằng:

$$n^2+2nk+2k^2=(n+k)^2+k^2>k^2>1,$$
$$n^2-2nk+2k^2=(n-k)^2+k^2\ge k^2>1,$$

như vậy số z được phân thành tích của hai số nguyên dương lớn hơn 1, tức là z không phải là một số nguyên tố.

***Bài 34.* (1969)**

Cho hàm số

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos[a_2+x)+\frac{1}{4}[a_3+x)+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos[a_n+x),$$

với a_i là các hằng số thực và x là biến thực. Nếu $f(x_1)=f(x_2)=0$, chứng minh rằng x_1-x_2 là bội của π.

Let the function

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos[a_2+x)+\frac{1}{4}[a_3+x)+...+\frac{1}{2^{n-1}}\cos[a_n+x),$$

where a_i are real constants and x is a real variable. If $f(x_1)=f(x_2)=0$, *prove that* x_1-x_2 *is a multiple of* π.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta thấy f không đồng nhất bằng 0, bởi vì:

$$f(-a_1)=1+\frac{1}{2}\cos[a_2-a_1)+....>1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-...>0.$$

Sử dụng công thức khai triển cho $\cos(x+y)$, ta thu được:

$f(x)=b\cos x+c\sin x$, với $b=\cos a_1+\frac{1}{2}\cos a_2+...+\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n$, và

$$c=-\sin a_1-\frac{1}{2}\sin a_2-...-\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n.$$

Ta có b và c không đồng thời bằng 0, vì f không đồng nhất bằng 0, do đó

$$f(x)=\sqrt{b^2+c^2}.\cos(d+x),\text{ với }\cos d=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\text{ và }\sin d=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Từ đó, nghiệm của $f(x)=0$ là $m\pi+\frac{\pi}{2}-d$, suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 35.* (1969)**

Cho n điểm trong mặt phẳng, với n > 4, trong số đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất $(n-3)(n-4)/2$ tứ giác lồi tạo thành có đỉnh nằm trong số n điểm đó.

Given n>4 points in the plane, no three collinear. Prove that there are at least $(n-3)(n-4)/2$ *convex quadrilaterals with vertices amongst the n points.*

Hướng dẫn:

Trước tiên, ta xét 5 điểm bất kì, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Ta vạch một bao lồi từ 5 điểm đó. Nếu bao lồi này có hơn 3 điểm thì hiển nhiên có ít nhất 1 tứ giác lồi. Nếu chỉ gồm 3 điểm, chẳng hạn A, B, C, thì hai điểm D, E còn lại ắt phải nằm trong tam giác ABC. Khi đó, có hai đỉnh của tam giác ABC nằm cùng phía đối với đường thẳng DE, và cùng với D, E, hai đỉnh đó tạo thành một tứ giác lồi. Như vậy, mệnh đề cần chứng minh đúng với n = 5 (để ý $\frac{(5-3)(5-4)}{2}=1$).

Xét n điểm với $n > 5$. Vì không có 3 điểm nào thẳng hàng nên số tất cả các cách chọn n điểm như trên là:

$$C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}.$$

Mỗi cách chọn này cho ta ít nhất 1 tứ giác lồi; tuy nhiên, bất kì tứ giác lồi nào trong số đó cũng có thể được lập từ $(n-4)$ tập hợp khác nhau gồm 5 điểm nói trên, do vậy, có ít nhất

$$\frac{1}{n-4}.C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}$$

số tất cả các tứ giác lồi được thành lập từ n điểm đã cho.

Để kết thúc chứng minh, ta sẽ chứng tỏ rằng:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120} \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2}, \ \forall n \geq 5.$$

Điều phải chứng minh này tương đương với:

$n(n-1)(n-2) \geq 60(n-4) \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - 60(n-4) \geq 0.$

Dễ dàng thấy rằng các số n = 5 và n = 6 là nghiệm của phương trình $n(n-1)(n-2) - 60(n-4) = 0$, do đó ta có thể phân tích thành nhân tử như sau: $n(n-1)(n-2) - 60(n-4) = (n-5)(n-6)(n+8)$.

Với mọi n nguyên dương và ≥ 5, lập bảng xét dấu, dễ thấy dấu của biểu thức $(n-5)(n-6)(n+8)$ cũng là dấu của $(n-5)(n-6)$, từ đó ta được $(n-5)(n-6) = 0$ khi n = 5, 6; $(n-5)(n-6) > 0$ khi $n > 6$, suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 36.* (1969)**

Cho các số thực $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ thoả mãn các điều kiện $x_1 > 0, x_2 > 0$ và $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{z_2y_2 - z_2^2}.$$

Thiết lập điều kiện cần và đủ để xảy ra dấu đẳng thức.

Given real numbers $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, satisfying $x_1 > 0, x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, prove that:

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{z_2y_2 - z_2^2}.$$

Give necessary and sufficient conditions for equality.

Hướng dẫn:

Xét các tam thức bậc hai :

$$P_1(X) = x_1X^2 - 2z_1X + y_1, \quad P_2(X) = x_2X^2 - 2z_2X + y_2,$$

$$P(X) = P_1(X) + P_2(X) = (x_1 + x_2)X^2 - 2(z_1 + z_2)X + (y_1 + y_2).$$

Đặt $D_1 = x_1y_1 - z_1^2$; $D_2 = x_2y_2 - z_2^2$, $D = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2$ thì P_1, P_2, P có biệt số lần lượt là $-D_1$, $-D_2$ và D. Để ý rằng

$$P_1(X) = x_1\left[\left(X - \frac{z_1}{x_1}\right)^2 + \frac{x_1y_1 - z_1^2}{x_1^2}\right],$$

vì vậy với mọi giá trị X, ta đều có $P_1(X) \geq \frac{x_1y_1 - z_1^2}{x_1} = \frac{D_1}{x_1}$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $X = \frac{z_1}{x_1}$. Tương tự : $P_2(X) > \frac{D_2}{x_2}$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $X = \frac{z_2}{x_2}$, và $P(X) \geq \frac{D}{x_1 + x_2}$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi

$$X = \frac{z_1 + z_2}{x_1 + x_2}.$$

Nhưng với mọi giá trị X ta có

$$P(X) = P_1(X) + P_2(X) \geq \frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2}$$

nên khi $X = \frac{z_1 + z_2}{x_1 + x_2}$ thì được $\frac{D}{x_1 + x_2} \geq \frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2}$, (1)

dấu đẳng thức chỉ xảy ra nếu $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$ ($P_1(X)$ và $P_2(X)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại cùng một điểm X).

Từ (1) suy ra (sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số):

$$\frac{8}{D} \leq \frac{8}{(x_1 + x_2)\left(\frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2}\right)} \leq \frac{8}{2\sqrt{x_1x_2}.2\sqrt{\frac{D_1}{x_1}.\frac{D_2}{x_2}}} = \frac{2}{\sqrt{D_1D_2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{D_1}.\frac{1}{D_2}} \leq \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}. \quad (2)$$

Để ở (2) có dấu đẳng thức, thì ở (1) phải có dấu đẳng thức và khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta phải có dấu đẳng thức, tức là :

$$\frac{z_1}{x_1}=\frac{z_2}{x_2},\ x_1=x_2,\ D_1=D_2,$$

hay $x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2$.

***Bài 37.* (1970)**

Giả sử a,b,n là những số nguyên lớn hơn 1. Các số a,b là cơ số của hai hệ đếm. Các số A_n và B_n có cùng cách biểu diễn $\overline{x_nx_{n-1}...x_1x_0}$ trong các hệ đếm với cơ số a và b tương ứng, ngoài ra $x_n\neq 0$ và $x_{n-1}\neq 0$. Gọi A_{n-1} và B_{n-1} là các số suy ra từ A_n và B_n sau khi xoá x_n. Chứng minh rằng $a>b$ khi và chỉ khi

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

Suppose that a, b, n are intergers which are greater than 1. We have $0\leq x_i<b$ for i = 0, 1, ... , n and $x_n\neq 0$, $x_{n-1}\neq 0$. $\overline{x_nx_{n-1}...x_1x_0}$ represents the number A_n base a and B_n base b, while $\overline{x_{n-1}...x_1x_0}$ represents the number A_{n-1} base a and B_{n-1} base b, prove that $a>b$ iff

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

Hướng dẫn:

Theo định nghĩa, ta có :

$$A_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}x_ka^k,\ A_n=\sum_{k=0}^{n}x_ka^k,\ B_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}x_kb^k,\ B_n=\sum_{k=0}^{n}x_kb^k.$$

Bất đẳng thức trong đề bài tương đương với

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}x_ka^k}{\sum_{k=0}^{n}x_ka^k}<\frac{\sum_{k=0}^{n-1}x_kb^k}{\sum_{k=0}^{n}x_kb^k},\ \text{hay}\ \frac{x_na^n}{\sum_{k=0}^{n}x_ka^k}>\frac{x_nb^n}{\sum_{k=0}^{n}x_kb^k},\ \text{tức là}$$

$$\frac{x_na^n}{x_nb^n}>\frac{x_0+x_1a+x_2a^2+...+x_na^n}{x_0+x_1b+x_2b^2+...+x_nb^n}. \qquad (1)$$

Ta hãy chứng minh rằng với giả thiết $x_{n-1}\neq 0, x_n\neq 0$, thì bất đẳng thức (1) tương đương với $a>b$. Muốn vậy, trước hết bạn đọc hãy chứng minh mệnh đề sau: *nếu* A,B,C,D *là 4 số dương thì các bất đẳng thức*

$$\frac{A}{B} < \frac{C}{D} \text{ và } \frac{A+C}{B+D} < \frac{C}{D}$$

tương đương nhau.

Bây giờ ta để ý rằng bất đẳng thức $a > b$ tương đương với:

$$\frac{1}{1} < \frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2} < \ldots < \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} < \frac{a^n}{b^n}$$

hay (nếu có x_i nào bằng 0, thì ta loại tỉ số tương ứng):

$$\frac{x_0}{x_0} < \frac{x_1 a}{x_1 b} < \frac{x_2 a^2}{x_2 b^2} < \ldots < \frac{x_{n-1} a^{n-1}}{x_{n-1} b^{n-1}} < \frac{x_n a^n}{x_n b^n}.$$

Áp dụng mệnh đề trên nhiều lần, thì được bất đẳng thức (1), tức là có điều phải chứng minh.

***Bài 38.* (1970)**

Cho dãy số thực $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ thoả mãn điều kiện:

$$1 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots . \quad (1)$$

Dãy số $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$, được xác định như sau:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Chứng minh rằng:

a) $0 \le b_n < 2$ với mọi n;

b) Với mọi số C cho trước, $0 \le C < 2$, đều tồn tại một dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ thoả mãn điều kiện (1) sao cho $b_n > C$ với vô số chỉ số n.

The real numbers $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ *satisfy*

$$1 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots . \quad (1)$$

$b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$ *are defined by* $b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$.

a) Prove that $0 \le b_n < 2$, $\forall n$.

b) Given C satisfying $0 \le C < 2$, *prove that we can find* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *satisfying the condition (1) so that* $b_n > C$ *for all sufficie- -ntly large n.*

Hướng dẫn:

a) Với mọi $k \ge 1$, ta đều có $1 \le a_{k-1} \le a_k$, vì vậy

$$1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\ge 0 \text{ và } b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}\ge 0$$

với mọi n. Mặt khác:

$$\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}}=\frac{(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})(\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k-1}})}{a_k\sqrt{a_k}}$$

$$\le 2\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}}}{a_k}\le 2\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k-1}}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right).$$

Do đó $$b_n\le 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<\frac{2}{\sqrt{a_0}}=2.$$

b) Nếu số C thoả mãn điều kiện $0\le C<2$, thì ta có thể chọn được một số q sao cho $C<q<2$. Phương trình

$$x(x+1)=q \Leftrightarrow x^2+x-q=0$$

có hai nghiệm trái dấu (vì tích của hai nghiệm bằng $-q<0$); nghiệm dương p của phương trình ấy phải thoả mãn điều kiện $p<1$, vì nếu không thì: $p(p+1)\ge 1(1+1)=2>q$.

Dãy số $a_n=\frac{1}{p^{2n}}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ thoả mãn điều kiện

$$1=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots,$$

đồng thời $\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}=(1-p^2)p^k$, vì vậy

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}=(1-p^2)\sum_{k=1}^{n}p^k=\frac{(1-p^2)p(1-p^n)}{1-p}$$

$$=p(1+p)(1-p^n)=q(1-p^n)=q-qp^n.$$

Vì $0<p<1$, nên $\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0$ do đó $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=q$, mà $q>C$, nên nếu n đủ lớn thì sẽ có $b_n>C$.

***Bài 39*. (1970)**

Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất sau: có thể chia tập hợp 6 số $\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$ thành hai tập hợp, sao cho tích tất cả các số của tập hợp này bằng tích tất cả các số của tập hợp kia.

Find all positive integers n such that the set

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

can be partitioned into two subsets so that the product of the numbers in each subset is equal.

Hướng dẫn:

Ta hãy để ý rằng trong 5 số nguyên liên tiếp phải có một (và chỉ một) số chia hết cho 5. Vì vậy nếu tập hợp 6 số $\{n, n+1, ..., n+5\}$ có tính chất đã nêu trong đầu bài, thì trong tập hợp ấy phải có đúng hai số chia hết cho 5, dĩ nhiên đó phải là các số n và $n+5$, còn các số $n+1, n+2, n+3, n+4$ thì không chia hết cho 5.

Mặt khác, nếu trong 6 số của tập hợp trên chia hết cho một số nguyên tố $p \geq 7$, thì 5 số còn lại sẽ không chia hết cho p, và tập hợp không có tính chất đòi hỏi. Từ đây đặc biệt suy ra rằng các số $n+1$, $n+2$, $n+3$ và $n+4$ chỉ chứa các thừa số nguyên tố 2 và 3, tức là:

$$n+1 = 2^{k_1}3^{l_1}, \qquad n+2 = 2^{k_2}3^{l_2},$$

$$n+3 = 2^{k_3}3^{l_3}, \qquad n+4 = 2^{k_4}3^{l_4},$$

trong đó $k_1, l_1, ..., k_4, l_4$ là những số nguyên không âm.

Nếu $n+1$ (và do đó $n+4$) chia hết cho 3, thì $n+2$ và $n+3$ không chia hết cho 3, vậy $l_2 = l_3 = 0$ và $n+2 = 2^{k_2}$, $n+3 = 2^{k_3}$, nhưng như thế thì $n+2$ và $n+3$ là hai số nguyên liên tiếp mà lại là hai số chẵn, điều này vô lí.

Lập luận tương tự, ta thấy rằng nếu $n+2$ chia hết cho 3, hoặc nếu $n+3$ chia hết cho 3, thì ta vẫn gặp mâu thuẫn.

Mâu thuẫn ấy chứng tỏ không có số nguyên dương n nào thoả mãn điều kiện bài toán.

***Bài 40.* (1970)**

Trong mặt phẳng cho 100 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác được tạo thành từ 100 điểm đó, có không quá 70% các tam giác nhọn.

Given 100 coplanar points, no 3 collinear, prove that at most 70% of the triangles formed by the points have all angles acute.

Hướng dẫn:

Từ 4 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng, nhiều lắm là có 3 tam giác nhọn. Từ kết quả này, suy ra với 5 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng, ta nhận được 10 tam giác và có không quá 7 tam giác nhọn.

Với 10 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng, số cực đại các tam giác nhọn tạo thành là: số các tập con 4 điểm nhân cho 3 rồi chia cho số các tập con 4 điểm chứa 3 điểm cho trước. Trong khi đó, số tất cả các tam giác tạo thành cũng có biểu thức tương tự như trên nhưng thay vì nhân 3 ta nhân cho 4. Do vậy số các tam giác nhọn chiếm không quá 3/4 số tất cả các tam giác (đối với 10 điểm).

Lí luận tương tự, ta xét 100 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số cực đại các tam giác nhọn tạo thành là: số các tập con 5 điểm nhân cho 7 rồi chia cho số các tập con 5 điểm chứa 3 điểm cho trước. Trong khi đó, số tất cả các tam giác tạo thành cũng có biểu thức tương tự như trên nhưng thay vì nhân 7 ta nhân cho 10. Do vậy số các tam giác nhọn chiếm không quá 7/10 số tất cả các tam giác tạo thành, điều phải chứng minh.

***Bài 41.* (1971)**

Xem mệnh đề S(n):

"*Với mọi số thực* $a_1, a_2, \dots, a_n$, *đều xảy ra bất đẳng thức*:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\dots(a_2 - a_n) +$$
$$\dots\dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}) \geq 0".$$

Chứng minh rằng mệnh đề đúng khi $n = 3$ và $n = 5$, mệnh đề sai với mọi giá trị khác của n $(n > 2)$.

Let S(n) be the proposition that

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\dots(a_2 - a_n) +$$
$$\dots\dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}) \geq 0$$

happens for all real $a_1, a_2, \dots, a_n$. *Prove that S(n) is true for n = 3 and 5, but for no other n > 2.*

Hướng dẫn:

a) Ta hãy xét trường hợp $n = 3$. Các số a_1, a_2, a_3 có vai trò như nhau, nên có thể giả thiết $a_1 \geq a_2 \geq a_3$. (1)

Khi đó dễ dàng biến đổi:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$
$$= (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)(a_2 - a_3).$$

Biểu thức cuối cùng không âm do giả thiết (1).

Vậy mệnh đề đúng khi $n = 3$.

b) Ta xét trường hợp $n = 5$. Cũng như trên, có thể giả thiết

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5. \quad (2)$$

Thế thì:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_z - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)$$

$$= (a_1 - a_2)[(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) - (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)]. \quad (3)$$

Do (2) ta có $a_1 - a_2 \geq 0$, và biểu thức trong ngoặc vuông cũng không âm bởi vì : $a_1 - a_3 \geq a_2 - a_3 \geq 0, a_1 - a_4 \geq a_2 - a_4 \geq 0,\ a_1 - a_5 \geq a_2 - a_5 \geq 0$.

Như vậy biểu thức ở vế trái của (3) là không âm. Ta lại có, do (2):

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)$$

$$= (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) \geq 0. \quad (4)$$

Cuối cùng,

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4)$$

$$= (a_4 - a_5)[(a_1 - a_5)(a_2 - a_5)(a_3 - a_5) - (a_1 - a_4)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)]. \quad (5)$$

Theo (2), ta có $a_4 - a_5 \geq 0$ và biểu thức trong ngoặc vuông cũng không âm bởi vì :

$$a_1 - a_5 \geq a_1 - a_4 \geq 0, a_2 - a_5 \geq a_2 - a_4 \geq 0,\ a_3 - a_5 \geq a_3 - a_4 \geq 0.$$

Vậy biểu thức ở vế trái của (5) là không âm. Thành thử tổng của các vế trái của (3), (4), (5) không âm, và mệnh đề đúng khi $n = 5$.

c) Ta hãy xét trường hợp n chẵn $(n \geq 2)$. Lấy

$$a_1 = -1, a_2 = a_3 = ... = a_n = 0.$$

Khi đó, vì n chẵn, trong tổng ở vế trái của bất đẳng thức, chỉ có số hạng đầu tiên là khác 0, số hạng này bằng

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)...(a_1 - a_n) = (-1)^{n-1} < 0.$$

Vậy bất đẳng thức không đúng, tức là mệnh đề không đúng nếu n chẵn.

d) Cuối cùng xét trường hợp n lẻ với $n \geq 7$. Lấy

$$a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = a_4 = 2,\ a_5 = a_6 = ... = a_n = 0.$$

Khi đó, trong tổng nói trên, cũng chỉ có số hạng đầu tiên là khác 0 và bằng $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)...(a_1 - a_n) = -1 < 0$.

Vậy mệnh đề cũng không đúng trong trường hợp này.

Bài toán được chứng minh.

Bài 42. **(1971)**

Chứng minh rằng ta có thể tìm được một tập vô hạn các số nguyên dương có dạng $2^n - 3$, trong đó n là số nguyên dương, sao cho mỗi cặp số bất kì trong tập hợp đó đều nguyên tố cùng nhau.

Prove that we can find an infinite set of positive integers of the form $2^n - 3$ (where n is a positive integer) every pair of which are relatively prime.

Hướng dẫn:

Bài toán được giải nếu ta chứng minh được rằng hễ có một tập gồm r phần tử như đã nói ở đề bài thì ta mở rộng ra được một tập như thế mà có r + 1 phần tử. Giả sử ta có tập hợp gồm r số nguyên tố cùng nhau đôi một: $2^{n_1} - 3, 2^{n_2} - 3, ..., 2^{n_r} - 3$. Đặt

$$m = (2^{n_1} - 3)(2^{n_2} - 3)...(2^{n_r} - 3),$$

ta đi tìm số $n = n_{r+1}$ sao cho $2^n - 3$ nguyên tố cùng nhau với tất cả các nhân tử của m, điều này có nghĩa $2^n - 1$ chia hết cho m.

Trong các số $2^0, 2^1, ..., 2^m$, chắc chắn phải có 2 số có quan hệ đồng dư mod m, nghĩa là tồn tại m_1, m_2, $m_1 > m_2$ để $2^{m_1} \equiv 2^{m_2}$ (mod m), do m là số lẻ, ta suy ra $2^{m_1 - m_2} - 1 \equiv 0 \pmod m$.

Vì vậy, ta chọn $n = n_{r+1} = m_1 - m_2$, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 43. **(1971)**

Cho $A = (a_{ij})$, với $i, j = 1, 2, ..., n$, là một ma trận với các hệ số a_{ij} là những số nguyên không âm. Với mọi i, j mà $a_{ij} = 0$, tổng các phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j bé nhất là bằng n. Chứng minh rằng tổng các phần tử của ma trận có giá trị bé nhất là $n^2/2$.

Let $A = (a_{ij})$, where $i, j = 1, 2, \ldots, n$, be a square matrix with all a_{ij} non-negative integers. For each i, j such that $a_{ij} = 0$, the sum of the elements in the ith row and the jth column is at least n. Prove that the sum of all the elements in the matrix is at least $n^2/2$.

Hướng dẫn:

Gọi x là tổng các phần tử của hàng hoặc cột mà tổng này bé nhất (so với các hàng hay cột khác).

Nếu $x \geq \frac{n}{2}$ thì coi như bài toán giải xong, do vậy ta giả sử $x < \frac{n}{2}$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử đó là một hàng có tổng các phần tử bé nhất (do có thể biến đổi hàng và cột), và gọi đó là hàng H. Nếu số các phần tử khác 0 trong hàng H này là y thì ta có $y < \frac{n}{2}$, do mỗi phần tử khác 0 bé nhất là 1.

Bây giờ ta chuyển sang tính tổng các cột bằng cách dựa vào hàng này. Rõ ràng y cột này (mỗi cột có chứa phần tử khác 0 của H) có tổng mỗi cột bé nhất là x (theo định nghĩa trên của x). Ta cũng có (n - y) cột (mỗi cột chứa phần tử 0 của H) có tổng mỗi cột bé nhất là n - x (chú ý giả thiết). Từ đó ta suy ra tổng các phần tử của ma trận ít nhất phải là

$$xy + (n-x)(n-y) = \frac{n^2}{2} + \frac{(n-2x)(n-2y)}{2} > \frac{n^2}{2}.$$

Bạn đọc có thể xét như một ví dụ với ma trận (a_{ij}) mà

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ nếu i và j cùng chẵn hoặc cùng lẻ,} \\ a_{ij} = 0 \text{ trong trường hợp khác.} \end{cases}$$

***Bài 44.* (1972)**

Từ các số 10, 11, 12, ..., 99, ta thành lập một tập con S tùy ý gồm 10 số phân biệt. Chứng minh rằng từ tập hợp S này có thể trích ra được 2 tập con rời nhau (có giao bằng rỗng) mà tổng giá trị các phần tử ở hai tập con đó bằng nhau.

Given any set S of ten distinct numbers in the range 10, 11, ... , 99, prove that we can always find two disjoint subsets from S with the same sum.

Hướng dẫn:

Số các tập con khác rỗng của tập hợp S là $2^{10} - 1 = 1023$.

Trong tất cả các tập con đó, tổng giá trị các phần tử ở mỗi tập hợp lớn nhất là 90 + 91 + ... + 99 = 945. Từ đó, suy ra rằng trong số 1023 tập con đó phải tồn tại 2 tập A và B khác nhau sao cho tổng giá trị các phần tử của A bằng tổng giá trị các phần tử của B.

Đặt M = A \ B và N = B \ A. Dễ dàng chứng minh được rằng M, N là các tập con khác rỗng, rời nhau của S và tổng giá trị các phần tử của M bằng tổng giá trị các phần tử của N.

***Bài 45.* (1972)**

Với mọi số nguyên không âm m và n, chứng minh rằng:

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \text{ là một số nguyên dương.}$$

Prove that for any non-negative integers m and n,

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \textit{ is a positive multiple integer.}$$

Hướng dẫn:

Để giải bài toán, ta chỉ việc chứng tỏ với mọi số nguyên tố p, số các thừa số p chứa trong tích $(2m)!(2n)!$ không nhỏ hơn số các thừa số p chứa trong tích $m!n!(m+n)!$. Như đã biết, số các thừa số p chứa trong tích $(2m)!(2n)!$ là:

$$S_1 = \left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2m}{p^2}\right] + \left[\frac{2m}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] + \ldots$$

Còn số các thừa số p chứa trong tích $m!n!(m+n)!$ bằng :

$$S_2 = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \left[\frac{m}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$
$$+ \left[\frac{m+n}{p}\right] + \left[\frac{m+n}{p^2}\right] + \left[\frac{m+n}{p^3}\right] + \ldots$$

Bất đẳng thức $S_1 \geq S_2$ suy ra từ bất đẳng thức:

$$\left[\frac{2m}{p^k}\right] + \left[\frac{2n}{p^k}\right] \geq \left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{m+n}{p^k}\right],$$

với mọi k. Bất đẳng thức cuối cùng là hệ quả của một mệnh đề về *phần nguyên* tổng quát hơn (xem phần *kiến thức bổ trợ*).

***Bài 46.* (1972)**

Cho *n* là số tự nhiên lớn hơn 4, chứng minh rằng mọi tứ giác nội tiếp đều có thể được phân chia làm *n* tứ giác nội tiếp.

Given n > 4, prove that every cyclic quadrilateral can be dissected into n cyclic quadrilaterals.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta nhận xét rằng tứ giác nội tiếp ABCD luôn luôn có thể được phân chia thành 4 tứ giác nội tiếp. Thật vậy, ta lấy P tùy ý bên trong tứ giác ABCD, gọi K là một điểm trên cạnh AB. Nối PK. Tiếp đến, ta lấy trên cạnh BC một điểm L sao cho $K\hat{P}L = 180^0 - \hat{B}$ (điều này chứng tỏ tứ giác KPLB nội tiếp). Ta lại lấy M trên CD sao cho $L\hat{P}M = 180^0 - \hat{C}$; sau đó, lấy N trên AD sao cho $M\hat{P}N = 180^0 - \hat{D}$. Lúc đó, dễ dàng chứng minh được rằng $N\hat{P}K = 180^0 - \hat{A}$.

Tuy nhiên, ta còn phải chứng minh rằng các điểm P, L, M lấy như trên thoả mãn ý định của chúng ta, nghĩa là nó phải nằm trên các cạnh như đã nói. Điều này tuỳ thuộc vào cách lấy điểm các K và P mà phần trình bày sau đây sẽ rõ.

Rõ ràng là, nếu tứ giác nội tiếp ABCD có hai cạnh song song với nhau (AB // CD) thì bài toán xem như được giải quyết, bởi vì lúc đó, ta có thể chia nhỏ tứ giác ABCD thành *n* tuỳ ý tứ giác (cũng nội tiếp) bằng *n* đường thẳng song song AB // CD. Vì vậy, bài toán sẽ được giải xong nếu ta chọn các điểm K và P thế nào cho một trong các tứ giác nội tiếp mới thành lập có hai cạnh song song nhau. Điều này thì dễ, bởi K tuỳ ý, do đó, ta lấy PK // AD, lúc này, chắc chắn PL // CD vì: $K\hat{P}L = 180^0 - \hat{B} = \hat{D}$.

Vấn đề còn lại là xem xét sao cho các điểm K, L, M, N tương ứng nằm trên các cạnh AB, BC, CD, AD.

Trước hết, xét K và L. K không thể nằm trên AD vì ta có PK // AD. Như thế, chỉ cần lấy P đủ gần điểm D thì K sẽ nằm trên cạnh AB (tránh tình trạng đường PK cắt BC). Tương tự như thế, ta cũng lấy P đủ gần D để bảo đảm cho L nằm trên cạnh BC. Lúc đó, ta giả sử cả M lẫn N đều nằm trên AD, thế thì bằng cách giữ cho K cố định, ta kéo P tiến về gần sát với CD, N sẽ dịch chuyển lên CD, để lại M nằm trên AD.

Bài toán đã được chứng minh.

***Bài 47.* (1972)**

Cho f và g là các hàm số xác định trên R, nhận giá trị trên R. Với mọi x và y, giả sử $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$. Ngoài ra, f không đồng nhất bằng 0 và $|f(x_1)| \le 1, \forall x \in R$. Chứng minh rằng: $|g(x)| \le 1, \forall x \in R$.

f and g are real-valued functions defined on the real line. For all x and y, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$. f is not identically zero and $|f(x_1)| \le 1, \forall x \in R$. Prove that $|g(x)| \le 1, \forall x \in R$.

Hướng dẫn:

Gọi k là cận trên nhỏ nhất của $|f(x)|$.

Giả sử $|g(y)| > 1$. Lấy bất kì x với $|f(x)| > 0$, ta có:

$$2k \ge |f(x+y)| + |f(x-y)| \ge |f(x+y) + f(x-y)| = 2|g(y)||f(x)|,$$

do đó $|f(x)| < k/|g(y)|$. Nói cách khác, $k/|g(y)|$ là một cận trên của $|f(x)|$ mà lại bé hơn k. Điều này mâu thuẫn.

***Bài 48.* (1972)**

Tìm tất cả các nghiệm thực dương của hệ:

$$\begin{cases}(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \le 0\\(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \le 0\\(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \le 0\\(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \le 0\\(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \le 0.\end{cases}$$

Find all positive real solutions to

$$\begin{cases}(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \le 0\\(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \le 0\\(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \le 0\\(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \le 0\\(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \le 0.\end{cases}.$$

Hướng dẫn:

Trước hết, ta có nhận xét rằng hệ đã cho không thay đổi nếu ta thực hiện một phép hoán vị vòng quanh của các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Như vậy, nếu (a,b,c,d,e) là một nghiệm, thì chẳng hạn (b,c,d,e,a) cũng là một nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của hệ, ta hãy phân loại các nghiệm theo hai loại :

I. Trong nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ có ít nhất một số bằng 0.

II. Trong nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ không có số nào bằng 0.

Ta hãy xét từng trường hợp.

I. Do nhận xét đã nêu, ta hãy tìm nghiệm trong đó $x_1 = 0$.

Từ bất phương trình thứ hai và thứ tư, suy ra:

$$x_2x_3 = x_4x_5 = 0.$$

Khi đó các bất phương trình thứ nhất, thứ ba, thứ năm trở thành

$$0 \geq -x_3x_5(x_2^2 - x_3x_5) = -x_2^2x_3x_5 + x_3^2x_5^2 = x_3^2x_5^2,$$

$$0 \geq x_3^2x_4^2 - x_2x_3^2x_5 - x_2x_4^2x_5 + x_2^2x_5^2 = x_3^2x_4^2 + x_2^2x_5^2,$$

$$0 \geq -x_2x_4(x_5^2 - x_2x_4) = -x_2x_4x_5^2 + x_2^2x_4^2 = x_2^2x_4^2.$$

Như vậy: $x_2x_4 = x_2x_5 = x_3x_4 = x_3x_5 = 0$.

Thành thử $x_ix_j = 0$ với $i \neq j$ $(i, j = 1,2,3,4,5)$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi trong năm số x_i, có bốn số bằng 0, còn số kia thì tuỳ ý.

II. Trong trường hợp này, ta hãy nhận xét thêm rằng nếu $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ là một nghiệm, thì $(x_1, tx_2, tx_3, tx_4, tx_5)$ cũng là một nghiệm, với t tuỳ ý.

Bây giờ ta hãy để ý rằng theo bất phương trình thứ nhất, tích x_3x_5 phải nằm giữa hai số dương x_1^2, x_2^2, vậy $x_3x_5 > 0$, tức là x_3, x_5 có cùng dấu. Tương tự, theo bất phương trình thứ ba, suy ra rằng x_5, x_2 có cùng dấu. Lại theo bất phương trình thứ năm, suy ra rằng x_2, x_4 có cùng dấu. Cuối cùng, theo bất phương trình thứ hai, suy ra rằng x_4, x_1 có cùng dấu. Thành thử cả 5 số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 có cùng dấu, và do nhận xét vừa nêu ở trên, ta có thể giả thiết rằng $x_i > 0$ $(i = 1,2,3,4,5)$.

Để tiếp tục tìm nghiệm, ta có thể giả thiết (do nhận xét đầu tiên đã nêu) rằng x_1 là số nhỏ nhất trong các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Từ các bất phương trình thứ nhất và thứ năm, suy ra:

$$x_3x_5 \leq x_2^2,\ x_2x_4 \leq x_5^2, \text{ hay } \frac{x_3}{x_2} \leq \frac{x_2}{x_5} \leq \frac{x_5}{x_4}. \tag{1}$$

Ta hãy so sánh x_2 và x_5. Hai khả năng có thể xảy ra:

- $x_2 \leq x_5$. Từ (1) ta có : $x_1 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_5$. (2)

Từ bất phương trình thứ hai, suy ra: $x_3^2 \leq x_4x_1 \leq x_2^2$, như vậy phải có $x_1 \leq x_3 \leq x_4$.

Thành thử x_1, x_3 đều nhỏ hơn hay bằng x_4 và x_5, do đó theo bất phương trình thứ tư, suy ra rằng hoặc $x_1x_3 = x_4^2$, hoặc $x_1x_3 = x_5^2$.

Do đó:

a) Nếu $x_1x_3 = x_4^2$ thì $x_1 = x_3 = x_4$. Từ phương trình thứ ba, suy ra $x_2x_5 = x_3^2$, vậy $x_2 = x_5 = x_3$. Suy ra cả 5 số x_i đều bằng nhau.

b) Nếu $x_1x_3 = x_5^2$ thì theo (2) ta có $x_1 = x_3 = x_5 = x_2$. Từ bất phương trình thứ năm, suy ra $x_4 = x_1$. Do đó cả 5 số x_i đều bằng nhau.

- $x_5 \le x_2$. Từ (1) suy ra: $x_1 \le x_4 \le x_5 \le x_2$. (3)

Theo bất phương trình thứ tư, ta có $x_4^2 \le x_1x_3 \le x_5^2$, như vậy ta cũng có: $x_1 \le x_4 \le x_3$. Thành thử x_1, x_4 đều nhỏ hơn hay bằng x_2, x_3, do đó từ bất phương trình thứ hai, ta có hoặc $x_1x_4 = x_2^2$, hoặc $x_1x_4 = x_3^2$. Vì vậy:

a) Nếu $x_1x_4 = x_2^2$, thì theo (3), ta có $x_1 = x_4 = x_5 = x_2$. Từ bất phương trình thứ tư, suy ra $x_3 = x_1$. Vậy cả 5 số x_i đều bằng nhau.

b) Nếu $x_1x_4 = x_3^2$, thì $x_1 = x_4 = x_3$. Từ bất phương trình thứ ba, suy ra $x_2x_5 = x_4^2$. Do đó $x_2 = x_5 = x_4$. Vậy cả 5 số x_i đều bằng nhau.

Tóm lại hệ bất phương trình đã cho có hai họ nghiệm

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ như sau:

1. Một họ trong đó bốn số x_i bằng 0, số thứ năm là tuỳ ý.
2. Một họ trong đó cả năm số x_i bằng nhau (bằng một số tuỳ ý).

***Bài 49.* (1973)**

Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực, với a, b là các số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$.

a and b are real numbers for which the equation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

has at least one real solution. Find the least possible value of $a^2 + b^2$.

Hướng dẫn:

Gọi x là nghiệm của phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$.

Rõ ràng $x \neq 0$, chia 2 vế cho x^2 ta được:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ thì $|t| \ge 2$, do đó, (1) tương đương với:

$$t^2-2+at+b=0 \text{ hay } 2-t^2=at+b,$$

từ đó $\left|t^2-2\right|=\left|a.t+b.1\right|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{t^2+1}$, suy ra $a^2+b^2\ge\dfrac{(t^2-2)^2}{t^2+1}$.

Đặt $m=t^2+1$ thì $m\ge5$ và $a^2+b^2\ge\dfrac{(m-3)^2}{m}$.

Bằng cách khảo sát hàm $f(m)=\dfrac{(m-3)^2}{m}, m\ge5$, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của a^2+b^2 là $\dfrac{4}{5}$ khi

$$m=5\Leftrightarrow|t|=2\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow a=\pm\frac{4}{5} \text{ và } b=-\frac{2}{5}.$$

Tóm lại, $\min\left(a^2+b^2\right)=\dfrac{4}{5}$.

***Bài 50.* (1973)**

Một người lính làm nhiệm vụ rà mìn, anh ta cần phải dò cùng khắp một khu vực có hình tam giác đều. Máy dò mìn (*detector*) có bán kính dò hiệu quả bằng một nửa chiều cao tam giác đó. Người lính bắt đầu từ một đỉnh của tam giác. Hỏi anh ta nên đi theo con đường nào để cho đó là con đường ngắn nhất mà vẫn dò khắp được cả miền tam giác?

A soldier needs to sweep a region with the shape of an equilateral triangle for mines. The detector has an effective radius equal to half the altitude of the triangle. He starts at a vertex of the triangle. What path should he follow in order to travel the least distance and still sweep the whole region?

Hướng dẫn:

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng khu vực cần rà mìn là tam giác đều ABC có cạnh bằng 1, và người lính khởi sự từ đỉnh A. Anh ta cần phải rà đến hai đỉnh kia của tam giác. Do đó, con đường anh ta di chuyển phải giao với hai đường tròn tâm B, C, bán kính $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Giả sử đường đi của người lính cắt hai đường tròn tâm B, C nói trên tương ứng tại X và Y, và giả sử anh ta đi đến X trước, đến Y sau. Để đường đi ngắn nhất, rõ ràng các đường từ A đến X và từ X đến Y phải là những đường thẳng. Hơn nữa, đường đi ngắn nhất từ X đến đường tròn tâm C phải nằm trên đường thẳng XC và có độ dài

$$AX + XC - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Vì lẽ đó, ta đi tìm điểm X sao cho AX + XC cực tiểu.

Xét điểm P, giao của đường cao BK kẻ từ B với đường tròn tâm B bán kính $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Bạn đọc có thể chứng minh được rằng nếu P' là một điểm tùy ý (khác P) nằm trên đường thẳng qua P vuông góc với BK, ta luôn có: AP' + P'C > AP + PC.

Bây giờ, với X nằm trên đường tròn tâm B nói trên, gọi P' là giao điểm của AX với đường thẳng qua P vuông góc BK, ta được:

$$AX + XC > AP' + P'C > AP + PC.$$

Như vậy, ta chọn X trùng với P xác định như trên. Vấn đề còn lại là kiểm tra xem ba hình tròn tâm A, X, Y (xác định như đã nói trên), bán kính $\sqrt{3}/4$, có phủ được trọn vẹn tam giác hay không. Điều này rõ ràng, do hình tròn tâm X đã phủ được gần trọn tam giác, ngoại trừ một phần nhỏ gần điểm A và một phần nhỏ gần điểm C, mà các phần này thì phủ được bởi các hình tròn tâm A và Y (bán kính $\sqrt{3}/4$).

***Bài 51.* (1973)**

Gọi G là tập hợp tất cả các hàm $f: R \to R$, với f khác hàm hằng, và f có dạng $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$. Nếu $f, g \in G$ thì $f.g \in G$, với định nghĩa $f.g(x) = f[g(x)]$. Khi $f \in G$ thì $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$, do đó $f^{-1} \in G$. Ta nói x_f là điểm bất động của f nếu $f(x_f) = x_f$. Ta giả sử mọi $f \in G$ đều có điểm bất động. Chứng minh rằng tất cả các hàm trong G đều có chung một điểm bất động.

G is a set of non-constant functions f. Each f is defined on the real line and has the form f(x) = ax + b for some real a, b. If f and g are in G, then so is fg, where fg is defined by $f.g(x) = f[g(x)]$. If f is in G, then so is the inverse f^{-1}. If f(x) = ax + b, then $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$. Every f in G has a fixed point (in other words we can find x_f such that $f(x_f) = x_f$). Prove that all the functions in G have a common fixed point.

Hướng dẫn:

Dễ thấy $f(x) = ax + b$ có điểm bất động $\frac{b}{1-a}$ nếu $a \neq 1$.

Còn nếu $a = 1$, do giả thiết rằng f có điểm bất động nên ta phải có $b = 0$, lúc đó, mọi điểm đều là điểm bất động của f.

Giả sử trong G có hai hàm $f(x) = ax + b$ và $g(x) = ax + b'$. Lúc đó $b = b'$. Thật vậy, theo đề bài, hàm ngược của f là $h(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$, ta có:

$$h.g(x) = x + \frac{b'}{a} - \frac{b}{a}.$$

Theo giả thiết, $h.g \in G$ nên ta phải có $b' = b$.

Bây giờ, cho $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ là hai hàm tùy ý thuộc G. Khi đó: $f.g(x) = acx + (ad + b)$, $g.f(x) = acx + (bc + d)$. Theo chứng minh trên ta phải có $ad + b = bc + d$, suy ra:

$$\frac{b}{1-a} = \frac{c}{1-d}.$$

Nói cách khác, f và g có chung một điểm bất động, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 52. **(1973)**

Giả thử $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số dương đã cho trước, q là một số đã cho trước với $0 < q < 1$. Hãy tìm n số thực $b_1, b_2, ... b_n$ sao cho:

a) $a_k < b_k$ với mọi $k = 1,2,...,n$;

b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ với mọi $k = 1,2,...,n-1$;

c) $b_1 + b_2 + ... + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$.

$a_1, a_2, ..., a_n$ are positive reals, and q satisfies $0 < q < 1$. Find $b_1, b_2, ... b_n$ such that:

a) $a_k < b_k$ for $k = 1, 2, ..., n$;

b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ for $k = 1,2,...,n-1$;

c) $b_1 + b_2 + ... + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$.

Hướng dẫn:

Trước hết ta hãy phân tích ý nghĩa các điều kiện của bài toán.

Điều kiện a) nói rằng ta thay mỗi số a_k bởi một số b_k lớn hơn.

Nhưng số b_k không được quá lớn: trên toàn bộ, tổng các số b_k phải nhỏ hơn tổng các số a_k nhân với $\frac{1+q}{1-q}$ (điều kiện c)). Cuối cùng sự chênh lệch giữa hai số liên tiếp b_k và b_{k+1} phải là "vừa phải" (điều kiện b)).

Tất nhiên các số b_k phụ thuộc vào các số a_k. Nhưng sự phụ thuộc ấy không quá "khắt khe", bởi vì nếu đã chọn được n số b_k $(k = 1, 2, ..., n)$ thoả mãn các điều kiện của bài toán, và thay mỗi số b_k bởi một số b'_k "rất gần" b_k, thì có thể hình dung rằng các số b'_k cũng thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Vì vậy lời giải của bài toán là không duy nhất.

Một phương pháp đơn giản để tìm lời giải là xác định các số b_k bởi các công thức sau đây:

$$\begin{aligned} b_1 &= c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + ... + c_{1n}a_n \\ b_2 &= c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + ... + c_{2n}a_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ b_n &= c_{n1}a_1 + c_{n2}a_2 + ... + c_{nn}a_n, \end{aligned} \qquad (*)$$

các hệ số c_{ij} được lựa chọn một cách thích hợp.

Điều kiện a) của bài toán rõ ràng được thoả mãn nếu ta chọn:

$$c_{ij} > 0 \text{ với mọi } i, j = 1, 2, ..., n \text{ và } c_{kk} = 1. \qquad (1)$$

Điều kiện b) của bài toán được viết dưới dạng:

$$q < \frac{c_{k+1,1}a_1 + c_{k+1,2}a_2 + ... + c_{k+1,n}a_n}{c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + ... c_{kn}a_n} < \frac{1}{q},$$

bất đẳng thức này sẽ được thoả mãn nếu ta có:

$$q \le \frac{c_{k+1,j}}{c_{kj}} \le \frac{1}{q} \qquad (2)$$

với mọi $j = 1, 2, ..., n$ và mọi $k = 1, 2, ..., n-1$, và trong tất cả các bất đẳng thức (2) ứng với $j = 1, 2, ..., n$, có ít nhất một bất đẳng thức thực sự.

Trong (2), lấy $j = k$ thì ta có theo (1): $q \le c_{k+1,k} \le \frac{1}{q}$, từ đây ta thấy rằng nên chọn $c_{k+1,k} = q$. Với cách chọn này, dựa trên (2), ta thấy rằng có thể chọn $c_{k+2,k} = q^2, ..., c_{n,k} = q^{n-k}$, và

$$c_{k-1,k} = q; \ldots; c_{1,k} = q^{k-1}.$$

Thành thử có thể viết (*) dưới dạng

$$b_1 = a_1 + qa_2 + q^2a_3 + \ldots + q^{n-1}a_n$$

$$b_2 = qa_1 + a_2 + qa_3 + \ldots + q^{n-2}a_n$$

$$b_3 = q^2a_1 + qa_2 + a_3 + \ldots + q^{n-3}a_n$$

....

$$b_n = q^{n-1}a_1 + q^{n-2}a_2 + q^{n-3}a_3 + \ldots + a_n, \qquad (**)$$

tức là $b_k = q^{k-1}a_1 + q^{k-2}a_2 + \ldots + qa_{k-1} + a_k + qa_{k+1} + \ldots + q^{n-k}a_n$.

Vì $0 < q < 1$ nên $\dfrac{1+q}{1-q} = \dfrac{1-q+2q}{1-q} = 1 + \dfrac{2q}{1-q} =$

$$= 1 + 2q(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots) = 1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + \ldots + 2q^n + \ldots,$$

từ đó, cộng n đẳng thức (**), thì thấy rằng điều kiện c) cũng được thoả mãn. Như vậy (**) là một lời giải phải tìm.

***Bài 53.* (1973)**

Có thể tìm được hay không một tập hợp các điểm không đồng phẳng, sao cho với bất kì hai điểm A và B cho trước trong tập hợp này, tồn tại hai điểm C và D khác (cũng trong tập hợp đó) mà AB và CD song song với nhau?

Can we find a finite set of non-coplanar points, such that given any two points, A and B, there are two others, C and D, with the lines AB and CD parallel and distinct?

Hướng dẫn:

Xét hai lục giác đều có chung đường chéo chính (đó là đường chéo phân lục giác thành hai hình thang cân bằng nhau), chúng nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau. Tập hợp các đỉnh của hai lục giác này chính là tập hợp các điểm cần phải chỉ ra. Thật vậy, nếu ta lấy hai điểm A, B cùng là đỉnh của một trong hai lục giác đó thì rõ ràng có thể tìm thấy ngay C, D cũng là hai đỉnh của lục giác này sao cho AB // CD. Còn nếu ta lấy A là đỉnh của lục giác này và B là đỉnh của lục giác kia thì ta sẽ chọn C là đỉnh đối diện trên đường chéo chính CA thuộc lục giác thứ nhất, và lấy D là đỉnh đối diện trên đường chéo chính BD thuộc lục giác thứ hai. Lúc đó, dễ dàng chứng minh được ABCD là hình thoi, và do vậy, AB // CD, điều phải chứng minh.

***Bài 54.* (1974)**

Ba người cùng tham gia một trò chơi như sau. Có 3 tấm thẻ, trên mỗi thẻ có ghi một số nguyên dương (3 số khác nhau). Cứ mỗi một lượt chia, mỗi đấu thủ nhận ngẫu nhiên một tấm thẻ và ghi nhận con số trên tấm thẻ đó. Sau hai hay nhiều hơn các lượt chia, một người nhận được 20 điểm (tổng số), người thứ hai 10 điểm và người thứ ba 9 điểm. Biết rằng khi đến lượt chia cuối cùng, người nhận được 10 điểm nói trên đã nhận được tấm thẻ có số điểm lớn nhất. Hỏi, ở lượt chia đầu tiên, ai nhận được số điểm ở giữa hai người khác?

Three players play the following game. There are three cards each with a different positive integer. In each round the cards are randomly dealt to the players and each receives the number of counters on his card. After two or more rounds, one player has received 20, another 10 and the third 9 counters. In the last round the player with 10 received the largest number of counters. Who received the middle number on the first round?

Hướng dẫn:

Gọi A, B, C lần lượt là những người nhận các số điểm tổng cọng tương ứng là 20, 10, 9 như đã nói ở đề bài. Ngoài ra, ta gọi I, II, III tương ứng là các tấm thẻ có ghi số điểm từ cao đến thấp nhất.

Tổng số điểm nhận được là 39, tổng này phải là bội số của số lần chia. Nhưng các ước số của 39 là 1, 3, 13 và 39; mặt khác, tổng số các số ghi trên thẻ bé nhất phải là $1 + 2 + 3 = 6$ và tổng số lượt chia các tấm thẻ bé nhất là 2. Do vậy, ta suy ra rằng đến lúc nhận được các số điểm 20, 10, 9 nói trên, đã có 3 lần chia các tấm thẻ và tổng số điểm trên các thẻ I, II, III là 13.

Người A nhận được 20 điểm trong 3 lần chia, như thế tấm thẻ ghi số cao nhất (thẻ I) phải có giá trị ít nhất là 7. (*)

Lần chia sau cùng, người B (10 điểm) nhận được thẻ I (thẻ ghi số cao nhất), do đó thẻ I có giá trị lớn nhất là 8. Thẻ III (ghi số thấp nhất) có giá trị lớn nhất là 2, bởi nếu thẻ III lớn hơn 2 thì thẻ I sẽ có giá trị lớn nhất là $13 - 3 - 4 = 6$, mâu thuẫn với (*).

Từ đó, các khả năng ghi số trên 3 tấm thẻ I, II, III tương ứng là

$$8, 3, 2\ ;\ 7, 4, 2\ ;\ 8, 4, 1\ ;\ 7, 5, 1.$$

Trong các khả năng trên, chỉ có một khả năng cho tổng số điểm 20 sau 3 lần chia thẻ là 8, 4, 1. Do vậy, các thẻ I, II, III tương ứng có ghi số điểm là 8, 4, 1. Suy ra, sau 3 lần chia thẻ, A, B, C tương ứng nhận tổng số điểm theo cách:

$8 + 8 + 4 = 20,\qquad 8 + 1 + 1 = 10,\qquad 4 + 4 + 1 = 9.$

Mặt khác, ở lần chia thẻ sau cùng (lần thứ 3), A nhận được thẻ số 4 (thẻ II), B nhận được thẻ số 8 (thẻ I) và C nhận được thẻ số 1 (thẻ III). Từ đó, trong cả hai lần đầu, A nhận được thẻ 8 điểm, B nhận được thẻ 1 điểm và C nhận được thẻ 4 điểm.

Tóm lại, câu trả lời cho bài toán là người C (người có tổng số điểm bằng 9).

Bài 55. **(1974)**

Với mọi số nguyên không âm n, chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$ không chia hết cho 5.

Prove that the sum $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$ is not divisible by 5 for any non-negative integer n.

Hướng dẫn:

Đặt $x = \sqrt{8}$, dùng khai triển nhị thức Newton để biến đổi:

$$(1+x)^{2n+1} = A + Bx, \qquad (*)$$

trong đó $B = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$. Tương tự :

$$(1-x)^{2n+1} = A - Bx. \qquad (**)$$

Nhân vế theo vế (*) và (**) ta được: $7^{2n+1} = 8B^2 - A^2$.

Mặt khác, $7^{2n+1} \equiv \pm 2 \pmod 5$.

Do vậy, nếu B là bội của 5 thì $A^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$, điều này không thể xảy ra.

Bài 56. **(1974)**

Một bàn cờ 8×8 ô, được chia thành p hình chữ nhật rời nhau (đường kẻ phân chia dọc theo các đường ranh giới giữa các ô bàn cờ), sao cho mỗi hình chữ nhật có số các ô trắng bằng số các ô đen, và các hình chữ nhật này có tổng số ô vuông (ở mỗi hình) khác nhau. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của p và tập các kích thước có thể có của những hình chữ nhật.

An 8×8 chessboard is divided into p disjoint rectangles (along the lines between squares), so that each rectangle has the same number of white squares as black squares, and each rectangle has a different number of squares. Find the maximum possible value of p and all possible sets of rectangle sizes.

Hướng dẫn:

Điều kiện *mỗi hình chữ nhật có số các ô trắng bằng số các ô đen* có nghĩa là mỗi hình chữ nhật có một số chẵn các ô vuông. Ta có: $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72 > 64$, do đó phải có $p < 8$. Có 5 khả năng phân số 64 thành tổng của 7 số không bằng nhau:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 22;$$
$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 14 + 20;$$
$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 16 + 18;$$
$$2 + 4 + 6 + 8 + 12 + 14 + 18;$$
$$2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 14 + 16.$$

Khả năng đầu tiên bị loại bỏ vì một hình chữ nhật có 22 ô vuông thì phải có một cạnh dài hơn 8 (đơn vị ô). Các khả năng còn lại chấp nhận được, cụ thể, sự phân chia như sau:

2	2	2	2	2	2	2	4
2	2	2	2	2	2	2	4
1	1	1	1	1	5	5	4
1	1	1	1	1	5	5	4
1	1	1	1	1	5	5	4
1	1	1	1	1	6	6	4
3	3	3	3	3	6	6	4
3	3	3	3	3	7	7	4

2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	5	5
1	1	1	1	1	1	5	5
1	1	1	1	1	1	5	5
3	3	3	3	3	7	6	6
3	3	3	3	3	7	6	6
4	4	4	4	4	4	4	4

2	2	2	2	2	2	2	7
2	2	2	2	2	2	2	7
1	1	1	1	1	1	4	4
1	1	1	1	1	1	4	4
1	1	1	1	1	1	4	4
3	3	3	3	3	3	4	4
3	3	3	3	3	3	6	6
5	5	5	5	5	5	6	6

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	7
2	2	2	2	2	2	2	7
3	3	3	3	3	3	6	6
3	3	3	3	3	3	6	6
4	4	4	4	4	5	5	5
4	4	4	4	4	5	5	5

***Bài 57.* (1974)**

Với mọi số thực dương a, b, c, d, hãy xác định những giá trị có thể nhận được của biểu thức

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}.$$

Determine all possible values of

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$$

for positive reals a, b, c, d.

Hướng dẫn:

Gọi S là biểu thức ở đề bài, ta sẽ chứng minh rằng S có giá trị nằm giữa 1 và 2. Thật vậy, trước hết ta có:

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}>$$

$$>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử a là số lớn nhất trong 4 số thực dương a, b, c, d. Khi đó, $\frac{a}{a+b+d}<1$ và:

$$\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}<\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{b+c+d}=1,$$

do vậy S < 1 + 1 = 2. Tóm lại, ta có 1 < S < 2.

Bây giờ, nếu đặt a = c = 1 và cho b, d rất bé (tiến dần đến 0 một cách liên tục), thì

$$\frac{a}{a+b+d}\to 1,\ \frac{c}{b+c+d}\to 1,\ \frac{b}{a+b+c}\to 0,\ \frac{d}{a+c+d}\to 0,$$

do đó S $\to$ 2. Mặt khác, nếu đặt a = 1, c = d và cho b, $\frac{c}{b}$ rất bé (tiến dần đến 0 một cách liên tục), thì S $\to$ 1 bởi vì ta có:

$$\frac{a}{a+b+d}\to 1,\ \frac{c}{b+c+d}\to 0,\ \frac{b}{a+b+c}\to 0,\ \frac{d}{a+c+d}\to 0.$$

Từ tính liên tục, ta suy ra S có thể nhận bất kì giá trị nào trong khoảng mở (1, 2).

***Bài 58.* (1974)**

Cho đa thức P(x) có bậc d > 0 và có các hệ số nguyên. Gọi n là số tất cả các nghiệm nguyên phân biệt của hai phương trình P(x) = 1 và P(x) = -1. Chứng minh rằng n $\le$ d + 2.

Let P(x) be a polynomial with integer coefficients of degree d > 0. Let n be the number of distinct integer roots to P(x) = 1 or P(x) = -1. Prove that n $\le$ d + 2.

Hướng dẫn:

Xét hai đa thức A(x) và B(x), với các hệ số nguyên, chúng giống nhau hoàn toàn, chỉ trừ hai số hạng tự do là khác nhau, hai số hạng này hơn kém nhau 2 đơn vị. Gọi r và s là các nghiệm nguyên tương ứng của hai đa thức, tức là

$$A(r)=0, \quad (1) \qquad\qquad B(s)=0. \quad (2)$$

Khi đó, trừ (1) cho (2) ta được một tổng của các hạng tử có dạng $a(r^i - s^i)$ và cọng thêm cho 2. Mỗi hạng tử này chia hết cho $(r-s)$, do đó 2 phải chia hết cho $(r-s)$. Từ đó, suy ra r và s hơn kém nhau 0, 1 hoặc 2 đơn vị. Bây giờ, ta áp dụng nhận xét này để giải bài toán.

Giả sử r là nghiệm nguyên bé nhất trong tất cả các nghiệm nguyên của hai phương trình P(x) = 1 và P(x) = -1.

Ta biết rằng đa thức bậc d có không quá d nghiệm phân biệt, do đó nó cũng có không quá d nghiệm nguyên phân biệt. Theo nhận xét trên, nếu r là một nghiệm nguyên của phương trình này và s là một nghiệm nguyên của phương trình kia thì r và s khác nhau 0, 1 hoặc 2 đơn vị. Nhưng ta có s ≥ r, do đó ta được s = r, s = r + 1 hoặc s = r + 2. Do vậy, ta suy ra rằng phương trình thứ hai chỉ có thêm vào nhiều nhất là 2 nghiệm phân biệt nữa. Nói cách khác, ta có điều phải chứng minh:

$$n \le d + 2.$$

***Bài 59.* (1975)**

Cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ và $y_1, y_2, ..., y_n$ thỏa điều kiện $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$, $y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_n$. Chứng minh rằng nếu dãy các số $z_1, z_2, ..., z_n$ là một hoán vị bất kì của các số $y_1, y_2, ..., y_n$ thì ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

Let $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$ and $y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_n$ be real numbers. Prove that if $z_1, z_2, ..., z_n$ is any permutation of the $y_1, y_2, ..., y_n$, then we have $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$.

Hướng dẫn:

Trước hết, bạn đọc dễ dàng chứng minh được rằng nếu ta có $x \ge x'$ và $y \ge y'$ thì $(x-y)^2 + (x'-y')^2 \le (x-y')^2 + (x'-y)^2$.

Suy ra, nếu $i < j$, mà $z_i \le z_j$, thì khi đổi chỗ z_i, z_j cho nhau, ta sẽ làm giảm tổng các bình phương xuống.

Thế nhưng, từ các số z_i (hoán vị của những y_i), ta cũng có thể quay về trật tự cũ (tức là vị trí các z_i được đưa về vị trí ban đầu của các số y_i) bởi một dãy các phép đổi chỗ như đã nói. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 60.* (1975)**

Cho một dãy vô hạn các số nguyên dương a_i thỏa mãn:

$$a_1 < a_2 < ... < a_k < ... .$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương p, luôn luôn tồn tại vô số số a_m sao cho $a_m = xa_p + ya_q$, trong đó x, y là các số tự nhiên và q là số nguyên lớn hơn p.

Let $a_1 < a_2 < ... < a_k < ...$ be positive integers. Prove that for every positive interger p, there are infinitely many a_m that can be written in the form $a_m = xa_p + ya_q$, with x, y positive integers and $q > p$.

Hướng dẫn:

Ta cố định số $p \geq 1$. Với điều kiện $0 \leq r \leq a_p$, ta gọi B_r là tập hợp các số $a_1, a_2, ...$ mà $a_1 \equiv r \pmod{a_p}$, $a_2 \equiv r \pmod{a_p}$, ... Theo Nguyên lí Dirichlet, phải tồn tại một số r để cho B_r là một tập vô hạn.

Giả sử rằng a_q là phần tử bé nhất của B_r thỏa điều kiện $a_q > a_p$. Lúc đó, với mọi $a_m \in B_r$ mà m > q, ta có $a_m \equiv a_q \pmod{a_p}$, do đó $a_m = xa_p + a_q$, với số tự nhiên x nào đó.

Bây giờ, đặt y = 1, ta có điều phải chứng minh.

***Bài 61.* (1975)**

Gọi A là tổng các chữ số (trong hệ thập phân) của số 4444^{4444} và gọi B là tổng các chữ số của số A. Hãy tìm tổng các chữ số của số B.

Let A be the sum of the decimal digits of 4444^{4444} and B be the sum of the decimal digits of A. Find the sum of the decimal digits of B.

Hướng dẫn:

Đặt X = 4444^{4444}, khi đó, X phải có số các chữ số (thập phân) bé hơn số $4 \times 4444 = 17776$. Vì vậy, giá trị lớn nhất của số A là

$$9 \times 17776 = 159984.$$

Suy ra rằng giá trị lớn nhất của số B là $5 \times 9 = 45$, điều này có nghĩa tổng các chữ số của B là số chỉ có một chữ số. Ta có $4444 \equiv -2 \pmod 9$ nên từ đó suy ra $X \equiv (-2)^{4444} \pmod 9$. Mặt khác, $(-2)^3 \equiv 1 \pmod 9$ và $4444 \equiv 1$ (mod 3), do đó: $X \equiv -2 \equiv 7 \pmod 9$.

Vậy đáp số cần tìm của bài toán là 7.

***Bài 62.* (1975)**

Xác định tất cả các đa thức hai biến P(x, y) sao cho cả 3 điều kiện sau đây được thỏa mãn:

1) Tồn tại số nguyên dương n và mọi số thực t, x, y:

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y).$$

2) Với mọi số thực x, y, z: $P(y + z, x) + P(z + x, y) + P(x + y, z) = 0$.

3) $P(1, 0) = 1$.

Find all polynomials P(x, y) in two variables such that:

1) $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$ for some positive integer n and all real t, x, y.

2) For all real x, y, z: $P(y + z, x) + P(z + x, y) + P(x + y, z) = 0$.

3) $P(1, 0) = 1$.

Hướng dẫn:

Điều kiện (1) thường được gọi là tính thuần nhất bậc n của P(x, y). Xét trường hợp n = 1, 2, 3, ta dễ dàng tìm thấy các đa thức tương ứng thỏa điều kiện đề bài là: $x-2y$, $(x+y)(x-2y)$, $(x+y)^2(x-2y)$.

Ta cũng dễ dàng kiểm tra được rằng với mọi n, đa thức

$$(x+y)^n(x-2y)$$

thỏa điều kiện đề bài.

Bây giờ, từ điều kiện (2), cho x = y = z ta được P(2x, x) = 0, nên đa thức P(x, y) thỏa điều kiện đề bài luôn nhận $(x-2y)$ làm một nhân tử.

Lấy x = y = 1, z = -2, điều kiện (2) cho ta $P(1,-1)(2^n-2)=0$, do đó, (x + y) là một nhân tử của đa thức khi n > 1.

Tất cả những điều trên gợi ý rằng nghiệm tổng quát của bài toán là: $(x+y)^n(x-2y)$. Ta sẽ chứng minh điều này.

Từ (2), cho $y = 1-x$, z = 0, ta được: $P(x, 1-x) = -1 - P(1-x, x)$, đặc biệt, P(0, 1) = -2. Bây giờ, cho $z = 1-x-y$, ta được:

$$P(1-x, x) + P(1-y, y) + P(x+y, 1-x-y) = 0,$$

suy ra $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ở đây ta đặt $f(x) = P(1-x, x) - 1$.

Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được rằng, với mọi số nguyên m và mọi số thực x, ta có $f(mx) = mf(x)$.

Từ đó, suy ra rằng với mọi r, s ta có $f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}f(1)$, $f\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{r}{s}f(1)$.

Nhưng P(0, 1) = -2, do đó $f(1) = -3$, vậy $f(x) = -3x$ với mọi số hữu tỉ x. Nhưng $f(x)$ là hàm liên tục nên $f(x) = -3x$ với mọi số thực x. Với a, b là các số thực tùy ý và a + b $\neq 0$, ta đặt $x = \dfrac{b}{a+b}$, khi đó,

$$P(a, b) = (a+b)^n P(1-x, x) = (a+b)^n\left(\frac{-3b}{a+b} + 1\right) == (a+b)^{n-1}(a-2b).$$

Để ý rằng khi a + b = 0, với n > 1, từ tính liên tục ta cũng có P(a, b) = 0.

Tóm lại, nghiệm tổng quát của bài toán là:

$$P(x, y) = (x + y)^n (x - 2y).$$

***Bài 63.* (1976)**

Cho các đa thức $P_k(x)$, $k = 1,2,3,...$ xác định bởi:

$$P_1(x) = x^2 - 2,\ P_{i+1} = P_1(P_i(x)),\ i = 1,2,3,....$$

Chứng minh rằng $P_n(x) = x$ có tất cả các nghiệm đều là các số thực phân biệt nhau.

Let $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_{i+1} = P_1(P_i(x))$ for $i = 1, 2, 3, ...$.

Show that the roots of $P_n(x) = x$ are real and distinct for all n.

Hướng dẫn:

Đặt $x = 2\cos t$, ta thu hẹp việc xét nghiệm của phương trình trên đoạn $-2 \le x \le 2$. Khi đó, bằng quy nạp ta chứng minh được $P_n(x) = 2\cos 2^n t$, và phương trình $P_n(x) = x$ trở thành $\cos 2^n t = \cos t$.

Từ đó ta được 2^n nghiệm: $t = \dfrac{2k\pi}{2^n - 1}$, $t = \dfrac{2k\pi}{2^n + 1}$, $k = 1,2,...,n$.

Suy ra rằng phương trình $P_n(x) = x$ có tất cả 2^n nghiệm thực phân biệt nhau.

Nhận xét:

Việc ta thu hẹp để xét nghiệm của phương trình trên đoạn $-2 \le x \le 2$ và đặt $x = 2\cos t$ là một tư duy không đơn giản (để ý rằng một đa thức bậc k có không quá k nghiệm phân biệt thực hoặc phức).

Hướng dẫn trên được trích lược từ một cuốn sách về phương pháp giải toán khá hay của ***Arthur Engel*** nhan đề *Problem-Solving Strategi--es* (Springer 1998 [Problem books in mathematics series], ISBN 03879 82191). Nhân đây, xin cảm ơn cô Nguyễn Hồng Anh, 135 Rosewood Cir. Jupiter, Florida, U.S.A., đã gởi tặng chúng tôi cuốn sách này.

***Bài 64.* (1976)**

Một hình hộp chữ nhật có thể được lấp đầy bằng những hình lập phương có cạnh bằng đơn vị. Ngoài ra, người ta có thể sắp xếp các hình lập phương có thể tích bằng 2 chồng lên nhau, cạnh song song với cạnh của hình hộp, và lấp đầy được 40% hình hộp. Hãy xác định kích thước có thể có của hình hộp đã cho.

A rectangular box can be completely filled with unit cubes. If one places as many cubes as possible, each with volume 2, in the box, with *their edges parallel to the edges of the box, one can fill exactly 40% of the box. Determine the possible dimensions of the box.*

Giải:

Ta gọi k là căn bậc ba của 2. Với mọi số tự nhiên n, ta kí hiệu n' là số tự nhiên lớn nhất thoả mãn: $n'k \le n$.

Gọi kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c. Hiển nhiên a, b, c là những số tự nhiên. Vì người ta có thể sắp xếp các hình lập phương có thể tích bằng 2 chồng lên nhau, cạnh song song với cạnh của hình hộp, và lấp đầy được 40% hình hộp nên ta cần phải có:

$$40\%.k.k.k.a'.b'.c' = a.b.c, \text{ hay } 5a'.b'.c' = a.b.c. \qquad (*)$$

Dễ dàng thấy rằng, với n lần lượt bằng 1, 2, ..., 10, ta có:

$$1' = 0,\ 2' = 1,\ 3' = 2,\ 4' = 3,\ 5' = 3,$$

$$6' = 4,\ 7' = 5,\ 8' = 6,\ 9' = 7,\ 10' = 7.$$

Cũng dễ thấy $n'k \ge n - 2$. Nhưng $6^3 > 0{,}4.8^3$, suy ra:

$$(n'k)^3 \ge (n-2)^3 > 0{,}4.n^3, \text{ với mọi } n \ge 8.$$

Ta có thể kiểm tra trực tiếp được rằng $(n'k)^3 > 0{,}4.n^3$ với n = 3, 4, 5, 6, 7.

Vì vậy, suy ra a = 2 (không thể có a = 1, vì $1' = 0$). Từ (*), ta phải có b hay c chia hết cho 5. Ta giả sử rằng một trong hai cạnh đó bằng 5. Vì $5' = 3$, nên nếu cạnh còn lại có độ dài n thì từ (*) ta phải ta phải có:

$$5.2'.5'.n' = 2.5.n \Leftrightarrow n' = \frac{2}{3}n. \qquad (**)$$

Ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng $\frac{2k}{3} < \frac{6}{7}$, và suy ra:

$$\frac{2}{3}nk + 1 < n,\ \forall n \ge 7,$$

do đó ta được: $$n' > \frac{2}{3}n,\ \forall n \ge 7. \qquad (***)$$

Bất đẳng thức (***) mâu thuẫn với (**) nên việc còn lại là kiểm tra khi $n < 7$. Tuy vậy, vì $n' = \frac{2}{3}n$ là số tự nhiên nên n là bội của 3. Do đó chỉ cần kiểm tra với n = 3 và n = 6. Cả hai kết quả này đều chấp nhận được. Do vậy, kích thước của hình hộp đã cho là

$$2 \times 3 \times 5 \text{ hoặc } 2 \times 3 \times 6.$$

Cuối cùng, với một cạnh bằng 2, ta còn phải tính đến khả năng một cạnh bằng 10 trở lên (như trên, có một cạnh chia hết cho 5). Giả sử cạnh đó là m (m là bội của 5). Dễ dàng kiểm tra được rằng $\frac{m'}{m} \geq \frac{7}{10}$. Gọi r là cạnh còn lại. Từ (*) ta suy ra r phải thoả mãn: $\frac{r'}{r} \leq \frac{4}{7}$. Kết hợp với những tính toán về n' với n nhỏ ở trên, ta suy ra r = 2. Vậy a = b = 2. Nhưng giờ đây c phải thoả điều kiện $c' = \frac{4}{5}c$. Điều này không thể được vì ta phải có $\frac{4}{5}k > 1$. Tóm lại, kích thước của hình hộp đã cho là

$$2 \times 3 \times 5 \text{ hoặc } 2 \times 3 \times 6.$$

***Bài 65.* (1976)**

Hãy xác định số lớn nhất là tích của các số nguyên dương sao cho các số nguyên dương đó có tổng bằng 1976.

Determine the largest number which is the product of positive integers with sum 1976.

Hướng dẫn:

Giả sử ta tìm được số N lớn nhất là tích của m số nguyên dương n_k sao cho m số nguyên dương n_k đó có tổng bằng 1976 (m= 1, 2, ... m, các n_k có thể trùng nhau).

Khi đó, trong các số n_k, không thể có số lớn hơn 4, vì nếu ngược lại, giả sử tồn tại t để $n_t > 4$, ta thay số n_t bởi hai số 3 và $n_t - 3$ thì tổng của m + 1 số $n_1, ..., 3, ..., n_t - 3, ..., n_m$ vẫn là 1976, trong khi đó ta lại nhận được một tích lớn hơn, điều này trái với giả thiết N lớn nhất.

Trong các số n_k đó cũng không có số nào bằng 1. Thật vậy, nếu có số bằng 1 thì ngoài ra cũng có số r > 1 (bởi nếu không thì tích chỉ bằng 1), khi đó, ta thay 1 và r bằng số r + 1 thì được các số vẫn có tổng 1976, nhưng tích lại lớn hơn N, do ta có r + 1 > 1.r, mâu thuẫn!

Ngoài ra, nếu trong các số n_k đó có số 4 thì ta cũng có thể thay số 4 bởi hai số 2 và tích cũng như tổng sẽ không thay đổi.

Tóm lại, các số n_k cần tìm gồm toàn các số 2 và 3.

Ta có: 1976 = 3× 658 + 2. Vậy số N tìm được là: $N = 2 \times 3^{658}$.

***Bài 66.* (1976)**

Cho số nguyên dương n và m = 2n. Với mọi i, j thoả điều kiện

$$1 \le i \le n, 1 \le j \le m,$$

gọi a_{ij} là các số nhận giá trị 0, 1 hoặc -1. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ này có một nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ sao cho các thành phần x_i, $i = 1,\ldots,m$, là các số nguyên không đồng thời bằng 0 và

$$|x_i| \le m, \quad i = 1,\ldots,m.$$

n is a positive integer and m = 2n. a_{ij} *= 0, 1 or -1 for*

$$1 \le i \le n, 1 \le j \le m.$$

The m unknowns $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *satisfy the n equations:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0. \end{cases}$$

Prove that the system has a solution in integers of absolute value at most m, not all zero.

Hướng dẫn:

Ta có nhận xét sau: nếu $|x_i| \le n$, x_i nguyên, thì mỗi một tổ hợp tuyến tính của các x_i sẽ nhận giá trị nằm giữa $-2n^2$ và $2n^2$, nghĩa là với mọi k =1, 2, ..., n ta có $-2n^2 \le a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{km}x_m \le 2n^2$, điều này có được do m = 2n và $|a_{ij}| \le 1$.

Từ đó, suy ra có nhiều nhất là $(4n^2 + 1)$ các giá trị nguyên mà mỗi tổ hợp tuyến tính nói trên có thể nhận được, và nhiều nhất là $(2n^2 + 1)^n$ tất cả các giá trị có thể nhận được của n tổ hợp tuyến tính đó. Mặt khác, mỗi x_i có thể có (2n + 1) giá trị có thể, với $|x_i| \le n$, do vậy có tất cả $(2n^2 + 1)^{2n} = (4n^2 + 4n + 1)^n$ các giá trị có thể có của

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m), \text{ với } m = 2n.$$

Từ đó, suy ra rằng ắt phải có hai bộ phân biệt của các $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ mà có cùng một tổ hợp tuyến tính, ta kí hiệu là $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ và

$(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$, khi đó,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{im}x_m = a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + ... + a_{im}x'_m$$

với mọi $i = 1,2, ..., n$. Điều này có nghĩa rằng các số $x_i - x'_i$, $i = 1,2, ..., n$ là nghiệm nguyên của hệ, và ta có $|x_i - x'_i| \le 2n$, ngoài ra, chúng không thể đồng thời bằng không, vì $(x_1, x_2, ..., x_m)$ và $(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ là hai bộ phân biệt. Ta có điều phải chứng minh.

***Bài 67.* (1977)**

Trong một dãy hữu hạn các số thực, tổng của bất kì 7 số hạng liên tiếp nào cũng là số âm, và tổng của bất kì 11 số hạng liên tiếp nào cũng đều là số dương. Hãy xác định giá trị lớn nhất của số các số hạng có trong dãy đó.

In a finite sequence of real numbers the sum of any seven successive terms is negative, and the sum of any eleven successive terms is positive. Determine the maximum number of terms in the sequence.

Hướng dẫn:

Ta có $x_1 + x_2 + ... + x_7 < 0$, $x_8 + x_9 + ... + x_{14} < 0$, do đó

$$x_1 + x_2 + ... + x_{14} < 0.$$

Nhưng ta lại có $x_4 + x_5 + ... + x_7 > 0$ nên suy ra $x_1 + x_2 + x_3 < 0$. Cũng vậy, vì $x_5 + x_6 + ... + x_{11} < 0$ và $x_1 + x_2 + ... + x_{11} > 0$ nên $x_4 > 0$.

Giả sử dãy đã cho có nhiều hơn 16 phần tử thì lí luận tương tự như trên ta sẽ được $x_5 > 0$, $x_6 > 0$, $x_7 > 0$. Thế nhưng

$$x_1 + x_2 + ... + x_7 < 0, \ x_5 + x_6 + ... + x_{11} < 0,$$

và $x_1 + x_2 + ... + x_{11} > 0$ nên ta cũng suy ra $x_5 + x_6 + x_7 < 0$, mâu thuẫn!

Vậy số các số hạng có trong dãy đó phải ≤ 16.

Ta sẽ chứng tỏ rằng 16 là đáp số của bài toán, muốn vậy ta đi tìm dãy gồm 16 số hạng thoả điều kiện đề bài. Giả sử có một dãy gồm 16 số hạng như thế, mà đơn giản nhất, tổng của 7 số hạng liên tiếp là -1, tổng của 11 số hạng liên tiếp là 1, ta dễ dàng thiết lập các phương trình và tìm được dãy

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5.$$

Tóm lại, giá trị lớn nhất của số các số hạng có trong dãy thoả mãn yêu cầu đề bài là 16.

***Bài 68*. (1977)**

Cho n là số nguyên lớn hơn 2, gọi V_n là tập các số nguyên có dạng 1 + kn, với k nguyên dương. Một số m thuộc V_n được gọi là *bất khả phân* (*indecomposable*) nếu nó không thể biểu diễn được thành tích của 2 số thuộc V_n. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử của V_n sao cho phần tử đó có thể biểu diễn được thành tích các phần tử bất khả phân của V_n bằng nhiều hơn một cách (các biểu diễn chỉ khác nhau về thứ tự nhân tử thì được xem là như nhau).

Given an integer $n > 2$, let V_n be the set of integers $1 + kn$ for k a positive integer. A number m in V_n is called indecomposable if it cannot be expressed as the product of two members of V_n. Prove that there is a number in V_n which can be expressed as the product of indecomposable members of V_n in more than one way (decompositions which differ solely in the order of factors are not regarded as different).

Hướng dẫn:

Ta xét các số $a = b = n-1$, $c = d = 2n-1$. Dễ dàng thấy rằng $a^2 \in V_n$, ngoài ra, ta có a^2 là phần tử bất khả phân của V_n, vì nó bé hơn $(1+n)^2$, tức là bé hơn bình phương phần tử nhỏ nhất của V_n.

Giả sử $ac = 2n^2 - 3n + 1$ (thuộc V_n) không *bất khả phân*, lúc đó, ta có $kk'n + k + k' = 2n-3$, với các số nguyên k, $k' \geq 1$. Nhưng k, k' không thể ≥ 2, vì nếu không thế thì vế trái của đẳng thức trên sẽ quá lớn. Còn nếu k = k' = 1 thì suy ra n = 5.

Tương tự như vậy, nếu c^2(thuộc V_n) không *bất khả phân* thì ta sẽ có $kk'n + k + k' = 4n-4$. Lúc đó, nếu k = k' = 1 thì n = 2, điều này không thể vì n > 2 theo giả thiết. Nếu k = 1, k' = 2, ta phải có $n = \frac{7}{2}$, nên cũng không được. Nếu k = 1, k' = 3 thì n = 8. Các khả năng khác làm cho vế trái của đẳng thức trên quá lớn.

Như vậy, từ các phân tích trên ta đi đến:

* Nếu n khác 5 hoặc khác 8, ta chọn số $(n-1)^2(2n-1)^2$, số này thuộc V_n và có thể phân tích được bằng 2 cách thành tích các phần tử *bất khả phân* của V_n như sau:

$$(n-1)^2\times(2n-1)^2,\ (n-1)(2n-1)\times(n-1)(2n-1).$$

Nhưng để ý rằng điều này không thực hiện được cho n = 5 và cho n = 8, vì 16.81 = 36.36 nhưng 36 không phải phần tử bất khả phân (6×6); 49.225 = 105.105, nhưng $225 = 9\times25$.

* Nếu n = 5, ta chọn 3136: 3136 = 16.196 = 56.56.

* Nếu n = 8, ta chọn 25921: 25921 = 49.529 = 161.161.

***Bài 69.* (1977)**

Cho a, b, A, B là các hằng số thực và

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x.$$

Giả sử $f(x)\geq 0,\ \forall x\in R$. Chứng minh rằng $a^2+b^2\leq 2$ và $A^2+B^2\leq 1$.

Define $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$, where a, b, A, B are real constants. Suppose that $f(x)\geq 0$ for all real x. Prove that

$$a^2+b^2\leq 2 \text{ and } A^2+B^2\leq 1.$$

Hướng dẫn:

Gọi y và z là các số thực sao cho

$$\cos y=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos z=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin z=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Khi đó, biểu thức f(x) trở thành: $f(x)=1-c\cos(x-y)-C\cos 2(x-z)$, với

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\ C=\sqrt{A^2+B^2}.$$

Từ đó, $f(z)+f(\pi+z)\geq 0$ cho ta $C=\sqrt{A^2+B^2}\leq 1$ và

$$f\left(y+\frac{\pi}{4}\right)+f\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$$

cho ta $c=\sqrt{a^2+b^2}\leq 2$, điều phải chứng minh.

***Bài 70.* (1977)**

Cho hai số nguyên dương a và b. Đem a^2+b^2 chia cho a + b ta được thương là q và phần dư là r. Xác định tất cả các cặp số a, b sao cho

$$q^2+r=1977.$$

Let a and b be positive integers. When a^2+b^2 is divided by a + b, the quotient is q and the remainder is r. Find all pairs a, b such that

$$q^2+r=1977.$$

Hướng dẫn:

Ta có $a^2 + b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2}$, do đó $q \ge \dfrac{a+b}{2}$. Suy ra $r < 2q$.

Mặt khác, số bình phương lớn nhất nhỏ hơn 1977 là $44^2 = 1936$. Ta có 1977 = $44^2 + 41$. Số lớn nhất kế theo cho ta 1977 = $43^2 + 128$. Nhưng 128 > 2.43, do đó ta phải có q = 44, r = 41. Từ đó suy ra $a^2 + b^2$ = $44(a+b) + 41$, do vậy: $(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009$.

Thử lại, ta tìm thấy 1009 = $28^2 + 15^2$. Từ đó, ta tìm được các số a, b là 50, 37 và 50, 7.

***Bài 71.* (1977)**

Cho hàm f xác định trên tập các số nguyên dương và cũng nhận giá trị nguyên dương. Giả sử với mọi n ta có: $(n+1) > f(f(n))$. Chứng minh rằng $f(n) = n$ với mọi n.

The function f is defined on the set of positive integers and its values are positive integers. Given that $(n+1) > f(f(n))$ for all n, prove that f(n) = n for all n.

Hướng dẫn:

Trước tiên ta sẽ chứng tỏ rằng $f(1) < f(2) < f(3)\ldots$. Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp. Ta gọi S_n là phát biểu sau:

nếu $r \le n$ *và* $m > r$ *thì* $f(r) < f(m)$. .

Vì khi m > 1 thì f(m) > f(s), với $s = f(m-1)$, nên f(m) không thể là phần tử nhỏ nhất của tập $\{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$. Nhưng tập này bị chặn dưới bởi 0, nên chắc chắn nó phải có phần tử bé nhất. Suy ra phần tử này là f(1). Vậy S_1 đúng.

Giả sử S_n đúng. Lấy $m > n+1$, khi đó $m-1 > n$, do đó ta có $f(m-1) > f(n)$ (vì S_n đúng). Nhưng cũng từ S_n ta có:

$$f(n) > f(n-1) > \ldots > f(1),$$

do vậy, ta được $f(n) \ge n - 1 + f(1) \ge n$. Suy ra $f(m-1) \ge n+1$, từ đó $f(m) > f(n+1)$. Từ đây suy ra rằng S_{n+1} đúng.

Vậy S_n đúng với mọi n.

Nói cách khác, nếu $n \le m$ thì $f(n) \le f(m)$. Giả sử với số m nào đó ta có $f(m) \ge m+1$, thế thì $f(f(m)) > f(m+1)$, điều này mâu thuẫn.

Suy ra $f(m) \le m$ với mọi m. Nhưng do ta có

$$f(1) \ge 1 \text{ và } f(m) > f(m-1) > \ldots > f(1)$$

nên $f(m) \ge m$ với mọi m. Suy ra $f(m) = m$ với mọi m.

***Bài 72.* (1978)**

Cho m và n là những số tự nhiên với $n > m \ge 1$. Trong cách viết thập phân, ba chữ số cuối cùng của số 1978^m theo thứ tự bằng ba chữ số cuối cùng của 1978^n.

Tìm các số m và n sao cho tổng $m + n$ có giá trị nhỏ nhất.

m and n are positive integers with m < n. The last three decimal digits of 1978^m are the same as the last three decimal digits of 1978^n.

Find m and n such that m + n has the least possible value.

Hướng dẫn:

Theo đề bài ta có:

$1978^n \equiv 1978^m \pmod{1000} \Leftrightarrow 978^n \equiv 978^m \pmod{1000}$, hay

$978^m(978^{n-m} - 1) \equiv 0 \pmod{1000} \Leftrightarrow 2^m(978^{n-m} - 1) \equiv 0 \pmod{1000}$, (1)

do $978 = 2.3.163$. Ta thấy $1000 = 2^3.5^3$, mà $978^{n-m} - 1$ lẻ nên suy ra 2^m phải chia hết cho 2^3. Vậy $m \ge 3$. Ngoài ra, (1) tương đương với

$$2^{m-3}(978^{n-m} - 1) \text{ chia hết cho } 2^3.5^3 = 1000. \quad (2)$$

Vì $m \ge 3$ nên chia cả hai vế của (2) cho 2^3 ta có:

$2^{m-3}(978^{n-m} - 1)$ chia hết cho 5^3, hay $978^{n-m} - 1$ chia hết cho 5^3, (3)

vì 2 và 3 nguyên tố cùng nhau.

Muốn có (3) trước tiên ta tìm m và n để $978^{n-m} - 1$ chia hết cho 5. Ta thấy 8^1 tận cùng là 8, 8^2 tận cùng là 4, 8^3 tận cùng là 2, 8^4 tận cùng là 6, 8^5 tận cùng là 8, ... Như vậy chu kì của số chữ tận cùng của luỹ thừa của 8 là $(8, 4, 2, 6)$. Muốn cho $978^{n-m} - 1$ chia hết cho 5 thì chữ số tận cùng của $978^{n-m} - 1$ phải là 5 hoặc 0, như vậy chỉ có 8^{4k} với $k = 1, 2, 3\ldots$ thì $8^{4k} - 1$ mới tận cùng bằng 5. Suy ra

$$n - m = 4k \text{ với } k = 1, 2, 3\ldots$$

Tiếp theo, ta cũng có thể lí luận để chứng minh được rằng

$$n - m = 100p \ (p = 1, 2, 3, \ldots). \quad (4)$$

Kết hợp với điều kiện $m \ge 3$ ban đầu suy ra: Muốn cho

$$978^n \equiv 978^m \pmod{1000}$$

thì $m + n \geq 100p + 6 \geq 106$, vì $p \geq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $m + n$ để 1978^m có ba chữ số cuối cùng theo thứ tự bằng ba chữ số cuối cùng của 1978^n là 106. Khi đó $m = 3$ và $n = 103$.

***Bài 73.* (1978)**

Biết rằng tập hợp tất cả những số nguyên dương là hợp của hai tập hợp con không giao nhau

$$\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}, \{g(1), g(2), ..., g(n), ...\}$$

trong đó: $f(1) < f(2) < ... < f(n) < ...$, $g(1) < g(2) < ... < g(n) < ...$ và $g(n) = f(f(n)) + 1$ với mọi $n \geq 1$. Hãy xác định $f(240)$.

The set of all positive integers is the union of two disjoint subsets

$$\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}, \{g(1), g(2), ..., g(n), ...\},$$

where $f(1) < f(2) < ... < f(n) < ...$, $g(1) < g(2) < ... < g(n) < ...$, *and* $g(n) = f(f(n)) + 1$ *for n = 1, 2, 3, ... Determine f(240).*

Hướng dẫn:

Đặt $F = \{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}$, $G = \{g(1), g(2), ..., g(n), ...\}$,

$$N_n = \{1, 2, 3, ..., n\}.$$

Ta có $f(1) \geq 1$ nên $f(f(1)) \geq 1$, suy ra $g(1) \geq 2$.

Như thế, 1 không thuộc G nên 1 thuộc F, 1 phải là phần tử bé nhất của F, do đó f(1) = 1. Từ đó g(1) = 2.

Ta không thể có được hai số liên tiếp n và n + 1 trong G, bởi vì nếu g(m) = n + 1 thì ta suy ra f(k) = n (với k nào đó), khi đó, n vừa thuộc F vừa thuộc G, mâu thuẫn.

Đặc biệt, ta có 3 thuộc F (vì theo trên 2 thuộc G), do đó f(2) = 3. Giả sử f(n) = k. Lúc đó g(n) = f(k) + 1. Suy ra $|N_{f(k)+1} \cap G| = n$ (kí hiệu $|A|$ chỉ số phần tử của tập hữu hạn A). Nhưng ta có $|N_{f(k)+1} \cap F| = k$ nên suy ra n + k = f(k) + 1, hay $f(k) = n + k - 1$. Từ đó $g(n) = n + k$, do vậy (n + k + 1) phải thuộc F và ta suy ra $f(k+1) = n + k + 1$.

Như thế, nếu biết f(n) = k, ta có thể tính được

$$f(k) = n + k - 1 \text{ và } f(k+1) = n + k + 1.$$

Kết quả này cho ta tính được:

f(2) = 3, f(4) = 6, f(7) = 11, f(12) = 19, f(20) = 32, f(33) = 53,

f(54) = 87, f(88) = 142, f(143) = 231, f(232) = 375.

Dãy tính trên (sử dụng $f(k+1) = n+k+1$) không giúp gì được để tính f(240), ta lại cố gắng với $f(k) = n+k-1$:

f(3) = 4, f(4) = 6, f(6) = 9, f(9) = 14, f(14) = 22, f(22) = 35,

f(35) = 56, f(56) = 90, f(90) = 145, f(145) = 234,

cũng sẽ không tính được f(240) nếu tiếp tục đi xa hơn.

Tuy nhiên, lại cố gắng, với kết quả f(56) = 90, ta dùng công thức $f(k+1) = n+k+1$ thì được f(91) = 147, f(148) = 239, f(240) = 338.

Vậy ta được f(240) = 338.

***Bài 74.* (1978)**

Cho $\{a_k\}$ là một dãy các số nguyên dương phân biệt (k =1, 2, ...).

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ ta có: $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$\{a_k\}$ is a sequence of distinct positive integers. Prove that for all positive integers n, we have $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Hướng dẫn:

Kí hiệu $S(a_1, a_2, ... a_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$ với $\{a_i\}$ thoả điều kiện

$$a_i \in N^+, a_i \neq a_j \text{ nếu } i \neq j.$$

Ta nhận xét rằng nếu $i > j$ mà $a_i < a_j$ thì: $\frac{a_i}{i^2} + \frac{a_j}{j^2} > \frac{a_i}{j^2} + \frac{a_j}{i^2}$, vì điều này tương dương với $\frac{a_j - a_i}{j^2} > \frac{a_j - a_i}{i^2} \Leftrightarrow i > j$ (vì $a_j > a_i$). Vậy nếu thay $a_j = a_i', a_i = a_j'$ thì: $S(a_1 ..., a_j, ..., a_i, ..., a_n) > S(a_1 ..., a_i', ..., a'_j, ..., a_n)$.

Từ đó, gọi $P = \max(a_1, ..., a_n)$ thì bằng các thay thế trên ta có:

$$S(a_1, ..., a_i, ..., a_n) > S(a_1, ..., p),$$

trong đó từ a_1 đến p là một sự sắp xếp từ bé đến lớn.

Do đó, để chứng minh $S(a_1, ..., a_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ta sẽ chứng minh:

$$S(a_1,\ldots,p) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Nhưng rõ ràng $a_k > k$, vì từ a_1 đến p là một sự sắp xếp từ bé đến lớn, đến đây ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_k = k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$.

***Bài 75.* (1978)**

Một hội quốc tế có hội viên thuộc 6 nước khác nhau. Danh sách các hội viên gồm 1978 người được đánh số theo thứ tự 1, 2, ..., 1978. Chứng minh rằng có ít nhất một hội viên mà số thứ tự bằng tổng các số thứ tự của hai hội viên thuộc cùng một nước với hội viên đó, hoặc bằng hai lần số thứ tự của một hội viên thuộc cùng một nước với hội viên đó.

An international society has its members from six different countries. The list of members has 1978 names, numbered 1, 2, ... , 1978. Prove that there is at least one member whose number is the sum of the numbers of two members from his own country, or twice the number of a member from his own country.

Hướng dẫn:

Giả sử 6 nước đó là A, B, C, D, E, F. Số hội viên tổng cộng là 1978 người. Như vậy tồn tại 1 nước có số hội viên lớn hơn hoặc bằng

$$\left[\frac{1978}{6}\right] + 1 = 330,$$

ta giả sử nước đó là A. Ta đánh số 330 hội viên trong số hội viên của nước đó là $a_1, a_2, \ldots a_{330}$ với $a_1 < a_2 < \ldots < a_{330}$. Hiển nhiên $a_i - a_j (i > j)$ cũng bằng số thứ tự của một hội viên nào đó trong 1978 hội viên này.

Bây giờ ta giải thiết trái lại: không có nước nào có hội viên có số thứ tự bằng tổng các số thứ tự của 2 hội viên nước đó, hoặc bằng hai lần số thứ tự của một hội viên nước đó.

Ta nhận xét rằng: nếu $a > b$ là hai số thứ tự của hai hội viên thì $a - b \geq 1$ cũng là số thứ tự của 1 hội viên nào đó trong 1978 người này, tức là không tồn tại a, b, c là ba số thứ tự hội viên của một nước để cho $a - b = c$ (b có thể bằng c).

Xét 329 hiệu $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{330} - a_1$. Các hiệu này đôi một khác nhau và theo điều giả sử của ta, các hiệu đó cũng khác cả các số thứ tự của hội viên thuộc nước A. Vậy 329 hiệu này là số thứ tự của 329 hội viên thuộc 5 nước còn lại. Suy ra tồn tại $\left[\frac{329}{5}\right]+1=66$ hiệu là số thứ tự của các hội viên thuộc một nước, giả sử đó là nước B và 66 hiệu đó ứng với các số thứ tự $b_1, b_2, ..., b_{66}$ của các hội viên của B:

$$b_1 < b_2 < ... < b_{66}.$$

Ta có $b_j - b_i (j > i;\ j, i = 1,2,...,66)$ cũng là số thứ tự hội viên của một nước nào đó (do $1 \le b_j - b_i < 1978$), theo giả thiết, phải khác B. Nó cũng không thể là số thứ tự của một hội viên thuộc A.

Lí luận tương tự, ta tiếp tục chứng minh được rằng các hiệu số $c_i - c_j$ $(i > j;\ i, j = 1,2, ... 16)$ theo giả thiết không phải là số thứ tự của hội viên nước C, cũng không thể là số thứ tự của các hội viên nước B, cũng không thể là số thứ tự của các hội viên nước A .v.v... Cuối cùng, chứng minh hiệu $f_2 - f_1$ không thể là số thứ tự của hội viên một trong 6 nước nào cả. Nhưng theo đề bài, nó lại là số thứ tự của một trong 1978 hội viên tức phải thuộc một trong 6 nước. Đó là điều mâu thuẫn, chứng tỏ giả thiết của ta là sai.

Vậy phải tồn tại một nước trong đó số thứ tự của một hội viên bằng tổng số thứ tự của hai hội viên khác của nước đó hoặc bằng hai lần số thứ tự của một hội viên khác của nước đó.

***Bài 76.* (1979)**

Cho m và n là các số nguyên dương sao cho:

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Chứng minh rằng m chia hết cho 1979.

Let m and n be positive integers such that:

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Prove that m is divisible by 1979.

Hướng dẫn:

Ta có: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} =$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{1318}\right) =$$

$$= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \dots + \frac{1}{1319}.$$

Để ý rằng 660 + 1319 = 1979, ta tách từng cặp các số hạng ở tổng trên và tính như sau:

$$\frac{1}{660} + \frac{1}{1319} = \frac{1979}{660.1319}, \quad \frac{1}{661} + \frac{1}{1318} = \frac{1979}{661.1318},$$

$$\frac{1}{662} + \frac{1}{1317} = \frac{1979}{662.1317}, \text{ v. v...}$$

Có một số chẵn các cặp được tách như trên, do vậy, ta có thể tách thành các cặp tất cả các số hạng của tổng trên, và mỗi cặp được tính như trên có dạng $1979/k$, với k không chia hết cho 1979 (vì 1979 là số nguyên tố và do đó tích các số bé hơn 1979 không chia hết cho 1979). Ta có tổng các số dạng 1/k nói trên là một phân số có mẫu không chia hết cho 1979. Từ đây, bạn đọc có thể tiếp tục suy luận để đi đến điều phải chứng minh.

***Bài 77.* (1979)**

Cho hình lăng trụ có đáy trên và đáy dưới là các ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $B_1B_2B_3B_4B_5$. Mỗi cạnh của hai ngũ giác này cũng như mỗi cạnh trong 25 cạnh A_iB_j (i, j = 1,...,5) đều được tô màu đỏ hoặc xanh. Biết rằng bất kì tam giác nào tạo thành từ 3 đỉnh của lăng trụ mà cả 3 cạnh đều được tô màu thì phải có 2 cạnh có màu khác nhau. Chứng minh rằng tất cả 10 cạnh của hai ngũ giác (ở đáy trên và đáy dưới) đều có cùng một màu.

A prism with pentagons $A_1A_2A_3A_4A_5$ *and* $B_1B_2B_3B_4B_5$ *as the top and bottom faces is given. Each side of the two pentagons and each of the 25 segments AiBj is colored red or green. Every triangle whose vertices are vertices of the prism and whose sides have all been colored has two sides of a different color. Prove that all 10 sides of the top and bottom faces have the same color.*

Hướng dẫn:

* Trước tiên, ta chứng minh rằng tất cả 5 cạnh của ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ đều có cùng màu.

Thật vậy, giả sử điều ngược lại xảy ra, khi đó, tồn tại hai cạnh, chẳng hạn A_1A_2, A_1A_5, có màu khác nhau. Ta xét 5 cạnh A_1B_j, j = 1, 2, ..., 5. Vì chỉ có 2 màu xanh và đỏ nên ít nhất trong chúng có 3 cạnh cùng màu, ta giả sử 3 cạnh này cùng màu xanh, và A_1A_2 cũng có màu xanh. Giả sử đó là 3 cạnh A_1B_i, A_1B_j, A_1B_k. Lúc đó, xét các tam giác $A_1A_2B_i$, $A_1A_2B_j$, $A_1A_2B_k$, ta có 3 cạnh A_2B_i, A_2B_j, A_2B_k phải cùng màu đỏ. Hai trong 3 đỉnh B_i, B_j, B_k phải kề nhau, nếu hai đỉnh này tạo thành cạnh sơn màu đỏ thì cùng với A_2, ta được tam giác có cả ba cạnh cùng màu đỏ, còn nếu 2 đỉnh đó tạo thành cạnh sơn màu xanh thì chúng sẽ cùng với A_1 tạo thành tam giác có cả 3 cạnh màu xanh, điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Như vậy, tất cả 5 cạnh của ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ đều có cùng màu.

* Tương tự như trên, ta cũng chứng minh được tất cả 5 cạnh của ngũ giác $B_1B_2B_3B_4B_5$ cũng đều có cùng màu.

* Vấn đề còn lại là chứng minh màu các cạnh của hai ngũ giác trên giống nhau. Giả sử ngược lại, chẳng hạn, 5 cạnh của ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ có màu xanh và 5 cạnh của ngũ giác $B_1B_2B_3B_4B_5$ có màu đỏ. Rõ ràng 3 trong 5 cạnh A_1B_i, i = 1, 2, ..., 5, phải có cùng màu. Giả sử đó là màu đỏ, thế thì lí luận như trên, 2 trong 3 đỉnh B_i đó phải là hai đỉnh kề nhau, từ đó, hai đỉnh này tạo với A_1 thành tam giác có cả 3 cạnh màu đỏ, mâu thuẫn! Như thế, 3 trong 5 cạnh A_1B_i, i = 1, 2, ..., 5, phải có cùng màu xanh.

Lí luận hoàn toàn tương tự, 3 trong 5 cạnh A_2B_i, i = 1, 2, ..., 5, phải có cùng màu xanh.

Trong số 3 cạnh A_1B_i (tập hợp 1) và 3 cạnh A_2B_i (tập hợp 2) vừa chỉ ra ở trên, chắc chắc phải có cùng một B_k nào đó chung ở 2 tập hợp 1 và 2. Khi đó, B_k này sẽ tạo với A_1 và A_2 thành một tam giác có cả 3 cạnh màu xanh, điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Ta có điều phải chứng minh.

***Bài 78.* (1979)**

Tìm tất cả những số thực a sao cho tồn tại 5 số thực không âm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thoả mãn các hệ thức:

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a,\ \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2,\ \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

Find all real numbers a for which there exist non-negative real numbers x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 satisfying:

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a,\ \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2,\ \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

Hướng dẫn:

Từ các hệ thức ở đầu bài suy ra $\left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{5} kx_k.\sum_{k=1}^{5} k^5x_k$, tức là : $(x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5)^2 =$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5) \times (x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5).$$

Sau khi khai triển cả hai vế ta sẽ được đẳng thức mà hệ số của các x_k^2 ở hai vế đều bằng nhau, trong khi đó, với mọi tích x_ix_j $(i \neq j)$ thì các hệ số của nó ở vế phải đều lớn hơn hệ số của nó ở vế trái. Điều đó chứng tỏ rằng mọi tích x_ix_j $(i \neq j)$ đều bằng 0, tức là trong 5 số x_k thì chỉ có nhiều nhất một số dương.

- Nếu mọi k, $x_k = 0$ thì $a = 0$.

- Nếu $x_1 > 0$ thì hệ thức thứ nhất (ở đầu bài) cho ta $x_1 = a$, hệ thức thứ hai cho $x_1 = a^2$. Vậy $a = 1$, các giá trị này của x_1 và a cũng thoả mãn hệ thức thứ ba.

- Nếu $x_2 > 0$ thì hệ thức thứ nhất cho $2x_2 = a \Rightarrow x_2 = a/2$, thay vào hệ thức thứ hai ta tính được $a = 4$, các giá trị $a = 4$ và $x_2 = 4:2 = 2$ cũng thoả mãn hệ thức thứ ba.

- Nếu $x_3 > 0$ thì hệ thức thứ nhất cho $3x_3 = a \Rightarrow x_3 = a/3$, thay vào hệ thức thứ hai ta tìm được $a = 9$, hệ thức thứ 3 cũng được thoả mãn.

- Tương tự, nếu $x_4 > 0$ ta tìm được $a = 16$.

- Nếu $x_5 > 0$ ta tìm được $a = 25$.

Bài toán có các nghiệm là $a = 0, 1, 4, 9, 16, 25$.

***Bài 79.* (1979)**

Một con ếch nhảy từ đỉnh A đến đỉnh đối tâm E của một hình bát giác đều. Tại mỗi đỉnh của bát giác trừ đỉnh E, con ếch có thể nhảy một bước tới một trong hai đỉnh kề. Đến E thì ếch dừng lại và ở luôn tại đó. Gọi a_n là số các đường đi phân biệt của con ếch đi từ A đến E bằng đúng n bước nhảy. Chứng minh rằng:

$$a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}].$$

Let A and E be opposite vertices of an octagon. A frog starts at vertex A. From any vertex except E it jumps to one of the two adjacent vertices. When it reaches E it stops. Let a_n be the number of distinct paths of exactly n jumps ending at E. Prove that:

$$a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}].$$

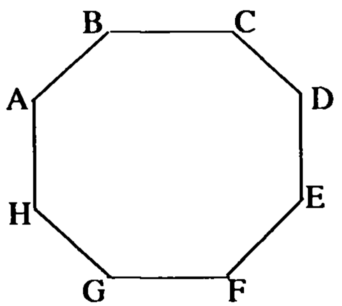
Hướng dẫn:

Mỗi bước con ếch nhảy thuận chiều kim đồng hồ ta biểu thị bằng một dấu cộng và mỗi bước con ếch nhảy ngược chiều kim đồng hề ta biểu thị bằng một dấu trừ. Lúc đó, mỗi đường đi phân biệt của con ếch có n bước nhảy sẽ được biểu thị bằng một dãy n dấu cộng và trừ. Dễ thấy rằng mỗi dãy đều có hai tính chất:

1) Số dấu cộng và trừ chênh nhau đúng 4.

2) Một dãy con gồm các dấu thứ nhất đến dấu thứ m, với $m < n$ tuỳ ý có các dấu cộng và trừ chênh nhau không quá 3.

1. Rõ ràng $a_{2n-1} = 0$, vì với một dãy gồm $2n-1$ dấu, số dấu cộng và số dấu trừ phải có một số lẻ và một số chẵn không thể chênh nhau đúng 4, tức là không thoả mãn tính chất 1).



2. Xét các dãy $2n$ dấu có số dấu cộng nhiều hơn số dấu trừ (ứng với các đường đi đến E qua đoạn DE, xem hình bên), ta gọi tất các dãy đó là các *dãy cộng* $2n$.

Số các dãy cộng $2n$ là $b_{2n} = \dfrac{a_{2n}}{2}$.

Trước hết ta chứng minh công thức:

$$b_{2n} = 4b_{2n-2} - 2b_{2n-4}. \qquad (*)$$

Dễ thấy rằng $b_2 = 0, b_4 = 1, b_6 = 4$. Do đó ta có thể viết $b_6 = 4b_4 - 2b_2$, tức là công thức (*) đúng với $n = 3$.

Giả sử (*) đúng với $n = k - 1$: $b_{2k-2} = 4b_{2k-4} - 2b_{2k-6}$, ta chứng minh (*) cũng sẽ đúng với $n = k$.

Các dãy cộng $2k$ bao gồm các dãy sau đây:

(a) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 2$;

(b) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 3$;

(c) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 4$;

(d) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 5$;

(e) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 6$;

(f) Các dãy có dấu trừ cuối cùng ở vị trí thứ $2k - 7$.

Ngoài ra không còn dãy nào khác vì dễ thấy rằng với mỗi dãy cộng thì:

- Hai dấu cuối cùng phải là hai dấu cộng;

- Không thể cả 8 dấu cuối cùng là dấu cộng, vì nếu vậy thì một trong hai tính chất 1) hoặc 2) sẽ không được thoả mãn.

Ta tính từng loại dãy trên:

+ Mỗi dãy cộng $2k - 2$ đều có dấu trừ cuối cùng ở trước vị trí thứ $2k - 3$, vì vậy từ mỗi dãy cộng $2k - 2$ sẽ lập được một dãy cộng $2k$ loại (a) bằng cách thêm một cặp + - vào trước hai dấu cộng cuối cùng và lập được một dãy loại (b) bằng cách thêm một cặp - + vào trước hai dấu cộng cuối cùng. Như vậy có ít nhất b_{2k-2} dãy loại (a) và b_{2k-2} dãy loại (b). Ta chứng minh số dãy loại (a) đúng bằng b_{2k-2}. Thật vậy, dễ thấy rằng bất kì dãy loại (a) nào thì dấu ở vị trí $2k - 3$ là dấu cộng và dấu ở vị trí $2k - 2$ là dấu trừ. Vì vậy khi bỏ cặp + - này đi thì sẽ được một dãy cộng $2k - 2$. Nếu số dãy loại (a) nhiều hơn b_{2k-2} thì bằng cách trên ta sẽ tìm được nhiều hơn b_{2k-2} dãy cộng $2k - 2$, là điều vô lí. Chứng minh tương tự ta có số dãy loại (b) đúng bằng b_{2k-2}.

+ Suy luận tương tự như trên sẽ thấy số dãy loại (c) bằng số dãy cộng $2k - 2$ không có dấu trừ ở vị trí $2k - 4$, tức là số dãy loại (c) bằng $b_{2k-2} - b_{2k-4}$.

+ Số dãy loại (d) bằng số dãy cộng $2k - 2$ không có dấu trừ ở vị trí $2k - 4$, $2k - 5$, tức là bằng $b_{2k-2} - b_{2k-4} - b_{2k-4} = b_{2k-2} - 2b_{2k-4}$.

+ Số dãy loại (e) bằng số dãy cộng $2k - 2$ không có dấu trừ ở các vị trí $2k - 4$, $2k - 5$, $2k - 6$, bằng

$$b_{2k-2} - 2b_{2k-4} - (b_{2k-4} - b_{2k-6}) = b_{2k-2} - 3b_{2k-4} + b_{2k-6}.$$

+ Số dãy loại (f) bằng số dãy cộng $2k-2$ không có dấu trừ ở các vị trí $2k-4$, $2k-5$, $2k-6$, $2k-7$, bằng

$$b_{2k-2}-3b_{2k-4}+b_{2k-6}-(b_{2k-4}-2b_{2k-6})=b_{2k-2}-4b_{2k-4}+3b_{2k-6}.$$

Tổng số cả 6 loại bằng: $b_{2k}=6b_{2k-2}-10b_{2k-4}+4b_{2k-6}=$

$$=4b_{2k-2}-2b_{2k-4}+2(b_{2k-2}-4b_{2k-4}+2b_{2k-6}).$$

Theo giả thiết quy nạp: $b_{2k-2}=4b_{2k-4}-2b_{2k-6}$, nên biểu thức trong ngoặc bằng 0. Vậy: $b_{2k}=4b_{2k-2}-2b_{2k-4}$.

Đẳng thức (*) được chứng minh. Từ (*) suy ra đẳng thức:

$$a_{2k}=4a_{2k-2}-2a_{2k-4}. \qquad (**)$$

Bây giờ dùng (**) và cũng bằng quy nạp ta chứng minh:

$$a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{n-1}-(2-\sqrt{2})^{n-1}]. \qquad (1)$$

Dễ dàng kiểm tra được (1) đúng với $n=1,2,3$. Giả sử (1) đã đúng với $n\le k$, ta chứng minh (1) cũng sẽ đúng với $n=k+1$. Thật vậy, từ (**) và từ giả thiết quy nạp ta có: $a_{2k+2}=4a_{2k}-2a_{2k-2}=$

$$=4.\frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{k-1}-(2-\sqrt{2})^{k-1}]-2.\frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{k-2}-(2-\sqrt{2})^{k-2}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{[4(2+\sqrt{2})-2](2+\sqrt{2})^{k-2}-[4(2-\sqrt{2})-2](2-\sqrt{2})^{k-2}\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(6+4\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^{k-2}-(6-4\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^{k-2}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^2(2+\sqrt{2})^{k-2}-(2-\sqrt{2})^2(2-\sqrt{2})^{k-2}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{k}-(2-\sqrt{2})^{k} \quad \text{(đpcm)}.$$

Như vậy công thức (1) được chứng minh.

***Bài 80.* (1981)**

Cho r là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $1\le r\le n$. Xét tất cả các tập con gồm r phần tử của tập hợp $\{1,2,...,n\}$. Mỗi tập con này đều có phần tử bé nhất. Gọi $F(n,r)$ là trung bình cộng của tất cả các phần tử bé nhất đó. Chứng minh rằng $F(n,r)\le\dfrac{n+1}{r+1}$.

Take r such that $1\le r\le n$, and consider all subsets of r elements *of the set $\{1,2,...,n\}$. Each subset has a smallest element. Let F(n,r) be the arithmetic mean of these smallest elements. Prove that:*

$$F(n,r) \le \frac{n+1}{r+1}.$$

Hướng dẫn:

Gọi $G(n,r)$là số trung bình cộng của các phần tử lớn nhất của các tập con đã nói ở đề bài. Bạn đọc hãy chứng minh:

$$F(n,r) = \frac{1}{C_n^r}(1.C_{n-1}^{r-1} + 2.C_{n-2}^{r-1} + ... + (n-r+1).C_{r-1}^{r-1}),$$

$$G(n,r) = \frac{1}{C_n^r}(n.C_{n-1}^{r-1} + (n-1).C_{n-2}^{r-1} + ... + r.C_{r-1}^{r-1}).$$

Mặt khác, sử dụng công thức $C_{m+1}^{k+1} = C_m^{k+1} + C_m^k$, và bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + ... + C_{r-1}^{r-1}$ nên dễ dàng thấy rằng: $F(n,r) + G(n,r) = \dfrac{(n+1)\left(C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + ... + C_{r-1}^{r-1}\right)}{C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + ... + C_{r-1}^{r-1}} = n+1$.

Ta phải chứng minh $F(n,r) = \dfrac{n+1}{r+1}$, muốn vậy chỉ cần chứng minh $G(n,r) = F(n,r).r$ hay $\dfrac{G(n,r)}{r} = F(n,r)$. Như vậy, ta cần chứng minh:

$$\frac{n}{r}.C_{n-1}^{r-1} + \frac{n-1}{r}.C_{n-2}^{r-1} + ... + \frac{r}{r}.C_{r-1}^{r-1}$$
$$= 1.C_{n-1}^{r-1} + 2.C_{n-2}^{r-1} + ... + (n-r+1).C_{r-1}^{r-1}. \qquad (*)$$

Ta có nhận xét sau:

$$\frac{n-k+1}{r}.C_{n-k}^{r-1} = \frac{(n-k)!(n-k+1)}{r(r-1)!(n-k+1)!} = C_{n-k+1}^r.$$

Như vậy vế trái của đẳng thức (*) bằng: $C_n^r + C_{n-1}^r + ... + C_r^r$

Tiếp tục, ta dễ dàng có được (*), tức là có điều phải chứng minh, bằng cách áp dụng công thức tổ hợp sau đây: $C_{m+1}^{k+1} = C_m^{k+1} + C_m^k$.

Chú ý: Từ hướng dẫn trên, bạn đọc hãy tự mình rút ra số trung bình cộng $G(n,r)$ của các phần tử lớn nhất của các tập con đã nói, và thiết lập bài toán cải biên.

***Bài 81.* (1981)**

Xác định giá trị lớn nhất của $m^2 + n^2$, với m và n là các số chọn từ dãy 1, 2, 3, ... , 1981 sao cho: $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

Determine the maximum value of $m^2 + n^2$, *where m and n are integers in the range* 1, 2, ... , 1981 *satisfying* $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

Hướng dẫn:

Giả sử (n, m), với n > m, là nghiệm của phương trình

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1. \qquad (*)$$

Ta thử thay (m + n, n) vào phương trình:

$$((n+m)^2 - (m+n)n - n^2)^2 = (-(n^2 - mn - m^2))^2 = 1.$$

Như vậy, nếu (n, m), với n > m, là một nghiệm của phương trình (*) nói trên thì (m + n, n) cũng là một nghiệm của phương trình (*). Rõ ràng (2, 1) là một nghiệm, nên kết quả này cho ta dãy nghiệm sau đây của (*):

(3, 2) ; (5, 3) ; (8, 5) ; (13, 8) ; (21, 13) ; (34, 21) ; (55, 34) ;
(89, 55) ; (144, 89) ; (233, 144) ; (377, 233) ;
(610, 377) ; (987, 610) ; (1597, 987) ; (2584, 1597). (**)

Tiếp tục, ta đi tìm những nghiệm còn lại.

Giả sử (n, m), với n > m, là nghiệm của (*).

Ta thử thay (m, n - m) vào phương trình:

$$(m^2 - m(n-m) - (n-m)^2)^2 = (m^2 + mn - n^2)^2 = -(n^2 - mn - m^2)^2 = 1.$$

Như vậy, nếu (n, m), với n > m, là một nghiệm của (*) nói trên thì (m , n - m) cũng là một nghiệm của (*).

Mặt khác, khi m > 1, ta có m > n - m (vì nếu không thì $n \geq 2m$, do đó $n(n-m) \geq 2m^2$, suy ra $n^2 - mn - m^2 > 1$). Do vậy, nếu (n, m), với n > m > 1, là một nghiệm của (*), ta sẽ có một nghiệm nhỏ hơn là (m, n - m), với m > n - m. Quá trình này được lặp lại và kết thúc ở (n, 1), với n > 1. Nhưng theo trên ta chỉ có nghiệm (2, 1). Vì thế, dãy nghiệm của (*) là dãy (**) nói trên.

Tóm lại, đáp số cho bài toán là $1597^2 + 987^2$.

Chú ý: Việc tìm nghiệm như quá trình trên xuất phát từ kinh nghiệm tựu thành khi giải những bài toán liên quan đến dãy Fibonacci. Xem *Dãy Fibonacci* ở phần *Các kiến thức bổ trợ*.

Bài 82. **(1981)**

a) Với giá trị nào của n (n > 2) thì sẽ tồn tại một tập gồm n số nguyên dương liên tiếp thỏa điều kiện: số lớn nhất trong tập hợp này là một ước số của bội chung nhỏ nhất của $n-1$ số còn lại?

b) Với giá trị nào của n (n > 2) thì sẽ tồn tại duy nhất một tập hợp có tính chất trên?

a) For which n (n > 2) is there a set of n consecutive positive integers such that the largest number in the set is a divisor of the least common multiple of the remaining $n-1$ numbers?

b) For which n (n > 2) is there exactly one set having this property?

Hướng dẫn:

* Giả sử n = 3 thỏa điều kiện đề bài. Khi đó, ta xét tập hợp gồm 3 số $m,\ m-1, m-2$. Vì $m-1, m-2$ không có thừa số chung nên bội chung nhỏ nhất của chúng là $(m-1)(m-2)$, do đó, m chia hết $(m-1)(m-2)=m^2-3m+2$, suy ra m chia hết 2, điều này mâu thuẫn.

* Giả sử n = 4. Xét tập hợp gồm 4 số $m,\ m-1, m-2, m-3$, m và (m - 1) không có thừa số chung, nó chỉ có thể có thừa số chung là 2 với (m - 2) và chỉ có thể có thừa số chung là 3 với (m - 3). Vì m là một ước số của bội chung nhỏ nhất của 3 số còn lại nên suy ra m có dạng $2^{\alpha}3^{\beta}$.

Giả sử $\beta=0$. Lúc đó, 2 không chia hết m - 1 và 2 không chia hết m - 3, chứng tỏ m chia hết m - 2, điều này mâu thuẫn. Tương tự, nếu $\alpha=0$ ta cũng có mâu thuẫn là m chia hết m - 3.

Giả sử $\alpha,\beta\ge1$. Lúc đó, tương tự như trên, ta có 2^{α} chia hết m - 2. Đặt $m-2=2^{\alpha}x$, ta có

$$2^{\alpha}x+2=2^{\alpha}3^{\beta}\Leftrightarrow x+2^{1-\alpha}=3^{\beta}.$$

Từ đó, $\alpha=1$. Lí luận tương tự với m - 3 ta có $\beta=1$. Suy ra m = 6.

Vậy khi n = 4, tồn tại duy nhất tập hợp $\{3,4,5,6\}$ thỏa điều kiện bài toán.

* Giả sử n > 4. Xét tập hợp gồm các số

m, m - 1, ..., m - (n - 3), m - (n - 2), m - (n - 1).

Ta muốn rằng m chia hết bội chung nhỏ nhất của các số còn lại.

Đặt m = (n - 1).(n - 2). Khi đó, n - 1 chia hết m - (n - 1) và n - 2 chia hết m - (n - 2), do đó (n - 1).(n - 2) chia hết bội chung nhỏ nhất của 2 số này, vì chúng nguyên tố cùng nhau. Từ đó, m = (n - 1).(n - 2) chia hết bội chung nhỏ nhất của các số còn lại.

Nếu đặt m = (n - 2)(n - 3), tương tự, ta cũng có kết quả như thế.

Tóm lại, câu trả lời cho (a) là $n\ge4$ và cho (b) là n = 4.

***Bài 83.* (1981)**

Cho hàm f(x, y) thỏa mãn các điều kiện:

$$f(0,y)=y+1\ ;\ f(x+1,0)=f(x,1);\ f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$$

với mọi số nguyên không âm x, y. Tìm $f(4,1981)$.

The function f(x,y) satisfies:

$$f(0,y)=y+1\ ;\ f(x+1,0)=f(x,1);\ f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$$

for all non-negative integers x, y. Find $f(4,1981)$.

Hướng dẫn:

Ta có: $f(1,n)=f(0,f(1,n-1))=1+f(1,n-1)$. Do đó

$$f(1,n)=n+f(1,0)=n+f(0,1)=n+2.$$

Ta lại có $f(2,n)=f(1,f(2,n-1))=f(2,n-1)+2$. Do đó

$$f(2,n)=2n+f(2,0)=2n+f(1,1)=2n+3.$$

Bây giờ: $f(3,n)=f(2,f(3,n-1))=2f(3,n-1)+3$. Đặt $u_n=f(3,n)+3$, lúc đó, $u_n=2u_{n-1}$ và $u_0=f(3,0)+3=f(2,1)+3=8$, do vậy:

$$u_n=2^{n+3} \text{ và } f(3,n)=2^{n+3}-3.$$

Ta có: $f(4,n)=f(3,f(4,n-1))=2^{f(4,n-1)+3}-3$,

$$f(4,0)=f(3,1)=2^4-3=13,\ f(4,1)=2^{24}-3,\ f(4,2)=2^{224}-3.$$

Cuối cùng, bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$f(4,n)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3,$$

trong đó số mũ chứa (n + 2) chữ số 2. Từ đó:

$$f(4,1981)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3,$$

với số mũ chứa 1983 chữ số 2.

***Bài 84.* (1982)**

Cho hàm f(n) xác định trên tập hợp các số nguyên dương và nhận giá trị trên tập hợp các số nguyên không âm, với f(2) = 0, f(3) > 0, f(9999) = 3333 và với mọi m, n: $f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ hay 1.

Hãy xác định f(1982).

The function f(n) is defined on the positive integers and takes non-negative integer values, f(2) = 0, f(3) > 0, f(9999) – 3333 and for all m, n:

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0 \text{ or } 1.$$

Determine f(1982).

Hướng dẫn:

Ta sẽ chứng minh rằng khi $n \le 9999$, ta có: $f(n)=\left[\dfrac{n}{3}\right]$, ở đây, [.] là kí hiệu của phần nguyên. Trước hết, ta có f(3) = 1. Thật vậy, f(1) phải bằng 0, vì nếu không thì $f(2)-f(1)-f(1)$ là số âm. Suy ra

$$f(3)=f(2)+f(1)+\left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.=\left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right..$$

Nhưng f(3) > 0 theo giả thiết, vì vậy f(3) = 1.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $f(3n)\ge n$. Vì

$$f(3n+3)=f(3)+f(3n)+\left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.=f(3n)+\left[\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.,$$

hơn nữa, nếu ta có f(3n) > n thì lí luận tương tự ta được f(3m) > m với mọi m > n, mặt khác f(3.3333) = 3333, do vậy f(3n) = n với mọi n ≤ 3333.

Bây giờ, từ chứng minh trên ta có

$$f(3n+1)=f(3n)+f(1)+\left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.=\left[\begin{matrix}n\\n+1\end{matrix}\right..$$

Nhưng 3n + 1 = f(9n + 3) ≥ f(6n + 2) + f(3n + 1) ≥ 3f(3n + 1), do đó f(3n + 1) < n + 1. Suy ra f(3n + 1) = n.

Tương tự ta cũng có f(3n + 2) = n, đặc biệt: $f(1982)=660$.

***Bài 85.* (1982)**

Xét dãy vô hạn các số thực dương $\{x_n\}$ thoả điều kiện:

$$1=x_0\ge x_1\ge\ldots\ge x_i\ge x_{i+1}\ge\ldots \qquad (*)$$

a) Chứng minh rằng với mọi dãy có tính chất (*) như thế đều tồn tại một số $n\ge 1$ sao cho

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\ge 3{,}999.$$

b) Tìm một dãy có tính chất (*) như trên sao cho

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$$

với mọi số tự nhiên n.

Consider infinite sequences $\{x_n\}$ *of positive reals such that we have* $1 = x_0 \geq x_1 \geq \ldots \geq x_i \geq x_{i+1} \geq \ldots$.

a) Prove that for every such sequence there is an $n \geq 1$ *such that:*

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3{,}999.$$

b) Find such a sequence for which:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4 \quad \textit{for all } n.$$

Hướng dẫn:

a) Xét dãy vô hạn $\frac{x_0^2}{x_1}, \frac{x_1^2}{x_2}, \ldots, \frac{x_{n-1}^2}{x_n}, \ldots$ Bài toán sẽ được giải xong nếu ta chứng tỏ được rằng tổng của dãy vô hạn trên luôn lớn hơn hoặc bằng 4. Gọi k là cận trên bé nhất của các giới hạn của những dãy như đã nói trên. Rõ ràng $k \geq 1$. Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có thể tìm được một dãy $\{x_n\}$ có tổng bé hơn k + ε. Nhưng ta có:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} + \ldots = \frac{x_0^2}{x_1} + x_1\left(\frac{\left(\frac{x_1}{x_1}\right)^2}{\frac{x_2}{x_1}} + \frac{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}{\frac{x_3}{x_1}} + \ldots + \frac{\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2}{\frac{x_{n+1}}{x_1}} + \ldots\right).$$

Tổng trong ngoặc ở đẳng thức trên là tổng của một dãy khác nhưng cũng có tính chất của dãy đang xét, do đó tổng này $\geq k$. Suy ra

$$k + \varepsilon > \frac{1}{x_1} + x_1 k,$$

điều này đúng với mọi $\varepsilon > 0$, do đó: $k \geq \frac{1}{x_1} + x_1 k$. Mặt khác,

$$\frac{1}{x_1} + x_1 k \geq 2\sqrt{k},$$

do vậy $k \geq 4$. Ta được điều phải chứng minh.

b) Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \frac{1}{2^n}$. Lúc đó, với mọi n ta có:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} = 4 - \frac{1}{2^{n-2}} < 4.$$

Bài 86. **(1982)**

Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương sao cho phương trình $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ có một nghiệm nguyên (x, y), thì phương trình này sẽ tồn tại ít nhất 3 nghiệm nguyên. Chứng minh rằng phương trình trên không có nghiệm nguyên khi n = 2891.

Prove that if n is a positive integer such that the equation

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

has a solution in integers x, y, then it has at least three such solutions. Show that the equation has no solutions in integers for n = 2891.

Hướng dẫn:

Ta viết lại vế trái của phương trình đã cho như sau:

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y-x)^3 - 3x^2y + 2x^3 = (y-x)^3 - 3(y-x)x^2 + (-x)^3.$$

Từ đó, nếu (x, y) là một nghiệm thì (y - x, -x) cũng là một nghiệm, và bằng những biến đổi đại số tương tự như trên, ta cũng có (-y, x - y) là một nghiệm của phương trình.

Hơn nữa, 3 nghiệm nói trên phân biệt nhau, bởi nếu có hai trong 3 nghiệm ấy bằng nhau, ta dễ dàng suy ra x = y = 0, mâu thuẫn với điều kiện n > 0.

Để chứng minh rằng phương trình đã cho không có nghiệm nguyên khi n = 2891, ta giả sử ngược lại rằng tồn tại nghiệm trong trường hợp này, khi đó, ta viết nghiệm x và y dưới dạng mod 3, và phương trình đã cho trở thành $x^3 + y^3 \equiv -1$ (mod 3), suy ra $x + y \equiv -1$ (mod 3). Do vậy ta có các trường hợp:

(i) $x \equiv 0$ (mod 3) và $y \equiv -1$ (mod 3);

(ii) $x \equiv 1$ (mod 3) và $y \equiv 1$ (mod 3);

(iii) $x \equiv -1$ (mod 3) và $y \equiv 0$ (mod 3).

Ở trường hợp (i), đặt x = 3m, y = 3n - 1 và thay vào phương trình đã cho ta được vế trái $\equiv -1$ (mod 9), trong khi đó, $2981 \equiv 2$ (mod 9), mâu thuẫn! Trường hợp (ii) không xảy ra được, vì theo trên, nếu (x, y) là một nghiệm thì (y - x, -x) cũng là một nghiệm, và do đó trường hợp này dẫn đến trường hợp (i). Tương tự, (iii) cũng đưa về trường hợp (ii).

Tóm lại, phương trình đã cho không thể có nghiệm nguyên khi

n = 2981.

***Bài 87.* (1982)**

Xét hình vuông S có cạnh dài 100 (đơn vị). Gọi L là một đường gấp khúc nằm trong S không tự cắt chính nó, L bao gồm các đoạn thẳng A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, với A_0 không trùng với A_n. Giả sử với mọi điểm P nằm trên biên (tức là các cạnh) của S đều có một điểm trên L sao cho khoảng cách từ điểm này đến P không lớn hơn 1/2. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm X và Y trên L sao cho khoảng cách giữa X và Y không lớn hơn 1, và độ dài phần đường gấp khúc của L nằm giữa X và Y không bé hơn 198.

Let S be a square with sides length 100. Let L be a path within S which does not meet itself and which is composed of line segments A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, with A_0 does not coincide A_n. Suppose that for every point P on the boundary of S there is a point of L at a distance from P no greater than 1/2. Prove that there are two points X and Y of L such that the distance between X and Y is not greater than 1 and the length of the part of L which lies between X and Y is not smaller than 198.

Hướng dẫn:

Như lệ thường, ta kí hiệu d là khoảng cách Euclide giữa hai điểm. Khi đi dọc theo đường L, ta chọn một điểm P_1 có khoảng cách đến đỉnh V_1 của hình vuông không quá 1/2. Ta tiếp tục đi xa hơn cho đến khi tiếp cận với một trong hai đỉnh kề của V_1, gọi đỉnh này là V_2, tương ứng ta cũng có P_2, và rồi ta cũng có V_3, V_4, tương ứng có các điểm P_3, P_4.

Kí hiệu $[L < P_2]$ là phần đường L tính từ P_2 về trước và $[L > P_2]$ là phần còn lại. Xét cạnh V_1V_4. Đặt

$$A = \left\{ x \in V_1V_4 : d(x, [L < P_2]) \le \frac{1}{2} \right\},$$

$$B = \left\{ x \in V_1V_4 : d(x, [L > P_2]) \le \frac{1}{2} \right\}.$$

Chú ý rằng từ giả thiết ta có $A \cup B = V_1V_4$.

Hơn nữa, ta cũng có $A \cap B \neq \varnothing$.

Chọn $z \in A \cap B$. Lấy $X \in [L < P_2]$ sao cho $d(X, z) \le \frac{1}{2}$, cũng vậy, ta chọn điểm $Y \in [L > P_2]$. Khi đó $d(X, Y) \le 1$ và phần đường gấp khúc giữa X và Y sẽ có giá trị bé nhất là 198.

***Bài 88.* (1983)**

Tìm tất cả những hàm $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $f(xf(y)) = yf(x),\ \forall x,y \in (0,\infty)$;

ii) $f(x)\to\infty$ khi $x\to\infty$.

Find all functions f defined on the set of positive reals which take positive real values and satisfy:

i) $f(xf(y)) = yf(x),\ \forall x,y \in (0,\infty)$;

ii) $f(x)\to\infty$ *while* $x\to\infty$.

Hướng dẫn:

Ta có $f^2(y) = yf(1)$, và do f(1)$\neq$0 nên f là song ánh. Từ đó, tồn tại y để f(y) = 1. Kết hợp điều này với (i) khi cho x = 1 ta được

$$f(1.1) = f(1) = yf(1),$$

và từ f(1) > 0, ta có y = 1, suy ra f(1) = 1.

Cho y = x trong (i) ta có $f(xf(x)) = xf(x)$ với mọi x > 0.

Suy ra xf(x) là *điểm bất động* của f.

Bây giờ, nếu cả x và y là các điểm bất động của f thì cũng từ (i) ta được f(xy) = yx, do đó xy cũng là điểm bất động. Như vậy, tập các điểm bất động là *đóng* với phép nhân. Hơn nữa, nếu x là điểm bất động, ta có

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

nên $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$, nghĩa là $\frac{1}{x}$ cũng là điểm bất động. Nói cách khác, tập các điểm bất động *đóng* với phép nghịch đảo.

Như vậy, ngoài điểm 1 ra, nếu f có điểm bất động khác, thì hoặc điểm này lớn hơn 1, hoặc nghịch đảo của nó lớn hơn 1, do đó, luỹ thừa nhiều lần của điểm lớn hơn 1 này (theo trên, cũng là điểm bất động) sẽ lớn tuỳ ý, điều này trái với điều kiện (ii). Vậy 1 là điểm bất động duy nhất của f, và do xf(x) là điểm bất động với mọi x > 0 nên hàm duy nhất thoả mãn điều kiện của bài toán là $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ghi chú:

+ x là *điểm bất động* của hàm f nếu f(x) = x. Ở chương trình Toán chuyên ngành bậc Đại học và sau Đại học, bạn đọc sẽ thường xuyên gặp khái niệm này. Điểm mấu chốt của chứng minh trên là dựa vào các điều kiện đề bài để chứng tỏ hàm f cần tìm có điểm bất động duy nhất. Một định lí đóng vai trò hết sức quan trọng trong Lí thuyết Phương trình vi phân, Phương trình tích phân, Bất đẳng thức biến phân, ..., đó là *Nguyên lí ánh xạ co Banach*, nguyên lí này nói rằng trong một số điều kiện (khá rộng rãi), hàm f sẽ có duy nhất điểm bất động (xem, chẳng hạn, Phan Đức Chính, *Giải tích hàm*, ĐH và THCN, 1976).

+ Ta nói tập S là *đóng* đối với phép toán * nếu

$$\forall x, y \in S, x * y \in S.$$

***Bài 89.* (1983)**

Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho không có 2 số nào trong chúng có ước chung lớn hơn 1 (nguyên tố cùng nhau). Chứng minh rằng $2abc - ab - bc - ca$ là số nguyên lớn nhất không thể biểu diễn được dưới dạng $xbc + yca + zab$, với x, y, z là các số nguyên không âm.

Let a, b and c be positive integers, no two of which have a common divisor greater than 1. Show that $2abc - ab - bc - ca$ *is the largest integer which cannot be expressed in the form* $xbc + yca + zab$*, where x, y, z are non-negative integers.*

Hướng dẫn:

Ta sẽ chứng minh rằng:

a) $2abc - ab - bc - ca$ không thể biểu diễn dưới dạng

$$xbc + yca + zab,$$

với x, y, z là các số nguyên không âm.

b) Nếu N là số nguyên sao cho $N > 2abc - ab - bc - ca$ thì N có thể được biểu diễn dưới dạng $xbc + yca + zab$, với x, y, z là các số nguyên không âm.

Chứng minh a): Giả sử tồn tại các số nguyên không âm x, y, z sao cho $2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab$. Khi đó, vì vế trái chia hết cho c nên ở vế phải, số hạng (z + 1) ab phải chia hết cho c. Nhưng theo giả thiết thì các cặp số (a, c) và (b, c) không có ước chung nào lớn hơn 1 nên suy ra z + 1 chia hết cho c. Do z + 1 ≠ 0 và z + 1 chia hết cho c nên z + 1 ≥ c. Chứng minh tương tự ta có z + 1 ≥ c, x + 1 ≥ a, y + 1 ≥ b.

Từ đó, ta có điều mâu thuẫn.

Chứng minh b):

Bổ đề: Giả sử a và b là hai số tự nhiên và nguyên tố cùng nhau. Khi đó tổng có dạng mb + na, trong đó m và n là các số nguyên không âm không lớn hơn a - 1 và b - 1 tương ứng, sẽ nhận hết mọi số dư có thể của phép chia cho ab.

Chứng minh: Khi chia cho ab ta có số dư khác nhau. Vì m nhận a giá trị và n nhận b giá trị nên tập hợp các tổng dạng mb + na sẽ gồm ab phần tử. Vậy chỉ còn phải chứng minh rằng nếu các cặp có thứ tự (m_1, n_1) và (m_2, n_2) là khác nhau thì các số m_1b+n_1a và m_2b+n_2a khi chia cho ab, sẽ cho các số dư khác nhau. Bạn đọc dễ dàng chứng minh điều này bằng phản chứng, với chú ý a và b nguyên tố cùng nhau.

Áp dụng bổ đề trên, vì hai số ab và c nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra rằng các số dạng kbc + mac nhận hết mọi số dư của phép chia cho ab, với $0 \le k \le a-1$, $0 \le m \le b-1$. Vì vậy với mỗi N nguyên ta luôn tìm được các số nguyên không âm k_o và m_o sao cho: $k_0bc+m_0ac \equiv N$ (mod ab), từ đó suy ra:

(i) tồn tại số nguyên z_o sao cho $N-k_0bc-m_0ac=z_0ab$; (*)

(ii) nếu $N > 2abc-ab-bc-ca$ thì số z_o là không âm.

Thật vậy, do $0 \le k_0 \le a-1$, $0 \le m_0 \le b-1$ nên:

$$k_0bc+m_0ac \le (a-1)bc+(b-1)ac = 2abc-bc-ca.$$

Vậy $N \ge k_0bc+m_0ac$ (Điều này hiển nhiên trong trường hợp N > 2abc - ab - bc - ca. Nếu $2abc-ab-bc-ca < N \le abc-bc-ca$, ta sử dụng điều sau đây: trong khoảng đang xét có đúng ab số tự nhiên liên tiếp, ngoài ra các số dư của chúng khi chia cho ab là khác nhau. Vì N và $k_obc + m_oca$ khi chia cho ab có cùng số dư nên $N = k_obc + m_oca$.).

Do $N \ge k_0bc+m_0ac$, nên từ (*) ta có $z_0 \ge 0$. Như vậy, ta đã chứng minh rằng mọi N nguyên thoả mãn $N > 2abc-ab-bc-ca$ đều biểu diễn được dưới dạng $N = k_obc + m_oca + z_oab$, trong đó k_o, m_o, z_o là những số nguyên không âm.

Bài toán đến đây đã được giải quyết.

***Bài 90.* (1983)**

Có thể chọn được hay không 1983 số nguyên dương khác nhau sao cho tất cả các số ấy đều nhỏ hơn hoặc bằng 100000 và không có bất cứ 3 số nào trong chúng tạo thành một cấp số cộng?

Is it possible to choose 1983 distinct positive integers, all less than *or equal to 10000, no three of which are consecutive terms of an arithme- -tic progression?*

Hướng dẫn:

Ta sẽ xây dựng một tập hợp T lớn hơn, gồm 2047 số nguyên, tất cả đều nhỏ hơn 100000 và không có bất cứ 3 số nào trong chúng tạo thành một cấp số cộng.

Gọi T là tập hợp bao gồm các số nguyên dương được biểu diễn theo hệ cơ số 3, sao cho mỗi số có nhiều nhất 11 chữ số, mỗi chữ số là 0 hoặc 1. Vậy T có $2^{11} - 1 = 2047 > 1983$ số như thế, số lớn nhất là

$$11111111111 = 1 + 1.3 + 1.3^2 + ... + 1.3^{10} = 88573 < 100000.$$

Bây giờ, giả sử có x, y, z $\in$ T sao cho x + z = 2y. Số 2y chỉ gồm các chữ số 0 và 2, từ đó ta suy ra được x = y = z. Điều này có nghĩa không có bất cứ 3 số nào trong T tạo thành một cấp số cộng.

***Bài 91.* (1983)**

Cho tam giác đều ABC và gọi S là tập tất cả những điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CA (gồm cả 3 điểm A, B, C).

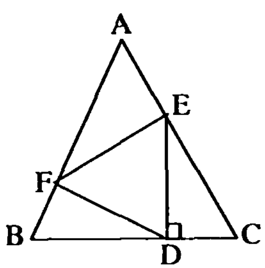
Hãy xác định xem điều này có đúng không: *với mọi phân hoạch S thành 2 tập con rời nhau thì ít nhất một trong hai tập đó sẽ chứa 3 đỉnh của một tam giác vuông?*

Let ABC be an equilateral triangle and S the set of all points contained in the three segments AB, BC and CA (including A, B and C).

Determine whether, for every partition of S into two disjoint subsets, at least one of the two subsets contains the vertices of a right-angled triangle.

Hướng dẫn:

Giả sử ngược lại, tồn tại S là một phân hoạch như đã nói ở đề bài mà không có tập nào được phân ra có chứa 3 đỉnh của một tam giác vuông. Tô màu tất cả các phần tử của hai tập được phân ra với hai màu đỏ và xanh tương ứng. Giả sử rằng mỗi tam giác vuông đều có hai màu.



Xét tam giác DEF sao cho

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CA} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$$

như hình vẽ. Dễ thấy các tam giác DEC, EAF, FBD vuông tại D, E, F tương ứng. Không mất tính tổng quát, ta giả sử F và E có màu đỏ. Khi đó, toàn bộ cạnh AC, trừ điểm E, có màu xanh. Suy ra D có màu đỏ.

Lí luận tương tự, ta cũng có cả 3 điểm D, E, F đều có màu xanh.

Điều mâu thuẫn trên cho ta kết luận của bài toán.

***Bài 92.* (1983)**

Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$.

Hãy xác định xem khi nào dấu đẳng thức xảy ra.

Let a, b and c be the lengths of the sides of a triangle.

Prove that $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$.

Determine when equality occurs.

Hướng dẫn:

Đặt a = y + z, b = z + x, c = x + y. Lúc đó, điều kiện các cạnh của một tam giác đòi hỏi x, y, z > 0. Sau những biến đổi cần thiết, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $xy^3+yz^3+zx^3\ge xyz(x+y+z)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$(xy^3+yz^3+zx^3)(x+y+z)\ge xyz(x+y+z)^2,$$

từ đó, suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{xy^3}{z}=\frac{yz^3}{x}=\frac{zx^3}{y}\Leftrightarrow x=y=z.$$

Trở lại với a = y + z, b = z + x, c = x + y, ta có dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c, tức là tam giác ABC đều.

***Bài 93.* (1984)**

Chứng minh rằng $0\le yz+zx+xy-2xyz\le\frac{7}{27}$, trong đó, x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện x + y + z = 1.

Prove that $0\le yz+zx+xy-2xyz\le 7/27$, *where x, y and z are non-negative real numbers satisfying x + y + z = 1.*

Hướng dẫn:

Ta có: $(1-2x)(1-2y)(1-2z)$

$$=1-2(x+y+z)+4(yz+zx+xy)-8xyz$$

$$=4(yz+zx+xy)-8xyz-1,$$

do giả thiết x + y + z = 1. Từ đó ta suy ra:

$$yz + zx + xy - 2xyz = \frac{1}{4}(1-2x)(1-2y)(1-2z) + \frac{1}{4}.$$

Mặt khác, theo Định lí *trung bình số học - hình học* (xem phần *kiến thức bổ trợ*) ta cũng có:

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) \le \frac{1}{3}(1-2x+1-2y+1-2z)^3 = \frac{1}{27}.$$

Do vậy, ta suy ra $yz + zx + xy - 2xyz \le \frac{1}{4}.\frac{28}{27} = \frac{7}{27}$.

Ngoài ra, do giả thiết x + y + z = 1, ta có:

$$yz + zx + xy - 2xyz = xy(1-z) + xz(1-y) + yz \ge 0$$

nên suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 94.* (1984)**

Tìm hai số nguyên dương a, b thỏa mãn 2 điều kiện:

i) $ab(a+b)$ không chia hết cho 7;

ii) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ chia hết cho 7^7.

Find one pair of positive integers a, b such that ab(a+b) is not divisible by 7, but $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ is divisible by 7^7.

Hướng dẫn:

Ta có:

$$\begin{aligned}(a+b)^7 - a^7 - b^7 &= 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 \\ &= 7ab(a^5 + 3a^4b + 5a^3b^2 + 5a^2b^3 + 3ab^4 + b^5) \\ &= 7ab(a+b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) \\ &= 7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2.\end{aligned}$$

Từ đây, kết hợp các điều kiện (i) và (ii) ta có $a^2 + ab + b^2$ chia hết cho 7^3. Ta có $(a+b)^2 > a^2 + ab + b^2 \ge 7^3 = 343$, suy ra:

$$a + b \ge [\sqrt{343}] = 18.$$

Thử cho a = 1, b = 18, ta thấy hai điều kiện của đầu bài được thỏa mãn. Vậy cặp số nguyên dương cần tìm là (a, b) = (1, 18).

***Bài 95.* (1984)**

Trong mặt phẳng, cho 2 điểm phân biệt O và A. Với mọi điểm X (khác O) trong mặt phẳng này, ta kí hiệu a(X) là số đo của góc giữa OA và OX, tính từ OA, theo chiều ngược kim đồng hồ, $0 \le a(X) \le 2\pi$. Gọi C(X) là đường tròn tâm O bán kính OX + $\frac{a(X)}{OX}$.

Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong một số hữu hạn các màu sắc khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một điểm Y mà a(Y) > 0 sao cho tồn tại một điểm trên biên (trên chu vi) của đường tròn C(Y) có cùng màu với Y.

Given points O and A in the plane. Every point in the plane is colored with one of a finite number of colors. Given a point X in the plane, let a(X) be angle AOX, which is measured in radians in the range [0, 2π) counter-clockwise.

The circle C(X) has center O and radius OX + $\dfrac{a(X)}{OX}$. Prove that we can find a point Y, not on OA (a(Y) > 0), such that its color appears on the circumference of the circle C(Y).

Hướng dẫn:

Giả sử các điểm của mặt phẳng được tô bởi n màu.

Trên một đường tròn bất kì, có thể có đến $2^n - 1$ tổ hợp màu khác nhau. Suy ra rằng, nếu ta lấy 2^n đường tròn mà mỗi đường tròn này đều có tâm O và bán kính bé hơn 1, thì phải có 2 trong số những đường tròn đó có cùng một số màu. Ta gọi r, s là bán kính hai đường tròn này (0 < r, s < 1). Bài toán sẽ được giải xong nếu ta chứng minh được rằng tồn tại một điểm Y trên đường tròn tâm O bán kính r sao cho C(Y) là đường tròn bán kính s, nói cách khác, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại điểm Y để cho $r + \dfrac{a(Y)}{r} = s$. Nhưng điều này được thỏa mãn, vì chỉ cần lấy Y sao cho a(Y) = $r(s-r)$. (Để ý rằng ta luôn lấy được Y vì

$$0 < r(s-r) < 1 < 2\pi\,.)$$

***Bài 96.* (1984)**

Gọi d là tổng độ dài các đường chéo của một đa giác lồi trong mặt phẳng có n đỉnh, n > 3. Gọi p là chu vi đa giác đó.

Kí hiệu như thường lệ, [x] là phần nguyên của số thực x, hãy chứng minh rằng:

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2.$$

Let d be the sum of the lengths of all the diagonals of a plane convex polygon with n > 3 vertices.

Let p be its perimeter. Prove that:

$$n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2,$$

where [x] denotes the greatest integer not exceeding x.

Hướng dẫn:

Xét đường chéo AX, ta gọi B là đỉnh kế tiếp của đa giác kể từ A, ngược chiều kim đồng hồ và Y là đỉnh kế tiếp của đa giác kể từ X, ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó, ta gọi K là giao điểm của AX và BY. Vì

AK + KB > AB và KX + KY > XY nên AX + BY > AB + XY. (*)

Giữ điểm A cố định, cho điểm X thay đổi qua các đỉnh, ta thấy (n - 3) trường hợp xảy ra, nghĩa là ta thiết lập được tất cả (n - 3) bất đẳng thức như (*).

Trong quá trình thiết lập các bất đẳng thức này, ở vế trái, mỗi đường chéo xuất hiện 4 lần, còn ở vế phải, mỗi cạnh xuất hiện 2(n - 3) lần, do đó, khi lấy tổng các bất đẳng thức này vế theo vế ta được:

$$4d>2(n-3)p\Leftrightarrow n-3<\frac{2d}{p}.$$

Gọi d_k là tổng các đường chéo nối hai đầu mút của đường gấp khúc gồm k cạnh liên tiếp của đa giác, ta có:

$$d_k<kp,\ k=2,3,\ldots,\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right),$$

$$d_{\left[\frac{n}{2}\right]}<\left[\frac{n}{2}\right].p \text{ khi n lẻ; } d_{\left[\frac{n}{2}\right]}<\frac{p}{2}.\left[\frac{n}{2}\right] \text{ khi n chẵn.}$$

Vì vậy:

- **Khi n lẻ, ta có:** $d=d_2+d_3+\ldots+d_{\left[\frac{n}{2}\right]}<p\left(2+3+\ldots+\left[\frac{n}{2}\right]\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\left[\frac{n}{2}\right]\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)=\frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)-2\right)=\frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right).$$

- **Khi n chẵn, ta có:** $d=d_2+d_3+\ldots+d_{\left[\frac{n}{2}\right]}<$

$$<p\left(2+3+\ldots+\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)+\frac{p}{2}\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]^2-2\right)=\frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right).$$

Ta đã chứng minh được các bất đẳng thức ở đề bài.

Bài 97. **(1984)**

Cho a, b, c, d là các số nguyên lẻ sao cho $0 < a < b < c < d$ và $ad = bc$. Chứng minh rằng nếu $a + d$ và $b + c$ là các lũy thừa của 2 thì $a = 1$.

Let a, b, c, d be odd integers such that $0 < a < b < c < d$ and $ad = bc$. Prove that if $a + d = 2^k$ and $b + c = 2^m$ for some integers k and m, then $a = 1$.

Hướng dẫn:

Giả sử $a + d = 2^m$ và $b + c = 2^n$. Ta có $a < c$, do đó

$$a(d-c) < c(d-c),$$

suy ra $bc - ac < c(d-c)$. Từ đó, $b - a < d - c \Leftrightarrow a + d > b + c$. Vậy $m > n$.

Bây giờ, ta có $b(2^n - b) = bc = ad = a(2^m - a)$, suy ra

$$2^n(b - a2^{m-n}) = b2^n - a2^m = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a),$$

và do đó $(b-a)(b+a)$ chia hết cho 2^n. Mặt khác, nếu có $b \pm a \equiv 0$ (mod 4) thì $b \equiv 0$ (mod 2), điều này mâu thuẫn, vì b là số lẻ.

Do vậy, ta suy ra, hoặc (b - a) chia hết cho 2^{n-1}, hoặc (b + a) chia hết cho 2^{n-1}. Ta gọi x là một trong 2 số (b + a) và (b - a) thì

$$0 < x \le b + a < b + c = 2^n, \text{ nên ta suy ra } x = 2^{n-1}.$$

Bây giờ, ta gọi y là ước số nguyên tố chung của a và b, thì y cũng là ước số nguyên tố chung của a + b và a - b, do đó y = 2. Mà a, b lẻ nên suy ra a, b nguyên tố cùng nhau. Ta có: $2^{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = b + c - x = c \pm a$ nên tương tự, ta cũng có a và c nguyên tố cùng nhau.

Từ đó, a và bc nguyên tố cùng nhau, nhưng vì bc chia hết cho a nên a = 1, điều phải chứng minh.

Bài 98. **(1985)**

Cho n là một số tự nhiên, k là một số nguyên nguyên tố với n; $1 \le k \le n-1$, M là tập hợp $\{1,2,\ldots,n-1\}$. Mỗi phần tử của M được tô bằng một trong hai màu trắng hoặc xanh. Ta giả sử:

a) với mọi i thuộc M, i và n - i có cùng màu;

b) với mọi i thuộc M, $i \neq k$, i và $|i-k|$ có cùng màu.

Chứng minh rằng tất cả các phần tử của M đều có cùng màu.

Let n and k be relatively prime positive integers with $k < n$. Each number in the set $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\text{-}1\}$ is colored either blue or white. For each i in M, both i and n-i have the same color. For each i in M not equal *to k, both i and |i-k| have the same color. Prove that all numbers in M must have the same color.*

Hướng dẫn:

Để chứng tỏ rằng tất cả phần tử có cùng màu ta sẽ hoán vị chúng sao cho từ những điều kiện cho trước của đầu bài suy ra mỗi phần tử của tập hợp đã hoán vị có cùng màu với tập hợp ban đầu của nó. Xét (n - 1) bội số đầu tiên của k và rút gọn chúng (mod n) bằng cách đặt:

$$m_r \equiv rk \pmod n,\ r = 1, 2, ..., n-1.$$

Vì (n, k) = 1, rk không đồng dư với 0, hơn nữa, vì $ik \equiv jk \pmod n$ khi và chỉ khi i = j nên tập hợp $\{m_1, m_2, ..., m_{n-1}\}$ là một hoán vị của M.

Ta có hai trường hợp:

a) $m_r = m_{r-1} + k$, nếu $m_{r-1} + k < n$;

b) $m_r = m_{r-1} + k - n$, nếu $m_{r-1} + k > n$.

Trong trường hợp (a), do điều kiện thứ hai của đầu bài, m_r có cùng màu với $|m_r - k| = m_{r-1}$. Trong trường hợp (b), cũng do điều kiện thứ hai mà m_r có cùng màu với $|m_r - k| = n - m_{r-1}$, và do điều kiện thứ nhất, nó lại cùng màu với m_{r-1}.

Tóm lại, tất cả các phần tử của M đều có cùng màu.

***Bài 99.* (1985)**

Cho đa thức với hệ số nguyên P(x) = $a_0 + a_1x + ... + a_kx^k$. Ta kí hiệu số các hệ số lẻ của đa thức này là o(P). Với i = 0, 1, 2, 3, ..., ta đặt $Q_i(x) = (1+x)^i$. Chứng minh rằng nếu $i_1, i_2, ..., i_n$ là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $0 \le i_1 < i_2 < ... < i_n$ thì ta có:

$$o(Q_{i_1} + Q_{i_2} + Q_{i_3} + ... + Q_{i_n}) \ge o(Q_{i_1}).$$

For any polynomial P(x) = $a_0 + a_1x + ... + a_kx^k$ *with integer coefficients, the number of odd coefficients is denoted by o(P). For i = 0, 1, 2, ... let* $Q_i(x) = (1+x)^i$. *Prove that if* $i_1, i_2, ..., i_n$ *are integers satisfying* $0 \le i_1 < i_2 < ... < i_n$, *then:* $o(Q_{i_1} + Q_{i_2} + Q_{i_3} + ... + Q_{i_n}) \ge o(Q_{i_1})$.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta có nhận xét rằng: nếu i là một bội số của 2 thì tất cả các hệ số của Q_i đều chẵn, ngoại trừ hệ số đầu tiên và cuối cùng. Có nhiều cách khác nhau để chứng minh mệnh đề này. Chẳng hạn, ta có hệ số thứ r của $Q_i(x)=(1+x)^i$ là $C_i^r=\frac{i!}{r!(i-r)!}$. Giả sử $0 < r < i$. Lúc đó $C_i^r=\frac{i}{r}C_{i-1}^{r-1}$, nhưng C_{i-1}^{r-1} là một số nguyên và i chia hết cho lũy thừa bậc lớn hơn r của 2 nên suy ra C_i^r là số chẵn.

Bây giờ, ta đặt $Q = Q_{i_1}+Q_{i_2}+Q_{i_3}+...+Q_{i_n}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ở đề bài bằng quy nạp theo i_n. Nếu $i_n = 0$ hay $i_n = 1$, dễ thấy bất đẳng thức đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với với các giá trị bé hơn i_n. Ta gọi m là một lũy thừa của 2 sao cho $m \le i_n < 2m$. Ta xét hai trường hợp: $i_1 \ge m$ và $i_1 < m$.

Trường hợp 1: $i_1 \ge m$. Lúc đó ta có:

$$Q_{i_1}=(1+x)^m A\ ,\ Q=(1+x)^m B,$$

với A, B là các đa thức có bậc nhỏ hơn m. Dễ thấy rằng theo giả thiết quy nạp ta có $o(A) \le o(B)$. Ta lại có:

$$o(Q_{i_1})=o((1+x)^m A)=o(A+x^m A)=2o(A)$$

$$\le 2o(B)=o(B+x^m B)=o((1+x)^m B)=o(Q).$$

Vậy bất đẳng thức đúng ở trường hợp 1.

Trường hợp 2: $i_1 < m$. Lúc đó, ta lấy r sao cho $i_r < m$, $i_{r+1} > m$. Đặt $A=Q_{i_1}+Q_{i_2}+Q_{i_3}+...+Q_{i_r}, (1+x)^m=Q_{i_{r+1}}+Q_{i_{r+2}}+Q_{i_{r+3}}+...+Q_{i_n}$, suy ra A và B có bậc nhỏ hơn m. Lúc đó:

$$o(Q)=o(A+(1+x)^m B)=o(A+B+x^m B)=o(A+B)+o(B).$$

Bây giờ, ta có $o(A-B)\ge o(A-B+B)=o(A)$, bởi vì một hệ số của A là lẻ khi và chỉ khi một trong hai hệ số tương ứng của A - B và của B là lẻ. Nhưng ta có $o(A-B)=o(A+B)$, vì các hệ số tương ứng của A - B và của A + B hoặc bằng nhau hoặc cùng chẵn cùng lẻ. Từ đó

$$o(A+B)+o(B)\ge o(A).$$

Ta cũng có $o(A)\ge o(Q_{i_j})$ theo giả thiết quy nạp.

Tóm lại, bất đẳng thức cũng đúng cho trường hợp 2.

Bài 100. **(1985)**

Xét tập hợp M gồm 1985 số nguyên dương phân biệt, sao cho không có số nào có ước số nguyên tố lớn hơn 23. Chứng minh rằng M chứa một tập con gồm 4 phần tử mà tích của 4 phần tử này là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.

Given a set M of 1985 distinct positive integers, none of which has a prime divisor greater than 23, prove that M contains a subset of 4 elements whose product is the 4th power of an integer.

Hướng dẫn:

Vì chỉ có 9 số nguyên tố không lớn hơn 23 nên mỗi một phần tử trong 1985 phần tử k của tập hợp M có thể phân tích được thành thừa số nguyên tố trong đó có nhiều nhất là 9 số nguyên tố phân biệt:

$$k = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}...p_9^{k_9}, \qquad (*)$$

trong đó $k_i \geq 0$ và k_i nguyên. Với mỗi số hạng của M ta gán tương ứng với một vector $(x_1, x_2, ..., x_9)$ trong đó: $x_i = 0$ nếu số mũ k_i của p_i trong (*) là chẵn và $x_i = 1$ nếu k_i là lẻ. Như thế ta có được 2^9 vector phân biệt. Theo nguyên tắc Đirichlet, mọi tập hợp con của $2^9 + 1$ phần tử của M chứa ít nhất 2 số nguyên phân biệt, chẳng hạn a_1 và b_1, với cùng vectơ lũy thừa. Suy ra tích của chúng là một số chính phương: $a_1b_1 = c^2$. Khi ta lấy đi một cặp như thế từ tập hợp M thì còn lại

$$1985 - 2 > 2^9 + 1 \text{ số},$$

áp dụng lần nữa nguyên tắc Đirichlet và tiếp tục lấy đi những cặp như thế cho tới khi ít nhất còn lại 2^9+1 số trong M. Vì $1985 > 3(2^9 + 1) = 1539$ nên ta có thể lấy đi $2^9 + 1$ cặp a_i, b_i và sẽ có

$$1985 - 2(2^9 + 1) = 959 > 2^9 + 1 = 513$$

số còn lại trong M. Bây giờ ta nhìn lại $2^9 + 1$ cặp lấy đi và lấy căn bậc hai của c_i (với c_i là tích $a_ib_i = c_i^2$ của chúng), tức là $c_i = \sqrt{a_ib_i}$.

Số c_i không thể chứa các thừa số nguyên tố khác $p_1, p_2,....,p_9$, cho nên ít nhất có một cặp c_i, c_j với cùng vectơ lũy thừa, và $c_ic_j = d^2$, d là số nguyên bất kì. Suy ra $d^4 = c_i^2c_j^2 = a_ib_ia_jb_j$, với a_i., b_i, a_j, b_j bất kì trong M.

Bài 101. **(1985)**

Với x_1 là một số thực tùy ý, ta xây dựng dãy số $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ bằng cách đặt $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$, mọi n = 2, 3, ... Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một giá trị x_1 sao cho $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ với mọi n.

For every real number x_1, construct the sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ by setting: $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ for n = 2, 3, ... Prove that there exists exactly one value of x_1 which gives $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ for all n.

Hướng dẫn:

Đặt $S_0(x) = x$, $S_n(x) = S_{n-1}(x)\left(S_{n-1}(x) + \frac{1}{n}\right)$. Ta có:

$$x_n = S_{n-1}(x_1),\ S_n(0) = 0,\ S_n(1) > 1 \text{ với mọi } n > 1.$$

Dễ thấy $S_n(x)$ có các hệ số không âm, do đó dãy số $S_n(x)$ tăng thực sự trên đoạn [0, 1]. Từ đó, tồn tại duy nhất các nghiệm a_n, b_n thỏa mãn:

$$S_n(a_n) = 1 - \frac{1}{n},\ S_n(b_n) = 1.$$

Ta có: $S_{n+1}(a_n) = S_n(a_n)\left(S_n(a_n) + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$, do đó $a_n < a_{n+1}$. Tương tự, ta có: $S_{n+1}(b_n) = S_n(b_n)\left(S_n(b_n) + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} > 1$, do đó $b_n > b_{n+1}$. Như vậy, $\{a_n\}$ là dãy tăng, còn $\{b_n\}$ là dãy giảm và tất cả các a_n đều nhỏ hơn tất cả các b_n.

Từ đó, ta có thể tìm được số x_1 sao cho x_1 lớn hơn tất cả các a_n và nhỏ hơn tất cả các b_n. Suy ra rằng với mọi n ta có:

$$1 - \frac{1}{n} < S_n(x_1) < 1.$$

Nhưng ta lại có $S_n(x_1) = x_{n+1}$, do đó $x_{n+1} < 1$ với mọi n. Mặt khác, từ $x_n > 1 - \frac{1}{n}$ ta cũng có $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right) > x_n$. Cuối cùng, hiển nhiên $x_n > 0$. Tóm lại, tồn tại x_1 để cho $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ với mọi n.

Việc còn lại là chứng minh tính duy nhất của x_1. Gọi a và b tương ứng là giới hạn của các dãy a_n, b_n nói trên (các giới hạn này tồn tại vì một dãy tăng và bị chặn trên thì có giới hạn, cũng vậy, một dãy giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn). Hiển nhiên ta có $a \le x_1 \le b$.

Để chứng minh tính duy nhất của x_1, ta sẽ chứng minh a = b.

Muốn vậy, bạn đọc hãy chứng minh:

$$b_n - a_n \le b_n - b_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{b_n}{n} < \frac{1}{n},$$

và từ đó có $b - a = 0$ khi cho n dần đến vô cùng.

***Bài 102.* (1986)**

Cho d là một số nguyên dương không bằng 2, 5, 13. Chứng minh rằng ta có thể tìm được 2 số phân biệt a và b trong tập hợp $\{2,5,13,d\}$ sao cho $ab-1$ không phải là số chính phương (tức là không phải bình phương của một số nguyên).

Let d be any positive integer not equal to 2, 5, *or* 13. *Show that one can find distinct a, b in the set* $\{2,5,13,d\}$ *such that* $ab-1$ *is not a perfect square.*

Hướng dẫn:

Dễ dàng thấy rằng 2 số a, b cần tìm không thể là 2 trong 3 số 2, 5, 13 của tập hợp $\{2,5,13,d\}$,do vậy, 2 số ta cần tìm là d và một trong 3 số 2, 5, 13. Từ đó, để giải bài toán, ta chỉ cần chứng minh rằng ít nhất một trong 3 số $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ không phải là số chính phương.

Ta hãy xét các phần dư mod 16. Một số chính phương phải có phần dư mod 16 là 0, 1, 4 hay 9.

Từ đó, muốn $2d-1$ là số chính phương, d phải có phần dư (mod 16) là một trong các số 1, 5, 9 hay 13.

Mặt khác, nếu phần dư (mod 16) của d là 1 hay 13 thì phần dư (mod 16) của $13d-1$ không thể là 0, 1, 4 hay 9, điều này có nghĩa rằng khi đó $13d-1$ không chính phương. Còn nếu như phần dư (mod 16) của d là 5 hay 9 thì số $5d-1$ không thể có phần dư (mod 16) là 0, 1, 4 hay 9.

Tóm lại, cả ba số $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ không thể đồng thời là số chính phương, ta có điều phải chứng minh.

***Bài 103.* (1986)**

Tại mỗi đỉnh của một ngũ giác đều, ta đặt tương ứng một số nguyên sao cho tổng của cả 5 số là một số dương. Nếu 3 đỉnh liên tiếp nhau được đặt tương ứng 3 số x, y, z và $y < 0$ thì ta thực hiện một toán tử như sau: thay các số x, y, z đó bằng các số tương ứng $x+y, -y, z+y$. Toán tử này được thực hiện lặp lại khi mà trong năm số ở đỉnh vẫn còn ít nhất một số âm.

Hãy xác định xem việc thực hiện toán tử đó có dừng sau một số hữu hạn bước hay không?

To each vertex of a regular pentagon an integer is assigned in such a way that the sum of all five numbers is positive. If three consecutive vertices are assigned the numbers x, y, z respectively and y < 0 then the following operation is allowed: the numbers x, y, z are replaced by $x+y, -y, z+y$ *respectively. Such an operation is performed repeatedly as long as at least one of the five numbers is negative.*

Determine whether this procedure necessarily comes to an end after a finite number of steps.

Hướng dẫn:

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là 5 số tương ứng được đặt trên 5 đỉnh của ngũ giác đều sao cho $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.

Đặt $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ và $f(X) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$

$$= (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 + (x_5 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2.$$

Rõ ràng $f(X) \geq 0$ và $f(X)$ không thay đổi khi thứ tự các x_i thay đổi. Khi $x_3 < 0$, thì toán tử xác định như đã nói khi tác động lên X sẽ biến X thành $Y = (x_1, x_2 - x_3, -x_3, x_4 - x_3, x_5)$.

Từ đó, bằng các tính toán đơn giản ta thu được

$$f(Y) - f(X) = 2x_3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 2x_3.S \leq -2.$$

Nói cách khác, cứ mỗi lần toán tử đã cho tác động lên X thì giá trị hàm f (X) sẽ giảm đi ít nhất 2 đơn vị. Vì vậy, quá trình này phải dừng sau một số hữu hạn bước.

Chú ý: Vấn đề mấu chốt để giải bài toán ở đây là xác định một hàm 5 biến có giá trị bị chặn dưới, hàm này phải độc lập với các hoán vị của 5 biến, và sau đó, dưới tác động của một toán tử nào đó lên các biến, giá trị hàm sẽ giảm đi. Khi đó, do giá trị của hàm bị chặn dưới, thuật toán bắt buộc phải dừng sau hữu hạn bước.

Rõ ràng là việc xác định một hàm như thế không đơn giản. Tuy nhiên, trực giác cho thấy rằng một hàm với những đòi hỏi như trên có thể được tìm thấy ở những *Dạng toàn phương* (*Quadratic form*, các bạn học sinh phổ thông sẽ gặp ở Đại học - cụ thể, ở môn Đại số tuyến tính).

John Webb (Khoa Toán và Toán ứng dụng, Đại học Cape Town, Nam Phi - *cf. South Africa and the 36[th] International Muthematical Olympiad*) đã đưa ra dạng toàn phương sau:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum Q_{ij} x_i x_j,$$

ở đây

$$Q_{ij} = \begin{cases} a & \text{khi } i = j \\ b & \text{khi } |i - j| = 1 \\ c & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Và sau những tính toán, rất dài dòng, để dạng toàn phương trên phục vụ tốt cho việc giải bài toán, ta cần chọn a, b, c một cách thích hợp, cụ thể: $a = 1$, $b = 0$ và $c = -1$.

***Bài 104.* (1986)**

Gọi n là một số nguyên dương, $n \geq 5$, xét đa giác đều tâm O, n đỉnh. Cho A, B là hai đỉnh kề nhau của đa giác. Một tam giác XYZ chuyển động trong mặt phẳng nhưng luôn bằng tam giác OAB, có vị trí ban đầu trùng với tam giác OAB, sao cho hai điểm Y và Z thì chạy trên khắp cả biên (các cạnh) của đa giác, còn X thì nằm bên trong đa giác.

Tìm quỹ tích của X.

Let A, B be adjacent vertices of a regular n-gon ($n \geq 5$) with center O. A triangle XYZ, which is congruent to and initially coincides with OAB, moves in the plane in such a way that Y and Z each trace out the whole boundary of the polygon, with X remaining inside the polygon.

Find the locus of X.

Hướng dẫn:

Cho $AB = 2$ và M là trung điểm AB. Ta lập hệ trục tọa độ vuông góc có gốc tại A, trục x là trục AB (hướng dương từ A đến B), trục Ay có hướng dương hướng vào bên trong đa giác. Giả sử điểm Z chuyển động dọc theo AB, hướng từ B đến A. Đặt t là góc YZA, gọi (x, y) là tọa độ điểm X. Ta có: $\widehat{YZX} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, do đó

$$XZ = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} \text{ và } y = XZ\sin\left(t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \sin t + \cot g\frac{\pi}{n}\cos t\ .$$

Ta lại có $BY\sin\frac{2\pi}{n} = YZ\sin t = 2\sin t$, $MX = \cot g\frac{\pi}{n}$, từ đó suy ra

$$x = MY\cos t - BY\cos\frac{2\pi}{n} + MX\sin t$$

$$= \cos t + \left(\cot g\frac{\pi}{n} - 2\cot g\frac{2\pi}{n}\right)\sin t = \cos t + tg\frac{\pi}{n}\sin t = ytg\frac{\pi}{n}.$$

Từ đó, ta suy ra quỹ tích điểm X là một hình sao cấu tạo bởi n đoạn thẳng bắt nguồn từ điểm O. X di chuyển từ O đến đầu mút kia của một đoạn thẳng rồi quay trở lại O, rồi đi dọc theo đoạn thẳng khác, tiếp tục như thế. Ta có:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right)\cos^2\left(t + \frac{\pi}{n}\right),$$

vì vậy, độ dài mỗi đoạn thẳng nói trên là $\dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}.\cos\frac{\pi}{n}}$.

***Bài 105.* (1986)**

Kí hiệu R^+ là tập các số thực không âm, hãy xác định tất cả các hàm $f: R^+ \to R^+$ thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $f(2) = 0$;

b) $f(x) \neq 0$, với $0 \leq x < 2$;

c) $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$, $\forall x, y \in R^+$.

Find all functions f, defined on the non-negative real numbers and taking non-negative real values, such that:

a) $f(2) = 0$;

b) $f(x) \neq 0$, where $0 \leq x < 2$;

c) $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$, $\forall x, y \in R^+$.

Hướng dẫn:

Ta có $0 = f(xf(2))f(2) = f(x + 2)$ nên suy ra với mọi $x \geq 2$: $f(x) = 0$. Ta cũng có $f(y)f((2 - y)f(y)) = f(2) = 0$, do đó, nếu $y < 2$ thì

$$f((2 - y)f(y)) = 0, \text{ suy ra } (2 - y)f(y) \geq 2 \Leftrightarrow f(y) \geq \frac{2}{2 - y}.$$

Bây giờ, giả sử tồn tại y_0 nào đó để $f(y_0) > \dfrac{2}{2 - y_0}$, lúc đó, ta có thể tìm y_1 sao cho $y_1 > y_0$ và $y_1 < 2$ để cho:

$$f(y_0) = \frac{2}{2-y_1}.$$

Đặt $x_1 = 2 - y_1$, ta có $f(x_1 f(y_0)) = f(2) = 0$, do đó: $f(x_1 + y_0) = 0$. Nhưng mặt khác ta lại có $x_1 + y_0 < 2$. Rõ ràng mâu thuẫn đã xảy ra. Vậy không thể tồn tại y_0 nào đó để $f(y_0) > \frac{2}{2-y_0}$.

Tóm lại, nếu có một hàm f thỏa mãn các điều kiện của đề bài thì f(x) = 0 với mọi x ≥ 2 và với mọi x < 2 ta có: $f(x) = \frac{2}{2-x}$.

Đảo lại, một hàm f được xác định như trên sẽ thỏa mãn các điều kiện ở đề bài. Thật vậy, dễ thấy $f(2) = 0$ và $f(x) \neq 0$ với $0 \le x < 2$. Ta có

$$f(xf(y)) = f\left(\frac{2x}{2-y}\right).$$

Nếu $\frac{2x}{2-y} \ge 2$ thì f(xf(y)) = 0. Nhưng điều này cho ta x + y ≥ 2, do đó f(x + y) = 0 và từ đó suy ra $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ như đề bài đòi hỏi.

Nếu $\frac{2x}{2-y} < 2$ thì ta cũng có

$$f(xf(y))f(y) = \frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}} \frac{2}{2-y} = \frac{2}{2-x-y} = f(x+y).$$

Tóm lại, hàm duy nhất thỏa mãn điều kiện bài toán là

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \ge 2 \\ \frac{2}{2-x} & \text{khi } 0 \le x < 2. \end{cases}$$

***Bài 106.* (1986)**

Trong mặt phẳng tọa độ, cho một tập hữu hạn các điểm có tọa độ nguyên. Hỏi rằng, có phải ta luôn luôn có thể tô màu đỏ một số điểm của tập hợp này, và số còn lại được tô màu xanh, sao cho với bất kì đường thẳng L nào song song với một trong hai trục tọa độ thì sự khác nhau (về giá trị tuyệt đối) của số điểm màu xanh và số điểm màu đỏ trên L sẽ không lớn hơn 1 ? Hãy chứng minh cho câu trả lời của bạn.

One is given a finite set of points in the plane, each point having integer coordinates. Is it always possible to color some of the points in the *set red and the remaining points green in such a way that for any straight line L parallel to either one of the coordinate axes the difference (in absolute value) between the numbers of green point and red points on L is not greater than 1? Prove for your answer.*

Hướng dẫn:

Gọi T là tập hữu hạn các điểm có tọa độ nguyên đã cho ở đề bài.

Xét một đường thẳng L tùy ý song song với một trong các trục tọa độ và cắt tập hợp T theo thứ tự tại các điểm $A_1, A_2, ..., A_k$ (thứ tự từ trái sang phải, hoặc từ dưới lên trên). Nối A_1 và A_2, A_3 và A_4,... .

Cũng làm như vậy với một đường thẳng L khác.

Khi đó, ta được một họ các đoạn thẳng và mỗi điểm của T đều thuộc không quá hai đoạn. Vì vậy, ta được các đường gấp khúc không có đỉnh chung. Các đường gấp khúc đóng này gồm một số chẵn các đoạn. Ta có thể tô màu xen kẽ: đỏ, xanh, đỏ, xanh... đối với mỗi đường gấp khúc. Các điểm rời rạc khác không thuộc đường gấp khúc nào thì ta tô màu tùy ý. Ta được một cách tô màu thỏa mãn điều kiện đầu bài vì các điểm nằm trên các đường song song với các trục tọa độ được nối với nhau bởi các đoạn mà các đầu mút đầu và cuối có màu khác nhau.

Tóm lại, ta có thể tô màu như bài toán đòi hỏi.

***Bài 107.* (1987)**

Cho S là tập hợp $\{1,2,...,n\}, n \geq 1$. Ta gọi $p_n(k)$ là số các hoán vị của S có đúng k điểm cố định. Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!$

Let $p_n(k)$ *be the number of permutations of the set* $\{1, 2, 3, ..., n\}$ *which have exactly* k *fixed points. Prove that* $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!$.

Hướng dẫn:

Trước hết, nhắc lại rằng một hoán vị của tập $\{1,2,...,n\}, n \geq 1$ là một song ánh f: $\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$, và nếu f có k điểm bát động, ta nói hoán vị đó có k điểm cố định. Ngoài ra, ta còn có công thức

$$nC_{n-1}^{k-1} = kC_n^k, \text{ từ đó } \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1} = C_n^k \text{ nếu } k \neq 0.$$

Trở lại bài toán, ta để ý rằng: $p_n(k) = C_n^k p_{n-k}(0)$, $\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = n!$.

Từ đó suy ra:

$$\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k.C_n^k p_{n-k}(0) = n\sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} p_{n-k}(0) = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p_{n-k-1}(0)$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(k) = n(n-1)! = n!\ .$$

Cách khác: Ứng với mỗi hoán vị ta viết vectơ $(d_1, d_2, ..., d_n)$ sao cho $d_i = 1$ nếu i thuộc S là điểm cố định của hoán vị đã cho và sao cho $d_i = 0$ trong trường hợp trái lại. Vì số hoán vị là n! nên ta viết được n! vectơ. Ta đếm số đơn vị tổng quát trong tất cả các vectơ này bằng hai cách khác nhau. Số vectơ, trong cách viết mà có đúng k đơn vị, bằng $p_n(k)$, vì thế số đơn vị tổng quát trong tất cả các vectơ bằng $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k)$.

Mặt khác, số vectơ trong đó có đơn vị ở vị trí thứ i, bằng (n - 1)! . Vậy số đơn vị ở vị trí thứ i trong tất cả các vectơ bằng (n - 1)! và số tổng quát tất cả đơn vị trong tất cả các vectơ sẽ bằng n(n - 1)! = n! .

Vậy $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!$.

***Bài 108.* (1987)**

Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực thoả mãn điều kiện

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1.$$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k, với $k \geq 2$, luôn tồn tại các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho với mọi i = 1, 2, ..., n ta có $|a_i| \leq k-1$ và $|a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n| \leq (k-1)\dfrac{\sqrt{n}}{k^n - 1}$.

Let $x_1, x_2, ..., x_n$ be real numbers satisfying $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$.

Prove that for every integer k $\geq$ 2, there are integers $a_1, a_2, ..., a_n$, not all 0, such that $|a_i| \leq k-1$ for all i and

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n| \leq (k-1)\frac{\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Hướng dẫn:

Bài toán này là một ứng dụng của bất đẳng thức Cauchy và

Nguyên tắc Dirichlet. Từ bất đẳng thức $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ và giả thiết $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$ ta dễ dàng chứng minh được

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \le \sqrt{n}.$$

Bây giờ, với các b_i nhận giá trị nguyên thuộc đoạn $[0, k-1]$, ta xét k^n giá trị có dạng $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$. Mỗi giá trị đó phải nằm trong đoạn $[0, (k-1)\sqrt{n}]$. Ta chia đoạn này thành $k^n - 1$ đoạn con có độ dài bằng nhau là $(k-1)\frac{\sqrt{n}}{k^n - 1}$. Khi đó, theo Nguyên tắc Dirichlet, phải có 2 giá trị nói trên rơi vào cùng một đoạn con. Cụ thể, nếu hai giá trị đó là $\sum_{i=1}^{n} b_i' x_i$ và $\sum_{i=1}^{n} b_i'' x_i$ thì ta phải có

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (b_i' - b'')_i x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} b_i' x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i'' x_i\right| \le (k-1)\frac{\sqrt{n}}{k^n - 1},$$

suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 109.* (1987)**

Chứng minh rằng không thể tồn tại một hàm f nào từ tập các số nguyên không âm vào chính nó sao cho với mọi n: $f(f(n)) = n + 1987$.

Prove that there is no function f from the set of non-negative inte- -gers into itself such that f(f(n)) = n + 1987 for all n.

Hướng dẫn:

Giả sử ngược lại, tồn tại một hàm f như đã nói ở đề bài. Khi đó, nếu f(n) = f(m) thì n + 1987 = $f^2(n) = f^2(m) = f(n+1987)$, do đó, m = n, nghĩa là f đơn ánh. Ta có:

$$f^3(n) = f(f^2(n)) = f(n+1987),\ f^3(n) = f^2(f(n)) = f(n) + 1987,$$

suy ra $$f(n+1987) = f(n) + 1987. \qquad (*)$$

Mặt khác, bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được

$$f(n + 1987q) = f(n) + 1987q \quad (q \ge 0). \qquad (**)$$

Đặt A = { 0, 1, 2, ..., 1986 }. Bây giờ, cho n ∈ N. Đặt $f(n) = 1987q + r$, với $r \in N, 0 \le r \le 1986$. Khi đó:

$$n + 1987 = f^2(n) = f(1987q + r) = 1987q + f(r),$$

do đó $2.1987 > n + 1987 = 1987q + f(r) \geq 1987q$, điều này chứng tỏ $q \in \{0, 1\}$. Vậy $f(n) \leq 1986 + 1987$ với mọi n. Tiếp đến, ta đặt

$$A_1 = \{n \in A : 0 \leq f(n) \leq 1986\},$$

$$A_2 = \{n \in A : 1987 \leq f(n) \leq 1986 + 1987\}.$$

Khi đó, ta có $A = A_1 \cup A_2$ và $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Vì A có số phần tử lẻ, nên đến đây, giả sử ban đầu của chúng ta sẽ mâu thuẫn nếu ta thiết lập được một song ánh giữa A_1 và A_2. (A_1 và A_2 có số phần tử chẵn lẻ khác nhau. (Xem thêm ở phần *Kiến thức bổ trợ - Bản số* (cardinality) *của tập hợp*). Xét thu hẹp của f lên A_1, ta có: $f: A_1 \to A_2$ là một song ánh. Thật vậy, trước hết, nếu $n \in A_1$ thì

$$f(n) \in A \text{ và } f(f(n)) = n + 1987$$

nên $f(n) \in A_2$, như thế, định nghĩa ánh xạ trên là hợp lí. Ngoài ra, theo chứng minh trên, thu hẹp này là một đơn ánh.

Để kết thúc bài toán, ta sẽ chứng minh rằng f là toàn ánh. Cho $n \in A_2$ tuỳ ý, khi đó $f(n) - 1987 \in A$. Từ (*) ta được

$$f(m) = f(m - 1987) + 1987,$$

với $m \geq 1987$ và từ $f(n) \geq 1987$ ta được: $f(f(n) - 1987) = f(f(n)) - 1987 = n$. Vậy $f(n) - 1987 \in A_1$ và ảnh của nó qua f là n, suy ra $f: A_1 \to A_2$ là toàn ánh, điều phải chứng minh.

Bài 110. **(1987)**

Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm tuỳ ý trong tập hợp này là một số vô tỉ và bất kì 3 điểm nào trong chúng cũng xác định một tam giác không suy biến (*non-degenerate*) có diện tích hữu tỉ.

Let n be an integer greater than or equal to 3. Prove that there is a set of n points in the plane such that the distance between any two points is irrational and each set of 3 points determines a non-degenerate triangle with rational area.

Hướng dẫn:

Trong mặt phẳng, ta gọi x_n là điểm có toạ độ (n, n^2), với n = 1, 2, 3, ... Ta sẽ chứng minh rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kì như thế là một số vô tỉ, và tam giác được xác định bởi 3 điểm bất kì trong chúng là một số hữu tỉ khác 0.

Lấy n > m. Ta có $|x_n - x_m|$ là độ dài cạnh huyền của một tam giác có hai cạnh góc vuông là $n - m$ và $n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$, do đó $|x_n - x_m| = (n-m)\sqrt{1+(n+m)^2}$. Ta lại có:

$$(n+m)^2 < (n+m)^2 + 1 < (n+m+1)^2 = (n+m)^2 + 1 + 2(n+m)$$

nên $(n+m)^2 + 1$ không phải là số chính phương, và do đó căn của nó là số vô tỉ.

Để thấy điều vừa nói trên, ta giả sử M không phải là số chính phương, và giả sử $\sqrt{M}$ là số hữu tỉ. Vì M không chính phương nên ta có thể tìm được số nguyên tố p sao cho p^{2a+1} chia hết M nhưng p^{2a+2} không chia hết M, với $a \geq 0$.

Ta đặt $N = \dfrac{M}{p^{2a}}$, thì khi đó $\sqrt{N} = \dfrac{\sqrt{M}}{p^a}$ cũng là số hữu tỉ. Do đó, tồn tại số nguyên tố q sao cho q chia hết N, nhưng q^2 không chia hết N. Cho $\sqrt{N} = \dfrac{r}{s}$, với r và s là hai số nguyên tố cùng nhau, ta có $s^2N = r^2$.

Bây giờ, q chia hết r, suy ra q^2 chia hết r^2, do đó q chia hết s^2. Từ đó, q chia hết s. Do vậy r và s có thừa số chung, điều này mâu thuẫn. Tóm lại, số không chính phương không thể có căn bậc 2 là số hữu tỉ.

Để tiếp tục giải bài toán, ta lấy 3 số a, b, c sao cho a < b < c. Gọi B là điểm (b, a^2), C là điểm (c, a^2) và D là điểm (c, b^2). Ta có:

$$dt(\Delta x_a x_b x_c) = dt(\Delta x_a x_c C) - dt(\Delta x_a x_b B) - dt(\Delta x_b x_c D) - dt(x_b DCB)$$

$$= (c-a)\frac{(c^2 - a^2)}{2} - (b-a)\frac{(b^2 - a^2)}{2} - (c-b)\frac{(c^2 - b^2)}{2} - (c-b)(b^2 - a^2)$$

là một số hữu tỉ. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 111. **(1987)**

Cho n là một số nguyên, $n \geq 2$. Chứng minh rằng nếu $k^2 + k + n$ là một số nguyên tố với mọi số nguyên k thoả mãn $0 \leq k \leq \sqrt{\dfrac{n}{3}}$ thì $k^2 + k + n$ sẽ là số nguyên tố với mọi k thoả mãn $0 \leq k \leq n - 2$.

Let n *be an integer greater than or equal to* 2. *Prove that if* k^2+k+n *is prime for all integers* k *such that* $0 \le k \le \sqrt{\frac{n}{3}}$, *then* k^2+k+n *is prime for all integers k such that* $0 \le k \le n-2$.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta có nhận xét rằng nếu m nguyên tố cùng nhau với b + 1, b + 2, ... 2b - 1, 2b thì m sẽ không chia hết cho bất kì số nào nhỏ hơn 2b. Thật thế, nếu c ≤ b, ta chọn số j lớn nhất, j ≥ 0, sao cho $2^j c \le$ b. Lúc đó, số $2^{j+1}c$ là một trong các số b + 1, b + 2, ..., 2b - 1, 2b, do vậy $2^{j+1}c$ nguyên tố cùng nhau với m, và suy ra c cũng thế. Nếu ta có $(2b+1)^2 > m$ thì ta có thể kết luận rằng m là số nguyên tố, bởi vì nếu nó là hợp số thì nó sẽ có một thừa số ≤ $\sqrt{m}$.

Đặt $n = 3r^2 + h$, với 0 ≤ h ≤ 6r + 3 để cho r là số nguyên lớn nhất bé hơn hoặc bằng $\sqrt{\frac{n}{3}}$. Ta cũng lấy r ≥ 1. Khi đó, giá trị n = 2 sẽ không được bao gồm, nhưng điều này không hề gì bởi kết quả tầm thường với n = 2.

Giả sử rằng $k^2 + k + n = n + k(k+1)$ là số nguyên tố với mọi k = 0, 1, 2, ..., r. Ta sẽ dùng phương pháp quy nạp để chứng minh ràng N = n + (r + s)(r + s + 1) là số nguyên tố với s = 1, 2, ..., $n-r-2$. Theo nhận xét này, ta chỉ cần chứng minh rằng $(2r+2s+1)^2 > N$, và N thì nguyên tố cùng nhau với tất cả các số r + s + 1, r + s + 2, ... , 2r + 2s.

Ta có $(2r+2s+1)^2 = 4r^2+8rs+4s^2+4r+4s+1$. Vì r, s ≥ 1 nên ta có 4s + 1 > s + 2, $4s^2 > s^2$ và 6rs > 3r. Suy ra

$$(2r+2s+1)^2 > 4r^2+2rs+s^2+7r+s+2$$

$$= 3r^2+6r+2+(r+s)(r+s+1) \ge N.$$

Bây giờ, nếu N có một thừa số chia hết $2r-i$, với i thuộc các số từ $-2s$ đến $r-s-1$ thì: $N-(i+2s+1)(2r-i) = n+(r-i-s-1)(r-i-s)$, tức là có dạng $n+s'(s'+1)$, với s' là số từ 0 đến $r+s-1$.

Nhưng $n+s'(s'+1)$ là số nguyên tố theo chứng minh quy nạp, do đó, cách duy nhất để nó có một thừa số chia hết $2r-i$ là chính nó phải chia hết $2r-i$. Mặt khác, ta có

$$2r - i \le 2r + 2s \le 2n - 4 < 2n,\; n + s'(s'+1) \ge N,$$

do vậy, nếu $n + s'(s'+1)$ có thừa số chung với $2r - i$ thì nó sẽ bằng $2r - i = s + r + 1 + s'$. Suy ra $s'^2 = s - (n - r - 1) < 0$, điều này không thể xảy ra được. Như thế, ta đi đến kết luận rằng N nguyên tố cùng nhau với tất cả các số r + s + 1, ..., 2r + 2s, và do vậy N là số nguyên tố, điều phải chứng minh.

***Bài 112.* (1988)**

Cho n là số nguyên dương và $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ là các tập hợp con của tập hợp B. Giả sử rằng:

i) Mỗi tập hợp A_i (i = 1, 2,..., 2n + 1) chứa đúng 2n phần tử.

ii) Với mỗi cặp tập hợp khác nhau A_i và A_j , $A_i \cap A_j$ chỉ chứa đúng một phần tử.

iii) Mỗi phần tử của B thuộc ít nhất hai tập hợp A_i (i = 1, 2,..., 2n + 1).

Với những giá trị nào của n thì ta có thể gán cho mỗi phần tử của B giá trị 0 hoặc 1 sao cho trong mỗi tập hợp A_i có đúng n phần tử được gán giá trị 0?

Let n be a positive integer and let $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ be subsets of a set B. Suppose that

i) Each A_i has exactly 2n elements,

ii) Each $A_i \cap A_j$, $1 < i < j \le 2n + 1$ contains exactly one element, and

iii) Every element of B belongs to at least two of the A_i.

For which values of n can one assign to every element of B one of the numbers 0 and 1 in such a way that A_i has 0 assigned to exactly n of its elements?

Hướng dẫn:

Ta biểu diễn trên mặt phẳng hình (2n + 1) - giác đều và ta xem như các đỉnh của nó biểu diễn các tập hợp $A_1, ..., A_{2n+1}$, ta cũng kí hiệu các đỉnh này bằng các chữ $A_1, ..., A_{2n+1}$.

Với mỗi phần tử b thuộc B ta chọn đúng một cặp chỉ số i, j (ít nhất tồn tại một cặp như vậy theo điều kiện (iii) sao cho b thuộc $A_i \cap A_j$. Phần tử b sẽ cho ứng với đoạn thẳng A_iA_j và ta đánh dấu điều này bằng nét liền và nét chấm chấm. Các phần tử khác nhau sẽ ứng với các đoạn khác nhau theo điều kiện (b). Như vậy tất cả các phần tử của B đều được biểu diễn bằng các đoạn thẳng.

Nếu cuối cùng có ít nhất một trong các đoạn A_iA_j mà không bị đánh dấu thì điều này có nghĩa là trong A_i (và cả trong A_j) số phần tử bé hơn 2n, trái với điều kiện (i).

Như vậy ta đã lập được tương ứng 1 - 1 giữa tập hợp B và tập hợp tất cả các đường chéo và các cạnh của (2n + 1) - giác đều. Các đoạn có điểm mút chung A_i sẽ biểu thị các phần tử của tập hợp A_i.

Giả sử bây giờ mỗi phần tử của B (tức mỗi đoạn trên hình vẽ) được gán với giá trị 0 hoặc 1 như yêu cầu trong điều kiện bài toán. Khi đó số các đoạn thẳng "0" phải đúng bằng $\frac{n(2n+1)}{2}$ vì ở mỗi một trong số 2n + 1 điểm đều có n đoạn "0" đi qua và mỗi đoạn đã tính hai lần (với hai đầu mút). Suy ra n phải là số chẵn.

Ngược lại, giả sử n = 2k. Khi đó ta cho tương ứng số 0 với các cạnh của (2n + 1) - giác và với những đường chéo, do dãn các đường gấp khúc, tạo bởi không quá k cạnh của (2n + 1) - giác, đối với các đường chéo còn lại thì ta cho tương ứng số 1. Dễ dàng thấy rằng sự tương ứng này thỏa mãn điều kiện đầu bài.

***Bài 113.* (1988)**

Cho hàm số f xác định trên tập các số nguyên dương sao cho $f(1)=1$, $f(3)=3$ và với mọi n nguyên dương ta có:

$$\text{i) } f(2n)=f(n), \qquad \text{ii) } f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),$$
$$\text{iii) } f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n).$$

Hãy xác định số tất cả các số nguyên dương n sao cho n ≤ 1998 và $f(n)=n$.

A function f is defined on the positive integers by

$$f(1)=1,\ f(3)=3\, and$$

$$i)\ f(2n)=f(n), \qquad ii)\ f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),$$
$$iii)\ f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n).$$

for all positive integers n.

Determine the number of positive integers n, less than cr equal to 1988, *for which f(n) = n.*

Hướng dẫn:

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng nếu n = $\overline{b_1b_2...b_k}$ trong hệ nhị phân, với $b_1 = 1$, thì $f(n) = \overline{b_k...b_2b_1}$. (*)

Thật vậy, với các số 1, 2, 3, từ các hệ thức ở đề bài, khi chuyển qua hệ nhị phân, ta thấy khẳng định (*) đúng với $1 = \overline{1}$, $2 = \overline{10}$, $3 = \overline{11}$.

Tiếp đến, ta giả sử rằng khẳng định (*) đúng với tất cả các số n có số các chữ số trong hệ nhị phân bé hơn k. Xét các trường hợp sau:

***Trường hợp* 1: n là số chẵn. Lúc đó ta có: $n = 2m = \overline{b_1b_2...b_{k-1}0}$,**

$$f(n) = f(m) = \overline{b_{k-1}...b_2b_1} = \overline{0b_{k-1}...b_2b_1}.$$

***Trường hợp* 2: n = 4m + 1. Lúc đó ta có:**

$n = \overline{b_1b_2...b_{k-2}01}$, $m = \overline{b_1b_2...b_{k-2}}$, $2m + 1 = \overline{b_1b_2...b_{k-2}1}$,

$f(n) = 2f(2m + 1) - f(m) = f(2m+1) + (f(2m+1) - f(m))$

$= \overline{1b_{k-2}...b_2b_1} + \left(\overline{1b_{k-2}...b_2b_1} - \overline{b_{k-2}...b_2b_1}\right) = \overline{10b_{k-2}...b_2b_1}$.

***Trường hợp* 3: n = 4m + 3. Lúc đó ta có: $m = \overline{b_1b_2...b_{k-2}}$,**

$f(n) = 3f(2m+1) - 2f(m) = f(2m+1) + 2(f(2m+1) - f(m))$

$= \overline{1b_{k-2}...b_2b_1} + 2\left(\overline{1b_{k-2}...b_2b_1} - \overline{b_{k-2}...b_2b_1}\right) = \overline{11b_{k-2}...b_2b_1}$.

Tóm lại, (*) đúng trong cả 3 trường hợp, do vậy, theo nguyên lí quy nạp, (*) đúng với mọi n nguyên dương.

Từ (*), ta suy ra f(n) = n với mọi số n mà có các chữ số đối xứng trong cách viết theo hệ nhị phân. Muốn được tất cả các số như thế với $2k-1$ hoặc 2k chữ số trong cách viết theo hệ nhị phân, ở vị trí thứ nhất ta viết $b_1 = 1$ và ở $k-1$ vị trí tiếp theo ta viết $b_2, ..., b_k$. Ở các vị trí còn lại là các chữ số đối xứng với k chữ số đầu. Từ đó, ta được 2^{k-1} số. Vì ta có $2^{10} < 1998 < 2^{11}$, đồng thời chỉ có 2 số có 11 chữ số đối xứng nhau trong cách viết theo hệ nhị phân và lớn hơn số $1998 = \overline{11111000100}$ là $\overline{11111011111}$ và $\overline{11111111111}$ nên ta tính được số phải tìm là

$$2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5 - 2 = 92.$$

***Bài 114.* (1988)**

Chứng minh rằng tập hợp tất cả các số thực x thoả mãn bất đẳng thức:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + ... + \frac{70}{x-70} \geq \frac{5}{4}$$

là hợp của các khoảng rời nhau mà tổng độ dài các khoảng này là 1988.

Show that set of real numbers x which satisfy the inequality $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}+...+\frac{70}{x-70} \geq \frac{5}{4}$ *is a union of disjoint intervals, the sum of whose lengths is 1988.*

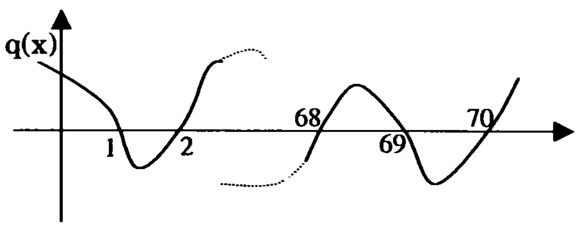
Hướng dẫn:

Ta có: $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}+...+\frac{70}{x-70}-\frac{5}{4}=$

$$=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}=\frac{\sum_{k=1}^{70} k \prod_{\substack{1\leq j\leq 70\\ j\neq k}}(x-j)}{\prod_{1\leq j\leq 70}(x-j)}-\frac{5}{4}$$

$$=\frac{4\sum_{k=1}^{70} k \prod_{\substack{1\leq j\leq 70\\ j\neq k}}(x-j)-5\prod_{1\leq j\leq 70}(x-j)}{4\prod_{1\leq j\leq 70}(x-j)}=\frac{p(x)}{q(x)}.$$

Ta hãy xét đồ thị của hai hàm $p(x)$ và $q(x)$.



Dễ thấy $q(x)$ là đa thức có bậc 70, hệ số của hạng tử chứa số mũ lớn nhất là 4, đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ 1, 2, 3, ..., 70 (gọi là các *không điểm*).

$p(x)$ cũng là đa thức có bậc 70, hệ số của hạng tử chứa số mũ lớn nhất là -5. Dù khó có thể xác định được các *không điểm* của $p(x)$, nhưng ta có thể đánh giá như sau:

$p(70) = 4.70.(70-1)(70-2)...(70-69) > 0$,

$p(69) = 4.69.(69-1)(69-2)...(69-68)(69-70) < 0$,

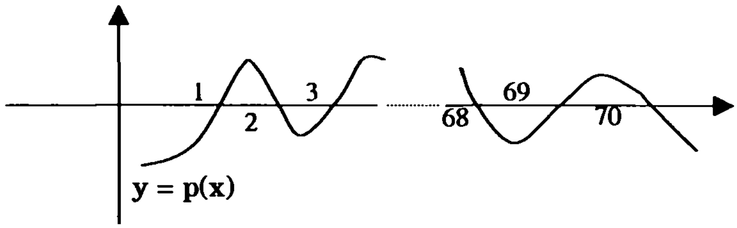
....

$p(3) = 4.3.(3-1)(3-2)(3-4)...(3-69)(3-70) > 0$,

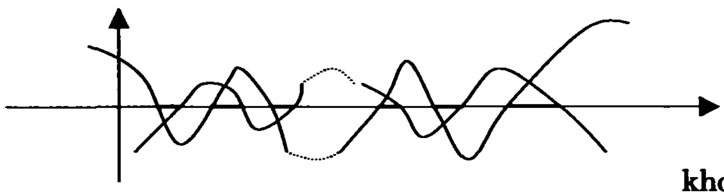
$p(2) = 4.2.(2-1)(2-3)(2-4)...(2-69)(2-70) > 0$,

$p(1) = 4.1.(1-2)(1-3)(1-4)...(1-69)(1-70) < 0$.

Từ đó *Định lí giá trị trung gian* cho ta 69 *không điểm* của $p(x)$;



ngoài ra, vì p(x) có hệ số của hạng tử chứa số mũ lớn nhất là -5 nên nó có thêm một *không điểm* khác > 70. Bây giờ, ta có $\dfrac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ khi và chỉ khi p(x) và q(x) cùng dấu, điều này xảy ra ở các khoảng (tô đậm) trên đồ thị như sau, khi ta vẽ p(x) và q(x) trên cùng một hệ trục:



Để thuận tiện, ta kí hiệu $S = 1 + 2 + ... + 70$. Tổng độ dài các khoảng (tô đậm) bằng tổng của các điểm ở đầu mút bên phải của chúng trừ đi tổng của các điểm ở đầu mút bên trái, tức là tổng các *không điểm* của p(x) trừ cho S.

Dễ thấy tổng các *không điểm* của p(x) là $\dfrac{-9S}{-5}$.

Vì vậy, tổng độ dài các khoảng cần tính là

$$\frac{-9S}{-5} - S = \frac{4}{5}S = \frac{4}{5}.\frac{70.71}{2} = 1988,$$

điều phải chứng minh.

Bài 115. **(1988)**

Cho a và b là hai số nguyên dương sao cho ab + 1 chia hết $a^2 + b^2$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ là một số chính phương.

Let a and b be positive integers such that ab + 1 divides $a^2 + b^2$. Show that $\dfrac{a^2 + b^2}{ab+1}$ is the square of an integer.

Hướng dẫn:

Giả sử ngược lại rằng

$$k = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} \qquad (*)$$

không phải là số chính phương. Biến đổi (*) ta được:

$$a^2 + b^2 - kab = k . \qquad (**)$$

Vì a và b trong đẳng thức (**) có vai trò đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b$.

Xem (**) như là một phương trình bậc hai đối với a, nó có hai nghiệm là a và a_1. Ta có a_1 cũng là số nguyên vì theo Định lí Viet $a + a_1 = kb$, trong đó a và kb là hai số nguyên.

Nếu $a_1 = 0$ thì $k = b^2$, trái với điều giả sử trên. Nếu $a_1 < 0$ thì vế trái của đẳng thức (**) khi thay a bằng a_1 sẽ lớn hơn vế phải. Vậy $a_1 > 0$, theo Định lí Viet ta có: $a_1 = \frac{b^2 - k}{a} \leq \frac{a^2 - k}{a} < a$. Cho $b_1 = b$, ta được một nghiệm mới (a_1, b_1) mà $a_1 + b_1 < a + b$, với a_1, b_1 là các số tự nhiên.

Với (a_1, b_1), bằng phương pháp trên ta lại tìm nghiệm mới (a_2, b_2) của phương trình (1) mà $a_2 + b_2 < a_1 + b_1$.

Lặp lại quá trình trên, ta được một dãy vô hạn các nghiệm của phương trình nghiệm nguyên hai biến (**) là

$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2),\ldots,$ mà $a + b > a_1 + b_1 > a_2 + b_2 > \ldots$.

Điều này mâu thuẫn vì nó không thể xảy ra trong phạm vi số tự nhiên.

Vậy k phải là số chính phương, điều phải chứng minh.

***Bài 116.* (1989)**

Chứng minh rằng tập hợp $\{1,2,3,\ldots,1989\}$ có thể được viết thành hội của các tập con rời nhau $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ sao cho mọi A_i, i = 1, 2, ..., 117, đều có chứa 17 phần tử và tổng giá trị các phần tử của những A_i đều bằng nhau.

Prove that the set $\{1,2,3,\ldots,1989\}$ can be expressed as the disjoint union of subsets $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ such that:

i) Each A_i contains 17 elements;

ii) The sum of all the elements in each A_i is the same.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta xây dựng 117 tập hợp gồm 3 số sao cho tổng của 3 số đó trong mỗi tập đều bằng 0 và chúng rời nhau từng đôi một như sau.

Từ tập $\{1,2,3,\ldots,1989\}$, ta tạo thành tập gồm 348 số:

$$M = \{-994, -993, \ldots, 993, 994\},$$

tập hợp này có được bằng cách lấy từng số hạng của tập hợp đã cho trừ đi 995. Khi đó, ta tạo 116 tập hợp gồm 3 số nói trên là:

$$N_1 = \{993, -496, -497\},\ N_2 = \{-993, 496, 497\},$$
$$N_{2k+1} = \{993 - 4k, 2k - 496, 2k - 497\},$$
$$N_{2k+2} = \{-993 + 4k, -2k + 496, -2k + 497\},$$

....

$$N_{115} = \{665, -382, -383\},\ N_{116} = \{-665, 382, 383\}.$$

Ngoài ra, ta đặt $N_{117} = \{-1, 0, 1\}$. Tất cả 117 tập hợp trên đều rời nhau từng đôi một. Thật vậy, trong mỗi tập, do các phần tử thứ hai đều chẵn nên các phần tử thứ hai của các tập hợp $N_1, \ldots, N_{116}$ không thể trùng với các phần tử thứ nhất hoặc thứ ba của những tập hợp này, tất cả các phần tử thứ nhất của những tập hợp này có giá trị tuyệt đối lớn hơn tất cả phần tử thứ ba, thành thử các tập hợp N_i rời nhau từng đôi một. Ngoài ra, nếu số x nào đó là phần tử của một trong các tập hợp N_i thì số (- x) cũng là phần tử của một trong các tập hợp N_i.

Để ý rằng 14.117 phần tử của tập hợp M, không thuộc về một trong các tập hợp N_i, được chia thành 7.117 cặp số với dấu đối nhau. Bằng cách tùy ý ta thêm 7 cặp số phân biệt vào tập hợp N_i đã chọn ở trên, ta sẽ chia được tập hợp M thành 117 tập hợp con từng cặp không giao nhau. Cuối cùng để thoả mãn yêu cầu của bài toán, ta chỉ cần xây dựng 117 tập A_i bằng cách cộng 995 vào từng phần tử của các tập N_i tương ứng.

Chú ý: Thông thường, không phải chỉ với các kì thi IMO mà cả với những kì thi vô địch toán khác trên thế giới, người ta có khuynh hướng *thiết lập các đề toán mà các con số có gắn với năm thi* (chẳng hạn, năm 2000 thì có số 2000, năm 1978 thì có số 1978). Tất nhiên không phải bao giờ cũng vậy, nhưng người ta sẽ làm điều đó nếu như có thể được. Xem như thế, thì các đề toán có *gắn với những số năm thi tượng trưng* kia thông thường *được đặc biệt hoá từ một bài toán tổng quát hơn*. Về phía chúng ta, nếu tìm ra bài toán tổng quát từ các đề toán này thì đó là việc làm vô cùng thú vị và bổ ích.

Trong trường hợp này, ta có bài toán tổng quát sau:

Chứng minh rằng tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *có thể được viết thành hội của các tập rời nhau* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, *với* m *là ước số của* n, *sao cho mọi* A_i, i = 1, 2, ..., m, *đều có chứa* n/m *phần tử và tổng giá trị các phần tử của những* A_i *đều bằng nhau.*

***Bài 117.* (1989)**

Cho n và k là các số nguyên dương, S là tập n điểm trong mặt phẳng thoả mãn các điều kiện:

i) không có 3 điểm nào trong S thẳng hàng;

ii) với mọi điểm P thuộc S, tồn tại ít nhất k điểm trong S cách đều P.

Chứng minh rằng $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Let n and k be positive integers and let S be a set of n points in the plane such that

i) no three points of S are collinear, and

ii) for any point P of S there are at least k points of S equidistant from P.

Prove that: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Hướng dẫn:

Ta giả sử ngược lại rằng $k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Lấy một điểm P trong S, lúc đó, tồn tại ít nhất k điểm trong S cách đều P. Như vậy, tồn tại ít nhất C_k^2 cặp điểm A, B mà AP = BP. Vì điều này xảy ra với mọi P thuộc S, nên có ít nhất nC_k^2 cặp điểm (A, B) có thứ tự sao cho phát biểu sau đây là đúng: *trên đường trung trực của* AB *có ít nhất một điểm của* S. Ta có:

$$nC_k^2 = n\frac{k(k-1)}{2} \geq \frac{n}{2}\left(\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2n}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(2n-\frac{1}{4}\right) = n\left(n-\frac{1}{8}\right) > n(n-1) = 2C_n^2.$$

Vì C_n^2 là số tất cả các cặp điểm của S, còn $2C_n^2$ là số tất cả các cặp điểm có thứ tự của tập hợp S (xem lại *chỉnh hợp - arrangement*) nên từ bất đẳng thức trên, theo *Nguyên tắc Dirichlet*, suy ra rằng bắt buộc phải tồn tại một cặp điểm A, B và các điểm P_1, P_2, P_3 sao cho:

$$AP_i = BP_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Nhưng khi đó 3 điểm P_1, P_2, P_3 thẳng hàng, điều này mâu thuẫn với giả thiết ở đề bài.

***Bài 118.* (1989)**

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, tồn tại n số nguyên dương liên tiếp sao cho không có số nào trong chúng là số nguyên tố hoặc luỹ thừa của một số nguyên tố.

Prove that for each positive integer n there exist n consecutive positive integers none of which is a prime or a prime power.

Hướng dẫn:

Cho trước số nguyên dương n, ta hãy tìm cách chọn số N thích hợp sao cho N + 1, N + 2, ..., N + n có tính chất như đề bài đòi hỏi.

Muốn vậy, ta đặt $N = ((n+1)!)^2 + 1$. Lúc đó, dễ thấy số 1 + j là một ước số thực sự của N + j, với mọi j = 1, 2, ..., n nên n số N + 1, N + 2, ..., N + n không phải là số nguyên tố.

Bây giờ, giả sử $N + j = p^m$, với p nguyên tố và m > 1. Lúc đó, tồn tại số nguyên dương r, với $1 \le r \le m$ sao cho $1 + j = p^r$. Nhưng khi đó ta có $p^{r+1} \mid ((n+1)!)^2$ và $p^{r+1} \mid p^m$. Vì vậy: $p^{r+1} \mid (N-1)$ và $p^{r+1} \mid (N+j)$.

Từ đó ta suy ra $p^{r+1} \mid (1+j)$, điều này mâu thuẫn, ta có điều phải chứng minh.

***Bài 119.* (1989)**

Một hoán vị { $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ } của tập hợp {1, 2,..., 2n} được gọi là *có tính chất* P, trong đó n là một số nguyên dương, nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$ với ít nhất một i thuộc $\{1, 2, ..., 2n-1\}$. Chứng minh rằng với mỗi n, số các hoán vị có tính chất P lớn hơn số các hoán vị không có tính chất đó.

A permutation { $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ } of the set {1, 2, ... , 2n} where n is a positive integer is said to have property P if $|x_i - x_{i+1}| = n$ for at least one i in {1, 2, ... , 2n-1}. Show that for each n there are more permutations with property P than without.

Hướng dẫn:

Ta chia các số 1, 2, ..., 2n thành từng cặp như sau:

(1, n + 1), (2, n + 2),..., (n, 2n).

Bây giờ ta thiết lập một tương ứng từ tập hợp các hoán vị *không có tính chất* P vào tập hợp các hoán vị *có tính chất* P bằng cách sau đây: Giả sử { $x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_{2n}$ } là hoán vị bất kì không có tính chất P, và giả sử x_k là số thuộc cùng một cặp với số x_{2n}, $k \le 2n-2$. Khi đó hoán vị *không có tính chất* P này sẽ được đặt tương ứng với hoán vị *có tính chất* P là $\{x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{2n}, x_{2n-1}, ..., x_{k+1}\}$. Ta gọi f là tương ứng xác định như thế. Dễ dàng thấy rằng tương ứng f là một ánh xạ.

Bạn đọc tự chứng minh hai khẳng định sau:

Với ánh xạ f này, các hoán vị *không có tính chất* P mà khác nhau sẽ biến thành các hoán vị *có tính chất* P cũng khác nhau, điều này có nghĩa f là đơn ánh.

Mặt khác, không phải hoán vị *có tính chất* P nào cũng là ảnh qua f của hoán vị *không có tính chất* P. Nói cách khác, f không phải là toàn ánh. Điều đó chứng tỏ rằng số các hoán *có tính chất* P lớn hơn số các hoán vị *không có tính chất* P.

Chú ý:

1) Xem thêm *Bản số (cardinality) của tập hợp* ở phần *Kiến thức bổ trợ* cho hướng dẫn trên.

2) Kí hiệu $|A|$ là bản số của tập hợp A (khi A hữu hạn, $|A|$ là số tất cả các phần tử của A). Hướng dẫn giải sau đây được trích từ Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer 1998 [*Problem books in mathematics series*]:

Gọi A_k là tập tất cả những hoán vị sao cho trong các hoán vị đó, hai phần tử k và k + n đứng kề nhau. Gọi A là tập tất cả những hoán vị *có tính chất* P. Dễ thấy $A = \bigcup_k A_k$. Khi đó:

$$|A| = \sum_k |A_k| - \sum_{k<h} |A_k \cap A_h| + \sum_{k<h<m} |A_k \cap A_h \cap A_m| - \dots .$$

Nhưng đây là một dãy các số hạng đơn điệu giảm và đan dấu nhau nên ta suy ra $|A| \geq \sum_k |A_k| - \sum_{k<h} |A_k \cap A_h|$. Mặt khác, bạn đọc dễ dàng chứng minh được $|A_k| = 2(2n-1)!$, $|A_k \cap A_h| = 4(2n-2)!$. Từ đó:

$$|A| \geq (2n-2)!\left[n.2(2n-1) - \frac{n(n-1)}{2}4\right] = 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2},$$

suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 120.* (1990)**

Cho số nguyên $n \geq 3$ và xét tập hợp E gồm $2n-1$ điểm phân biệt nằm trên một đường tròn. Giả sử trong số các điểm này có đúng k điểm được tô màu đen. Một cách tô màu như thế được gọi là *kiểu tô tốt* nếu tồn tại ít nhất một cặp điểm màu đen sao cho phần trong của một trong hai cung tạo bởi hai điểm này chứa đúng n điểm của tập E. (Ta nói *phần trong - interior -* của một cung là các điểm của cung đó trừ hai điểm đầu cung). Hãy xác định giá trị k nhỏ nhất sao cho mọi cách tô màu k điểm của E như thế đều *tốt.*

Take n ≥ 3 and consider a set E of 2n-1 distinct points on a circle. Suppose that exactly k of these points are to be colored black. Such a coloring is "good" if there is at least one pair of black points such that the interior of one of the arcs between them contains exactly n points from E. Find the smallest value of k so that every such coloring of k points of E is good.

Hướng dẫn:

Theo chiều kim đồng hồ trên đường tròn, ta kí hiệu 2n - 1 điểm đã cho lần lượt bởi 0, 1, 2, ..., 2n - 2. Đặt K = {0, 1, 2, ..., 2n - 2}. Với m nguyên ta đồng nhất m với i thuộc K khi $m \equiv i \pmod{2n-1}$. Ta định nghĩa quan hệ i * j đối với hai phần tử i và j (thuộc K) nếu ta có

$$|i-j| = \left[\begin{matrix} n+1 \\ n-2 \end{matrix}\right. .$$

Rõ ràng ta có i * j khi và chỉ khi một trong hai phần trong của cung tạo thành chứa đúng n điểm của E. Nếu k là một số thỏa mãn tính chất của đầu bai thì ta nói đơn giản rằng k *là tốt*. Từ đó, k là *tốt* khi và chỉ khi với mọi tập con H của K gồm k phần tư, tồn tại hai phần tử của H có quan hệ * với nhau. Ta sẽ chứng minh:

a) số n là *tốt,*

b) nếu 2n - 1 không chia hết cho 3 thì n - 1 không phải *tốt,*

c) nếu 2n - 1 chia hết cho 3 thì n - 1 là *tốt.*

Chứng minh (a) : Xét tập con H của K gồm n phần tử. Giả sử trong H không có cặp phần tử nào có quan hệ * với nhau. Với j thuộc H, ta kí hiệu K(j) là tập hợp tất cả các phần tử (của K) có quan hệ * với j. Thế thì K(j) và H không giao nhau với mọi j thuộc H. Vì mỗi phần tử có mặt nhiều nhất ở trong hai K(j) nên hợp các K(j) (với j chạy khắp H) có ít nhất n phần tử, điều này mâu thuẫn với việc H có n phần tử.

Chứng minh (b): Để chứng minh khẳng định (b), ta chỉ cần xây dựng một tập con L của K sao cho L gồm n - 1 phần tử và không có cặp nào có quan hệ * với nhau. Xét các tập $L = \{3k \mid k = 0,1,\dots,n-2\}$,

$$M = \{3k+n-2 \mid k = 0,1,\dots,n-1\} = \{3(n-1-k)+n-2 \mid k = 0,1,\dots,n-1\}$$
$$= \{4n-5-3k \mid k = 0,1,\dots,n-1\} = \{3(-1-k) \mid k = 0,1,\dots,n-1\}.$$

Vì 2n - 1 không chia hết cho 3 nên ta suy ra

$$L \cup M = \{3k \mid k = -n, -n+1,\dots,n-2\} = K.$$

Từ đó ta có L gồm n - 1 phần tử, M gồm n phần tử, L và M có giao bằng rỗng. Để ý rằng với j thuộc L, j = 3k trong đó $0 \le k \le n-2$ và

$$K(j) = \{3k+n-2, 3k+n+1\} = \{3k+n-2, 3(k+1)+n-2\} \subset M,$$

ta kết luận rằng K(j) và L không giao nhau. Điều này có nghĩa là không có cặp phần tử nào có quan hệ * với nhau trong L.

Bây giờ xét trường hợp 2n - 1 chia hết cho 3. Trong trường hợp này $n \equiv 2 \pmod 3$. Đặt n = 3m - 1 với $m \ge 2$. Thế thì 2n - 1 = 3(2m - 1), n - 2 = 3(m - 1) và n + 1 = 3m. Nếu i và j (thuộc K) có quan hệ * với nhau thì i và j đồng dư với nhau theo modulo 3. Ta viết:

$$K_r = \{3k+r \mid k = 0,1,\dots,2m-2\} \ (r = 0,1,2).$$

Như thế, K được phân thành ba tập con không giao nhau như K_o, K_1, K_2. Với mỗi i thuộc K, thì từ i thuộc K_r ta suy ra hai phần tử có quan hệ * với i cũng thuộc K_r. Ta chứng minh rằng 3m - 2 là *tốt*.

Thật vậy, nếu A là tập con của K và gồm 3m - 2 phần tử thì theo nguyên tắc Drichlet, một tập con dạng $A \cap K_r$ có ít nhất m phần tử. Tương tự như chứng minh ở phần (a) ta đi đến kết luận rằng tồn tại một cặp phần tử có quan hệ * với nhau trong $A \cap K_r \subset A$.

Bây giờ ta chứng minh rằng 3(m - 1) không *tốt*. Muốn thế, ta chỉ cần xây dựng một tập con gồm (m - 1) phần tử của K_r mà không có cặp phần tử nào có quan hệ * với nhau.

Đặt $M_r = \{3k+r : k = 0,1,2,\dots,m-2\}$, với r = 0, 1, 2. Để ý rằng i và j có quan hệ * với nhau khi và chỉ khi

$$|i-j| = \left[\begin{array}{l} 3(m-1) \\ 3m \end{array}\right.,$$

ta thấy ngay không có cặp phần tử nào có quan hệ * với nhau trong mỗi tập M_o, M_1, M_2.

Tóm lại, từ những điều trên, ta suy ra giá trị k nhỏ nhất (k_{min}) sao cho mọi cách tô màu k điểm của E như đã nói ở đề bài đều *tốt* là :

$$k_{min} = \begin{cases} n & \text{khi } 2n-1 \neq 3m,\ m \in N \\ n-1 & \text{khi } 2n-1 = 3m,\ m \in N \end{cases} = \begin{cases} n & \text{khi } n \equiv \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right. \pmod 3 \\ n-1 & \text{khi } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

***Bài 121.* (1990)**

Xác định tất cả các số nguyên n lớn hơn 1 sao cho $\frac{2^n+1}{n^2}$ là một số nguyên.

Determine all integers n greater than 1 such that $\frac{2^n+1}{n^2}$ is an integer.

Hướng dẫn:

Gỉa sử n là số thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Vì 2^n+1 là số lẻ nên số n thỏa mãn đề bài phải là số lẻ. Gọi p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n. Cho x là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^x \equiv -1 \pmod p$, và y là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^y \equiv 1 \pmod p$. Số y như thế chắc chắn tồn tại và ta có y < p, vì: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, và x cũng tồn tại vì $2^n \equiv -1 \pmod p$. Ta có thể viết n = ys + r, với $0 \le r < y$. Lúc đó:

$$-1 \equiv 2^n = (2^y)^s 2^r \equiv 2^r \pmod p,$$

suy ra $x \le y < r$ (để ý r không thể bằng 0, vì $2^r \equiv -1$, chứ không phải 1 (mod p)). Ta lại có thể viết n = hx + k, với $0 \le k < x$. Lúc đó:

$$-1 \equiv 2^n = (2^x)^h 2^k \equiv (-1)^h 2^k \pmod p.$$

Giả sử k >0. Khi đó, nếu h chẵn, ta gặp mâu thuẫn vì tính bé nhất của y; cũng vậy, nếu h lẻ thì do x bé nhất nên mâu thuẫn. Vậy ta có k = 0, và x chia hết n. Nhưng x < p, còn p lại là số nguyên tố nhỏ nhất chia hết n nên ta phải có x = 1. Suy ra $2 \equiv -1 \pmod p$ và từ đó p = 3.

Bây giờ, ta giả sử rằng 3^m là lũy thừa lớn nhất của 3 chia hết n. Ta sẽ chứng minh rằng m = 1. Thật vậy, dùng khai triển nhị thức Newton cho $(3-1)^n+1$ ta được:

$$1-1+n.3-\frac{1}{2}n(n-1)3^2+\ldots = 3n-\frac{n-1}{2}n.3^2+\ldots .$$

Hiển nhiên 3n chia hết cho 3^{m+1}, nhưng không chia hết cho 3^{m+2}. Số hạng tổng quát là trong khai triển trên là $C^b_{3^m a}3^b$, ở đây ta viết n = $3^m a$ vì theo trên ta có 3^m là lũy thừa lớn nhất của 3 chia hết n, và ta xét khi $b \geq 3$. Các hệ số nhị thức đều là các số nguyên nên số hạng tổng quát này chắc chắn chia hết cho 3^{m+2} khi $b \geq m + 2$. Ta có thể viết hệ số nhị thức dưới dạng:

$$3^m \frac{a}{b} \cdot \frac{3^m - 1}{1} \cdot \frac{3^m - 2}{2} \cdot \frac{3^m - 3}{3} \cdots \frac{3^m - (b-1)}{b-1}. \qquad (*)$$

Khi b không phải bội của 3, số hạng đầu tiên trong tích trên có dạng $3^m \frac{c}{d}$, với 3 không chia hết c hoặc d, và các số hạng còn lại thì có dạng $\frac{c}{d}$, với 3 không chia hết c hoặc d. Từ đó, nếu b không phải bội của 3 thì hệ số nhị thức sẽ chia hết cho 3^m, vì $b > 3$, điều này có nghĩa là số hạng (*) nói trên chia hết cho 3^{m+3}.

Tương tự, ta cũng phân tích như thế khi b là bội của 3, và cuối cùng, để ý $b \geq 3$, ta đi đến kết luận rằng số hạng (*) chia hết cho 3^{m+2}.

Từ phân tích trên, ta suy ra 3^{m+1} là lũy thừa cao nhất của 3 chia hết $2^n + 1$. Nhưng $2^n + 1$ chia hết cho n^2 và do vậy chia hết cho 3^{2m}, từ đó ta có $m = 1$.

Tiếp đến, ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng $n = 3$ là một đáp số của bài toán.

Nếu $n > 3$, ta đặt $n = 3t$ (theo trên, ta đã chứng minh được rằng 3^1 là lũy thừa lớn nhất của 3 chia hết n). Gọi q là ước số nguyên tố nhỏ nhất của t. Gỉa sử w là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^w \equiv -1 \pmod q$ và v là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^v \equiv 1 \pmod q$.

Số v chắc chắn tồn tại và $v < q$ vì ta đã có $2^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, và số w cũng chắc chắn tồn tại vì ta đã có $2^n \equiv -1 \pmod q$, ta cũng suy ra được $w < v$ như trước đây.

Tương tự những gì đã lí luận ở trên, ta có w chia hết n. Nhưng $w < q$, mà ngoài số 3 ra, q là thừa số nguyên tố bé nhất của n. Do đó ta phải có $w = 1$ hoặc $w = 3$. Điều này không thể xảy ra, bởi khi ấy ta sẽ có $2 \equiv 1 \pmod q$, và do vậy suy ra $q = 3$ hoặc $2^3 \equiv -1 \pmod q$, tức là $q = 3$, mà ta đã biết rằng $q > 3$, mâu thuẫn!

Tóm lại, ta đã chứng minh được rằng $n = 3$ là số nguyên duy nhất lớn hơn 1 để cho $\frac{2^n + 1}{n^2}$ là một số nguyên.

***Bài 122.* (1990)**

Gọi Q^+ là tập hợp tất cả các số hữu tỉ dương. Hãy xây dựng một hàm số $f: Q^+ \longrightarrow Q^+$ sao cho với mọi $x, y \in Q^+$:

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

Construct a function from the set of positive rational numbers into itself such that f(x f(y)) = f(x)/y for all x, y.

Hướng dẫn:

Trước tiên, ta chứng minh $f(1) = 1$. Thật vậy, lấy $x = y = 1$ ta có $f(f(1)) = 1$, suy ra $f(1) = f(f(1)) = f(1f(f(1))) = \frac{f(1)}{f(1)} = 1$. Tiếp đến, ta sẽ chứng minh rằng $f(xy) = f(x)f(y)$. Với mọi $y \in Q^+$, ta có

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{f(y)}\right)f(y) = \frac{f\left(\frac{1}{f(y)}\right)}{y},$$

do đó, nếu $z = \frac{1}{f(y)}$ thì $f(z) = y$. Từ đó suy ra:

$$f(xy) = f(xf(z)) = \frac{f(x)}{z} = f(x)f(y).$$

Sau cùng, ta có $f(f(x)) = f(1f(x)) = \frac{f(1)}{x} = \frac{1}{x}$.

Bài toán không đòi hỏi chúng ta tìm *tất cả* các hàm mà chỉ yêu cầu tìm một hàm thỏa mãn các điều kiện đã cho. Do vậy, ta phân tập các số nguyên tố thành 2 tập vô hạn: $S = \{p_1, p_2, \ldots\}$, $T = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Ta bắt đầu xây dựng hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng định nghĩa

$$f(p_n) = q_n, \quad f(q_n) = \frac{1}{p_n}.$$

Sau đó, chúng ta mở rộng định nghĩa này trên tập các số hữu tỉ bằng cách dùng các hệ thức $f(xy) = f(x)f(y)$:

$$f\left(\frac{p_{i_1}p_{i_2}\cdots q_{j_1}q_{j_2}\cdots}{p_{k_1}p_{k_2}\cdots q_{m_1}q_{m_2}\cdots}\right) = \frac{p_{m_1}p_{m_2}\cdots q_{i_1}q_{i_2}\cdots}{p_{j_1}p_{j_2}\cdots q_{k_1}q_{k_2}\cdots}.$$

Thử lại, ta thấy hàm vừa xây dựng thỏa mãn:

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

***Bài 123.* (1990)**

Cho trước một số nguyên $n_0 > 1$ khởi đầu. Hai người A và B chơi một trò chơi, họ luân phiên chọn các số nguyên $n_1, n_2, n_3, ...$ theo quy luật như sau: Trước tiên, A chọn n_1 thỏa mãn điều kiện $n_0 \le n_1 \le n_0^2$. Sau đó, B chọn n_2 sao cho $\frac{n_1}{n_2} = p^r$, với p nguyên tố và r là số nguyên ≥ 1. Tổng quát, ta có trình tự tiếp theo:

Nếu biết n_{2k} là số nguyên vừa được B chọn thì A chọn số nguyên tùy ý n_{2k+1} nào đó thỏa mãn điều kiện $n_{2k} \le n_{2k+1} \le n_{2k}^2$.

Nếu biết A chọn n_{2k+1} thì B sẽ chọn số nguyên tùy ý n_{2k+2} nào đó sao cho $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r$, với p nguyên tố và r là số nguyên ≥ 1.

A thắng cuộc nếu A có thể chọn được số 1990, B thắng cuộc nếu B có thể chọn được số 1. Hỏi với các giá trị nào của n_0 thì:

a) A có thể bảo đảm sự thắng lợi của mình?
b) B có thể bảo đảm sự thắng lợi của mình?
c) Không ai có thể thắng cuộc?

Given an initial integer $n_0 > 1$, two players A and B choose integers $n_1, n_2, n_3, ...$ alternately according to the following rules: Knowing n_{2k}, A chooses any integer n_{2k+1} such that $n_{2k} \le n_{2k+1} \le n_{2k}^2$. Knowing n_{2k+1}, B chooses any integer n_{2k+2} such that $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r$ for some prime p and integer r ≥ 1.

Player A wins the game by choosing the number 1990; player B wins by choosing the number 1. For which n_0 does

a) A have a winning strategy?
b) B have a winning strategy?
c) Neither player have a winning strategy?

Hướng dẫn:

Câu trả lời là: a) nếu $n_0 \ge 8$ thì A thắng; b) nếu $n_0 = 2, 3, 4, 5$ thì B thắng; c) nếu $n_0 = 6, 7$ thì hai đối thủ hòa nhau.

a) Chiến lược của A trong việc chọn số khi biết trước số n như sau:

(1) nếu $n \in [8, 11]$, A chọn số 60;

(2) nếu $n \in [12, 16]$, A chọn số 140;

(3) nếu $n \in [17, 22]$, A chọn số 280;

(4) nếu $n \in [23, 44]$, A chon số 504;

(5) nếu $n \in [45, 1990]$, A chon số 1990;

(6) nếu $n = 1991 = 11.181$ (181 là số nguyên tố), A chọn số 1991;

(7) nếu $n \in [11^r.181+1, 11^{r+1}.181]$, với $r > 0$, A chọn số $11^{r+1}.181$.

Rõ ràng nếu có (5), A lập tức thắng cuộc.

Nếu (4) xảy ra, sau (4), B chỉ có thể chon được một trong các số 56, 63, 72, 168, vì vậy, A thắng ở bước (5).

Nếu (3) xảy ra, sau (3), B chỉ có thể chọn được một trong các số 35, 40, 56, 70, 140, vì vậy, A chắc chắn thắng bởi bước (4) và (5).

Nếu (2) xảy ra, sau (2), B chỉ có thể chọn được một trong các số 20, 28, 35, 70, vì vậy, A chắc chắn thắng bởi các bước (3), (4) và (5).

Nếu (1) xảy ra, sau (1), B chỉ có thể chọn được môt trong các số 12, 15, 20, 30, vì vậy, A chắc chắn thắng bởi các bước (2), (3), (4) và (5).

Nếu B được biết số $11^{r+1}.181$ sau khi A đã chọn số này, B chỉ có thể chọn được một trong các số 181, 11.181, ..., $11^r.181$ và 11^{r+1}, tất cả những số này đều $\leq 11^r.181$. Vì vậy, nếu A được biết các số n như trong (6) và (7), thì chiến thuật ở (6) hoặc (7) cho thấy A đã quay lại chọn số bé hơn n (và ≥ 11), do đó A sẽ thắng cuộc sau một số hữu hạn bước quay lại.

b) Nếu B được biết số bé hơn 6, anh ta sẽ có thể chọn được số 1 và thắng cuộc. Từ đó, nếu ban đầu A biết số 2, anh ta thua ngay, bởi vì anh ta sẽ phải chọn số < 5.

Nếu B được biết số ≤ 11, anh ta sẽ có thể chọn được số 1 hoặc 2 và thắng cuộc. Từ đó, nếu ban đầu A biết số 3, anh ta thua ngay, bởi vì anh ta sẽ phải chọn số < 10.

Nếu B được biết số ≤ 19, anh ta sẽ có thể chọn được số 1 hoặc 2 hoặc 3 và thắng cuộc. Từ đó, nếu ban đầu A biết số 4, anh ta thua ngay, bởi vì anh ta sẽ phải chọn số < 17.

Nếu B được biết các số ≤ 29, anh ta sẽ có thể chọn được số 1, 2, 3 hoặc 4 và thắng cuộc. Từ đó, nếu ban đầu A biết số 5, anh ta thua ngay, bởi vì anh ta sẽ phải chọn số bé hơn 25.

c) Bây giờ, xét trường hợp A nhận được các số 6 hoặc 7 ($n_o = 6$ hoặc $n_o = 7$), người chơi A có thể chọn $n_1 = 30 = 2.\ 3.\ 5$ hoặc $n_1 = 42 = 2.\ 3.\ 7$, nếu không chọn thế thì B sẽ thắng (chẳng hạn, khi A chọn 31, 32, 33, 34, 35 hay 36 thì B sẽ chọn tương ứng 1, 1, 3, 2, 5, 4 và B thắng).

Khi B đối diện với số 30 mà A chọn, B phải chọn một trong 3 số 6, 10, 15. Ta đã biết, theo trên, rằng B sẽ thua nếu anh ta chọn 10, 15, và thế thì người chơi B chọn $n_2 = 6$.

Còn khi B đối diện với số 42 mà A chọn, B phải chọn một trong 3 số 6, 14, 21. Ta đã biết, theo trên, rằng B sẽ thua nếu anh ta chọn 14, 21, và thế thì người chơi B chọn $n_2 = 6$.

Sau đó cả hai người chơi A và B luân phiên chọn các số 30, 6, 30, 6, 30, 6,... để tránh bị thua và họ sẽ hòa.

***Bài 124.* (1990)**

Chứng minh rằng tồn tại một đa giác lồi 1990 cạnh mà tất cả các góc của nó đều bằng nhau và các cạnh có độ dài là những số $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$ được sắp xếp theo một trật tự nào đó.

Prove that there exists a convex 1990-gon such that all its angles are equal and the lengths of the sides are the numbers $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$ *in some order.*

Hướng dẫn:

Trong mặt phẳng phức, ta có thể biểu diễn số đo các cạnh như đã nói ở đề bài bằng các số $p_n^2 w^n$, trong đó, p_n, với n = 1, 2, ..., 1990, là một hoán vị của các số 1, 2, ..., 1990 và w là căn bậc 1990 của đơn vị (xem mục số phức ở phần *Các kiến thức bổ trợ*).

Để ý rằng 1990 là tích của nhiều hơn 2 số nguyên tố phân biệt: 1990 = 2.5.1999. Vì thế, ta có thể viết $w = -1.a.b$, trong đó -1 là căn bậc 2 của đơn vị, a là căn bậc 5 của đơn vị và b là căn bậc 199 của đơn vị.

Bây giờ, với một trong các căn bậc 1990 của đơn vị nói trên, ta có thể viết thành $(-1)^i.a^j.b^k$, với $0 < i < 2, 0 < j < 5, 0 < k < 199$, và suy ra ta có thể đặt nó tương ứng với số $r(i,j,k) = 1 + 995i + 199j + k$. Tương ứng này cho ta song ánh vào tập các số 0, 1, ..., 1990.

Ta phải chứng minh rằng $\sum_{i,j,k} r(i,j,k)^2(-1)^i a^j b^k = 0$.

Thật vậy, lấy tổng trên theo i, ta có

$$\sum_{i,j,k} r(i,j,k)^2(-1)^i a^j b^k = -995.\sum_{j,k} a^j b^k - 1990\sum_{j,k} s(j,k)a^j b^k,$$

với $s(j,k) = 1 + 199j + k$. Mà $-995.\sum_{j,k} a^j b^k = 0$ nên ta cần chứng minh:

$$\sum_{j,k} s(j,k)a^j b^k = 0.$$

Ta lấy tổng trên theo j. Ta có thành phần thứ 1 + k của $s(j,k)$ bằng 0, thành phần thứ 199 cho ta một hằng số nhân với b^k, do đó tổng bằng 0 khi cho k chạy khắp. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 125. **(1991)**

Giả sử n là số nguyên lớn hơn 6 và $a_1, a_2, ..., a_k$ là tất cả các số tự nhiên nhỏ thua n và nguyên tố cùng nhau với n. Chứng minh rằng nếu

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_k - a_{k-1} > 0$$

thì n phải là số nguyên tố hoặc là lũy thừa của 2.

Let $n > 6$ be an integer and let $a_1, a_2, ..., a_k$ be all the positive integers less than n and relatively prime to n. If

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_k - a_{k-1} > 0,$$

prove that n must be either a prime number or a power of 2.

Hướng dẫn:

Ta có ngay $a_1 = 1$ và $a_k = n - 1$.

Ta cũng có $a_2 = p$ với p là số nguyên tố nhỏ nhất mà p không là ước của n. Vậy cộng sai của cấp số cộng $\{a_i\}$ là $d = p - 1$.

Nếu n lẻ thì $a_2 = 2$ và $d = 1$. Suy ra n nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên nhỏ thua n. Vậy n nguyên tố.

Nếu n chẵn thì $p \geq 3$. Từ đó:

* Khi $p = 3$ thì $d = 2$ ta được cấp số $1, 3, 5, ..., n - 1$. Vì với mọi số lẻ $q < n$ ta đều có $(q, n) = 1$, do vậy $n = 2^m$.

* Khi $p > 3$ thì n chia hết cho 3 và $a_k = a_1 + d(k-1)$ nên $n - 1 = 1 + (p-1)(k-1)$. Do vậy $n - 2$ chia hết cho $p - 1$. Giả sử q là ước nguyên tố của $p - 1$ thì q cũng là ước của số $n - 2$ vì $q < p$ nên n chia hết cho q. Vậy $n - 2$ chia hết cho q và n chia hết cho q, suy ra $q = 2$.

Như thế, mọi ước nguyên tố của $p-1$ đều bằng 2, do đó $p-1=2^h$ hay

$$p=2^h+1\ (h\geq 2).$$

Nhưng p là số nguyên tố nên $h=2^t$, vậy $p=2^{2^t}+1$ với $t\geq 1$.

Xét $a_3=a_1+2d=1+2(p-1)=2p-1=2^{2^t+1}+1$. Rõ ràng a_3 chia hết cho 3, mà n chia hết cho 3, điều này không thể xảy ra.

Ta có điều phải chứng minh.

***Bài 126.* (1991)**

Cho $S=\{1,2,3,...,280\}$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm n phần tử của S đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Let S = {1, 2, 3, ... 280}. Find the smallest integer n such that each n-element subset of S contains five numbers which are pairwise relative--ly prime.

Hướng dẫn:

Đặt $A_1=\{k\in S,\ 2\mid k\}$; $A_2=\{k\in S;\ 3\mid k\}$; $A_3=\{k\in S,\ 5\mid k\}$;

$A_4=\{k\in S,\ 7\mid k\}$ và $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$.

Kí hiệu $|A_j|$ là số các phần tử của A_j, thì :

$$|A_1|=140,\ |A_2|=93,\ |A_3|=56,\ |A_4|=40,$$

$$|A_1\cap A_2|=46,\ |A_1\cap A_3|=28,\ |A_1\cap A_4|=20,$$

$$|A_2\cap A_3|=18,\ |A_2\cap A_4|=13,\ |A_3\cap A_4|=8,$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=9,\ |A_1\cap A_2\cap A_4|=6,$$

$$|A_1\cap A_3\cap A_4|=4,|A_2\cap A_3\cap A_4|=2,$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=1.$$

Do đó :

$$|A|=(140+93+56+40)-(46+28+20+18+13+8)+(9+6+4+2)-1=216$$

Vậy, với 5 số tuỳ ý (đôi một khác nhau) của A, ta đều có thể tìm được ít nhất 2 số ở trong cùng một tập A_i $(1\leq i\leq 4)$ và hai số trong cùng tập A_i này rõ ràng là không nguyên tố cùng nhau. Do vậy, số n cần tìm phải lớn hơn 216.

Ta sẽ chứng minh $n=217$ thoả mãn đề bài.

Đặt: $B_1 = A \setminus \{2,3,5,7\}$,

$B_2 = \{11^2, 11.13, 11.17, 11.19, 11.23, 13^2, 13.17, 13.19\}$, $P = S \setminus (B_1 \cup B_2)$.

Ta có $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$ và P chứa số 1 và tất cả các số nguyên tố có trong S. Xét tập hợp T tuỳ ý chứa 217 số. Nếu $|T \cap P| \geq 5$ ta có ngay điều phải chứng minh. Vậy chỉ cần xét trường hợp khi

$$|T \cap P| \leq 4.$$

Khi đó $|T \cap (S \setminus P)| \geq 217 - 4 = 213$. Điều này chứng tỏ rằng từ tập hợp tất cả các số không nguyên tố trong S (tất cả gồm $|S \setminus P| = 220$ số) có nhiều nhất là 7 số không nằm trong T. Đặt:

$M_1 = \{2.23, 3.19, 5.17, 7.13, 11.11\}$, $M_2 = \{2.29, 3.23, 5.19, 7.17, 11.13\}$,

$M_3 = \{2.31, 3.29, 5.23, 7.19, 11.17\}$, $M_4 = \{2.37, 3.31, 5.29, 7.23, 11.19\}$,

$M_5 = \{2.41, 3.37, 5.31, 7.29, 11.23\}$, $M_6 = \{2.43, 3.41, 5.37, 7.31, 13.17\}$,

$M_7 = \{2.47, 3.43, 5.41, 7.37, 13.19\}$, $M_8 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}$.

Rõ ràng $M_i \subset SP (i = 1,2,...,8)$ và mọi phần tử của M_i đôi một nguyên tố cùng nhau. Theo Nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất 1 chỉ số $i_0 (1 \leq i_0 \leq 8)$ sao cho $M_{i_0} \subset T$. Ta được điều phải chứng minh.

Bài 127. **(1991)**

Cho G là một *đồ thị liên thông* gồm k cạnh. Chứng minh rằng có thể đánh số các cạnh bằng tất cả các số 1, 2, 3, ..., k sao cho tại mỗi đỉnh thuộc về ít nhất hai cạnh của đồ thị, ta đều có ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh này bằng 1.

[Ta gọi *đồ thị* (graph) G là một tập hợp các điểm, được gọi là đỉnh, cùng với tập hợp các cạnh nối một số cặp đỉnh phân biệt với nhau. Mỗi cặp đỉnh thuộc không quá một cạnh. Đồ thị G được gọi là *liên thông* (connected graph) nếu với mỗi cặp đỉnh phân biệt x, y đều tồn tại một dãy các đỉnh $x = v_0, v_1 ..., v_m = y$ sao cho mỗi cặp v_i, v_{i+1} $(0 \leq i < m)$ đều được nối bởi một cạnh của đồ thị G.]

Suppose G is a connected graph with k edges. Prove that it is possible to label the edges 1, 2, ... , k in such a way that at each vertex which belongs to two or more edges, the greatest common divisor of the integers labeling those edges is 1.

[A graph is a set of points, called vertices, together with a set of

edges joining certain pairs of distinct vertices. Each pair of edges belongs to at most one edge. The graph is connected if for each pair of distinct vertices x, y there is some sequence of vertices $x = v_o, v_1 \dots, v_m = y$*, such that each pair* v_i, v_{i+1} $(0 \le i < m)$ *is joined by an edge.]*

Hướng dẫn:

Cách 1: Ta bắt đầu tại một đỉnh v_0 nào đó. Hãy tưởng tượng rằng ta đang đi dọc theo các cạnh phân biệt của đồ thị, vừa đi vừa đánh số chúng như ta đang đếm: 1, 2, 3, ..., cho đến khi ta không thể đi xa hơn được nữa vì nếu muốn đi thêm phải dùng lại một cạnh đã đi qua.

Nếu có những cạnh không được đánh số thì một trong những cạnh này phải có một đỉnh ta đã đi qua, vì G liên thông. Hãy khởi đầu từ đỉnh này, ta tiếp tục đi dọc theo các cạnh chưa dùng tới, đánh số lại nơi ta đi qua, và tiếp tục như thế cho đến khi một lần nữa ta không thể đi xa hơn. Quá trình này được lặp lại cho đến lúc tất cả các cạnh đều được đánh số.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng việc đánh số như trên thỏa mãn điều kiện ở đề bài: *tại mỗi đỉnh thuộc về ít nhất hai cạnh của đồ thị, ta đều có ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh này bằng* 1. Thật vậy, gọi v là một đỉnh như thế (v thuộc về ít nhất hai cạnh của đồ thị). Nếu $v = v_0$, tức v là đỉnh xuất phát, thì một trong các cạnh chứa đỉnh v đã được đánh số 1, do đó, hiển nhiên ta có ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh v này bằng 1. Nếu $v \neq v_0$, giả sử lần đầu tiên ta đánh số v trên đường đi là vào lúc cuối của cạnh được đánh số r. Vào lúc đó, có nhiều hơn 1 cạnh chưa sử dụng tại đỉnh v, một trong những cạnh này được đánh số r + 1. Do đó, ước số chung lớn nhất của các số nguyên viết trên các cạnh của đỉnh v này bằng 1, vì các cạnh này có chứa r và r + 1. Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Xét các dạng đường đi dài nhất (gọi tắt là chu trình) qua các cạnh. Nếu số cạnh của đồ thị là $k = 1$ thì bài toán có lời giải tầm thường. Xét $k \ge 2$. Khi đó tồn tại ít nhất một chu trình đi qua ít nhất hai cạnh. Ta đánh số các cạnh của chu trình đó theo thứ tự $1, 2, \dots, m$ (m là số cạnh của chu trình). Bỏ các cạnh của chu trình này ra khỏi đồ thị G, ta được đồ thị G'_1. Bỏ tất cả các đỉnh không liên thuộc G'_1, ta được đồ thị G_1.

Nếu G_1 vẫn có chu trình chứa ít nhất hai cạnh thì ta đánh số các cạnh của một trong số các chu trình như vậy bởi : $m+1, m+2, ..., m+m_1$ theo thứ tự của đường đi (m_1 là số cạnh của chu trình trong G_1).

Lại loại tất cả các cạnh của chu trình này ra khỏi G_1 ta được đồ thị G_2. Tiếp tục xây dựng các chu trình trong G_2 theo cách trên.

Tiếp tục như vậy, sau hữu hạn bước (do G có hữu hạn cạnh) ta thu được một tập hợp rỗng (đồ thị không đỉnh, không cạnh) hoặc thu được một đồ thị gồm các chu trình 1 cạnh. Trường hợp đầu đã được đánh số trong. Đối với trường hợp thứ hai, thì chỉ việc điền các số còn lại một cách tuỳ ý. Bây giờ ta chứng minh rằng cách đánh số trên thoả mãn điều kiện bài toán.

Xét một đỉnh B tuỳ ý của đồ thị G mà B có ít nhất hai cạnh. Theo cách xây dựng thì B phải thuộc ít nhất 1 chu trình nào đó và không thể là điểm đầu hay điểm cuối của chu trình đó. Theo cách đánh số ở trên thì tại B có hai cạnh được điền hai số tự nhiên liên tiếp nên suy ra ước chung lớn nhất của tập hợp các số viết trên cạnh của đỉnh B bằng 1, ta có điều phải chứng minh.

***Bài 128.* (1991)**

Cho số thực $a > 1$ tuỳ ý. Hãy dựng dãy vô hạn và bị chặn $x_0, x_1, x_2, ...$ sao cho $|x_n - x_m||n-m|^a \geq 1$ với mọi cặp số nguyên không âm phân biệt m, n. [Dãy vô hạn các số thực $x_0, x_1, x_2, ...$ được gọi là *bị chặn* (bounded infinitive sequence) nếu tồn tại một hằng số C sao cho

$$|x_n| \leq C \text{ với mọi } n \geq 0.]$$

Given any real number a > 1, construct a bounded infinite sequence $x_0, x_1, x_2, ...$ *such that* $|x_n - x_m||n-m|^a \geq 1$ *for every pair of distinct m, n. [An infinite sequence* $x_0, x_1, x_2, ...$ *of real numbers is bounded if there is a constant C such that* $|x_n| \leq C$ *for all* $n \geq 0$.*]*

Hướng dẫn:

Cách 1: Đặt $t = \frac{1}{2^a}$ và định nghĩa: $c = 1 - \frac{t}{1-t}$. Vì a > 1 nên c >0.

Bây giờ, cho số nguyên n > 1 bất kì, ta viết n trong hệ nhị phân:

$n = \sum_i b_i 2^i$ và đặt $x_n = \frac{1}{c}\sum_{b_i>0} t^i$, chẳng hạn, $n = 21 = 2^4 + 2^2 + 2^0$ thì

$$x_{21} = \frac{1}{c}(t^4 + t^2 + t^0).$$

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi m, n khác nhau ta có

$$|x_n - x_m|\,|n-m|^a \geq 1.$$

Khi đó, bài toán được giải, vì rõ ràng dãy x_n dương và bị chặn bởi hằng số $\frac{1}{c}\sum_n t^n = \frac{1}{1-2t}$.

Gọi k là số mũ cao nhất của 2 sao cho 2^k chia hết cả m lẫn n. Lúc đó, $|n-m| \geq 2^k$, và trong biểu diễn qua hệ nhị phân của m và n, các hệ số của $2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}$ giống nhau, còn hệ số của 2^k thì khác nhau. Suy ra $c|x_n - x_m| = t^k + \sum_{i>k} y_i$, trong đó $y_i = 0$, t^i hay $-t^i$. Ta có:

$$\sum_{i>k} y_i > -\sum_{i>k} t^i = \frac{t^{k+1}}{1-t},$$

do đó $|x_n - x_m| > t^k\left(1 - \frac{t}{1-t}\right) = ct^k$. Từ đó ta có điều phải chứng minh:

$$|x_n - x_m|\,|n-m|^a > t^k 2^{ak} = 1.$$

Cách 2: Với $a \in R$, ta kí hiệu $[a]$ và $\{a\}$ lần lượt là phần nguyên và phần thập phân của a. Với cặp số nguyên không âm phân biệt m, n ta có: $\{m\sqrt{2}\} - \{n\sqrt{2}\} = (m\sqrt{2} - [m\sqrt{2}]) - (n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}]) = \sqrt{2}(m-n) - h$, trong đó $h = [m\sqrt{2}] - [n\sqrt{2}]$. Vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, nên $2(m-n)^2 - h^2 \neq 0$.

Do vậy: $\left|\{m\sqrt{2}\} - \{n\sqrt{2}\}\right| = \left|\sqrt{2}(m-n) - h\right| = \left|\frac{2(m-n)^2 - h^2}{\sqrt{2}(m-n) + h}\right|$

$$\geq \frac{1}{\left|\sqrt{2}(m-n) + h\right|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}|m-n| + |h|}.$$

Mặt khác:

$$|h| = \left|[m\sqrt{2}] - [n\sqrt{2}]\right| \leq \left|m\sqrt{2} - n\sqrt{2}\right| + 2 = \sqrt{2}|m-n| + 2 \leq (2+\sqrt{2})|m-n|.$$

Do đó: $\left|\{m\sqrt{2}\} - \{n\sqrt{2}\}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}|m-n| + 2(2+\sqrt{2})|m-n|} = \frac{1}{(2+2\sqrt{2})|m-n|}.$

Suy ra $\left|8\{m\sqrt{2}\}-8\{n\sqrt{2}\}\right|\left|m-n\right|\geq 1$. Do vậy, ta chọn dãy $x_n = 8\{n\sqrt{2}\}$ thì điều kiện ở đề bài được thỏa mãn vì với mọi n ta có $|x_n|\leq 8$ và

$$|x_n - x_m|\,|n-m|^a \geq |x_n - x_m|\,|n-m|\geq 1$$

với mọi cặp số nguyên không âm phân biệt m, n.

***Bài 129.* (1992)**

Tìm tất cả các số nguyên a, b, c thoả điều kiện $a<b<c$ và

$abc-1$ chia hết cho $(a-1)(b-1)(c-1)$.

Find all integers a, b, c satisfying $1<a<b<c$ such that

$(a-1)(b-1)(c-1)$ *is a divisor of* $abc-1$.

Hướng dẫn:

Đặt $d=\dfrac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}=\dfrac{\big((a-1)+1\big)\big((b-1)+1\big)\big((c-1)+1\big)-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$

$$=1+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{(a-1)(b-1)}+\frac{1}{(b-1)(c-1)}+\frac{1}{(c-1)(a-1)}$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}<4$$

(vì $a\geq 2, b\geq 3, c\geq 4$). Hơn nữa, $d>1$ và nếu $a\geq 4$ thì

$$d\leq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15}=1\frac{59}{60}<2.$$

Từ đó, d = 2 hoặc d = 3 và a = 2 hoặc a = 3.

Ta có 4 trường hợp để kiểm tra:

- *Trường hợp 1:* a = 2 và d = 2. Ta có:

$$\frac{2bc-1}{(b-1)(c-1)}=2 \Leftrightarrow 2bc-1=2(b-1)(c-1).$$

Vế trái ở phương trình trên lẻ còn vế phải chẵn nên phương trình vô nghiệm.

- *Trường hợp 2:* a = 2 và d = 3. Ta có:

$$\frac{2bc-1}{(b-1)(c-1)}=3 \Leftrightarrow (b-3)(c-3)=5.$$

Vì b < c nên $\begin{cases} b-3=1 \\ c-3=5 \end{cases}$, suy ra a = 2, b = 4, c = 8.

- *Trường hợp 3:* a = 3 và d = 2. Ta có:

$$\frac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)}=2 \Leftrightarrow (b-4)(c-4)=11.$$

Vì b < c nên $\begin{cases} b-4=1 \\ c-4=11 \end{cases}$, suy ra a = 3, b = 5, c = 15.

- *Trường hợp 4:* a = 3 và d = 3. Ta có:

$$\frac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)}=3 \Leftrightarrow 3bc-1=6(b-1)(c-1).$$

Phương trình này vô nghiệm vì vế phải là bội của 3 còn vế trái thì không. Tóm lại, các nghiệm của bài toán là:

a = 2, b = 4, c = 8 và a = 3, b = 5, c = 15.

Bài 130. **(1992)**

Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập tất cả các số thực và nhận giá trị thực, sao cho với mọi x, y ta có: $f(x^2+f(y))=y+f^2(x)$ (ở đây, kí hiệu $f^2(x)$ có nghĩa $(f(x))^2$).

Find all functions f defined on the set of all real numbers with real values, such that $f(x^2+f(y))=y+f^2(x)$ for all x, y.

Hướng dẫn:

Trước tiên ta chứng minh $f(0)=0$. Cho x = y = 0, đặt $t=f(0)$, ta có $f(t)=t^2$. Ta lại có: $f(x^2+t)=f^2(x)$, $f(f(x))=x+t^2$.

Ta tính $f(t^2+f^2(1))$ theo hai cách. Đầu tiên ta có:

$$f(t^2+f^2(1)) = f(f^2(1)+f(t))=t+f^2(f(1))=t+(1+t^2)^2=1+t+2t^2+t^4.$$

Sau đó, ta cũng có: $f(t^2+f^2(1)) = 1+t+f^2(t)=1+t+t^4$.

Từ đó ta được t = 0, hay $f(0)=0$.

Đến đây ta suy ra $f(f(x))=x$ và $f(x^2)=f^2(x)$.

Gọi y là số thực bất kì, đặt $z=f(y)$, suy ra $y=f(z)$, và:

$$f(x^2+y)=z+f^2(x)=f(y)+f^2(x).$$

Cho $x>0$ tùy ý, chọn z sao cho $x=z^2$, khi đó:

$$f(x+y)=f(z^2+y)=f(y)+f^2(z)=f(x)+f(y).$$

Đặt $y=-x$ ta nhận được $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$. Suy ra $f(-x)=-f(x)$, điều này kéo theo, với mọi x, y: $f(x-y)=f(x)-f(y)$.

Bây giờ, lấy x bất kì, đặt $y=f(x)$. Nếu y > x, đặt $z=y-x$ thì

$$f(z)=f(y-x)=f(y)-f(x)=x-y=-z.$$

Nếu $y < x$, đặt $z = x - y$ thì $f(z) = f(x - y) = f(x) - f(y) = y - x = -z$.

Như vậy là, cả hai trường hợp trên cho ta:

$$\text{nếu } z > 0 \text{ thì } f(z) = -z < 0.$$

Bây giờ ta chọn w sao cho $w^2 = z$ thì $f(z) = f(w^2) = f^2(w) < 0$, điều này mâu thuẫn. Vậy ta phải có $f(x) = x$.

***Bài 131.* (1992)**

Cho S là một tập hữu hạn các điểm trong không gian 3 chiều. Gọi S_x, S_y, S_z lần lượt là tập gồm các hình chiếu các điểm của S lên các mặt phẳng yOz, zOx, xOy tương ứng. Chứng minh rằng:

$$|S|^2 \leq |S_x|.|S_y|.|S_z|,$$

trong đó, $|A|$ là kí hiệu số tất cả các phần tử của tập hữu hạn A.

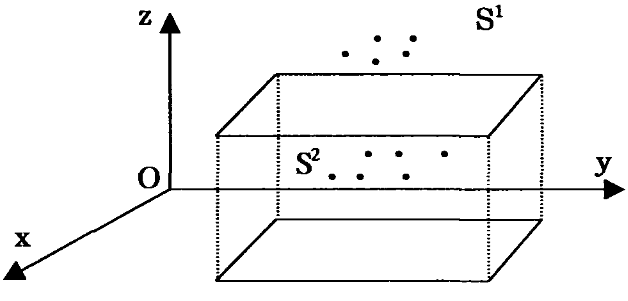
Let S be a finite set of points in three-dimensional space. Let S_x, S_y, S_z be the sets consisting of the orthogonal projections of the points of S onto the yOz-plane, zOx-plane, xOy-plane respectively. Prove that:

$$|S|^2 \leq |S_x|.|S_y|.|S_z|,$$

where $|A|$ denotes the number of points in the set A.

Hướng dẫn:

Ta chứng minh kết quả bằng quy nạp theo số các điểm của tập hợp S. Rõ ràng kết quả đúng với $|S| = 1$. Giả sử kết quả đúng khi $|S| = n$. Ta xét S với $|S| = n + 1$.



Xét một mặt phẳng song song với một trong các mặt phẳng toạ độ, mặt phẳng này không chứa bất cứ điểm nào trong các điểm của S, nó chia S thành hai miền khác rỗng S^1 và S^2. Trong hình bên, mặt phẳng này song song với mặt phẳng xOy.

Khi đó: $|S| = |S^1| + |S^2|$, $0 < |S^1| < n$, $0 < |S^2| < n$, $|S_x| = |S_x^1| + |S_x^2|$,

$$|S_y| = |S_y^1| + |S_y^2|, \ |S_z| = |S_z^1| + |S_z^2|.$$

Bây giờ, áp dụng giả thiết quy nạp cho $|S^1|, |S^2|$ và bất đẳng thức Cauchy - Schwartz ta được:

$$|S|^2=(|S^1|+|S^2|)^2 \le \left(\sqrt{|S_x^1|.|S_y^1|.|S_z^1|}+\sqrt{|S_x^2|.|S_y^2|.|S_z^2|}\right)^2$$

$$\le\left(\sqrt{|S_x^1|.|S_y^1|}+\sqrt{|S_x^2|.|S_y^2|}\right)^2|S_z| \le \left(|S_x^1|+|S_x^2|\right)\left(|S_y^1|+|S_y^2|\right)|S_z|,$$

suy ra $|S|^2\le|S_x|.|S_y|.|S_z|$, ta có điều phải chứng minh.

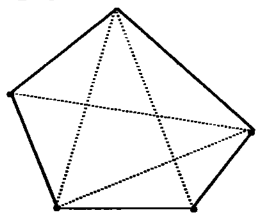
***Bài 132.* (1992)**

Trong không gian, cho 9 điểm sao cho không có bất cứ hệ 4 điểm nào trong số đó đồng phẳng. Cứ hai điểm thì được nối một đoạn thẳng (cạnh), mỗi cạnh được tô màu xanh hoặc đỏ, hoặc không tô gì cả. Tìm giá trị n nhỏ nhất sao cho hễ có đúng n cạnh được tô màu thì tập hợp các cạnh được tô đó phải chứa một tam giác có cả 3 cạnh cùng màu.

Consider 9 points in space, no 4 coplanar. Each pair of points is joined by a line segment which is colored either blue or red or left uncolored. Find the smallest value of n such that whenever exactly n edges are colored, the set of colored edges necessarily contains a triangle all of whose edges have the same color.

Hướng dẫn:

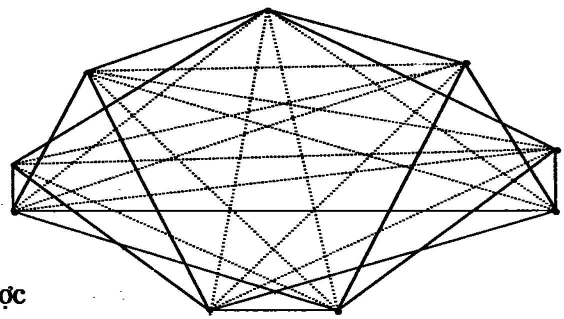
Nếu chọn 6 điểm bất kì mà cả 10 cạnh đều được sơn màu xanh hoặc đỏ thì đồ hình tạo bởi 6 điểm này sẽ chứa một tam giác với 3 cạnh cùng màu. Thật vậy, gọi một điểm là A, điểm này được nối với 5 điểm khác tạo thành 5 cạnh với hai màu sơn, nên nhận xét trên đúng theo nguyên tắc Dirichlet.



Để ý rằng kết quả trên không đúng với hệ gồm 5 điểm như ví dụ sau đây, xem đồ hình bên cạnh, với chú ý: đường liền nét là màu đỏ, không liền nét là màu xanh.

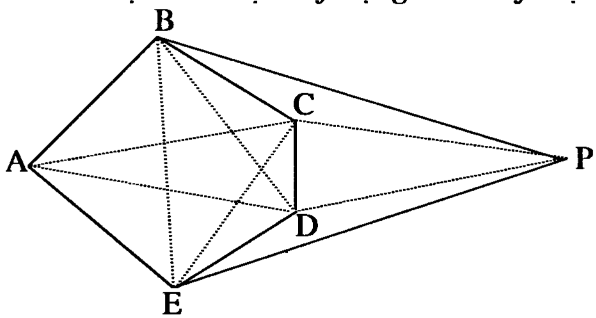
Giờ ta xét hệ gồm 9 điểm. Nếu có 3 cạnh không màu, thì số cạnh được tô màu là 36 - 3 = 33, ta sẽ có một tập con 6 điểm như trường hợp đã xét trên.

Vậy với n = 33 thì bảo đảm có được tam giác với 3 cạnh cùng màu.



Mặt khác, nếu chỉ có 32 cạnh được sơn (trong hệ 9 điểm) thì không bảo đảm có được tam giác với 3 cạnh cùng màu, như ví dụ đồ hình trên (những cặp đỉnh - 4 cặp - không nối nhau tượng trưng cho việc không tô màu).

Ví dụ trên được xây dựng theo suy luận logic như sau:



Ta xuất phát từ 5 điểm như hình bên (A, B, C, D, E). Ta thêm vào điểm P nối với B, C, D, E. Các cạnh tạo thành lần lượt là PB, PC, PD, PE tương ứng có cùng màu với AB, AC, AD, AE. Khi đó, ta được đồ hình 6 đỉnh, 14 cạnh có màu nhưng không có tam giác với 3 cạnh cùng màu.

Ta thêm vào điểm Q, nối Q lần lượt với P, A, C, D, E sao cho các cạnh tạo thành có màu tương ứng giống với BP, BA, BC, BD, BE. Đồ hình này cho ta 7 đỉnh, 19 cạnh có màu, nhưng không có tam giác với 3 cạnh cùng màu.

Tiếp đến, ta thêm vào điểm R, nối R lần lượt với P, Q, A, B, D, E sao cho các cạnh tạo thành có màu tương ứng giống với CP, CQ, CA, CB, CD, CE. Đồ hình này có 8 đỉnh, 25 cạnh có màu, nhưng không có tam giác với 3 cạnh cùng màu.

Cuối cùng, thêm vào điểm S, nối S lần lượt với P, Q, R, A, B, C, E sao cho các cạnh tạo thành có màu tương ứng giống với DP, DQ, DR, DA, DB, DC, DE. Đồ hình này có 9 đỉnh, 32 cạnh có màu, nhưng không có tam giác với 3 cạnh cùng màu.

Vậy, số n cần tìm là 33.

***Bài 133.* (1992)**

Với mỗi số nguyên dương n, ta kí hiệu S(n) là số nguyên dương lớn nhất sao cho với mọi k nguyên dương, $k \le S(n)$, thì n^2 có thể được viết thành tổng các bình phương của k số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng $S(n) \le n^2 - 14, \forall n \ge 4$.

b) Tìm số nguyên n sao cho $S(n) = n^2 - 14$.

c) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho $S(n) = n^2 - 14$.

For each positive integer n, S(n) is defined as the greatest integer such that for every positive integer $k \le S(n)$, n^2 can be written as the sum *of k positive squares.*

a) Prove that $S(n) \le n^2 - 14$, $\forall n \ge 4$.

b) Find an integer n such that $S(n) = n^2 - 14$.

c) Prove that there are infinitely many integers n such that

$$S(n) = n^2 - 14.$$

Hướng dẫn:

a) Từ $n^2 = 1^2 + 1^2 + ... + 1^2$, ta suy ra n^2 luôn là tổng của n^2 số hạng bình phương. Thay 4 số hạng ở trên bởi 2^2 ta rút gọn đi 3 số hạng, thay 9 số hạng bởi 3^2 ta làm giảm đi 8 số hạng. Như thế, số các bình phương có thể bớt đi là

3, 6 (= 3 + 3), 9 (= 3 + 3 +3), 11 (=8 + 3), 12 (= 3 + 3 + 3 + 3), v. v...

Ta không thể làm giảm bớt 13 số các bình phương theo cách trên, nhưng với mọi $k \ge 4$, ta có thể làm giảm đi k số hạng bình phương.

(Kiểm tra: 14 = 3 + 3 + 8, 15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3, 16 = 8 + 8, và các giá trị k cao hơn được thực hiện bằng cách thêm vào các bội của 3, 14, 15 hay 16).

Do đó $S(n) \le n^2 - 14, \forall n \ge 4$.

Ta cũng có thể chứng minh được rằng n^2 không thể nào được biểu diễn thành tổng của $n^2 - 13$ số các bình phương, vì ít nhất một trong các số bình phương đó phải lớn hơn 1. Ta thử các khả năng sau:

$$n^2 = (n^2 - 14) \times 1^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 14,$$

$$n^2 = (n^2 - 15) \times 1^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 15,$$

$$n^2 = (n^2 - 16) \times 1^2 + a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 16,$$

$$n^2 = (n^2 - 17) \times 1^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 17,$$

$$n^2 = (n^2 - 18) \times 1^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 18.$$

Bốn trường hợp đầu, không thể có nghiệm nguyên. Với $r \ge 5$, rõ ràng tổng của r số hạng bình phương lớn hơn 13 + r.

b) Không có tam giác vuông nào với các cạnh nguyên mà cạnh huyền bằng 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11 hay 12. Như thế, ta có S(n) = 1 với các giá trị n vừa kể. Dễ dàng kiểm tra được 25 và 100 có thể viết thành tổng của 2 số bình phương, nhưng không thể là 3, từ đó: S(5) = S(10) = 2.

Ta sẽ chứng minh n = 13 là nghiệm của phương trình

$$S(n) = n^2 - 14.$$

Rõ ràng 169 có thể viết được thành tổng của các bình phương bằng nhiều cách, chẳng hạn:

$$169 = 13^2 = 5^2 + 12^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$$
$$= 1^2 + 2^2 + 8^2 + 10^2 = 3^2 + 4^2 + 4^2 + 8^2 + 8^2.$$

Ta nhận thấy $(2r)^2 = r^2 + r^2 + r^2 + r^2$ với mọi r là số nguyên, do đó, bảng phân tích trên có thể được tiếp tục:

$169 = 3^2 + 4^2 + 4^2 + 8^2 + 8^2$ (5 số hạng),

$169 = 3^2 + 4^2 + 4^2 + (4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2) + 8^2$ (8 số hạng),

....,

$169 = 3^2 + (1^2 + 1^2 + ... + 1^2)$ (161 số hạng).

Theo cách trên, 169 có thể biểu diễn được thành tổng của 2 + 3t các bình phương $(1 \le t \le 53)$.

Từ phân tích $169 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2 + 8^2 + 8^2$ (7 số hạng), tương tự, ta có thể thu được các biểu diễn 169 thành một tổng các bình phương của 10, 13, 16, ..., 169 số hạng, tức là tổng của 1 + 3t các số hạng $(2 \le t \le 56)$. Tiếp đến, ta cần biểu diễn thành tổng của k số hạng các bình phương, với k là bội của 3. Từ $169 = 2\times3^2 + 3\times1^2 + 2^2 + 4^2 + 2\times8^2$ (9 số hạng), ta có thể biểu diễn 169 thành tổng các bình phương của

12, 15, 18, ..., 153, hay 3t $(3 \le t \le 51)$ các số hạng.

Cả ba phương pháp trên chứng tỏ rằng có thể biểu diễn 169 thành tổng của k các số hạng bình phương, với $k \le S(13) = 13^2 - 14$.

c) Ta chứng minh rằng từ $S(n) = n^2 - 14$ suy ra $S(2n) = (2n)^2 - 14$.

Giả sử n có thể được biểu diễn bởi:

$$n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ... \text{ (k số hạng, } 1 \le k \le n^2 - 14\text{)},$$

khi đó $(2n)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 + ...$, và mỗi số hạng bình phương chẵn này có thể phân thành 4, tức là các số hạng được tăng thêm 3 lần. Do đó $(2n^2)$ có thể biểu diễn thành tổng của k số hạng bình phương, với $1 \le k \le n^2 - 56$. Bây giờ, ta lại dùng kĩ thuật phân tích như ở (a):

$$2^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,\ 3^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

để chứng tỏ $(2n^2)$ có thể biểu diễn được thành tổng của:

* $(2n^2)$ - (3k + 11) các bình phương: $((2n^2) - 4k - 13)\times1^2 + (k+1)\times2^2 + 3^2$,

* $(2n^2)$ - (3k + 12) các bình phương: $((2n^2) - 4k - 16)\times1^2 + (k+4)\times2^2$,

* $(2n^2)$ - (3k + 12) các bình phương:

$$((2n^2) - 4k - 14)\times1^2 + (k-1)\times2^2 + 2\times3^2,$$

với k = 1, 2, 3, ... Vì các hệ số đều không âm nên ta phải có

$$(2n^2) - 4k - 16 \geq 0 \text{ hay } k \leq n^2 - 4.$$

Do $4n^2 - 56 \geq n^2 - 4$ khi n > 4, từ trên ta suy ra ($2n^2$) có thể được biểu diễn thành tổng của k số hạng bình phương, với $1 \leq k \leq 4n^2 - 14$.

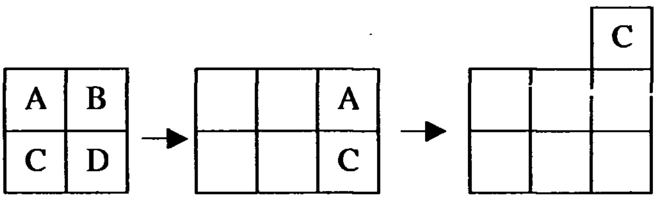
Điều này chứng tỏ rằng $S(2n) = (2n)^2 - 14$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 134.* (1993)**

Trên một bàn cờ có vô hạn ô người ta quy ước một trò chơi như sau: Đầu tiên, n^2 mảnh được sắp xếp thành một khối $n \times n$ các hình vuông kề nhau, mỗi mảnh đặt trên một hình vuông. Một lần di chuyển (*một nước đi*) tức là một lần nhảy theo chiều ngang hoặc chiều đứng băng qua hình vuông chiếm chỗ kề nó để đến một hình vuông không bị chiếm chỗ tiếp liền theo sau. Mảnh nào đã bị nhảy qua cũng coi như đã dời chỗ. Trò chơi kết thúc khi chỉ còn một mảnh duy nhất trên bàn cờ. Tìm những giá trị n để trò chơi kết thúc.

On an infinite chessboard a game is played as follows. At the start n^2 pieces are arranged in an $n \times n$ block of adjoining squares, one piece on each square. A move in the game is a jump in a horizontal or vertical direction over an adjacent occupied square to an unoccupied square immediately beyond. The piece which has been jumped over is removed. Find those values of n for which the game can end with only one piece remaining on the board.

Hướng dẫn:



Hình 1.

Ta sẽ chứng minh rằng trò chơi chỉ kết thúc được nếu n không phải là bội của của 3. Trước tiên, xét trường hợp n = 2 (xem *hình 1*).

Phương pháp di chuyển để giải bài toán đặt trên cơ sở các "bộ ba bước nhảy", qua đó, ta di chuyển về thành một hình chữ nhật đặt dọc theo một cạnh của đồ hình như *hình 2*.

Xét trường hợp n = 4. Đối với trường hợp này, một dãy các bộ ba bước nhảy sẽ đưa về trường hợp 2×2 (n = 2) (xem *hình 3*)

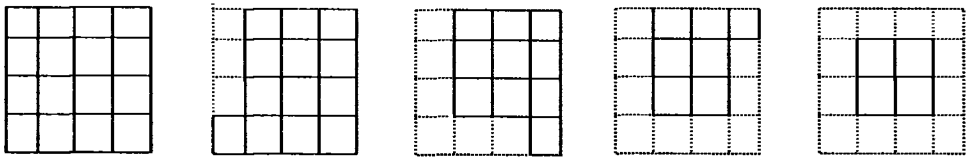
	A	D
	B	E
	C	F

D		
	B	E
	C	F

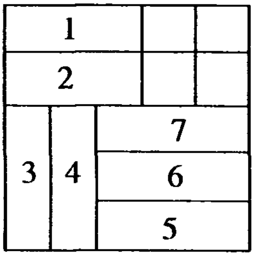
D	C	D
		E
		F

		D
		E
		F

Hình 2.



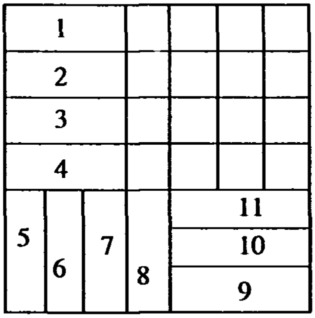
Hình 3.



Hình 4.

Với trường hợp 5×5, ta cũng đưa về 2×2 bằng một dãy các bộ ba bước nhảy. Các ô 3×1 được dời chỗ như *hình 4*.

Khi $n\geq6$, một hình vuông $n\times n$ luôn có thể được rút gọn về hình vuông $(n-3)\times(n-3)$ bằng cách dời chỗ các hình chữ L với $2n-3$ bộ ba bước nhảy, ta minh hoạ như *hình 5*, với n = 7.



Hình 5.

Điều này chứng tỏ rằng nếu n = 4, 7, 10, ... hay 2, 5, 8, 11, ..., thì hình vuông $n\times n$ có thể giải được.

Điều gì xảy ra khi n là bội của 3 ? Có thể kiểm tra rằng trường hợp 3×3 không giải được, nhưng như thế chưa đủ, ta phải chứng minh trong trường hợp tổng quát, bài toán không có lời giải khi n là bội của 3.

D	X	V	D	X	V	D
X	V	D	X	V	D	X
V	D	X	V	D	X	V
D	X	V	D	X	V	D

Hình 6.

Ta tô các hình vuông bằng 3 màu đỏ (D), xanh (X) và vàng (V) như *hình 6*.

Nếu n là bội của 3 thì một hình vuông gồm $n\times n$ ô tô màu như trên sẽ có số ô mỗi màu bằng nhau.

Giả sử n = 3m. Ta xuất phát từ ô đỏ. Gọi A là số tất cả các nước đi đến ô đỏ, B là số tất cả các nước đi đến ô xanh và C là số tất cả các nước đi đến ô vàng. Một nước đi đến ô đỏ sẽ làm tăng số các ô đỏ lên 1, làm giảm số các ô xanh đi 1 và cũng làm giảm số các ô vàng đi 1. Ban đầu ta có m ô đỏ, m ô xanh, m ô vàng. Như thế ta được:

$$-A+B+C=m-1;\ A-B+C=m\ ;\ A+B-C=m.$$

Suy ra A = m, B = m $-\frac{1}{2}=C$. Nhưng các số A, B, C phải nguyên, mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh.

***Bài 135.* (1993)**

Có tồn tại hay không một hàm f từ tập các số nguyên dương vào chính nó sao cho với mọi n, ta có:

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(f(n))=f(n)+n\ ? \\ f(n)<f(n+1) \end{cases}$$

Does there exist a function f from the positive integers to the posi- -tive integers such that f(1) = 2, f(f(n)) = f(n) + n for all n, and

f(n) < f(n+1) for all n?

Hướng dẫn:

Cho $u_0=1, u_1=2, ... u_n=u_{n-1}+u_{n-2}, ...$, dãy như thế được gọi là một dãy Fibonacci.

Ta nói $n=b_rb_{r-1}...b_0$ là *cơ sở* của dãy Fibonacci nếu $b_r=1$, với mọi $i\neq r$, $b_i=0$ hoặc 1, không có hai số b_i kề nhau nào cùng khác 0 và $n=b_ru_r+b_{r-1}u_{r-1}+...+b_0u_0$. Ví dụ, 28 = 1001010 vì 28 = 21 + 5 + 2.

Ta phải chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi n, tồn tại duy nhất biểu thức như trên. Hiển nhiên điều đó đúng với n = 1. Cho u_r là số lớn nhất trong dãy Fibonacci sao cho $u_r\leq n$. Giả thiết quy nạp cho phép ta biểu diễn $n-u_r$ theo dạng trên. Số hạng đầu không thể là u_i với $i>r-2$, bởi nếu thế ta sẽ có $n\geq u_r+u_{r-1}=u_{r+1}$. Từ đó, thêm u_r vào khai triển của $n-u_r$ sẽ cho ta một khai triển theo dạng trên của n, chứng minh hoàn tất theo quy nạp.

Tiếp đến, ta cũng dùng quy nạp để chứng minh rằng

$$u_r+u_{r-2}+u_{r-4}+...=u_{r+1}-1.$$

Hiển nhiên điều này đúng với r = 1 và 2. Giả sử nó đúng với $r-1$, khi đó ta có: $u_{r+1}+u_{r-1}+...=u_{r+2}-u_r+u_{r-1}+u_{r-3}+...$

$$=u_{r+2}-u_r+u_r-1=u_{r+2}-1.$$

Vậy công thức đúng với r + 1, suy ra nó đúng với mọi r.

Tiếp đến, ta chứng minh rằng biểu diễn của n là duy nhất. Hiển nhiên điều này đúng với n = 1. Giả sử nó đúng với mọi số nhỏ hơn n, nhưng biểu diễn cho n lại không duy nhất. Như thế ta sẽ có $n = u_r + \ldots = u_s + \ldots$. Nếu r = s thì biểu diễn cho $n - u_r$ không duy nhất, trái giả thiết quy nạp. Giả sử r > s. Nhưng số hạng $u_{s+1} - 1$ trong biểu diễn thứ hai lúc đó lại bé hơn u_r. Vậy biểu diễn cho n phải duy nhất, mệnh đề được chứng minh theo quy nạp.

Bây giờ, ta giả sử $n = b_r u_r + b_{r-1} u_{r-1} + \ldots + b_0 u_0$, đặt

$$f(n) = b_r b_{r-1} \ldots b_0 u_0 0.$$

Hiển nhiên khi $n = 1 = u_0$ thì $f(n) = u_1 = 2$.

Nếu $n = u_{a_1} + \ldots + u_{a_r}$ thì $f(n) = u_{a_1+1} + \ldots + u_{a_r+1}$ và

$$f(f(n)) = u_{a_1+2} + \ldots + u_{a_r+2},$$

do đó $f(n) + n = (u_{a_1} + u_{a_1+1}) + \ldots + (u_{a_r} + u_{a_r+1}) = f(f(n))$.

Vậy tồn tại hàm f như trên thoả mãn đề bài.

***Bài 136.* (1993)**

Có n ngọn đèn $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ (n > 1) được đặt trên một đường tròn. Ta cũng dùng L_{n+k} và hiểu đó là L_k. Ở mọi thời điểm, mỗi ngọn đèn có thể sáng hoặc bị tắt. Ban đầu tất cả chúng đều được bật sáng. Ta biểu thị các bước $s_0, s_1, \ldots$ như sau: tại bước s_i, nếu L_{i-1} đã tắt thì ta tắt L_i (nếu L_i đang sáng) hoặc bật L_i sáng lên (nếu L_i đang tắt), còn nếu L_{i-1} đang sáng thì ta không làm gì cả.

Chứng minh rằng:

a) Tồn tại số nguyên dương M(n) sao cho sau M(n) bước thì tất cả các ngọn đèn cùng sáng lên trở lại.

b) Nếu $n = 2^k$ thì ta có thể chọn $M(n) = n^2 - 1$.

c) Nếu $n = 2^{k+1}$, ta có thể chọn $M(n) = n^2 - n + 1$.

There are $n > 1$ lamps $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ in a circle. We use L_{n+k} to mean L_k. A lamp is at all times either on or off. Initially they are all on. Perform steps $s_0, s_1, \ldots$ as follows: at step s_i, if L_{i-1} is lit, then switch L_i from on to off or vice versa, otherwise do nothing. Show that:

a) There is a positive integer M(n) such that after M(n) steps all the lamps are on again;

b) If $n = 2^k$, then we can take $M(n) = n^2 - 1$.

c) If $n = 2^{k+1}$, then we can take $M(n) = n^2 - n + 1$.

Hướng dẫn:

a) Ta biểu thị tình trạng sáng tối của các ngọn đèn $L_0, \ldots, L_{n-1}$ bởi vector $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$, với $v_i = 0$ nếu L_i tắt và $v_i = 1$ nếu L_i đỏ. Theo đề bài, tình trạng ban đầu của các ngọn đèn là vector(*) $e = (1,1,1,\ldots,1)$. Bước s_j là bước chuyển trạng thái từ vector $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ sang vector $(v_0, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j-1} + v_j, \ldots, v_{n-1})$, với phép cọng ở đây trong cơ số 2.

Vấn đề đặt ra là xác định giá trị r sao cho $s_r s_{r-1} \ldots s_1 s_0 = e$.

Ta kí hiệu R là toán tử chuyển vector $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ sang vec-tor $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_0)$, khi đó: $s_j = R^{-j} s_0 R^j$. Ta có:

$$s_r s_{r-1} \ldots s_1 s_0 = (R^{-r} s_0 R^r)(R^{-(r-1)} s_0 R^{r-1}) \ldots (R^{-2} s_0 R^2)(R^{-1} s_0 R\ )s_0$$

$$= R^{-r} s_0 (R s_0)^r = R^{-r-1} s_0 (R s_0)^{r+1}.$$

Do đó $s_r s_{r-1} \ldots s_1 s_0 = e \Leftrightarrow (R s_0)^{r+1} e = R^{r+1} e = e$.

Để ý rằng chỉ có một số hữu hạn các trạng thái khác nhau của những ngọn đèn (chính xác là 2^n), do vậy, phải có sự lặp lại tại một giai đoạn nào đó của dãy e, $Rs_0 e, (Rs_0)^2 e, \ldots$. Vì thế, với m, n nào đó mà m < n ta có $(Rs_0)^m e = (Rs_0)^n e$. Do Rs_0 là song ánh, ta có $(Rs_0)^{n-m} e = e$, như thế a) được chứng minh.

b) và c). Để giải quyết hai câu b) và c) ta xét "đa thức trạng thái"

$$P(x) = v_{n-2} + v_{n-3}x + v_{n-4}x^2 + \ldots + v_0 x^{n-2} + v_{n-1}x^{n-1}.$$

Ta có $Rs_0 v = R(v_{n-1} + v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_{n-1} + v_0)$ và đa thức tương ứng với $Rs_0 v$ là

$$Q(x) = v_{n-1} + v_{n-2}x + v_{n-3}x^2 + \ldots + v_1 x^{n-2} + (v_{n-1} + v_0)x^{n-1}$$

(để ý phép cọng trong hệ cơ số 2). Ta cũng có:

$$Q(x) \equiv xP(x) \pmod{x^n - x^{n-1} - 1}.$$

Vì thế, vấn đề tìm r để $(Rs_0)^r e = e$ tương đương với việc tìm r để :

$$x^r \equiv 1 (\text{mod } x^n - x^{n-1} - 1).$$

Giả sử $n = 2^k$. Khi đó $x^{n^2} \equiv (x^n)^n \equiv (x^{n-1}+1)^n \equiv x^{n(n-1)} + 1$, vì n là luỹ thừa của 2 và tất cả các hệ số, ngoại trừ hệ số đầu tiên và cuối cùng của khai triển theo cơ số 2, đều chẵn, tức là trùng với 0 (mod 2). Từ đó ta được: $x^{n^2} - x^{n^2-n} \equiv 1 \Rightarrow x^{n^2-n}(x^{n-1}) \equiv 1 \Rightarrow x^{n^2-1} \equiv 1$, do vậy sau $n^2 - 1$ bước tất cả các ngọn đèn sẽ đồng loạt sáng lên, câu b) được chứng minh.

Giả sử $n = 2^k + 1$, khi đó:

$$x^{n^2-1} \equiv (x^{n+1})^{n-1} \equiv (x^n + x)^{n-1} \equiv x^{n(n-1)} + x^n,$$

vì $n-1$ là luỹ thừa của 2 và tất cả các hệ số, ngoại trừ hệ số đầu tiên và cuối cùng của khai triển theo cơ số 2, đều chẵn, tức là trùng với 0 (mod 2). Từ đó ta được: $x^{n^2-1} - x^{n(n-1)} \equiv x^{n-1}$, suy ra

$$x^{n^2-n}(x^{n-1} - 1) \equiv x^{n-1} \Rightarrow x^{n^2-n}.x \equiv x^{n-1}$$

($x^n \equiv x^{n-1} + 1 \equiv x^{n-1} - 1$), do đó $x^{n^2-n+1} \equiv 1$.

Vậy sau $n^2 - n + 1$ bước tất cả các ngọn đèn sẽ đồng loạt sáng lên, câu c) được chứng minh.

Chú ý: **(*)** Ở đây, ta hiểu một vector là một bộ có thứ tự n số. Bạn đọc thấy rõ rằng, thực chất, một vector trong không gian 2, 3 chiều (mặt phẳng, không gian) tương ứng là một bộ có thứ tự gồm 2, 3 số. Mở rộng ra, sau này các bạn sẽ thấy rằng trong một không gian (tuyến tính) n chiều, người ta còn gọi mỗi phần tử của không gian đó (tức một bộ n số) là một vector.

Bài 137. **(1995)**

Giả sử a, b và c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện abc = 1.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(c+a)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}$.

Let a, b, c be positive real numbers with abc = 1.

Prove that: $\dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(c+a)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn:

Đặt $\dfrac{1}{a} = x, \dfrac{1}{b} = y, \dfrac{1}{c} = z$, thì $x > 0, y > 0, z > 0, xyz = 1$.

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì

$$x+y+z \ge 3 \text{ và } \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}.$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Không mất tính tổng quát có thể coi $x \ge y \ge z > 0$. Khi đó:

$$\frac{x}{y+z} \ge \frac{y}{z+x} \ge \frac{z}{x+y} > 0.$$

Do vậy, theo bất đẳng thức Trêbưsép thì

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{y+z} \ge \left(\frac{x+y+z}{3}\right)\times\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right) \ge \frac{3}{3}.\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1 hay a = b = c = 1.

***Bài 138.* (1995)**

Tìm giá trị lớn nhất của x_0 để tồn tại dãy các số thực dương x_0, x_1, ..., x_{1995} thỏa mãn hai điều kiện:

i) $x_0 = x_{1995}$;

ii) $x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i+\frac{1}{x_i}$ với mọi i = 1, 2, ..., 1995.

Find the maximum value of x_0 for which there exists a sequence $x_0, x_1, ..., x_{1995}$ of positive reals with $x_0 = x_{1995}$ such that

for i = 1, ... , 1995: $x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i+\frac{1}{x_i}$.

Hướng dẫn:

Xét dãy hữu hạn $\{x_i\}$, $i=0,1,2,...,1995$ thỏa mãn cả hai điều kiện (i) và (ii). Từ giả thiết $x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\frac{1}{x_i}$, $\forall i=1,2,...,1995$ suy ra rằng với mọi $i=1,2,...,1995$ ta có:

$$\left[\begin{array}{l} x_i=\frac{1}{2}x_{i-1} \\ x_i=\frac{1}{x_{i-1}} \end{array}\right..$$

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh công thức $x_i = 2^{n_i}{x_0}^{m_i}$, với:

$n_i \in \{-i, -i+1,...,-1, 0,1,..., i-1\}$, và $m_i \in \{-1,1\}$, $\forall i=1,2,..., 1995$.

Thật vậy, giả sử công thức trên đúng với i, ta có:

$$\left[\begin{array}{l} x_{i+1}=\dfrac{1}{2}x_i \\ x_{i+1}=\dfrac{1}{x_i} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{i+1}=2^{n_i-1}x_0^{\,m_i}=2^{n_{i+1}}x_0^{m_i+1} \\ x_{i+1}=2^{n}x_0^{\,-m_i}=2^{n_{i+1}}x_0^{m_i+1} \end{array}\right. .$$

Ngoài ra, từ giả thiết quy nạp $\begin{cases} n_i \in \{-i, -i+1, ..., i-1\} \\ m_i \in \{-1, 1\} \end{cases}$ ta suy ra

$$\begin{cases} n_{i+1} \in \{-i-1, -i, ..., i\} \\ m_{i+1} \in \{-1, 1\} \end{cases}.$$

Vậy khẳng định đúng với i + 1. Công thức trên đúng với mọi i theo nguyên lí quy nạp.

Đặt $j=\max\{\, i \mid i=1,...,1995\,;\, x_i=2^{n_i}x_0^{-1}\}$. Để ý rằng chỉ số j luôn luôn tồn tại. Ta xét hai khả năng:

1) j = 1995. Khi đó $x_{1995}=2^{n_{1995}}x_0^{-1}=x_0$. Vậy

$$x_0^2=2^{n_{1995}}\le 2^{1994} \text{ hay } x_0\le 2^{997}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_i=2^{-i}x_0, \forall i=1, 2, ..., 1994$ và $x_{1995}=x_{1994}^{-1}$.

2) j < 1995. Khi đó m_{1995} = 1 và số lần đổi dấu của dãy m_0, m_1, ..., m_{1995} là một số chẵn (tức là tồn tại một số chẵn các cặp số (x_{i-1}, x_i), i = 1, ..., 1995 sao cho $x_i=x_{i-1}^{-1}$).

Nếu $x_i=x_{i-1}^{-1}$ thì n_{i-1} và n_i cùng tính chẵn lẻ, còn nếu $x_i=\dfrac{1}{2}x_{i-1}$ thì n_{i-1} và n_i sẽ khác về tính chẵn lẻ, điều đó mâu thuẫn với giả thiết $x_{1995}=2^{n_{1995}}x_0$ ($n_{1995}=n_0=0$). Vậy khả năng (2) không xảy ra.

Tóm lại, giá trị lớn nhất của x_0 bằng 2^{997}.

Bài 139. **(1995)**

Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp {1, 2, ..., 2p}, biết rằng:

i) A chứa đúng p phần tử;

ii) tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

Let p be an odd prime number. How many p-element subsets A of {1, 2, ... , 2p} are there, the sum of whose elements is divisible by p ?

Hướng dẫn:

Với mỗi i = 1, ..., p, ta gọi A_i là tập hợp bao gồm các bộ số

$(a_1,...,a_p)$ (mà ta không để ý thứ tư), với $a_i \in \{1,..., 2p\}$, $a_1+...+a_p$ chia hết cho p và trong bộ $(a_1,...,a_p)$ chỉ có đúng một số xuất hiện i lần, các số còn lại xuất hiện đúng một lần.

Khi đó A_1 chính là tập con A của {1, ..., 2p} thỏa mãn:

i) A chứa p phần tử;

ii) tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

Kí hiệu: $\overline{A_i}$ là tập nhận từ A_i bằng cách trong mỗi bộ $(a_1,...,a_p)$ ta loại i số giống nhau, i = 1, ..., p. $\overline{\overline{A_i}}$ là tập nhận từ A_i bằng cách trong mỗi bộ $(a_1,...,a_p)$ ta loại $i-1$ số giống nhau, i = 2, ..., p. Ta cũng kí hiệu $|A_i|$ là số các phần tử của tập A_i. Khi đó

$$\begin{cases} |A_i|+|A_{i+1}|=2C_{2p}^{p-i}, i=2,...,p-1 \\ p|A_1|+|A_2|=2C_{2p}^{p-1} \end{cases} \qquad (1)$$

Thật vậy, ta xét các bộ số (không thứ tự) $(b_1,...,b_{p-i})$, $b_i \neq b_j$, với $i \neq j$. Đặt $S=b_1+...+b_{p-i}$. Khi đó tồn tại duy nhất r thỏa mãn $0 \le r < p$ sao cho $s+ir \equiv 0 \pmod{p}$. Do vậy, nếu thêm vào bộ $(b_1,...,b_{p-i})$ i số r hoặc i số p + r thì ta sẽ được một bộ gồm p số mà

(*) mỗi số đều thuộc {1, 2, ..., 2p},

(**) tổng của p số chia hết cho p,

(***) có đúng một số xuất hiện i lần hoặc i + 1 lần, phụ thuộc vào việc tồn tại hay không tồn tại $j \in \{1,...,p-i\}$ để $b_j = r$ hay $b_j = p+r$, các số khác chỉ xuất hiện đúng một lần. Sau phép toán f như vậy thì các bộ đều sẽ thuộc $A_i \cup A_{i+1}$.

Bây giờ ta tính số lặp của các bộ sau phép toán f:

1) Với i = 1 thì mỗi bộ thuộc A_1 được lặp p lần, các bộ thuộc A_2 chỉ lặp 1 lần.
2) Với $i \in \{2,...,p-1\}$ thì các bộ đều lặp đúng một lần.

Vì vậy số bộ sinh ra nhờ f không vượt quá tổng số các phần tử của nó nhân với số lặp:

$$\begin{cases} 2C_{2p}^{p-i} \le p|A_1|+|A_2|, i=1 \\ 2C_{2p}^{p-i} \le |A_i|+|A_{i+1}|, i=2,...,p-1 \end{cases} \qquad (2)$$

Hơn nữa, các phần tử của $\overline{A_i}$ và $\overline{\overline{A_{i+1}}}$ đều gồm $p-i$ số đôi một khác nhau nên mỗi bộ số xuất hiện trong $\overline{A_i}$ và trong $\overline{\overline{A_{i+1}}}$ không quá 2 lần. Vậy: $\left|\overline{A_i}\right|+\left|\overline{\overline{A_{i+1}}}\right|\le 2C_{2p}^{p-1}$.

Vì $\left|\overline{A_i}\right|=\begin{cases} p|A_1|, i=1\\ |A_i|, i=2,\dots,p\end{cases}$ và $\left|\overline{\overline{A_{i+1}}}\right|=|A_i|$, $i=1,\dots,p-1$ nên

$$\begin{cases} 2C_{2p}^{p-i}\ge |A_i|+|A_{i+1}|,\ i=2,\dots,p-1\\ 2C_{2p}^{p-i}\ge p|A_i|+|A_2|,\ i=1\end{cases}. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra được (1). Vậy:

$$\left(p|A_1|+|A_2|\right)-\left(|A_2|+|A_3|\right)+\dots+(-1)^p\left(|A_{p-1}|+|A_p|\right)=\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1}2C_{2p}^{p-i}.$$

Do p lẻ nên $p|A_1|-|A_p|=\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1}2C_{2p}^{p-i}$.

Vì $|A_p|=2p$ nên số tập con cần tính bằng

$$|A_1|=\frac{1}{p}\left(2p+\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1}2C_{2p}^{p-i}\right).$$

Để ý rằng $2\sum_{i=1}^{p-i}(-1)^{i+1}C_{2p}^{p-i}=C_{2p}^{p}-2$ ta có số tập con cần tính bằng

$$|A_1|=\frac{1}{p}\left(2p+C_{2p}^{p}-2\right)=2+\frac{C_{2p}^{p}-2}{p}.$$

***Bài 140.* (1996)**

Cho số nguyên dương r và một bảng hình chữ nhật chia thành 20×12 ô vuông. Những nước đi được thực hiện trên bảng như sau: ta chuyển từ một ô vuông đến một ô vuông khác chỉ khi nào khoảng cách giữa hai tâm của hai ô vuông đó bằng $\sqrt{r}$. Bài toán đặt ra là làm sao có thể tìm một dãy các nước đi để chuyển từ ô này sang ô nọ, mà hai ô đó nằm ở hai góc kề nhau của bảng, hai góc đó nằm trên cùng một chiều dài của bảng chữ nhật nói trên.

a) Chứng minh rằng bài toán không giải được nếu r chia hết cho 2 hoặc cho 3.

b) Chứng minh rằng bài toán giải được khi r = 73.

c) Với r = 97, bài toán có giải được không?

We are given a positive integer r and a rectangular board divided into 20 × 12 unit squares. The following moves are permitted on the board: one can move from one square to another only if the distance between the centers of the two squares is $\sqrt{r}$. The task is to find a sequence of moves leading between two adjacent corners of the board which lie on the long side.

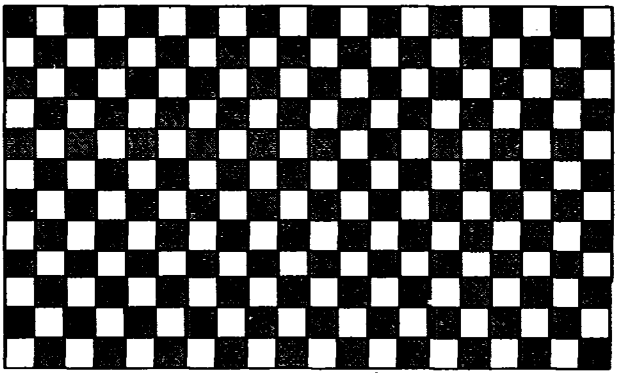
a) Show that the task cannot be done if r is divisible by 2 or 3.

b) Prove that the task is possible for r = 73.

c) Can the task be done for r = 97?

Hướng dẫn:

a) Giả sử cứ mỗi lần di chuyển (nước đi) là một hình chữ nhật có hai cạnh là a và b (đơn vị). Do đó $a^2 + b^2 = r$. Nếu r chia hết cho 2 thì a và b sẽ cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Nếu ta tô màu các ô vuông như bàn cờ thì điều này có nghĩa là ô trắng sẽ được chuyển đến ô trắng, ô đen chuyển đến ô đen. Nhưng hai ô ở hai góc kề nhau (dọc theo chiều dài bảng) khác màu, do đó bài toán không giải được.

(0, 0)  (19, 0)

Nếu r chia hết cho 3 thì cả a lẫn b đều là bội của 3. Như thế, nếu giả sử ô đầu tiên có toạ độ (0, 0), ô được chuyển đến sẽ có toạ độ (3m, 3n). Nhưng yêu cầu ô được chuyển đến sau cùng phải có toạ độ (19, 0) nên trong trường hợp này bài toán cũng không giải được.

b) Nếu r = 73, ta có a = 8, b = 3 (hoặc a = 3, b = 8). Từ ô khởi đầu (x, y), ta có 4 nước đi:

A: (x, y) đến (x + 8, y + 3); B: (x, y) đến (x + 3, y + 8);

C: (x, y) đến (x + 8, y - 3); B: (x, y) đến (x + 3, y - 8) .

Ta coi như nước đi $(x-8, y-3)$ là nước đi âm theo dạng A, tương tự thế với các dạng khác.

Giả sử ta thực hiện dãy các nước đi gồm a nước loại A, b nước loại B, c nước loại C và d nước loại D, để bài toán giải được ta cần có:

$$8(a+c)+3(b+d)=19\ ;\ 3(a-c)+8(b-d)=0.$$

Dễ thấy một nghiệm của hệ hai phương trình trên là:

$$a=5,\ b=-1,\ c=-3,\ d=2.$$

Từ đó, bài toán giải được, vì từ ô (0,0) ta chuyển đến ô (19,0) bằng dãy nước đi sau:

$$(0,0)\to(8,3)\to(16,6)\to(11,1)\to(19,4)\to(11,7)$$
$$\to(19,10)\to(16,2)\to(8,5)\to(16,8)\to(19,0).$$

c) Trường hợp r = 97, đề nghị bạn đọc tiếp tục chứng minh rằng trường hợp này bài toán không giải được.

Bài 141. **(1996)**

Gọi S là tập các số nguyên không âm. Tìm tất cả các hàm đi từ S vào chính nó sao cho với mọi m, n ta có: $f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$.

Let S be the set of non-negative integers. Find all functions f from S to itself such that $f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$ for all m, n.

Hướng dẫn:

Cho m = n = 0, đẳng thức ở đề bài trở thành:

$$f(0+f(0))=f(f(0))+f(0),$$

suy ra $f(0)=0$, từ đó $f(f(0))=0$. Cho m = 0, ta có: $f(f(n))=f(n)$, do đó đẳng thức ở đề bài có thể viết thành: $f(m+f(n))=f(m)+f(n)$.

Theo trên, f(n) là điểm bất động (ta nói x là điểm bất động của hàm f nếu f(x) = x). Gọi k là điểm bất động khác 0 bé nhất của hàm f. Nếu như k không tồn tại, thì f(n) = 0 với mọi n, khi ấy, hàm f(n) = 0 là một nghiệm của bài toán. Nếu tồn tại k, thì bằng quy nạp, bạn đọc dễ dàng chứng minh được $f(qk)=qk$ với q là số nguyên không âm tùy ý.

Bây giờ, giả sử f có điểm bất động n khác, ta viết: n = kq + r, với $0\le r<k$. Lúc đó $f(n)=f(r+f(kq))=f(r)+f(kq)=kq+f(r)$, suy ra

$$f(r)=0\Rightarrow r=0.$$

Như thế, điểm bất động của hàm số là bội của k.

Tuy nhiên, với mọi n, f(n) là điểm bất động, do đó f(n) là bội của k với mọi n. Ta lấy các số nguyên không âm $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ và chọn $n_0 = 0$, thế thì hàm tổng quát thỏa mãn điều kiện của bài toán là $f(qk+r) = qk + n_r k$, với $0 \le r < k$. Dễ dàng kiểm tra rằng các hàm này thỏa điều kiện bài toán. Thật vậy, cho m = ak + r, n = bk + s, với $0 \le r, s < k$ thì: $f(f(m)) = f(m) = ak + n_r k$, $f(n) = bk + n_s k$, do đó

$$f(m+f(n)) = ak + bk + n_r k + n_s k \text{ và } f(f(m)) + f(n) = ak + bk + n_r k + n_s k.$$

Tóm lại, các hàm xác định như trên là nghiệm tổng quát của bài toán.

***Bài 142.* (1996)**

Cho các số nguyên dương a, b thoả điều kiện: tồn tại các số nguyên dương m, n để: $15a + 16b = m^2$, $16a - 15b = n^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể đạt được của $\min\{n^2, m^2\}$.

The positive integers a, b are such that 15a + 16b and 16a - 15b are both squares of positive integers. What is the least possible value that can be taken on by the smaller of these two squares?

Hướng dẫn:

Dễ dàng chứng minh được: $15m^2 + 16n^2 = 481a = 13 \times 37a$.

Tiếp tục, bạn đọc hãy chứng minh rằng phần dư khi chia cho 13 của $15m^2$ là $0, \pm 2, \pm 5, \pm 6$ và phần dư khi chia cho 13 của $16n^2$ là $0, \pm 1, \pm 3, \pm 4$. Suy ra cả m và n đều chia hết cho 13.

Tương tự, khi chia cho 37, phần dư của của $15m^2$ là

$$0, \pm 2, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 13, \pm 14, \pm 15, \pm 17, \pm 18$$

và phần dư khi chia cho 37 của $16n^2$ là

$$0, \pm 1, \pm 3, \pm 4, \pm 7, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \pm 12, \pm 16.$$

Suy ra cả m và n đều chia hết cho 37.

Từ đó, đặt $m = 481m'$, $n = 481n'$ ta được: $a = 481(15m'^2 + 16n'^2)$, ta cũng có $481b = 16m^2 - 15n^2$, suy ra $b = 481(16m'^2 - 16n'^2)$.

Giá trị cần tìm là $b^2 = 481^2$, khi $m' = n' = 1$.

***Bài 143.* (1996)**

Cho 3 số nguyên dương p, q, n sao cho p+q < n. Gọi $x_0, x_1, ..., x_n$ là các số nguyên dương sao cho $x_0 = x_n = 0$ và $x_i - x_{i-1} = p$ hay $-q$, với mọi i : $1 \le i \le n$. Chứng minh rằng tồn tại các chỉ số i, j mà i < j với

$$i \ne 0,\ j \ne n \text{ và } x_i = x_j.$$

Let p, q, n be three positive integers with p+q<n. Let $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *be integers such that* $x_0 = x_n = 0$, *and for each* $1 \le i \le n$, $x_i - x_{i-1} = p$ *or* $-q$. *Show that there exist indices* $i < j$ *with (i, j) not (0, n) such that*

$$x_i = x_j.$$

Hướng dẫn:

Ta giả sử $x_i - x_{i-1} = p$ xảy ra r lần còn $x_i - x_{i-1} = -q$ xảy ra s lần. Lúc đó, ta có $r + s = n$ và $pq = rs$. Nếu p và q có thừa số chung d thì ta đặt $y_i = \frac{x_i}{d}$, khi đó, nếu bài toán giải được với y_i thì cũng giải được với x_i, do vậy, không mất tính tổng quát, ta giả sử p và q nguyên tố cùng nhau. Từ đó, p chia hết s, ta đặt s = kp. Nếu k = 1 thì s = p và q = r, do đó $p + q = r + s = n$. Nhưng ta có $p + q < n$ theo giả thiết nên $k > 1$.

Đặt $p + q = \frac{n}{k} = h$. Tiếp đến, dễ thấy $x_{i+h} - x_i$ là bội của h. Đặt $d_i = x_{i+h} - x_i$. Ta có:

$$d_{i+1} - d_i = x_{i+h+1} - x_{i+h} - (x_{i+1} - x_i) = \left[\begin{array}{c} p-p \\ p+q \\ -q-p \\ -q+q \end{array}\right. = \left[\begin{array}{c} 0 \\ h \\ -h \end{array}\right. .$$

Như vậy, nếu cả d_{i+1} lẫn d_i đều khác 0 thì hoặc cả hai đều dương, hoặc cả hai đều âm (nếu trái lại thì hiệu của chúng bé nhất là 2h). Từ đó, nếu như toàn bộ các d_i đều khác 0 thì chúng sẽ hoặc cùng dương, hoặc cùng âm; thế nhưng ta lại có:

$$d_0 + d_h + \ldots + d_{kh} = x_h - x_0 + x_{2h} - x_h + \ldots + x_{(k+1)h} - x_{kh} = x_n - x_0 = 0$$

nên điều này không đúng. Vậy ắt phải tồn tại i để $d_i = 0$, từ đây suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 144.* (1997)**

Cho trong mặt phẳng các điểm có toạ độ nguyên, sao cho chúng là các đỉnh của những hình vuông đơn vị. Các hình vuông này được tô màu đen, trắng xen nhau như bàn cờ. Với mỗi cặp số nguyên dương (m, n), ta xét tam giác vuông có toạ độ 3 đỉnh là toạ độ nguyên, có hai cạnh góc vuông mà độ dài là m, n tương ứng nằm dọc theo cạnh của những cạnh hình vuông. Gọi S_1 là diện tích của phần được tô đen, S_2 là diện tích của phần được tô trắng của tam giác đó. Đặt $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

a) Với mọi cặp số nguyên dương m, n cùng chẵn hoặc cùng lẻ, hãy tính $f(m,n)$.

b) Chứng minh rằng $f(m,n) \le \dfrac{\max(m,n)}{2}, \forall m,n$.

c) Chứng minh rằng không có hằng số C nào để $f(m,n) < C, \forall m,n$.

In the plane the points with integer coordinates are the vertices of unit squares. The squares are colored alterna--tely black and white as on a chessboard. For any pair of pos--itive integers m and n, consider a right-angled triangle whose vertices have integer coordinates and whose legs, of lengths m and n, lie along the edges of the squares. Let S_1 be the total area of the black part of the triangle, and S_2 be the total area of the white part. Let $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

a) Calculate f(m, n) for all positive integers m and n which are either both even or both odd.

b) Prove that $f(m,n) \le \dfrac{\max(m,n)}{2}$ for all m, n.

c) Show that there is no constant C such that f(m, n) < C for all m, n.

Hướng dẫn:

a) Nếu cả m lẫn n cùng chẵn thì $f(m,n) = 0$.

Thật vậy, gọi M là trung điểm cạnh huyền của tam giác. M là một điểm nằm trên mắc lưới (của hình bàn cờ). Nếu ta xoay tam giác 180^0 thì màu sắc vẫn y nguyên. Do đó, các số S_1 và S_2 của tam giác có giá trị tương ứng bằng một nửa số ô được tô màu đen, trắng của hình chữ nhật tạo thành. Mà số các ô đen, trắng của hình chữ nhật bằng nhau, suy ra $f(m,n) = 0$.

Nếu cả m lẫn n cùng lẻ thì $f(m,n) = \dfrac{1}{2}$.

Thật vậy, trung điểm M của cạnh huyền tam giác bây giờ là tâm của một hình vuông, ta thấy rằng màu của hai nửa tam giác giống nhau.

Lúc này, S_1 và S_2 của tam giác khác hình chữ nhật như đã nói trên 1 đơn vị nên $f(m,n) = \frac{1}{2}$.

b) Nếu m, n cùng chẵn hoặc cùng lẻ thì kết quả có được lập tức từ câu a). Giả sử n chẵn và m lẻ. Khi đó, ta kéo dài cạnh có độ dài m thêm 1 đơn vị nữa thì ta được một tam giác mới chứa tam giác cũ. Tam giác mới này có cả hai cạnh cùng chẵn nên có $S_1 = S_2$. Diện tích được thêm vào là diện tích một tam giác có một cạnh góc vuông bằng 1, chiều cao n, nên diện tích thêm vào bằng $\frac{n}{2}$. Trường hợp xấu nhất, diện tích này được phủ chỉ bởi một màu, ta có: $f(m,n) = \frac{n}{2}$, nhưng $n \le \max(m,n)$ nên ta suy ra điều phải chứng minh.

c) Bằng trực giác, ta thấy rằng nếu cạnh huyền chạy dọc theo đường chéo của một dãy các hình vuông màu đen thì khi chúng ta kéo dài đường chéo ấy về một phía, phần diện tích chiếm chỗ thêm vào sẽ có màu đen nhiều hơn. Ta sẽ chứng minh điều này bằng lí luận.

Trong trường hợp này ta có n = m. Khi mở rộng cạnh huyền về một phía như đã nói, phần màu trắng thêm vào là một dãy các tam giác vuông mà mỗi tam giác này đồng dạng với một tam giác mới có các cạnh góc vuông là (n + 1) và n. Tam giác lớn nhất có cạnh là 1 và $\frac{n}{n+1}$, tam giác lớn tiếp theo có cạnh là $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-1}{n+1}$; tiếp theo nữa là tam giác có cạnh $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-2}{n+1}$; v. v..., và sau cùng, tam giác nhỏ nhất có các cạnh góc vuông là $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$. Suy ra diện tích phần màu trắng thêm vào là:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{(n-1)^2}{n(n+1)}+\frac{(n-2)^2}{n(n+1)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2n(n+1)}(n^2+\ldots+1^2)=\frac{2n+1}{12}.$$

Từ đó, diện tích phần màu đen được thêm vào là $\frac{n}{2}-\frac{2n+1}{12}=\frac{n}{3}-\frac{1}{12}$, và nó nhiều hơn diện tích phần màu trắng thêm vào là

$$\frac{n}{3}-\frac{1}{12}-\frac{2n+1}{12}=\frac{n}{6}-\frac{1}{6}=\frac{n-1}{6}.$$

Đến đây, ta thấy rằng nếu n là số chẵn thì $f(n,n)=0$ đối với tam giác ban đầu, do vậy tam giác mới sẽ có $f(n+1,n)=\frac{n-1}{6}$, số này không thể bị chặn theo n được, từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

***Bài 145.* (1997)**

Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực thoả mãn điều kiện

$$|x_1+x_2+...+x_n|=1 \text{ và } |x_i|\le\frac{n+1}{2},\ \forall i=1,2,...,n.$$

Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị các phần tử của dãy $x_1, x_2, ..., x_n$ để tạo thành dãy mà ta kí hiệu lại là $y_1, y_2, ..., y_n$ sao cho bất đẳng thức sau đây được thoả mãn:

$$|y_1+2x_2+...+ny_n|\le\frac{n+1}{2}.$$

Let $x_1, x_2, ..., x_n$ be real numbers satisfying

$$|x_1+x_2+...+x_n|=1 \textit{ and } |x_i|\le\frac{n+1}{2},\ \forall i=1,2,...,n.$$

Show that there exists a permutation y_i of x_i such that

$$|y_1+2x_2+...+ny_n|\le\frac{n+1}{2}.$$

Hướng dẫn:

Với mọi hoán vị $\pi=(y_1, y_2, ..., y_n)$ của $(x_1, x_2, ..., x_n)$, ta kí hiệu $S(\pi)$ là giá trị của tổng $y_1+2y_2+...+ny_n$. Đặt $r=\frac{n+1}{2}$.

Ta cần phải chứng minh rằng tồn tại π nào đó để $|S(\pi)|\le r$.

Gọi π_0 là hoán vị đồng nhất: $\pi_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và gọi $\overline{\pi}$ là hoán vị đảo ngược: $\overline{\pi} = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$.

Nếu $|S(\pi_0)|\le r$ hoặc $|S(\overline{\pi})|\le r$, bài toán coi như được giải xong, do vậy, ta giả sử $|S(\pi_0)|>r$ và $|S(\overline{\pi})|>r$. Để ý:

$$\begin{aligned}S(\pi_0)+S(\overline{\pi}) &= (x_1+2x_2+...+nx_n)+(x_n+2x_{n-1}+...+nx_1)\\ &=(n+1)(x_1+x_2+...+x_n),\end{aligned}$$

ta suy ra $|S(\pi_0)+S(\overline{\pi})| = n+1 = 2r$. Nhưng vì $|S(\pi_0)|>r$ và $|S(\overline{\pi})|>r$

nên ta phải có $S(\pi_0)$ và $S(\overline{\pi})$ trái dấu nhau, nghĩa là một số thì lớn hơn r, còn một số thì nhỏ hơn $-r$.

Từ π_0, ta có thể thu được $\pi_m = \overline{\pi}$ bằng cách hoán chuyển hai phần tử kề nhau. Nói cách khác, tồn tại một dãy các hoán vị $\pi_0, \pi_1, ..., \pi_m$ sao cho $\pi_m = \overline{\pi}$ và với mỗi i (i = 0, 1, ..., $m-1$), hoán vị π_{i+1} có được từ π_i bằng cách hoán chuyển hai số hạng liên tiếp. Điều này có nghĩa rằng nếu $\pi_i = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\pi_{i+1} = (z_1, z_2, ..., z_n)$ thì tồn tại một chỉ số $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ sao cho $z_k = y_{k+1}$, $z_{k+1} = y_k$, $z_j = y_j$, $j \neq k, k+1$. Do giả thiết $|x_i| \leq r$, $\forall i = 1,2,...,n$ nên ta có

$$|S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| = |kz_k + (k+1)z_{k+1} - ky_k - (k+1)y_{k+1}| = |y_k - y_{k+1}| \leq 2r.$$

Điều này chứng tỏ rằng khoảng cách giữa hai số liên tiếp bất kì trong dãy số $S(\pi_0),....S(\pi_m)$ không lớn hơn 2r.

Mặt khác, có thể xem $S(\pi_0), S(\pi_m)$ là những điểm nằm trên đường thẳng thực, nằm ngoài đoạn [-r, r], từ đó, suy ra rằng ít nhất một trong các số $S(\pi_i)$ phải rơi vào đoạn đó; nói cách khác, tồn tại π_i để $S(\pi_i) \leq r$, là điều phải chứng minh.

***Bài 146.* (1997)**

Cho A là một $n \times n$ - ma trận có các phần tử lấy từ tập

$$S = \{1, 2, ..., 2n-1\}.$$

A được gọi là ma trận *bạc* (silver matrix) nếu với mọi i = 1, 2, ..., n, hàng thứ i và cột thứ i đều có chứa đủ các phần tử của S (trong cả hai hàng và cột ấy). Chứng minh rằng:

a) không thể có ma trận bạc khi n = 1997;

b) các ma trận bạc tồn tại ứng với với vô hạn giá trị n.

An $n \times n$ matrix whose entries come from the set S = {1, 2, ... , 2n-1} is called silver matrix if, for each i = 1, 2, ..., n, the ith row and the ith column together contain all elements of S. Show that:

a) there is no silver matrix for n = 1997;

b) silver matrices exist for infinitely many values of n.

Hướng dẫn:

a) Nếu ta liệt kê tất cả các phần tử ở hàng theo sau các phần tử trong cột tương ứng thì ta được một mảng mà trong đó mỗi phần tử xuất hiện hai lần, do đó mỗi phần tử thuộc S phải xuất hiện một số chẵn lần.

Nhưng nếu xét hàng thứ i và cột thứ i thì theo giả thiết, trong mảng đã xuất hiện n lần tập các phần tử của S, thêm vào đó là một lần xuất hiện các phần tử của S trên đường chéo. Nếu n là số lẻ, thì mỗi một số trong 2n - 1 số của S đã xuất hiện một số lẻ lần, và có nhiều nhất n số đã xuất hiện một số chẵn lần trên đường chéo. Do đó không thể có ma trận bạc cho n lẻ, đặc biệt, cho n = 1997.

b) Gọi $A_{i,j}$ là một $n \times n$- ma trận bạc có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1. Một ma trận như thế tồn tại với n nào đó, chẳng hạn khi $n = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Từ ma trận $A_{i,j}$, ta xây dựng $2n \times 2n$- ma trận $B_{i,j}$ cũng có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1 như sau:

$$B_{i,j} = A_{i,j}\ ;\ B_{i+n,j+n} = A_{i,j}\ ;\ B_{i,j+n} = 2n + A_{i,j}$$

$$B_{i+n,j} = 2n + A_{i,j} \text{ nếu i khác j ; } B_{i+n,i} = 2n.$$

Chú ý: Ta kí hiệu vắn tắt như thế để bớt dài dòng, bạn đọc hãy hình dung ma trận $B_{i,j}$ tạo thành từ ví dụ trên như sau:

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

nghĩa là ta được: $$B_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $2n \times 2n$- ma trận $B_{i,j}$ cũng là ma trận bạc. Giả sử $i \le n$, khi đó, nửa hàng đầu của hàng thứ i của ma trận $B_{i,j}$ là hàng thứ i của $A_{i,j}$, nửa trên của cột thứ i của $B_{i,j}$ là cột thứ i của $A_{i,j}$. Do vậy, nửa đầu hàng i và nửa trên cột i của $B_{i,j}$ có đủ các số từ 1 đến 2n - 1. Nửa sau hàng thứ i của $B_{i,j}$ là các phần tử hàng thứ i của $A_{i,j}$ cọng thêm 2n; nửa dưới cột thứ i của $B_{i,j}$ là các phần tử cột thứ i của $A_{i,j}$ cọng thêm 2n (cho mỗi phần tử đó). Do vậy nửa sau của hàng i và nửa dưới cột i của $B_{i,j}$ có đủ các số từ 2n + 1 đến 4n - 1. Để ý rằng $B_{i+n,i} = 2n$ thay vì $2n + A_{i,j}$. Tóm lại, khi $i \leq n$, điều kiện cho ma trận bạc được thoả mãn.

Lí luận tương tự khi i > n. Như thế, cứ mỗi một $n \times n$ - ma trận bạc ta lại xây dựng được một $2n \times 2n$ - ma trận bạc. Điều này có nghĩa tồn tại vô hạn số các ma trận bạc.

***Bài 147.* (1997)**

Tìm các cặp số nguyên dương (a, b) thoả mãn: $a^{b^2} = b^a$.

Find all pairs (a, b) of positive integers that satisfy: $a^{b^2} = b^a$.

Hướng dẫn:

Trước hết, để ý rằng nếu ta có $a^m = b^n$ thì sẽ tồn tại các số nguyên dương c, e, f, d để $a = c^e$, $b = c^f$, với m = ed, n = fd, và d là ước chung lớn nhất của m và n. Điều này có thể được chứng minh bằng cách biểu diễn a và b như là tích các thừa số nguyên tố.

Trở lại bài toán, gọi d là ước chung lớn nhất của a và b^2, đặt a = de, b^2= df. Khi đó, tồn tại c để $a = c^e, b = c^f$. Suy ra $fc^e = ec^{2f}$. Ta không thể có e = 2f vì nếu e = 2f xảy ra, từ trên ta sẽ có e = f, mâu thuẫn! Giả sử 2f > e, khi đó $f = ec^{2f-e}$, suy ra e = 1 và $f = c^{2f-1}$.

Nếu c = 1, ta có f = 1 và được nghiệm a = b = 1.

Nếu $c \geq 2$, ta có $c^{2f-1} \geq 2^f > f$, bài toán vô nghiệm.

Sau cùng, giả sử 2f < e. Khi đó, $e = fc^{e-2f}$, suy ra

$$f = 1 \text{ và } e = c^{e-2}.$$

Do $c^{e-2} \geq 2^{e-2} \geq e$ với $e \geq 5$, do đó ta có e = 3 hay 4 (e > 2f = 2).
e = 3 cho ta nghiệm a = 27, b = 3; e =4 cho ta a = 16, b = 2.

Tóm lại, nghiệm của bài toán là các cặp (1, 1), (16, 2), (27, 3).

***Bài 148.* (1997)**

Với mỗi số nguyên dương n, ta kí hiệu f(n) là số tất cả các cách biểu diễn n như một tổng các luỹ thừa của 2 với số mũ nguyên và không âm. Các biểu diễn khác nhau về thứ tự sắp xếp các số hạng của tổng được xem như giống nhau. Ví dụ, f(4) = 4, vì

$$4 = 2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0.$$

Chứng minh rằng với $n \geq 3$, ta có:

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}.$$

For each positive integer n, let f(n) denote the number of ways of representing n as a sum of powers of 2 with non-negative integer exponents. Representations which differ only in the ordering of their summands are considered to be the same. For example, f(4) = 4, because 4 can be represented as 4, 2 + 2, 2 + 1 + 1 or 1 + 1 + 1 + 1.

Prove that for any integer $n \geq 3$, $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$.

Hướng dẫn:

Nếu n là số lẻ, khi biểu diễn n như một tổng các luỹ thừa của 2 với số mũ nguyên và không âm (theo đề bài đòi hỏi), bao giờ trong tổng cũng phải có số 1 (tức 2^0). Nhận xét này giúp ta thiết lập được dễ dàng tương ứng 1 - 1 giữa các tổng của n (biểu diễn như đã nói) và các tổng của $(n-1)$. Nói cách khác: $f(2n+1) = f(2n)$.

Bây giờ, ta xét n chẵn. Ta cũng thiết lập được tương ứng 1-1 giữa các tổng của n mà có chứa 1 (2^0) với các tổng của $(n-1)$. Các tổng của n mà không có chứa 1 thì tương ứng 1 - 1 với các tổng của $\frac{n}{2}$.

Như vậy ta có: $f(2n) = f(2n-1) + f(n) = f(2n-2) + f(n)$.

Các đẳng thức trên chứng tỏ f là hàm đơn điệu tăng.

Áp dụng hệ thức trên nhiều lần để tính $f(2^{n+1})$ ta có:

$$f(2^{n+1}) = f(2^{n+1} - 2^n) + f(2^n - 2^{n-1} + 1) + \ldots + f(2^n - 1) + f(2^n)$$
$$= f(2^n) + f(2^n - 1) + \ldots + f(2^{n-1} + 1) + f(2^n), \qquad (*)$$

và suy ra $f(2^{n+1}) \geq (2^{n-1} + 1) f(2^n)$. Ta sẽ chứng minh $f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$ bằng quy nạp. Bạn đọc tự kiểm tra rằng bất đẳng thức đúng với n = 3 (không đúng với n = 1 và n = 2). Giả sử bất đẳng thức đúng với n, tức là

$$f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}},$$

kết hợp với bất đẳng thức đã thiết lập ở trên ta được

$$f(2^{n+1}) < 2^n 2^{\frac{n^2}{2}} < 2^{\frac{n^2+2n+1}{2}} = 2^{\frac{(n+1)^2}{2}}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi n.

Áp dụng (*) nhiều lần ta có:

$$f(2^{n+1}) = f(2^n) + f(2^n - 1) + ... + f(3) + f(2) + f(1) + 1. \qquad (**)$$

Để chứng minh bất đẳng thức $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n)$, ta sử dụng bổ đề sau:

Bổ đề: Ta có $f(1) + f(2) + ... + f(2r) \geq 2rf(r)$.

Chứng minh: Nhóm các số hạng ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh thành từng cặp và để ý rằng:

$$f(1) + f(2r) \geq f(2) + f(2r-1) \geq f(3) + f(2r-2) \geq ... \geq f(r) + f(r+1).$$

Nếu k chẵn thì $f(k) = f(k+1)$ và $f(2r-k) = f(2r+1-k)$, do đó

$$f(k) + f(2r+1-k) = f(k+1) + f(2r-k).$$

Nếu k lẻ thì $f(k+1) = f(k) + f\left(\frac{k+1}{2}\right)$ và

$$f(2r+1-k) = f(2r-k) + f\left(\frac{2r-k+1}{2}\right),$$

nhưng theo trên, f là hàm đơn điệu tăng nên $f\left(\frac{k+1}{2}\right) \leq f\left(\frac{2r+1-k}{2}\right)$, từ đó ta suy ra $f(k) + f(2r+1-k) \geq f(k+1) + f(2r-k)$.

Từ các bất đẳng thức vừa chứng minh, ta suy ra bổ đề được chứng minh.

Áp dụng kết quả ở bổ đề trên cho (**) ta được:

$$f(2^{n+1}) > 2^{n+1} f(2^{n-1}). \qquad (***)$$

Từ (***), bằng quy nạp ta có thể chứng minh được $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n)$. Thật vậy, bất đẳng thức trên đúng khi n = 1, giả sử nó đúng cho n, khi đó ta có: $f(2^{n+1}) > 2^{n+1} 2^{\frac{(n-1)^2}{4}} = 2^{\frac{n^2-2n+1+4n+4}{4}} > 2^{\frac{(n+1)^2}{4}}$, tức là bất đẳng thức trên đúng với mọi n. Bài toán đã được giải xong.

Bài 149. **(1998)**

Trong một cuộc thi, có a thí sinh và b giám khảo, với b là số nguyên dương lẻ và $b \geq 3$. Mỗi giám khảo sẽ đánh giá mỗi thí sinh theo 2 mức "rớt" và "đậu". Gọi k là một số nguyên dương sao cho nếu lấy 2 giám khảo tuỳ ý thì đánh giá của 2 vị giám khảo này có kết quả trùng nhau nhiều nhất là cho k thí sinh. Chứng minh rằng: $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

In a competition, there are a contestants and b judges, where $b \geq 3$ *is an odd integer. Each judge rates each contestant as either "pass" or "fail". Suppose k is a number such that, for any two judges, their ratings coincide for at most k contestants. Prove that* $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Hướng dẫn:

Gọi N là số tất cả các bộ ba (giám khảo, giám khảo, thí sinh) sao cho:

- hai giám khảo nói đến trong bộ 3 đó là khác nhau;
- hai giám khảo đó có cùng một đánh giá (rớt hoặc đậu) cho thí sinh nhắc tới trong bộ 3 đó.

Rõ ràng có tất cả $\frac{b(b-1)}{2}$ cặp giám khảo chọn từ b vị giám khảo, và theo giả thiết, mỗi cặp giám khảo này có kết quả đánh giá giống nhau cho k thí sinh là nhiều nhất, do đó: $N \leq \frac{kb(b-1)}{2}$. (1)

Bây giờ, ta xét một thí sinh cố định X nào đó và ta tính số các cặp giám khảo có cùng đánh giá với X. Giả sử có x giám khảo cho X đậu, khi đó, có $\frac{x(x-1)}{2}$ cặp giám khảo cho X đậu và có $\frac{(b-x)(b-x-1)}{2}$ cặp giám khảo cho X rớt. Do đó, tổng số các cặp giám khảo có cùng đánh giá cho thí sinh X là: $\frac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2}$. Nhưng ta có:

$$\frac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2} = \frac{2x^2-2bx+b^2-b}{2}$$

$$= \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} \geq \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Ngoài ra, $\frac{(t-1)^2}{4}$ là số nguyên (vì b lẻ), do vậy, số bé nhất các cặp giám khảo có cùng đánh giá cho X là: $\frac{(b-1)^2}{4}$. Từ đó: $N \geq \frac{a(b-1)^2}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) ta nhận được $\frac{k}{a} \geq \frac{(b-1)}{2b}$.

***Bài 150.* (1998)**

Với mọi số nguyên dương n, ta ký hiệu d(n) là số tất cả các ước số dương của n (kể cả 1 và n). Hãy xác định tất cả các số nguyên dương k sao cho $d(n^2) = kd(n)$, với n nguyên dương nào đó.

For any positive integer n, let d(n) denote the number of positive divisors of n (including 1 and n itself). Determine all positive integers k such that $d(n^2) = kd(n)$ for some n.

Hướng dẫn:

Giả sử khi phân tích thành thừa số nguyên tố, số n có dạng

$$n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}...p_r^{a_r}.$$

Khi đó: $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)...(a_r+1)$, $d(n^2) = (2a_1+1)(2a_2+1)...(2a_r+1)$.

Như vậy, để có $d(n^2) = kd(n)$, ta phải chọn các số a_i sao cho

$$(2a_1+1)(2a_2+1)...(2a_r+1) = k(a_1+1)(a_2+2)...(a_r+1).$$

Từ đó, các số $(2a_i+1)$ phải là các số lẻ, suy ra k phải là số lẻ.

Ta sẽ chứng minh đảo lại rằng với số k lẻ bất kì, ta có thể tìm được các số a_i thoả điều kiện bài toán. (*)

Ta sử dụng phương pháp quy nạp theo k.

Đầu tiên, điều này đúng cho $k = 1$ (khi đó, $n = 1$).

Tiếp theo, ta chứng minh rằng nếu phát biểu (*) đúng cho k thì nó cũng đúng cho $2^m k - 1$. Lúc đó, phát biểu (*) cũng sẽ đúng với mọi k nguyên dương, bởi vì bất cứ số lẻ nào cũng có thể được viết dưới dạng $2^m k - 1$, với k là số lẻ nhỏ hơn số lẻ đó.

Đặt $a_i = 2^i((2^m-1)k-1)$ với $i = 0,1,...,m-1$. Khi đó,

$$2a_i + 1 = 2^{i+1}(2^m-1)k - (2^{i+1}-1) \text{ và } a_i + 1 = 2^i(2^m-1)k - (2^i-1).$$

Do vậy, tích của các số $(2a_i+1)$ chia hết cho tích của các số (a_i+1) khi

$2^m(2^m-1)k - (2^m-1)$ chia hết cho $(2^m-1)k$ hay $\dfrac{(2^m k-1)}{k}$.

Như thế, nếu ta chọn các a_i với k đã cho thì phát biểu (*) đúng cho $2^m k - 1$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 151. **(1998)**

Hãy xác định tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho

$$a^2b + a + b \text{ chia hết cho } ab^2 + b + 7.$$

Determine all pairs (a, b) of positive integers such that

$$ab^2 + b + 7 \textit{ divides } a^2b + a + b.$$

Hướng dẫn:

- Nếu $a < b$ thì $b \geq a+1$, do đó:

$$ab^2 + b + 7 > ab^2 + b \geq (a+1)(ab+1) = a^2b + a + ab \geq a^2b + a + b.$$

Như vậy, ta không tìm được (a,b) thoả điều kiện bài toán trong trường hợp này.

- Giả sử $a \geq b$. Đặt $k = \dfrac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}$, giả sử k là số nguyên dương.

Ta có: $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}\right)(ab^2+b+7) = ab^2 + a + ab + 7\dfrac{a}{b} + \dfrac{7}{b} + 1 > ab^2 + a + b$. Suy ra $k < \dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{b}$. Bây giờ, nếu $b \geq 3$ thì $\left(b - \dfrac{7}{b}\right) > 0$, suy ra:

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{b}\right)(ab^2+b+7) = ab^2 + a - a\left(b-\frac{7}{b}\right) - 1 - \frac{7}{b} < ab^2 + a < ab^2 + a + b.$$

Từ đó $b = 1$, hoặc $b = 2$, hoặc $k > \dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{b}$.

- Nếu $\dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{b} < k < \dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{b}$ thì $a - 1 < kb < a + 1$. Suy ra $a = kb$. Điều này cho ta tìm được $(a,b) = (7k^2, 7k)$.

- Nếu $b = 1$ thì $(a+8)$ chia hết (a^2+a+1), suy ra $(a+8)$ chia hết $a(a+8) - (a^2+a+1) = 7a - 1$, do đó, ta cũng có $(a+8)$ chia hết $7(a+8) - (7a-1) = 57$. Nhưng các ước số lớn hơn 8 của 57 chỉ có 19 và 57, do đó $a = 11$ hoặc $a = 49$. Dễ dàng kiểm tra rằng các cặp

$$(a,b) = (11, 1) \text{ và } (a,b) = (49, 1)$$

thoả điều kiện bài toán.

- Nếu $b = 2$ thì $(4a+9)$ chia hết $(2a^2+a+2)$, do đó suy ra $(4a+9)$ chia hết $a(4a+9) - 2(2a^2+a+2) = 7a - 4$. Từ đó, ta cũng có $(4a+9)$ chia hết $7(4a+9) - 4(7a-4) = 79$. Nhưng ước số lớn hơn 9 của 79 chỉ có 79, từ đó $a = \dfrac{35}{2}$, không phải số nguyên. Vậy bài toán không có lời giải khi $b = 2$.

Tóm lại, các cặp (a,b) thoả điều kiện bài toán là

$$(11, 1), (49, 1) \text{ và } (7k^2, 7k),$$

với k là số nguyên dương.

***Bài 152.* (1998)**

Xét tất cả các hàm f từ tập các số nguyên dương N vào chính nó, thỏa mãn $f(t^2f(s)) = sf^2(t)$ với mọi s và t thuộc N. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất có thể có của $f(1998)$.

Consider all functions f from the set N of all positive integers into itself satisfying $f(t^2f(s)) = sf^2(t)$ for all s and t in N. Determine the least possible value of f(1998).

Hướng dẫn:

Đặt f(1) = k. Lúc đó $f(kt^2) = k^2t$ và:

$$f^2(kt) = 1.f^2(kt) = f(k^3t^2) = f(1^2f(f(kt^2))) = k^2f(kt^2) = k^2f^2(t),$$

suy ra $f(kt) = kf(t)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng

$$k^nf(t^{n+1}) = f^{n+1}(t).$$

Điều này kéo theo k chia hết f(t). Thật vậy, giả sử số mũ cao nhất của một số nguyên tố p chia hết k là a > b thì số mũ cao nhất của p chia hết f(t). Lúc đó $a > b\left(1+\frac{1}{n}\right)$ với số n nào đó. Nhưng $na > (n+1)b$, do đó k^n không chia hết $f^{n+1}(t)$. Điều này mâu thuẫn.

Bây giờ ta đặt $g(t) = \frac{f(t)}{k} \in N^*$, lúc đó:

$$f(t^2f(s)) = f(t^2kg(s)) = kf(t^2g(s)) = k^2g(t^2g(s)), \quad sf^2(t) = k^2sf^2(t),$$

suy ra $g(t^2g(s)) = sg^2(t)$. Như thế g cũng là hàm thỏa mãn các điều kiện của đề bài mà hiển nhiên nó có các giá trị bé hơn f (với k > 1). Ta cũng có g(1) = 1. Do ta muốn tìm giá trị nhỏ nhất của $f(1998)$ nên ta sẽ chú ý đến những hàm f thỏa mãn f(1) = 1.

Ta đã có $f(f(t)) = t$ và $f(t^2) = f^2(t)$, từ đó:

$$f^2(st) = f(s^2t^2) = f(s^2f(f(t^2))) = f^2(s)f(t^2) = f^2(s)f^2(t),$$

suy ra $f(st) = f(s)f(t)$. Giả sử p nguyên tố và f(p) = m.n. Khi đó

$$f(m)f(n) = f(mn) = f(f(p)) = p,$$

như thế một trong các số $f(m), f(n)$ phải bằng 1. Nếu $f(m) = 1$ thì

$$m = f(f(m)) = f(1) = 1.$$

Tóm lại f(p) là số nguyên tố. Nếu $f(p) = q$ thì $f(q) = p$.

Bây giờ ta xác định các hàm f trên tập các số nguyên tố thỏa mãn các điều kiện: ảnh của số nguyên tố là một số nguyên tố và nếu $f(p)=q$ thì $f(q)=p$. Giả sử $s=p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$ và $f(p_i)=q_i$, giả sử $t=q_1^{b_1}...q_r^{b_r}$ (nếu số t có nhiều hơn r nhân tử thì ta có thể thêm vào s các nhân tử p với số mũ bằng 0), khi đó ta suy ra:

$$t^2f(s)=q_1^{2b_1+a_1}...q_r^{2b_r+a_r}, \quad f(t^2f(s))=p_1^{2b_1+a_1}...p_r^{2b_r+a_r}.$$

Bây giờ, để ý rằng $1998=2.3^3.37$, và $f(e)=3, f(3)=2, f(37)=5$, ta suy ra giá trị nhỏ nhất mà f(1998) đạt được là: $f(1998)=3.2^3.5=120$.

***Bài 153.* (1999)**

Xác định tất cả các tập hợp hữu hạn S gồm những điểm trong mặt phẳng sao cho:

- S có ít nhất 3 điểm;
- với mọi A, B khác nhau thuộc S, đường trung trực của AB là một trục đối xứng của các điểm trong S.

Determine all finite sets S of at least three points in the plane which satisfy the following condition: for any two distinct points A and B in S, the perpendicular bisector of the line segment AB is an axis of symmetry for S.

Hướng dẫn:

Các tập hợp S cần tìm là tất cả những đa giác đều *n* đỉnh, với *n* > 2. Thật vậy, xét tập S gồm những điểm thoả mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử A_1, A_2, A_3, ... A_k là những đỉnh của bao lồi của S. Ta sẽ chứng tỏ những đỉnh này tạo thành đa giác đều *k* cạnh. A_{i+1} phải nằm trên trung trực của A_iA_{i+2} (nếu không, ảnh đối xứng của nó qua trung trực của A_iA_{i+2} sẽ nằm ngoài bao lồi). Suy ra rằng tất cả các cạnh của đa giác đó bằng nhau. Tương tự, A_{i+1} và A_{i+2} phải là ảnh đối xứng của nhau qua trung trực của A_iA_{i+3} (nếu không, một trong hai điểm đó sẽ nằm ngoài bao lồi). Do đó, tất cả các góc đều bằng nhau. Vậy $A_1A_2...A_k$ là đa giác đều.

Bây giờ, bất kì trục đối xứng nào cho các điểm thuộc S cũng phải là một trục đối xứng cho các điểm A_i, $i = 1, ..., k$, ta suy ra rằng trục này phải đi qua tâm C của đa giác đều *k* cạnh $A_1A_2...A_k$. Giả sử X là một điểm tuỳ ý nằm bên trong đa giác $A_1A_2...A_k$. Khi đó, X phải nằm bên trong hoặc ngoài tam giác $A_iA_{i+1}C$. C phải là tâm vòng tròn ngoại tiếp

$A_iA_{i+1}X$ (vì C là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác đó, mỗi đường trung trực này là một trục đối xứng của S), do vậy, X phải nằm trên vòng tròn tâm C, vòng tròn này qua A_i và A_{i+1}.

Thế nhưng, tất cả các điểm của tam giác $A_iA_{i+1}X$ thực sự nằm bên trong đường tròn, ngoại trừ hai điểm A_i và A_{i+1}. Vì vậy, X không thể nào nằm bên trong đa giác lồi $A_1A_2...A_k$.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 154. **(1999)**

Cho n là một số nguyên dương cố định, $n \geq 2$.

a) Hãy tìm hằng số C bé nhất sao cho ta có

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\left(\sum x_i\right)^4 \qquad (*)$$

với mọi số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$.

b) Với hằng số C trên, khi nào dấu bằng xảy ra?

Let n be a fixed integer, with $n \geq 2$.

a) Determine the least constant C such that the inequality

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\left(\sum x_i\right)^4$$

holds for all real numbers $x_1, x_2, ..., x_n$.

b) For this constant C, determine when equality holds.

Hướng dẫn:

Cho $x_1 = x_2 = 1$ và $x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$, từ đẳng thức

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = C\left(\sum x_i\right)^4$$

ta được $C = \frac{1}{8}$. Do đó, số C bé nhất cần tìm không thể bé hơn $\frac{1}{8}$.

Mặt khác, với mọi số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ ta có

$$\left(\sum x_i\right)^4 = \left(\sum x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j\right)^2 \geq 4\left(\sum x_i^2\right)\left(2\sum_{i<j} x_i x_j\right)$$

$$= 8\sum_{i<j}\left(x_i x_j \sum x_k^2\right) \geq 8\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2).$$

Dấu bằng ở bất đẳng thức thứ hai xảy ra khi và chỉ khi $(n-2)$ các x_i còn lại bằng 0. Lúc đó, để bất đẳng thức thứ nhất trở thành đẳng thức, ta phải có $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2$, tức là $x_1 = x_2$.

Tóm lại, ta có kết quả C = $\frac{1}{8}$, đẳng thức xảy ra khi có 2 số trong $x_1, x_2, ..., x_n$ bằng nhau, đồng thời những số còn lại đều bằng 0.

***Bài 155.* (1999)**

Xác định tất cả các cặp số nguyên dương (n, p) sao cho p nguyên tố, $n \le 2p$ và $(p-1)^n + 1$ chia hết cho n^{p-1}.

Determine all pairs (n,p) of positive integers such that p is a prime, n not exceeded 2p, and $(p-1)^n + 1$ is divisible by n^{p-1}.

Hướng dẫn:

* Dễ dàng nhận thấy cặp (1, p), với p nguyên tố, thoả mãn các điều kiện của bài toán. Như thế, khi n = 1 thì (1, p) là nghiệm, với p là số nguyên tố tuỳ ý.

* Ta tìm nghiệm khi n > 1.

Giả sử n > 1, cặp (n, p) là nghiệm của bài toán. Gọi q là thừa số nguyên tố bé nhất của n. Đặt x là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho

$$(p-1)^x = -1 \pmod q,$$

và y là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $(p-1)^y = 1 \pmod q$.

Số y chắc chắn tồn tại và ta có y < q, bởi vì $(p-1)^{q-1} = 1 \pmod q$.

Ta cũng có $(p-1)^n = -1 \pmod q$ nên số x nói trên cũng tồn tại.

Giả sử $n = sy + r$, với $0 \le r < y$, ta suy ra $(p-1)^r = -1 \pmod q$, từ đó $x \le r < y$ (r không thể bằng 0 vì $1 \ne -1 \pmod q$).

Giả sử $n = hx + k$, với $0 \le k < x$, ta suy ra

$$-1 = (p-1)^n = (-1)^h (p-1)^k \pmod q.$$

Số h không thể là số chẵn, vì nếu không thì $(p-1)^k = -1 \pmod q$, mâu thuẫn với giả thiết bé nhất của x. Vậy h lẻ và ta suy ra

$$(p-1)^k = 1 \pmod q, \text{ với } 0 \le k < x < y.$$

Nhưng trừ khi k = 0, điều này mâu thuẫn với giả thiết bé nhất của y. Do đó ta được $n = hx$. Mà x < q nên x = 1, suy ra $(p-1) = -1$ (mod q), do vậy ta có q = p. Như thế, ta đã chứng minh được rằng trong trường hợp n > 1, nếu (n, p) là nghiệm của bài toán thì p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n. Mà theo giả thiết $n \le 2p$ nên hoặc p = n, hoặc p = 2 và n = 4. Dễ thấy p = 2 và n = 4 không thoả mãn, do đó ta có n = p.

Ta cũng dễ dàng kiểm tra được n = p = 2 và n = p = 3 thoả mãn điều kiện của bài toán.

Xét trường hợp n > 3. Để ý rằng ta có $(-1)^p = -1$ nên dùng nhị thức Newton để khai triển ta được:

$$(p-1)^p + 1 = 1 + (-1) + p^2 - \frac{1}{2}p(p-1)p^2 + \frac{1}{6}p(p-1)(p-2)p^3 - \ldots$$

Các hệ số nhị thức đứng trước p^i, $(i \ge 3)$, trong khai triển trên, hiển nhiên chia hết cho p^3. Từ đó, tổng ở vế phải của đẳng thức trên là bằng p^2 cọng với một bội số của p^3. Như thế, tổng này không chia hết cho p^3. Mặt khác, vì p > 3 nên p^{p-1} chia hết cho p^3, do đó p^{p-1} không thể chia hết $(p-1)^p + 1$, nói cách khác, bài toán vô nghiệm khi n > 3.

* Tóm lại, các cặp (n, p) tìm được theo yêu cầu của bài toán là (2, 2), (2, 3) và (1, p), với p là số nguyên tố tuỳ ý.

***Bài 156.* (1999)**

Tìm tất cả các hàm $f : R \longrightarrow R$ sao cho:

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1, \forall x, y \in R.$$

Determine all functions $f : R \longrightarrow R$ *such that*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

for all real numbers x, y.

Hướng dẫn:

Đặt c = f(0) và gọi A = f(R). Nếu $a \in A$, đặt a = f(y) và x = a, ta có $f(a-a) = f(a) + a^2 + f(a) - 1$, suy ra:

$$f(a) = \frac{1+c}{2} - \frac{a^2}{2}. \qquad (*)$$

Tiếp đến, ta chứng minh $A - A = R$, ở đây, ta kí hiệu

$$A - A = \{x \mid x \in R, \exists a, b \in A : x = a - b\}.$$

Trước hết, ta để ý c khác 0, vì nếu thế thì đặt y = 0, ta có:

$$f(x-c) = f(c) + xc + f(x) - 1, \qquad (**)$$

suy ra f(0) = f(c) = 1, mâu thuẫn! Từ (**) ta cũng có:

$$f(x-c)-f(x)=xc+(f(c)-1),$$

mà x chạy tự do trên R nên $xc+(f(c)-1)$ cũng nhận giá trị bất kì trên R. Như vậy, mọi x thuộc R, ta có thể tìm được a, b thuộc A sao cho $x=a-b$, suy ra: $f(x)=f(a-b)=f(b)+ab+f(a)-1$. Do đó, dùng (*) ta đi đến: $f(x)=c-\frac{b^2}{2}+ab-\frac{a^2}{2}=c-\frac{x^2}{2}, \forall x\in R$.

Đặc biệt, điều này đúng cho mọi x thuộc A. So sánh với (*) ta suy ra c = 1. Do vậy, mọi x thuộc R ta có: $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

Sau cùng, dễ dàng kiểm tra được rằng hàm f xác định như trên thỏa mãn các giả thiết của bài toán, do vậy, f là nghiệm duy nhất của bài toán.

***Bài 157.* (2000)**

Cho 3 số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right).\left(b-1+\frac{1}{c}\right).\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

a, b, c are positive reals with product 1. Prove that

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right).\left(b-1+\frac{1}{c}\right).\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

Hướng dẫn:

Để ý $\frac{1}{bc}=\frac{a}{abc}=a$, ta có: $\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=b\left(b-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}\right)=b\left(1+a-\frac{1}{b}\right)$,

suy ra

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=b\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(a+1-\frac{1}{b}\right)=b\left(a^2-\left(1-\frac{1}{b}\right)^2\right)\le ba^2.$$

Thực hiện tương tự với hai thừa số kia và từ đó:

$$\left[\left(a-1+\frac{1}{b}\right).\left(b-1+\frac{1}{c}\right).\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\right]^2\le ba^2.cb^2.ac^2=1.$$

Đến đây, nếu cả ba thừa số $\left(a-1+\frac{1}{b}\right), \left(b-1+\frac{1}{c}\right), \left(c-1+\frac{1}{a}\right)$ đều dương thì điều phải chứng minh đã rõ. Trường hợp có một trong ba thừa số đó bằng không, kết quả cũng rõ ràng. Nếu một trong ba thừa số trên âm, chẳng hạn:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)<0, \qquad (*)$$

thì ta cũng đi đến điều phải chứng minh, bởi vì hai thừa số còn lại sẽ dương, khi đó tích 3 thừa số sẽ âm và hiển nhiên bé hơn 1. Thật vậy, giả sử có (*), lúc đó, a < 1, suy ra $\left(c-1+\frac{1}{a}\right)>0$, và ta cũng có b > 1 nên

$$\left(b-1+\frac{1}{c}\right)>0.$$

***Bài 158.* (2000)**

Cho k là một số thực dương, n là một số nguyên lớn hơn 1. Có n điểm nằm trên một đường thẳng sao cho chúng không trùng tất cả thành một điểm. Xét hai điểm bất kì A, B không trùng nhau. Giả sử A nằm bên phải B. Khi đó, ta nói *một nước đi* là một sự chuyển chỗ được thực hiện như sau: thay B bởi điểm B' nằm bên phải A sao cho AB' = kAB. Tìm tất cả các giá trị k để với các nước đi (hữu hạn) như vậy, ta có thể chuyển toàn bộ các điểm trên đường thẳng nói trên về bên phải của một điểm mốc tuỳ ý nào đó.

k is a positive real. n is an integer greater than 1. n points are placed on a line, not all coincident. A move is carried out as follows. Pick any two points A and B which are not coincident. Suppose that A lies to the right of B. Replace B by another point B' to the right of A such that AB' = kBA. For what values of k can we move the points arbitarily far to the right by repeated moves?

Hướng dẫn:

Câu trả lời là k thoả mãn: $k \geq \frac{1}{n-1}$.

Thật vậy, ta giả sử $k < \frac{1}{n-1}$, khi đó $k_0 = \frac{1}{k}-(n-1)>0$.

Gọi X là tổng tất cả các khoảng cách từ những điểm trên đường thẳng đến điểm đầu mút bên phải. Nếu ta thực hiện một *nước đi* mà không làm thay đổi đầu mút bên phải, dễ thấy rằng X bị giảm đi. Nếu đầu mút phải bị dịch chuyển về phía phải một khoảng cách z, thì X bị giảm bớt ít nhất là: $\frac{z}{k}-(n-1)z=k_0z$. X không thể triệt tiêu được. Do đó, tổng các khoảng cách mà đầu mút phải bị dịch chuyển nhiều nhất là $\frac{X_0}{k_0}$, với X_0 là giá trị ban đầu của X.

Như vậy, bài toán không giải được khi $k < \frac{1}{n-1}$.

Đảo lại, khi $k \geq \frac{1}{n-1}$, ta có $k_1 = (n-1) - \frac{1}{k} \geq 0$.

Ta luôn có thể dịch chuyển điểm mút bên trái. Nước đi này làm dời chỗ điểm mút bên phải một đoạn z > 0 và làm tăng X lên:

$$(n-1)z - \frac{z}{k} = k_1 z \geq 0.$$

Như thế X không thể bị giảm đi. Nhưng $z \geq k\frac{X}{n-1} = k\frac{X_0}{n-1} > 0$. Vì thế ta có thể chuyển dịch điểm mút bên phải về xa một cách tuỳ ý về phía phải (và do đó, tất cả các điểm, bởi vì n - 1 nước đi khác sẽ làm dịch chuyển các điểm khác về bên phải của điểm mút bên phải đó).

Tóm lại, các giá trị k cần tìm là: $k \geq \frac{1}{n-1}$.

***Bài 159.* (2000)**

Có 100 tấm thẻ khác nhau được đánh số từ 1 đến 100, toàn bộ 100 tấm thẻ này được đặt trong 3 cái hộp phân biệt nhau (mỗi hộp phải chứa ít nhất 1 tấm thẻ). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 100 tấm thẻ ấy vào trong 3 hộp nói trên để cho nếu ta chọn ngẫu nhiên 2 hộp, rồi lại rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ ở mỗi hộp được chọn, thì từ tổng của 2 thẻ này (tức là tổng của 2 số được đánh trên chúng) ta có thể suy ra được hộp thứ ba không được chọn?

100 cards are numbered 1 to 100 (each card different) and placed in 3 boxes (at least one card in each box). How many ways can this be done so that if two boxes are selected and a card is taken from each, then the knowledge of their sum alone is always sufficient to identify the third box?

Hướng dẫn:

Để giản tiện, khi ta nói *A chứa n*, có nghĩa là ta nói A *chứa tấm thẻ có đánh số n*. Gọi A, B, C theo thứ tự là ba chiếc hộp đã cho, ta xét 4 trường hợp sau:

- *Trường hợp 1:* A chứa 1, B chứa 2, C chứa 3.
- *Trường hợp 2:* A chứa 1 và 2.
- *Trường hợp 3:* A chứa 1 và 3, B chứa 2.
- *Trường hợp 4:* A chứa 1, B chứa 2 và chứa 3.

Ta sẽ chứng minh rằng các trường hợp 1 và 4 thoả mãn yêu cầu đề bài, còn các trường hợp 2 và 3 thì không.

* Xét trường hợp 1, trong trường hợp này, tuỳ theo phần dư (1, 2, 0 - mod 3) của n mà ta sẽ đặt tấm thẻ có số n vào các hộp tương ứng A (chứa tấm thẻ 1), B (chứa tấm thẻ 2) và C (chứa tấm thẻ 3).

Ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng phải thực hiện như thế thì bài toán mới có thể giải được. Thật vậy, xét tấm thẻ n + 1, vì

$$(n+1)+(n-2)=n+(n-1)$$

nên trong trường hợp này ta phải đặt tấm thẻ (n + 1) vào cùng hộp với tấm thẻ $(n-2)$, tức là hộp có cùng phần dư (mod 3) (bởi nếu không như thế, tức là giả sử tấm thẻ (n + 1) đặt khác hộp với tấm thẻ $(n-2)$, thì theo trên ta có hai cặp số từ hai cặp hộp khác nhau mà có cùng tổng - không đoán định được như đề bài đòi hỏi).

Mặt khác, ta cũng thấy rằng nếu đặt như thế thì bài toán giải được. Quả vậy, rút hai tấm thẻ bất kì từ hai hộp khác nhau, đem tổng các số trên hai tấm thẻ chia cho 3, nếu số dư là 0 thì hộp thứ 3 (không sử dụng để rút thẻ) là C, nếu số dư là 1 thì hộp thứ 3 là A, nếu số dư là 2 thì hộp thứ 3 là B.

Để ý rằng, vì có 6 cách sắp xếp các số 1, 2, 3 vào trong 3 hộp mà mỗi hộp chỉ chứa 1 số, do đó trong trường hợp 1 ta có 6 cách khác nhau.

* Xét trường hợp 2, trong trường hợp này, ta gọi n là số nhỏ nhất (ghi trên thẻ) không chứa trong hộp A. Giả sử thẻ nói trên chứa trong hộp B. Gọi m là số nhỏ nhất (ghi trên thẻ) chứa trong hộp thứ 3 (C). Như thế tấm thẻ $(m-1)$ không nằm trong C. Nếu tấm thẻ $(m-1)$ này nằm trong A thì do ta có $m+(n-1)=(m-1)+n$ nên dẫn đến điều mâu thuẫn. Thật vậy, ta có m ở trong C, $(n-1)$ ở trong A, tổng hai thẻ cho ta kết luận hộp không được chọn là B; mặt khác, $(m-1)$ nằm trong A, còn n nằm trong B, mà cũng với cùng tổng đó cho ta kết luận hộp không được chọn là C: như thế, ta không thể suy đoán được theo yêu cầu đề bài. Từ đó, do thẻ $(m-1)$ không nằm trong A được, nó phải nằm trong

B. Nhưng $(m-1)+2=m+1$ nên ta cũng dễ thấy điều mâu thuẫn (lí luận tương tự như trên).

Tóm lại, trường hợp 2 không xảy ra, nghĩa là nếu sắp xếp như trường hợp 2 thì bài toán không giải được.

* Xét trường hợp 3, trong trường hợp này, ta gọi n là số nhỏ nhất (ghi trên thẻ) chứa trong hộp C. Từ đó thẻ $(n-1)$ phải nằm trong A hay B. Nếu $(n-1)$ nằm trong B, thì do $(n-1)+2=n+2$ nên ta có điều mâu thuẫn (một tổng của hai thẻ trong A và B bằng một tổng của hai thẻ trong C và A). Nếu thẻ $(n-1)$ nằm trong B, thì do $(n-1)+3=n+2$ ta cũng có điều mâu thuẫn (một tổng của hai thẻ trong B và A bằng một tổng của hai thẻ trong C và B).

Như vậy, trường hợp 3 không thể xảy ra được.

* Xét trường hợp 4, trong trường hợp này, ta gọi n là số nhỏ nhất (ghi trên thẻ) chứa trong hộp C. Như thế thẻ $(n-1)$ không nằm trong A được (bởi nếu không thì do ta có $(n-1)+3=2+n$ nên một tổng hai thẻ chứa trong A và B bằng một tổng của hai thẻ trong B và C: mâu thuẫn). Vậy thẻ $(n-1)$ phải nằm trong B.

Bây giờ, xét đến thẻ (n + 1), thẻ này không thể nằm trong A được (bởi nếu không thì do ta có $(n+1)+2=3+n$ nên một tổng hai thẻ chứa trong A và B bằng một tổng của hai thẻ trong B và C: mâu thuẫn). Thẻ (n + 1) này cũng không thể nằm trong B hay C được (bởi nếu không thì do ta có $1+(n+1)=2+n$ nên một tổng hai thẻ chứa trong A và B (hay C) bằng một tổng của hai thẻ trong B và C: mâu thuẫn).

Vậy (n + 1) không tồn tại, suy ra ta có n = 100. Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh rằng khi đó, để bài toán có thể giải được, tất cả các thẻ 4, 5, ..., 98 đều phải nằm trong B. Quả vậy, giả sử thẻ m (3< m < 98) nằm trong B, nếu thẻ (m + 1) nằm trong A, do ta có $100+m=99+(m+1)$ nên một tổng hai thẻ chứa trong C và B bằng một tổng của hai thẻ trong B và A: mâu thuẫn. Như vậy, ở trường hợp 4, ta có sự sắp xếp

1 trong A, 2 đến 99 trong B, 100 trong C,

và sự sắp xếp này giúp có thể giải được bài toán. Thật vậy, hễ chọn hai thẻ có tổng từ 3 đến 100 thì ta suy ra ngay hộp không được chọn là C, hễ chọn hai thẻ có tổng là 101 thì ta suy ra ngay hộp không được chọn là A.

Để ý rằng, cũng như ở trường hợp 1, ta có 6 cách sắp xếp như thế khi thay đổi vị trí 3 hộp. Tóm lại, để giải được bài toán, ta có cả thảy 12 cách sắp xếp 100 tấm thẻ vào 3 hộp.

***Bài 160.* (2000)**

Liệu có thể tìm được số tự nhiên N có đúng 2000 ước số nguyên tố khác nhau và N chia hết 2^N+1 hay không?

Can we find N divisible by just 2000 different primes, so that N divides 2^N+1?

Hướng dẫn:

Để ý rằng với số b lẻ ta có

$$2^{ab}+1=(2^a+1)(2^{a(b-1)}-2^{a(b-2)}+\ldots+1),$$

nên (2^a+1) là một thừa số của $2^{ab}+1$.

Để có thể tìm N như đề bài đòi hỏi, ta tìm m sao cho:

(1) m chỉ có vài ước số nguyên tố phân biệt;

(2) 2^m+1 có số lớn các ước số nguyên tố phân biệt;

(3) 2^m+1 chia hết cho m.

Quả vậy, nếu tìm được m như thế, ta có thể chọn k bằng tích của một số các thừa số nguyên tố của 2^m+1 (khác m), để cho km có đúng 2000 thừa số nguyên tố. Khi đó, 2^m+1 vẫn chia hết cho km và suy ra $2^{km}+1$ chia hết cho m.

Trường hợp đơn giản nhất, m chỉ có duy nhất 1 thừa số nguyên tố p, nói cách khác, m là bội của p. Nhưng nếu m nguyên tố thì 2^p-2 chia hết cho p, do đó số p duy nhất mà p chia hết 2^p+1 là 3.

Như thế, câu hỏi đặt ra là:

(1) $a_h=2^m+1$ có chia hết cho $m=3^h$ hay không;

(2) $a_h=2^m+1$ có được đủ nhiều các thừa số nguyên tố hay không?

Ta có $a_{h+1}=a_h(2^{2m}-2^m+1)$, với $m=3^h$. Nhưng $2^m=a_h-1$, do đó $a_{h+1}=a_h(a_h^2-3a_h+3)$. Từ $a_1^2=9$, dùng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được a_h chia hết cho 3^{h+1}, như thế ta có khẳng định cho câu hỏi (1). Hơn nữa, vì a_h là một thừa số của a_{h+1} nên bất kì thùa số nguyên tố nào của a_h cũng là một thừa số nguyên tố của a_{h+1}.

Đặt $a_h=3^{h+1}b_h$, khi đó $b_{h+1}=b_h(3^{2h+1}b_h^2-3^{h+2}b_h+1)$. Ta có

$(3^{2h+1}b_h^2 - 3^{h+2}b_h + 1) > 1$ nên nó phải có một thừa số nguyên tố p lớn hơn 1. Vì $(3^{2h+1}b_h^2 - 3^{h+2}b_h + 1)$ là bội của $3b_h$ cộng thêm 1 nên p là 3 hoặc là số chia hết b_h. Từ đó, b_{h+1} có ít nhất 1 thừa số nguyên tố p lớn hơn 3 mà p không chia hết b_h. Như vậy b_{h+1} có ít nhất h thừa số nguyên tố phân biệt lớn hơn 3, ta cũng có khẳng định cho câu hỏi (2).

Đó là tất cả những gì ta cần để trả lời câu hỏi cho bài toán. Ta có thể chọn m như đã nói ở đoạn trước để có được 3^{2000}:

(1) m chỉ có 1 thừa số nguyên tố,

(2) $2^m + 1 = 3^{2001}b_{2000}$ có ít nhất 1999 thừa số nguyên tố phân biệt lớn hơn 3,

(3) m chia hết $2^m + 1$.

Chọn k là tích của 1999 thừa số nguyên tố phân biệt chia hết b_{2000}. Khi đó, N = km là số phải tìm, N có đúng 2000 ước số nguyên tố khác nhau và N chia hết $2^N + 1$.

***Bài 161.* (2001)**

Cho các số nguyên dương a, b, c, d với $a > b > c > d > 0$. Giả sử $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$. Chứng minh rằng $ab + cd$ không phải là số nguyên tố.

Let a, b, c, d be integers with a > b > c > d > 0. Suppose that $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$. Prove that $ab + cd$ is not prime.

Giải.

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2. \tag{1}$$

Xét tứ giác ABCD với AB = a, BC = d, CD = b, AD = c,

$\widehat{BAD} = 60^o$, $\widehat{BCD} = 120^o$, $BD^2 = a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$,

một tứ giác như thế rõ ràng tồn tại trên cơ sở có (1) và Định lí hàm cosin. Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$, suy ra $\widehat{CDA} = 180^o - \alpha$. Định lí hàm cosin trong các tam giác ABC và ACD cho ta:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = AC^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha.$$

Từ đó, $2\cos\alpha = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$ và

$$AC^2 = a^2 + d^2 - ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Vì ABCD nội tiếp nên Định lí Ptolémé cho ta

$$(AC.BD)^2 = (ab + cd)^2,$$

suy ra :

$$(ac + bd)(a^2 - ac + c^2) = (ab + cd)(ad + bc). \quad (2)$$

Tiếp theo, từ giả thiết, ta có $(a - d)(b - c) > 0$, $(a - b)(c - d) > 0$, từ hai bất đẳng thức này dễ dàng suy ra được

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc. \quad (3)$$

Bây giờ, giả sử ngược lại rằng $ab + cd$ là số nguyên tố. Khi đó, từ (3), suy ra rằng $ab + cd$ và $ac + bd$ nguyên tố cùng nhau. Do vậy, (2) cho ta kết luận $ad + bc$ chia hết cho $ac + bd$, điều này không thể xảy ra vì đã có (3). Ta có đpcm.

Phụ lục I

MỘT SỐ ĐỀ THI VÔ ĐỊCH TOÁN CÁC NƯỚC VÀ KHU VỰC

Phần Số học, Đại số, Giải tích, Hình học tổ hợp

Bài 1. (Olympic Toán Bungary, 1999)

Cho dãy các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ thỏa mãn:

$$(n-1)a_{n+1} = (n+1)a_n - 2(n-1)$$

với mọi n ≥ 1. Nếu 2000 chia hết a_{1999}, hãy tìm số n nhỏ nhất, với n ≥ 2, sao cho 2000 chia hết a_n.

Hướng dẫn:

Hiển nhiên, từ đẳng thức ở đề bài, ta có $a_1 = 0$, và khi n ≥ 2 thì:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n-1}a_n - 2.$$

Do đó, dãy đã cho được xác định một cách duy nhất bởi a_2.

Ngoài ra, ta có $a_n = (n-1)(cn+2)$, với $c = \frac{a_2}{2} - 1$ là một số thực tùy ý, dãy a_n thỏa mãn đẳng thức ở điều kiện của bài toán.

Tất cả các dãy a_n thỏa mãn điều kiện của bài toán đều có dạng như thế. Vì tất cả các số hạng của dãy đều là các số nguyên và 2000 chia hết a_{1999} nên ta dễ thấy rằng c là số nguyên và c = 1000m + 2. Như thế, suy ra 2000 chia hết a_n khi và chỉ khi 1000 chia hết $(n-1)(n+1)$. Từ đó, n = 2k + 1 và k(k + 1) chia hết cho $250 = 5^3.2$. Vì k và (k + 1) nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra số n nhỏ nhất, n ≥ 2, là: 2 × 124 + 1 = 249.

Bài 2. (Olympic Toán Bungary, 1999)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$.

Hướng dẫn:

Rõ ràng ta có x > y. Mặt khác, ta có:

$$x < y+1 \Leftrightarrow (y+1)^3 > y^3 + 2y^2 + 1 \Leftrightarrow y(y+3) > 0.$$

Do vậy, nếu y > 0 hoặc $y < -3$ thì bài toán vô nghiệm.

Thử trực tiếp các cặp (x, y) vào đẳng thức $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$ ta được các cặp số nguyên thỏa mãn đề bài là: $(-2,-3), (1,-2), (1,0)$.

Bài 3. (Olympic Toán nước Áo, 1982)

Tìm tất cả các số $d \in (0;1)$ có tính chất: Nếu f(x) là hàm số tuỳ ý liên tục, xác định với $x \in [0;1]$, ngoài ra $f(0) = f(1)$, thì tồn tại số $x_0 \in [0;1-d]$ để sao cho $f(x_0) = f(x_0 + d)$.

Hướng dẫn:

Ta chứng minh rằng bất kì số $d = \frac{1}{k}$, ở đây $k \in N$, đều thoả mãn điều kiện bài toán. Có thể lấy tuỳ ý hàm số f(x) liên tục và số $k > 1$ (số $d = 1$ thoả mãn điều kiện, vì $f(0) = f(1)$). Xét hàm số:

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x)$$

xác định trên đoạn $\left[0; \frac{k-1}{k}\right]$. Vì tổng các số

$$g(0) = f\left(\frac{1}{k}\right) - f(0), g\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{2}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k}\right), \dots, \ g\left(\frac{k-1}{k}\right) = f(1) - f\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

bằng 0, nên giữa chúng có số không dương và cũng có số không âm.

Bởi vì hàm số $g(x)$ liên tục, nên tồn tại số x_0 để sao cho $g(x_0) = 0$, nghĩa là: $f\left(x_0 + \frac{1}{k}\right) = f(x_0)$.

Bây giờ giả sử cho số $d \in [0;1]$ không bằng $\frac{1}{k}$ với bất cứ giá trị nào của $k \in N$. Lấy số $k \in N$ sao cho $kd < 1 < (k+1)d$, và xét hàm số liên tục f(x) tuỳ ý, xác định trên $[0;d]$ và thoả mãn các đẳng thức $f(0) = 0, f(1-kd) = -k, f(d) = 1$.

Tiếp tục xét hàm số này trên đoạn $[0;1]$ sao cho với mỗi $x \in [d;1]$ ta có đẳng thức $f(x) = f(x-d) + 1$. Ta nhận được hàm liên tục, hơn nữa

$$f(1) = f(1-d) + 1 = f(1-2d) + 2 = \dots f(1-kd) + k = 0 = f(0)$$

và với bất kì giá trị $x \in [0;1-d]$ ta có hệ thức: $f(x+d) = f(x) + 1 \neq f(x)$.

***Bài 4.* (*Vô địch toán Ba Lan,* 1989 - 1990)**

Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn phương trình hàm

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

Hướng dẫn:

Từ đề bài ta có: $\frac{f(x+y)}{x+y} - \frac{f(x-y)}{x-y} = 4xy$. Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, lúc đó: $g(x+y) - g(x-y) = 4xy$. Lại đặt $x = a + \frac{h}{2}, y = \frac{h}{2}$, ta suy ra

$$g(a+h) - g(a) = 4\left(a + \frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}.$$

Từ đây ta được: $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} = 2a + h$.

Cho $h \to 0$, ta có: $g'(a) = 2a$. Do đó $g(x) = x^2 + C$, $f(x) = x^3 + Cx$, với C là hằng số tùy ý.

***Bài 5. (Olympic 30 - 4, Việt Nam, đề đề nghị,* 2000)**

Tìm a để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$\frac{x^3+1}{x\sqrt{x}} + 2(a-1)\frac{x^2+1}{x} + 4(1-a)\frac{x+1}{\sqrt{x}} + 4a - 6 = 0.$$

Hướng dẫn:

Đặt $t = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, điều kiện $t \ge 2$, phương trình trở thành

$$t^3 + 2(a-1)t^2 + (1-4a)t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 2at + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 2 & (1) \\ t^2 + 2at + 1 = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) cho ta một nghiệm $x = 1$.

Nhận xét: $(2) \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - t\sqrt{x} + 1 = 0 \quad (3)$.

Phương trình (3) có $\Delta = t^2 - 4$, nếu $t > 2$ thì (3) có hai nghiệm dương phân biệt. Suy ra rằng phương trình đã cho có thêm hai nghiệm phân biệt khác 1. Mặt khác, phương trình (2) có P = 1, do đó phương trình này không thể có đồng thời hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2.

Vì vậy, để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện

$$t_1 < t_2 \Leftrightarrow 4 + 4a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{5}{4}.$$

Tóm lại, để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt , ta phải có: $a < -\dfrac{5}{4}$.

***Bài 6. (Vô địch Toán Luxembourg,* 1980)**

Tìm tất cả các hàm số $f: Q \to Q$ sao cho f thoả mãn điều kiện $f(1) = 2$ và đồng nhất thức: $f(xy) \equiv f(x)f(y) - f(x+y) + 1,\ x, y \in Q$.

Hướng dẫn:

Cho trong đồng nhất thức giá trị $y = 1$, ta nhận được đồng nhất thức:

$f(x) \equiv f(x).f(1) - f(x+1) + 1 \quad (x \in Q)$, hay $f(x+1) \equiv f(x) + 1$.

Từ đây, với mọi $x \in Q$, $n \in Z$ ta có:

$$f(x+n) = f(x) + n\,,\ f(n) = f(1) + n - 1 = n + 1.$$

Sau đó, cho đồng nhất thức các giá trị $x = \frac{1}{n}, y = n$ với $n \in Z$, ta nhận được: $f\left(\frac{1}{n}.n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)f(n) - f\left(\frac{1}{n} + n\right) + 1$, suy ra

$$2 = f\left(\frac{1}{n}\right)(n+1) - f\left(\frac{1}{n}\right) - n + 1, \text{ nghĩa là } f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}.$$

Cuối cùng, cho giá trị $x = p, y = \frac{1}{q}$, với $p \in Z, q \in N$:

$$f\left(p.\frac{1}{q}\right) = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) - f\left(p + \frac{1}{q}\right) + 1,$$

ta suy ra $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+1)\left(\frac{1}{q} + 1\right) - \frac{1}{q} - p = \frac{p}{q} + 1$.

Như vậy chỉ có một hàm số $f(x) = x + 1$ là thực sự thoả mãn tất cả các điều kiện của bài toán.

Bài 7. (Thi chọn học sinh giỏi toán Bucharest, 1999)

Cho cấp số cọng sau: 308, 973, 1638, 2302, 2968, 3633, 4298.

Hãy xác định cấp số nhân $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ sao cho

$$308 < b_1 < 973 < b_2 < 1638 < b_3 < 2302 <$$
$$< b_4 < 2968 < b_5 < 3633 < b_6 < 4298.$$

Hướng dẫn:

Đầu tiên, ta tìm số x sao cho

$b_1.x = b_2$, $b_2.x =$, b_3 $b_3.x = b_4$, $b_4.x = b_5$, $b_5.x = b_6$. (a)

Ta có: $b_6 = b_1.x^5$. Giá trị lớn nhất cho b_1 là 972, và giá trị nhỏ nhất cho b_6 là 3634. Như thế ta được: $3634 \le 972.x^5 \Rightarrow 1{,}301 \le x$.

Mặt khác, từ giá trị nhỏ nhất là 2304 của b_4 và giá trị lớn nhất là 4297 của b_6, ta cũng có: $4297 \ge 2304.x^2 \Rightarrow x \le 1{,}37$. Vậy:

$$1{,}301 \le x \le 1{,}37. \quad \text{(b)}$$

Tiếp tục dùng $b_6 = b_1.x^5$ và (b) để lí luận, ta tìm được $x = \frac{4}{3}$.

Khi đó $b_6 = b_1\left(\frac{4}{3}\right)^5$. Mà $3^5 = 243$ nên b_1 phải là bội của 243, nhưng b_1 nằm giữa 309 và 972 nên $b_1 = 486, 729$ hay 972. Kết hợp với $b_1.x = b_2 > 973$, ta tìm được $b_1 = 972$.

Cuối cùng, từ (a), các số $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ thỏa mãn điều kiện của bài toán là: 972, 1296, 1728, 2304, 3072, 4096.

Cuộc thi USAMTS chọn tài năng Toán học của Mĩ (USA Mathematical Talent Search) được giáo sư George Bezsenyi tổ chức lần đầu tiên vào năm 1989, dưới sự tài trợ của Học viện Kĩ thuật Rose-Hulman và COMAP (Consortium for Mathematics and It's Applications - Hội Toán học và ứng dụng). Đây là một chuyên mục thường xuyên của tờ báo mang tên Consortium, được COMAP xuất bản. Dưới đây, chúng tôi trích giới thiệu cùng các bạn một số bài toán thuộc cuộc thi USA Mathematical Talent Search.

***Bài 8.* (*USAMTS*, 2000 - 2001)**

Hãy tìm số dư khi chia số $1776^{1492!}$ cho 2000.

Hướng dẫn:

Cách 1:

Ta có: $1776^1 \equiv 1776 \pmod{2000}$,

$1776^2 \equiv 176 \pmod{2000}$, $\quad 1776^3 \equiv 576 \pmod{2000}$,

$1776^4 \equiv 976 \pmod{2000}$, $\quad 1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$,

$1776^6 \equiv 1776 \pmod{2000}$, $\quad 1776^7 \equiv 176 \pmod{2000}$,

và tiếp tục như vậy. Từ $1776^6 \equiv 1776^1 \pmod{2000}$, ta được

$$1776^n \equiv 1776^{n-5} \pmod{2000},$$

với mọi $n > 5$. Do vậy ta sẽ xét phần dư của số mũ khi chia cho 5. Dễ thấy 1492! chia hết cho 5 nên: $1776^{1492!} \equiv 1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$.

Vậy khi chia số $1776^{1492!}$ cho 2000 ta được số dư là 1376.

Cách 2:

Trước hết, ta dùng quy nạp để chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Với mọi số nguyên dương n, ta có: $1376^n \equiv 1376 \pmod{2000}$.

Chứng minh Bổ đề: Dễ thấy

$1376^1 \equiv 1376 \pmod{2000}$ và $1376^2 = 1893376 \equiv 1376 \pmod{2000}$.

Giả sử mệnh đề trên đúng cho n= k, ta sẽ chứng minh

$$1376^{k+1} \equiv 1376 \pmod{2000}.$$

Để làm điều này, ta thực hiện nhân hai vế của phương trình đồng dư $1376^k \equiv 1376 \pmod{2000}$ cho 1376 và được $1376^{k+1} \equiv 1376^2 \pmod{2000}$.

Vì $1376^2 \equiv 1376 \pmod{2000}$ nên từ đây ta có $1376^k \equiv 1376 \pmod{2000}$ và Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Ta có $1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$. Vì số 5 chia hết 1492! nên ta được $1776^{1492!} \equiv (1776^5)^{\frac{1492!}{5}} \equiv 1376^{\frac{1492!}{5}} \pmod{2000}$.

Áp dụng bổ đề trên ta có $1376^{\frac{1492!}{5}} \equiv 1376 \pmod{2000}$, từ đó, khi chia số $1776^{1492!}$ cho 2000 ta được số dư là 1376.

Cách 3:

Định lí Euler cho ta: $a^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, với mọi a thoả mãn (a, 125) = 1. Ta có $16 | 1776$ nên $1776^{1492!} \equiv 0 \pmod{16}$. Bây giờ, xét số dư của $1776^{1492!}$ khi chia cho 125, vì $(125, 1776) = 1$ và $5 | 1492!$ nên theo Định lí Euler ta có: $1776^{1492!} \equiv 1 \pmod{125}$.

Tiếp đến, giải hệ phương trình đồng dư

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{125} \\ n \equiv 1 \pmod{16} \end{cases}$$

bằng phương pháp thử chọn, ta được nghiệm duy nhất 1376.

Vậy $1776^{1492!} \equiv 1376 \pmod{2000}$.

***Bài 9.* (*USAMTS*, 2000 - 2001)**

Xác định số nguyên dương N bé nhất gồm 5 chữ số sao cho 2N cũng là số có 5 chữ số và tất cả các chữ số 0, 1, 2, ..., 9 đều có mặt trong 2 số N và 2N.

Hướng dẫn:

Ta giả sử N là số ABCDE và 2N là số FGHIJ, trong đó A, B, C, D, E, F, G, H, I, J là những chữ số khác nhau lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3..., 9. A rõ ràng không thể là số 0, số nhỏ nhất mà A có thể nhận được là 1. Ta sẽ giải bài toán từ những số bé nhất có thể nhận, cho đến khi nào gặp điều vô lí thì thôi.

Xét trường hợp A = 1. Khi đó F = 2. Số nhỏ nhất mà B có thể nhận là 3 (B không thể bằng 0 vì hoặc sẽ bị trùng 2 lần số 0, hoặc bị trùng 2 lần số 1), lúc đó số nhỏ nhất mà C có thể nhận là 4, tương ứng ta được G = 6.

1) Bây giờ, số nhỏ nhất mà D có thể nhận là 5. Suy ra H = 9, vì H = 2C + 1 (nhớ). Tiếp theo, số duy nhất mà E sẽ nhận là 8 (vì nếu E = 0, 7 thì bị trùng số), nhưng khi E = 8 thì 2D cọng với 1 nhớ nữa là 11, tức I = 1, vô lí vì A = 1.

2) Như thế D không thể bằng 5. Giả sử D nhận số bé nhất tiếp theo là 7 (do đã có G = 6). Lúc đó, H = 9 (= 2C + 1), nên E = 8 như trên. Nhưng bây giờ ta lại gặp mâu thuẫn vì J = 6, trùng số.

3) Tiếp đến, giả sử D = 8, suy ra H = 9. Lúc này, số nhỏ nhất mà E có thể nhận là 5. Ta có 2E = 10 nên J = 0, từ đó I = 7 vì 2D + 1 (nhớ) = 17.

Tóm lại, ta được số N thỏa mãn đề bài là

$$N = 13485\ (2N = 26970).$$

Chú ý:

Dr. Béla Bajnok, ĐH Gettysburg, cộng tác viên của USAMTS, người đã đặt ra đề toán này, cho biết rằng các số N nhỏ nhất kế tiếp theo (sau 13485) là: 13548, 13845, 14583.

***Bài 10.* (*USAMTS*, 2000 - 2001)**

Biết rằng có một cách thử để xét xem một số A có chia hết cho 19 hay không như sau:

Giả sử ta có số A, bỏ đi chữ số cuối cùng của số A, ta được số B, đem B cộng với 2 lần chữ số (cuối cùng) đã bỏ, ta được số C. Lặp lại quá trình trên với số C, rồi tiếp tục như thế cho đến chừng nào thu được số M nhỏ hơn 20. Khi đó, A chia hết cho 19 nếu và chỉ nếu M = 19.

Ví dụ, số 67944 chia hết cho 19, còn 44976 thì không. Ta thực hiện như sau:

$$\begin{array}{r} 6794\cancel{4} \\ 8 \\ \hline 680\cancel{2} \\ 4 \\ \hline 68\cancel{4} \\ 8 \\ \hline 7\cancel{6} \\ 12 \\ \hline 19 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4497\cancel{6} \\ 12 \\ \hline 450\cancel{9} \\ 18 \\ \hline 46\cancel{8} \\ 16 \\ \hline 6\cancel{2} \\ 4 \\ \hline 10 \end{array}$$

Hãy tìm cách thử tương tự để xét xem một số A có chia hết cho 29 hay không.

Hướng dẫn:

Phương pháp thử: Giả sử ta có số A, bỏ đi chữ số cuối cùng của số A, ta được số B, đem B cộng với 3 lần chữ số (cuối cùng) đã bỏ, ta được số C. Lặp lại quá trình trên với số C, rồi tiếp tục như thế cho đến chừng nào thu được số M nhỏ hơn 30. Khi đó, A chia hết cho 29 nếu và chỉ nếu M = 29.

Chứng minh: Ta viết A = 10a + b, với b là chữ số cuối cùng của số A. Khi bỏ b đi (được số B = a) và cọng với 3 lần chữ số b, ta được số C = a + 3b. Bây giờ, để ý rằng 10a + b chia hết cho 29 khi và chỉ khi 10a + b + 29b chia hết cho 29. Ta lại có 10a + b + 29b = 10(a + 3b), số này chia hết cho 29 khi và chỉ khi a + 3b chia hết cho 29, sở dĩ có điều này vì 10 không chia hết cho 29 và 29 là số nguyên tố.

Vậy A chia hết cho 29 khi và chỉ khi C chia hết cho 29. Quá trình này lặp lại như thế cho đến khi được số M < 30. Hơn nữa, 29 là số duy nhất giữa 0 và 30 chia hết cho 29, do vậy phép thử của chúng ta là đúng.

Chú ý:

Bạn đọc hãy chứng minh rằng phép thử tương tự như thế sẽ được thực hiện với các phép chia cho 39, 49, 59, 69...

***Bài 11.* (*USAMTS*, 2000 - 2001)**

Giả sử đa thức $p(x) = x^5 + x^2 + 1$ có năm nghiệm $r_1, r_2, \ldots, r_5$. Đặt $q(x) = x^2 - 2$. Hãy xác định tích $q(r_1)q(r_2)\ldots q(r_5)$.

Hướng dẫn:

Ta có: $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_5)$ và

$$q(r_1)q(r_2)\ldots q(r_5) = (r_1^2 - 2)(r_2^2 - 2)\ldots(r_5^2 - 2).$$

Với mọi i = 1, 2, ..., 5, $r_i^2 - 2 = (\sqrt{2} - r_i)(-\sqrt{2} - r_i)$ nên $q(r_1)q(r_2)\ldots q(r_5) =$

$$= (\sqrt{2} - r_1)(\sqrt{2} - r_2)\ldots(\sqrt{2} - r_5)(-\sqrt{2} - r_1)(-\sqrt{2} - r_2)\ldots(-\sqrt{2} - r_5)$$

$$= p(\sqrt{2})p(-\sqrt{2}) = [(\sqrt{2})^5 + (\sqrt{2})^2 + 1].[(-\sqrt{2})^5 + (-\sqrt{2})^2 + 1].$$

Vậy $q(r_1)q(r_2)\ldots q(r_5) = -23$.

***Bài 12.* (*USAMTS*, 2000 - 2001)**

Xác định tất cả các số nguyên dương N sao cho khi số N được viết trong hệ thập phân thì N sẽ lớn hơn tổng các bình phương những chữ số của nó 1 đơn vị.

Hướng dẫn:

Giả sử $N = \overline{...a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$, trong đó, các chữ số a_i nhận giá trị từ 0 đến 9. Theo giả thiết:

$$1+a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+...=a_0+a_1 10^1+a_2 10^2+a_3 10^3+a_4 10^4+...,$$

hay $0=1+a_0(a_0-1)+a_1(a_1-10)+a_2(a_2-100)$

$$+a_3(a_3-1000)+a_4(a_4-10000)+...$$

hay $a_1(a_1-10)+a_2(a_2-100)+a_3(a_3-1000)+a_4(a_4-10000)+...$

$$=-1-a_0(a_0-1)\ge -1-9\times 8=-73. \qquad (*)$$

Để ý rằng các a_i là các chữ số từ 0 đến 9, do đó ta suy ra $a_2=a_3=a_4=a_5=...=0$, vì nếu không như thế thì tổng ở vế trái của (*) sẽ nhỏ hơn -73. Vậy:

$$a_0(a_0-1)+1=a_1(10-a_1). \qquad (**)$$

Cho a_0 các giá trị từ 0 đến 9, vế trái của (**) nhận các giá trị tương ứng là 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73. Tương tự, cho a_1 các giá trị từ 0 đến 9, vế phải của (**) nhận các giá trị tương ứng là 0, 9, 16, 21, 24, 25, 21, 16, 9, 0. Từ đó, ta được $a_0=5, a_1=3$ hay 7. Hai số tìm được là 35 và 75, thử lại, chúng thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Các bài sau đây được trích từ các kì thi William Lowell Putnam từ 1997 đến năm 2000. Đây là cuộc thi dành cho sinh viên các nước Mĩ và Canada, nhưng những bài trích ở đây phù hợp với học sinh giỏi Toán phổ thông ở nước ta.

***Bài 13. (Putnam,* 1995)**

Ta nói một tập hợp M *đóng* với phép nhân nếu

$$\forall a, b \in M: ab \in M.$$

Cho S là tập các số thực đóng với phép nhân (*phép nhân* ở đây là phép nhân thông thường), giả sử S là hợp của 2 tập rời nhau T và U. Biết rằng tích của 3 phần tử bất kì (không cần phân biệt) của T là một phần tử của T, và tích 3 của phần tử bất kì của U là một phần tử của U. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai tập T, U đóng với phép nhân.

Hướng dẫn:

Giả sử ngược lại rằng cả hai tập T, U đều không đóng với phép nhân. Lúc đó, tồn tại a, b $\in$ T và c, d $\in$ U sao cho $ab \notin T$, $cd \notin U$.

Nhưng do S đóng với phép nhân nên ab $\in$ S và cd $\in$ S, mà S là hợp hợp của 2 tập rời nhau T và U nên ta suy ra ab $\in$ U và cd $\in$ T. Bây giờ, cũng từ giả thiết ta được: (ab)cd $\in$ U và (cd)ab $\in$ T. Mà phép nhân ở đây là phép nhân thông thường nên 2 phần tử (ab)cd và (cd)ab giống nhau, suy ra U và T không rời nhau, mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh.

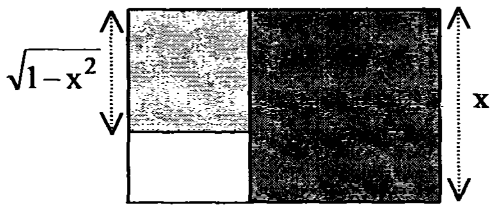
***Bài 14. (Putnam,* 1996)**

Xác định số A nhỏ nhất sao cho với hai hình vuông bất kì có tổng diện tích bằng 1, tồn tại một hình chữ nhật có diện tích bằng A thoả mãn điều kiện: hai hình vuông nói trên có thể được xếp nằm hoàn toàn trong hình chữ nhật mà phần trong của chúng không đè lên nhau, và các cạnh của 2 hình vuông thì song song với các cạnh của hình chữ nhật.

Hướng dẫn:

Với 2 hình vuông có tổng diện tích bằng 1 như đã nói ở đề bài, gọi x là độ dài cạnh của một hình, ta có:

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{1-x^2}\,.$$



Khi đó, hình chữ nhật nhỏ nhất chứa chúng như đã nói sẽ có các cạnh là x và $x+\sqrt{1-x^2}$ và có diện tích: $f(x)=x^2+x\sqrt{1-x^2}$. Ta có :

$$f'(x)=2x+\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{1-x^2},$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 8x^4-8x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Từ đó, $x=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}$, thay vào ta được giá trị cần tìm: $f(x)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$.

***Bài 15. (Putnam,* 1997)**

Cho dãy số a_n xác định bởi $a_1=2$, $a_{n+1}=2^{a_n}$.

Chứng minh rằng $a_n \equiv a_{n-1}$ (mod n) với n $\geq$ 2.

Hướng dẫn:

Dễ thấy rằng kết quả sau đây mạnh hơn kết quả cần chứng minh: $a_n \equiv a_{n-1}$ (mod m) với mọi m $\leq$ n. Ta sẽ chứng minh kết quả này bằng quy nạp. Kết quả hiển nhiên đúng với n = 2. Giả sử nó đúng với mọi k < n. Ta phải chứng minh $a_n \equiv a_{n-1}$ (mod m) với mọi m $\leq$ n, nghĩa là $2^{a_{n-1}} \equiv 2^{a_{n-2}} \pmod m$ với mọi $m \le n$. Đặt $m = 2^r(2s+1)$, khi đó, theo Định lí Euler: $2^{\phi(2r+1)} \equiv 1 \pmod{2r+1}$, do $\phi(2r+1) \le 2r+1 \le m \le n$, theo giả thiết quy nạp ta có: $a_{n-1} \equiv a_{n-2} \pmod{\phi(2r+1)}$, suy ra

$$2^{a_{n-1}} \equiv 2^{a_{n-2}} \pmod{2r+1}.$$

Hiển nhiên ta có $2^s \mid 2^{a_{n-1}}$ và $2^s \mid 2^{a_{n-2}}$ nên $2^{a_{n-1}} \equiv 2^{a_{n-2}} \pmod{2^s}$.

Nhưng $(2r+1)$ và 2^s nguyên tố cùng nhau, do đó:

$$2^{a_{n-1}} \equiv 2^{a_{n-2}} \pmod m \text{ với mọi } m \le n.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 16. (*Putnam*, 1998)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c, ta có thể tìm được số nguyên dương n sao cho $n^3 + an^2 + bn + c$ không phải là số chính phương.

Hướng dẫn:

Giả sử $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$ là một số chính phương, thế thì ta phải có $f(n) \equiv \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right. \pmod 4$. Bây giờ, ta giả sử ngược lại rằng tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho f(1), f(2), f(3), f(4) đều là các số chính phương. Dễ thấy $f(2) - f(4) \equiv 2b \pmod 4$, do đó, nếu f(2) và f(4) là các số chính phương thì $2b \equiv 0 \pmod 4$. Ngoài ra: $f(3) - f(1) \equiv 2b + 2 \pmod 4$ nên nếu f(1) và f(3) là các số chính phương thì $2b + 2 \equiv 0 \pmod 4$. Như vậy, ta gặp mâu thuẫn khi giả sử f(1), f(2), f(3), f(4) đều là các số chính phương.

Tóm lại, với mọi số nguyên a, b, c, ta có thể tìm được số nguyên dương n sao cho $n^3 + an^2 + bn + c$ không phải là số chính phương, số n tìm được đó là một trong các số 1, 2, 3, 4.

Bài 17. (*Putnam*, 1999)

Cho $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 24$ và với mọi $n \ge 3$:

$$u_n = \frac{6u_{n-1}^2 u_{n-3} - 8u_{n-1}u_{n-2}^2}{u_{n-2}u_{n-3}}.$$

Chứng minh rằng u_n luôn luôn là bội của n.

Hướng dẫn:

Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$. (*)

Khi đó, đẳng thức $u_n = \dfrac{6u_{n-1}^2 u_{n-3} - 8u_{n-1}u_{n-2}^2}{u_{n-2}u_{n-3}}$ được viết đơn giản thành: $v_n = 6v_{n-1} - 8v_{n-2}$. Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được v_n có dạng $v_n = A2^n + B4^n$. Nhưng ta có:

$$v_2 = \frac{u_2}{u_1} = 2,\ v_3 = \frac{u_3}{u_2} = 12,$$

nên ta được $v_{n+1} = 4^n - 2^n$. Suy ra

$$u_n = (4^{n-1} - 2^{n-1})(4^{n-2} - 2^{n-2})...(4-2).$$

Bây giờ, với mọi số p nguyên tố, ta có $4^{p-1} \equiv 2^{p-1}$ (mod p), do đó p chia hết $4^{p-1} - 2^{p-1}$, và p chia hết $4^s - 2^s$, với mọi số s là bội của $p-1$. Nếu p^r chia hết n, thì tồn tại ít nhất r bội số của $p-1$ nhỏ hơn n, do đó p^r chia hết u_n. Từ đó ta suy ra n chia hết u_n.

WMSETS (*Wisconsin Mathematics Science & Engineering Talent Search*) là kì thi chọn tài năng toán học của trường Đại học Winconsin-Madison, USA, học sinh mọi nước đều có thể tham gia để nhận học bổng 24000 đô-la cho 4 năm học. Hai bài dưới đây được trích từ đề thi năm học 2000 - 2001.

***Bài 18.* (WMSETS, 2000 - 2001)**

Gọi S là tập hợp gồm 100 số nguyên dương bé hơn 200. Chứng minh rằng tồn tại một tập khác rỗng T con của S sao cho tích tất cả các phần tử của T là một số chính phương.

Hướng dẫn:

Với mỗi tập con Z khác rỗng của S, ta kí hiệu P(Z) là tích tất cả các phần tử của Z và m_Z là số sao cho P(Z) = c^2m_Z, trong đó c^2 là số chính phương lớn nhất chia hết P(Z).

Như thế, mỗi số m_Z là một tích của các số nguyên tố khác nhau, mỗi số nguyên tố này bé hơn 20; lúc này, do chỉ có ít hơn 100 số nguyên tố như thế, ta thấy rằng nhiều lắm là có 2^{99} khả năng cho m_Z. Hơn nữa, số các tập Z có thể có là số tất cả các tập con khác rỗng của S, nghĩa là có thể có $2^{100} - 1$ tập Z. Vì $2^{100} - 1 > 2^{99}$ nên chắc chắn phải tồn tại hai tập con khác rỗng X và Y của S sao cho $m_X = m_Y$.

Bây giờ, giả sử P(X) = a^2m_X và P(Y) = $b^2m_Y = b^2m_X$, thì ta có P(X).P(Y) = $a^2m_X.b^2m_X$, đây là số chính phương. Ta gọi T là tập hợp con của S gồm các phần tử hoặc thuộc X, hoặc thuộc Y nhưng không thuộc cả hai ($T = X \cup Y \setminus (X \cap Y)$). Do X khác Y nên T khác rỗng. Mặt khác, mỗi số của $X \cap Y$ đã xuất hiện 2 lần trong tích P(X).P(Y), do đó ta có $P(X).P(Y) = P(T).(P(X \cap Y))^2$.

Vì P(X).P(Y) là số chính phương theo trên nên ta suy ra P(T) cũng là số chính phương, điều phải chứng minh.

***Bài 19.* (WMSETS, 2000 - 2001)**

Giả sử rằng $\frac{a}{b} > \frac{x}{y} > \frac{c}{d}$ với a, b, c, d, x, y là các số nguyên không âm. Nếu $ad - bc = 1$, hãy chứng minh $x \geq a + c$ và $y \geq b + d$.

Hướng dẫn:

Để ý

$$0 < \frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{ay - bx}{by},$$

do đó ta có $ay - bx = r$ (*) là số nguyên dương.

Tương tự, $dx - cy = s$ (**) cũng là số nguyên dương.

Sử dụng giả thiết $ad - bc = 1$, nhân 2 vế của (*) cho c và nhân 2 vế của (**) cho a rồi cọng chúng lại ta được $x = as + cr$; nhân 2 vế của (*) cho d và nhân 2 vế của (**) cho b rồi cọng chúng lại ta được $y = bs + dr$. Vì $r, s \geq 1$, ta đi đến $x = as + cr \geq a + c$ và $y = bs + dr \geq b + d$.

***Bài 20.* (Olympic Toán học Canada, 2001)**

Randy: "Chào Rachel, cậu đã viết ra một phương trình bậc hai thú vị thật. Thế nghiệm của chúng là gì nào?"

Rachel: "Nghiệm là hai số nguyên dương. Một trong hai nghiệm là tuổi của tớ, nghiệm kia là tuổi của thằng Jim- -my em tớ."

Randy: "Thế thì cũng đơn giản thôi! Để xem tớ có thể tìm ra tuổi của cậu và Jimmy không nào. Nghe cũng chẳng khó mấy, vì các hệ số đều là số nguyên cả. Tiện thể, tớ cũng tính được tổng của 3 hệ số là một số nguyên tố."

Rachel: "Nghe khá đấy. Rồi, nói tuổi của tớ đi!."

Randy: "Từ từ, để tớ đoán... Xem nào, tớ đoán tuổi cậu, sau đó thay vào x trong phương trình... quỹ thật, sao lại cho kết quả -55 mà không là 0 nhỉ?"

Rachel: "Thôi dẹp đi, để tớ yên nào!"

a) Hãy chứng minh tuổi của Jimmy là 2.

b) Xác định tuổi của Rachel.

Randy: "Hi Rachel, that's an interesting quadratic equation you have written down. What are its roots?

Rachel: "The roots are two positive integers. One of the roots is my age, and the other root is the age of my youn- -ger brother, Jimmy."

Randy: "That is very neat! Let me see if I can figure out how old you and Jimmy are. That shouldn't be too difficult since all of your coefficients are integers. By the way, I notice that the sum of the three coefficients is a prime number."

Rachel: "Interesting. Now figure out how old I am."

Randy: "Instead, I will guess your age and subtitute it for x in your quadratic equation ... darn, that gives me -55, and not 0."

Rachel: "Oh, leave me alone!"

a) Prove that Jimmy is two years old.

b) Determine Rachel's age.

Hướng dẫn:

Gọi R là số tuổi của Rachel, J là số tuổi của Jimmy. Dạng bậc hai mà Rachel đưa ra là

$$a(x - R)(x - J) = ax^2 - a(R + J)x + aRJ,$$

với a là một số nào đó. Theo giả thiết, a là số nguyên. Tổng các hệ số là

$$a - a(R + J) + aRJ = a(R - 1)(J - 1).$$

Vì tổng trên là số nguyên tố nên hai trong ba số a; $R - 1$; $J - 1$ phải bằng 1. Ta lại có $R > J > 0$, nên chắc chắn được $a = 1$, $J = 2$, $R - 1$ là số nguyên tố, và dạng bậc hai trở thành $(x - R)(x - 2)$.

Mặt khác, theo lời đối thoại, dạng bậc hai nhận giá trị $-55 = -5.11$ với số nguyên x nào đó. Vì $R > 2$ nên nhân tử thứ nhất, $(x - R)$, phải bằng 1. Ta có bốn trường hợp như sau:

- $x - R = -55$ và $x - 2 = 1$, suy ra $x = 3$, $R = 58$.
- $x - R = -11$ và $x - 2 = 5$, suy ra $x = 7$, $R = 18$.
- $x - R = -5$ và $x - 2 = 11$, suy ra $x = 13$, $R = 18$.
- $x - R = -1$ và $x - 2 = 53$, suy ra $x = 57$, $R = 58$.

Do $R - 1$ là số nguyên tố, ta loại 2 trường hợp sau, vậy $R = 18$ và $J = 2$.

Phụ lục II

- **ĐỀ THI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI IMO 2001, 2002.**
  (Bổ sung cho lần tái bản thứ hai)
- **ĐIỀU LỆ CỦA CUỘC THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ (IMO)**
- **DANH SÁCH CÁC NƯỚC CHỦ NHÀ ĐĂNG CAI IMO TỪ 1959 ĐẾN 2004**
- **THÀNH TÍCH CỦA ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM TẠI CÁC KÌ THI IMO TỪ 1974 ĐẾN 2002**

ĐỀ THI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI
IMO LẦN THỨ 42 (2001)
IMO LẦN THỨ 43 (2002)

(Bổ sung cho lần tái bản thứ hai)

42nd IMO, Washington, D.C, USA

8 - 9 July, 2001

Bài 1. (2001)

Cho tam giác nhọn ABC có O là tâm vòng tròn ngoại tiếp. Gọi P là chân đường cao hạ từ A xuống cạnh BC.

Giả sử rằng $B\hat{C}A \geq A\hat{B}C + 30^0$.

Chứng minh $C\hat{A}B + C\hat{O}P < 90^0$.

Let ABC be an acute-angled triangle with circumcentre O. Let P on BC be the foot of the altitude from A.

Suppose that $B\hat{C}A \geq A\hat{B}C + 30^0$.

Prove that $C\hat{A}B + C\hat{O}P < 90^0$.

Hướng dẫn:

Gọi D là một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho AD song song với BC. Ta có $C\hat{B}D = B\hat{C}A$, do đó $A\hat{B}D \geq 30^0$. Suy ra rằng $A\hat{O}D \geq 60^0$. Bây giờ, giả sử Z là trung điểm AD và Y là trung điểm BC. Khi đó, $AZ \geq \frac{R}{2}$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nhưng do AZYP là hình chữ nhật nên ta có AZ = YP.

Ta không thể có O trùng với Y, vì nếu ngược lại, góc A sẽ bằng 90^0 và tam giác ABC không nhọn như giả thiết. Do vậy:

$$OP > YP \geq \frac{R}{2}.$$

Mà $PC = YC - YP < R - YP \leq \frac{R}{2}$. Do đó ta có OP > PC. Suy ra, ta có $\widehat{COP} < \widehat{OCP}$. Gọi CE là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có $\widehat{OCP} = \widehat{ECB}$. Nhưng

$$\widehat{ECB} = \widehat{EAB},\ \widehat{EAB} + \widehat{BAC} = \widehat{EAC} = 90^\circ,$$

vì EC là đường kính, nên ta được $\widehat{COP} + \widehat{BAC} < 90^\circ$.

Cách khác:

Đặt $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{BCA}$ và $\delta = \widehat{COP}$. Gọi K và Q lần lượt là các điểm đối xứng của A và P qua trung trực của BC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. Thế thì $OA = OB = OC = OK = R$. Hơn nữa, ta có QP = KA vì KQPA là hình chữ nhật. Bây giờ, để ý rằng:

$$\widehat{AOK} = \widehat{AOB} - \widehat{KOB} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = 2\gamma - 2\beta \geq 60^0.$$

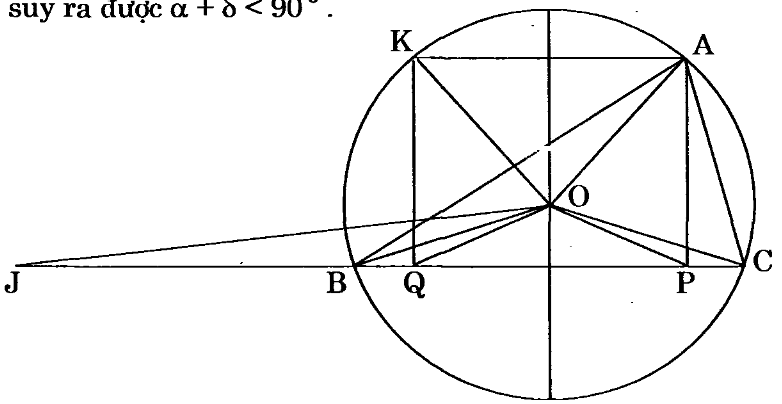
Từ đó, và do $OA = OB = R$, ta suy ra rằng $KA \geq R$ và $QP \geq R$. Cho nên, bằng cách sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$OP + R = OQ + OC > QC = QP + PC \geq R + PC.$$

Suy ra OP > PC, và như thế, trong ΔCOP, ta có $\widehat{PCO} > \delta$. Bấy giờ, do

$$\alpha = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}(180^0 - 2\widehat{PCO}) = 90^0 - \widehat{PCO},$$

ta suy ra được $\alpha + \delta < 90^0$.



Bài 2. (2001)

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Prove that

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

for all positive real numbers a, b and c.

Hướng dẫn:

Trước tiên, ta chú ý bất đẳng thức Cauchy - Schwarz sau:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leq\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2.$$

Bây giờ, ta đặt

$$a'=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},\ b'=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}},\ c'=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}},$$

$$x_1^2=\frac{a}{a'},\ x_2^2=\frac{b}{b'},\ x_3^2=\frac{c}{c'},$$

$$y_1^2=a.a',\ y_2^2=b.b',\ y_3^2=c.c',$$

và suy ra $x_1y_1=a,\ x_2y_2=b,\ x_3y_3=c$. Khi đó, từ bất đẳng thức Cauchy - Schwarz nói trên ta được:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\geq(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\geq\frac{(a+b+c)^2}{aa'+bb'+cc'}. \tag{1}$$

Tiếp đến, ta lại đặt

$$X_1=\sqrt{a},\ X_2=\sqrt{b},\ X_3=\sqrt{c},$$

$$Y_1=\sqrt{a}.a',\ Y_2=\sqrt{b}.b',\ Y_3=\sqrt{c}.c',$$

và cũng áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz để có:

$$(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3)^2\leq(X_1^2+X_2^2+X_3^2)(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2)$$

$$\Leftrightarrow(aa'+bb'+cc')\leq\sqrt{a+b+c}\sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2}. \tag{2}$$

Các kết quả (1) và (2) cho ta:

$$\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\geq\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2}}. \tag{3}$$

Mặt khác, ta lại có

$$(a+b+c)^{\frac{3}{2}} \geq \sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2}\,. \qquad (4)$$

Thật vậy, (4) tương đương với $(a+b+c)^3 \geq aa'^2+bb'^2+cc'^2$, từ bất đẳng thức này, thay a', b', c' vào rồi khai triển và biến đổi ta được bất đẳng thức tương đương là

$$3(ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2) \geq 18abc$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geq 0,$$

bất đẳng thức hiển nhiên sau cùng này chứng tỏ (4) đúng.

Sau hết, (3) và (4) cho ta

$$\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1,$$

dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Chú ý: *Cũng là áp dụng Bất đẳng thức Cauchy, nhưng ta có thể trình bày theo cách sau:*

Trước hết ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}}, \text{ hay}$$

$$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})^2 > a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc).$$

Bất đẳng thức Cauchy cho ta:

$$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})^2-(a^{\frac{1}{3}})^2 = (b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})$$

$$\geq 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}.\,4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} = 8a^{\frac{2}{3}}bc.$$

Như vậy:

$$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})^2 \geq (a^{\frac{1}{3}})^2+8a^{\frac{2}{3}}bc = a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc),$$

từ đó ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}}.$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} \geq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}, \text{ và}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}},$$

Cọng các bất đẳng thức này lại thì được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Bài 3. (2001)

Hai mươi mốt nữ sinh và hai mươi mốt nam sinh cùng tham gia một kì thi Toán học. Biết rằng:

- Mỗi thí sinh giải được nhiều nhất 6 bài toán.
- Với mỗi cặp bất kì gồm một nữ sinh và một nam sinh, cả hai người này sẽ giải được ít nhất một bài toán.

Chứng minh rằng tồn tại một bài toán sao cho có ít nhất 3 nữ sinh giải được bài này, và cũng có ít nhất 3 nam sinh giải được nó.

Twenty-one girls and twenty-one boys took part in a mathematical contest.

- *Each contestant solved at most six problems.*
- *For each girl and each boy, at least one problem was solved by both of them.*

Prove that there was a problem that was solved by at least three girls and at least three boys.

Hướng dẫn:

Ta sẽ dùng các kí hiệu sau: G là tập hợp các nữ sinh ở cuộc thi và B là tập hợp các nam sinh, P là tập hợp các bài toán, P(g) là tập hợp các bài toán được giải bởi $g \in G$, và P(b) là tập hợp các bài toán được giải bởi $b \in B$. Sau cùng, G(p) là tập hợp các nữ sinh giải bài toán $p \in P$ và B(p) là tập hợp các nam sinh giải bài toán $p \in P$. Theo các kí hiệu này, ta có với mọi $g \in G$ và $b \in B$:

(a) $|P(g)| \leq 6$, $|P(b)| \leq 6$, (b) $P(g) \cap P(b) \neq \varnothing$, ở đây, kí hiệu $|.|$ chỉ số các phần tử của một tập hợp hữu hạn.

Ta muốn chứng minh rằng tồn tại $p \in P$ thoả mãn $|G(p)| \geq 3$ và $|B(p)| \geq 3$. Để làm điều đó, ta sẽ giả sử rằng điều ngược lại xảy ra và đi đến mâu thuẫn bằng cách đếm (theo hai cách) tất cả các bộ ba (p, q, r) sao cho $p \in P(g) \cap P(b)$. Với $T = \{(p,q,r): p \in P(g) \cap P(b)\}$, điều kiện (b) cho ta:

$$|T| = \sum_{g \in G} \sum_{b \in B} |P(g) \cap P(b)| \geq |G|.|B| = 21^2. \quad (1)$$

Giả sử không có $p \in P$ nào thoả mãn $|G(p)| \geq 3$ và $|B(p)| \geq 3$. Ta bắt đầu bằng cách chú ý rằng:

$$\sum_{p \in P} |G(p)| = \sum_{g \in G} |P(g)| \leq 6|G| \text{ và } \sum_{p \in P} |B(p)| \leq 6|B|. \quad (2)$$

Chú ý: Đẳng thức trong (2) có được bởi kĩ thuật sau: Gọi $\chi(p, q) = 1$ nếu g giải bài toán p và $\chi(p,q) = 0$ nếu ngược lại, và thay đổi thứ tự của dấu tổng trong $\sum_{p \in P} \sum_{g \in G} \chi(q,p)$. Đặt

$$P_+ = \{p \in P: |G(p)| \geq 3|\},\ P_- = \{p \in P: |G(p)| \leq 2\}.$$

Mệnh đề: $\sum_{p \in P_-} |G(p)| \geq |G|$, do đó $\sum_{p \in P_+} |G(p)| \leq 5|G|$.

Cũng thế, $\sum_{p \in P_+} |B(p)| \geq |B|$, do đó $\sum_{p \in P_-} |B(p)| \leq 5|B|$.

Chứng minh. Lấy $g \in G$ bất kì. Theo Nguyên lí Dirichlet, từ các điều kiện (a) và (b) suy ra rằng g giải bài toán p mà bài này được giải bởi ít nhất $[21/6] = 4$ nam sinh. Do giả thiết, $|B(p)| \geq 4$ nên $p \in P$, cho nên mỗi nữ sinh giải ít nhất một bài toán trong P_-. Dó đó

$$\sum_{p \in P_-} |G(p)| \geq |G|. \quad (3)$$

Theo (2) và (3) ta có

$$\sum_{p \in P_+} |G(p)| = \sum_{p \in P} |G(p)| = \sum_{p \in P} |G(p)| \leq 5|G|.$$

Cũng thế, mỗi nam sinh giải một bài toán mà bài này được giải bởi ít nhất bốn nữ sinh, cho nên mỗi nam sinh giải một bài toán $p \in P_+$. Như thế $\sum_{p \in P_+} |B(p)| \geq |B(p)|$, và sau đó, tiến hành phép tính toán như trên bằng cách sử dụng (2).

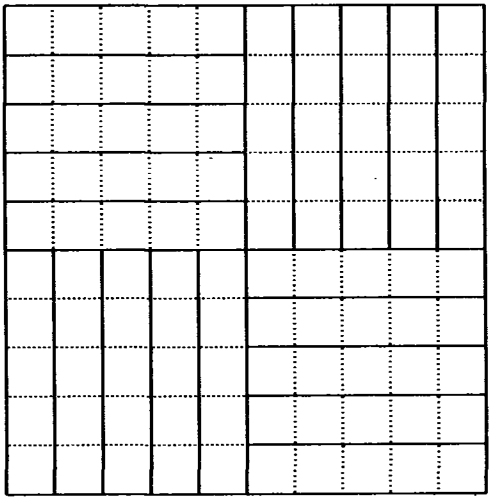
Sử dụng mệnh đề vừa chứng minh trên, ta thấy

$$|T| = \sum_{p \in P} |G(p)| . |B(p)| = \sum_{p \in P_+} |G(p)| . |B(p)| + \sum_{p \in P_-} |G(p)| . |B(p)|$$

$$\leq 2 \sum_{p \in P_+} |G(p)| + 2 \sum_{p \in P_-} |B(p)| \leq 10|G| + 10|B| = 20 \times 21.$$

Điều này mâu thuẫn với (1), nên ta có điều phải chứng minh.

Cách 2:



Trước tiên, ta chú ý rằng kết quả đòi hỏi ở đề toán đúng trong trường hợp 20 nữ sinh và 20 nam sinh tham gia cuộc thi, nói nôm na, bài toán đúng cho một khối 20×20. Thật vậy, ta tạo 20 hình chữ nhật, mỗi hình có kích thước 2×10 và đánh số 1, 2, ... , 20. Ta chia khối 20×20 này thành 4 khối (mỗi khối là 10×10). Ở bên trên và phía trái, ta đặt nằm ngang 5 hình chữ nhật 2×10, cũng đặt như thế với bên dưới và phía phải. Còn ở bên trên, phía phải và bên dưới phía trái, ta đặt mỗi khối như thế gồm 5 hình chữ nhật 2×10 theo chiều đứng (*xem hình*) . Bây giờ, ở mỗi hàng sẽ gồm phần giao của 5 hình chữ nhật đứng và 1 hình chữ nhật ngang. Nói cách khác, mỗi hàng chứa 6 số khác nhau. Tương tự như thế, mỗi cột cũng chứa 6 số khác nhau. Nhưng mỗi số bất kì đã cho hoặc là sẽ nằm trong 10 hàng và 2 cột, hoặc là ngược lại, vì thế không có số nào nằm trong 3 hàng và 3 cột. Điều này chứng tỏ rằng bài toán cho một khối 20×20.

Trở lại trường hợp khối 21×21, ta giả sử rằng một sự sắp xếp được gọi là *chấp nhận được* nếu không có số nguyên nào nằm ở ít nhất 3 hàng và ít nhất 3 cột. Ta tô màu trắng một ô vuông nhỏ nếu ô này chứa số nguyên xuất hiện ở tối thiểu 3 hàng, và tô màu đen một ô vuông nhỏ nếu ô này chứa số nguyên xuất hiện ở chỉ 1 hoặc hai hàng. Ta đếm các ô vuông màu trắng và màu đen.

Mỗi hàng có 21 ô và chứa nhiều nhất là 6 số nguyên khác nhau. Ta có 6 × 3 < 21, vì vậy, trong mỗi hàng phải có chứa một số mà số này xuất hiện tối thiểu 3 lần; suy ra số đó nằm ở quá lắm là 2 hàng. Do đó, có tối đa 5 số khác nhau trong mỗi hàng mà mỗi một trong những số này xuất hiện ở ít nhất 3 hàng. Mỗi số nguyên này có thể xuất hiện tối đa là 2 lần trong cùng một hàng, vì thế có tối đa 5 × 2 = 10 ô màu trắng trong một hàng. Điều này đúng cho tất cả các hàng, do vậy tổng cọng có tối đa 210 ô được tô màu trắng.

Tương tự, trong bất kì một cột đã cho, có nhiều nhất 6 số nguyên khác nhau, và do đó, phải tồn tại một số xuất hiện ít nhất 3 lần. Vì vậy, có nhiều nhất là 5 số khác nhau mà mỗi số xuất hiện ở tối đa 2 cột. Mỗi số như thế có thể chiếm nhiều nhất 2 ô vuông trong mỗi cột, do đóéntong mỗi cột, có nhiều nhất 5 × 2 = 10 ô được tô màu đen. Điều này đúng cho tất cả các cột, do vậy tổng cọng có tối đa 210 ô được tô màu đen.

Đến đây, ta có điều mâu thuẫn, vì 210 + 210 < 441.

Nhận xét:

Trong cách giải thứ hai này, bài toán về các thí sinh đã chuyển về bài toán tô màu trên những ô vuông. Cách giải này mang tính tổng quát hơn, và nếu theo dõi kĩ từng điểm một trong lí luận, cách giải đẹp hơn và dễ hiểu hơn. Đằng khác, từ lí luận đó, bạn đọc có thể tổng quát hoá bài toán như sau:

Trong một khối 4N+1 × 4N+1 được đánh số (như trên), sao cho trong mỗi hàng và mỗi cột có nhiều nhất là N+1 số khác nhau, sẽ tồn tại một số nào đó xuất hiện ở ít nhất 3 hàng và ít nhất 3 cột.

Tuy nhiên, về mặt tổng quát, điều này không đúng cho trường hợp 4N × 4N (N *là số tự nhiên*).

Bài 4. (2001)

Cho n là số nguyên lẻ lớn hơn 1 và gọi $k_1, k_2, ..., k_n$ là các số nguyên. Với mỗi một trong $n!$ hoán vị $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ của tập {1, 2, ... n}, ta đặt $S(a) = a_1 \times k_1 + a_2 \times k_2 + ... + a_n \times k_n$.

Chứng minh rằng tồn tại các hoán vị a, b của tập hợp {1, 2, ..., n} sao cho $n!$ là một ước số của $S(a) - S(b)$.

Let n be an odd integer greater than 1, and let $k_1, k_2, ..., k_n$ *be* *given integers. For each of the* $n!$ *permutations* $a=(a_1, a_2, ..., a_n)$ *of* $\{1, 2, ..., n\}$*, let* $S(a)=a_1\times k_1+a_2\times k_2+...+a_n\times k_n$*. Prove that there are two permutations a and b, such that* $n!$ *is a divisor of* $S(a)-S(b)$.

Hướng dẫn:

Gọi $\Sigma S(a)$ là tổng của $S(a)$ khi a chạy trên tất cả $n!$ hoán vị

$$a=(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Trong $\Sigma S(a)$, k_1 được nhân với mỗi $h \in \{1, ..., n\}$ cả thảy $(n - 1)!$ lần, một lần với mỗi hoán vị của $\{1, ..., n\}$ trong đó $a_1 = n$. Như thế hệ số của k_1 trong $\Sigma S(a)$ là

$$(n - 1)!\,(1 + 2 +... + n) = (n + 1)! / 2.$$

Điều tương tự cũng đúng với mọi k_i, cho nên ta có:

$$\Sigma S(a) = \frac{(n+1)!}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i. \tag{1}$$

Nếu $n!$ không phải là ước của $S(a)-S(b)$ với mọi hoán vị $a \neq b$, thì mỗi $S(a)$ phải có n số dư khác nhau (mod $n!$). Vì có $n!$ hoán vị, nên những số dư này phải chính là 0, 1, 2, ..., $n! - 1$. Do đó

$$\Sigma S(a) \equiv \frac{(n!-1).n!}{2} \pmod{n!}. \tag{2}$$

Kết hợp (1) và (2), ta có:

$$\frac{(n+1)!}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i \equiv \frac{(n!-1).n!}{2} \pmod{n!}. \tag{3}$$

Bây giờ, vì n lẻ, vế trái của (3) sẽ đồng dư với 0 theo mod $n!$, trong khi với $n > 1$ thì vế phải không đồng dư với 0 ($n! - 1$ là lẻ). Với $n >1$ và lẻ, ta gặp phải điều mâu thuẫn.

Bài 5. (2001)

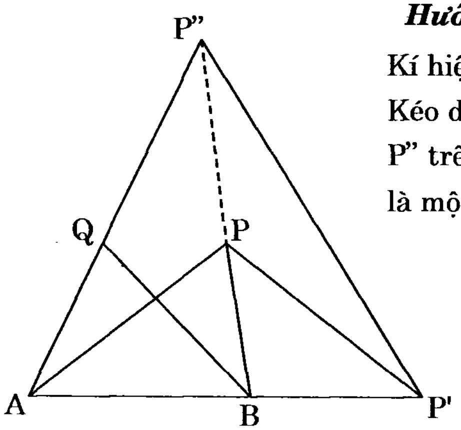
Gọi ABC là một tam giác có $\widehat{BAC} = 60^0$. Gọi AP là phân giác góc BAC và BQ là phân giác góc ABC sao cho P ở trên BC, Q ở trên AC. Giả sử AB + BP = AQ + QB.

Hỏi số đo của các góc tam giác ABC ?

In a triangle ABC, let AP bisect BAC, with P on BC, and let BQ bisect ABC, with Q on CA. It is known that $\widehat{BAC} = 60^0$ *and that*

$$AB + BP = AQ + QB.$$

What are the possible angles of triangle ABC ?



Hướng dẫn:

Kí hiệu các góc của ABC bởi $\alpha = 60^0$, β và γ. Kéo dài AB tới P' sao cho BP' = BP và dựng P" trên AQ sao cho AP" = AP'. Thế thì BP'P là một tam giác cân có góc ở đáy bằng $\beta/2$.

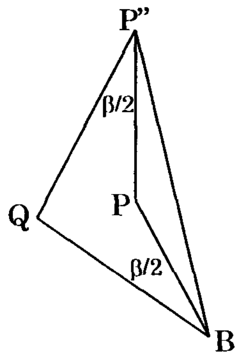
Do AQ + BP' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB, suy ra rằng QP" = QB. Vì AP'P" là một tam giác đều và AP là phân giác góc A, nên ta có

$$PP' = PP".$$

Bổ đề: Các điểm B, P, P" thẳng hàng, do đó P" trùng với C.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng BPP" là một tam giác không suy biến. Ta có

$$\angle PBQ = \angle PP'B = \angle PP"Q = \beta/2.$$



Hình vẽ bên cho thấy P và Q ở cùng một phía đối với BP", ngoài ra, còn trường hợp P ở phía bên kia của BP".

Trong mỗi trường hợp, giả thiết BPP" không suy biến đều dẫn đến BP = PP" = PP', như thế đưa đến kết luận rằng BPP' là một tứ giác và rốt cục đi đến nghịch lí:

$$\beta/2 = 60^0, \text{ cho ta } \alpha + \beta = 60^0 + 120^0 = 180^0.$$

Do đó, các điểm B, P, P" thẳng hàng và P" = C như đòi hỏi.

Vì tam giác BCQ cân, nên $120^0 - \beta = \gamma = \beta/2$, ta suy ra

$$\beta = 80^0 \text{ và } \gamma = 40^0.$$

Vậy ABC là tam giác có các góc là 60^0, 80^0 và 40^0.

Cách 2:

Không mất tính tổng quát, có thể cho AB = 1. Đặt góc ABQ = x. Chú ý rằng bây giờ ta có thể giải cho hai tam giác APB và AYB. Đặc biệt, dùng Định lí hàm sin, ta có

$$BP = \frac{\sin 30^0}{\sin(150^0 - 2x)},\ AQ = \frac{\sin x}{\sin(120^0 - 2x)},\ YQ = \frac{\sin 60^0}{\sin(120^0 - x)}.$$

Sử dụng các công thức lượng giác như $\sin(a + b)$, v. v..., và đặt $s = \sin x$, $c = \cos x$, ta được:

$$2\sqrt{3}\ s^2c - 4sc - 2\sqrt{3}\ c^3 + 2\sqrt{3}c^2 + 6sc - 2s - \sqrt{3} = 0 \text{ hay}$$

$$-\sqrt{3}\ (4c^3 - 2c^2 - 2c + 1) = 2s.(2c^2 - 3c + 1) = 2s.(2c - 1)(c - 1).$$

Từ đó $c = \frac{1}{2}$ hay

$$-\sqrt{3}\ (2c^2 - 1) = 2s.(c - 1). \qquad (*)$$

Nếu $c = \frac{1}{2}$, ta được $x = 60^\circ$ hay góc B = 120°. Nhưng trong trường hợp này các cạnh đối diện của hai đỉnh A và B song song nhau nên tam giác ABC suy biến. Do vậy, ta có (*), bình phương hai vế của (*) và để ý rằng $s^2 = 1 - c^2$, ta nhận được:

$$16c^4 - 8c^3 - 12c^2 + 8c - 1 = 0.$$

Vế trái đẳng thức này có nhân tử $2c - 1$. Do đó ta có:

$$8c^3 - 6c + 1 = 0.$$

Nhưng vì $4c^3 - 3c = \cos 3x$, nên ta được $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

Từ đó ta được các nghiệm

$$x = 40^\circ, 80^\circ, 160^\circ, 200^\circ, 280^\circ, 320^\circ.$$

Nhưng ta phải có $x < 60^\circ$ để tam giác ABC không suy biến. Suy ra góc B bằng $2x = 80^\circ$.

Bài 6. (2001)

Cho các số nguyên dương *a, b, c, d* với $a > b > c > d > 0$.

Giả sử $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$.

Chứng minh rằng $ab + cd$ không phải là số nguyên tố.

Let a, b, c, d be integers with $a > b > c > d > 0$.

Suppose that $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$.

Prove that $ab + cd$ is not prime.

Hướng dẫn:

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2. \qquad (1)$$

Xét tứ giác ABCD với AB = a, BC = d, CD = b, AD = c,

$\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BCD} = 120^\circ$, $BD^2 = a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$, một tứ giác như thế rõ ràng tồn tại trên cơ sở có (1) và Định lí hàm cosin. Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$, suy ra $\widehat{CDA} = 180^0 - \alpha$. Định lí hàm cosin trong các tam giác ABC và ACD cho ta:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = AC^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha.$$

Từ đó, $2\cos\alpha = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$ và

$$AC^2 = a^2 + d^2 - ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Vì ABCD nội tiếp nên Định lí Ptolémé cho ta $(AC.BD)^2 = (ab + cd)^2$, suy ra

$$(ac + bd)(a^2 - ac + c^2) = (ab + cd)(ad + bc). \qquad (2)$$

Tiếp theo, từ giả thiết, ta có $(a - d)(b - c) > 0$, $(a - b)(c - d) > 0$, từ hai bất đẳng thức này dễ dàng suy ra được

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc. \qquad (3)$$

Bây giờ, giả sử ngược lại rằng $ab + cd$ là số nguyên tố. Khi đó, từ (3), suy ra rằng $ab + cd$ và $ac + bd$ nguyên tố cùng nhau. Do vậy, (2) cho ta kết luận $ad + bc$ chia hết cho $ac + bd$, điều này không thể xảy ra vì đã có (3). Ta có đpcm.

Cách 2:

Trước tiên, ta để ý rằng $ab + cd > ac + bd > ad + bc$, bởi vì:

$$(ab + cd) - (ac + bd) = (a - d)(b - c) > 0,$$

$$(ac + bd) - (ad - bc) = (a - b)(c - d) > 0.$$

Khai triển và sắp xếp lại, hệ thức ở đề bài trở thành:

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2.$$

Suy ra

$$(ac + bd)(b^2 + bd + d^2) = ac(b^2 + bd + d^2) + bd(a^2 - ac + c^2)$$

$$= acb^2 + acd^2 + a^2bd + bc^2d = (ab + cd)(ad + bc).$$

Nói cách khác, $(ac + bd)$ chia hết $(ab + cd)(ad + bc)$.

Bây giờ, ta giả sử $ab + cd$ là số nguyên tố. Số này lớn hơn $ac + bd$, nên nó không thể có ước số chung với $ac + bd$. Suy ra $ac + bd$ phải chia hết số nguyên $ad + bc$ bé hơn. Điều này mâu thuẫn.

Chú ý: *Có thể tìm được các số nguyên a, b, c, d thoả mãn điều kiện đề bài, chẳng hạn, 11, 9, 5, 1 ; 21, 18, 14, 1 và 65, 50, 34, 11.*

43^{rd} IMO, Glasgow, United Kingdom

24 - 25 July, 2002

Bài 1. (2002)

Cho n là số nguyên dương. Gọi T là tập các điểm (x, y) trong mặt phẳng, với x và y là các số nguyên không âm và $x + y < n$.

Mỗi điểm của T được tô màu xanh hoặc đỏ. Nếu như điểm (x, y) có màu đỏ, thì tất cả các điểm (x', y') mà $x' \leq x$ và $y' \leq y$ của T cũng mang màu đỏ.

Ta gọi một X-tập là tập hợp con của T gồm n điểm màu xanh có các hoành độ (*thành phần toạ độ thứ nhất*) khác nhau, và ta định nghĩa mộtY-tập là tập hợp con của T gồm n điểm màu xanh có các tung độ (*thành phần toạ độ thứ hai*) khác nhau.

Chứng minh rằng số tất cả các X-tập bằng số tất cả các Y -tập.

Let n be a positive integer. Let T be the set of points (x, y) in the plane where x and y are non-negative integers and x + y < n.

Each point of T is coloured red or blue. If a point (x, y) is red, then so are all points (x', y') of T with both $x' \leq x$ and $y' \leq y$.

Define an X-set to be a set of n blue points having distinct x-coordinates, and a Y -set to be a set of n blue points having distinct y-coordinates.

Prove that the number of X-sets is equal to the number of Y -sets.

Hướng dẫn:

Để giản tiện, ta sẽ gọi các X-tập là các tập con loại một của T, và gọi các Y-tập là các tập con loại hai của T. Cho a_i là số tất cả các điểm mang màu xanh (h, k) trong T mà $h = i$, gọi b_i là số tất cả các điểm mang màu xanh (h, k) trong T mà $k = i$. Để giải bài toán, ta cần chứng minh rằng $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ chính là sự sắp xếp lại của các $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ (vì số các tập con loại một là tích của các a_i, còn số các tập con loại hai là tích của các b_i).

Gọi c_i là số k lớn nhất sao cho điểm (i, k) có màu đỏ. Nếu (i, k) mang màu xanh với mọi k thì ta đặt $c_i = -1$. Chú ý rằng nếu $i < j$, thì $c_i \geq c_j$, bởi vì nếu (j, c_i) mang màu đỏ thì điểm (i, c_i) cũng vậy. Ta cũng có (i, k) mang màu đỏ với $k \leq c_i$, do đó, dãy $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ xác định hoàn toàn cho màu sắc các điểm của tập T.

Ta gọi S_i là tập hợp mang màu sắc xác định bởi dãy

$$c_0, c_1, \ldots, c_i, -1, \ldots, -1,$$

khi đó, $S_{n-1} = T$. Ta cũng gọi S_{-1} là tập hợp mang màu sắc xác định bởi dãy -1, -1, ... , -1, như thế tập này có các điểm đều mang màu xanh. Dùng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng kết quả sắp xếp lại nói trên là đúng cho tập S_{-1} và nếu như nó đã đúng cho S_i thì cũng sẽ đúng cho S_{i+1}. Kết quả cho S_{-1} khá hiển nhiên, vì cả a_i lẫn b_i đều là

$$n, n-1, \ldots, 2, 1.$$

Tiếp theo, ta giả sử kết quả đúng cho S_i (với $i < n-1$). Điểm khác nhau duy nhất giữa những điểm a_j trong S_i và trong S_{i+1}, đó là: trong S_i ta có $a_{i+1} = n-i-1$, còn trong S_{i+1} thì $a_{i+1} = (n-i-1) - (c_{i+1} + 1)$. Nói cách khác, số $n-i-1$ được thay bằng số $n-i-c-2$, với $c = c_{i+1}$. Đối với các số b_i, thì sự khác biệt là đem mỗi sốtừ các số $b_0, b_1, \ldots, b_c$ trừ đi cho 1. Mà các số này thì bằng $n-i-1, n-i-1, n-i-2, \ldots, n-i-c-1$. Vì thế, kết quả của việc đem các số này trừ đi cho 1 chính là thay số $n-i-1$ bằng số $n-i-c-2$, nghĩa là, cũng giống như khi làm với các số a_j. Như, vậy, kết quả sắp xếp lại nói trên là đúng cho tập S_{i+1}. Suy ra nó cũng đúng cho tập T, đpcm.

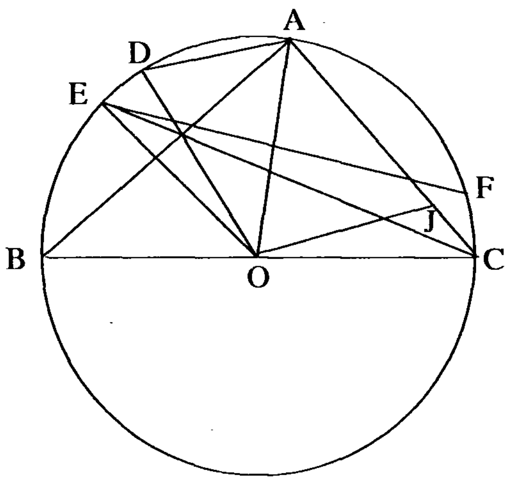
Bài 2. (2002)

Gọi BC là một đường kính của đường tròn (T) có tâm O. Gọi A là điểm trên (T) sao cho $0^0 < \widehat{AOB} < 120^0$. Cho D là trung điểm của cung AB không chứa điểm C. Đường thẳng qua O và song song với DA cắt đường thẳng AC tại J. Đường trung trực của OA gặp đường tròn (T) tại E và F. Hãy chứng minh rằng J là tâm vòng nội tiếp tam giác CEF.

Let BC be a diameter of the circle (T) with centre O. Let A be a point on (T) such that $0^0 < \widehat{AOB} < 120^0$. Let D be the midpoint of the arc AB not containing C. The line through O parallel to DA meets the line

AC at J. The perpendicular bisector of OA meets (T) at E and at F. Prove that J is the incentre of the triangle CEF.

Hướng dẫn:



Ta có F cách đều A và O. Mà OF = OA, do đó OFA là tam giác đều, suy ra góc AOF = 60°. Từ giả thiết, ta có góc AOC > 60°, do đó, F nằm giữa A và C. Từ đó, tia CJ nằm giữa hai tia CE và CF.

Điểm D là trung điểm cung AB nên ta có

$$D\hat{O}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = A\hat{C}B.$$

Suy ra DO song song với AC. Nhưng OJ song song với AD, do đó AJOD là hình bình hành. Từ đó AJ = OD. Vậy AJ = AE = AF, như thế J nằm về phía đối với A qua EF và suy ra nó nằm cùng phía với C. Do đó J phải nằm bên trong tam giác CEF.

Cũng vậy, vì EF là trung trực của AO, nên AE = AF = OE, do đó A là tâm đường tròn đi qua 3 điểm E, F và J. Suy ra

$$E\hat{F}J = \frac{1}{2}E\hat{A}J.$$

Nhưng góc EAJ = góc EAC = góc EFC. Vậy J nằm trên phân giác góc EFC. Vì EF vuông góc với AO, A là trung điểm của cung EF. Suy ra góc ACE = góc ACF, do đó J nằm trên phân giác góc ECF.

Vậy J là tâm vòng nội tiếp tam giác CEF.

Chú ý: Giả thiết $0^0 < A\hat{O}B < 120^0$ rất quan trọng để chứng tỏ J nằm bên trong tam giác CEF. Học sinh sẽ mất điểm nếu không chứng tỏ được điều này.

Bài 3. (2002)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) với $m, n \geq 3$ để tồn tại vô hạn các số nguyên dương x sao cho

$$\frac{x^m + x - 1}{x^n + x^2 - 1}$$

là một số nguyên.

Find all pairs of integers $m, n \geq 3$ such that there exist infinitely many positive integers x for which

$$\frac{x^m + x - 1}{x^n + x^2 - 1}$$

is an integer.

Hướng dẫn:

Hai số nguyên tìm được là $m = 5$, $n = 3$.

Thật vậy, hiển nhiên là $m > n$. Gọi $q(x)$, $r(x)$ là các đa thức có hệ sô nguyên và $r(x)$ có bậc $< n$ sao cho

$$x^m + x - 1 = q(x)\,(x^n + x^2 - 1) + r(x).$$

Khi đó, $(x^n + x^2 - 1)$ chia hết $r(x)$ với vô hạn các số nguyên dương x. Nhưng khi x đủ lớn, $(x^n + x^2 - 1) > r(x)$ vì $r(x)$ có bậc nhỏ hơn. Do đó $r(x)$ phải bằng 0. Vậy $x^m + x - 1$ được phân tích thành $q(x).(x^n + x^2 - 1)$, ở đây $q(x) = x^{m-n} + a_{m-n-1}x^{m-n-1} + ... + a_0$.

Ta có $(x^m + x - 1) = x^{m-n}(x^n + x^2 - 1) + (1 - x)(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1)$, do đó $(x^n + x^2 - 1)$ phải chia hết $(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1)$. Vì vậy, đặc biệt, $m \geq 2n - 1$. Cũng vậy, $(x^n + x^2 - 1)$ phải chia hết

$$(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1)(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1) - x^{m-2n+1}(x^n + x^2 - 1)$$
$$= x^{m-n} - x^{m-2n+3} + x^{m-2n+1} - 1. \qquad (*)$$

Ta có thể viết (*) thành $x^{m-2n+3}(x^{n-3} - 1) + (x^{m-(2n-1)} - 1)$, biểu thức này âm với mọi $x \in (0, 1)$, trừ khi $n - 3 = 0$ và $m - (2n - 1) = 0$. Như vậy, trừ khi $n = 3$, $m = 5$, (*) không có nghiệm thuộc (0, 1). Thế nhưng, $(x^n + x^2 - 1)$ (ước của (*)) lại có nghiệm trong (0, 1), bởi vì nó nhận giá trị -1 tại $x = 0$ và +1 tại $x = 1$. Vậy ta phải có $n = 3$, $m = 5$.

Dễ dàng kiểm tra được $n = 3$, $m = 5$ thoả mãn điều kiện đề bài.

Cách 2:

Tiến hành như trên cho tới (*).

Nếu $m = 2n - 1$, (*) trở thành $x^{n-1} - x^2$. Lúc đó, nếu $n = 3$, (*) bằng 0 và ta tìm được $m = 5$, $n = 3$ thoả mãn đề bài.

Khi $n > 3$, ta viết

$$x^{n-1} - x^2 = x^2(x^{n-3} - 1).$$

Đa thức trên vô nghiệm trong (0, 1), mà ($x^n + x^2 - 1$) lại có nghiệm trong (0, 1), bởi vì nó nhận giá trị -1 tại $x = 0$ và +1 tại $x = 1$, do đó ($x^n + x^2 - 1$) không thể là ước của (*).

Nếu $m > 2n - 1$, thì (*) có thể được viết thành

$(x - 1)(x^{m-n-1} + x^{m-n-2} + ... + x^{m-2n+3} + x^{m-2n} + x^{m-2n-1} + ... + 1)$.

Như trên, đa thức này vô nghiệm trong (0, 1), mà ($x^n + x^2 - 1$) lại có nghiệm trong (0, 1), nên ($x^n + x^2 - 1$) không thể là ước của (*).

Tóm lại, ta chỉ tìm được $m = 5$, $n = 3$ thoả mãn đề bài.

Bài 4. (2002)

Gọi n là số nguyên lớn hơn 1. Gọi $d_1, d_2, ..., d_k$ là các ước số của n thoả mãn điều kiện $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Đặt

$$D = d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1}d_k.$$

(a) Chứng minh rằng $D < n^2$.

(b) Xác định tất cả các số n sao cho D là ước số của n^2.

Let n be an integer greater than 1. The positive divisors of n are $d_1, d_2, ..., d_k$ *where* $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. *Define*

$$D = d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1}d_k.$$

(a) Prove that $D < n^2$.

(b) Determine all n for which D is a divisor of n^2.

Hướng dẫn:

a) Ta có $d_{k+1-n} \le \frac{n}{m}$, do đó $D < n^2\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ...\right)$.

Ta lại có

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = 1.$$

Vậy $D < n^2$.

b) Hiển nhiên rằng D chia hết n^2 với n là số nguyên tố.

Ta giả sử n là hợp số.

Gọi p là số nguyên tố bé nhất chia hết n. Khi đó, $D > \frac{n^2}{p}$.

Nhưng ước số khác 1 bé nhất của n^2 là p, nên nếu D chia hết n^2

thì $D \le \dfrac{n^2}{p}$. Vậy nếu n là hợp số thì D không thể chia hết n^2.

Tóm lại, tất cả các số n sao cho D là ước số của n^2 là các số nguyên tố.

Bài 5. (2002)

Tìm tất cả các hàm f đi từ tập R các số thực vào chính nó sao cho $(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu)$ với mọi x, y, u, v thuộc R.

Find all functions f from the set R of real numbers to itself such $(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu)$ *for all x, y, u, v in R.*

Hướng dẫn:

Trả lời: có 3 hàm số thoả mãn đề bài là:

(1) $f(x) = 0$ với mọi x;

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2}$ với mọi x;

(3) $f(x) = x^2$.

Chứng minh:

Cho $x = y = 0$, $u = v$, ta có $4f(0)f(u) = 2f(0)$. Như thế, hoặc

$f(u) = \dfrac{1}{2}$ với mọi u; hoặc $f(0) = 0$.

Kiểm tra, ta thấy $f(u) = \dfrac{1}{2}$ với mọi u chắc chắn là một nghiệm.

Ta giả sử $f(0) = 0$. Đặt $y = v = 0$, ta có

$$f(x).f(u) = f(xu). \qquad (*)$$

Đặc biệt, thay $x = u = 1$, ta có $f(1)^2 = f(1)$. Vậy $f(1) = 0$ hoặc 1. Giả sử $f(1) = 0$. Thay $x = y = 1$, $v = 0$, ta được $0 = 2f(u)$, do đó $f(x) = 0$ với mọi x. Kiểm tra, ta thấy $f(x) = 0$ với mọi x chắc chắn là một nghiệm. Do đó ta giả sử $f(1) = 1$. Thay $x = 0$, $u = v = 1$ ta có $2f(y) = f(y) + f(-y)$, suy ra $f(-y) = f(y)$. Đẳng thức này cho phép ta chỉ cần xét $f(x)$ khi x dương. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $f(r) = r^2$ với r hữu tỉ. Đầu tiên ta chứng minh $f(n) = n^2$ với n là số nguyên. Ta sử dụng phương pháp quy nạp theo n. Dễ thấy điều này đúng khi $n = 0$ và 1. Giả sử nó cũng đúng cho $n - 1$ và cho n. Khi đó, đặt $x = n$, $y = u = v = 1$, ta được:

$$2f(n) + 2 = f(n - 1) + f(n + 1),$$

do đó

$$f(n+1) = 2n^2 + 2 - (n-1)^2 = (n+1)^2,$$

vậy mệnh đề đúng cho $n+1$.

Bây giờ, từ (*) ta suy ra $f(n)f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)$, nên $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m^2}{n^2}$ đúng với mọi số nguyên m, n.

Vậy ta đã chứng minh được $f(r) = r^2$ với mọi số hữu tỉ r.

Từ (*), ta cũng có $f(x^2) = [f(x)]^2 \geq 0$, do đó $f(x) \geq 0$ với mọi $x > 0$, và suy ra cho mọi x. Thay $u = y$, $v = x$, ta có

$$(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2), \text{ do đó}$$

$$f(x^2 + y^2) = f^2(x) + f^2(y) + 2f(x)f(y),$$

(ở đây, $f^2(x)$ là kí hiệu của $[f(x)]^2$). Với mọi $u > v > 0$, ta có thể đặt $u = x^2 + y^2$, $v = x^2$ và suy ra $f(u) \geq f(v)$. Nói cách khác, f là hàm số tăng. Do đó, với mọi x ta có thể chọn một dãy số hữu tỉ r_n mà chúng bé hơn x, hội tụ đến x và rồi chọn một dãy thứ hai s_n các số hữu tỉ lớn hơn x và hội tụ đến x. Lúc đó, $r_n^2 = f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n) = s_n^2$, với mọi x, suy ra

$$f(x) = x^2.$$

Bài 6. (2002)

Let (C_i), i = 1, 2, ..., n, là n đường tròn bán kính 1 trong mặt phẳng, với $n \geq 3$. Kí hiệu các tâm tương ứng của các đường tròn đó là O_1, O_2, . . . , O_n. Giả sử rằng không có đường thẳng nào có thể cắt được nhiều hơn 2 đường tròn trong số các đường tròn đó. Chứng minh rằng

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Let (C_i), i = 1, 2, ..., n, be circles of radius 1 in the plane, where $n \geq 3$. Denote their centres by O_1, O_2, . . . , O_n respectively. Suppose that no line meets more than two of the circles. Prove that

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Hướng dẫn:

Các tiếp tuyến từ O_1 đến các đường tròn (C_i) chứa một góc $2x$, với

$$\sin x = \frac{1}{O_1O_i}.$$

Do đó $$2x > \frac{2}{O_1O_i}.$$

Các phần hình tròn này không đè lên nhau, do đó

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{O_1O_i} < \pi.$$

Các bất đẳng thức tương tự như thế cũng xảy ra khi ta thay vai trò của O_1 cho các tâm O_2, O_3, ..., cọng chúng lại thì nhận được

$$4 \sum_{1\le i\le j\le n} \frac{1}{O_iO_j} < n\pi \Leftrightarrow \sum_{1\le i\le j\le n} \frac{1}{O_iO_j} < \frac{n\pi}{4},$$

tuy nhiên, bất đẳng thức này chưa đúng như đòi hỏi.

Đầu tiên, ta chú ý rằng sẽ tốt hơn nếu ta xét góc $O_iO_1O_j$ thay vì góc giữa các tiếp tuyến đối với một đường tròn. Dễ dàng chứng minh được rằng góc này phải lớn hơn cả $2/O_1O_i$ lẫn $2/O_1O_j$. Hai tiếp tuyến chung của C_1 và C_i sẽ giao nhau tại trung điểm của O_1O_i.

Góc tạo bởi đường thẳng nằm giữa và một trong hai tiếp tuyến bé nhất là $2/O_1O_i$. Không có phần nào của hình tròn (C_j) có thể cắt ngang đường thẳng này, do đó tâm O_j của nó không thể gặp đường thẳng song song với tiếp tuyến qua O_1. Nói cách khác, góc $O_iO_1O_j$ bé nhất cũng phải bằng $2/O_1O_i$. Lí luận tương tự, góc $O_iO_1O_j$ bé nhất cũng phải bằng

$$\frac{2}{O_1O_j}.$$

Bây giờ ta xét bao lồi của n điểm O_i. Ta có bao lồi này được tạo thành bởi m điểm trong số n điểm đó, với $m \le n$ và tổng các góc trong m - giác lồi là $(m-2)\pi$. Giả sử O_1 là một đỉnh của bao lồi này và góc ở đỉnh đó là θ_1. Để thuận tiện, ta giả sử các tia O_1O_2, O_1O_3, ... , O_1O_n xếp theo thứ tự sao cho O_2 và O_n là các đỉnh kề với O_1 trong bao lồi đó. Ta có, n-2 góc giữa các tia kề nhau có tổng bằng θ_1. Do đó ta có

$$\sum \frac{2}{O_1O_i} < \theta_1 ,$$

ở đây, tổng này chỉ lấy từ 1 đến n-2 cho chỉ số i, chứ không đến n-1. Nhưng ta có thể chọn để hạ chỉ số i xuống, vì ta có thể chọn tuỳ ý các góc. Do đó ta hạ khoảng cách dài nhất O_1O_i. [Nếu O_1O_k dài nhất, ta xét ra phía ngoài từ tia đó. Góc $O_{k-1}O_1O_k > 2 / O_1O_{k-1}$, và góc $O_kO_1O_{k+1} > 2 / O_1O_{k+1}$ v. v...]

Bây giờ ta lấy tổng trên khắp các đỉnh của bao lồi. Với bất kì tâm O_i trong bao lồi, ta dùng $\sum_j \frac{2}{O_iO_j} < \pi$ đã chứng minh trong đoạn trước, tổng này có tất cả n-1 số hạng. Vậy ta có

$$\sum_{i,j} \frac{2}{O_iO_j} < (n-2)\pi .$$

Bây giờ, với O_i là một đỉnh của bao lồi, ta phải tăng tổng lớn lắm là một thừa số $\frac{n-1}{n-2}$ để tính đến các số hạng bị bỏ qua. Khi O_i không phải là một đỉnh của bao lồi, hiển nhiên không cần phải tăng. Như vậy tổng đầy đủ là

$$\sum_{i,j} \frac{2}{O_iO_j} < (n-1)\pi .$$

Suy ra điều cần chứng minh.

ĐIỀU LỆ CỦA CUỘC THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ (IMO)

Các điều lệ này được cung cấp bởi Tiến sĩ Walter E. Mientka, thư kí của Ban Tư vấn cho các kì thi Olympic Toán Quốc tế (IMOAB: IMO Advisory Board), giáo sư Toán học thuộc khoa Toán và Thống kê, Đại học đường Lincoln, Nebraska 68588-0658, U.S.A .

Ở đây chúng tôi chỉ lược dịch các điều lệ chung cho IMO, bạn đọc muốn đi sâu vào các điều lệ khác như *Trách nhiệm của các Trưởng đoàn IMO mỗi nước*, *Quỹ hỗ trợ IMO*, v. v... xin tham khảo Internet theo địa chỉ:

http://olympiads.win.tue.nl/imo/imoregul

A. Mục đích của IMO là:

- Phát hiện tài năng, khích lệ niềm say mê Toán học cho giới trẻ ở tất cả các quốc gia;
- Phát triển quan hệ giữa các nhà toán học trên thế giới;
- Tạo cơ hội trao đổi thông tin về chương trình và thực tiễn giáo dục trung học giữa các quốc gia.

B1. Các quốc gia tham dự là các quốc gia được mời. Mỗi quốc gia được mời tham dự có quyền cử một đội tuyển bao gồm 1 trưởng đoàn, 1 phó đoàn và không quá 6 thí sinh.

B2. Các thí sinh không được quá 20 tuổi và không phải là sinh viên ở bất cứ đại học nào hoặc đang theo học ở một trường tương đương.

B3. Nước chủ nhà phải trang trải những phí tổn cho các đội dự thi kể cả trưởng phó đoàn, bao gồm các chi phí ăn ở và chi phí hành chính trong thời gian quy định. Bất kì đội nào (kể cả trưởng và phó đoàn) muốn ở thêm ngoài thời gian quy định, họ phải tự mình lo liệu về mọi thứ.

B4. Các quan sát viên và các thành viên gia đình của đội dự thi có thể đi theo đoàn nhưng phải tự túc hoàn toàn kinh phí. Nếu xét thấy cần thiết, nước chủ nhà có thể đề nghị hạn chế số người ngoài đi theo này.

B5. Nước nào muốn được mời tham dự phải gởi đơn cho Ban Tổ chức kì thi để được chấp nhận.

B6. Mỗi nước được mời tham dự cần phải gởi đến Ban Tổ chức các thông tin theo yêu cầu, đúng thời gian hạn định.

C1. Các nước tham dự có quyền gởi đề dự tuyển và lời giải đến để nước chủ nhà (nước đăng cai) duyệt xét. Các bài toán có thể bao gồm nhiều lĩnh vực khác nhau ở phổ thông. Đề bài và lời giải phải được viết bằng một trong các thứ tiếng Anh, Pháp, Đức, Nga và Tây Ban Nha.

C2. Ban Tổ chức sẽ không phân phát các bài toán dự tuyển nói trên cho thí sinh tham dự.

D1. Cuộc thi diễn ra trong hai ngày, mỗi ngày làm một bài thi trong 4 giờ rưỡi. Mỗi bài thi gồm 3 bài toán, mỗi bài được 7 điểm tối đa.

D2. Bài thi chỉ được phát cho thí sinh vào giờ thi và viết bằng chính ngôn ngữ của mỗi thí sinh.

D3. Mỗi thí sinh làm việc độc lập và trình bày lời giải bằng ngôn ngữ của chính mình (tiếng mẹ đẻ).

D4. Các lời giải của mỗi thí sinh trước hết do Trưởng hoặc Phó đoàn của thí sinh ấy chấm và đánh giá.

D5. Kết quả về điểm số sau cùng sẽ được quyết định bởi Ban Chấm thi (*Coordinators*). Ban Chấm thi do Ban Tổ chức đề xuất. Nếu không nhất trí về điểm số thì Trưởng đoàn chuyển đến cho Ban Giám khảo Quốc tế (*Jury*) quyết định. Điểm số chính thức cuối cùng cho mỗi bài toán của mỗi thí sinh phải được sự nhất trí giữa các Trưởng đoàn và Ban Chấm thi và được Trưởng đoàn của đội có thí sinh đó cùng với một người đại diện trong Ban Chấm thi kí vào.

D6. Tổng số các giải thưởng không được vượt quá một nửa tổng số thí sinh dự thi.

Ngoài các giải nhất, nhì, ba, có thể dành tặng các giải đặc biệt cho thí sinh nào có lời giải ngoài dự kiến của Ban Giám khảo.

D7. Ngoài các giải nhất, nhì, ba thì thí sinh nào đạt được 7 điểm cho ít nhất một bài toán sẽ được cấp giấy Chứng nhận danh dự (*Honorable Mention*).

D8. Mọi thí sinh đều được cấp giấy Chứng nhận có tham gia cuộc thi (*Certificate of Participation*).

E1. Ban Giám khảo (Quốc tế) bao gồm tất cả các Trưởng đoàn, 1 Chủ tịch và 1 Phó Chủ tịch được Ban Tổ chức chỉ định. Phó đoàn có thể thay thế cho Trưởng đoàn. Các quan sát viên muốn dự cuộc họp của Ban Giám khảo phải được Chủ tịch cho phép, nhưng tuyệt đối không được phát biểu hoặc bỏ phiếu. Sau cuộc thi, các Phó đoàn được phép tham dự cuộc họp của Ban Giám khảo nhưng cũng không có quyền phát biểu hoặc bỏ phiếu.

E2. Chủ tịch cũng như mỗi Trưởng đoàn đều có quyền bỏ phiếu. Một kiến nghị sẽ được chấp nhận nếu có đa số phiếu tán thành. Trong trường hợp bắt buộc, Chủ tịch sẽ quyết định.

E3. Ban Giám khảo có thể gặp gỡ và bàn bạc với những người dưới quyền để xem xét những vấn đề cụ thể.

E4. Các cuộc họp của Ban Giám khảo sẽ được nói bằng tiếng Anh là chính. Khi có yêu cầu đặc biệt, các phiên dịch sẽ dịch sang tiếng Pháp, Đức, Nga và một ngôn ngữ tùy ý nào đó miễn là nước chủ nhà đáp ứng được.

E5. Mỗi khi một bài toán được chọn làm đề thi, Ban Giám khảo sẽ chuyển nó sang tiếng Anh, sau đó là tiếng Pháp, Đức, Nga và Tây Ban Nha.

E6. Trước ngày thi, Ban Giám khảo sẽ:

- Kiểm tra xem các thí sinh có thỏa mãn yêu cầu tham dự cuộc thi hay không;

- Chọn đề thi từ tất cả các bài đề nghị mà Ban chọn đề (*Problem Selection Comnittee*) đã đệ trình lên Ban Tổ chức;
- Hoàn thiện việc chuyển các bài toán được chọn thành các ngôn ngữ của thí sinh theo yêu cầu.

E7. Mỗi ngày thi, Ban Giám khảo sẽ dành nửa tiếng để xem xét các câu hỏi thắc mắc của thí sinh (viết ra giấy trình lên), và quyết định về việc xem xét trả lời các câu hỏi này.

E8. Sau cuộc thi, Ban Giám khảo sẽ:

- Xem xét các tranh luận về điểm số đã đề nghị cho một lời giải và quyết định điểm số sau cùng;
- Phê chuẩn điểm đạt được của mỗi thí sinh;
- Quyết định các giải thưởng nhất, nhì, ba;
- Xem xét và quyết định cho việc trao giải đặc biệt;
- Chịu trách nhiệm báo cáo với Ban Tư vấn;
- Xem xét các vấn đề phát sinh cho IMO tương lai.

DANH SÁCH CÁC NƯỚC CHỦ NHÀ ĐĂNG CAI IMO TỪ 1959 ĐẾN 2004

1959. Rumani

1960. Rumani

1961. Hungari

1962. Tiệp Khắc

1963. Ba Lan

1964. Liên Xô

1965. CHDC Đức

1966. Hungari

1967. Nam Tư

1968. Liên Xô

1969. Rumani

1970. Hungari

1971. Tiệp Khắc

1972. Ba Lan

1973. Liên Xô

1974. CHDC Đức

1975. Bungari

1976. Áo

1977. Nam Tư

1978. Rumani

1979. Anh

1980. *không tổ chức*

1981. Mĩ

1982. Hungari

1983. Pháp

1984. Tiệp Khắc

1985. Phần Lan

1986. Ba Lan

1987. Cuba

1988. Úc

1989. CHLB Đức

1990. Trung Quốc

1991. Thụy Điển

1992. CHLB Nga

1993. Thổ Nhĩ Kì

1994. Hồng Kông

1995. Canada

1996. Ấn Độ

1997. Ac-hen-ti-na

1998. Đài Loan

1999. Rumani

2000. Hàn Quốc

2001. Mĩ

2002. Anh

2003. Nhật

2004. Hi Lạp

THÀNH TÍCH CỦA ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM TẠI CÁC KÌ THI IMO TỪ 1974 ĐẾN 2002

HCV: *Huy chương vàng*
HCB: *Huy chương bạc*
HCĐ: *Huy chương đồng*

1974. 1 HCV, 1 HCB, 2 HCĐ
1975. 0 HCV, 1 HCB, 3 HCĐ
1976. 0 HCV, 1 HCB, 3 HCĐ
1977. *không tham gia*
1978. 0 HCV, 2 HCB, 6 HCĐ
1979. 1 HCV, 3 HCB, 0 HCĐ
1980. *không tổ chức IMO*
1981. *không tham gia*
1982. 1 HCV, 2 HCB, 1 HCĐ
1983. 0 HCV, 3 HCB, 3 HCĐ
1984. 1 HCV, 2 HCB, 3 HCĐ
1985. 1 HCV, 3 HCB, 1 HCĐ
1986. 1 HCV, 2 HCB, 2 HCĐ
1987. 0 HCV, 1 HCB, 5 HCĐ
1988. 1 HCV, 4 HCB, 0 HCĐ
1989. 2 HCV, 1 HCB, 3 HCĐ
1990. 0 HCV, 1 HCB, 3 HCĐ
1991. 0 HCV, 4 HCB, 2 HCĐ
1992. 1 HCV, 2 HCB, 3 HCĐ
1993. 1 HCV, 4 HCB, 1 HCĐ
1994. 1 HCV, 5 HCB, 0 HCĐ
1995. 2 HCV, 4 HCB, 0 HCĐ
1996. 3 HCV, 1 HCB, 1 HCĐ
1997. 1 HCV, 5 HCB, 0 HCĐ
1998. 1 HCV, 3 HCB, 2 HCĐ
1999. 3 HCV, 3 HCB, 0 HCĐ
2000. 3 HCV, 2 HCB, 1 HCĐ
2001. 1 HCV, 4 HCB, 0 HCĐ
2002. 3 HCV, 1 HCB, 2 HCĐ

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Các tài liệu từ* ***Internet.***

[2] Abraham P. Hillman and Gerald L. Alexanderson. *Algebra Through Problem Solving*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[3] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems,* Springer Verl--ag, Newyork, 1992.

[4] Williams, Kenneth S. *100 Practice Problems For Undergraduate Ma--thematics Competitions*, Integer Press, 1988.

[5] Walter Mientka. *Mathematical Competitions From Around The Wor--ld 1997,* American Mathematics Competitions, 1998.

[6] Titu Andreescu - ZumingFeng. *Mathematical Olympiads Problems and Solutions From Around The World 1998 - 1999,* MAA, 1999.

[7] Michael Doob and Claude Laflamme. *The Canadian Mathematical Olympiad 1969 -1993*, CMS, 1995.

[8] Polya, G. *How to solve it*, Princeton University Press, 1973.

[9] Nguyễn Quý Dy - Nguyễn Văn Nho - Vũ Văn Thoả. *Tuyển Tập 200 Bài Thi Vô Địch Toán, tập 3: Giải tích,* NXB Giáo dục, 2001.

[10] Đoàn Quỳnh và Hoàng Xuân Sính (*chủ biên*), Phạm Văn Chung - Doãn Minh Cường - Nguyễn Huy Đoan - Kiều Huy Luân - Đỗ Đức Thái - Phan Văn Viện. *Những bài toán thi học sinh giỏi các nước và Quốc tế, tập 1*, Đại học Sư phạm Hà Nội 1, 1987.

[11] Lê Hải Châu. *Thi Vô địch Toán Quốc tế,* NXB TP. Hồ Chí Minh, 1992.

[12] X.V.Côn-nhi-a-gin, G.A.Tô-nôi-an, I.F.Sa-rư-gin *và các đồng nghiệp,* Nguyễn Đễ và Nguyễn Khánh Nguyên (*dịch*), Nguyễn Việt Hải và Hoàng Đức Chính (*hiệu đính*). *Các đề thi Vô địch Toán các nước, tập 1 và 2,* NXB Giáo dục, 1996.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng HUỲNH BÁ VÂN

Biên tập lần đầu :
HUỲNH THÔNG

Biên tập tái bản :
TRẦN HỮU CHIẾN

Trình bày bìa :
TRỊNH THANH SƠN

Sửa bản in :
NGUYỄN VĂN NHO

Chế bản :
PHÒNG MĨ THUẬT – CHẾ BẢN – SỬA BÀI

---

40 NĂM OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ
(1959 - 2000)

Mã số : 8H802n6-CPH

In 3.000 bản, khổ 17 x 24 cm. In tại Xí nghiệp In Đồng Tháp: 212 Lê Lợi - Phường 3 - Thị xã Sađéc -Tỉnh Đồng Tháp. Số in: 11/ĐT. Số xuất bản: 05-2006/CXB/108-1880/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 08 năm 2006.