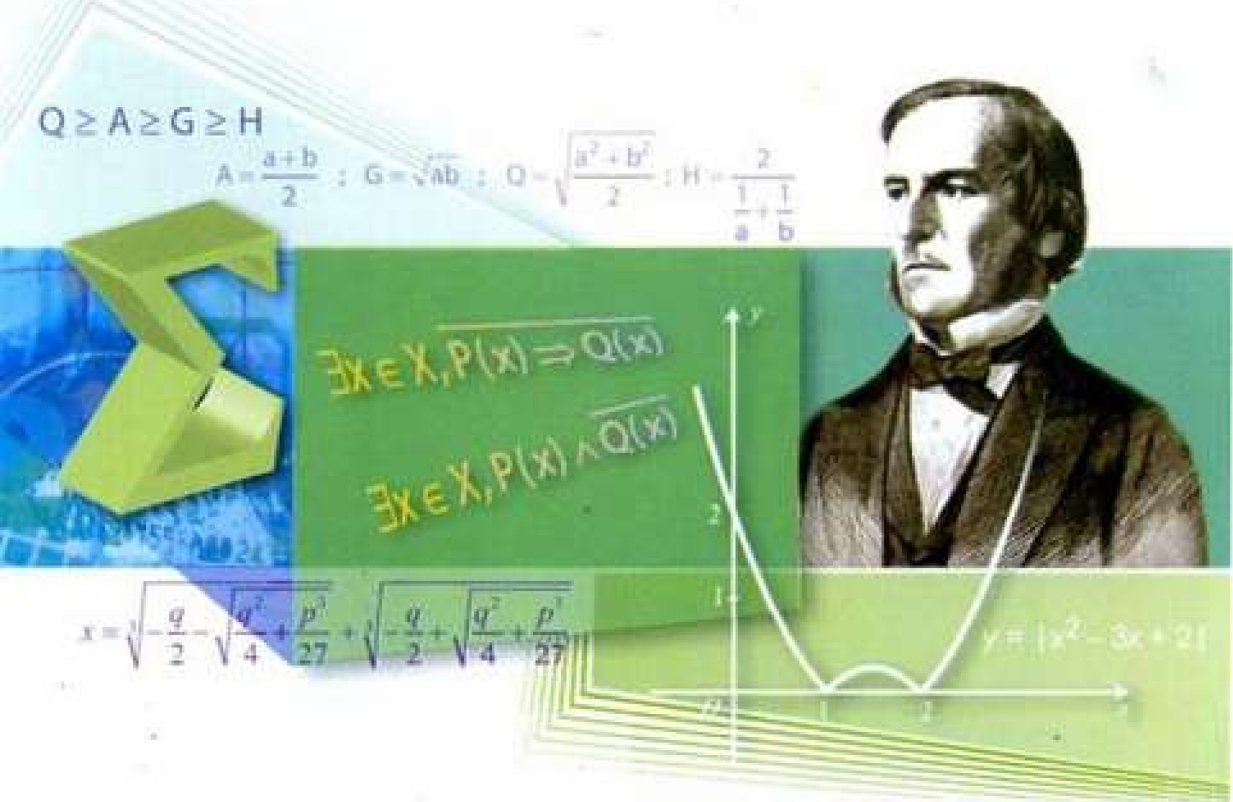
ĐOÀN QUỲNH (Chủ biên) - DOÃN MINH CƯỜNG
TRẦN NAM DŨNG - ĐẶNG HÙNG THẮNG

TÀI LIỆU GIÁO KHOA CHUYÊN TOÁN

ĐẠI SỐ 10



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐOÀN QUỲNH (Chủ biên) - DOÃN MINH CƯỜNG
TRẦN NAM DŨNG - ĐẶNG HÙNG THẮNG

TÀI LIỆU
GIÁO KHOA CHUYÊN TOÁN
ĐẠI SỐ 10

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Từ hơn 40 năm nay, hệ chuyên toán ở nước ta là một hệ học chính thống bên cạnh hệ đại trà. Tuy nhiên gần đây, Bộ Giáo dục và Đào tạo mới ban hành chính thức chương trình chuyên Toán lớp 10 và đang xét duyệt chương trình chuyên Toán lớp 11, 12 bên cạnh chương trình Toán bậc THPT đã được ban hành năm 2006.

Chúng tôi nhận thấy cần biên soạn một bộ tài liệu giáo khoa chuyên Toán (TLGKCT) bậc THPT với các mục đích sau :

- Phục vụ việc dạy và học ở hệ chuyên Toán thể hiện được tinh thần của chương trình nói trên, khá gần với chương trình và sách giáo khoa (SGK) Toán nâng cao nhằm giúp học sinh có thể chuyển đổi từ việc học ở hệ chuyên sang hệ không chuyên và ngược lại.
- Làm một tài liệu giáo khoa cho giáo viên dạy các lớp chuyên Toán.
- Giúp học sinh các lớp chuyên tự học ; giúp học sinh khá giỏi ở các lớp đại trà có tài liệu để có thể tự học, tự bồi dưỡng thêm (bên cạnh SGK nâng cao).

Chúng tôi đã mời được nhiều thầy dạy ở các trường chuyên, lớp chuyên (dạy các lớp bồi dưỡng thi toán quốc tế cũng như trong nước, dạy các khối chuyên ở các trường đại học,...) tham gia biên soạn để tài liệu sát với thực tiễn giảng dạy hệ chuyên ở nước ta, đồng thời giới thiệu được phần nào đôi nét giảng dạy ở hệ chuyên Toán của các trường đó.

Bộ sách *Tài liệu giáo khoa chuyên Toán lớp 10* bao gồm 4 cuốn :

- Tài liệu giáo khoa chuyên Toán – Đại số 10
- Tài liệu giáo khoa chuyên Toán – Hình học 10
- Tài liệu giáo khoa chuyên Toán – Bài tập Đại số 10
- Tài liệu giáo khoa chuyên Toán – Bài tập Hình học 10.

Các tác giả viết cuốn Tài liệu giáo khoa chuyên Toán – Đại số 10 này là :

- Thầy ***Đặng Hùng Thắng*** (Trường ĐHKHTN Hà Nội) : *Chương I*
- Thầy ***Trần Nam Dũng*** (Trường ĐHKHTN Tp Hồ Chí Minh) : *Chương II, Chương IV, Chương V, Chuyên đề 2.*
- Thầy ***Doãn Minh Cường*** (Khối chuyên Toán, Trường ĐHSP Hà Nội) : *Chương III, Chuyên đề 1.*

Từng tác giả chịu trách nhiệm về bài viết của mình. Chủ biên và biên tập viên tôn trọng "văn phong" của từng tác giả (người trình bày chi tiết, chặt chẽ ; người trình bày dựa nhiều vào trực giác ; người trình bày phần lí thuyết phong phú, sâu sắc ; người chú trọng phần ứng dụng, bài tập ...). Chúng tôi chủ yếu sửa chữa những lỗi biên tập, phối hợp các phần biên soạn của những tác giả khác nhau để chúng trở thành một thể thống nhất theo đúng khuôn khổ của chương trình.

Trong tài liệu giáo khoa này, chúng tôi chưa trình bày phần Thống kê, chúng tôi sẽ viết gắn nó với phần Xác suất trong TLGKCT Đại số và Giải tích 11. Phần Công thức lượng giác được chuyển sang giới thiệu trong chương "Tích vô hướng của hai vectơ và ứng dụng" của cuốn TLGKCT Hình học 10 và sẽ còn được nhắc lại trong chương "Hàm số lượng giác" ở cuốn TLGKCT Đại số và Giải tích 11. Về các chuyên đề trong chương trình chuyên đại số 10, cuốn sách này chỉ trình bày hai chuyên đề bắt buộc là Chuyên đề 1 (*Bất đẳng thức*) và Chuyên đề 2 (*Một số vấn đề của Toán tổ hợp*). Trong Chuyên đề 1, tác giả chưa thể đề cập đến những bất đẳng thức cần sử dụng công cụ giải tích, những phần này sẽ được đưa ra rải rác trong các cuốn TLGKCT Đại số và Giải tích lớp 11, 12. Theo đúng chương trình, chuyên đề 2 đề cập đến nguyên lí Dirichlet, đơn biến, bất biến và nguyên lí cực hạn.

Trong từng chương có nhiều ví dụ, nhiều bài tập, bài toán (kể cả bài thi của hệ chuyên, thi học sinh giỏi Toán quốc gia, quốc tế...). Các bài tập đều có lời giải hoặc hướng dẫn giải đầy đủ trong cuốn *Tài liệu giáo khoa chuyên Toán – Bài tập Đại số 10*.

Các tác giả cùng chủ biên và biên tập viên đã rất cố gắng phối hợp biên soạn tài liệu giáo khoa chuyên này. Tuy nhiên, chúng tôi biết bộ sách vẫn còn nhiều thiếu sót bởi vì viết tài liệu giáo khoa chuyên đầu tiên cho học sinh chuyên Toán là một điều rất khó khăn. Trong bộ sách, có thể đây đó vẫn còn dùng những kí hiệu khác nhau để chỉ cùng một đối tượng (nhưng không gây hiểu nhầm gì), đôi chỗ có những bài tập trùng lặp (thường với những ý tưởng giải khác nhau) và cũng có thể có đôi chỗ chưa đầy đủ chi tiết như mong muốn. Chúng tôi mong độc giả lượng thứ cho các điều đó và hy vọng các thầy cô và các em học sinh trong quá trình dạy, học, đọc tài liệu này đóng góp ý kiến cho chúng tôi để lần tái bản sau, sách phục vụ được tốt hơn. Các góp ý xin gửi về : *Ban Toán, Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187, Giảng Võ, Hà Nội*.

Chúng tôi rất cảm ơn các tác giả đã nhiệt tình tham gia biên soạn tài liệu trong khi bề bộn bao công việc khác và đã buộc phải biên soạn trong một khuôn khổ chương trình nhất định, phải phối hợp với nhiều tác giả khác (có thể với những ý tưởng biên soạn không hoàn toàn giống nhau). Chúng tôi rất cảm ơn Tiến sĩ *Trần Phương Dung* đã đưa ra ý tưởng về bộ sách và giúp đỡ triển khai viết bộ sách này. Chúng tôi đặc biệt cảm ơn biên tập viên *Phan Thị Minh Nguyệt*, người đã giúp các tác giả và chủ biên sửa chữa các sai sót, sắp xếp phối hợp các phần của các tác giả khác nhau, khắc phục các khó khăn để bộ sách được xuất bản đúng thời hạn, kịp thời phục vụ bạn đọc. Mong muốn duy nhất của chúng ta là bộ sách này thực sự bổ ích cho các học sinh ham thích và học giỏi môn Toán, đặc biệt giúp học sinh chuyên toán có tài liệu giáo khoa riêng cho hệ chuyên của mình.

Chủ biên

Đoàn Quỳnh

BẢNG PHIÊN ÂM
TÊN MỘT SỐ NHÀ KHOA HỌC NÊU TRONG SÁCH

Phiên âm la-tinh	*Phiên âm tiếng Việt*
Abel	A-ben
Bernoulli	Béc-nu-li
Brahmagupta	Bờ-ra-ma-gúp-ta
Bunyakovsky	Bu-nhi-a-cốp-xki
Cardano	Các-đa-nô
Cauchy	Cô-si
Celsius	Cen-ci-ớt
Chasles	Sa-lơ
Chebyshev	Sê-bư-sép
De Morgan	Đờ Moóc-găng
Descartes	Đề-các
Dirichlet	Đi-ric-lê
Euclid	Ơ-clit
Farhenheit	Pha-ren-hai

Phiên âm la-tinh	*Phiên âm tiếng Việt*
Fibonacci	Phi-bô-na-si
Hojo Lee	Hô-jô-Li
Holder	Hơn-de
Jensen	I-en-xen
Kirchoff	Kia-sốp
Klamkin	Klam-kin
Mobius	Mơ-bi-út
Nesbitt	Ne-xbít
Pythagoras	Pi-ta-go
Ohm	Ôm
Schwarz	Sơ-vác
Vènn	Ven
Viete	Vi-ét

Chương I

MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

§1. MỆNH ĐỀ

1. Mệnh đề là gì ?

Trong khoa học cũng như trong đời sống hàng ngày, ta thường gặp những câu nêu lên một khẳng định. Khẳng định đó có thể đúng và có thể sai.

Một mệnh đề lôgic (gọi tắt là *mệnh đề*) là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai. Một câu khẳng định đúng gọi là một *mệnh đề đúng*. Một câu khẳng định sai gọi là một *mệnh đề sai*. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Ví dụ 1. Tất cả các câu sau đây là mệnh đề :

a) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam

b) Thượng Hải là một thành phố của Nga

c) $1 + 1 = 2$

d) 27 chia hết cho 5.

Các mệnh đề a) và c) là mệnh đề đúng còn các mệnh đề b) và d) là các mệnh đề sai. □

Ví dụ 2. Tất cả các câu sau đây đều không phải là mệnh đề :

a) Bây giờ là mấy giờ ?

b) Hãy đọc cuốn sách này thật kĩ

c) $x + 1 = 2$

d) $x + 2y = 3z$.

Các câu a) và b) không phải là mệnh đề vì chúng không nêu lên một khẳng định. Còn các câu c) và d) không phải là mệnh đề vì chúng chẳng đúng cũng chẳng sai: tính đúng - sai (tính hoặc đúng, hoặc sai) của chúng tuỳ thuộc vào việc ta gán cho các biến x, y, z giá trị cụ thể nào. □

Người ta quy ước gán cho mệnh đề đúng *giá trị chân lí* bằng 1 và gán cho mệnh đề sai giá trị chân lí bằng 0. Ta còn nói : *Chân trị* của mệnh đề đúng bằng 1; chân trị của mệnh đề sai bằng 0.

2. Các phép toán về mệnh đề

Bây giờ chúng ta xem xét các phương pháp tạo ra các mệnh đề mới từ các mệnh đề đã có bằng các phép toán lôgic (gọi tắt là phép toán). Các mệnh đề đã cho gọi là các *mệnh đề thành phần*. Các mệnh đề mới tạo thành được gọi là các *mệnh đề phức hợp*. Bảng thể hiện mối liên hệ giữa giá trị chân lí của mệnh đề phức hợp với giá trị chân lí của các mệnh đề thành phần được gọi là *bảng chân trị*.

a) Phép phủ định và mệnh đề phủ định

Cho mệnh đề P. Mệnh đề : "Không phải P" được gọi là *mệnh đề phủ định* của P và được kí hiệu là $\overline{P}$.

Mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của P cũng có thể được xem như là kết quả của *phép phủ định* tác động lên mệnh đề P. Ta cũng nói : "phủ định của mệnh đề P là mệnh đề $\overline{P}$".

Ví dụ 3. Tìm phủ định của các mệnh đề sau :

a) Hôm nay là thứ năm b) 2007 là số nguyên tố

c) $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.

Giải

a) Hôm nay không phải là thứ năm.

b) 2007 không phải là số nguyên tố (hay 2007 là hợp số).

c) $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ (hay $\sqrt{2}$ là số vô tỉ). □

Sau đây là bảng chân trị của phép phủ định, nó trình bày mối quan hệ giữa giá trị chân lí của P và của $\overline{P}$:

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

b) Phép hội và mệnh đề hội

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "P và Q" được gọi là *mệnh đề hội* của P và Q và được kí hiệu là $P \wedge Q$. Mệnh đề $P \wedge Q$ đúng khi cả P và Q đều đúng. Nó sai trong các trường hợp còn lại (tức là khi có ít nhất một trong hai mệnh đề P, Q sai).

Phép toán $\wedge$ được gọi là *phép hội*. Mệnh đề hội $P \wedge Q$ là kết quả của phép hội khi tác động lên hai mệnh đề P, Q.

Ví dụ 4. Cho P là mệnh đề : "60 chia hết cho 3" và Q là mệnh đề "60 chia hết cho 5". Khi đó $P \wedge Q$ là mệnh đề "60 chia hết cho 3 và chia hết cho 5". □

Sau đây là bảng chân trị của phép hội

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

c) Phép tuyển và mệnh đề tuyển

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "*P hoặc Q*" được gọi là *mệnh đề tuyển* của P và Q và được kí hiệu là $P \vee Q$. Mệnh đề $P \vee Q$ sai khi cả P và Q đều sai. Nó đúng trong các trường hợp còn lại, tức là khi có ít nhất một trong hai mệnh đề P, Q đúng.

Phép toán $\vee$ được gọi là *phép tuyển*. Mệnh đề tuyển $P \vee Q$ là kết quả của phép tuyển khi tác động lên hai mệnh đề P, Q.

Ví dụ 5. Cho P là mệnh đề : "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành" và Q là mệnh đề "Tứ giác $ABCD$ là hình thang". Khi đó $P \vee Q$ là mệnh đề "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành hoặc là hình thang". □

Sau đây là bảng chân trị của phép tuyển

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

d) Mệnh đề kéo theo và phép kéo theo

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "*Nếu P thì Q*" được gọi là *mệnh đề kéo theo* và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng và Q sai. Nó đúng trong các trường hợp còn lại, tức là khi P sai (bất kể Q đúng hay sai) hoặc khi Q đúng (bất kể P đúng hay sai).

Phép toán $\Rightarrow$ gọi là *phép kéo theo*. Mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ được tạo ra từ hai mệnh đề P và Q bằng phép kéo theo.

Có nhiều cách diễn đạt mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Chẳng hạn ta có thể diễn đạt là:

- "Nếu P thì Q"
- "Vì P nên Q"
- "P kéo theo Q"
- "P là điều kiện đủ của Q".

Ví dụ 6. Cho P là mệnh đề : "Hôm nay là thứ bảy" và Q là mệnh đề : "Tôi sẽ đi xem phim". Khi đó mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề : "Nếu hôm nay là thứ bảy thì tôi sẽ đi xem phim".

Mệnh đề này chỉ sai nếu hôm nay là thứ bảy mà tôi lại không đi xem phim. □

Sau đây là bảng chân trị của phép kéo theo

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Chú ý

i) Trong ngôn ngữ thông thường, câu "Nếu P thì Q" được sử dụng khi giữa P và Q có mối quan hệ nhân quả (P là giả thiết và Q là kết luận). Tuy nhiên mệnh đề kéo theo (theo nghĩa lôgic như trên) có ý nghĩa rộng hơn, không nhất thiết bao hàm quan hệ nhân quả, trong đó giả thiết P và kết luận Q có thể độc lập với nhau.

Chẳng hạn cho P là mệnh đề "Hôm nay là thứ bảy" và Q là mệnh đề : "$2 + 3 = 5$". Ta có thể lập mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$: "Nếu hôm nay là thứ bảy thì $2 + 3 = 5$". Đây là một mệnh đề đúng vì Q là mệnh đề đúng. Tuy nhiên trong ngôn ngữ thông thường, đây là một câu "ngô nghê", vô nghĩa.

ii) Cần nhớ rằng nếu mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ đúng thì không có nghĩa là mệnh đề P hay mệnh đề Q là đúng. Chẳng hạn mệnh đề : "Nếu $1 + 1 = 4$ thì nhà thơ Xuân Diệu là một nhà toán học vĩ đại" là một mệnh đề đúng nhưng mệnh đề P : "$1 + 1 = 4$" và mệnh đề Q : "nhà thơ Xuân Diệu là một nhà toán học vĩ đại" đều là những mệnh đề sai.

e) Mệnh đề đảo, mệnh đề phản và mệnh đề phản đảo

Cho mệnh đề kéo theo

$$P \Rightarrow Q \qquad (1)$$

i) Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề (1).

ii) Mệnh đề $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$ được gọi là *mệnh đề phản* của mệnh đề (1).

iii) Mệnh đề $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ được gọi là *mệnh đề phản đảo* của mệnh đề (1).

Ví dụ 7. Cho mệnh đề H : "Nếu hôm nay trời mưa thì bể bơi Tây Hồ đóng cửa".

Hãy lập các mệnh đề đảo, mệnh đề phản và mệnh đề phản đảo của mệnh đề H.

Giải

Mệnh đề H là mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$, trong đó P là mệnh đề : "Hôm nay trời mưa", Q là mệnh đề : "Hôm nay bể bơi Tây Hồ đóng cửa ".

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu hôm nay bể bơi Tây Hồ đóng cửa thì trời mưa".

Mệnh đề phản là $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$: "Nếu hôm nay trời không mưa thì bể bơi Tây Hồ không đóng cửa".

Mệnh đề phản đảo $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$: "Nếu hôm nay bể bơi Tây Hồ không đóng cửa thì trời không mưa". □

f) Mệnh đề tương đương

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "*P nếu và chỉ nếu Q*" gọi là *mệnh đề tương đương* và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. Xét mệnh đề P : "Tam giác ABC là tam giác cân" và mệnh đề Q : "Tam giác ABC có hai đường trung tuyến bằng nhau". Khi đó mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề : "Tam giác ABC là tam giác cân nếu và chỉ nếu tam giác đó có hai đường trung tuyến bằng nhau." □

Phép toán " $\Leftrightarrow$ " gọi là *phép tương đương.*

Nhận xét. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai.

Thật vậy, giả sử P và Q cùng đúng hoặc cùng sai. Nếu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai thì phải có P đúng Q sai. Nếu mệnh đề $Q \Rightarrow P$ sai thì phải có Q đúng P sai. Cả hai trường hợp này đều không xảy ra. Vậy $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng, do đó mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng.

Ngược lại, giả sử mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng, tức là các mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Giả sử P đúng. Nếu Q sai thì $P \Rightarrow Q$ sai. Vậy Q phải đúng. Giả sử P sai. Nếu Q đúng thì mệnh đề $Q \Rightarrow P$ sai. Vậy Q phải sai. Thành thử P và Q cùng tính đúng - sai.

Từ nhận xét trên, ta có bảng chân trị của phép tương đương như sau :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

g) Sự tương đương và chứng minh sự tương đương của hai mệnh đề

Nếu hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai (tức là chúng có cùng tính đúng - sai hay có cùng chân trị), ta nói P và Q *tương đương lôgic* (gọi tắt là *tương đương*) với nhau và viết $P = Q$. Từ mục nhận xét ở h), ta thấy $P = Q$ nếu và chỉ nếu mệnh đề tương đương " $P \Leftrightarrow Q$ " là mệnh đề đúng.

Để chứng minh hai mệnh đề tương đương với nhau, ta lập bảng chân trị và kiểm tra xem chúng có trùng nhau không. Ví dụ sau đây sẽ minh hoạ phương pháp này.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng

a) $P \Rightarrow Q = \overline{P} \vee Q$.

b) • $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, tức mệnh đề thuận và mệnh đề phản đảo là tương đương.

• $Q \Rightarrow P = \overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$, tức mệnh đề đảo và mệnh đề phản là tương đương.

Giải :

a) Ta lập bảng chân trị :

P	$\overline{P}$	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P} \vee Q$
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1

Nhìn vào hai cột cuối, ta thấy rõ điều phải chứng minh.

b) Chứng minh tương tự. □

Các phép toán nêu trên tuân theo các luật sau, trong đó có một số luật tương tự như luật của phép toán đại số).

***Định lí* 1**

Cho P, Q, R là các mệnh đề. Khi đó

a) Luật giao hoán

$$P \vee Q = Q \vee P$$
$$P \wedge Q = Q \wedge P$$

b) Luật kết hợp

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$
$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

c) Luật phân phối

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

d) Quy tắc De Morgan

$$\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$$
$$\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$$

Chứng minh. Ta chứng minh hai trường hợp để minh hoạ. Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

• Chứng minh luật phân phối $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Ta lập bảng sau để so sánh giá trị chân lí của vế trái và vế phải:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Trong bảng chân trị trên, ta thấy cột thứ năm (từ trái sang) mô tả các giá trị chân lí của vế trái trùng với cột thứ tám (từ trái sang) mô tả các giá trị chân lí của vế phải trùng nhau. Do đó vế trái tương đương với vế phải.

• Chứng minh $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$. Ta lập bảng sau để so sánh giá trị chân lí của vế trái và vế phải

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Nhìn vào bảng ta thấy hai cột cuối hoàn toàn trùng nhau. Do đó vế trái tương đương với vế phải. □

Ta có thể chứng minh sự tương đương của các mệnh đề bằng cách kết hợp các công thức đã biết mà không cần lập bảng chân trị.

Ví dụ 10. Chứng minh rằng

$$\overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \overline{Q}.$$

Giải. Sử dụng kết quả của Ví dụ 9 và quy tắc De Morgan, ta có

$$\overline{P \Rightarrow Q} = \overline{\overline{P} \vee Q} = \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} = P \wedge \overline{Q}\,. \square$$

Bài tập

1. Cho P và Q là các mệnh đề :

P : "Hôm nay ở Sapa nhiệt độ dưới 0"

Q : "Hôm nay ở Sapa có tuyết rơi".

Biểu diễn các mệnh đề sau theo P và Q bằng các phép toán lôgic :

a) Hôm nay ở Sapa nhiệt độ dưới 0 và có tuyết rơi

b) Hôm nay ở Sapa nhiệt độ dưới 0 nhưng không có tuyết rơi

c) Hôm nay ở Sapa nhiệt độ dưới 0 hoặc có tuyết rơi

d) Hôm nay ở Sapa nếu nhiệt độ dưới 0 thì tuyết rơi

e) Hôm nay ở Sapa có tuyết rơi khi và chỉ khi nhiệt độ dưới 0.

2. Phát biểu mệnh đề đảo và phản đảo của các mệnh đề sau đây

a) Nếu ngày mai có tuyết rơi thì tôi sẽ đi trượt tuyết

b) Nếu ngày mai có bài kiểm tra thì hôm nay tôi sẽ học đến khuya.

3. Cho hai mệnh đề P và Q. Xét mệnh đề " $P \Rightarrow \overline{Q}$ ". Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là tương đương với mệnh đề trên ?

(A) $P \vee \overline{Q}$; (B) $\overline{Q} \Rightarrow P$; (C) $\overline{P} \Rightarrow Q$; (D) $Q \Rightarrow \overline{P}$.

4. Chứng minh rằng

$$P = P \vee (P \wedge Q);$$
$$P = P \wedge (P \vee Q).$$

5. Chứng minh rằng mệnh đề $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ không tương đương với mệnh đề

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R).$$

6. Chứng minh rằng

$$\overline{P \Leftrightarrow Q} = \overline{P} \Leftrightarrow Q\,.$$

§2. MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

1. Khái niệm mệnh đề chứa biến

Các câu có liên quan đến các biến như :

- "$x > 3$, với x là số thực"
- "n chia hết cho 3 với n là số tự nhiên"

rất thường gặp trong toán học và trong các chương trình máy tính. Mỗi câu như trên là một khẳng định chứa một biến nhận giá trị trong một tập hợp nào đó. Các câu này không đúng cũng không sai nếu ta chưa gán cho biến những giá trị cụ thể nào đó. Một khi các biến này được gán giá trị cụ thể thì câu đó sẽ có giá trị chân lí xác định và trở thành một mệnh đề. Chẳng hạn kí hiệu câu "$x > 3$ với x là số thực" là "P(x) với x là số thực" thì $P(4)$ là mệnh đề "4 > 3", đó là mệnh đề đúng ; $P(2)$ là mệnh đề "2 > 3", đó là mệnh đề sai.

Các câu như vậy được gọi là *mệnh đề chứa biến* có dạng "$P(x)$ với $x \in X$". Khi x được cho giá trị x_0, $P(x_0)$ sẽ có giá trị chân lí xác định : $P(x_0)$ bằng 1 hoặc 0 tuỳ theo mệnh đề $P(x_0)$ đúng hay sai. Vì thế mệnh đề chứa biến "$P(x)$ với $x \in X$" còn được gọi là *hàm mệnh đề* với tập xác định X và tập giá trị là $\{0; 1\}$.

Chúng ta còn gặp những mệnh đề chứa biến có nhiều biến hơn. Ví dụ xét câu "$x > y + 3$ với x, y là số thực". Kí hiệu câu này là "$P(x, y)$ với $x, y \in \mathbb{R}$". Khi đó $P(1, -2)$ là câu "$1 > -2 + 3$" là một mệnh đề sai và $P(5, \sqrt{2})$ là câu "$5 > \sqrt{2} + 3$" là mệnh đề đúng.

Tương tự xét câu "$x^2 + y^2 = z^2$, x, y, z là số nguyên". Kí hiệu câu này là "$P(x, y, z)$ với $x, y, z \in \mathbb{Z}$". Khi đó câu $P(3, 4, 5)$ là câu "$3^2 + 4^2 = 5^2$" là một mệnh đề đúng.

Một cách tổng quát, mệnh đề chứa biến có n biến có dạng

$$\text{"} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ với } x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \text{".}$$

2. Lượng từ "với mọi" và lượng từ "tồn tại"

Khi tất cả các biến trong mệnh đề chứa biến được gán giá trị xác định thì mệnh đề chứa biến có giá trị chân lí xác định và trở thành một mệnh đề. Ngoài ra còn một cách quan trọng khác để biến một mệnh đề chứa biến thành mệnh đề là đưa vào các lượng từ. Sau đây ta sẽ xét hai lượng từ quan trọng nhất là lượng từ "với mọi" và lượng từ "tồn tại".

a) Lượng từ $\forall$ (đọc là "với mọi")

Cho mệnh đề chứa biến "$P(x)$ với $x \in X$". Khi đó câu khẳng định

"Với mọi x thuộc X, $P(x)$ đúng" (1)

là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu với bất kì phần tử x_0 thuộc X, $P(x_0)$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề này sai nếu có phần tử x_0 thuộc X sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề sai.

Mệnh đề (1) được kí hiệu là

"$\forall x \in X, P(x)$" hoặc "$\forall x \in X : P(x)$".

Ví dụ 1. Cho mệnh đề chứa biến "$x^2 - 2x + 2 > 0$ với $x \in \mathbb{R}$". Khi đó mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$" đúng vì với mọi số thực, ta đều có

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0 . \square$$

b) Lượng từ $\exists$ (đọc là "tồn tại")

Cho mệnh đề chứa biến "$P(x)$ với $x \in X$". Khi đó câu khẳng định

"Tồn tại một phần tử x thuộc X sao cho $P(x)$ đúng" (2)

là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu có phần tử x_0 thuộc X sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề này sai nếu với mỗi phần tử x_0 thuộc X, $P(x_0)$ là mệnh đề sai.

Mệnh đề (2) được kí hiệu là

"$\exists x \in X, P(x)$" hoặc "$\exists x \in X : P(x)$".

Ví dụ 2. Cho mệnh đề chứa biến : "$2^n + 1$ chia hết cho n, với $n \in \mathbb{N}$". Khi đó mệnh đề : "$\exists n \in \mathbb{N} : 2^n + 1$ chia hết cho n" là mệnh đề đúng vì với $n = 3$, ta có $2^3 + 1 = 9$ chia hết cho 3. $\square$

Với các mệnh đề chứa nhiều biến, ta cũng có thể gán các lượng từ $\forall$ và $\exists$ vào theo các cách khác nhau để biến chúng thành một mệnh đề.

Cho mệnh đề chứa biến $P(x, y)$ với $x \in X$, $y \in Y$. Khi đó :

• Câu khẳng định

"Với mọi $x \in X$ và với mọi $y \in Y$, $P(x, y)$ đúng" (3)

là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu với mỗi phần tử x_0 thuộc X và mỗi phần tử y_0 thuộc Y, ta có $P(x_0, y_0)$ đúng. Mệnh đề này sai nếu có một cặp (x_0, y_0) $(x_0 \in X, y_0 \in Y)$ mà $P(x_0, y_0)$ sai.

Mệnh đề (3) được kí hiệu là

$$\text{“} \forall x \in X, \forall y \in Y : P(x, y) \text{”}.$$

• Câu khẳng định

"Tồn tại một phần tử x thuộc X và một phần tử y thuộc Y sao cho $P(x, y)$ đúng" (4)

là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu có một phần tử x_0 thuộc X và một phần tử y_0 thuộc Y sao cho $P(x_0, y_0)$ đúng. Mệnh đề này sai nếu với mỗi phần tử x_0 thuộc X và mỗi phần tử y_0 thuộc Y, ta có $P(x_0, y_0)$ sai.

Mệnh đề (4) được kí hiệu là

$$\text{“} \exists x \in X, \exists y \in Y : P(x, y) \text{”}.$$

• Câu khẳng định :

"Tồn tại một phần tử x thuộc X sao cho với mọi y thuộc Y ta có $P(x, y)$ đúng" (5)

là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu có một phần tử x_0 thuộc X sao cho với mọi y thuộc Y, $P(x_0, y)$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề này sai nếu ta không tìm được phần tử x_0 nào như vậy (tức là với mỗi $x \in X$, ta đều tìm được $y \in Y$ sao cho $P(x, y)$ sai).

Mệnh đề (5) được kí hiệu là

$$\text{“} \exists x \in X, \forall y \in Y : P(x, y) \text{”}.$$

• Câu khẳng định

"Với mọi x thuộc X, tồn tại y thuộc Y sao cho $P(x, y)$ đúng" (6)

là một mệnh đề.

Mệnh đề này đúng nếu với mỗi phần tử x_0 thuộc X, ta đều tìm được một phần tử y_0 thuộc Y sao cho $P(x_0, y_0)$ đúng. (Chú ý rằng phần tử y_0 này có thể phụ thuộc vào phần tử x_0 đó). Mệnh đề này sai nếu có một phần tử x_0 nào đó mà $P(x_0, y)$ sai với mọi y thuộc Y.

Mệnh đề (6) được kí hiệu là

$$\text{"}\forall x \in X, \exists y \in Y : P(x, y)\text{"}.$$

Ví dụ 3. Cho mệnh đề chứa biến : "$x + y = 0$ với x, y là số thực". Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau

P : "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 0$"

Q : "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$"

R : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 0$"

S : "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$".

Giải : P sai vì chẳng hạn với $x = 1$, $y = 2$ ta có $x + y = 1 + 2 \neq 0$.

Q đúng vì có $x = 1$, $y = -1$ để $x + y = 1 + (-1) = 0$.

R sai vì với mỗi số thực x_0 đã cho, ta đều tìm được $y_0 = 1 - x_0$ để

$$x_0 + y_0 = 1 \neq 0.$$

S đúng vì với mỗi số thực x_0, ta tìm được số thực $y_0 = -x_0$ để $x_0 + y_0 = 0$. □

3. Phủ định của mệnh đề có chứa lượng từ "với mọi" và "tồn tại"

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó :

- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$"
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

Chẳng hạn, mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 1$ chia hết cho 3" là mệnh đề "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 - 1$ không chia hết cho 3".

Tổng quát hơn, giả sử $P(x, y)$ là câu : "(x, y) có tính chất P". Khi đó, mệnh đề phủ định của mệnh đề : "Với mọi $x \in X$ và với mọi $y \in Y$, (x, y) có tính chất P" là mệnh đề : "Tồn tại x thuộc X và tồn tại y thuộc Y sao cho (x, y) không có tính chất P."

Vậy :

• Cho mệnh đề chứa biến $P(x, y)$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề

$$\text{"}\forall x \in X, \forall y \in Y : P(x, y)\text{"}$$

là mệnh đề $$\text{"}\exists x \in X, \exists y \in Y : \overline{P(x, y)}\text{"}.$$

Tương tự ta có :

• Cho mệnh đề chứa biến $P(x, y)$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề

$$\text{"}\exists x \in X, \exists y \in Y : P(x, y)\text{"}$$

là mệnh đề $$\text{"}\forall x \in X, \forall y \in Y : \overline{P(x, y)}\text{"}.$$

• Cho mệnh đề chứa biến $P(x, y)$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề

$$\text{"}\exists x \in X, \forall y \in Y : P(x, y)\text{"}$$

là mệnh đề $$\text{"}\forall x \in X, \exists y \in Y : \overline{P(x, y)}\text{"}.$$

• Cho mệnh đề chứa biến $P(x, y)$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề

$$\text{"}\forall x \in X, \exists y \in Y : P(x, y)\text{"}$$

là mệnh đề $$\text{"}\exists x \in X, \forall y \in Y : \overline{P(x, y)}\text{"}.$$

Ví dụ 4. Giả sử $P(x, y)$ là câu : "x hâm mộ y" và X, Y là tập hợp tất cả mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ "với mọi" và "tồn tại" để diễn đạt các câu sau và diễn đạt mệnh đề phủ định của chúng.

a) Mỗi người trên thế giới đều có một người để hâm mộ.

b) Có một người hâm mộ tất cả mọi người.

Giải

a) "$\forall x \in X, \exists y \in Y : P(x, y)$".

Mệnh đề phủ định là "$\exists x \in X, \forall y \in Y : \overline{P(x, y)}$"

có nội dung là : "Có một người không hâm mộ bất cứ ai trên thế giới".

b) "$\exists x \in X, \forall y \in Y : P(x, y)$".

Mệnh đề phủ định là "$\forall x \in X, \exists y \in Y : \overline{P(x, y)}$" có nội dung là "Mỗi người đều tìm thấy một người mà mình không hâm mộ". Diễn đạt một cách khác là "Không có người nào mà hâm mộ tất cả mọi người". □

Bài tập

7. Hãy viết các mệnh đề dưới đây bằng các câu thông thường (không dùng các kí hiệu lôgic) rồi phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề đó.

   a) $\forall$ màu, $\exists$ con vật màu đó

   b) $\forall$ số nguyên lẻ n, $\exists$ số nguyên k sao cho $n = 2k + 1$

   c) $\forall$ số thực x, $\exists$ số thực y sao cho $x + y = 0$.

8. Xét mệnh đề P : "Mọi chiếc áo sơ mi trong cửa hàng này đều được bán hạ giá" và các mệnh đề sau :

   A : "Mọi chiếc áo sơ mi trong cửa hàng này đều không bán hạ giá"

   B : "Có ít nhất một chiếc áo sơ mi trong cửa hàng này không bán hạ giá"

   C : "Không có chiếc áo sơ mi nào trong cửa hàng này bán hạ giá"

   D : "Không phải mọi áo sơ mi của cửa hàng này đều được bán hạ giá".

   a) Hãy diễn tả các mệnh đề P, A, B, C, D bằng các kí hiệu và phép toán lôgic.

   b) Giả sử P là mệnh đề sai. Khi đó trong các mệnh đề A, B, C, D, mệnh đề nào là mệnh đề đúng ?

9. Xét mệnh đề R : "Với mọi số thực x và y, nếu $x = 0$ thì $xy = 0$". Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của R ?

   A : "Tồn tại số thực x và số thực y sao cho $x \neq 0$ và $xy \neq 0$"

   B : "Tồn tại số thực x và số thực y sao cho $x \neq 0$ và $xy = 0$"

   C : "Tồn tại số thực x và số thực y sao cho $x = 0$ và $xy \neq 0$"

   D : "Tồn tại số thực x và số thực y sao cho $x = 0$ và $xy = 0$".

10. Cho X là tập hợp người Việt Nam, $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ là các mệnh đề chứa biến

    $P(x)$: "x là một đứa trẻ dưới 5 tuổi"

    $Q(x)$: "x biết đọc, biết viết"

$R(x)$: "x biết làm 4 phép toán"

$S(x)$: "x bị coi thường".

a) Hãy diễn đạt các mệnh đề sau bằng cách dùng các kí hiệu và phép toán lôgic

A : "Mọi đứa trẻ dưới 5 tuổi đều không biết đọc biết viết"

B : "Không ai bị coi thường nếu biết làm 4 phép toán"

C : "Những ai không biết đọc biết viết thì đều bị coi thường"

D : "Những đứa trẻ dưới 5 tuổi không biết làm 4 phép toán".

b) Nếu mệnh đề A, B và C đúng thì mệnh đề D có nhất thiết đúng hay không ?

11. Cho $P(x)$, $Q(x)$ là hai mệnh đề chứa biến. Chứng minh rằng mệnh đề "$\exists x \in X, P(x) \wedge Q(x)$" không nhất thiết tương đương với mệnh đề

$$\text{"}(\exists x \in X, P(x)) \wedge (\exists x \in X, Q(x))\text{"}.$$

12. Cho $P(x)$, $Q(y)$ là hai mệnh đề chứa biến. Chứng minh rằng mệnh đề

$$P : \text{"}(\forall x \in X, P(x)) \vee (\exists y \in Y, Q(y))\text{"}$$

tương đương với mệnh đề

$$Q : \text{"}\forall x \in X, \exists y \in Y : P(x) \vee Q(y)\text{"}.$$

§3. ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

1. Diễn đạt một định lí

Các định lí trong toán học là các mệnh đề đúng. Nhiều định lí trong toán học có thể diễn đạt bằng các mệnh đề chứa biến có chứa các phép toán mệnh đề, các lượng từ "với mọi" và "tồn tại' có dạng như

"$\forall x \in X : P(x)$"

"$\exists x \in X : P(x)$"

"$\forall x \in X, \exists y \in Y : P(x, y)$"

"$\exists x \in X, \forall y \in Y : P(x, y)$"

"$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$".

Ví dụ 1

a) Kí hiệu $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên. Gọi $P(a, b)$ là mệnh đề chứa biến : "$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ với a, b là số nguyên". Khi đó định lí : "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ" có thể diễn đạt dưới dạng

$$\text{“}\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z} : \overline{P(a,b)}\text{”}.$$

b) Kí hiệu N^* là tập hợp các số nguyên dương, T là tập hợp các số nguyên tố. Gọi $P(n, p)$ là mệnh đề chứa biến : "$p > n$ với n là số nguyên dương, p là số nguyên tố". Khi đó định lí : "Có vô số số nguyên tố" có thể diễn đạt dưới dạng

$$\text{“}\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p \in T : P(n,p)\text{”}.$$

c) Kí hiệu X là tập hợp các tam giác, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến : "x là tam giác vuông", $Q(x)$ là mệnh đề chứa biến : "Tổng bình phương hai cạnh của x bằng bình phương cạnh còn lại". Khi đó định lí Pythagoras có thể phát biểu là

$$\text{“}\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x)\text{”}.$$

2. Điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ

Cho hai mệnh đề chứa biến $P(x)$ và $Q(x)$. Xét định lí có dạng

$$\text{“}\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)\text{”}. \qquad (1)$$

$P(x)$ được gọi là *giả thiết* và $Q(x)$ được gọi là *kết luận*.

Định lí dạng (1) còn được phát biểu :

$P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$

hoặc $Q(x)$ là điều kiện cần để có $P(x)$.

Xét mệnh đề $\forall x \in X, Q(x) \Rightarrow P(x)$. (2)

Nếu mệnh đề (2) đúng thì nó được gọi là *định lí đảo* của định lí dạng (1). Lúc đó định lí dạng (1) sẽ được gọi là *định lí thuận*. Định lí thuận và đảo có thể viết gộp thành một định lí

$$\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x). \qquad (3)$$

Khi đó ta nói $P(x)$ là *điều kiện cần và đủ* để có $Q(x)$.

Ngoài ra ta còn nói : "$P(x)$ nếu và chỉ nếu $Q(x)$" hoặc : "$P(x)$ khi và chỉ khi $Q(x)$" hoặc "Điều kiện cần và đủ để có $P(x)$ là có $Q(x)$".

Ví dụ 2

a) Xét định lí : "Với mỗi số tự nhiên n, nếu n chia hết cho 24 thì n chia hết cho 8".

Định lí này có dạng $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$

trong đó $P(n)$ là : "n chia hết cho 24", $Q(n)$ là : "n chia hết cho 8".

Ta còn có thể phát biểu định lí này dưới dạng : "n chia hết cho 24 là điều kiện đủ để n chia hết cho 8" hoặc dưới dạng : "n chia hết cho 8 là điều kiện cần để n chia hết cho 24".

b) Xét định lí 1 : "Nếu một tứ giác lồi nội tiếp được trong đường tròn thì tổng hai góc đối của nó bằng 180°" và định lí 2 : "Nếu một tứ giác lồi có tổng hai góc đối bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được trong đường tròn".

Định lí 2 là định lí đảo của định lí 1. Hai định lí 1 và 2 có thể phát biểu gộp lại thành định lí 3 : "Một tứ giác lồi nội tiếp được trong đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối của nó bằng 180°".

Định lí 3 này có dạng $\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

trong đó X là tập hợp các tứ giác lồi, $P(x)$ là "x nội tiếp được trong đường tròn" và $Q(x)$ là "x có tổng hai góc đối bằng 180°".

Ta còn có thể phát biểu định lí 3 như sau : "Điều kiện cần và đủ để tứ giác nội tiếp được trong đường tròn là tổng hai góc đối của nó bằng 180°". □

3. Phương pháp chứng minh trực tiếp và gián tiếp (bằng phản chứng)

Chứng minh một định lí là dùng suy luận và các kiến thức đã biết để chứng tỏ rằng khẳng định nêu trong định lí là đúng.

Chẳng hạn xét định lí

$$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x). \qquad (4)$$

Chứng minh định lí (4) là dùng suy luận và các kiến thức đã biết để khẳng định rằng mệnh đề (4) là đúng, tức là cần chứng tỏ rằng với mỗi $x \in X$ thì mệnh đề "$P(x) \Rightarrow Q(x)$" là mệnh đề đúng.

Ta thấy nếu với $x \in X$ mà $P(x)$ sai thì theo định nghĩa, mệnh đề $P(x) \Rightarrow Q(x)$ là đúng.

Do đó chỉ cần xét với $x \in X$ mà $P(x)$ đúng. Thành thử việc chứng minh (4) đúng quy về hai bước sau :

- Lấy x_0 tuỳ ý thuộc X mà $P(x_0)$ đúng

- Dùng suy luận và các kiến thức đã biết để khẳng định rằng khi đó $Q(x_0)$ cũng đúng.

Phương pháp chứng minh này được gọi là *phương pháp chứng minh trực tiếp.*

Đôi khi việc chứng minh trực tiếp một định lí gặp khó khăn. Khi đó ta có thể dùng cách chứng minh gián tiếp : Thay vì chứng minh khẳng định của định lí là đúng, ta chứng tỏ rằng nếu giả sử khẳng định của định lí là sai thì sẽ dẫn đến mâu thuẫn. Phương pháp chứng minh gián tiếp như vậy được gọi là *chứng minh bằng phản chứng.*

Chẳng hạn, để chứng minh định lí (4) bằng phương pháp phản chứng, ta chứng minh mệnh đề phủ định của (4) là sai. Mệnh đề phủ định của (4) là

$$\exists x \in X, \overline{P(x) \Rightarrow Q(x)}. \qquad (5)$$

Từ ví dụ 10, §1, ta có (5) tương đương với

$$\exists x \in X, P(x) \wedge \overline{Q(x)}. \qquad (6)$$

Thành thử chứng minh (4) đúng tương đương với chứng minh (6) sai. Chứng minh (6) sai bao gồm hai bước sau :

- Giả sử tồn tại $x_0 \in X$ mà $P(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai.

- Dùng suy luận và kiến thức đã biết để đi đến mâu thuẫn. Do đó (6) sai và như vậy (4) đúng.

Ví dụ 3. Chứng minh bằng phản chứng định lí sau : "Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Khi đó mọi đường thẳng cắt a thì phải cắt b".

Giải. Giả sử tồn tại đường thẳng c cắt a nhưng không cắt b, tức là c cắt a và c song song với b. Gọi M là giao điểm của a và c. Khi đó qua M có hai đường thẳng a và c phân biệt cùng song song với b. Điều này mâu thuẫn với tiên đề Euclid. □

4. Phương pháp chứng minh bằng quy nạp

a) Phép quy nạp

Cho $P(n)$ là mệnh đề chứa biến với n là số nguyên dương. Xét định lí có dạng sau

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n). \qquad (7)$$

Để chứng minh định lí (7) này, có một phương pháp rất hữu hiệu gọi là *phương pháp quy nạp toán học* (gọi tắt là *phép quy nạp*).

Chứng minh định lí (7) bằng quy nạp bao gồm hai bước sau

Bước 1 (bước cơ sở) : Chỉ ra rằng mệnh đề $P(1)$ đúng.

Bước 2 (bước quy nạp) : Chứng minh mệnh đề

$$\forall n \in N^*, P(n) \Rightarrow P(n+1) \qquad (8)$$

là mệnh đề đúng. Vì (8) chỉ sai khi $P(n)$ đúng và $P(n+1)$ sai nên việc chứng minh (8) đúng quy về việc chứng minh :

Với mọi số nguyên dương n, nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng.

Việc "giả sử $P(n)$ đúng" được gọi là *giả thiết quy nạp*.

Bước quy nạp thường là bước quan trọng và khó khăn nhất. Ta còn gọi bước quy nạp là "Bước chuyển từ n sang $n+1$".

***Định lí* 1** (Nguyên lí quy nạp)

> *Nếu bước cơ sở và bước quy nạp đúng thì mệnh đề (7) đúng (tức là $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n).*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử (7) sai, tức là mệnh đề phủ định của (7) đúng. Mệnh đề phủ định của (7) là

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \overline{P(n)}. \qquad (9)$$

Vậy tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $P(n_0)$ sai. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương n để $P(n)$ sai. Khi đó $n_0 \in S$, do đó S là tập khác rỗng. Vì mọi tập con khác tập rỗng của tập các số nguyên dương đều có phần tử nhỏ nhất nên S có phần tử nhỏ nhất, kí hiệu là k. Theo bước cơ sở, $P(1)$ đúng nên $k \neq 1$, tức là $k > 1$. Vì thế $k-1 \in \mathbb{N}^*$. Vì $k \in S$ là phần tử nhỏ nhất của S và $k-1 < k$ nên $k-1 \notin S$. Vậy $P(k-1)$ đúng. Theo bước quy nạp, mệnh đề $P(k-1) \Rightarrow P(k)$ là mệnh đề đúng nên $P(k)$ phải là mệnh đề đúng, nghĩa là $k \notin S$. Ta có mâu thuẫn. Vậy (8) sai, do đó (7) đúng. □

Ví dụ 4. Cho n đường thẳng nằm trong cùng một mặt phẳng và ở vị trí tổng quát (tức là không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy).

Chứng minh rằng n đường thẳng này chia mặt phẳng thành $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ miền.

Giải. Giả sử n đường thẳng ở vị trí tổng quát chia mặt phẳng thành $S(n)$ miền. Ta cần chứng minh khẳng định $P(n)$: "$\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n) = \dfrac{n^2+n+2}{2}$".

Chứng minh bằng quy nạp.

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng. Thật vậy một đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 miền và $S(1) = 2$.

Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng. Ta cần chứng minh $P(n+1)$ đúng. Kí hiệu $n + 1$ đường thẳng là $d_1, d_2, \ldots, d_n, d_{n+1}$. Xét n đường thẳng $d_1, d_2, \ldots, d_n$, chúng chia mặt phẳng thành $S(n)$ miền. Khi kẻ thêm đường thẳng d_{n+1}, đường thẳng này bị n đường thẳng $d_1, d_2, \ldots, d_n$ cắt tại n điểm phân biệt, do đó đường thẳng d_{n+1} đi qua $n + 1$ miền đã cho, mỗi miền này được chia làm hai, do đó d_{n+1} tạo ra $n + 1$ miền mới. Thành thử

$$S(n+1) = S(n) + (n+1).$$

Theo giả thiết quy nạp, $S(n) = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Suy ra $S(n+1) = \dfrac{n^2+n+2}{2} + (n+1) = \dfrac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$.

Vậy $P(n+1)$ đúng. Theo nguyên lí quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n. □

b) Phép quy nạp dạng tổng quát

Trong toán học, ta còn gặp các định lí khẳng định rằng mệnh đề $P(n)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n \geq a$, trong đó a là một số nguyên dương cho trước. Kí hiệu

A là tập các số nguyên dương $n \geq a$. Phương pháp quy nạp để chứng minh định lí dạng

$$\forall n \in A, P(n) \qquad (10)$$

bao gồm hai bước sau:

Bước 1 (Bước khởi đầu với $n = a$) : Chỉ ra rằng mệnh đề $P(a)$ đúng.

Bước 2 (Bước quy nạp) : Chứng minh mệnh đề

$$\forall n \in A, P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

là mệnh đề đúng, tức là chứng minh

Với mọi số nguyên dương $n \geq a$, nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng.

Định lí 2 (*Nguyên lí quy nạp dạng tổng quát*)

> *Nếu bước khởi đầu với $n = a$ và bước quy nạp đúng thì mệnh đề (10) đúng (tức là $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n \geq a$).*

Chứng minh. Ta chứng minh (10) đúng bằng phản chứng. Giả sử trái lại, mệnh đề phủ định của (10) đúng. Mệnh đề phủ định của (10) là

$$\exists n \in A, \overline{P(n)}. \qquad (11)$$

Vậy tồn tại số nguyên dương $n_0 \in A$ sao cho $P(n_0)$ sai. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương $n \in A$ để $P(n)$ sai. Khi đó $n_0 \in S$, do đó S là tập khác rỗng. Vì mọi tập con khác tập rỗng của tập các số nguyên dương đều có phần tử nhỏ nhất nên S có phần tử nhỏ nhất, kí hiệu là k. Theo bước khởi đầu, $P(a)$ đúng nên $k \neq a$. Vì $k \in A$ nên $k \geq a$. Vậy $k > a$. Vì thế $k - 1 \geq a$ tức là $k - 1 \in A$. Vì $k \in S$ là phần tử nhỏ nhất của S và $k - 1 < k$ nên $k - 1 \notin S$. Vậy $P(k-1)$ đúng. Theo bước quy nạp, mệnh đề $P(k-1) \Rightarrow P(k)$ là mệnh đề đúng nên $P(k)$ phải là mệnh đề đúng, nghĩa là $k \notin S$. Ta có mâu thuẫn. Vậy (11) sai, do đó (10) đúng. □

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương $n \geq 7$, ta có

$$n! > 3^n. \qquad (12)$$

Giải

Bước khởi đầu với $n = 7$. Ta có $7! = 5040 > 3^7 = 2187$. Vậy (12) đúng với $n = 7$.

Bước quy nạp. Giả sử (12) đúng với $n \geq 7$ (giả thiết quy nạp). Ta cần chứng minh (12) đúng với $n + 1$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có $n! > 3^n$. Vì $n \geq 7$ nên $n + 1 > 3$. Thành thử

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1).3^n > 3.3^n = 3^{n+1}.$$

Vậy (12) đúng với $n + 1$. Theo nguyên lí quy nạp tổng quát, (12) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 7$. □

c) Dạng mạnh của phép quy nạp

Sau đây là một dạng khác của phép quy nạp cũng thường được sử dụng. Để chứng minh mệnh đề (10) là đúng, ta tiến hành hai bước sau :

Bước 1 (Bước khởi đầu với $n = a$) : Chứng minh mệnh đề $P(a)$ đúng.

Bước 2 (Bước quy nạp mạnh) : Giả thiết rằng mệnh đề $P(k)$ đúng với mỗi số nguyên dương $k \in A$ và $k \leq n$ (giả thiết này gọi là *giả thiết quy nạp mạnh*). Khi đó mệnh đề $P(n + 1)$ đúng.

Đây được gọi là *dạng mạnh của phép quy nạp.*

Trong một số bài toán, sử dụng dạng mạnh của phép quy nạp sẽ giúp việc chứng minh được dễ dàng hơn.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng mọi số nguyên dương $n \geq 12$ đều có thể viết dưới dạng $n = 4x + 5y$, trong đó x, y là các số tự nhiên.

Giải. Gọi $P(n)$ là mệnh đề chứa biến : "Tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho $n = 4x + 5y$", A là tập các số tự nhiên không nhỏ hơn 12. Ta phải chứng minh tính đúng của mệnh đề

$$\forall n \in A, P(n).$$

Bước khởi đầu với $n = 12$: $P(12)$ đúng vì $12 = 4.3 + 5.0$.

Bước quy nạp mạnh : Giả thiết rằng mệnh đề $P(k)$ đúng với mỗi số nguyên dương $k \in A$ và $k \leq n$. Ta phải chứng minh mệnh đề $P(n + 1)$ đúng.

Nếu $n = 12$ thì $n + 1 = 13 = 4.2 + 5.1$. Vậy $P(n + 1) = P(13)$ đúng.

Nếu $n = 13$ thì $n + 1 = 14 = 4.1 + 5.2$. Vậy $P(n + 1) = P(14)$ đúng.

Nếu $n = 14$ thì $n + 1 = 15 = 4.0 + 5.3$. Vậy $P(n + 1) = P(15)$ đúng.

Nếu $n \geq 15$: Khi đó $12 \leq n - 3 \leq n$. Theo giả thiết quy nạp mạnh, $P(n - 3)$ đúng, do đó tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho $n - 3 = 4x + 5y$.

Vậy $n + 1 = n - 3 + 4 = 4x + 5y + 4 = 4(x + 1) + 5y$.

Vậy $P(n + 1)$ đúng.

Theo nguyên lí quy nạp mạnh dạng tổng quát, ta có điều phải chứng minh. □

Bài tập

13. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu các định lí sau :

a) Nếu một số nguyên dương biểu diễn được thành tổng của hai bình phương thì số đó có dạng $4k + 1$.

b) Nếu m, n là hai số nguyên dương sao cho $m^2 + n^2$ là một số chính phương thì mn chia hết cho 12.

14. Cho hai số thực x và y. Chứng minh bằng phản chứng rằng

nếu $x \neq -1$, $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

15. Chứng minh bằng phản chứng định lí :

Có vô số số nguyên tố dạng $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

16. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh bằng phản chứng rằng $\sqrt{p}$ là số vô tỉ.

17. Chứng minh rằng

$$1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

18. Chứng minh rằng $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ chia hết cho 21 với mọi số nguyên dương n.

19. Chứng minh rằng $3^{2n+1} + 40n - 67$ chia hết cho 64 với mọi số nguyên dương n.

20. Cho n số dương $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Chứng minh rằng với $n \geq 3$, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i}$$

với quy ước $x_{n+1} = x_1$.

§4. TẬP HỢP

1. Tập hợp

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Ta nhớ lại rằng một tập hợp thường được cho bằng hai cách sau :

1. Liệt kê hết các phần tử của tập hợp;

2. Chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp : Giả sử A là tập hợp tất cả các phần tử x thuộc X có tính chất P. Khi đó ta viết

$$A = \{ x \in X \mid x \text{ có tính chất } P \}.$$

Chẳng hạn : Cho $P(x)$ là mệnh đề chứa biến xác định trên tập X. Gọi A là tập hợp các $x \in X$ sao cho $P(x)$ đúng. Ta viết

$$A = \{ x \in X \mid P(x) \}.$$

Người ta thường dùng các chữ in rỗng để kí hiệu các tập hợp. Tập hợp các số tự nhiên $\{0; 1; 2; ...\}$ được kí hiệu bởi $\mathbb{N}$; tập hợp các số nguyên dương $\{1; 2; ...\}$ được kí hiệu bởi $\mathbb{N}^*$; tập hợp các số nguyên $\{..., -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$ được kí hiệu bởi $\mathbb{Z}$, tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu bởi $\mathbb{Q}$ và tập hợp các số thực được kí hiệu bởi $\mathbb{R}$.

Trong các chương sau, ta thường sử dụng các tập con sau đây của tập số thực

Tên gọi và kí hiệu	***Tập hợp***
Đoạn $[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$
Khoảng $(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Nửa khoảng $[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$
Nửa khoảng $(a ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$
Nửa khoảng $(-\infty ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$
Nửa khoảng $[a ;+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$
Khoảng $(-\infty ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
Khoảng $(a;+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Nói chung khi nói đến tập hợp là người ta nói đến các phần tử của nó. Tuy nhiên người ta cũng xét đến một tập hợp đặc biệt không chứa phần tử nào. Tập hợp đó được gọi là tập rỗng và được kí hiệu là $\varnothing$. Ví dụ : tập hợp các số nguyên dương lớn hơn bình phương của nó là tập rỗng.

a) Tập hợp bằng nhau

Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau và kí hiệu là $A = B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và mỗi phần tử của B là một phần tử của A.

Kí hiệu $(x \in A)$ là mệnh đề chứa biến "Phần tử x thuộc tập hợp A".

Như vậy $A = B$ khi và chỉ khi mệnh đề sau là đúng

$$\forall x, (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B).$$

Nếu tập A và tập B không bằng nhau, ta nói A khác B và kí hiệu là $A \neq B$. Như vậy, $A \neq B$ nếu có một phần tử của A không là phần tử của B hoặc có một phần tử của B không là phần tử của A.

b) Tập con

Tập A được gọi là tập con của tập B và kí hiệu là $A \subset B$ nếu mỗi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B. Như vậy $A \subset B$ khi và chỉ khi mệnh đề sau là đúng

$$\forall x, (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Từ định nghĩa ta thấy :

• Mọi tập A là tập con của chính nó : $A \subset A$ với mọi tập A.

Khi ta muốn nhấn mạnh rằng A là tập con của B nhưng $A \neq B$, ta nói A là tập con thực sự của B.

• $A = B$ khi và chỉ khi $A \subset B$ và $B \subset A$.

• Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp : $\varnothing \subset A$ với mọi tập A. Thật vậy xét mệnh đề

$$\forall x, (x \in \varnothing) \Rightarrow (x \in A). \qquad (1)$$

Với mọi x, $(x \in \varnothing)$ là mệnh đề sai, do đó mệnh đề kéo theo "$(x \in \varnothing) \Rightarrow (x \in A)$" là đúng với mọi x. Vậy mệnh đề (1) đúng. Điều đó chứng tỏ $\varnothing \subset A$.

c) Biểu đồ Ven

Các tập hợp có thể minh hoạ trực quan bằng hình vẽ nhờ biểu đồ Ven do nhà toán học Anh John Venn đưa ra năm 1881. Trong biểu đồ Ven, người ta dùng những hình giới hạn bởi một đường khép kín để biểu diễn tập hợp.

2. Các phép toán trên tập hợp

a) Phép hợp

Cho hai tập hợp A và B. *Hợp của A và B*, kí hiệu là $A \cup B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B. Như vậy

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Do đó mệnh đề $x \in A \cup B$ chính là mệnh đề $(x \in A) \vee (x \in B)$.

Một cách tổng quát : Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Hợp của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, là tập gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong số các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Như vậy

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\}.$$

b) Phép giao

Cho hai tập hợp A và B. *Giao của A và B*, kí hiệu là $A \cap B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc cả A và B. Như vậy

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Do đó mệnh đề $x \in A \cap B$ chính là mệnh đề $(x \in A) \wedge (x \in B)$.

Một cách tổng quát : Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Giao của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kí hiệu là $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, gồm tất cả các phần tử thuộc tất cả các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Như vậy

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x \in A_n)\}.$$

Ví dụ 1

i) Cho $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $C = \{0; 3; 6; 9\}$. Hãy xác định

$$A \cup B \cup C \text{ và } A \cap B \cap C.$$

ii) Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, trong đó

$$A_i = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq i\} = \{i, i+1, \ldots\}.$$

Hãy xác định $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ và $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

Giải

i) $A \cup B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9\}$ và $A \cap B \cap C = \{0\}$.

ii) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{1; 2; 3; \ldots\} = \mathbb{N}^*$.

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{n, n+1, ..\} = A_n$. □

c) Phép lấy hiệu

Cho hai tập hợp A và B. *Hiệu của A và B*, kí hiệu là $A \setminus B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Như vậy

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Do đó mệnh đề $x \in A \setminus B$ chính là mệnh đề $(x \in A) \wedge (x \notin B)$.

Ví dụ 2. Cho nửa khoảng $A = (1; 3]$ và đoạn $B = [2; 4]$.

Khi đó $A \setminus B$ là khoảng $(1; 2)$.

d) Phép lấy phần bù

- Cho A là tập con của E. *Phần bù của A trong E*, kí hiệu là $C_E A$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc E nhưng không thuộc A. Như vậy

$$C_E A = E \setminus A.$$

- Cho tập A. *Phần bù của tập A*, kí hiệu là $\overline{A}$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử không thuộc A. Như vậy

$$\overline{A} = \{x \mid \overline{(x \in A)}\}.$$

Do đó mệnh đề $x \in \overline{A}$ chính là mệnh đề $\overline{(x \in A)}$.

e) Chứng minh các đẳng thức tập hợp

Để chứng minh hai tập hợp của hai vế của một đẳng thức tập hợp bằng nhau, thông thường ta có thể tiến hành theo hai cách :

- Cách thứ nhất là ta sẽ chứng minh tập hợp vế bên này là tập con của tập vế bên kia và ngược lại.

• Cách thứ hai là dùng mệnh đề và các phép toán mệnh đề.

Ví dụ 3. Chứng minh quy tắc De Morgan

i) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

ii) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

Giải

i) *Cách 1* : Giả sử $x\in\overline{A\cup B}$. Suy ra $x\notin A\cup B$, nghĩa là $x\notin A$ và $x\notin B$, tức là $x\in\overline{A}$ và $x\in\overline{B}$. Thành thử $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Do đó vế trái là tập con của vế phải.

Ngược lại, giả sử $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, tức là $x\in\overline{A}$ và $x\in\overline{B}$ hay $x\notin A$ và $x\notin B$, nghĩa là x không thuộc cả A và B. Vậy $x\notin A\cup B$ hay $x\in\overline{A\cup B}$. Do đó vế phải là tập con của vế trái. Vậy vế trái bằng vế phải.

Cách 2 : Từ định nghĩa ta có

$$\overline{A\cup B}=\{x\mid\overline{(x\in A\cup B)}\}=\{x\mid\overline{(x\in A)\vee(x\in B)}\}.$$

Sử dụng quy tắc De Morgan ta có

$$\begin{aligned}\{x\mid\overline{(x\in A)\vee(x\in B)}\}&=\{x\mid\overline{(x\in A)}\wedge\overline{(x\in B)}\}\\&=\{x\mid(x\in\overline{A})\wedge(x\in\overline{B})\}=\overline{A}\cap\overline{B}.\end{aligned}$$

ii) Chứng minh tương tự (xin dành cho bạn đọc). □

Ví dụ 4. Cho A, B, C là ba tập con bất kì, chứng minh rằng :

i) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

ii) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Công thức trên được gọi là *luật phân phối của phép hợp và phép giao*.

Giải. i) Từ định nghĩa ta có

$$\begin{aligned}A\cup(B\cap C)&=\{x\mid(x\in A)\vee(x\in B\cap C)\}\\&=\{x\mid(x\in A)\vee((x\in B)\wedge(x\in C))\}.\end{aligned}$$

Sử dụng luật phân phối của phép tuyển và phép hội, ta có

$$\{x \mid (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C))\}$$
$$= \{x \mid ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))\}$$
$$= \{x \mid (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)\}$$
$$= \{x \mid x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\}$$
$$= (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

ii) Chứng minh tương tự (xin dành cho bạn đọc). □

3. Tích Descartes

Cho A và B là hai tập hợp. *Tích Descartes của A và B*, được kí hiệu là $A \times B$, là tập hợp tất cả các cặp $(x; y)$ với $x \in A, y \in B$. Như vậy

$$A \times B = \{(x; y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}.$$

Ví dụ 5. Cho $A = \{1; 2\}$ và $B = \{4; 5; 6\}$. Xác định $A \times B$ và $B \times A$.

Giải

$$A \times B = \{(1; 4); (1; 5); (1; 6); (2; 4); (2; 5); (2; 6)\}.$$
$$B \times A = \{(4; 1); (4; 2); (5; 1); (5; 2); (6; 1); (6; 2)\}.$$

Ví dụ trên cho thấy tích Descartes $A \times B$ khác tích Descartes $B \times A$.

Một cách tổng quát, cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tích Descartes của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kí hiệu là $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, là tập hợp tất cả các dãy có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Như vậy:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \in A_n)\}. \ \square$$

Ví dụ 6. Cho $A = \{0; 1\}$, $B = \{1; 2\}$ và $C = \{0; 1; 2\}$. Xác định $A \times B \times C$.

Giải

$$A \times B \times C = \{(0, 1, 0); (0, 1, 1); (0, 1, 2); (0, 2, 0); (0, 2, 1); (0, 2, 2); (1, 1, 0);$$
$$(1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 2, 0); (1, 2, 1); (1, 2, 2)\}.$$

Đó là một tập hợp gồm 12 phần tử.

Bài tập

21. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 0,5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 1\}$.

    Tìm $A \cup B$ và $A \cap B$.

22. Chứng tỏ rằng các mệnh đề sau là mệnh đề sai

    i) Với mọi tập A, B, C, nếu $A \cup C = B \cup C$ thì $A = B$.

    ii) Với mọi tập A, B, C, nếu $A \cap C = B \cap C$ thì $A = B$.

23. Cho A, B, C là các tập hợp. Chứng minh rằng

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

24. Chứng tỏ rằng mệnh đề sau là mệnh đề sai

    Với mọi tập A, B, C, nếu $A \cap B = B \cap C$ thì $A = B$.

25. Cho hai tập A, B. *Hiệu đối xứng* của A và B, kí hiệu là $A \Delta B$, là tập hợp các phần tử thuộc A hoặc B nhưng không thuộc cả A và B.

    a) Chứng minh rằng nếu $A \Delta B = A$ thì $B = \varnothing$.

    b) Chứng minh rằng nếu $A \Delta C = B \Delta C$ thì $A = B$.

26. Cho $A \times B = \varnothing$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai tập (A hoặc B hoặc cả hai) là tập rỗng.

§5. ÁNH XẠ

1. Ánh xạ là gì ?

Cùng với tập hợp, ánh xạ là một khái niệm rất quan trọng và rất cơ bản của toán học. Nó có mặt trong tất cả các lĩnh vực toán học. Khái niệm ánh xạ chính là sự mở rộng tự nhiên của khái niệm hàm số.

Định nghĩa

> *Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một (và chỉ một) phần tử của Y. Phần tử này được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f và được kí hiệu là $f(x)$.*

Tập hợp X được gọi là tập xác định của f. Tập hợp Y được gọi là tập giá trị của f.

Ánh xạ f từ X đến Y được kí hiệu là $f: X \to Y$ hay $x \mapsto f(x)$.

Khi X và Y là tập con của tập số thực, ánh xạ f được gọi là một hàm số xác định trên X.

Cho $a \in X$ và $y \in Y$. Nếu $f(a) = y$ thì ta nói y là *ảnh* của a và a là *nghịch ảnh* của y qua ánh xạ f. Chú ý rằng mỗi phần tử a của X đều có một ảnh duy nhất (là phần tử $f(a)$). Mỗi phần tử y của Y có thể có một hay nhiều nghịch ảnh và cũng có thể không có nghịch ảnh nào.

Tập $f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$ gọi là *tập ảnh* của f. Nói cách khác, tập ảnh $f(X)$ là tập tất cả các phần tử của Y mà có nghịch ảnh.

Các ví dụ về ánh xạ rất đa dạng, từ toán học đến thực tiễn cuộc sống.

Ví dụ 1

a) Cho f là ánh xạ từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{Z}$ đặt tương ứng mỗi số nguyên n với bình phương của nó. Như vậy $f(n) = n^2$. Tập ảnh của f là tập các số chính phương $\{0, 1, 4, 9, ...\}$.

b) Cho X là tập hợp các lớp học của một trường phổ thông, Y là tập hợp các giáo viên của trường đó và f là quy tắc đặt tương ứng mỗi lớp học với giáo viên chủ nhiệm lớp đó. Ta có ánh xạ $f: X \to Y$.

c) Cho tập $A = \{a; b; c\}$ và X là tập hợp tất cả các tập con của A.

$$X = \{\varnothing; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{b; c\}; \{c, a\}; \{a; b; c\}\}.$$

Ánh xạ f là quy tắc đặt mỗi tập con của A với số phần tử của tập đó, chẳng hạn $f(\{b; c\}) = 2$, $f(\varnothing) = 0$.

Ta có ánh xạ $f: X \to \mathbb{N}$. Tập ảnh của f là tập $f(X) = \{0; 1; 2; 3\}$. Các phần tử 0 và 3 có một nghịch ảnh ; các phần tử 1 và 2 có 3 nghịch ảnh.

d) Cho X là tập hợp các học sinh của một trường phổ thông, Y là tập hợp các lớp học của trường đó và f là quy tắc đặt tương ứng mỗi học sinh với lớp học của em đó. Ta có ánh xạ $f: X \to Y$. Tập ảnh của f là tập các lớp học. Nghịch ảnh của mỗi lớp học là học sinh của lớp học ấy, do đó sĩ số của lớp học là số nghịch ảnh của lớp học.

e) Tại một cơ sở giết mổ gia cầm, gọi X là tập hợp các con gà được đưa vào giết mổ, Y là tập hợp các con gà đã được giết mổ và đóng gói và f là quy tắc đặt tương ứng mỗi con gà được đưa vào giết mổ với con gà đó được đóng gói sau giết mổ. Ta có ánh xạ $f: X \to Y$. Trong văn cảnh cở nội dung kinh tế này, phần tử x thuộc X được gọi là đầu vào (input) và ảnh $y = f(x)$ được gọi là đầu ra (output).

f) Cho $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ. Ta xác định quy tắc f đặt tương ứng mỗi số hữu tỉ r biểu diễn bởi phân số $\frac{m}{n}$ với tử số m. Đây không phải là một ánh xạ vì theo quy tắc này, một số hữu tỉ có thể có nhiều ảnh, chẳng hạn với $r = 0,5$ thì nếu r biểu diễn bởi $r = \frac{1}{2}$ thì $f(0,5) = 1$ nhưng nếu r biểu diễn bởi $r = \frac{3}{6}$ thì $f(0,5) = 3$. □

2. Đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Định nghĩa

i) Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu với $a \in X$, $b \in X$ mà $a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$, tức là hai phần tử phân biệt sẽ có hai ảnh phân biệt. Rõ ràng ánh xạ f là đơn ánh khi và chỉ khi với $a \in X$, $b \in X$ mà $f(a) = f(b)$, ta phải có $a = b$.

ii) Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu với mỗi phần tử $y \in Y$ đều tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Như vậy $f: X \to Y$ là toàn ánh nếu và chỉ nếu $Y = f(X)$.

iii) Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là song ánh giữa X và Y nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Như vậy $f: X \to Y$ là song ánh nếu và chỉ nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại và duy nhất một phần tử $x \in X$ để $f(x) = y$.

Ví dụ 2

i) Hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = x^2$ không phải là đơn ánh vì $f(-1) = f(1)$ trong khi hàm số $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $g(x) = x^3$ là một đơn ánh. Ánh xạ trong Ví dụ 1c ở trên không là đơn ánh vì $f(\{a; b\}) = f(\{b, c\}) = 2$.

ii) Hàm $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ cho bởi $f(n) = n + 10$ là một toàn ánh vì với mỗi số nguyên a thì số nguyên $a - 10$ có ảnh là a. Hàm $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ cho bởi $g(n) = 4n + 1$ không là toàn ánh vì với số nguyên $b = 3$, không có số nguyên a nào để $4a + 1 = 3$. Ánh xạ f trong ví dụ 1d là toàn ánh (hiển nhiên) trong khi ánh xạ f trong ví dụ 1b là toàn ánh khi và chỉ khi mỗi giáo viên trong trường đều làm giáo viên chủ nhiệm một lớp nào đó.

iii) Hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ cho bởi $f(n) = n + 10$ là một song ánh vì với mỗi số nguyên a thì $f(x) = a$ nếu và chỉ nếu $x = a - 10$. Hàm $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cho bởi $g(x) = x^3$ cũng là một song ánh vì với mỗi số thực a thì $f(x) = a$ nếu và chỉ nếu $x = \sqrt[3]{a}$. Ánh xạ f nêu trong ví dụ 1b là song ánh nếu mỗi giáo viên trong trường đều làm giáo viên chủ nhiệm một lớp nào đó vì mỗi giáo viên chỉ làm chủ nhiệm nhiều nhất một lớp. Ánh xạ f nêu trong ví dụ 1d không là song ánh (trừ khi mỗi lớp học chỉ có duy nhất một học sinh). □

Từ định nghĩa dễ thấy : Nếu $f : X \to Y$ là một đơn ánh thì f sẽ là một song ánh giữa X và tập ảnh $f(X)$ của nó.

3. Ánh xạ ngược của một song ánh

Cho $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, với mỗi $y \in Y$, tồn tại và duy nhất một phần tử $x \in X$ để $f(x) = y$. Phần tử duy nhất $x \in X$ này được gọi là ảnh của phần tử y qua *ánh xạ ngược của f*. Như vậy ta có

Ánh xạ ngược của f, được kí hiệu bởi f^{-1}, là ánh xạ từ Y đến X gán cho mỗi phần tử $y \in Y$ phần tử duy nhất $x \in X$ mà $f(x) = y$. Như vậy

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Chú ý. Nếu f không phải là song ánh thì ta không thể định nghĩa được ánh xạ ngược của f. Do đó chỉ có song ánh mới có ánh xạ ngược.

Ví dụ 3

i) Cho $X = \{a; b; c\}$ và $Y = \{1; 2; 3\}$. Ta định nghĩa $f : X \to Y$ như sau

x	a	b	c
$f(x)$	2	3	1

Rõ ràng f là song ánh. Ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$ được xác định trong bảng sau đây

y	1	2	3
$f^{-1}(y)$	c	a	b

ii) Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^3$. Vì $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$ nên ánh xạ ngược $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. □

4. Ánh xạ hợp

Cho g là ánh xạ từ tập A đến tập B và f là ánh xạ từ tập B đến tập C.

Nếu $g(a) \in B$ với mỗi $a \in A$ (tức là $g(A) \subset B$) thì ta có thể xác định một ánh xạ từ A đến C theo quy tắc sau : Đặt tương ứng mỗi phần tử $a \in A$ với phần tử $f\big(g(a)\big) \in C$.

Ánh xạ này được gọi là *ánh xạ hợp* của ánh xạ f và ánh xạ g, kí hiệu là $f \circ g$.

Như vậy ta có :

Nếu $g: A \to B$ và $f: B \to C$ và $g(A) \subset B$ thì ánh xạ hợp $f \circ g: A \to C$ được xác định bởi

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Ví dụ 4. Cho $A = B = \{a, b, c\}$; $C = \{1; 2; 3\}$, $g: A \to B$ và $f: B \to C$ được cho như sau

$$g(a) = b,\ g(b) = c,\ g(c) = a.$$

$$f(a) = 3,\ f(b) = 2 \text{ và } f(c) = 1.$$

Hãy xác định ánh xạ hợp $f \circ g$ của f và g, ánh xạ hợp $g \circ f$ của g và f.

Giải. Ta có $f \circ g: A \to C$ được xác định như sau

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$$
$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$$
$$(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3.$$

Ánh xạ hợp $g \circ f$ không được xác định vì tập ảnh của f (tập C) không là tập con của tập xác định của g (tập A). □

Trong trường hợp f, g là các hàm số thì ánh xạ hợp của f và g được gọi là *hàm số hợp* của hàm số f và g. Hàm số g gọi là *hàm số trung gian*.

Ví dụ 5. Cho $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ và $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ là hai hàm số xác định trên tập số nguyên và lấy giá trị nguyên, cho bởi công thức sau

$$f(n) = 2n + 3 \text{ và } g(n) = 3n + 2.$$

Hãy xác định các hàm số hợp $f\circ g$ của f và g, $g\circ f$ của g và f.

Giải. Hàm số hợp $f\circ g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ được xác định như sau

$$(f\circ g)(n) = f(g(n)) = f(3n+2) = 2(3n+2)+3 = 6n+7.$$

Hàm số hợp $g\circ f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ được xác định như sau

$$(g\circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n+3) = 3(2n+3)+2 = 6n+11.\ \square$$

Ví dụ trên cho thấy ánh xạ hợp $f\circ g$ của f và g khác ánh xạ hợp $g\circ f$ của g và f. Như vậy, thứ tự của việc lấy hợp là quan trọng.

Chú ý. Trong trường hợp tập ảnh $g(A)$ của g không phải là tập con của tập xác định B của f nhưng có một tập con D của A sao cho $g(a)\in B$ với mỗi $a\in D$ thì ta vẫn có thể xác định được ánh xạ hợp $f\circ g: D\to C$ như trước:

$$(f\circ g)(a) = f(g(a)).$$

Tuy nhiên lần này ánh xạ hợp sẽ có tập xác định là tập D thay vì tập A.

Ví dụ 6. Cho hai hàm số $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ và $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ và } g(x) = x - 1.$$

Tìm hàm số hợp $f\circ g$ và chỉ rõ miền xác định của hàm số hợp.

Giải. Tập ảnh của g là toàn bộ trục số, do đó không phải là tập con của $[0;+\infty)$. Tuy nhiên với mỗi $x\in[1;+\infty)$ thì $g(x)\ge 0$. Vậy ta có hàm số hợp $f\circ g$ với tập xác định $[1;\infty)$ là hàm số $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x-1}$. $\square$

5. Ứng dụng vào bài toán đếm

Ta xét một ứng dụng của khái niệm ánh xạ trong các bài toán đếm (bài toán xác định số phần tử của một tập hợp).

Giả sử rằng có đàn chim bồ câu bay vào một dãy n chuồng. Đặt tương ứng mỗi con chim với chuồng mà nó bay vào xác định cho ta một ánh xạ f từ đàn chim vào dãy chuồng. Nếu f là một đơn ánh thì ta kết luận rằng mỗi chuồng chỉ có nhiều nhất một con chim, từ đó suy ra đàn chim có tối đa là n con. Nếu f là song ánh thì ta kết luận rằng mỗi chuồng chỉ có đúng một con chim và không có chuồng nào trống, từ đó suy ra đàn chim có đúng n con. Nếu f là toàn ánh nhưng không là song ánh thì ta kết luận không có chuồng nào trống và có ít nhất một chuồng có chứa hai con chim, từ đó suy ra đàn chim có nhiều hơn n con.

Như vậy có thể xác định hay ước lượng số phần tử của một tập hợp A nào đó thông qua một tập hợp B mà ta đã biết số phần tử của nó nhờ thiết lập một ánh xạ giữa A với B và xét xem nó là đơn ánh, toàn ánh hay song ánh.

Kí hiệu số phần tử của một tập hợp hữu hạn X là $|X|$. Ta có định lí sau đây (dễ chứng minh) :

Định lí

> *Cho A và B là hai tập hợp hữu hạn.*
>
> - *Nếu có một đơn ánh $f : A \to B$ thì $|A| \le |B|$.*
> - *Nếu có một toàn ánh $f : A \to B$ thì $|A| \ge |B|$.*
> - *Nếu có một song ánh $f : A \to B$ thì $|A| = |B|$.*

Ví dụ 7. Gọi C_n^k là số tập con có k phần tử của một tập có n phần tử ($1 \le k \le n$).

a) Chứng minh rằng $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ với $1 \le k \le n$.

b) Từ đó suy ra $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Giải. a) Xét tập $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \}$. Mỗi tập con M của A có k phần tử được chia thành hai loại : loại 1 gồm các tập không chứa a_{n+1}; loại 2 gồm các tập chứa a_{n+1}. Các tập loại 1 gồm tất cả các tập con có k phần tử của tập $B = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$, do đó số tập loại 1 là C_n^k. Mỗi tập loại 2 có dạng $M = K \cup \{a_{n+1}\}$, trong đó K là tập con của B có $k-1$ phần tử. Dễ thấy ánh xạ f đặt tương ứng mỗi tập M loại 2 với tập con K của B bằng cách bỏ đi phần tử a_{n+1} là một song ánh. Do đó số tập loại 2 là C_n^{k-1}. Vậy số tập con của A có k phần tử là $C_n^k + C_n^{k-1}$.

b) Dễ kiểm tra được $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$.

Từ đó, bằng quy nạp theo n, ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 8. Một cửa hàng kem có bán ba loại kem : kem xoài, kem sôcôla và kem sữa. Một nhóm có 6 người vào ăn kem và gọi 6 cốc kem. Hỏi họ có bao nhiêu sự lựa chọn?

Giải. Ta thử liệt kê một vài sự lựa chọn

+) 2 kem xoài, 1 kem sôcôla, 3 kem sữa

+) 1 kem xoài, 4 kem sôcôla, 1 kem sữa

+) 2 kem sôcôla, 4 kem sữa

+) 3 kem xoài, 3 kem sữa.

Một sự lựa chọn : "a kem xoài, b kem sôcôla và c kem sữa" được kí hiệu bởi một bộ ba (a, b, c), trong đó a, b, c là các số nguyên không âm thoả mãn $a + b + c = 6$

Chẳng hạn bốn sự lựa chọn ở trên được kí hiệu là các bộ (2, 1, 3), (1, 4, 1), (0, 2, 4) và (3, 0, 3).

Với mỗi bộ ba (a, b, c) như vậy, ta đặt tương ứng với một dãy nhị phân (dãy gồm các chữ số 0 và 1) theo quy tắc sau : viết liên tiếp từ trái sang phải : a số 1, số 0, b số 1, số 0, rồi c số 1.

$$\underbrace{11...1}_{a}0\underbrace{11...1}_{b}0\underbrace{11...1}_{c}$$

Như vậy mỗi bộ ba (a, b, c) được tương ứng với một dãy nhị phân độ dài 8 (tức là gồm 8 kí tự), trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Chẳng hạn $(2, 1, 3) \mapsto 11010111$ $\qquad$ $(1, 4, 1) \mapsto 10111101$

$(0, 2, 4) \mapsto 01101111$ $\qquad$ $(3, 0, 3) \mapsto 11100111$.

Rõ ràng phép tương ứng đó là một đơn ánh. Ngược lại, với mỗi dãy 8 kí tự với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 khi ta đếm từ trái sang phải mà có : a số 1, số 0, b số 1, số 0 và c chữ số 1 thì dãy đó sẽ ứng với bộ (a, b, c) thoả mãn $a + b + c = 6$.

Chẳng hạn dãy 10110111 sẽ ứng với bộ (1, 2, 3), tức là ứng với sự lựa chọn : 1 kem xoài, 2 kem sôcôla và 3 kem sữa. Dãy 01011111 ứng với bộ (0, 1, 5), tức là ứng với sự lựa chọn 1 kem sôcôla và 5 kem sữa.

Như vậy ta đã thiết lập một song ánh giữa tập hợp các sự lựa chọn với tập hợp các dãy nhị phân độ dài 8, trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0. Do đó số các sự lựa chọn bằng số các dãy nhị phân độ dài 8, trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Mặt khác, một dãy nhị phân độ dài 8 với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 tương ứng với cách chọn 2 vị trí trong 8 vị trí để ghi số 0 (6 vị trí còn lại ghi số 1). Thành thử có $C_8^2 = 28$ dãy nhị phân độ dài 8 với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Do đó số các sự lựa chọn là 28. □

Ta đã thấy hai tập hữu hạn A và B có cùng số phần tử khi và chỉ khi tồn tại một song ánh từ A đến B.

Trong trường hợp A và B có vô hạn phần tử, nếu có một phép song ánh giữa A và B thì ta nói rằng A và B có cùng *lực lượng* (hay có cùng *bản số*).

Ví dụ 9. Chứng tỏ rằng tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ và tập hợp các số nguyên dương lẻ L là có cùng lực lượng.

Giải. Xét hàm số $f : \mathbb{N} \to L$ xác định như sau : $f(n) = 2n + 1$. Dễ thấy f là đơn ánh. f cũng là toàn ánh vì với mỗi số lẻ m, ta có $\frac{m-1}{2} \in \mathbb{N}$ và $f\left(\frac{m-1}{2}\right) = m$. □

> ***Chú ý.*** Mặc dù L là một tập con thực sự của N nhưng L vẫn có cùng lực lượng với N. Như vậy, đối với tập vô hạn thì một tập con thực sự của nó có thể có cùng lực lượng với nó. Đây là một thuộc tính chỉ có ở các tập vô hạn. Thật vậy, nếu B là tập con thực sự của A, A có hữu hạn phần tử thì $|A| > |B|$, do đó A và B không thể có cùng lực lượng.

Bài tập

27. Xác định xem các hàm từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{Z}$ cho dưới đây có là đơn ánh không

a) $f(n) = n - 1$ b) $f(n) = n^2 - 1$ c) $f(n) = n^3$ d) $f(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Hàm nào trong các hàm trên là toàn ánh ?

28. Cho g là ánh xạ từ tập A đến tập B và f là ánh xạ từ tập B đến tập C.

a) Chứng minh rằng nếu cả f và g là đơn ánh thì ánh xạ hợp $f \circ g$ cũng là đơn ánh.

b) Chứng minh rằng nếu cả f và g là toàn ánh thì ánh xạ hợp $f \circ g$ cũng là toàn ánh.

29. Cho g là ánh xạ từ tập A đến tập B và f là ánh xạ từ tập B đến tập C.

a) Chứng minh rằng nếu $f \circ g$ là đơn ánh thì g là đơn ánh.

b) Cho ví dụ chứng tỏ nếu $f \circ g$ và f là toàn ánh thì g không nhất thiết là toàn ánh.

30. Cho tập $S = \{1, 2, ..., 2n\}$. Một tập con A của S được gọi là *tập cân* nếu trong tập đó, số các số chẵn và số các số lẻ bằng nhau. Tập rỗng được coi là tập cân vì số các số chẵn và số các số lẻ trong tập rỗng bằng 0. Gọi X là tập hợp tất cả các tập cân của S và Y là họ tất cả các tập con của S có đúng n phần tử.

a) Hãy thiết lập một song ánh từ X vào Y.

b) Xác định số tập cân của S.

31. Cho trước số nguyên dương $n > 3$. Gọi X là tập hợp tất cả các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên không âm có tổng bằng n. Gọi Y là tập hợp các dãy nhị phân có $n + 2$ kí tự, trong đó có n kí tự 1 và 2 kí tự 0.

a) Hãy thiết lập một song ánh từ X đến Y.

b) Xác định số phần tử của X.

§6. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1. Số gần đúng

Trong nhiều tình huống thực tiễn đo đạc hay tính toán, ta không biết được giá trị đúng của đại lượng đang xét mà chỉ xác định được giá trị gần đúng của nó mà thôi.

a) Sai số tuyệt đối

Giả sử $\overline{a}$ là giá trị đúng của một đại lượng và a là giá trị gần đúng của đại lượng đó (tức là giá trị gần đúng của $\overline{a}$). Ta gọi $|\overline{a} - a|$ là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a và kí hiệu là Δ_a.

Vì nói chung ta không biết được giá trị đúng $\overline{a}$ nên cũng không thể biết được chính xác Δ_a. Tuy nhiên ta thường có thể đánh giá được Δ_a không vượt quá một số dương nào đó.

Nếu ta đánh giá được $\Delta_a \le d$, ta nói d là một *cận trên của sai số tuyệt đối*.

Nếu d là một cận trên của sai số tuyệt đối thì

$$a-d \le \overline{a} \le a+d \text{ hay } \overline{a} \in [a-d; a+d].$$

Như vậy, ta không biết giá trị đúng $\overline{a}$ nhưng biết được nó nằm trong một đoạn $[a - d; a + d]$. Khi đó ta quy ước viết

$$\overline{a} = a \pm d.$$

Rõ ràng nếu d càng nhỏ thì sai số tuyệt đối càng bé. Do đó ta nói d là *độ chính xác của số gần đúng a*.

b) Sai số tương đối

Để so sánh độ chính xác của hai phép đo đạc hay tính toán, người ta đưa ra khái niệm sai số tương đối.

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối của a và $|a|$, tức là $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

Vì không biết được chính xác Δ_a nên cũng không biết được chính xác δ_a. Tuy nhiên, nếu đánh giá được độ chính xác của số gần đúng a là d thì từ định nghĩa, ta có sai số tương đối của a không vượt quá $\dfrac{d}{|a|}$.

2. Số quy tròn

Trong thực tế đo đạc và tính toán, nhiều khi người ta chỉ cần biết giá trị gần đúng của một đại lượng với một độ chính xác nào đó (kể cả khi biết giá trị đúng của nó). Khi đó, để cho gọn, các số thường được quy tròn.

Tuỳ mức độ yêu cầu, ta có thể quy tròn một số đến hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm,... hay đến hàng phần chục, hàng phần trăm, hàng phần nghìn,... (gọi chung là hàng quy tròn). Việc quy tròn được thực hiện theo quy tắc sau

– Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn (kể từ trái sang phải) nhỏ hơn 5 : Thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải bởi chữ số 0.

– Nếu trái lại : Thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải bởi chữ số 0 và cộng thêm một đơn vị vào chữ số của hàng quy tròn.

Ví dụ 1

i) Quy tròn số 7216,4 đến hàng chục. Ta thấy chữ số ở hàng quy tròn (hàng chục) là 1. Chữ số ngay sau hàng quy tròn là 6 > 5. Vậy số quy tròn là 7220.

ii) Quy tròn số 2,654 đến hàng phần trăm. Ta thấy chữ số ở hàng quy tròn (hàng phần trăm) là 5. Chữ số ngay sau hàng quy tròn là 4 < 5. Vậy số quy tròn là 2,65.

Ta thấy trong ví dụ trên, sai số tuyệt đối ở i) là $|7216,4 - 7220| = 3,6 < 5 = \frac{10}{2}$

và ở ii) là $|2,654 - 2,65| = 0,004 < 0,005 = \frac{0,01}{2}$.

Một cách tổng quát, nếu thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá một nửa đơn vị của hàng quy tròn đó. Như vậy độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

Chú ý

– Khi quy tròn số đúng $\overline{a}$ đến một hàng nào đó thì ta nói số gần đúng a nhận được là *chính xác tới hàng đó*. Chẳng hạn số gần đúng của số π chính xác tới hàng phần trăm là 3,14; số gần đúng của số $\sqrt{2}$ chính xác tới hàng phần nghìn là 1,414.

– Nếu số đúng $\overline{a}$ chưa được biết chính xác mà chỉ được xác định dưới dạng $\overline{a} = a \pm d$ thì khi được yêu cầu quy tròn $\overline{a}$, ta sẽ quy tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng quy tròn đó.

Chẳng hạn trong một thí nghiệm vật lí, một hằng số vật lí được xác định là

$$\overline{a} = 2,43865 \pm 0,00312.$$

Ta thấy $0,001 < 0,00312 < 0,01$ nên hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm. Vậy ta phải quy tròn số 2,43865 đến hàng phần trăm để được số 2,44. Như vậy ta thông báo hằng số vật lí đó có giá trị quy tròn là 2,44.

3. Chữ số chắc và dạng viết chuẩn của số gần đúng

a) Chữ số chắc

Cho số gần đúng a của số đúng $\overline{a}$ với độ chính xác d. Trong số a, một chữ số được gọi là *chữ số chắc* (hay *đáng tin*) nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

Nhận xét. Từ định nghĩa suy ra tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc là chữ số không chắc.

Ví dụ 2. Trong một cuộc điều tra dân số, số dân của tỉnh A được xác định là 1379425 ± 300 người.

i) Nếu thông báo số dân tỉnh A gần đúng là $a = 1379425$ thì các chữ số chắc của số a là những chữ số nào ?

ii) Giá trị quy tròn của dân số tỉnh A là bao nhiêu ?

Giải. i) Vì $\frac{100}{2} < 300 < \frac{1000}{2}$ nên chữ số hàng trăm là không chắc và chữ số hàng nghìn là chữ số chắc. Vậy các chữ số chắc là 1, 3, 7, 9 và các chữ số không chắc là 4, 2, 5.

ii) Ta có $100 < 300 < 1000$ nên hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần nghìn. Vậy ta phải quy tròn số 1379425 đến hàng nghìn để được số 1379000. Như vậy ta thông báo số dân tỉnh A có giá trị quy tròn là 1379 nghìn người. □

b) Dạng viết chuẩn của số gần đúng

Người ta quy ước dạng viết chuẩn của số gần đúng như sau

– Nếu số gần đúng a là số thập phân không nguyên thì dạng viết chuẩn của a là dạng mà mọi chữ số của nó đều là chữ số chắc.

– Nếu số gần đúng a là nguyên thì dạng viết chuẩn của a là $A.10^k$, trong đó A là số nguyên, 10^k là hàng thấp nhất mà có chữ số chắc (do đó mọi chữ số của A đều là chữ số chắc).

Nhận xét. Từ định nghĩa ta thấy :

– Nếu số gần đúng a là số thập phân không nguyên và hàng thấp nhất của dạng chuẩn đó là hàng $\frac{1}{10^k}$ thì sai số tuyệt đối của a không vượt quá $\frac{1}{2.10^k}$.

  Từ đó ta biết được $a - \frac{1}{2.10^k} \le \overline{a} \le a + \frac{1}{2.10^k}$.

– Nếu số gần đúng a là số nguyên và hàng thấp nhất có chữ số chắc là 10^k thì sai số tuyệt đối của a không vượt quá $\frac{1}{2}10^k$.

  Từ đó ta biết được $a - \frac{1}{2}10^k \le \overline{a} \le a + \frac{1}{2}10^k$.

Ví dụ 3

- Một giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$ được viết dưới dạng chuẩn là $a = 2,236$. Hàng thấp nhất có chữ số chắc là hàng phần nghìn, do đó sai số tuyệt đối của a không vượt quá 0,0005. Do đó ta biết được

$$2,236 - 0,0005 \leq \sqrt{5} \leq 2,236 + 0,0005 \text{ hay } 2,2355 \leq \sqrt{5} \leq 2,2365.$$

- Giá trị gần đúng của số dân Việt nam $\overline{N}$ (năm 2005) được viết dưới dạng chuẩn là $N = 83.10^6$ (83 triệu người). Hàng thấp nhất có chữ số chắc là hàng triệu, do đó sai số tuyệt đối của N không vượt quá 500000. Do đó ta biết được $\overline{N}$ ở trong khoảng từ 82,5 triệu đến 83,5 triệu.

Chú ý. Với quy ước về dạng chuẩn của số gần đúng thì hai số gần đúng 0,14 và 0,140 viết dưới dạng chuẩn có ý nghĩa khác nhau. Số gần đúng 0,14 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,005 còn số gần đúng 0,140 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0005. Số gần đúng 0,140 có độ chính xác cao hơn số gần đúng 0,14.

Bài tập

32. Chứng minh rằng sai số tuyệt đối của $\frac{99}{70}$ so với $\sqrt{2}$ nhỏ hơn 0,000073.

33. Biết rằng $3,14159265 < \pi < 3,14159266$. Trong hai số $\frac{22}{7}$ và $\frac{355}{113}$ dùng để xấp xỉ số π, số nào có sai số tuyệt đối nhỏ hơn ?

Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của hai số này.

34. Giả sử $a > 0$ là một giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$. Xét số $b = \frac{2a+5}{a+2}$.

Chứng minh rằng nếu lấy b làm giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$ thì ta được độ chính xác cao hơn.

35. Một tam giác có ba cạnh đo được như sau :

$$a = 6,3\text{cm} \pm 0,1\text{cm};\ b = 10\text{cm} \pm 0,2\text{cm} \text{ và } c = 15\text{cm} \pm 0,2\text{cm}.$$

Chứng minh rằng chu vi P của tam giác là $P = 31,3\text{cm} \pm 0,5\text{cm}$.

36. Trong một thí nghiệm, hằng số vật lí C được xác định gần đúng là 2,43265 với sai số tuyệt đối không vượt quá 0,00312. Xác định các chữ số chắc của C.

Chương II

HÀM SỐ

§1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Hàm số xuất hiện khi có một đại lượng nào đó phụ thuộc vào một đại lượng khác. Chúng ta xét các tình huống sau:

i) Diện tích A của hình tròn phụ thuộc vào bán kính r của hình tròn đó. Quy tắc kết nối A và r được cho bởi đẳng thức $A = \pi r^2$. Với mỗi một giá trị dương của r, ta có đúng một giá trị tương ứng của A, và ta nói A là một *hàm số của r*.

ii) Dân số thế giới P phụ thuộc vào thời gian t. Bảng dưới đây cho chúng ta dân số xấp xỉ của thế giới $P(t)$ tại thời điểm t cho một số năm.

Ví dụ $P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$.

Năm	*Dân số (triệu người)*
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

Bảng 1

iii) Gọi C là cước dịch vụ chuyển phát nhanh EMS nội tỉnh thì C phụ thuộc vào trọng lượng w của thư. Không có công thức đơn giản để tính C theo w nhưng ở bưu điện có quy tắc để tính được C khi biết w.

Mỗi một tình huống trên đây đều mô tả một quy tắc, theo đó, nếu cho một giá trị của một số (r, t, w trong các ví dụ trên), một số khác sẽ được cho tương ứng (A, P, C). Trong mỗi trường hợp như vậy, ta nói số thứ hai là hàm số của số thứ nhất.

Định nghĩa

> *Cho một tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$.*
>
> ***Hàm số** f xác định trên D là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số x thuộc D với một và chỉ một số, kí hiệu là $f(x)$; số $f(x)$ đó gọi là **giá trị** của hàm số f tại x (đọc là $f(x)$ hay f của x). Vậy hàm số là một ánh xạ từ tập con D của $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ (trong cuốn sách này, ta sẽ xét đến các hàm số của biến số thực và nhận giá trị thực) và viết*
>
> $$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$
>
> *Tập D được gọi là **tập xác định** (hay **miền xác định**), x được gọi là **biến số** hay **đối số** của hàm số f.*

Tập hợp tất cả các giá trị $f(x)$ khi x chạy qua D được gọi là *miền giá trị* của hàm số f. Khi viết $y = f(x)$ thì x còn được gọi là biến số độc lập, y gọi là biến số phụ thuộc.

Có thể hiểu hàm số như một cái máy tự động: cho các giá trị x ở đầu vào, máy sẽ theo những quy tắc của nó tính toán và cho ra giá trị của $f(x)$ ở đầu ra.

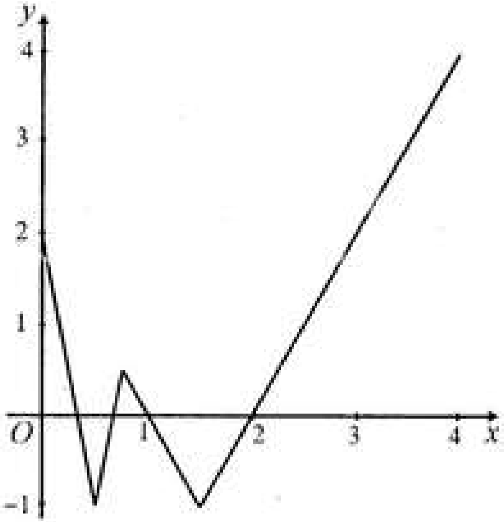
Một trong những cách thường dùng nhất để minh hoạ một hàm số là sử dụng đồ thị. Nếu f là một hàm số có miền xác định D thì *đồ thị* của nó là tập hợp các cặp sắp thứ tự

$$\{(x\,;f(x)) \mid x \in D\}.$$

Nói cách khác, đồ thị của f bao gồm tất cả các điểm $(x\,;\,y)$ của mặt phẳng toạ độ với $y = f(x)$ và x thuộc vào miền xác định.

Qua đồ thị của một hàm số, ta có thể nhận biết nhiều tính chất của hàm số đó.

Ví dụ 1. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[0 ; 4]$ được cho bằng đồ thị như trong hình 2.1.



Hình 2.1

Dựa vào đồ thị đã cho, ta có thể nhận biết được (với độ chính xác nào đó) :

- Giá trị của hàm số tại một số điểm, chẳng hạn $f(0) = 2$, $f(2) = 0$;
- Các giá trị đặc biệt của hàm số, chẳng hạn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0 ; 4]$ là -1 ;
- Dấu của $f(x)$ trên một khoảng, chẳng hạn nếu $2 < x < 4$ thì $f(x) > 0$. □

2. Các phương pháp biểu diễn hàm số

Có 4 cách cơ bản để biểu diễn một hàm số, đó là

- Mô tả bằng lời - Bằng đồ thị

- Bằng số (bảng biểu) - Bằng công thức tường minh.

Nếu như một hàm số có thể biểu diễn được bằng cả bốn cách nói trên thì sẽ có ích nếu chúng ta đi từ một cách biểu diễn này sang cách biểu diễn khác để có thể có những góc nhìn khác nhau về hàm số đó. Tuy nhiên, với một số hàm số, sẽ tự nhiên và thuận lợi hơn nếu sử dụng cách này thay vì cách khác. Ta xem xét lại ba tình huống mở đầu.

i) Cách biểu diễn thuận tiện nhất cho diện tích đường tròn như hàm số của bán kính chính là công thức đại số $A = \pi r^2$, mặc dù ta cũng có thể lập một bảng các giá trị hay vẽ đồ thị tương ứng (một nửa parabol). Bởi vì bán kính của đường tròn là số thực dương nên miền xác định là $\{ r \mid r > 0\} = (0; +\infty)$, miền giá trị cũng là $(0, \infty)$.

ii) Ta đã mô tả hàm số bằng lời: $P(t)$ là dân số thế giới tại thời điểm t. Bảng 1 dân số thế giới theo các năm là một cách thuận tiện để biểu diễn hàm số này. Nếu ta vẽ các điểm này, ta sẽ được một đồ thị (gồm các điểm). Đây cũng là một cách biểu diễn có ích vì cho phép ta nhìn các dữ liệu một cách tổng thể. Thế còn công thức tường minh? Tất nhiên, sẽ không thể tìm được một công thức chính xác để tìm dân số thế giới tại một thời điểm t. Tuy nhiên, ta có thể tìm được biểu thức cho hàm số *xấp xỉ* $P(t)$. Cụ thể, bằng cách sử dụng các máy tính bỏ túi có tính toán hồi quy mũ, ta tìm được công thức xấp xỉ

$$P(x) \approx f(t) = (0{,}008079266).(1{,}013731)^t.$$

Hàm số $f(t)$ được gọi là *mô hình toán học* của tăng trưởng dân số thế giới.

iii) Ta mô tả bằng lời cho hàm số $C(w)$: giá cước thư chuyển phát nhanh EMS nội tỉnh tính theo trọng lượng w. Theo quy định ban hành của Bưu điện Việt Nam năm 2009, giá cước được cho trong bảng sau :

Trọng lượng (gam)	*Giá (VNĐ)*
$w < 50$	6 000
$50 < w \leq 100$	8 000
$100 < w \leq 250$	10 000
$250 < w \leq 500$	12 500
$500 < w \leq 1000$	15 000
$1000 < w \leq 1500$	18 000
$1500 < w \leq 2000$	21 000

Ta có thể vẽ đồ thị của hàm số này, nhưng cách thuận tiện nhất chính là cho dưới dạng bảng.

Ví dụ 2. Công thức chuyển đổi từ độ Celsius sang độ Fahrenheit là

$$F - 32 = \left(\frac{9}{5}\right)C.$$

Trong đó F là độ Fahrenheit còn C là độ Celsius. Biết nhiệt độ bình thường của cơ thể người là $98{,}6^0 F$. Hãy tìm nhiệt độ tính theo độ C tương ứng.

Giải. Ta có $C = \frac{5}{9}(F - 32) = \frac{5}{9}(66{,}6) = 37^{\circ}C$. □

Ví dụ 3. Hãy tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$; b) $g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.

Giải. a) Vì căn bậc hai của một số chỉ xác định khi số đó không âm nên miền xác định của hàm số $f(x)$ bao gồm các số thực x thoả mãn điều kiện $x + 2 \geq 0$, tức là $x \geq -2$. Từ đó, miền xác định của hàm số $f(x)$ là $[-2 ; +\infty)$.

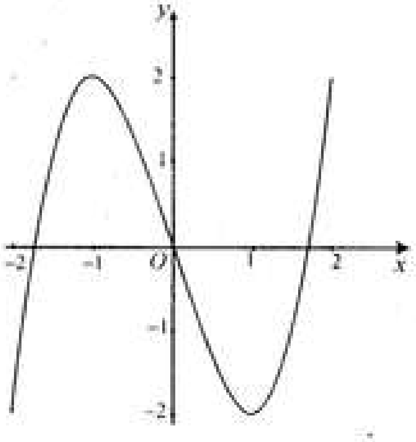
b) Vì $g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$ và phép chia cho 0 là không có nghĩa nên $g(x)$ không xác định khi $x = 0$ và $x = 1$.

Từ đó miền xác định của $g(x)$ là $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$, hay có thể biểu diễn một cách khác dưới dạng hợp của các khoảng như sau :

$$(-\infty ; 0) \cup (0 ; 1) \cup (1 ; +\infty).$$ □

Bài tập

1. Trong hình 2.2 là đồ thị của hàm số $f(x)$
   a) Hãy tính giá trị của $f(-2)$, $f(-1)$.
   b) Hãy ước lượng giá trị của $f(\frac{1}{2})$.
   c) Với những giá trị nào của x thì $f(x) = 2$?
   d) Ước lượng những giá trị x sao cho $f(x) = 0$.
   e) Trên những khoảng nào thì hàm số f giảm?



Hình 2.2

2. Một hình chữ nhật có chu vi 20cm. Hãy biểu diễn diện tích của hình chữ nhật đó như hàm số của độ dài một cạnh của nó.

3. Hãy biểu diễn diện tích của một tam giác đều như là hàm số của độ dài cạnh của nó.

4. Giá cước của một hãng taxi được quy định như sau: 1 km đầu tiên là 10 000 đồng; mỗi km tiếp theo (cho đến km thứ 30) là 9 500 đồng; từ km thứ 31 trở đi thì mỗi km có giá cước là 6 500 đồng. Hãy biểu diễn hàm số giá cước taxi tính theo x là số km mà khách hàng đã đi. Tính giá tiền mà khách hàng phải trả nếu đi 20km, 40km, 60km.

5. Một trong những cách biểu diễn hàm số bằng công thức khá thông dụng là dùng *hàm cho trên từng đoạn*. Chẳng hạn hàm số $f(x) = |x|$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Hãy biểu diễn hàm số $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ bằng cách sử dụng hàm cho trên từng đoạn.

6. a) Hãy biểu diễn hàm số cho ở bài tập 4 bằng cách sử dụng hàm cho trên từng đoạn.

b) Hãy biểu diễn hàm số cho ở ví dụ 1 bằng cách sử dụng hàm cho trên từng đoạn.

7. Tìm miền xác định, miền giá trị của các hàm số sau :

a) $f(x)=\sqrt{x-5}$; b) $f(x)=\dfrac{3x+|x|}{x}$; c) $f(x)=|2x+1|$;

d) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$; e) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ 1-x, & x\ge 0 \end{cases}$; f) $f(x)=\dfrac{x}{3x-1}$.

§2. CÁC PHÉP TOÁN VỀ HÀM SỐ

1. Tổng, hiệu, tích của các hàm số, thương của hai hàm số

Cho hai hàm số f và g có miền xác định tương ứng là $D(f)$ và $D(g)$.

Đặt $D = D(f) \cap D(g)$. Khi đó trên D, ta có thể định nghĩa các hàm số $f + g$, $f - g$, $f.g$ theo từng điểm như sau

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall x \in D;$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)\ \forall x \in D;$

$(f.g)(x) = f(x)g(x)\ \forall x \in D.$

Riêng với thương của hai hàm số, $\dfrac{f}{g}$, thì ta xét

$$D = D(f) \cap D(g) \setminus \{x \mid x \in D(g),\ g(x) = 0\}$$

và định nghĩa

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ \forall x \in D.$$

Ví dụ. Hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ có miền xác định là

$$[-1; +\infty) \cap (-\infty; 1] = [-1; 1]. \ \square$$

2. Hàm số hợp. Hàm số ngược và đồ thị của hàm số ngược

Ngoại trừ các phép toán số học trên các hàm số vừa nêu, có một phương pháp quan trọng để xây dựng các hàm số mới từ các hàm số đã cho, đó là phép hợp của các hàm số.

Định nghĩa

Cho hai hàm số f, g có miền xác định $D(f)$, $D(g)$ tương ứng. Giả sử ta có $g(x) \in D(f)$ với mọi $x \in D(g)$. Khi đó ta định nghĩa hợp của hai hàm số f và g, kí hiệu là $f \circ g$, là hàm số xác định trên $D(g)$ và

$$\forall x \in D(g),\ (f \circ g)(x) := f[g(x)].$$

Ví dụ với $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ thì $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ và $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$.

$\boxed{\textbf{h1.}}$ Cho $f(x) = x^2 - 2$ và $g(x) = x^2 + 1$. Hãy tìm biểu thức của $f_\circ g$ và $g_\circ f$.

Định nghĩa

> *Cho hàm số f có tập xác định D(f) và tập giá trị V(f). Hàm số g xác định trên V(f) được gọi là **hàm số ngược** của hàm số f nếu*
>
> $$(f_\circ g)(x) = x\ \forall x \in V(f) \text{ và } (g_\circ f)(x) = x\ \forall x \in D(f).$$
>
> *Khi đó ta kí hiệu g là f^{-1}.*

Ví dụ hàm số $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$ là hàm số ngược của hàm số $f(x) = 2x + 1$ vì

$$f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2.\frac{x-1}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x\ ;$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)-1}{2} = \frac{2x+1-1}{2} = x\ .$$

Không phải hàm số nào cũng có hàm số ngược. Chẳng hạn hàm số $f(x) = x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$ không có hàm số ngược.

$\boxed{\textbf{h2.}}$ *Tìm hàm số ngược của hàm số* $f(x) = 2x^3 + 1$.

Lưu ý. Nếu xét hàm số như một trường hợp đặc biệt của ánh xạ thì ta có thể thấy rõ các định nghĩa trên hoàn toàn là trường hợp đặc biệt của định nghĩa về ánh xạ tích và ánh xạ ngược. Trong chương I, ta đã chứng minh được rằng một ánh xạ là khả nghịch (có nghịch đảo) khi và chỉ khi nó là một song ánh. Điều này cũng có thể áp dụng cho hàm số.

Đồ thị của hàm số ngược

Xét hàm số f có miền xác định $D(f)$, miền giá trị $V(f)$ và có đồ thị là $G(f)$. Giả sử f có hàm số ngược là g. Xét điểm $M(x_0; y_0)$ và điểm $M'(y_0; x_0)$ đối xứng với M qua đường thẳng $y = x$. Ta có

$$M \in G(f) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow g(y_0) = g(f(x_0)) \Leftrightarrow g(y_0) = x_0 \Leftrightarrow M' \in G(g).$$

Như vậy, đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua đường thẳng $y = x$.

Định lí. Đồ thị hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua đường thẳng $y = x$.

Bài tập

8. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau

a) $y = \dfrac{3x+5}{x^2+3x+2}$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$;

c) $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{3+4x-7x^2}$; d) $y = \dfrac{x^2-2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

9. Tìm tập giá trị (miền giá trị) của các hàm số sau

a) $y = x^2$; b) $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$; c) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

10. Cho hai hàm số $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$ và $g(x) = 2x - 1$. Tính $(f_\circ g)(x)$ và $(g_\circ f)(x)$.

11. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Hãy tìm $f_n(x)$, biết rằng

$$f_1(x) = f(x), f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) \text{ với } n = 2, 3, 4, \ldots$$

12. Tìm hàm số ngược của hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

13. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ thiết lập một song ánh từ $\mathbb{R}$ vào $(-1;1)$.

Tìm hàm số ngược của $f(x)$.

14. Tìm hàm số ngược của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x \le 0 \\ x^2 & \text{khi } x \ge 0. \end{cases}$$

§3. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA HÀM SỐ

1. Sự biến thiên của hàm số

a) Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Khi nghiên cứu một hàm số, người ta thường quan tâm đến sự tăng hay giảm của giá trị hàm số khi đối số tăng.

Ví dụ 1. Xét hàm số $f(x) = x^2$. Gọi x_1, x_2 là hai giá trị tuỳ ý của đối số.

Trường hợp 1: Khi x_1 và x_2 thuộc nửa khoảng $[0; +\infty)$, ta có

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Trường hợp 2: Khi x_1 và x_2 thuộc nửa khoảng $(-\infty; 0]$, ta có

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \square$$

h1. *Ở ví dụ 1, khi đối số tăng, trong trường hợp nào thì:*

a) Giá trị của hàm số tăng ?

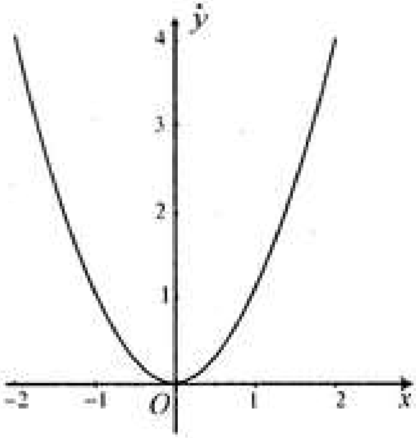
b) Giá trị của hàm số giảm ?

Từ đây, ta luôn hiểu K là một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nào đó của $\mathbb{R}$.

Định nghĩa

> *Cho hàm số f xác định trên K.*
>
> *Hàm số f gọi là **đồng biến** (hay **tăng**) trên K nếu*
>
> $$\forall\, x_1, x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
>
> *Hàm số f gọi là **nghịch biến** (hay **giảm**) trên K nếu*
>
> $$\forall\, x_1, x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Trong ví dụ 1, ta thấy hàm số $y = x^2$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Qua đồ thị của nó (hình 2.3) ta thấy : Từ trái sang phải, nhánh trái của parabol (ứng với $x \in (-\infty; 0]$) là đường cong đi xuống, thể hiện sự nghịch biến của hàm số ; nhánh phải của parabol (ứng với $x \in [0; +\infty)$) là đường cong đi lên, thể hiện sự đồng biến của hàm số.



Hình 2.3

Tổng quát ta có :

> *Nếu một hàm số đồng biến trên K thì trên đó, đồ thị của nó đi lên ;*
>
> *Nếu một hàm số nghịch biến trên K thì trên đó, đồ thị của nó đi xuống.*

(Khi nói đồ thị đi lên hay đi xuống, ta luôn kể theo chiều tăng của đối số, nghĩa là kể từ trái sang phải).

Chú ý

Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ với mọi x_1 và x_2 thuộc K, tức là $f(x) = c\ \forall x \in K$ (c là hằng số) thì ta có *hàm số không đổi* (còn gọi là *hàm số* hằng) trên K.

Chẳng hạn, $y = 2$ là một hàm số không đổi xác định trên $\mathbb{R}$. Nó có đồ thị là đường thẳng song song với trục Ox.

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số

> *Khảo sát sự biến thiên của hàm số là xét xem hàm số đồng biến, nghịch biến, không đổi trên các khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nào trong tập xác định của nó.*

* Đối với hàm số cho bằng biểu thức, để khảo sát sự đồng biến hay nghịch biến của hàm số đó trên một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) K, ta có thể dựa vào định nghĩa (xem ví dụ 1) hoặc dựa vào nhận xét sau :

Điều kiện " $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$" có nghĩa là $x_2 - x_1$ và $f(x_2) - f(x_1)$ cùng dấu.

Do đó

> *Hàm số f đồng biến trên K khi và chỉ khi*
>
> $$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2, \ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$
>
> *Hàm số f nghịch biến trên K khi và chỉ khi*
>
> $$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2, \ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = ax^2$ (với $a > 0$) trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Giải. Với hai số x_1 và x_2 khác nhau, ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2^{\ 2} - ax_1^{\ 2} = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

suy ra

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1).$$

Do $a > 0$ nên:

– Nếu $x_1 < 0$ và $x_2 < 0$ thì $a(x_2 + x_1) < 0$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$;

– Nếu $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$ thì $a(x_2 + x_1) > 0$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. □

* Người ta thường ghi lại kết quả khảo sát sự biến thiên của một hàm số bằng cách lập bảng biến thiên của nó. Hàm số trong ví dụ 2 có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = ax^2$ $(a > 0)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Trong bảng biến thiên, mũi tên đi lên thể hiện tính đồng biến, mũi tên đi xuống thể hiện tính nghịch biến của hàm số.

Cụ thể hơn, hàng thứ hai trong bảng được hiểu như sau: $f(0) = 0$ và khi x tăng trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $f(x)$ nhận mọi giá trị trong khoảng $(0; +\infty)$ theo chiều tăng, còn khi x tăng trong khoảng $(-\infty; 0)$ thì $f(x)$ cũng nhận mọi giá trị trong khoảng $(0; +\infty)$ nhưng theo chiều giảm.

h2. *Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = ax^2$ (với $a < 0$) trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ rồi lập bảng biến thiên của nó.*

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Có những hàm số có một số tính chất đặc biệt, dễ nhận thấy mà ta có thể lợi dụng để việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của nó đơn giản và dễ dàng hơn. Tính chất chẵn – lẻ của hàm số là một ví dụ.

a) Khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ

Định nghĩa

> *Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D.*
>
> *Hàm số f được gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.*
>
> *Hàm số f được gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.*

Ví dụ 3. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ là một hàm số lẻ.

Giải. Tập xác định của hàm số là đoạn $[-1; 1]$ nên dễ thấy

$$\forall x,\ x \in [-1; 1] \Rightarrow -x \in [-1; 1]$$

$$\text{và}\quad f(-x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = -f(x).$$

Vậy f là hàm số lẻ. □

h3. *Chứng minh rằng hàm số $g(x) = ax^2$ là hàm số chẵn.*

b) Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ

Giả sử hàm số f với tập xác định D là hàm số chẵn và có đồ thị (G).

Với mỗi điểm $M(x_0; y_0)$ sao cho $x_0 \in D$, ta xét điểm đối xứng với nó qua trục tung là $M'(-x_0; y_0)$.

Từ định nghĩa hàm số chẵn, ta có $-x_0 \in D$ và $f(-x_0) = f(x_0)$. Do đó

$$M \in (G) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow y_0 = f(-x_0) \Leftrightarrow M' \in (G).$$

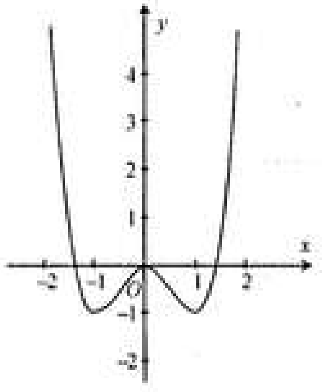
Điều đó chứng tỏ (G) có trục đối xứng là trục tung.

Nếu f là hàm số lẻ thì lí luận tương tự, ta suy ra (G) có tâm đối xứng là gốc toạ độ O.

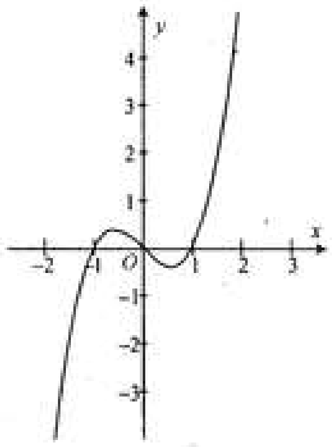
Vậy ta chứng minh được định lí sau đây.

Định lí

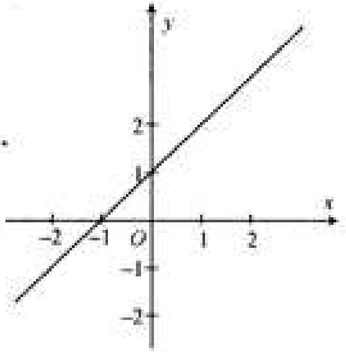
> *Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.*
>
> *Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.*



a)



b)



c)

Hình 2.4

Hình 2.4a cho hình ảnh đồ thị của một hàm số chẵn. Hình 2.4b cho hình ảnh đồ thị của một hàm số lẻ. Tuy nhiên, có nhiều hàm số không chẵn và không lẻ. Chẳng hạn hàm số $y = x + 1$ (hình 2.4c) không chẵn và không lẻ.

3. Hàm số tuần hoàn

Tính chất tuần hoàn cũng là một tính chất mà chúng ta có thể lợi dụng để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số, cũng như nghiên cứu các tính chất khác nhau liên quan đến chúng.

Định nghĩa

> *Hàm số $f(x)$ xác định trên D được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại số thực $T > 0$ sao cho*
>
> *i) $\forall x, x \in D \Leftrightarrow x + T \in D$;*
>
> *ii) $\forall x \in D \Rightarrow f(x + T) = f(x)$.*
>
> *Số thực T được gọi là một **chu kì** của hàm số f.*

Ví dụ hàm số $y = \{x\}$ (phần lẻ của x) là hàm tuần hoàn với chu kì $T = 1$ (xem mục 4, §4, chương II). Một lớp các hàm tuần hoàn quan trọng là các hàm số lượng giác mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong chương hàm số lượng giác ở lớp 11.

Rõ ràng nếu T là một chu kì của hàm số tuần hoàn f thì $2T$ cũng là một chu kì. Điều ngược lại nói chung không đúng. Một cách tự nhiên, ta đi đến

Định nghĩa

> *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên D. Giả sử $f(x)$ là một hàm tuần hoàn. Chu kì dương nhỏ nhất T_0 (nếu có) của $f(x)$ được gọi là **chu kì cơ sở** của hàm số f.*

Ví dụ hàm số $y = \{x\}$ có chu kì cơ sở là $T_0 = 1$. Hàm số $y = \sin x$ có chu kì cơ sở là $T_0 = 2\pi$. Nhưng cũng có những hàm số tuần hoàn mà không có chu kì cơ sở, chẳng hạn hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ} \end{cases}$$

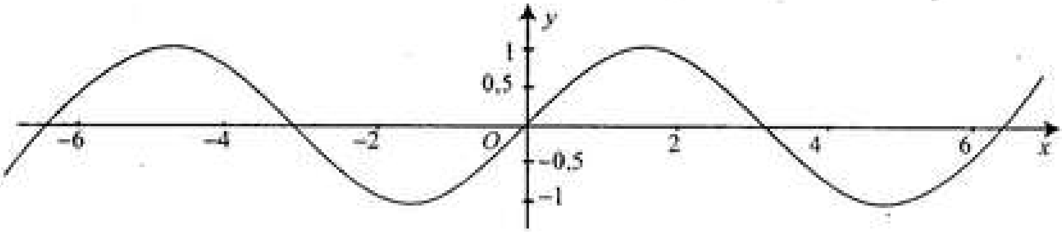
là hàm tuần hoàn. Bất cứ số hữu tỉ dương nào cũng là một chu kì của nó và cũng chính vì vậy, hàm số trên không có chu kì cơ sở.

Đồ thị của hàm số tuần hoàn

Giả sử $y = f(x)$ với $x \in D$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T > 0$, có đồ thị là (G). Từ định nghĩa của hàm số tuần hoàn, dễ dàng nhận thấy nếu $(x_0 ; y_0) \in (G)$ thì $(x_0 + nT ; y_0) \in (G)$ với mọi $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Như vậy phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ với $x \in [0 ; T] \cap D$ sẽ được tịnh tiến về hai phía với các đoạn $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots$ để thu được đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \in D$.

Ví dụ 4 . Đồ thị hàm số $y = \sin x$ có dạng



Hình 2.5

Bài tập

15. Khảo sát sự đồng biến, nghịch biến (tức là tìm các khoảng tăng, giảm) của các hàm số sau

a) $y = x^3 - 3x$;

b) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$;

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

16. Hãy biểu diễn hàm số $y = x^2$ dưới dạng hiệu của hai hàm số tăng.

17. Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng f luôn biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

18. Hàm số $f(x)$ xác định trên D được gọi là *hàm phản tuần hoàn* nếu tồn tại $T > 0$ sao cho:

$$x \in D \Leftrightarrow x + T \in D \text{ và } f(x + T) = -f(x).$$

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là một hàm phản tuần hoàn thì nó tuần hoàn.

Điều ngược lại có đúng không? Tại sao?

19. Tìm chu kì cơ sở của hàm số $y = f(ax + b)$, $a \neq 0$ khi biết chu kì cơ sở của hàm số $y = f(x)$ là T.

20. Chứng minh rằng nếu hàm số $y = f(x)$ có tâm đối xứng $E(a, b)$ và có trục đối xứng $x = c$ $(c \neq a)$ thì nó là một hàm số tuần hoàn.

21. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$$

với mọi x. Chứng minh rằng $f(x)$ là một hàm tuần hoàn.

§4. MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

1. Hàm số bậc nhất

Định nghĩa

> *Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax + b$, trong đó a và b là những hằng số với $a \neq 0$.*

Hàm số bậc nhất có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Khi $a > 0$, hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

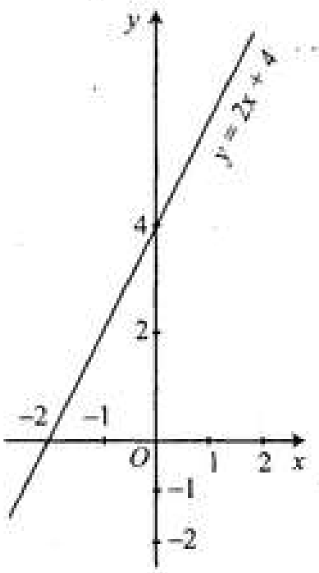
Khi $a < 0$, hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng, gọi là đường thẳng $y = ax + b$. Nó có *hệ số góc* bằng a và có đặc điểm:

– Không song song và không trùng với các trục toạ độ ;

– Cắt trục tung tại điểm $B(0, b)$ và cắt trục hoành tại điểm $A(-\frac{b}{a}, 0)$.

Ví dụ 1. Đồ thị của hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2, 0)$ và $B(0, 4)$ (xem h. 2.6)



Hình 2.6

Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng (d): $y = ax + b$ và (d'): $y = a'x + b'$, ta có

– (d) song song với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$;

– (d) trùng với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$;

– (d) cắt $(d') \Leftrightarrow a \neq a'$.

– (d) vuông góc với $(d') \Leftrightarrow aa' = -1$.

2. Hàm số bậc hai

Định nghĩa

> *Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số với $a \neq 0$.*

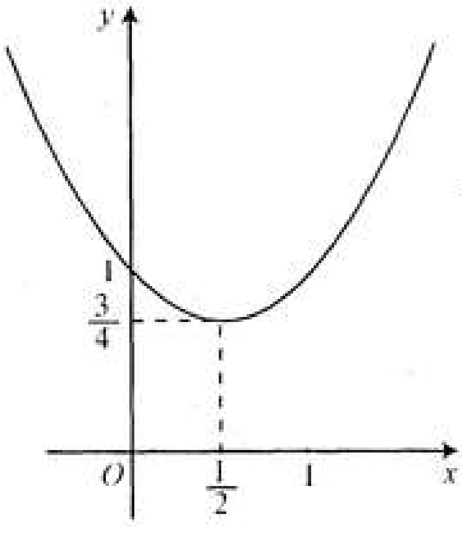
Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Đồ thị của nó là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$, xuống dưới khi $a < 0$.

Khi $a > 0$, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$.

Khi $a < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ và có giá trị lớn nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$.

Ví dụ 2. Đồ thị của hàm số $y = x^2 - x + 1$ có dạng như ở hình 2.7



Hình 2.7

3. Hàm số $y=\frac{a}{x}$

Hàm số $y=\frac{a}{x}$ với $a \neq 0$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

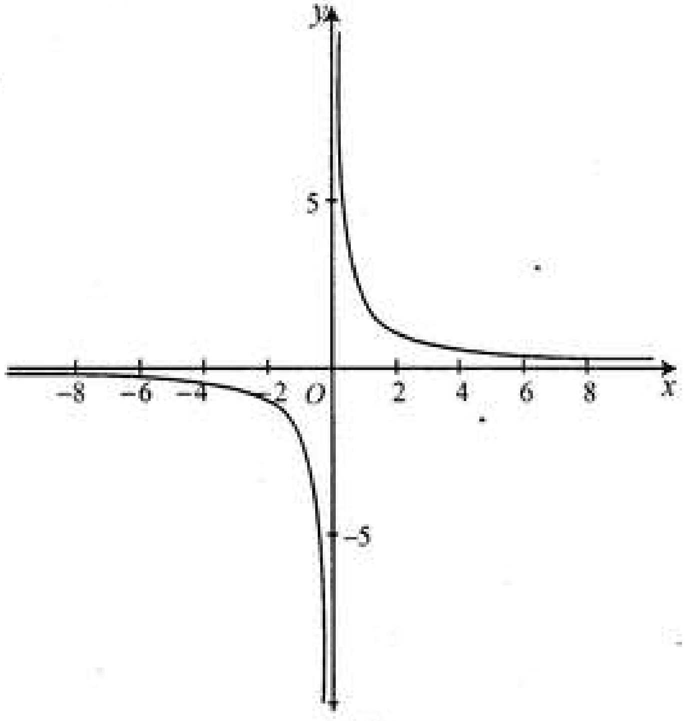
Đồ thị của nó là một *hypebol* nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

Hàm số $y=\frac{a}{x}$ nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0;+\infty)$ khi $a > 0$, và đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0;+\infty)$ khi $a < 0$.

Nếu $a < 0$, hypebol $y = \frac{a}{x}$ hướng bề lõm lên trên khi x thuộc $(-\infty; 0)$ và hướng bề lõm xuống dưới khi x thuộc $(0;+\infty)$.

Nếu $a > 0$, hypebol $y = \frac{a}{x}$ hướng bề lõm xuống dưới khi x thuộc $(-\infty; 0)$ và hướng bề lõm lên trên khi x thuộc $(0;+\infty)$.

Ví dụ 3. Trên hình 2.8 là đồ thị của hàm số $y = \frac{2}{x}$.



Hình 2.8

4. Hàm phần nguyên, hàm phần lẻ

Hàm phần nguyên và hàm phần lẻ đóng vai trò khá quan trọng trong việc giải các bài toán số học, tin học, quy hoạch tuyến tính, phân tích thuật toán. Chúng ta làm quen với các hàm số này.

Định nghĩa

> *Với mỗi số thực x, **phần nguyên** của x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và được kí hiệu là $[x]$. Số thực $\{x\} = x - [x]$ được gọi là **phần lẻ** của số thực x.*

Từ định nghĩa, ta suy ra các tính chất cơ bản sau :

1) $x = [x] + \{x\}$
2) $[x] \leq x < [x] + 1$
3) $0 \leq \{x\} < 1$.

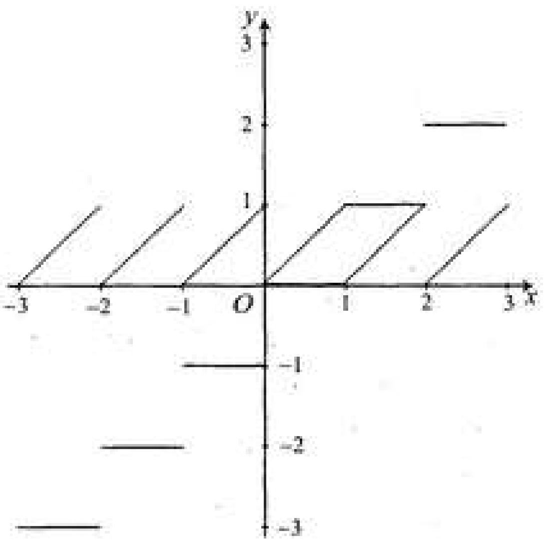
Các hàm số $y = f(x) = [x]$ và $y = g(x) = \{x\}$ được gọi làm *hàm phần nguyên* và *hàm phần lẻ*.

Hàm $y = [x]$ có miền xác định là $\mathbb{R}$ và nhận giá trị trong $\mathbb{Z}$. Hàm số này là hàm hằng trên các nửa khoảng $[n; n+1)$ với n thuộc $\mathbb{Z}$.

Hàm $y = \{x\}$ có miền xác định là $\mathbb{R}$ và nhận các giá trị thuộc $[0; 1)$. Hàm số này là hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở là 1.

h1. *Chứng minh $y = \{x\}$ là hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở là 1.*

Trên hình 2.9 là đồ thị của hàm số $y = [x]$ (nét đậm) và $y = \{x\}$ (nét mảnh).



Hình 2.9

Bài tập

22. Hãy tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau :

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$; $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$; $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2$;

$y = \sqrt{2}x - 2$; $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 2$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

23. Cho hàm số $y = -2x^2 - 4x + 6$ có đồ thị là parabol (P).

a) Tìm toạ độ đỉnh và phương trình trục đối xứng của (P).

b) Vẽ parabol (P).

c) Dựa vào đồ thị, hãy cho biết tập hợp các giá trị của x sao cho $y \geq 0$.

24. Tìm điều kiện của a và b sao cho hàm số $y = ax + b$ là một hàm số lẻ.

25. Tìm điều kiện của a, b và c sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là một hàm chẵn.

26. Vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $y = [2x] - 2[x]$; b) $y = \{x\} + \{-x\}$.

27. Chứng minh rằng với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ ta có bất đẳng thức

$$[x + y] \geq [x] + [y].$$

28. Chứng minh rằng

a) $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$;

b) $[x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] = [3x]$.

§5. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TRÊN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Sơ lược về phép tịnh tiến song song với trục toạ độ

a) Tịnh tiến một điểm

Trong mặt phẳng toạ độ, xét điểm $M_0(x_0; y_0)$. Với số $k > 0$ đã cho, ta có thể dịch chuyển điểm M_0:

- Lên trên hoặc xuống dưới (theo phương của trục tung) k đơn vị;
- Sang trái hoặc sang phải (theo phương của trục hoành) k đơn vị.

Khi dịch chuyển điểm M_0 như thế, còn nói rằng ta *tịnh tiến điểm M_0 song song với trục toạ độ.*

h1. *Giả sử M_1, M_2, M_3, M_4 là các điểm có được khi tịnh tiến điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ theo thứ tự lên trên; xuống dưới; sang phải và sang trái 2 đơn vị. Hãy cho biết toạ độ các điểm M_1, M_2, M_3 và M_4.*

b) Tịnh tiến một đồ thị

Cho số $k > 0$. Nếu ta tịnh tiến tất cả các điểm của đồ thị (G) lên trên k đơn vị thì tập hợp các điểm thu được tạo thành hình (G_1). Điều đó được phát biểu là:

Tịnh tiến đồ thị (G) lên trên k đơn vị thì được hình (G_1) hoặc *hình (G_1) có được khi tịnh tiến đồ thị (G) lên trên k đơn vị.*

Ta cũng phát biểu tương tự khi tịnh tiến (G) xuống dưới, sang trái hay sang phải.

Vấn đề là: Nếu (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thì (G_1) có là đồ thị của một hàm số không? Nếu có thì (G_1) là đồ thị của hàm số nào?

Định lí sau đây sẽ trả lời câu hỏi đó

Định lí 1

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đồ thị (G) của hàm số $y = f(x)$; p và q là hai số dương tuỳ ý. Khi đó

1) Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + q$;

2) Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - q$;

> *3) Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$;*
>
> *4) Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.*

Ví dụ 1. Nếu tịnh tiến đường thẳng (d): $y = 2x - 1$ sang phải 3 đơn vị thì ta được đồ thị hàm số nào?

Giải. Kí hiệu $f(x) = 2x - 1$. Theo định lí 1, khi tịnh tiến (d) sang phải 3 đơn vị, ta được đường thẳng (d_1), đó là đồ thị của hàm số $y = f(x - 3) = 2(x - 3) - 1$, tức là hàm số $y = 2x - 7$. □

Ví dụ 2. Cho đồ thị (H) của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$. Hỏi muốn có đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x}$ thì phải tịnh tiến (H) như thế nào?

Giải. Kí hiệu $g(x) = \dfrac{1}{x}$, ta có $\dfrac{-2x+1}{x} = -2 + \dfrac{1}{x} = g(x) - 2$. Vậy muốn có đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x}$, ta phải tịnh tiến (H) xuống dưới 2 đơn vị. □

h2. *Hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây :*

Khi tịnh tiến parabol $y = 2x^2$ sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số:

(A) $y = 2(x + 3)^2$

(B) $y = 2x^2 + 3$

(C) $y = 2(x - 3)^2$

(D) $y = 2x^2 - 3$.

2. Sơ lược về phép đối xứng qua trục toạ độ

Cho điểm M và đường thẳng (d). Điểm M' được gọi là điểm đối xứng của M qua (d) nếu $MM' \perp (d)$ và trung điểm H của MM' nằm trên (d). Một cách hình học, M' dựng được bằng cách hạ MH vuông góc với (d), sau đó nối dài MH một đoạn $HM' = HM$.

Biểu thức toạ độ của M' tính theo toạ độ của M và các hệ số của đường thẳng (d) khá phức tạp, tuy nhiên trong một số trường hợp đặc biệt, nó có thể thu được dễ dàng, chẳng hạn :

Trong mặt phẳng Oxy, xét điểm $M_0(x_0; y_0)$. Khi đó điểm đối xứng với M_0 qua Oy là $M_1(-x_0; y_0)$ và điểm đối xứng với M_0 qua Ox là $M_2(x_0; -y_0)$. Điểm đối xứng với M_0 qua đường thẳng $y = x$ là $M_3(y_0; x_0)$.

Tương tự như câu hỏi trong phần tịnh tiến đồ thị, ta đặt câu hỏi : Nếu (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thì hình đối xứng của nó qua Ox (hoặc Oy) có phải là đồ thị của một hàm số nào không và nếu có thì là đồ thị hàm số nào? Ta có định lí :

Định lí 2

Nếu (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Khi đó

a) Nếu lấy hình đối xứng của (G) qua trục Oy, ta được đồ thị hàm số

$$y = f(-x).$$

b) Nếu lấy phần (G^P) của (G) nằm bên phải của trục Oy hợp với ảnh của (G^P) qua phép đối xứng qua trục Oy, ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

c) Nếu lấy hình đối xứng của (G) qua trục Ox, ta được đồ thị hàm số

$$y = -f(x).$$

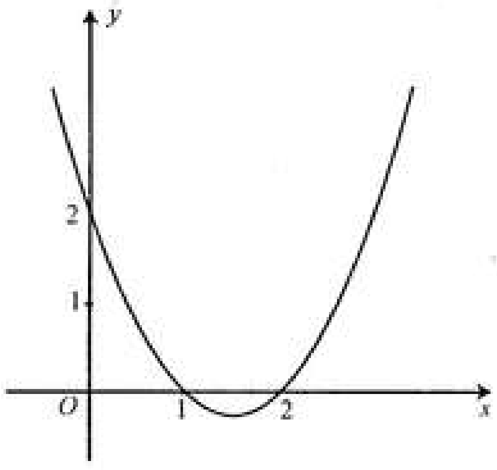
d) Nếu lấy phần (G^t) của (G) nằm bên trên trục Ox hợp với ảnh của (G^d) (là phần của (G) nằm bên dưới trục Ox) qua phép đối xứng qua trục Ox, ta được đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$.

Ví dụ 3. Từ đồ thị (P) của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$, ta có thể thu được đồ thị của các hàm số

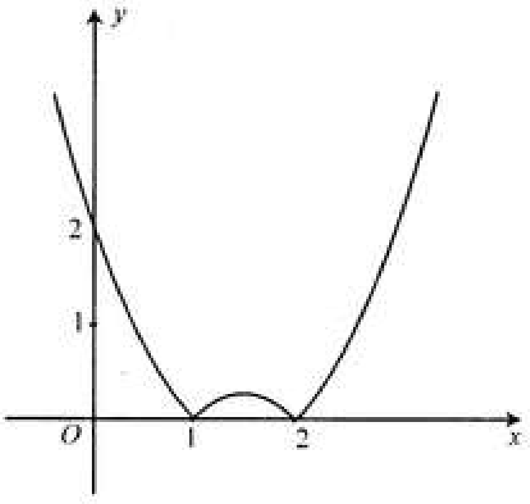
$$y = f(-x) = x^2 + 3x + 2, \qquad y = f(|x|) = x^2 - 3|x| + 2,$$

$$y = -f(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad \text{và} \quad y = |f(x)| = |x^2 - 3x + 2|$$

bằng các phép đối xứng trục tương ứng.



Hình 2.10



Hình 2.11

(Trên hình 2.10, 2.11 là đồ thị các hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và $y = |x^2 - 3x + 2|$).

Bài tập

29. Cho đường thẳng (d): $y = 0{,}5x$. Hỏi ta sẽ được đồ thị hàm số nào khi tịnh tiến (d)

a) Lên trên 3 đơn vị? b) Xuống dưới 3 đơn vị?

c) Sang phải 2 đơn vị? d) Sang trái 6 đơn vị?

30. Gọi (d) là đường thẳng $y = 2x$ và (d') là đường thẳng $y = 2x - 3$. Ta coi (d') có được là do tịnh tiến (d):

a) Lên trên hay xuống dưới bao nhiêu đơn vị?

b) Sang trái hay sang phải bao nhiêu đơn vị?

31. Cho đồ thị (H) của hàm số $y = -\dfrac{2}{x}$.

a) Tịnh tiến (H) lên trên 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số nào?

b) Tịnh tiến (H) sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị hàm số nào?

c) Tịnh tiến (H) lên trên 1 đơn vị, sau đó tịnh tiến đồ thị vừa nhận được sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị hàm số nào?

32. Từ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 2x$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y = x^2 + 2x$;

b) $y = x^2 - 2|x|$;

c) $y = -x^2 + 2x$;

d) $y = |x^2 - 2x|$.

33. Từ đồ thị (P) của hàm số $y = (x-2)(x-4)$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = |x-2|(x-4)$;

b) $y = (x-2)|x-4|$.

34. Hãy nêu cách dựng đồ thị hàm số $y = |x(x-2)|$ từ đồ thị hàm số $y = x^2$.

35. Với những giá trị nào của (a, b, c) thì đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có thể suy ra được từ đồ thị hàm số $y = x^2$ bằng các phép tịnh tiến song song với trục toạ độ và đối xứng qua trục toạ độ ?

§6. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Phương trình hàm là phương trình mà trong đó ẩn phải tìm là các hàm số. Như vậy ta cần tìm tất cả các hàm số thoả mãn phương trình. Mỗi một hàm số thoả mãn phương trình hàm được gọi là *nghiệm* của phương trình hàm.

Cấu trúc cơ bản của một phương trình hàm gồm ba phần chính

i) Miền xác định và miền giá trị

ii) Phương trình hoặc bất phương trình hàm

iii) Một số điều kiện bổ sung (tăng, giảm, bị chặn, liên tục, khả vi ...).

Sau đây là hai ví dụ về phương trình hàm :

Ví dụ 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}^+$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và nhận giá trị trong $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f(4x) - 2f(2x) + f(x) = x^2 + x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Người ta thường phân loại phương trình hàm theo hai yếu tố chính: Miền giá trị và số biến tự do. Ví dụ phương trình hàm

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thoả mãn :

i) $f(n+1) > f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$;

ii) $f(f(n)) = 3f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

được gọi là phương trình hàm trên $\mathbb{N}$. Các phương trình hàm ở ví dụ 1, 2 là các phương trình hàm trên $\mathbb{R}$.

Phương trình hàm ở ví dụ 1 là phương trình hàm có 2 biến tự do, phương trình hàm ở ví dụ 2 có 1 biến tự do.

Trong các trường hợp đơn giản, phương trình hàm có thể giải bằng cách thực hiện một số phép thế để thu được những thông tin hoặc phương trình bổ sung.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Thay x bởi $1 - x$, ta có

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4. \qquad (*)$$

Từ phương trình đã cho, ta có $f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$, thay vào phương trình (*), ta được :

$$f(x) = 1 - x^2. \ \square$$

Với các phương trình hàm xác định trên $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ta cần hiểu rõ cấu trúc của các tập hợp này để tìm cách tiếp cận. Với loại phương trình hàm này, một tiêu chuẩn để đi tìm lời giải là xác định một vài giá trị đặc biệt (như $f(0)$, $f(1)$), một cách quy nạp, ta xác định $f(n)$ với n thuộc $\mathbb{N}$, và tiếp theo là $f(\frac{1}{n})$. Sau đó dùng cấu trúc của $\mathbb{Q}$ để tìm $f(x)$ (nếu cần). Ví dụ sau sẽ làm rõ cách tiếp cận này :

Ví dụ 4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thoả mãn $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{Q}$.

Giải

Bước 1 : Cho $x = y = 0$, ta có $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, suy ra $f(0) = 0$.

Bước 2 : Ta chứng minh bằng quy nạp $f(kx) = kf(x)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $x \in \mathbb{Q}$.

Điều này đúng với $k = 1$.

Giả sử điều này đúng với k, thay $y = kx$ ta có :

$$f(x + kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) = (k+1)f(x).$$

Bước 3 : Thay $y = -x$, ta có $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, suy ra $f(x) = -f(-x)$.

Từ đó $f(-kx) = -f(kx) = -kf(x)$ với mọi k thuộc $\mathbb{N}$.

Do vậy $f(kx) = kf(x)$ với mọi k thuộc $\mathbb{Z}$ và mọi x thuộc $\mathbb{Q}$.

Bước 4. Thay $x = \dfrac{1}{k}$, ta có

$$f(1) = f(k.\frac{1}{k}) = kf(\frac{1}{k}),$$

suy ra $f(\dfrac{1}{k}) = \dfrac{1}{k}f(1)$.

Bước 5 : Với m thuộc $\mathbb{Z}$, n thuộc $\mathbb{Z}$ thì

$$f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = \frac{m}{n}f(1).$$

Do đó $f(x) = cx$ với $c = f(1)$ $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Thử lại : Với $f(x) = cx$ $\forall x \in \mathbb{Q}$, ta có

$$f(x + y) = c(x + y) = cx + cy = f(x) + f(y). \square$$

36. Tìm hàm $f(x)$ biết

$$f\left(\frac{3x-2}{x-1}\right)=x+2\quad \forall x\neq 1.$$

37. Tìm hàm $f(x)$ biết

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}\quad \forall x\neq 0.$$

38. Giả sử $a\neq 0$. Tìm hàm số f biết rằng

$$f(x)+f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)=x.$$

39. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x+y)\geq f(x)f(y)\geq 2009^{x+y} \text{ với mọi số thực } x,\ y.$$

40. Tìm tất cả các hàm số $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$ sao cho $f\big(xf(y)\big)=yf(x)$ với mọi số thực x, y thuộc $[1;+\infty)$.

41. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sao cho

$$f(f(m)+f(n))=m+n$$

với mọi m, n thuộc $\mathbb{N}$.

42. Chứng minh rằng nếu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm đơn điệu thoả mãn điều kiện

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ với mọi } x,\ y \text{ thuộc } \mathbb{R}$$

thì $f(x)=xf(1)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Chương III

BẤT ĐẲNG THỨC

§1. SỐ THỰC

Tập hợp số thực

Các em học sinh đã biết về các phép toán trên tập số thực (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa, khai phương,...), các đẳng thức và bất đẳng thức thể hiện quan hệ so sánh hai số thực (bằng nhau, lớn hơn, nhỏ hơn), đồng thời sử dụng thành thạo các tính chất của các phép toán và các quan hệ đó. Trong tiết này và tiết sau, chúng ta sẽ chỉ ra những tính chất cơ bản nhất của hai phép toán cơ bản là phép cộng và phép nhân, sử dụng các tính chất này có thể suy ra các tính chất còn lại của các phép toán và các quan hệ lớn hơn, bé hơn.

Hai phép toán cộng và nhân các số thực có các tính chất đại số cơ bản sau đây:

(i) Đóng kín : nếu $a, b \in \mathbb{R}$ thì tổng $a+b$ và tích ab cũng thuộc $\mathbb{R}$.

(ii) Duy nhất : nếu $a = a'$ và $b = b'$ trong $\mathbb{R}$ thì $a+b = a'+b'$ và $ab = a'b'$.

(iii) Luật giao hoán : nếu $a, b \in \mathbb{R}$ thì $a+b = b+a$ và $ab = ba$.

(iv) Luật kết hợp : nếu $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì $a+(b+c) = (a+b)+c, a.(bc) = (ab).c$.

(v) Luật phân phối : nếu $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì $a(b+c) = ab+ac$.

(vi) Phần tử không : nếu $a \in \mathbb{R}$ thì $a+0 = a$.

(vii) Phần tử đơn vị : trong $\mathbb{R}, 1 \neq 0$ và nếu $a \in \mathbb{R}$ thì $a.1 = a$.

(viii) Phần tử đối : nếu $a \in \mathbb{R}$ thì phương trình $a+x = 0$ có một nghiệm trong $\mathbb{R}$.

(ix) Luật giản ước : nếu $a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ và $ca = cb$ thì $a = b$.

(x) Phần tử nghịch đảo : nếu $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ thì phương trình $ax = 1$ có nghiệm trong $\mathbb{R}$.

Ngoài các tính chất cơ bản trên, các phép toán cộng và nhân trên tập số thực còn có nhiều tính chất quen thuộc khác, các tính chất này đều có thể suy từ 10 tính chất cơ bản nêu trên. Chẳng hạn, có thể chứng minh phương trình $a + x = 0$ có nghiệm duy nhất, nghiệm này cũng là nghiệm của phương trình $x + a = 0$ và được gọi là *phần tử đối* của a (kí hiệu là $-a$). Tương tự, nếu $a \neq 0$ thì phương trình $xa = 1$ có nghiệm duy nhất cũng là nghiệm của phương trình $ax = 1$ và được gọi là *phần tử nghịch đảo* của a (kí hiệu là a^{-1}). Để minh hoạ thêm, chúng ta sẽ chỉ ra một tính chất quen thuộc khác, tương tự tính chất (v), được suy như thế nào từ 10 tính chất cơ bản nêu trên.

Ví dụ. Sử dụng các tính chất (i)-(viii), chứng minh rằng nếu $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì

$$(b + c)a = ba + ca \qquad \text{(v')}$$

Chứng minh. Do (iii), (v) và (ii), $(b+c)a = a(b+c) = ab + ac = ba + ca$. □

Trong phép chứng minh ví dụ 1 trên đây, ta thấy nếu phép cộng và phép nhân thoả mãn các tính chất (ii), (iii) và (v) thì lập tức có ngay tính chất (v'). Tổng quát hơn, nếu trong một tập hợp nào đó có các phép toán cộng và nhân có các tính chất (i)-(x) thì cũng có tất cả các tính chất như phép cộng và phép nhân các số thực. Trong các nghiên cứu toán học sâu sắc hơn, ta thường quan tâm đến các tập hợp với hai phép toán có một số hay tất cả 10 tính chất cơ bản nói trên, điều này dẫn đến các khái niệm *vành giao hoán, miền nguyên, trường* như sau. Giả sử V là tập hợp các phần tử $a, b, c, \ldots$ trên đó đã cho phép cộng và phép nhân ; phép cộng và phép nhân hai phần tử a, b cho kết quả được kí hiệu lần lượt là $a + b$, ab và gọi là tổng, tích của hai phần tử này. Nếu V thoả mãn các tính chất (i)-(viii) thì ta nói V là một *vành giao hoán*, còn nếu V thoả mãn các tính chất (i)-(ix) thì V được gọi là một *miền nguyên*; miền nguyên V thoả mãn thêm tính chất (x) thì được gọi là một *trường*. Ta thấy tập số thực $\mathbb{R}$, tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ đều là trường với hai phép toán cộng và nhân thông thường. Trong khi đó, tập số nguyên $\mathbb{Z}$ chỉ là một miền nguyên. Trên tập $\mathbb{R}$, ngoài các phép toán cộng, nhân, còn có những phép toán phong phú hơn như phép chia cho một số thực khác 0 (phép toán ngược của phép nhân), phép nâng lên lũy thừa, phép khai căn bậc hai của một số không âm và phép khai căn bậc ba của một số thực bất kì, phép tính lôgarit và phép toán ngược của nó,...

Bài tập

1. Phát biểu và chứng minh các khẳng định tương tự các tính chất (vi)-(x) (chỉ khác thứ tự các số hạng hoặc nhân tử) của phép cộng và phép nhân các số thực bằng cách sử dụng các tính chất cơ bản (i)-(x).

2. Chứng tỏ rằng tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là một trường, còn tập số nguyên $\mathbb{Z}$ chỉ là miền nguyên.

3. Kí hiệu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ là tập hợp tất cả các số thực dạng $a+a'\sqrt{2}$, trong đó a, a' là số nguyên. Phép cộng và phép nhân hai phần tử của $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ được định nghĩa bởi các công thức sau :

$$(a+a'\sqrt{2})+(b+b'\sqrt{2})=(a+b)+(a'+b')\sqrt{2},$$

$$(a+a'\sqrt{2})(b+b'\sqrt{2})=(ab+2a'b')+(ab'+ba')\sqrt{2}.$$

Chứng tỏ rằng $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ là vành giao hoán với phần tử không là $0 = 0+0\sqrt{2}$, phần tử đơn vị là $1 = 1+0.\sqrt{2}$.

4. Chứng minh rằng trong vành giao hoán V, các khẳng định sau đây đúng :

1) $(a+b)c = ac+bc$ với tất cả các a, b, c trong V.

2) Nếu 0 và 1 tương ứng là phần tử không và phần tử đơn vị của V thì $0+a=a$ và $1.a=a$ với mọi a thuộc V.

3) Tính duy nhất của phần tử không : nếu α trong V có tính chất là $a+\alpha=a$ với tất cả các a trong V thì $\alpha=0$.

4) Luật giản ước cho phép cộng : với tất cả các a, b, c trong V, ta có $a+b=a+c$ kéo theo $b=c$.

5) Với mỗi a trong V, phương trình $a+x=0$ có nghiệm duy nhất trong V.

6) Với mỗi a trong V, phương trình $a+x=b$ có nghiệm duy nhất trong V.

7) Với tất cả các a trong V, ta có $a.0=0=0.a$.

8) Tính chất của đơn vị : Nếu α trong V có tính chất là $a\alpha=a$ với tất cả các a trong V thì $\alpha=1$.

9) Với a và b trong V, luôn có $(-a).(-b)=ab$ (nhắc lại rằng $-a$ là nghiệm duy nhất của phương trình $a+x=0$).

10) $1.1=1$ và $0.0=0$.

Trong vành giao hoán, các nghiệm của phương trình $xx=x$ được gọi là các *phần tử luỹ đẳng*. Chứng minh rằng trong miền nguyên chỉ có hai phần tử luỹ đẳng.

5. Chứng minh rằng trong mọi miền nguyên, các quy tắc sau có hiệu lực.

1) $(a+b)(c+d)=(ac+bc)+(ad+bd)$.

2) $a+[b+(c+d)]=(a+b)+(c+d)=[(a+b)+c]+d$.

3) $a+(b+c)=(c+a)+b$.

4) $a(bc)=c(ab)$.

5) $a(b+(c+d))=(ab+ac)+ad$.

6) $a(b+c)d=(ab)d+a(cd)$.

7) $-(-a)=a$.

8) $-0=0$.

9) $-(a+b)=(-a)+(-b)$.

10) $-a=(-1)a$.

11) $(-a)b=a(-b)=-(ab)$.

6. Định nghĩa phép toán hiệu bởi công thức $a-b=a+(-b)$. Hãy chứng minh rằng trong mọi miền nguyên, các tính chất sau có hiệu lực.

1) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.

2) $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)$.

3) $(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$.

4) $a-b=c-d$ nếu và chỉ nếu $a+d=b+c$.

5) $(a-b)c=ac-bc$.

7. Chứng minh rằng một vành giao hoán là một miền nguyên khi và chỉ khi nó không có *ước của không* (tức là không có hai phần tử khác không a, b mà có tích $ab=0$). Sử dụng kết quả này chứng minh rằng $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ (bài tập 2) cũng là một miền nguyên.

§2. KHÁI NIỆM BẤT ĐẲNG THỨC

1. Thứ tự trên $\mathbb{R}$. Bất đẳng thức trong tập số thực

Ta đã biết rằng có thể biểu diễn hình học các số thực bởi các điểm trên trục số. Như vậy, các số thực cũng được sắp thứ tự một cách tự nhiên : số thực a đứng trước số thực b nếu điểm biểu diễn A của a đứng trước (đứng bên trái) điểm biểu diễn B của b. Trường hợp này ta vẫn viết $a<b$ hoặc $b>a$ (đọc là *a nhỏ hơn b* hoặc *b lớn hơn a*). Có thể thấy ngay đặc trưng đại số của tình huống này là $b-a$ là số dương. Như vậy nếu a, b là hai số thực thì hai mệnh đề tương đương P:"$a<b$" và Q:"$b>a$" đúng khi và chỉ khi $b-a$ là số dương. Các mệnh đề dạng này được gọi là các *bất đẳng thức*. Tuyển $P \vee R$ của hai mệnh đề P:"$a<b$" và R:"$a=b$" là một mệnh đề được kí hiệu là "$a \le b$", mệnh đề này đúng khi và chỉ khi a nhỏ hơn hoặc bằng b. Tương tự, mệnh đề $Q \vee R$ được kí hiệu là "$b \ge a$", đúng khi và chỉ khi b lớn hơn hoặc bằng a. Ta cũng gọi các mệnh đề dạng "$a \le b$" hoặc "$b \ge a$" là các *bất đẳng thức*. Khi cần nhấn mạnh sự phân biệt, ta còn gọi các bất đẳng thức dạng $a<b$; $b>a$ là các *bất đẳng thức ngặt*, còn các bất đẳng thức dạng $a \le b$; $b \ge a$ cũng được gọi là các *bất đẳng thức suy rộng*.

2. Các số thực dương

Ta đã thấy là các số dương được sử dụng để xác định tính đúng sai của một bất đẳng thức. Tập các số thực dương có các tính chất hiển nhiên sau đây :

(xi) Đóng kín đối với phép cộng : Tổng hai số dương là một số dương.

(xii) Đóng kín đối với phép nhân : Tích hai số dương là một số dương.

(xiii) Luật tam phân : Với mỗi số thực a, một và chỉ một trong ba khả năng sau xảy ra : hoặc a dương, hoặc $a=0$, hoặc $-a$ dương.

Sử dụng bất đẳng thức có thể mô tả các số thực dương là các số $a>0$. Như vậy các tính chất (xi), (xii) và (xiii) có thể phát biểu lại như sau :

- Nếu $a>0, b>0$ thì $a+b>0$ và $ab>0$.

- Nếu a là một số thực đã cho thì một và chỉ một trong ba khả năng sau xảy ra : hoặc $a>0$, hoặc $a=0$, hoặc $a<0$ ($a<0$ có nghĩa là $-a>0$).

Sau đây chúng ta sẽ hệ thống lại các tính chất quan trọng nhất và thường được sử dụng nhất của các bất đẳng thức trên tập số thực và chứng minh chúng.

Định lí 1

1) Nếu a, b là hai số thực đã cho thì một và chỉ một trong ba khả năng sau xảy ra : hoặc $a>b$, hoặc $a=b$, hoặc $a<b$ (Luật tam phân tổng quát).

2) Nếu $a<b$ và $b<c$ thì $a<c$ (Luật bắc cầu).

3) Nếu $a<b$ thì $a+c<b+c$ (cộng một số vào một bất đẳng thức).

4) Nếu $a<b$ và $c>0$ thì $ac<bc$; nếu $a<b$ và $c<0$ thì $ac>bc$ (nhân một số với một bất đẳng thức).

5) Nếu $a<b, c<d$ thì $a+c<b+d$ (cộng hai bất đẳng thức cùng chiều).

6) Nếu $0 < a < b, 0 < c < d$ thì $ac < bd$ (nhân hai bất đẳng thức cùng chiều).

7) Nếu $0 < a < b$ thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (nghịch đảo một bất đẳng thức).

8) Nếu $0 < a < b$ và n là một số nguyên dương thì $a^n < b^n$ (luỹ thừa một bất đẳng thức).

Chứng minh

1) Xét hiệu $b - a$. Theo luật tam phân, một và chỉ một trong ba khả năng sau xảy ra : $b - a > 0, b - a = 0, b - a < 0$.

Nếu $b - a > 0$ thì theo định nghĩa, ta có $a < b$.

Nếu $b - a = 0$ thì $a = b$.

Nếu $b - a < 0$ thì $-(b - a) > 0 \Rightarrow a - b > 0$, do đó $a > b$.

2) Theo định nghĩa, các giả thiết $a < b$ và $b < c$ có nghĩa là

$$b - a > 0 \quad \text{và} \quad c - b > 0.$$

Do đó $c - a = (b - a) + (c - b) > 0$ (các số dương đóng kín đối với phép cộng), điều này cũng có nghĩa là $a < c$.

3) Giả thiết $a < b$ có nghĩa là $b - a > 0$. Mà

$$(b + c) - (a + c) = (b + c) - (c + a) = ((b + c) - c) - a = b - a.$$

Suy ra $(b + c) - (a + c) > 0$, điều này có nghĩa là $a + c < b + c$.

4) Nếu $a < b$ và $c > 0$ thì

$$b - a > 0, c > 0 \Rightarrow (b - a)c > 0 \Rightarrow bc - ac > 0 \Rightarrow ac < bc.$$

Nếu $a < b$ và $c < 0$ thì

$$b - a > 0, -c > 0 \Rightarrow (b - a)(-c) > 0 \Rightarrow -bc + ac > 0 \Rightarrow bc < ac \text{ hay } ac > bc.$$

5) Nếu $a < b, c < d$ thì

$$b - a > 0, d - c > 0 \Rightarrow (b - a) + (d - c) > 0 \Rightarrow (b + d) - (a + c) > 0$$

do đó $a + c < b + d$.

6) Nếu $0 < a < b$, $0 < c < d$ thì $ac < bc$ và $bc < bd$ (nhân một số dương với một bất đẳng thức), do đó $ac < bd$ (luật bắc cầu).

7) Trước hết chú ý rằng nếu $x > 0$ thì $\frac{1}{x} > 0$.

Thật vậy, theo định nghĩa phần tử nghịch đảo, ta có $x.\frac{1}{x}=1$.

Nếu $\frac{1}{x}=0$ thì $x.\frac{1}{x}=x.0=0$, vô lí.

Nếu $\frac{1}{x}<0$ thì $x.\frac{1}{x}<0$ (do giả thiết $x>0$), suy ra $1<0$, vô lí.

Vậy theo luật tam phân ta suy ra $\frac{1}{x}>0$.

8) Nếu $0<a<b$ thì nhân bất đẳng thức này với chính nó, ta suy ra $a^2<b^2$. Nhân bất đẳng thức nhận được với bất đẳng thức $a<b$, ta lại được $a^3<b^3$,... từ đó có $a^n<b^n$ với mọi n nguyên dương.

Định lí 2

1) Với mọi $a, a \le a$ (Luật phản xạ).

2) Với mọi a, b, nếu $a \le b$ và $b \le a$ thì $a = b$ (Luật phản xứng).

3) Nếu $a \le b$ và $b \le c$ thì $a \le c$. Bất đẳng thức sau cùng trở thành đẳng thức khi và chỉ khi hai bất đẳng thức giả thiết trở thành đẳng thức (Luật bắc cầu).

4) $\forall a, a^2 \ge 0$. Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a=0$.

5) Nếu $a \le b$ thì $a+c \le b+c$. Đẳng thức $a + c = b + c$ chỉ xảy ra khi $a = b$ (cộng một số vào một bất đẳng thức).

6) Nếu $a \le b$ và $c > 0$ thì $ac \le bc$, đẳng thức $ac = bc$ chỉ xảy ra khi $a = b$. Nếu $a \le b$ và $c < 0$ thì $ac \ge bc$, đẳng thức $ac = bc$ chỉ xảy ra khi $a = b$ (nhân một số với một bất đẳng thức).

7) Nếu $a \le b$, $c \le d$ thì $a+c \le b+d$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=d$ (cộng hai bất đẳng thức cùng chiều).

8) Nếu $0<a \le b, 0<c \le d$ thì $ac \le bd$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=d$ (nhân hai bất đẳng thức cùng chiều).

9) Nếu $0<a \le b$ thì $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ (nghịch đảo một bất đẳng thức).

10) Nếu $0 < a \le b$ và n là một số nguyên dương thì $a^n \le b^n$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ (luỹ thừa một bất đẳng thức).

11) $\min\{a_1; a_2; a_3; ...; a_n\} \le \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \le \max\{a_1; a_2; a_3; ...; a_n\}$.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ (bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất).

Chứng minh

1) Vì $a - a = 0$ nên ta cũng có $a - a \ge 0$, do đó theo định nghĩa $a \le a$.

2) Giả sử $a \le b$ và $b \le a$. Nếu $a \ne b$ thì từ giả thiết đã cho suy ra $a < b$ và $b < a$. Vậy $b - a > 0, a - b > 0$, hay $-(a - b)$ và $(a - b)$ đều dương. Điều này trái với luật tam phân. Do đó không xảy ra $a \ne b$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

4) Theo luật tam phân, chỉ xảy ra một trong ba khả năng :

hoặc $a > 0$, hoặc $a = 0$, hoặc $-a > 0$.

Nếu $a > 0$ thì $a^2 = a.a > 0$.

Nếu $a = 0$ thì $a^2 = a.a = 0.0 = 0$.

Nếu $-a > 0$ thì $(-a).(-a) > 0$ mà $(-a).(-a) = a.a = a^2$ nên $a^2 > 0$.

Vậy $\forall a, a \ge 0$. Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 0$.

Các tính chất 3), 5)-10) đều được chứng minh theo cùng một phương pháp : Nếu các bất đẳng thức suy rộng cho trong giả thiết là những bất đẳng thức ngặt thì kết luận suy trực tiếp từ tính chất tương ứng cho các bất đẳng thức ngặt. Trường hợp các bất đẳng thức suy rộng trong giả thiết trở thành đẳng thức thì kết luận là hiển nhiên. Để minh hoạ, ta chứng minh cụ thể tính chất 3) (các em học sinh tự chứng minh các tính chất 5)-10)). Trường hợp cả hai bất đẳng thức đã cho trong giả thiết đều ngặt thì theo tính chất 2) trong định lí 1, ta có ngay kết luận $a < c$. Nếu cả hai bất đẳng thức trong giả thiết đều là đẳng thức $a = b, b = c$ thì suy ra $a = c$. Nếu $a = b, b < c$ thì có ngay $a < c$. Tương tự, nếu $a < b, b = c$, ta cũng có ngay $a < c$. Vậy trong mọi trường hợp, từ giả thiết luôn suy ra $a \le c$. Hơn nữa, bất đẳng thức này trở thành đẳng thức chỉ khi cả hai bất đẳng thức trong giả thiết đều trở thành đẳng thức.

11) Từ định nghĩa của giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất, ta suy ra ngay dãy các bất đẳng thức

$$\min\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\} \le a_1 \le \max\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\}$$

$$\min\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\} \le a_2 \le \max\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\}$$

....

$$\min\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\} \le a_n \le \max\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\}.$$

Cộng các bất đẳng thức này ta suy ra

$$n.\min\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\} \le a_1+a_2+a_3+...+a_n \le n.\max\{a_1;a_2;a_3;...;a_n\}$$

Chia bất đẳng thức nhận được cho n, ta được điều phải chứng minh. □

Để kết thúc tiết này, chúng ta sẽ theo dõi cách chứng minh khá thú vị bất đẳng thức Nesbitt (chứng minh của Hojo Lee).

Ví dụ. *(Bất đẳng thức Nesbitt)*

$$\forall a,b,c>0,\ \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Ta nhận thấy khi hoán đổi vai trò của a, b, c cho nhau, bất đẳng thức không thay đổi và dấu đẳng thức trong bất đẳng thức cần chứng minh xảy ra khi $a=b=c$ hay $2.\frac{a}{b+c}=1$. Vì vậy đặt $x=\frac{a}{b+c}$ và sử dụng bất đẳng thức đúng hiển nhiên $(2x-1)^2\ge 0$, ta suy ra $4x^2-4x+1\ge 0$ hay $x\ge\frac{1}{4}.\frac{8x-1}{x+1}$.

Trở lại biến cũ, ta có $\frac{a}{b+c}\ge\frac{8a-b-c}{4(a+b+c)}$ (xảy ra đẳng thức chỉ khi $2x=1$ hay $3a=a+b+c$).

Ta cũng có hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng ba bất đẳng thức nhận được và chú ý rằng

$$\frac{8a-b-c}{4(a+b+c)}+\frac{8b-c-a}{4(a+b+c)}+\frac{8c-a-b}{4(a+b+c)}=\frac{3}{2},$$

suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}3a=a+b+c\\3b=a+b+c\\3c=a+b+c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.\ \square$$

8. (Bất đẳng thức trong miền sắp thứ tự) . Giả sử V là một miền nguyên có chứa một tập con D thoả mãn 3 tính chất sau :

(i) Nếu $a, b \in D$ thì $a + b \in D$.

(ii) Nếu $a, b \in D$ thì $ab \in D$.

(iii) Nếu $a \in V$ thì một và chỉ một trong 3 khả năng sau được thực hiện :

$$\text{hoặc } a \in D, \text{ hoặc } a = 0, \text{ hoặc } -a \in D$$

(các phần tử của D cũng được gọi là các phần tử dương). Ta nói rằng V là một miền sắp thứ tự. Nếu $a, b \in V$ thì ta nói rằng a nhỏ hơn b hay b lớn hơn a (và viết là $a < b$ hay $b > a$) nếu $b - a \in D$. Tuyển của hai mệnh đề "$a < b$", "$a = b$" được kí hiệu là $a \leq b$. Tương tự, tuyển của hai mệnh đề "$b > a$", "$b = a$" được kí hiệu là $b \geq a$. Sử dụng các tính chất của miền nguyên và miền sắp thứ tự, hãy chứng minh các tính chất sau đây :

1) $\forall a \in V, a \leq a$.

2) $\forall a, b \in V, a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$.

3) $\forall a, b, c \in V, a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

4) $\forall a, b, c \in V, a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$.

5) Nếu $a, b \in V$ thì $ab > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \end{array}\right.$ và $ab < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0, b < 0 \\ a < 0, b > 0. \end{array}\right.$

6) $\forall a, b, c \in V$, nếu $c > 0$ thì $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$; nếu $c < 0$ thì $a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$.

7) Nếu $a \leq b, c \leq d$ thì $a + c \leq b + d$.

8) Nếu $0 < a \leq b, 0 < c \leq d$ thì $ac \leq bd$.

9) Nếu $0 < a \leq b$ và n là một số nguyên dương thì $a^n \leq b^n$.

10) $\forall a \in V, a^2 \geq 0$.

11) $\forall a, b \in V, a^2 - ab + b^2 \geq 0$.

12) $\forall a, b \in V, a \leq b \Rightarrow a^3 \leq b^3$.

9. Trong một miền sắp thứ tự, giá trị tuyệt đối $|a|$ của phần tử a được định nghĩa bởi công thức

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Nói cách khác, $|a|$ là 0 nếu a là 0, và trong trường hợp $a \neq 0$, nó là phần tử dương của cặp a, $-a$.

Chứng minh các tính chất sau đây của giá trị tuyệt đối trong miền sắp thứ tự :

Với a, b là hai phần tử của một miền sắp thứ tự, ta có

1) $|a| = \max\{a; -a\}$.

2) $|ab| = |a|.|b|$.

3) $|a+b| \leq |a| + |b|$.

4) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

10. Chứng tỏ rằng trong miền sắp thứ tự, luật giản ước của phép nhân được suy từ các tiên đề khác.

11. Chứng minh các bất đẳng thức sau trên tập số thực :

1) $a^2 \pm ab + b^2 \geq 0$. (Hãy so sánh với phép chứng minh bất đẳng thức này trong một miền nguyên tuỳ ý).

2) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

3) $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

4) Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ thì $-\dfrac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$.

5) $\forall a, b, c > 0, ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$.

6) $\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$.

7) Nếu $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8$ thì $ab + bc + 2ca \geq -8$.

8) Nếu $\begin{cases} a+b+c=6 \\ a^2+b^2+c^2=18 \end{cases}$ thì $a,b,c \in [0;4]$.

12. Cho ba số x, y, z. Chứng minh rằng nếu $x, y, z \in [0;1]$ thì

$$x^2+y^2+z^2 \le 1 + x^2y + y^2z + z^2x.$$

13. (Murray Klamkin) [1] Chứng minh rằng

$$\frac{x+y+z}{3\sqrt{3}} \ge \frac{xy+yz+zx}{\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}+\sqrt{x^2+xy+y^2}}, \forall x,y,z>0.$$

§3. CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH CỦA HAI SỐ KHÔNG ÂM

Các bất đẳng thức so sánh các đại lượng trung bình của hai số không âm là các bất đẳng thức đơn giản nhất nhưng cũng được sử dụng thường xuyên nhất trong toán phổ thông trung học. Nó cũng là xuất phát điểm cho những kết quả khái quát hơn, sâu sắc hơn sau này. Vì vậy, chúng ta bắt đầu bằng việc nghiên cứu các đại lượng trung bình của hai số không âm.

Với hai số không âm a, b, kí hiệu

$$A = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad G = \sqrt{ab} \quad ; \quad Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

lần lượt là *trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình toàn phương* [2] của hai số a, b.

Nếu cả hai số a, b đã cho đều là số dương thì ta còn kí hiệu

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

là *trung bình điều hoà* [2] của hai số đó.

---

[1] Tên tác giả của bài toán.

[2] Trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình toàn phương, trung bình điều hoà tiếng Anh là arithmetic mean, geometric mean, quadratic mean, harmonic mean.

Bất đẳng thức đơn giản nhất, cơ bản nhất mà ta đã biết là $\forall x, x^2 \geq 0$, trong đó đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = 0$ (định lí 2, §2). Mặc dù cực kì đơn giản nhưng bất đẳng thức này lại là nguồn gốc của nhiều bất đẳng thức quan trọng và là một kĩ thuật cơ bản nhất trong phép chứng minh bất đẳng thức, theo đó để chứng minh một đại lượng không âm, ta thường tìm cách viết biểu thức dưới dạng một bình phương đúng. Trong thực tế, nhiều khi việc đưa một biểu thức về dạng một bình phương khó hơn là việc viết biểu thức đó dưới dạng tổng của những bình phương rồi áp dụng tính chất cộng các bất đẳng thức cùng chiều, ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 + ... + t^2 \geq 0,$$

đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = y = z = ... = t = 0$.

Trong bất đẳng thức $\forall x, x^2 \geq 0$, nếu lấy $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ $(a, b \geq 0)$ và sau vài biến đổi đơn giản, ta rút ra

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ hay } A \geq G,$$

trong đó đẳng thức chỉ xảy ra khi $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Áp dụng bất đẳng thức $A \geq G$ cho hai số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ ta được

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Leftrightarrow G \geq H.$$

Mặt khác, trong bất đẳng thức $\forall x, x^2 \geq 0$, nếu lấy $x = a - b$ thì ta có

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow Q \geq A.$$

Vậy ta có dãy bất đẳng thức $Q \geq A \geq G \geq H$, trong đó mỗi bất đẳng thức trở thành đẳng thức chỉ khi $a = b$.

Định lí

$$Q \geq A \geq G \geq H$$

trong đó A, G, Q, H theo thứ tự là trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình toàn phương và trung bình điều hoà của hai số dương a, b.

Bất đẳng thức $A \geq G$ thường được sử dụng hơn cả và được gọi là *bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân* hay *bất đẳng thức AM-GM* (gọi tắt là *bất* *đẳng thức A-G*). Đây là cách gọi tên ở nước ngoài, phổ biến là ở các nước Âu, Mỹ, còn ở Việt Nam nhiều người vẫn quen gọi (một cách không đúng) là bất đẳng thức Cauchy. Trong bài tiếp theo, ta sẽ thấy bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân còn đúng cho trường hợp nhiều hơn hai số.

Sau đây là ý nghĩa hình học của bất đẳng thức $A \geq G$. Giả sử ta xét tập các hình chữ nhật có cùng diện tích S đã cho. Nếu a, b là độ dài các cạnh của một hình chữ nhật như vậy thì ta có $ab = S$, còn chu vi hình chữ nhật là $2(a+b)$. Theo bất đẳng thức A-G, ta có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow 2(a+b) \geq 4\sqrt{ab} = 4\sqrt{S}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{ab} = \sqrt{S}$.

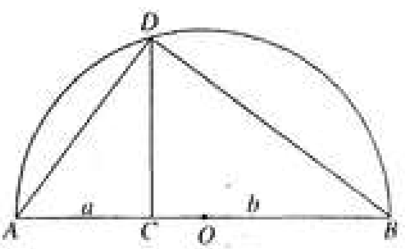
Vì vậy *trong các hình chữ nhật cùng diện tích S, hình vuông cạnh* $\sqrt{S}$ *có chu vi nhỏ nhất*. Tương tự, bất đẳng thức A-G cũng cho thấy là *trong các hình chữ nhật có cùng chu vi P, hình vuông cạnh* $\frac{P}{4}$ *có diện tích lớn nhất.*

Để kết thúc bài này, chúng ta sẽ cho một cách lí giải bất đẳng thức

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

bằng hình học, cách giải thích này được cho là của Euclid (mặc dù không chắc là điều này có đúng hay không) và trình bày một số ví dụ sử dụng bất đẳng thức A-G và định lí trên trong chứng minh bất đẳng thức.

Xét nửa đường tròn đường kính AB, trên đoạn AB lấy một điểm C. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn tại điểm D. Đặt $AC = a, BC = b$ thì đường cao DC của tam giác vuông DAB có độ dài là $DC = \sqrt{ab}$, còn bán kính nửa đường tròn là $R = \frac{a+b}{2}$.



Vì đường kính là dây lớn nhất nên suy ra $R \geq DC$ hay $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $DC \equiv DO$ (O là tâm nửa đường tròn), hay $C \equiv O$, khi đó
$$a = AC = BC = b.$$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số thực dương thì
$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c.$$
Chứng minh. Chú ý rằng vế trái bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại dưới dạng
$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right).$$
Theo bất đẳng thức A-G, ta có
$$\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)\geq b;\ \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\geq c;\ \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geq a.$$
Cộng ba bất đẳng thức này, ta suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\forall x,y>0, (1+2x)\left(1+\frac{y}{2x}\right)\left(1+\frac{4}{\sqrt{y}}\right)^2\geq 81$.

Chứng minh. Ta có

$(1+2x)\left(1+\frac{y}{2x}\right)=1+2x+\frac{y}{2x}+y\geq 1+2\sqrt{y}+y$ (bất đẳng thức A-G)

$$\Rightarrow (1+2x)\left(1+\frac{y}{2x}\right)\left(1+\frac{4}{\sqrt{y}}\right)^2\geq\left(1+\sqrt{y}\right)^2\left(1+\frac{4}{\sqrt{y}}\right)^2=\left(\left(1+\sqrt{y}\right)\left(1+\frac{4}{\sqrt{y}}\right)\right)^2$$

$$=\left(1+\sqrt{y}+\frac{4}{\sqrt{y}}+4\right)^2\geq(1+2.2+4)^2=81. \text{ (bất đẳng thức A-G).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2x=\frac{y}{2x}\\ \sqrt{y}=\frac{4}{\sqrt{y}}\\ x,y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}$. □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì
$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Chứng minh. Có thể viết vế trái thành tổng của ba trung bình cộng và áp dụng $A \le Q$, ta có :

$$\frac{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}}{2} \le \sqrt{\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}} = \sqrt{b}$$

và $$\frac{\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}}{2} \le \sqrt{c}\ ;\ \frac{\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}}{2} \le \sqrt{a}.$$

Cộng ba bất đẳng thức này, ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b-c=b+c-a=c+a-b \Leftrightarrow a=b=c$, tức là tam giác đã cho đều. □

Trong nhiều trường hợp, để có thể sử dụng định lí trên, các em học sinh cần thành thạo những biến đổi đại số cơ bản và cần phải có một chút "óc tưởng tượng". Đặc biệt trong đa số trường hợp, cực trị của biểu thức thường đạt tại biên và điều này gợi ý cách biến đổi. Chẳng hạn, trong ví dụ sau, việc dự đoán cực trị đạt tại biên tức là $x=\sqrt{3}, xy=6, xz=12$ hay $x=\sqrt{3}, y=2\sqrt{3}, z=4\sqrt{3}$ gợi ý ta nghĩ đến đánh giá

$$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{2\sqrt{3}} \ge 2\sqrt{\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{y}{2\sqrt{3}}} \ge 2.$$

Ví dụ 4. Cho x, y, z là ba số thoả mãn điều kiện $\begin{cases}\sqrt{3} \le x \le \min\{y, z\}\\ xy \ge 6\\ xz \ge 12.\end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Giải. Ta có

$$S = \frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right) \le \frac{1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right).$$

Mặt khác

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{2}{y}+\frac{1}{x}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right) \le \frac{1}{y}\cdot 2\sqrt{\frac{6}{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right)$$

$$\le \frac{1}{y}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{y}{2\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right) \text{ (do giả thiết } xy \ge 6\text{)}$$

$$\le \frac{1}{y}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{2\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right) \quad \text{(bất đẳng thức A-G)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

(đẳng thức chỉ xảy ra khi $x=\sqrt{3}, y=2\sqrt{3}$).

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{z}+\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{z}\right)=\frac{1}{z}.2\sqrt{\frac{12}{12}}+\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{z}\right)\le\frac{1}{z}.2\sqrt{\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{z}{4\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{x}{z}\right)$$

$$\le\frac{1}{z}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{z}{4\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{x}{z}\right)=\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(đẳng thức chỉ xảy ra khi $x=\sqrt{3}, z=4\sqrt{3}$).

Do đó $\max S=\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{15}{4\sqrt{3}}$ □

Bài tập

14. Cho hai đường tròn bán kính a, b tiếp xúc ngoài nhau. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai tiếp điểm của hai đường tròn với tiếp tuyến chung ngoài của chúng có độ dài bằng $\sqrt{ab}$. Từ đó suy ra bất đẳng thức A-G cho hai số dương.

15. (Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân của 3 và 4 số không âm).

a) Chứng minh rằng $\forall a,b,c,d\ge 0,\ \frac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$ [1].

b) Từ đó chứng minh rằng $\forall a,b,c\ge 0,\ \frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$

(phương pháp chứng minh bằng quy nạp kiểu Cauchy, xem thêm ở §4).

16. (Chứng minh bất đẳng thức A-G bằng cách quy về một biến) Với hai số không âm a,b đã cho, luôn có thể chọn ra được một số lớn hơn hay bằng số kia.

---

[1] Kí hiệu $\sqrt[4]{a}$ đọc là căn số học bậc 4 của a, đó là số dương có luỹ thừa bậc 4 bằng a.

Không mất tổng quát, có thể giả thiết $a \ge b \ge 0$. Hãy đặt $a = t^2 b$ với $t \ge 1$ để đưa bất đẳng thức A-G về một bất đẳng thức của biến t.

17. Cho x, y, z dương thoả mãn điều kiện $x + y + z \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

18. Chứng minh rằng với 4 số thực tuỳ ý x, y, z, t, bất đẳng thức sau luôn đúng :

$$3(x + y + z + t)^2 \ge 8(xy + xz + xt + yz + yt + zt).$$

19. *(Michale Mobius)* Cho 4 số thực x, y, z, t thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 \le 1$ và $z^2 + t^2 \le 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(x+z)^2 + (y+t)^2} + \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} \le 2\sqrt{2}.$$

20. *(France Pre – MO 2005).* Cho x, y, z dương và có tổng các bình phương bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge 3.$$

21. *(USA MO 1998).* Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \le \frac{1}{abc}.$$

22. *(IMO Shortlist 1996).* Cho x, y, z là ba số dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng

$$\frac{xy}{x^5 + y^5 + xy} + \frac{yz}{y^5 + z^5 + yz} + \frac{zx}{z^5 + x^5 + zx} \le 1.$$

23. Cho a, b, c là ba số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2} \ge \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2}.$$

24. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c, d > 0$

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \ge \frac{a+b+c+d}{2}.$$

§4. BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN

Trong bài này, chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh bất đẳng thức mở rộng của bất đẳng thức A-G, trong đó có đề cập đến khái niệm căn bậc n của một số không âm. Vì vậy, chúng ta sẽ bắt đầu bài này bằng cách giới thiệu tóm tắt khái niệm căn bậc n của một số không âm và các tính chất quan trọng nhất liên quan đến căn bậc n. Nhắc lại rằng, theo định nghĩa, căn bậc 3 của số thực a đã cho là số thực có luỹ thừa bậc 3 bằng a. Nói cách khác, căn bậc 3 của a là nghiệm của phương trình $x^3 = a$. Tương tự, căn bậc 2 của số a là các nghiệm (nếu có) của phương trình $x^2 = a$. Từ đó ta thấy:

- Số 0 có căn bậc 2 và căn bậc 3 đều bằng 0;
- Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc 3, kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$; giá trị này luôn cùng dấu với a.
- Số âm không có căn bậc 2;
- Mỗi số dương a có 2 căn bậc 2 đối nhau, giá trị dương được kí hiệu là $\sqrt{a}$.

Như vậy, với mỗi số a không âm đã cho, $\sqrt{a}$ (tương ứng, $\sqrt[3]{a}$) là số thực không âm duy nhất có bình phương (tương ứng, lập phương) bằng a.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa và định lí sau đây:

Định nghĩa

Nếu n là một số nguyên dương và a là một số thực đã cho thì căn bậc n của số a (nếu có) là các số thực có luỹ thừa bậc n đúng bằng a.

Định lí

Số 0 có một căn bậc n duy nhất là 0 (kí hiệu là $\sqrt[n]{0}$); mọi số thực a đều có một căn bậc lẻ duy nhất (kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$) - số này cùng dấu với a; số âm không có căn bậc chẵn; số dương có hai căn bậc chẵn đối nhau (kí hiệu là $\pm\sqrt[n]{a}$, trong đó $\sqrt[n]{a}$ là giá trị dương). Đặc biệt, căn bậc 1 của a là chính nó nên không dùng kí hiệu $\sqrt[1]{a}$, căn bậc hai không âm của số a được kí hiệu là $\sqrt{a}$.

Dễ dàng chứng minh các tính chất sau đây của căn bậc n:

1) $\sqrt[n]{0} = 0$.

2) $\forall a > 0, \sqrt[n]{a} > 0$.

3) $\forall a \ge 0, \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

4) $\forall a \ge 0, \sqrt[n]{a^n} = a$.

5) $\forall a \ge 0, \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

6) $\forall a \ge 0, \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ (m, n nguyên dương).

7) $\forall a, b \ge 0, \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (n nguyên lớn hơn 1).

8) $\forall a \ge 0, \forall b > 0, \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (n nguyên lớn hơn 1).

9) Nếu a, b là hai số không âm, n là một số nguyên dương thì

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Căn bậc n của một số dương thường là số vô tỉ. Để biết giá trị gần đúng của $\sqrt[n]{a}$, các em học sinh có thể sử dụng máy tính cầm tay (chẳng hạn máy Casio *fx*-500, ...).

Sử dụng căn thức, chúng ta có thể mở rộng định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên dương để định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ của các số dương như sau: Giả sử a là một số dương và q là một số hữu tỉ. Ta định nghĩa:

(1) Nếu q nguyên dương thì $a^q = \underbrace{a.a.a...a}_{q}$ (tích của q thừa số a).

(2) Nếu $q = 0$ thì $a^q = a^0 = 1$.

(3) Nếu q nguyên âm thì $-q$ nguyên dương và $a^q = \dfrac{1}{a^{-q}}$.

(4) Nếu $q = \dfrac{m}{n}, (m, n \in \mathbb{Z}; n > 0)$ thì $a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Trong bài tập 14, ta đã thấy là bất đẳng thức A-G vẫn còn đúng cho trường hợp 3 hay 4 số không âm. Một cách tổng quát, ta định nghĩa : Trung bình cộng và trung bình nhân của n số không âm $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ là các đại lượng

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n},\ G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}.$$

***Định lí** (Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân hay bất đẳng thức A-G)*

> *Nếu A_n và G_n là trung bình cộng và trung bình nhân của n số thực không âm $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ thì $A_n \geq G_n$.*
>
> *Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$.*

Chứng minh. Ta chứng minh định lí này bằng phương pháp quy nạp.

Khi $n = 2$, bất đẳng thức cần chứng minh đúng theo định lí ở §3. Giả sử bất đẳng thức đã được chứng minh cho $n = k$, tức là có $A_k \geq G_k$. Kí hiệu A, B theo thứ tự là trung bình cộng và trung bình nhân của k số gồm $(k-1)$ số bằng A_{k+1}, một số bằng a_{k+1}. Theo giả thiết quy nạp, ta có $A = \dfrac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \geq \sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}} = G$.

Dễ kiểm tra được rằng $\dfrac{A_k + A}{2} = A_{k+1}, \sqrt{G_k G} = \sqrt{\sqrt[k]{G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1}}} = \sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1}}$.

Do đó áp dụng định lí ở §3 và giả thiết quy nạp $A_k \geq G_k, A \geq G$, ta có

$$A_{k+1} = \frac{A_k + A}{2} \geq \sqrt{A_k A} \geq \sqrt{G_k G} = \sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1}}$$

từ đó suy ra $A_{k+1} \geq G_{k+1}$. Đẳng thức chỉ xảy ra khi $A_k = A, A_k = G_k, A = G$.

Vì $A_k = G_k$ nên $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_k$ (giả thiết quy nạp) và vì $A = G$ nên

$$a_{k+1} = A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{k+1}}{k+1},$$

do đó $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_k = a_{k+1}$. □

Chú ý: Nếu $Q_n = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}{n}}$ là trung bình toàn phương của n số không âm $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ và $H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + ... + \dfrac{1}{a_n}}$ là trung bình điều hòa của n số dương $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ thì có thể dễ dàng chứng minh được

$$Q_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n.$$

Các đẳng thức đều chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$.

Bây giờ chúng ta sẽ làm quen với một phương pháp chứng minh quy nạp mới, được biết là do Cauchy đề xuất trong phép chứng minh bất đẳng thức A-G. Đây là một phương pháp chứng minh rất hay và rất nổi tiếng, đến nỗi nhiều người đã lầm tưởng Cauchy là người phát hiện ra bất đẳng thức này mà gọi tên nó một cách không đúng là bất đẳng thức Cauchy (thực ra ông chỉ là người đưa ra phép chứng minh bất đẳng thức này bằng *phương pháp quy nạp kiểu Cauchy* chứ không phải là người đầu tiên phát hiện ra nó).

Phương pháp quy nạp kiểu Cauchy có nội dung như sau: Giả sử $P(n)$ là một mệnh đề chứa biến tự nhiên n. Biết rằng:

(i) $P\left(2^k\right),\left(k \in \mathbb{N}\right)$, là mệnh đề đúng.

(ii) Nếu $P(m)$ đúng thì $P(m-1)$ cũng đúng.

Khi đó $P(n)$ đúng với mọi n tự nhiên.

Chứng minh bất đẳng thức A-G bằng quy nạp kiểu Cauchy: Hiển nhiên bất đẳng thức A-G đúng với $n=1, n=2$. Nếu bất đẳng thức đúng với n số thì cũng đúng với $2n$ số vì

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} &\geq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + n\sqrt[n]{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{2n}} \\
&\geq n.2\sqrt{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.\sqrt[n]{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{2n}}} \\
&= 2n\sqrt[2n]{a_1a_2\ldots a_{2n}}.
\end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức đúng với mọi n là luỹ thừa của 2.

Mặt khác, nếu bất đẳng thức đúng với n số và $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ là $(n-1)$ số đã cho thì đặt $a_n = \dfrac{s}{n-1}$, trong đó $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$, ta có

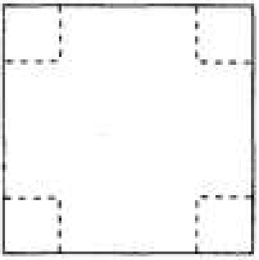
$$s + \frac{s}{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = n\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\ldots a_{n-1}s}{n-1}}$$

$$\Rightarrow s \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}.$$

Tức là bất đẳng thức cũng đúng với $n-1$ số. Vậy theo nguyên lí quy nạp (kiểu Cauchy), ta có bất đẳng thức đúng với mọi n nguyên dương. □

Sau đây chúng ta sẽ minh hoạ phương pháp sử dụng bất đẳng thức A-G thông qua một số ví dụ.

Ví dụ 1. Một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 30 cm. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau rồi gấp tấm nhôm lại (theo đường nét đứt) để được một cái hộp không nắp. Tính cạnh các hình vuông bị cắt sao cho thể tích khối hộp là lớn nhất.



Giải. Gọi x (cm) là độ dài cạnh hình vuông bị cắt thì các cạnh hình hộp tạo thành tính theo x là x, $30-2x$, $30-2x$, do đó x phải thoả mãn điều kiện $0<x<15$ và thể tích khối hộp tạo thành là $V=x(30-2x)^2=4x(15-x)^2$. Áp dụng bất đẳng thức A-G cho 3 số dương $2x, 15-x, 15-x$, ta được

$$\frac{2x+2(15-x)}{3}\ge\sqrt[3]{2x(15-x)^2}\ \text{ hay }\ 2x(15-x)^2\le 10^3,$$

suy ra $V\le 2000$ (cm^3).

Giá trị lớn nhất của V đạt được khi $2x=15-x \Leftrightarrow x=5$ (cm). ĐS : 5 cm. □

Ví dụ 2. Sử dụng bất đẳng thức A-G, hãy chứng minh bất đẳng thức Nesbitt cho ba số dương (xem thêm ví dụ ở §2).

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh là $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$.

Kí hiệu L là vế trái bất đẳng thức này, "quy đồng" tử số ba phân số trong L bằng cách thêm bớt 1 vào mỗi phân số, ta có :

$$\begin{aligned}L&=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}-3\\&=\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\&\ge\frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c}.\frac{1}{c+a}.\frac{1}{a+b}}-3=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $L\ge\dfrac{3}{2}$. Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a+b=b+c=c+a \Leftrightarrow a=b=c$. □

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^3+2}{x}$, với $x > 0$.

Giải. Theo bất đẳng thức A-G ta có

$$x^3 + 2 = x^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^3.1.1} = 3x \Rightarrow \forall x > 0, y = \frac{x^3+2}{x} \geq 3.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $\min y = 3$, đạt được khi $x = 1$. □

Ví dụ 4. Chứng minh rằng dãy số $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ là dãy số tăng, tức là

$$u_1 < u_2 < u_3 < ... < u_n < ...$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức A-G cho $k+1$ số không bằng nhau gồm k số $1+\dfrac{1}{k}$ và một số 1, ta có

$$\frac{1}{k+1}\left(k\left(1+\frac{1}{k}\right)+1\right) > \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.1\right)^{\frac{1}{k+1}} \text{ hay } \frac{k+2}{k+1} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}},$$

do đó $\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^{k+1} > \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$.

Vì vậy $u_{k+1} > u_k$, dãy đã cho là dãy số tăng. □

Ví dụ 5. *(Olympic USA 1980)* Chứng minh rằng

$$\forall a,b,c \in [0;1], \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1. \qquad (*)$$

Chứng minh. Vì bất đẳng thức cần chứng minh không thay đổi khi đổi vai trò a,b,c cho nhau nên không mất tổng quát, có thể giả thiết $a = \max\{a,b,c\}$, tức là có $b \leq a, c \leq a$.

Từ đó ta có
$$\frac{b}{c+a+1} \leq \frac{b}{c+b+1} \qquad (1)$$

và
$$\frac{c}{a+b+1} \leq \frac{c}{c+b+1}. \qquad (2)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức A-G ta có

$$\frac{(1+b+c)+(1-b)+(1-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(1+b+c)(1-b)(1-c)} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow 1 \geq (1+b+c)(1-b)(1-c)$$

$$\Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-a}{1+b+c}. \qquad (4)$$

Do đó vế trái bất đẳng thức cần chứng minh không lớn hơn

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+b+1} + \frac{c}{c+b+1} + \frac{1-a}{1+b+c} = 1 \text{ (đpcm)}.$$

Ta xét xem dấu "=" xảy ra khi nào.

Vẫn xem $a = \max\{a, b, c\}$. Dấu "=" xảy ra khi (1), (2), (4) trở thành đẳng thức.

(4) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow a = 1$ hoặc (3) trở thành đẳng thức

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ 1+b+c = 1-b = 1-c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = c = 0. \end{array}\right.$$

- Trường hợp $b = c = 0$, (1) và (2) trở thành đẳng thức với mọi $a \in [0, 1]$.

- Trường hợp $a = 1$, (1) và (2) trở thành đẳng thức khi $b = c = a = 1$ hoặc $b = 0$, $c = a = 1$ hoặc $b = a = 1, c = 0$.

Vậy dấu "=" trong (*) xảy ra khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 0, hoặc một số bằng 0 và hai số bằng 1, hoặc cả ba số bằng 1. □

Bài tập

25. Cho ba số a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$.

26. Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng $a^3 + \frac{b^3}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq a + \frac{b}{a} + \frac{1}{b}$.

27. Cho $a, b, c, d > 0$ thoả mãn điều kiện $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} = 3$.

Chứng minh rằng $abcd \leq \frac{1}{81}$.

28. Cho ba số dương x, y, z thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \le \frac{3}{2}.$$

29. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right) \le 1.$$

30. Chứng minh rằng $G_n \ge H_n$, trong đó G_n, H_n theo thứ tự là trung bình nhân và trung bình điều hoà của n số dương $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

31. *(Canada MO 2002)*. Chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0$, ta có

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \ge x + y + z.$$

32. *(APMO 1998)*. Chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0$, ta có

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \ge 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

33. *(Viet Nam MO)*. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dương thoả mãn

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Chứng minh rằng $x_1 x_2 \ldots x_n \ge (n-1)^n$.

34. *(IMO Shortlist 1990)*. Cho 4 số không âm a, b, c, d thoả mãn điều kiện

$$ab + bc + cd + da = 1.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{a^3}{b+c+d} + \dfrac{b^3}{c+d+a} + \dfrac{c^3}{d+a+b} + \dfrac{d^3}{a+b+c} \ge \dfrac{1}{3}$.

35. *(IMO Shortlist 1998)*. Cho x, y, z dương và có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \ge \frac{3}{4}.$$

§5. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

Cùng với bất đẳng thức A-G, bất đẳng thức Cauchy là bất đẳng thức quan trọng và có rất nhiều ứng dụng trong toán học. Bất đẳng thức Cauchy còn được biết đến với những tên gọi khác như Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, Cauchy-Schwarz, Schwarz, Bunyakovsky[1]. Nhiều tài liệu của Việt Nam gọi bất đẳng thức này là bất đẳng thức Bunyakovsky hoặc bằng tên dài nói trên nhưng đảo thứ tự là bất đẳng thức Bunyakovsky-Cauchy-Schwarz nên cũng thường viết tắt là bất đẳng thức BCS.

Định lí 1. *(Bất đẳng thức Cauchy)*

> *Với bốn số a, b, x, y, bất đẳng thức sau luôn đúng*
>
> $$\left(ax+by\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right).$$
>
> *Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.*

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh suy trực tiếp từ đồng nhất thức sau

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(ax+by\right)^2=\left(ay-bx\right)^2. \ \square$$

Chú ý. Nếu $x \ne 0, y \ne 0$ thì điều kiện $ay = bx$ có thể viết dưới dạng tương đương

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}.$$

Nếu $x \ne 0, y = 0$ thì điều kiện $ay = bx$ tương đương với $b = 0$.

Vì vậy có thể viết điều kiện xảy ra đẳng thức dưới dạng $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ nếu đẳng thức này được xem là đúng chỉ trong các trường hợp sau :

- hai phân số $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}$ cùng có nghĩa và có giá trị bằng nhau;
- trong hai phân số $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}$, một phân số có nghĩa, phân số kia có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

---

[1] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) - nhà toán học Pháp, Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889) - nhà toán học Nga, Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) - nhà toán học Đức. Năm 1821, Cauchy chứng minh bất đẳng thức này trong trường hợp các vectơ thực hữu hạn chiều, đến năm 1859, học trò của Cauchy là Bunyakovsky thu được dạng tích phân của bất đẳng thức, kết quả tổng quát được Schwarz chứng minh năm 1885.

- Cả hai phân số $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}$ cùng vô nghĩa, tức là có $x = y = 0$.

Ví dụ 1. Cho $c > a > 0, c > b > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(c-b)} + \sqrt{b(c-a)} \le c.$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(\sqrt{a}.\sqrt{c-b} + \sqrt{c-a}.\sqrt{b}\right)^2 \le (a + c - a)(c - b + b) = c^2.$$

Khai căn bất đẳng thức nhận được, ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức chỉ xảy ra khi

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{c-a}\sqrt{c-b} \Leftrightarrow ab = (c-a)(c-b) \Leftrightarrow c(c-a-b) = 0 \Leftrightarrow c = a + b$. □

Ví dụ 2. Cho x, y là hai số thực thay đổi luôn thoả mãn điều kiện $2x^2 + 3y^2 \le 5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f = 2x + 3y$.

Giải. Điều kiện đã cho có thể viết lại dưới dạng tổng hai bình phương như sau :

$$\left(\sqrt{2}x\right)^2 + \left(\sqrt{3}y\right)^2 \le 5.$$

Điều này gợi cho ta hướng tới sử dụng bất đẳng thức Cauchy bằng cách viết lại biểu thức đã cho dưới dạng $f = \sqrt{2}x.\sqrt{2} + \sqrt{3}y.\sqrt{3}$. Ta có

$$f^2 = \left(\sqrt{2}x.\sqrt{2} + \sqrt{3}y.\sqrt{3}\right)^2 \le \left(2x^2 + 3y^2\right)(2+3) \le 5^2.$$

Suy ra $|f| \le 5$, tức là $-5 \le f \le 5$.

f đạt giá trị 5 khi và chỉ khi x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}} \\ 2x + 3y = 5 \\ 2x^2 + 3y^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Tương tự, f đạt giá trị -5 khi và chỉ khi $x = y = -1$.

Vậy $\max f = 5$; $\min f = -5$. □

Ví dụ 2 cho thấy để có thể vận dụng bất đẳng thức Cauchy, các em học sinh cần có cách nhìn linh hoạt, có óc tưởng tượng phong phú và lập luận chính xác, đặc biệt trong việc tìm điều kiện xảy ra đẳng thức. Ví dụ sau đây cho thấy những kĩ năng tinh tế hơn trong cách vận dụng bất đẳng thức Cauchy.

Ví dụ 3. *(IMO - Poland đề nghị).* Chứng minh rằng nếu các số thực x, y, z thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ thì $x + y + z \le 2 + xyz$.

Chứng minh. Cần làm trội $x + y + z - xyz = x(1 - yz) + (y + z)$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\left(x(1-yz)+(y+z).1\right)^2 \le \left(x^2+(y+z)^2\right)\left((1-yz)^2+1\right)$

$$= \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\right)\left(2 - 2yz + y^2z^2\right)$$

$$= 2(1+yz)\left(2-2yz+y^2z^2\right) \text{ (do giả thiết } x^2+y^2+z^2=2)$$

$$= 4\left(1-y^2z^2\right)+2(1+yz)y^2z^2$$

$$= 4 + 2y^2z^2(yz-1) \le 4 \text{ (do } yz \le \frac{y^2+z^2}{2} \le \frac{x^2+y^2+z^2}{2} = 1).$$

Suy ra $x + y + z - xyz = x(1 - yz) + (y + z) \le 2$ (đpcm). □

Trong §2, chương IV (ví dụ 11), sử dụng phương pháp tam thức bậc hai, chúng ta sẽ chứng minh được bất đẳng thức Cauchy với số biến nhiều hơn như sau :

Định lí 2 *(Bất đẳng thức Cauchy)*

> *Với hai bộ n số thực $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, bất đẳng thức sau luôn đúng*
>
> $$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2\right).$$
>
> *Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước là trong dãy đẳng thức trên, nếu phân số nào có mẫu bằng 0 thì tử cũng phải bằng 0.*

Ví dụ sau đây minh hoạ phương pháp sử dụng bất đẳng thức Cauchy nhiều biến.

Ví dụ 4 *(IMO Shortlist 2001).* Chứng minh rằng với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dương thì

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_1^2+a_2^2} + \ldots + \frac{a_n}{1+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} < \sqrt{n}.$$

Giải. Để giảm độ phức tạp của biểu thức ở vế trái bất đẳng thức cần chứng minh, ta đặt $x_0 = 1, x_i = 1 + a_1^2 + a_2^2 + ... + a_i^n, (i = 1,2,...,n)$ thì $x_i > 1$ và $a_i = \sqrt{x_i - x_{i-1}}$.

Vế trái bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$L = \frac{\sqrt{x_1 - x_0}}{x_1} + \frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + ... + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$L^2 \le \left(\frac{x_1 - x_0}{x_1^2} + \frac{x_2 - x_1}{x_2^2} + ... + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n^2}\right).n$$

$$\le \left(\frac{x_1 - x_0}{x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_2 x_1} + ... + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n x_{n-1}}\right).n \quad (\text{do } x_i > 1, \forall i = 1,2,...,n)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)n < n$$

$\Rightarrow L < \sqrt{n}$. □

Khi tính tổng các phân số, việc quy đồng mẫu số thường dẫn đến những biểu thức cồng kềnh, phức tạp. Trong trường hợp không phải tính đúng mà chỉ cần ước lượng, đánh giá thì ta thường sử dụng một dạng khác hay dùng của bất đẳng thức Cauchy, theo đó thay vì phải quy đồng mẫu số các phân số, ta chỉ cần "cộng các mẫu số" và "cộng các tử số".

***Định lí 3** (dạng khác của bất đẳng thức Cauchy)*

1) Với cặp số thực a, b và cặp số dương x, y, ta luôn có $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{x+y}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai cặp số đã cho tỉ lệ, tức là $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

2) Với bộ ba số thực a, b, c và bộ ba số dương x, y, z, ta luôn có

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số đã cho tỉ lệ: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

3) Với bộ n số thực $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ và bộ n số dương $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, ta luôn có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{x_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

trong đó kí hiệu $\sum_{i=1}^{n} x_i$ có nghĩa là $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số tỉ lệ, tức là $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \frac{a_3}{x_3} = ... = \frac{a_n}{x_n}$.

Chứng minh. 1) và 2) là trường hợp đặc biệt của 3), ta chỉ cần chứng minh 3).

Để có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta viết lại biểu thức $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ như sau:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{x_i}} . \sqrt{x_i}\right)^2.$$

Từ đó $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{x_i}} . \sqrt{x_i}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$.

Do đó $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{x_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{\sqrt{x_1}} : \sqrt{x_1} = \frac{a_2}{\sqrt{x_2}} : \sqrt{x_2} = \frac{a_3}{\sqrt{x_3}} : \sqrt{x_3} = ... = \frac{a_n}{\sqrt{x_n}} : \sqrt{x_n},$$

tức là $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \frac{a_3}{x_3} = ... = \frac{a_n}{x_n}$. □

Chú ý. Ngoài kí hiệu $\sum_{i=1}^{n} x_i$, ta còn sử dụng các kí hiệu khác để chỉ các tổng.

Nếu tổng đối xứng đối với các biến $x, y, z, ...$ thì ta viết $\sum_{sym}$, chẳng hạn, với 4 biến x, y, z, t thì $\sum_{sym} xy = xy + xz + xt + yz + yt + zt$. Nếu tổng không thay đổi khi hoán vị vòng quanh các biến thì ta viết $\sum_{cyclic}$, chẳng hạn, với 4 biến x, y, z, t (theo thứ tự đó) thì $\sum_{cyclic} xy = xy + yz + zx + xt$.

Ví dụ 5. Cho ba số dương x, y, z thoả mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+z+x} + \frac{1}{2z+x+y} \le 1$.

Chứng minh. Vì x, y, z có vai trò bình đẳng trong giả thiết cũng như trong ba phân số ở vế trái bất đẳng thức cần chứng minh nên ta chỉ cần đánh giá một trong các phân số đó. Giả thiết của bài toán gợi ý sử dụng bất đẳng thức Cauchy ở dạng định lí 3, hơn nữa trong phân số $\frac{1}{2x+y+z}$, cần tách $2x + y + z = (x+y) + (x+z)$.

Như vậy ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+1)^2}{(x+y)+(x+z)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x+y} + \frac{4}{x+z}\right)$$

$$\le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Tương tự $\quad \frac{1}{2y+z+x} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right), \frac{1}{2z+x+y} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức vừa nhận được và sử dụng giả thiết, ta suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y = z > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{4}. \square$$

Bài tập

36. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, chứng minh bất đẳng thức Nesbitt cho 3 số dương.

37. Cho x, y là hai số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\ge\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

38. Chứng minh rằng $\forall a,b,c,d$: $(a+b+c+d)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+6ab$.

39. Cho $x, y>0$ thoả mãn điều kiện $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+4xy.$$

40. Chứng minh rằng nếu $0<b<a\le 2$ và $2ab\le 2b+a$ thì $a^2+b^2\le 5$.

41. Cho x,y,z là 3 số dương luôn có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}.$$

42. Chứng minh rằng $Q_n\ge A_n$, trong đó Q_n, A_n theo thứ tự là trung bình toàn phương và trung bình cộng của n số không âm $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n$.

43. *(Viet Nam MO 1991)*. Chứng minh rằng nếu $x\ge y\ge z>0$ thì

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\ge x^2+y^2+z^2.$$

44. *(Iran MO 1998)*. Giả sử $x,y,z\ge 1$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

45. *(Greece MO 2002)*. Cho a,b,c dương và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4c^2+1}+\frac{c}{4a^2+1}\ge\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2.$$

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Ở lớp dưới, ta đã làm quen với khái niệm phương trình, bất phương trình, chẳng hạn $x^2 - 3x - 2 = 0$ là một phương trình, $\sqrt{x+3} - 1 > x$ là một bất phương trình. Để có một cách hiểu mới, ta xem "$x^2 - 3x - 2 = 0$", "$\sqrt{x+3} - 1 > x$" là các mệnh đề chứa biến. Giá trị của biến x làm cho các mệnh đề đó đúng chính là nghiệm của phương trình, bất phương trình tương ứng. Sau đây, chúng ta sẽ định nghĩa phương trình, bất phương trình theo quan điểm đó.

1. Khái niệm phương trình, bất phương trình một ẩn

Định nghĩa

> *Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f, D_g. Đặt $D = D_f \cap D_g$. Mệnh đề chứa biến "$f(x) = g(x)$" được gọi là* ***phương trình một ẩn****; x được gọi là* ***ẩn số*** *(hay* ***ẩn****) và D được gọi là* ***tập xác định*** *của phương trình.*
>
> *Số $x_0 \in D$ gọi là một* ***nghiệm*** *của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu "$f(x_0) = g(x_0)$" là mệnh đề đúng.*

Tương tự ta định nghĩa cho *bất phương trình* một ẩn dạng $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$.

Giải một phương trình tức là đi tìm tất cả các nghiệm của nó, tức là tập hợp

$$S = \{x \in D \mid f(x) = g(x)\}.$$

S được gọi là *tập nghiệm* của phương trình $f(x) = g(x)$ (1). Khi $S = \varnothing$, ta nói phương trình (1) *vô nghiệm*. Nếu $|S| = n$ với n là một số nguyên dương nào đó, ta nói phương trình (1) có n nghiệm hay số nghiệm của phương trình (1) bằng n. Nếu $|S| = \infty$, ta nói phương trình (1) có vô số nghiệm.

Tương tự ta định nghĩa về tập nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 1

a) Tập nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ là $S = \{1; 2\}$.

b) Tập nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là $S = \varnothing$.

c) Tập nghiệm của phương trình $|x - 1| + |x - 2| = 1$ là $S = [1; 2]$ (trong trường hợp này $|S| = \infty$).

d) Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ là $S = [1; 2]$.

e) Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + x + 1 < 0$ là $S = \varnothing$.

f) Tập nghiệm của bất phương trình $(x^2 - 1)^2 \leq 0$ là $S = \{-1; 1\}$.

Chú ý 1. Để thuận tiện trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác định D của phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x \in D$. Điều kiện đó gọi là *điều kiện xác định của phương trình*, gọi tắt là *điều kiện của phương trình*.

Để đơn giản, ta coi các hàm số được nói đến trong bài này được cho bằng biểu thức. Vậy theo quy ước về tập xác định của hàm số cho bởi biểu thức, điều kiện của phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f(x)$ và $g(x)$ được xác định và các điều kiện khác của ẩn (nếu có yêu cầu).

Ví dụ 2

a) Điều kiện của phương trình $\sqrt{x^3 - 3x + 1} = 1$ là $x^3 - 3x + 1 \geq 0$.

b) Khi tìm nghiệm nguyên của phương trình $2 - \dfrac{1}{x} = \sqrt{x}$, ta hiểu điều kiện của phương trình là $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$ và $x \geq 0$.

c) Điều kiện của bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2 - \sqrt{x - 2}$ là $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ và $x - 2 \geq 0$.

Chú ý 2

1) Khi giải một phương trình, nhiều khi ta chỉ cần, hoặc chỉ có thể tính giá trị gần đúng của nghiệm (với độ chính xác nào đó). Giá trị đó gọi là *nghiệm gần đúng* của phương trình.

Chẳng hạn, bằng máy tính bỏ túi, ta tính được nghiệm gần đúng (chính xác đến hàng phần nghìn) của phương trình $x^3 = 7$ là $x \approx 1,913$.

2) Các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là hoành độ các giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

2. Phương trình, bất phương trình tương đương

Hai phương trình (bất phương trình) cùng ẩn được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng một tập nghiệm. Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

Tương tự, đối với các bất phương trình tương đương $f_1(x) > g_1(x)$, $f_2(x) > g_2(x)$, ta viết

$$f_1(x) > g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) > g_2(x).$$

H1 *Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?*

a) $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 1.$

b) $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x = 1.$

c) $|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

* Khi muốn nhấn mạnh hai phương trình có cùng tập xác định D (hay có cùng điều kiện xác định và ta cũng kí hiệu là D) và tương đương với nhau, ta nói

– Hai phương trình tương đương với nhau *trên D*, hoặc

– Với điều kiện D, hai phương trình tương đương với nhau.

Chẳng hạn với $x > 0$, hai phương trình $x^2 = 1$ và $x = 1$ tương đương với nhau.

* Trong các phép biến đổi phương trình, bất phương trình, đáng chú ý nhất là các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình, bất phương trình. Ta gọi chúng là các *phép biến đổi tương đương*. Như vậy

> *Phép biến đổi tương đương biến một phương trình (bất phương trình) thành phương trình (bất phương trình) tương đương với nó.*

Chẳng hạn, việc thực hiện các phép biến đổi đồng nhất ở mỗi vế của một phương trình và không thay đổi tập xác định của nó là một phép biến đổi tương đương.

Dưới đây là một định lí về một số phép biến đổi tương đương thường dùng.

Định lí 1

> *Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định D; $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên D ($h(x)$ có thể là một hằng số). Khi đó trên D, phương trình đã cho tương đương với mỗi phương trình sau:*
>
> *1) $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$;*
>
> *2) $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ nếu $h(x) \neq 0$ với mọi $x \in D$.*

Chứng minh. Ta chứng minh cho kết luận thứ nhất. Kết luận thứ hai được chứng minh tương tự.

Thật vậy, cả ba hàm số f, g và h đều xác định trên D nên nếu x_0 thuộc D thì $f(x_0)$, $g(x_0)$ và $h(x_0)$ là những số xác định. Do đó, áp dụng tính chất của đẳng thức số, ta có

$$f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) + h(x_0) = g(x_0) + h(x_0),$$

điều đó chứng tỏ rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình này thì cũng là nghiệm của phương trình kia và ngược lại. Vậy hai phương trình

$$f(x) = g(x) \quad \text{và} \quad f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

tương đương với nhau.

Từ định lí trên ta thấy: Hai quy tắc biến đổi phương trình đã học ở lớp dưới (quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân hai vế với một số khác 0) là những phép biến đổi tương đương.

h2. *Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ?*

a) Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2$, chuyển $\sqrt{x-2}$ sang vế phải thì được phương trình tương đương.

b) Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2}$. Lược bỏ $\sqrt{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình thì được phương trình tương đương.

Hoàn toàn tương tự, với bất phương trình ta có định lí sau.

Định lí 2

> *Cho bất phương trình $f(x) > g(x)$ có tập xác định D; $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên D ($h(x)$ có thể là một hằng số). Khi đó trên D, bất phương trình đã cho tương đương với mỗi phương trình sau:*
>
> *1) $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$;*
>
> *2) $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in D$.*

3. Phương trình, bất phương trình hệ quả

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$\sqrt{x} = 2 - x. \qquad (1)$$

Bình phương hai vế, ta được phương trình mới

$$x = 4 - 4x + x^2. \qquad (2)$$

Tập nghiệm của (1) là $S_1 = \{1\}$, của (2) là $S_2 = \{1; 4\}$. Hai phương trình (1) và (2) không tương đương. Tuy nhiên, ta thấy $S_2 \supset S_1$; trong trường hợp này, ta nói (2) là *phương trình hệ quả* của phương trình (1).

Một cách tổng quát

> *Phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu tập nghiệm của nó chứa tập nghiệm của phương trình*
>
> $$f(x) = g(x).$$

Khi đó ta viết $f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$.

Từ định nghĩa này, ta suy ra : Nếu hai phương trình tương đương thì mỗi phương trình đều là hệ quả của phương trình còn lại.

Trong ví dụ 2, giá trị $x = 4$ là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1). Ta gọi 4 là *nghiệm ngoại lai* của phương trình (1).

H3. *Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?*

a) $\sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 1.$

b) $\dfrac{x(x-1)}{x-1} = 1 \Rightarrow x = 1.$

Trong các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả, ta thường sử dụng phép biến đổi được nêu trong định lí sau đây.

Định lí 3

> *Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho*
>
> $$f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2.$$

Chú ý 3

1) Có thể chứng minh được: Nếu hai vế của một phương trình luôn cùng dấu thì khi bình phương hai vế của nó, ta được phương trình tương đương.

2) Nếu phép biến đổi một phương trình dẫn đến phương trình hệ quả thì sau khi giải phương trình hệ quả, ta phải thử lại các nghiệm tìm được vào phương trình đã cho để phát hiện và loại bỏ nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 4. Giải phương trình $|x-1| = x-3$.

Giải. Bình phương hai vế, ta được phương trình hệ quả

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 6x + 9.$$

Giải phương trình này, ta được $x = 2$. Thử lại, ta thấy 2 không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Một cách tương tự, ta có thể định nghĩa *bất phương trình hệ quả*. Tuy nhiên, do bất phương trình thường có tập nghiệm chứa vô số phần tử (đoạn, khoảng, nửa khoảng ...), việc thử lại để loại nghiệm ngoại lai là rất khó khăn nên ta thường ít khi dùng đến các phép biến đổi dẫn đến bất phương trình hệ quả. Hơn nữa, tính chất tương tự với phép biến đổi

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$$

không đúng, buộc ta phải thêm vào điều kiện

$$f(x) > g(x) \geq 0 \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2.$$

4. Phương trình, bất phương trình nhiều ẩn

Trong thực tế, ta còn gặp những phương trình nhiều hơn một ẩn. Đó là các phương trình dạng $F = G$, trong đó F và G là các biểu thức của nhiều biến. Chẳng hạn

$$2x^2 + 4xy - y^2 = -x + 2y + 3 \qquad (3)$$

là một *phương trình hai ẩn* (x và y) ;

$$x + y + z = 3xyz \qquad (4)$$

là một *phương trình ba ẩn* (x, y và z).

Nếu phương trình hai ẩn x và y trở thành mệnh đề đúng khi $x = x_0$ và $y = y_0$ (với x_0 và y_0 là số) thì ta gọi *cặp số* $(x_0 ; y_0)$ là *một nghiệm* của nó. Chẳng hạn cặp số $(1 ; 0)$ là một nghiệm của phương trình (3).

Khái niệm nghiệm của một phương trình ba ẩn, bốn ẩn ... cũng được hiểu tương tự. Chẳng hạn bộ ba số $(1; 1; 1)$ là một nghiệm của phương trình (4).

Đối với phương trình nhiều ẩn, các khái niệm tập xác định (điều kiện xác định), tập nghiệm, phương trình tương đương, phương trình hệ quả,... cũng tương tự như đối với phương trình một ẩn.

5. Phương trình, bất phương trình chứa tham số

Chúng ta còn xét cả những phương trình, bất phương trình, trong đó ngoài các ẩn còn có những chữ khác. Các chữ này được xem là những số đã biết và được gọi là *tham số*.

Chẳng hạn, phương trình $m(x + 2) = 3mx - 1$ (với ẩn x) là một *phương trình chứa tham số m*. Bất phương trình $x^2 > x + a$ (với ẩn x) là một *bất phương trình chứa tham số a*.

h4. *Tìm tập nghiệm của phương trình $mx + 2 = 1 - m$ (với m là tham số) trong mỗi trường hợp:*

a) $m = 0$; *b) $m \neq 0$.*

h5. *Tìm tập hợp nghiệm của bất phương trình $m(x - 1) > x + 1$ (với m là tham số) trong mỗi trường hợp:*

a) $m = 1$; *b) $m > 1$;* *c) $m < 1$.*

Rõ ràng nghiệm và tập nghiệm của một phương trình chứa tham số phụ thuộc vào tham số đó. Khi giải phương trình, bất phương trình chứa tham số, ta phải chỉ ra tập nghiệm của phương trình, bất phương trình tuỳ theo các giá trị có thể có của tham số. Để nhấn mạnh ý đó, khi giải phương trình, bất phương trình chứa tham số, ta thường nói là *giải và biện luận phương trình, bất phương trình*.

Bài tập

1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ b) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{x-3} = x + \sqrt{x-3}$ c) $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{-x}$.

2. Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế của phương trình

a) $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x}$ b) $\sqrt{x-1} = x - 3$ c) $|x-2| = 2x - 1$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

1. Giải và biện luận phương trình dạng ax + b = 0

Kết quả giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$ được nêu trong bảng sau đây

• $a \neq 0$:	Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
• $a = 0$ và $b \neq 0$:	Phương trình vô nghiệm.
• $a = 0$ và $b = 0$:	Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Giải và biện luận theo tham số m phương trình :

$$m^2(x-1) + 3mx = (m^2+3)x - 1.$$

Giải. Ta thực hiện các phép biến đổi tương đương

$$m^2(x-1) + 3mx = (m^2+3)x - 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 3m - m^2 - 3)x = m^2 - 1 \Leftrightarrow 3(m-1)x = m^2 - 1.$$

+ Nếu $m - 1 \neq 0$, tức là nếu $m \neq 1$, phương trình có một nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{m^2-1}{3(m-1)} = \frac{m+1}{3}.$$

+ Nếu $m - 1 = 0$, tức là nếu $m = 1$ thì $m^2 - 1 = 0$, suy ra mọi x là nghiệm của phương trình.

Kết luận : + Với $m \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{m+1}{3}$.

+ Với $m = 1$, mọi x là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình sau theo hai tham số a và b

$$a(ax + 2b^2) - a^2 = b^2(x + a).$$

Giải. Ta thực hiện các phép biến đổi tương đương

$$a(ax + 2b^2) - a^2 = b^2(x+a)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a^2 + b^2a - 2ab^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a^2 - ab^2.$$

+ Nếu $a^2 - b^2 \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{a^2 - ab^2}{a^2 - b^2}$.

+ Nếu $a^2 - b^2 = 0$ thì vế trái bằng 0 còn vế phải bằng $a^2 - ab^2 = a^2 - a^3 = a^2(1-a)$. Từ đây, nếu $a = 0$ hoặc $a = 1$ thì vế phải bằng 0 và mọi x là nghiệm của phương trình; với $a \neq 0$ và $a \neq 1$ thì vế phải khác 0 và phương trình đã cho vô nghiệm.

Kết luận:

+ Nếu $a^2 - b^2 \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a^2 - ab^2}{a^2 - b^2}$.

+ Nếu $a = b = 0$ hoặc $a = 1$, $b = \pm 1$ thì mọi x là nghiệm của phương trình.

+ Nếu $a^2 = b^2$ và $a \neq 0$, $a \neq 1$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Giải và biện luận bất phương trình dạng ax + b ≥ 0

Kết quả giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b \geq 0$ được nêu trong bảng sau đây

- $a > 0$: Bất phương trình có nghiệm là $x > -\dfrac{b}{a}$.
- $a < 0$: Bất phương trình có nghiệm là $x < -\dfrac{b}{a}$.
- $a = 0$ và $b \geq 0$: Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $a = 0$ và $b < 0$: Bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải và biện luận bất phương trình

$$mx + 1 > x + m^2.$$

Giải. Ta biến đổi bất phương trình về dạng $(m - 1)x > m^2 - 1$.

+ Nếu $m = 1$ thì bất phương trình trở thành $0 > 0$. Bất phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m > 1$ thì bất phương trình có nghiệm là

$$x > \frac{m^2 - 1}{m - 1} \Leftrightarrow x > m + 1.$$

+ Nếu $m < 1$ thì bất phương trình có nghiệm là

$$x < \frac{m^2 - 1}{m - 1} \Leftrightarrow x < m + 1.$$

Vậy tập nghiệm S của phương trình là

$S = \varnothing$ với $m = 1$, $S = (m + 1; +\infty)$ với $m > 1$ và $S = (-\infty; m + 1)$ với $m < 1$.

Từ phép biện luận bất phương trình bậc nhất, ta suy ra quy tắc về dấu của nhị thức bậc nhất :

Nhị thức bậc nhất $ax + b$ cùng dấu với a khi $x > -\dfrac{b}{a}$ và ngược dấu với a khi $x < -\dfrac{b}{a}$.

Sử dụng quy tắc này, ta có thể giải một số bất phương trình bằng cách lập bảng xét dấu.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\dfrac{2x-5}{3x+2} < \dfrac{3x+2}{2x-5}$.

Giải. Điều kiện để hai vế của phương trình có nghĩa là $x \neq -\dfrac{2}{3}$, $x \neq \dfrac{5}{2}$. Ta biến đổi bất phương trình về bất phương trình tương đương

$$\frac{2x-5}{3x+2} < \frac{3x+2}{2x-5} \Leftrightarrow \frac{2x-5}{3x+2} - \frac{3x+2}{2x-5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-5)^2-(3x+2)^2}{(3x+2)(2x-5)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(5x-3)(x+7)}{(3x+2)(2x-5)} > 0.$$

Lập bảng xét dấu

x		-7		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{5}{2}$	
$5x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+7$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$3x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-5$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(5x-3)(x+7)}{(3x+2)(2x-5)}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = (-\infty; -7) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right).$$

3. Giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$

Kết quả giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ được nêu trong bảng sau đây :

- $a = 0$: Đưa về bài toán giải và biện luận phương trình $bx + c = 0$.
- $a \neq 0$: Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

  * $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm (phân biệt)

  $$x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};$$

  * $\Delta = 0$: phương trình có một nghiệm (kép) $x = \frac{-b}{2a}$;

  * $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m :

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0.$$

Giải. Khi $m = 0$, phương trình trở thành $4x - 3 = 0$, phương trình này có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{4}$.

Với $m \neq 0$, ta xét $\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = 4 - m$. Từ đây suy ra phép biện luận sau :

+ Nếu $m > 4$ thì $\Delta' < 0$, phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m = 4$ thì $\Delta' = 0$, phương trình có một nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$.

+ Nếu $m < 4$ thì $\Delta' > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{m-2 \pm \sqrt{4-m}}{m}.$$

Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

Ví dụ 6. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình

$$3x + 2 = -x^2 + x + a.$$

Giải. Viết phương trình về dạng

$$x^2 + 2x + 2 - a = 0$$

và tính $\Delta' = 1 - (2 - a) = a - 1$.

Từ đó suy ra phép biện luận số nghiệm của phương trình như sau :

+ Nếu $a > 1$, phương trình có hai nghiệm phân biệt;

+ Nếu $a = 1$, phương trình có một nghiệm kép;

+ Nếu $a < 1$, phương trình vô nghiệm.

Từ kết quả của phép giải và biện luận phương trình bậc hai, ta suy ra định lí quan trọng sau

Định lí Viete

> *Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ thì ta có*
>
> $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1.x_2 = \frac{c}{a}.$$

Chứng minh. Ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1.x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Hệ quả

> *Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì ta có khai triển $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.*

Chứng minh. Ta có

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$
$$= ax^2 - a(-\frac{b}{a})x + a(\frac{c}{a}) = ax^2 + bx + c.$$

Chú ý. Hệ quả trên đây có thể chứng minh trực tiếp nhờ định lí Bezout. Chú ý rằng định lí Viete ở dạng tổng quát được chứng minh nhờ định lí Bezout chứ không phải từ các công thức nghiệm.

Định lí Viete thường được sử dụng để tính biểu thức đối xứng của hai nghiệm của phương trình, tính nhẩm nghiệm của phương trình trong các trường hợp đặc biệt hoặc biết trước một nghiệm. Ngoài ra, định lí Viete đảo dưới đây cho phép chúng ta tìm được hai số khi biết tổng và tích của chúng:

Định lí Viete đảo

> *Nếu x, y là hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì x, y là hai nghiệm của phương trình bậc hai*
>
> $$X^2 - SX + P = 0.$$

Chứng minh. Từ $x + y = S$, ta suy ra $y = S - x$. Thay vào đẳng thức $xy = P$, ta được $x(S - x) = P \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$. Hoàn toàn tương tự, ta có $y^2 - Sy + P = 0$. Vậy x và y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các giá trị a sao cho tổng các nghiệm của phương trình $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ bằng tổng bình phương các nghiệm của chúng.

Giải. Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là $\Delta' = a^2 - 2a + 1 \geq 0$, thoả mãn với mọi a.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo định lí Viete ta có

$$x_1 + x_2 = 2a, x_1.x_2 = 2a - 1.$$

Vì $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ nên điều kiện đề bài tương đương với

$$2a = (2a)^2 - 2(2a - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 6a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = \frac{1}{2}$$

Vậy $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$ là các giá trị thoả mãn điều kiện đề bài.

4. Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c \geq 0$

Dấu của tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức dạng $ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những số cho trước và $a \neq 0$.

Ví dụ : các biểu thức $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 5$ và $h(x) = \sqrt{2}.x^2$ là các tam thức bậc hai.

Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ cũng được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai.

Các biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$ theo thứ tự cũng được gọi là *biệt thức* và *biệt thức thu gọn* của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Định lí về dấu của tam thức bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc chứng minh bất đẳng thức, giải các phương trình, bất phương trình bậc hai cũng như một số phương trình và bất phương trình khác.

Định lí (*về dấu của tam thức bậc hai*)

> *Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).*
>
> - *Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbb{R}$.*
> - *Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.*
> - *Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó*
>
>   ** $f(x)$ trái dấu với a với mọi x nằm trong khoảng $(x_1; x_2)$ (tức là với $x_1 < x < x_2$).*
>
>   ** $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x nằm ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ (tức là $x < x_1$ hoặc $x > x_2$).*

Chứng minh. Ta có

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Do đó trong trường hợp $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với a.

Trong trường hợp $\Delta = 0$, $f(x)$ luôn cùng dấu với a trừ trường hợp $x = -\dfrac{b}{2a}$ (trong trường hợp này $f(x) = 0$, và vì thế ta luôn có $af(x) \geq 0 \ \forall x$).

Trong trường hợp $\Delta > 0$, $f(x)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Theo hệ quả của định lí Viete, ta có $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ nên từ đây ta suy ra kết luận của định lí.

Ví dụ 8. $f(x) = x^2 + x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ vì tam thức $f(x)$ có

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \text{ và } a = 1 > 0.$$

Ví dụ 9. Xét dấu của tam thức bậc hai

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 2.$$

Vì $a = 2 > 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{1}{2}$ và $x_2 = 2$ nên $f(x) > 0$ (cùng dấu với a) khi $x \in (-\infty; \dfrac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$, và $f(x) < 0$ (trái dấu với a) khi $x \in (\dfrac{1}{2}; 2)$.

Cũng có thể ghi kết quả trên trong bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nhận xét

Từ định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy chỉ có một trường hợp duy nhất trong đó dấu của tam thức bậc hai không thay đổi (luôn âm hoặc luôn dương), đó là khi $\Delta < 0$. Lúc đó dấu của tam thức trùng với dấu của hệ số a. Do đó ta có

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 10. Tìm tất cả các giá trị a sao cho bất phương trình

$$(a-1)x^2 - (a+1)x + a + 1 > 0$$

nghiệm đúng với mọi x.

Giải. Điều kiện đầu bài tương đương với

$$\begin{cases} a - 1 > 0 \\ \Delta = (a+1)^2 - 4(a-1)(a+1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 > 0 \\ (a+1)(5-3a) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 > 0 \\ a < -1 \vee a > \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{5}{3}.$$

Vậy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi $a > \frac{5}{3}$.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng với mọi $2n$ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$; $b_1, b_2, \dots, b_n$, ta có bất đẳng thức

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

Giải. Xét tam thức bậc hai $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i x-b_i)^2$. Hiển nhiên là $f(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Ta viết lại $f(x)$ dưới dạng

$$f(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)x+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$

Do $f(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ nên ta phải có

$$\Delta'=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\leq 0,$$

và đó chính là điều phải chứng minh.

Giải và biện luận bất phương trình bậc hai

Kết quả giải và biện luận bất phương trình dạng $ax^2+bx+c \geq 0$ được nêu trong bảng sau đây :

- $a = 0$: Đưa về bài toán giải và biện luận bất phương trình
$$bx + c \geq 0.$$
- $a > 0$: Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

  * $\Delta > 0$: Bất phương trình có nghiệm $x \leq x_1$ hoặc $x \geq x_2$, trong đó
  $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};$$
  * $\Delta \leq 0$: Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $a < 0$: Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

  * $\Delta \geq 0$: Bất phương trình có nghiệm $x_2 \leq x \leq x_1$, trong đó
  $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
  * $\Delta < 0$: Bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 12. Giải bất phương trình $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$.

Giải. Ta có $\Delta = 3^2 - 4.2.1 = 1 > 0$. Suy ra $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Từ đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; \infty)$.

Ví dụ 13. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình sau vô nghiệm

$$(m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m > 0.$$

Giải. Khi $m = 2$, bất phương trình đã cho có nghiệm $x > -\frac{2}{3}$, loại.

Khi $m \neq 2$, bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = m - 2 < 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - 2(m-2)m \leq 0. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được điều kiện của m để bất phương trình đã cho vô nghiệm là

$$m \leq 3 - \sqrt{10}.$$

Bài tập

3. Giải các phương trình sau:

   a) $|x+2| = 2(3-x)$

   b) $|x-3| + 2|x+1| = 4$

   c) $|3x-2| + x = 11$.

4. Giải và biện luận các phương trình:

   a) $(m^2+2)x - 2m = x - 3$

   b) $m(x-m) = x + m - 2$

   c) $m^2(x-1) + m = x(3m-2)$.

5. Giải và biện luận các phương trình

   a) $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$

   b) $x^2 - 4x + m - 3 = 0$.

6. Trong phương trình $x^2 - 4x + p = 0$, hãy tìm p biết rằng tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 16.

7. Hãy biểu diễn $x_1^3 + x_2^3$ qua hệ số của phương trình $x^2 + px + q = 0$, trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình này.

8. Với những giá trị nào của a thì các nghiệm x_1, x_2 của phương trình $2x^2 + 6x + a = 0$ thoả mãn điều kiện

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 2.$$

9. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho bất phương trình $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi x.

10. Giải các phương trình sau

a) $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$ b) $|x^3 + 2x + 2| = |x^3 + x^2 - 2|$

c) $||2x - 1| - 5| + x = |6 - x|$.

11. Giải các bất phương trình sau

a) $|x^2 - 2x - 8| > 2x$ b) $|x - 2| \le 2x^2 - 9x + 9$

c) $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$.

§3. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP

1. Một số dạng phương trình, bất phương trình quy về bậc nhất, bậc hai

Phương trình và bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Phương trình, bất phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối có thể đưa về các phương trình bình thường bằng cách xét dấu các hàm trong dấu giá trị tuyệt đối để phá dấu giá trị tuyệt đối. Một cách tự nhiên, song song với việc phá dấu giá trị tuyệt đối, các điều kiện bổ sung sẽ được hình thành, và điều rất quan trọng là cần phải kiểm tra lại các điều kiện đó.

Ví dụ 1. Giải phương trình $|x^2 - 3| + |2x - 1| = 3.$

Giải

Nếu $x \le -\sqrt{3}$ thì $|x^2 - 3| = x^2 - 3$ và $|2x - 1| = 1 - 2x$.

Nếu $-\sqrt{3} < x \le \dfrac{1}{2}$ thì $|x^2 - 3| = 3 - x^2$ và $|2x - 1| = 1 - 2x$.

Nếu $\dfrac{1}{2} < x < \sqrt{3}$ thì $|x^2 - 3| = 3 - x^2$ và $|2x - 1| = 2x - 1$.

Nếu $x \geq \sqrt{3}$ thì $|x^2 - 3| = x^2 - 3$ và $|2x - 1| = 2x - 1$.

Do đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{3} \\ x^2 - 3 + 1 - 2x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} -\sqrt{3} < x \leq \dfrac{1}{2} \\ 3 - x^2 + 1 - 2x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \sqrt{3} \\ 3 - x^2 + 2x - 1 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq \sqrt{3} \\ x^2 - 3 + 2x - 1 = 3. \end{cases}$$

Giải các hệ này, ta tìm được tập nghiệm của phương trình là

$$\{-1 + \sqrt{2};\ 1;\ -1 + \sqrt{8}\}.$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $x^2 - x + |3x - 2| > 0$.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x + 3x - 2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ x^2 - x - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{2}{3} \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < \dfrac{2}{3} \\ x^2 - 4x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -1 + \sqrt{3} \\ x < 2 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty ; 2 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{3} ; +\infty)$.

H1. *Giải phương trình* $|x^2 - 8x + 15| = x - 3$.

Phương trình và bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai

Khi giải phương trình hoặc bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai, ta thực hiện một số phép biến đổi tương đương để đưa nó về một phương trình hoặc bất phương trình không còn chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai. Trong quá trình biến đổi, cần lưu ý:

– Nêu các điều kiện xác định của phương trình hoặc bất phương trình và nêu điều kiện của nghiệm (nếu có).

– Chỉ bình phương hai vế của phương trình hoặc bất phương trình khi cả hai vế đều không âm.

Gộp các điều kiện đó với phương trình hoặc bất phương trình mới nhận được, ta có một hệ phương trình hoặc bất phương trình tương đương với phương trình hoặc bất phương trình đã cho (tức là phương trình hoặc bất phương trình đã cho và hệ thu được có cùng tập nghiệm).

Dưới đây ta xem xét một số ví dụ.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+24x+22}=2x+1$.

Phân tích. Điều kiện xác định của phương trình đã cho là

$$3x^2+24x+22\ge 0. \qquad (1)$$

Dễ thấy nghiệm của phương trình đã cho phải thoả mãn điều kiện

$$2x+1\ge 0. \qquad (2)$$

Với các điều kiện (1) và (2), phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$3x^2+24x+22=(2x+1)^2. \qquad (3)$$

Hiển nhiên (3) kéo theo (1). Do đó nghiệm của phương trình đã cho là nghiệm của phương trình (3) thoả mãn bất phương trình (2). Nói một cách khác, phương trình đã cho tương đương với hệ gồm bất phương trình (2) và phương trình (3).

Giải. Phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\text{(I)}\ \begin{cases}2x+1\ge 0\\ 3x^2+24x+22=(2x+1)^2.\end{cases}$$

Ta có

$$\text{(I)}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2},\\ x^2-20x-21=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2},\\ x=-1\vee x=21\end{cases}\Leftrightarrow x=21.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=21$.

h2. *Giải phương trình* $\sqrt{x^2+56x+80}=x+20$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-3x-10}<x-2$.

Phân tích. Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là

$$x^2-3x-10\ge 0. \qquad (1)$$

Dễ thấy nghiệm của bất phương trình đã cho phải thoả mãn điều kiện

$$x-2>0. \qquad (2)$$

Với hai điều kiện (1) và (2), bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$x^2-3x-10<(x-2)^2. \qquad (3)$$

Như vậy, bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm ba bất phương trình (1), (2) và (3).

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} x^2-3x-10\ge 0 \\ x-2>0 \\ x^2-3x-10<(x-2)^2. \end{cases}$$

Ta có $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -2 \vee x\ge 5 \\ x>2 \\ x<14 \end{cases} \Leftrightarrow 5\le x<14.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[5; 14)$.

$\boxed{\text{h3.}}$ *Giải bất phương trình* $\sqrt{x^2-2x-15}<x-3.$

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-4x}>x-3.$

Phân tích. Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là

$$x^2-4x\ge 0. \qquad (1)$$

Để khử dấu căn chứa ẩn, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1

$$x-3<0. \qquad (2)$$

Hiển nhiên, nghiệm chung của (1) và (2) là nghiệm của bất phương trình đã cho. Nói một cách khác, trong trường hợp này, bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm hai bất phương trình (1) và (2).

Trường hợp 2

$$x-3\ge 0. \qquad (3)$$

Với các điều kiện (1) và (3), bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$x^2-4x>(x-3)^2. \qquad (4)$$

Hiển nhiên (4) kéo theo (1). Do đó, nghiệm chung của hai bất phương trình (3) và (4) là nghiệm của bất phương trình đã cho. Nói cách khác, trong trường hợp này, bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm hai bất phương trình (3) và (4).

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x^2-4x\ge 0 \\ x-3<0 \end{cases} \quad \vee \quad (\mathrm{II})\begin{cases} x-3\ge 0 \\ x^2-4x>(x-3)^2. \end{cases}$$

Ta có

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \vee x \ge 4 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \le 0.$$

$$(\mathrm{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ 2x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x > \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \le 0$ hoặc $x > \frac{9}{2}$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; 0] \cup (\frac{9}{2}; +\infty)$.

$\boxed{\text{h4.}}$ *Giải bất phương trình* $\sqrt{x^2 - 1} > x + 2$.

2. Phương trình bậc ba

Phương trình bậc ba tổng quát $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có thể đưa về phương trình dạng $x^3 + px + q = 0$ bằng các phép biến đổi phương trình như sau :

Chia hai vế của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ cho a và đặt

$b' = \frac{b}{a}$, $c' = \frac{c}{a}$, $d' = \frac{d}{a}$ thì ta được

$$x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0.$$

Tiếp theo, đặt $x = y - \frac{b'}{3}$ và thay vào phương trình, ta được

$$\left(y^3 - b'y^2 + \frac{b'^2 y}{3} - \frac{b'^3}{27}\right) + b'\left(y^2 - \frac{2b'y}{3} + \frac{b'^2}{9}\right) + c'\left(y - \frac{b'}{3}\right) + d' = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + py + q = 0,$$

trong đó $p = c' - \frac{b'^2}{3}$, $q = \frac{2b'^3}{27} - \frac{c'b'}{3} + d'$.

Như vậy, ta chỉ cần biết cách giải phương trình dạng $x^3 + px + q = 0$ (1).

Sau đây ta trình bày một cách giải phương trình (1). Trước hết, ta đi tìm hai số u và v sao cho $q = u^3 + v^3$ và $p = -3uv$ (2). Khi đó phương trình (1) sẽ được phân tích thành

$$x^3 + u^3 + v^3 - 3uvx = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+u+v)(x^2-(u+v)x+u^2+v^2-uv)=0.$$

Từ đó hoặc $x=-u-v$ hoặc x là nghiệm của tam thức bậc hai ở thừa số thứ 2.

Như vậy phương trình (1) sẽ được giải nếu ta tìm được u, v thoả mãn (2). Từ (2) ta có $u^3+v^3=q$, $u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}$. Từ đây, áp dụng định lí Viete đảo, ta được u^3, v^3 là nghiệm của phương trình

$$X^2-qX-\frac{p^3}{27}=0.$$

Nếu $\Delta'=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\geq 0$ thì ta tìm được

$$u^3=\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta'},\ v^3=\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta'}.$$

Suy ra

$$x=-u-v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (3)$$

Tam thức ở thừa số thứ hai có biệt thức

$$\Delta_1=(u+v)^2-4(u^2+v^2-uv)=-3(u-v)^2$$

nên sẽ chỉ có nghiệm khi $u=v$, tức là khi $\Delta'=0$. Khi đó ta có các nghiệm của (1) là

$$x_1=-2u,\ x_{2,3}=u.$$

Công thức (3) được gọi là ***công thức Cardano***.

Như vậy, ta đã giải được phương trình (1) trong trường hợp $\Delta'=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\geq 0$.

Nhưng nếu $\Delta'<0$ thì sao? Phương trình sẽ vô nghiệm? Câu trả lời là không phải như vậy. Thậm chí ngược lại, trong trường hợp này, phương trình sẽ có ba nghiệm phân biệt. Ta sẽ trình bày kết quả này trong mục 3, §4.

Ví dụ 6. Giải phương trình $x^3+3x^2-6x-20=0$.

Giải. Đặt $x=y-1$, thay vào phương trình, ta được

$$(y^3-3y^2+3y-1)+3(y^2-2y+1)-6(y-1)-20=0$$

$$\Leftrightarrow y^3-9y-12=0.$$

Ta có $\Delta'=36-27=9>0$. Từ đó áp dụng công thức Cardano, ta có

$$y = \sqrt[3]{6-3} + \sqrt[3]{6+3} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}.$$

Từ đó $x = 1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $x^3 - 3x - 18 = 0$.

Giải. Ta tính được $\Delta' = 81 - 1 = 80 > 0$. Từ đó áp dụng công thức Cardano, ta được

$$x = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}.$$

Mặt khác, dễ thấy $x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + 3x + 6)$. Suy ra $x = 3$ là nghiệm (thực) duy nhất của phương trình $x^3 - 3x - 18 = 0$. Như vậy, ta suy ra một đẳng thức khá thú vị là

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3.$$

h5. *Giải phương trình $x^3 + 6x - 24 = 0$.*

3. Phương trình bậc bốn

Phương trình trùng phương

Phương trình dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có thể đưa về phương trình bậc hai : $ay^2 + by + c = 0$ bằng cách đặt $y = x^2$. Khi giải phương trình bậc hai tương ứng, cần chú ý đến điều kiện $y \geq 0$.

Phương trình dạng $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$

Phương trình dạng $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$ có thể đưa về phương trình trùng phương bằng cách đặt $x = y + \dfrac{a+b}{2}$. Khi đó thay vào phương trình, ta được

$$\left(y + \frac{b-a}{2}\right)^4 + \left(y - \frac{b-a}{2}\right)^4 = c \Leftrightarrow 2y^4 + 3(b-a)^2y^2 + \frac{(b-a)^4}{8} = c.$$

Phương trình cuối cùng là phương trình trùng phương đối với y mà ta đã biết cách giải.

Ví dụ 8. Giải phương trình $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 82$.

Giải. Đặt $x - 3 = y + 1$ thì $x - 5 = y - 1$. Thay vào phương trình, ta được

$$(y+1)^4 + (y-1)^4 = 82$$

$$\Leftrightarrow (y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1) + (y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1) = 82$$

$$\Leftrightarrow\ y^4 + 6y^2 - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ y^2 = 4 \text{ (nhận)} \vee y^2 = -10 \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow\ y = \pm 2.$$

Từ đó $x = 2 \vee x = 6$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 6$.

Phương trình dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$ với $a + d = b + c$

Ta biến đổi phương trình về dạng

$$[x^2 + (a + d)x + ad][x^2 + (b + c)x + bc] = m.$$

Đặt $y = x^2 + (a + d)x + \dfrac{ad + bc}{2}$ thì ta được phương trình

$$\left(y + \frac{ad - bc}{2}\right)\left(y - \frac{ad - bc}{2}\right) = m \Leftrightarrow y^2 - \left(\frac{ad - bc}{2}\right)^2 = m.$$

Khi đặt ẩn phụ như vậy, cần chú ý đến điều kiện

$$y = x^2 + (a + d)x + \frac{ad + bc}{2} = \left(x + \frac{a + d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a + d}{2}\right)^2 + \frac{ad + bc}{2}$$

$$\geq -\left(\frac{a + d}{2}\right)^2 + \frac{ad + bc}{2}.$$

Ví dụ 9. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = m. \qquad (1)$$

Giải. Viết phương trình lại dưới dạng

$$[x(x + 3)][(x + 1)(x + 2)] = m \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = m.$$

Đặt $y = x^2 + 3x + 1 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$. Thay vào phương trình, ta được

$$(y - 1)(y + 1) = m \Leftrightarrow y^2 = m + 1. \qquad (2)$$

Ta thấy ứng với mỗi giá trị $y < -\frac{5}{4}$, $y = -\frac{5}{4}$ và $y > -\frac{5}{4}$, ta tìm được 0, 1 và 2 nghiệm x.

Từ đó ta suy ra bảng biện luận số nghiệm sau

- $m < -1$: (2) vô nghiệm, suy ra phương trình (1) vô nghiệm ;

• $m = -1$: (2) có nghiệm duy nhất $y = 0$, suy ra (1) có 2 nghiệm x ;

$\frac{9}{16} > m > -1$: (2) có 2 nghiệm đều lớn hơn $-\frac{5}{4}$, suy ra (1) có 4 nghiệm x ;

• $m = \frac{9}{16}$: (2) có 2 nghiệm, trong đó một nghiệm lớn hơn $-\frac{5}{4}$, một nghiệm bằng $-\frac{5}{4}$, suy ra (1) có 3 nghiệm x ;

• $m > \frac{9}{16}$: (2) có 2 nghiệm, trong đó một nghiệm lớn hơn $-\frac{5}{4}$, một nghiệm bé hơn $-\frac{5}{4}$, suy ra (1) có 2 nghiệm x.

Phương trình với hệ số phản hồi

Phương trình bậc bốn : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ được gọi là *phương trình với hệ số phản hồi* nếu $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$.

Ở đây ta chỉ xét trường hợp $e \neq 0$. Khi đó rõ ràng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho x^2, ta được

$$ax^2 + \frac{e}{x^2} + c + bx + \frac{d}{x} = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{e}{ax^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0.$$

Đặt $\frac{d}{b} = \alpha$ thì ta được phương trình

$$a\left(x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) + c = 0.$$

Bây giờ đặt $y = x + \frac{\alpha}{x}$ thì $y^2 = x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2} + 2\alpha \Rightarrow x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2} = y^2 - 2\alpha$.

Thay vào phương trình, ta được

$$a(y^2 - 2\alpha) + by + c = 0 \Leftrightarrow ay^2 + by + c - 2a\alpha = 0.$$

Đặc biệt khi $\alpha = 1$, tức là khi $a = e$, $b = d$ thì phương trình được gọi là *phương trình đối xứng*. Khi $\alpha = -1$, tức là khi $a = e$, $b = -d$ thì phương trình được gọi là *phương trình nửa đối xứng*.

Chú ý khi $\alpha > 0$ thì ta có điều kiện đối với ẩn phụ y là $|y| \geq 2\sqrt{\alpha}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 6x + 4 = 0$.

Giải. Ta có $\frac{4}{1} = \left(\frac{6}{3}\right)^2$ nên đây là phương trình với hệ số phản hồi. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Giả sử $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 thì ta được

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + 3(x + \frac{2}{x}) - 6 = 0.$$

Đặt $y = x + \frac{2}{x}$ thì ta có điều kiện $|y| \geq 2\sqrt{2}$ và $y^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}$. Thay vào phương trình, ta được $y^2 + 3y - 10 = 0$. Giải ra ta được $y = 2$ (loại) $\vee$ $y = -5$. Với $y = -5$, giải phương trình $x + \frac{2}{x} = -5$, ta được các nghiệm $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Phương pháp giải phương trình bậc bốn ở dạng tổng quát

Có nhiều phương pháp để giải phương trình bậc bốn dạng tổng quát. Tuy nhiên, phương pháp nào cũng sẽ dẫn đến một phép giải phương trình bậc ba. Dưới đây trình bày phương pháp giải phương trình

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

bằng cách phân tích vế trái thành tích của hai tam thức bậc hai.

Để giải (1), ta tìm các hằng số p, q, r sao cho

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r). \ (2)$$

Khai triển đa thức ở vế phải của (2) rồi đồng nhất các hệ số ở hai vế, ta được

$$q + r - p^2 = a, \qquad p(r - q) = b, \qquad qr = c. \qquad (3)$$

Từ hai đẳng thức đầu, ta thu được

$$q + r = p^2 + a, \ r - q = \frac{b}{p}.$$

Từ đó $r = \dfrac{p^2 + a + \frac{b}{p}}{2}$, $q = \dfrac{p^2 + a - \frac{b}{p}}{2}$.

Thay vào đẳng thức cuối cùng, ta được

$$(p^2+a)^2-\frac{b^2}{p^2}=4c \Leftrightarrow p^6+2ap^4+(a^2-4c)p^2-b^2=0.$$

Đây là một phương trình bậc ba đối với p^2. Giải ra ta tìm được p. Từ đó tìm được r và q. Suy ra cách giải phương trình (1).

Ví dụ 11. Giải phương trình

$$x^4-9x^2-2x+15=0.$$

Giải. Ta đi tìm các số p, q, r sao cho

$$x^4-9x^2-2x+15=(x^2+px+q)(x^2-px+r).$$

Khai triển vế phải rồi đồng nhất hệ số ở hai vế, ta được

$$q+r-p^2=-9 \qquad (1)$$

$$p(r-q)=-2 \qquad (2)$$

$$rq=15. \qquad (3)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được $r=\dfrac{p^2-9-\frac{2}{p}}{2}$, $q=\dfrac{p^2-9+\frac{2}{p}}{2}$.

Thay vào (3), ta được

$$(p^2-9)^2-\frac{4}{p^2}=60 \Leftrightarrow p^6-18p^4+21p^2-4=0 \Leftrightarrow (p^2-1)(p^4-17p^2+4)=0.$$

Vì chỉ cần tìm một phân tích nên ta chọn $p=1$, từ đó $r=-5$, $q=-3$. Từ đó

$$x^4-9x^2-2x+15=(x^2+x-3)(x^2-x-5).$$

Suy ra tập nghiệm của phương trình đề bài là $S=\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Bài tập

12. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4+2x-x^2}=2-x$ b) $1-\sqrt{1+5x}=x$

c) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}$.

13. Giải các bất phương trình sau

a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+15}<6$

b) $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$

c) $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x}\geq 1$.

14. Giải các phương trình sau:

a) $x^3-2x^2-5x+6=0$

b) $x^3-5x+2=0$

c) $x^3-x^2-8x+12=0$.

15. Giải phương trình $8x^3+12x-7=0$.

16. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực có tổng bằng 0 thì

$$\frac{a^2b^2c^2}{4}+\frac{(ab+bc+ca)^3}{27}\leq 0.$$

17. Giải các phương trình sau:

a) $x^4+2x^3+5x^2+4x+4=0$

b) $x^4+2x^3+5x^2+4x-5=0$

c) $x^4-32x+48=0$

d) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$.

18. Giải các phương trình sau:

a) $1+x^4=a(1+x)^4$

b) $x^4-2x^3+x=a^2+a$.

19. Cho a, b là các số thực thoả mãn điều kiện phương trình

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

có nghiệm thực. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của a^2+b^2.

20. Giải phương trình $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$.

21. Giải các phương trình sau:

a) $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=1$

b) $x^2+\frac{4x^2}{(x-2)^2}=12$.

22. Xét phương trình bậc bốn tổng quát

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ (1).$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực k sao cho phép thế $x=y+k$ sẽ đưa phương trình (1) về một phương trình theo y có hệ số phản hồi.

23. Giải các phương trình sau

a) $x^4+4=5x(x^2-2)$

b) $x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$.

§4. CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

1. Nghiệm đặc biệt của phương trình đa thức

Nếu x_0 là nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $P(x)$ sẽ chia hết cho $x - x_0$ và ta có $P(x) = (x - x_0)Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của $P(x)$ (chính xác hơn, $\deg(Q(x)) = \deg(P(x)) - 1$). Như vậy phương trình $P(x) = 0$ sẽ tương đương với $x = x_0$ hoặc $Q(x) = 0$. Như vậy, khi biết nghiệm của một phương trình đa thức, ta có thể thực hiện phép chia đa thức để đưa phương trình về các phương trình có bậc nhỏ hơn.

Vấn đề đặt ra là có hay không những nghiệm đặc biệt và làm thế nào để tìm chúng? Ta có định lí sau:

Định lí

> *Xét phương trình*
>
> $$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \qquad (1)$$
>
> *trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ là các số nguyên. Nếu $x_0 = \frac{r}{s}$ với $(r, s) = 1$ là nghiệm của (1) thì ta phải có $r \mid a_0$, $s \mid a_n$. Đặc biệt nếu $|a_n| = 1$ thì mọi nghiệm hữu tỉ của (1) là nghiệm nguyên.*

Chứng minh. Giả sử $x_0 = \frac{r}{s}$ là nghiệm của (1) với $(r, s) = 1$. Thay vào phương trình, ta được

$$a_n\frac{r^n}{s^n} + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{r}{s} + a_0 = 0.$$

Suy ra

$$r(a_nr^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2}s + \ldots + a_1s^{n-1}) = -a_0s^n \qquad (2)$$

và

$$s(a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1rs^{n-2} + a_0s^{n-1}) = -a_nr^n. \quad (3)$$

Do $(s, r) = 1$ nên từ (2) suy ra $r \mid a_0$ và từ (3) suy ra $s \mid a_n$ (đpcm).

Nếu $|a_n| = 1$ thì $s \mid 1$, suy ra $|s| = 1$ tức x_0 là số nguyên.

Áp dụng định lí này, ta có thể tìm được nghiệm hữu tỉ của một phương trình đa thức với hệ số nguyên bằng cách thử các giá trị dạng $\frac{r}{s}$ với $r \mid a_0$ và $s \mid a_n$. Nếu không có số nào trong tập hợp này thoả mãn phương trình thì có thể khẳng định rằng phương trình không có nghiệm đặc biệt.

Ví dụ 1. Giải phương trình $4x^3 + x^2 - 7x + 3 = 0$.

Giải. Lần lượt thử các giá trị $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}$, ta tìm được một nghiệm đặc biệt là $x = \frac{3}{4}$. Từ đó thực hiện phép chia $4x^3 + x^2 - 7x + 3$ cho $4x - 3$, ta được

$4x^3 + x^2 - 7x + 3 = (4x - 3)(x^2 + x - 1)$.

Từ đó suy ra tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{3}{4}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ví dụ 2. Phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ không có nghiệm hữu tỉ vì các nghiệm này, nếu có, chỉ có thể là 1 hoặc -1 nhưng thay các giá trị này vào phương trình thì thấy chúng không phải là nghiệm.

2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt ẩn phụ là một phương pháp hiệu quả để biến đổi phương trình. Trong mục 3, §3, chúng ta đã sử dụng một số phép đặt ẩn phụ để biến một số dạng phương trình bậc bốn về phương trình bậc hai đối với biến số mới. Trong mục 2, §3, bằng đặt ẩn phụ đơn giản, ta cũng đưa một phương trình bậc ba bất kì về dạng rút gọn $y^3 + py + q = 0$. Chính phương pháp này cũng đã được sử dụng để đưa phương trình bậc hai tổng quát $ax^2 + bx + c = 0$ về dạng $y^2 = p$ dẫn đến công thức Brahmagupta nổi tiếng mà chúng ta vẫn sử dụng

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Một điều cần lưu ý khi thực hiện phép đặt ẩn phụ $y = f(x)$ là chúng ta cần đánh giá miền giá trị của $f(x)$ để đặt điều kiện đối với y. Các điều kiện này là cần thiết để sau khi tìm được y, ta có thể tiếp tục tìm được x thoả mãn phương trình, các giá trị không thích hợp có thể loại ngay mà không cần xét. Việc đặt điều kiện này đặc biệt cần thiết khi chúng ta biện luận phương trình hoặc tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Ví dụ khi đặt ẩn phụ $y = x^2$ (khi giải phương trình trùng phương), ta phải có điều kiện $y \geq 0$, hay khi đặt ẩn phụ $y = x + \dfrac{1}{x}$ (khi giải phương trình có hệ số đối xứng), ta phải có điều kiện $|y| \geq 2$ ...

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}+\frac{x^2+3x+1}{x^2+4x+1}=\frac{19}{12}. \qquad (1)$$

Giải. Điều kiện xác định của phương trình

$$\begin{cases} x^2+2x+1 \neq 0 \\ x^2+4x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \pm \sqrt{3}. \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia tử số và mẫu số của từng phân thức cho x, ta có (1) tương đương với

$$\frac{x+1+\dfrac{1}{x}}{x+2+\dfrac{1}{x}}+\frac{x+3+\dfrac{1}{x}}{x+4+\dfrac{1}{x}}=\frac{19}{12}.$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, $|t| \geq 2$, ta được

$$\frac{t+1}{t+2}+\frac{t+3}{t+4}=\frac{19}{12} \Leftrightarrow 12[(t+1)(t+4)+(t+2)(t+3)] = 19(t+2)(t+4)$$

$$\Leftrightarrow 5t^2+6t-32=0 \Leftrightarrow t=2 \vee t=-\frac{16}{5}.$$

Với $t = 2$, ta tìm được $x = 1$;

Với $t = -\dfrac{16}{5}$, ta tìm được $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{39}}{5}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 1$, $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{39}}{5}$.

Ví dụ 4. Cho phương trình $3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = m(x^3 + 1)$. (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 5$.

b). Biện luận theo m số nghiệm của phương trình (1).

Giải. Viết phương trình lại dưới dạng

$$3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = m(x + 1)(x^2 - x + 1). \qquad (2)$$

Dễ thấy $x = -1$ không phải là nghiệm của phương trình. Giả sử $x \neq -1$ thì $(x + 1)(x^2 - x + 1) \neq 0$. Chia hai vế của (2) cho $(x + 1)(x^2 - x + 1)$, ta được

$$\frac{3(x^2 - x + 1)}{x + 1} - \frac{2(x + 1)}{x^2 - x + 1} = m.$$

Đặt $t = \dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1}$ thì ta được $\dfrac{3}{t} - 2t = m \Leftrightarrow 2t^2 + mt - 3 = 0.$ (3)

a) Khi $m = 5$, (3) trở thành $2t^2 + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \vee t = \dfrac{1}{2}$.

Với $t = -3$, ta được $\dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1} = -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 = 0$, phương trình cuối này vô nghiệm.

Với $t = \dfrac{1}{2}$, ta được $\dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Vậy khi $m = 5$, phương trình (1) có hai nghiệm là $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

b) *Phân tích.* Lời giải câu a) cho chúng ta thấy, không phải với giá trị t nào ta cũng tìm được giá trị x tương ứng. Để biện luận số nghiệm x của phương trình (1) theo m, ta phải biện luận số nghiệm $x \neq -1$ của phương trình $t = \dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1}$ theo t, sau đó biện luận số nghiệm $t \neq 0$ của (3) theo m, trong đó ta không chỉ quan tâm đến số nghiệm mà cả số nghiệm nằm trong những khoảng mà bài toán biện luận số nghiệm x theo t ở trên tìm ra.

Giải. Phương trình $t = \dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow tx^2 - (t + 1)x + t - 1 = 0$ có

$$\Delta = (t + 1)^2 - 4t(t - 1) = -3t^2 + 6t + 1.$$

Từ đó ta có bảng biện luận số nghiệm $x \neq -1$ theo t như sau

Giá trị t		$\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$	
Số nghiệm x	0	1	2	0	2	1	0

Như vậy, để biện luận số nghiệm x của phương trình (1) theo m, ta phải thực hiện phép so sánh nghiệm t của phương trình (3) với các số $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$, 0, $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Chúng ta bỏ qua phép biện luận chi tiết, chỉ nêu ra bảng kết quả cuối cùng

Giá trị m		$-\frac{33+14\sqrt{3}}{3}$		$-\frac{33-14\sqrt{3}}{3}$	
Số nghiệm x	2	1	0	1	2

3. Phép thế lượng giác

Với một số phương trình đại số, đặc biệt là phương trình có chứa căn thức, phép thế lượng giác $x = a\cos t$, $x = a\sin t$ hay $x = a\tan t$ có thể đưa phương trình đại số về các phương trình lượng giác cơ bản. Dấu hiệu để nhận thấy có thể dùng phép thế lượng giác thường là các biểu thức có "chất" lượng giác cao như

$$\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x}, \frac{2x}{1+x^2}, \sqrt{1+x^2}, 4x^3-3x, ...$$

Dưới đây chúng ta xem xét một số ví dụ.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}\ .$$

Phân tích. Điều kiện có nghĩa của phương trình là $|x| \le 1$. Chính điều kiện này cũng như các biểu thức có "chất" lượng giác như $\sqrt{1-x}, \sqrt{1-x^2}, 2x^2-1$ gợi ý cho chúng ta nghĩ đến phép thế lượng giác $x = \cos t$. Để việc giải ngược tìm x khi biết t là 1 – 1 cũng như để xử lí các căn thức một cách đơn giản, ta sẽ giới hạn t chạy trong miền cơ bản của $\cos t$, tức là $0 \le t \le \pi$.

Giải. Điều kiện có nghĩa của phương trình là $|x| \le 1$. Đặt $x = \cos t$ với $0 \le t \le \pi$, ta có

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$2x^2 - 1 = 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$$

$$2x\sqrt{1-x^2} = 2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t} = 2\cos t.\sin t = \sin 2t.$$

Thay vào phương trình, ta được

$$\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} = \cos 2t + \sin 2t \Leftrightarrow \sin\frac{t}{2} = \sin(2t + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{t}{2} = 2t + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{t}{2} = \pi - 2t - \frac{\pi}{4} + 2k\pi. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $0 \le t \le \pi$, ta được giá trị t duy nhất là $t = \frac{3\pi}{10}$. Từ đó nghiệm duy nhất của phương trình là $x = \cos\frac{3\pi}{10}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$.

Phân tích. Nếu viết phương trình dưới dạng $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0$ và tính

$$\Delta' = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{1}{256} - \frac{1}{64} = -\frac{3}{256} < 0.$$

Như vậy ta không thể áp dụng công thức Cardano. Biểu thức $4x^3 - 3x$ gợi chúng ta nhớ đến công thức $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ và phép đặt $x = \cos t$.

Giải. Đặt $x = \cos t$ với $0 \le t \le \pi$ và thay vào phương trình, ta được

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3t = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Kết hợp điều kiện $0 \le t \le \pi$, ta tìm được $t = \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}$, từ đó $x = \cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}$.

Những lời giải trên có thể tạo ra cảm giác là phép thế lượng giác chỉ áp dụng được trong một số trường hợp đặc biệt. Thực tế thì tầm áp dụng của phép thế lượng giác khá rộng và mang tính tổng quát cao. Dưới đây, ta sẽ sử dụng phép thế lượng giác để giải phương trình bậc ba $x^3 + px + q = 0$ (1) trong trường hợp $\Delta' = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$.

Đặt $x = a\cos t$ với $0 \le t \le \pi$. Thay vào (1), ta được

$$a^3\cos^3 t + pa\cos t + q = 0. \qquad (2)$$

Ta muốn chọn a sao cho $a^3\cos^3 t + pa\cos t$ là một "bội số" của $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$. Để có điều này, ta phải có $a^3 : pa = 4 : (-3)$. Điều này tương đương với $a^2 = -\frac{4p}{3}$. Do $\Delta' = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ nên $p < 0$ và do đó $-\frac{4p}{3} > 0$, vì thế ta có thể chọn $a = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$.

Thay vào (2) ta được

$$-\frac{4p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}}\cos^3 t + p\sqrt{-\frac{4p}{3}}\cos t = -q$$

$$\Leftrightarrow p\sqrt{-\frac{4p}{3}}\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = 3q \Leftrightarrow \cos 3t = \frac{3q}{p\sqrt{-\frac{4p}{3}}}.$$

Phương trình cuối sẽ có nghiệm nếu biểu thức ở vế phải có trị tuyệt đối không lớn hơn 1. Nhưng điều này tương đương với

$$9q^2 \le p^2.(-\frac{4p}{3}) \Leftrightarrow \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \le 0.$$

Đây chính là trường hợp mà chúng ta đang xét.

Như vậy phép thế lượng giác đã giúp chúng ta chứng minh rằng khi $\Delta' = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ thì phương trình $x^3 + px + q = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

4. Đưa về hệ phương trình

Việc giải hệ phương trình thường được tiến hành bằng cách đưa về phương trình một ẩn. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, ta có thể sử dụng chiều ngược lại, tức là đưa phương trình về hệ phương trình, sau đó lại tiếp tục giải hệ này bằng cách đưa về phương trình. Thoạt nghe thì có vẻ luẩn quẩn nhưng thực tế thì đây là một cách làm rất biện chứng. Chúng ta sẽ minh hoạ điều này qua một số ví dụ.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt[3]{7+x} + \sqrt{2-x} = 3$.

Phân tích. Phương trình có chứa hai căn thức, một căn bậc ba và một căn bậc hai. Nếu khử căn bằng phương pháp thông thường sẽ phức tạp và dẫn đến phương trình bậc cao. Để ý rằng nếu đặt $u = \sqrt[3]{7+x}, v = \sqrt{2-x}$ thì từ phương trình suy ra $u + v = 3$. Ngoài ra ta còn có hệ thức $u^3 + v^2 = (7 + x) + (2 - x) = 9$. Như vậy ta đã có một hệ có chứa một phương trình bậc nhất.

Giải. Đặt $u = \sqrt[3]{7+x}$, $v = \sqrt{2-x}$ $(u, v \geq 0)$, ta được hệ

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^3 + v^2 = 9. \end{cases}$$

Rút $u = 3 - v$ từ phương trình thứ nhất rồi thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$(3-v)^3 + v^2 = 9 \Leftrightarrow v^3 - 10v^2 + 27v - 18 = 0 \Leftrightarrow v = 1, v = 3 \text{ hoặc } v = 6.$$

Từ đó ta tìm được các nghiệm x tương ứng là $x = 1$, $x = -7$ và $x = -34$.

Ví dụ 8. Giải phương trình $x = 1 - 2(1 - 2x^2)^2$.

Giải. Đặt $y = 1 - 2x^2$ thì từ phương trình đề bài, ta được $x = 1 - 2y^2$. Như vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 1 - 2x^2 \\ x = 1 - 2y^2. \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình đối xứng loại 2 mà chúng ta sẽ nghiên cứu kĩ ở chương V. Cách giải của hệ này là trừ hai phương trình vế theo vế để được một phương trình hệ quả

$$y - x = 2y^2 - 2x^2 \Leftrightarrow (y - x)[1 - 2(y + x)] = 0.$$

Với $y = x$, thay vào phương trình đầu của hệ, ta được $x = 1 - 2x^2$, suy ra $x = -1$ hoặc $x = \frac{1}{2}$;

Với $1 - 2(y + x) = 0$, thay $y = \frac{1}{2} - x$ vào phương trình đầu của hệ, ta được

$$\frac{1}{2} - x = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $x + \sqrt{2 - x^2} + x\sqrt{2 - x^2} = 3$.

Giải. Điều kiện $|x| \le \sqrt{2}$. Đặt $u = x$ và $v = \sqrt{2 - x^2}$ với điều kiện $|u| \le \sqrt{2}, v \ge 0$, ta được hệ

$$\begin{cases} u + v + uv = 3 \\ u^2 + v^2 = 2. \end{cases}$$

Nhân phương trình đầu với 2 rồi cộng với phương trình sau, ta được

$2(u + v) + 2uv + u^2 + v^2 = 8 \Leftrightarrow (u + v)^2 + 2(u + v) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow u + v = 2 \vee u + v = -4.$

Thay vào phương trình đầu, ta được

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u + v = -4 \\ uv = 7 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1 \text{ (do hệ thứ hai vô nghiệm).}$$

Từ đó tìm được nghiệm duy nhất của phương trình ban đầu là $x = 1$.

5. Phương pháp đánh giá

Phương pháp này còn được gọi là *phương pháp đối lập* hay *phương pháp hằng số tách vế*. Ý tưởng cơ bản của phương pháp này là các mệnh đề đơn giản dưới đây:

Mệnh đề 1

> *Nếu $f(x) \ge g(x)$ với mọi x thuộc D và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x thuộc S thì tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ trên D chính là S.*

Mệnh đề 2

> *Nếu $f(x) \ge A$ và $g(x) \le A$ với mọi x thuộc D (A là hằng số) thì phương trình $f(x) = g(x)$ tương đương với hệ phương trình $f(x) = A$ và $g(x) = A$. (A được gọi là hằng số tách vế của phương trình).*

Phương pháp đánh giá thường được sử dụng để giải các phương trình mà hai vế là các dạng hàm số khác nhau (ví dụ căn thức và đa thức, đa thức và lượng giác, đa thức và mũ ...), các biểu thức căn thức phức tạp, các phương trình có nhiều hơn một ẩn số. Công cụ để đánh giá thường sử dụng là các bất đẳng thức quen thuộc (trung bình cộng – trung bình nhân, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, Bernoulli,...), tính đơn điệu của hàm số, khảo sát hàm số, phương pháp vectơ, gom bình phương đúng ...

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5} + \sqrt{5x+5} = 11$.

Giải. Điều kiện có nghĩa của phương trình là $x \ge -1$. Nhận thấy $x = 4$ là nghiệm của phương trình.

+ Nếu $x < 4$ thì $\sqrt{2x+1} < 3, \sqrt{x+5} < 3, \sqrt{5x+5} < 5$, do đó V.T < 11.

+ Nếu $x > 4$ thì $\sqrt{2x+1} > 3, \sqrt{x+5} > 3, \sqrt{5x+5} > 5$, do đó V.T > 11.

Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 11. Giải phương trình $8x^2 + \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$.

Giải. Điều kiện có nghĩa của phương trình là $x > 0$. Theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân

$$8x^2 + \sqrt{\frac{1}{x}} = 8x^2 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} \geq 5\sqrt[5]{8x^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^4} = 5\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{5}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $7\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} = x^4 - 2x^2 - x + 12$. (1)

Giải. Điều kiện có nghĩa của phương trình là $|x| \leq 1$. Theo bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz:

$$V.T = 7\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{(49+1)(1+x^2+1-x^2)} = 10. \qquad (2)$$

Mặt khác

$$V.P = x^4 - 2x^2 - x + 12 = (x^2-1)^2 + 1 - x + 10 \geq 10. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra (1) tương đương với V.T = V.P = 10.

Nhưng dấu bằng xảy ra ở (2) khi và chỉ khi

$$7 : \sqrt{1+x^2} = 1 : \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5},$$

còn dấu bằng ở (3) xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

Ví dụ 13. Giải phương trình

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Phân tích. Chỉ có một phương trình mà có đến ba ẩn số. Tình huống này hướng chúng ta nghĩ đến phương pháp đánh giá, trong trường hợp cụ thể này là phương pháp gom bình phương đúng.

Giải. Điều kiện có nghĩa của phương trình là $x \geq 1, y \geq 4, z \geq 9$.

Đặt $u = \sqrt{x-1}, v = \sqrt{y-4}, w = \sqrt{z-9}$, thay vào ta được phương trình

$$(u + 2v + 3w) = \frac{1}{2}(u^2 + 1 + v^2 + 4 + w^2 + 9)$$

$$\Leftrightarrow (u-1)^2 + (v-2)^2 + (w-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow u = 1, v = 2, w = 3.$$

Từ đó $x = 2, y = 8, z = 18$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2, y = 8, z = 18$.

Ví dụ 14. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 4x + 8} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{y^2 - 4y + 8} + \sqrt{y^2 - 2y + 2}.$$

Phân tích. Đây cũng là một phương trình có hai ẩn số. Các biểu thức căn thức và tam thức bậc hai hướng chúng ta đến công thức tính khoảng cách giữa các điểm và bất đẳng thức tam giác. Thật vậy, nếu xét $A(2; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(1; -1)$ và $M(x; 0)$, $N(y; 0)$ thì vế trái chính là $MA - MB$ còn vế phải là $NA + NC$. Vì

$$NA + NC \geq AC = AB \geq MA - MB$$

nên vế trái bằng vế phải khi và chỉ khi cả hai vế đều bằng AB.

Giải. Các biểu thức dưới căn luôn luôn dương, do đó phương trình có nghĩa với mọi x, y. Trên mặt phẳng toạ độ xét các điểm $A(2; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(1; -1)$ và $M(x; 0)$, $N(y; 0)$ thì ta có

$$MA = \sqrt{(x-2)^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 8},\ MB = \sqrt{(x+1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 2},$$

$$NA = \sqrt{(y-2)^2 + 2^2} = \sqrt{y^2 - 4y + 8},\ NC = \sqrt{(y-1)^2 + 1^2} = \sqrt{y^2 - 2y + 2}.$$

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $MA - MB \leq AB$; $NA + NC \geq AC$.

Dấu bằng xảy ra ở bất đẳng thức thứ nhất khi và chỉ khi A, B, M thẳng hàng và B nằm giữa A, M; dấu bằng xảy ra ở bất đẳng thức thứ hai khi và chỉ khi A, N, C thẳng hàng và N nằm giữa A, C.

Mặt khác ta có $AB = AC$ nên từ phương trình suy ra

$$MA - MB = AB = AC = NA + NC.$$

Từ điều kiện xảy ra dấu bằng, ta suy ra nghiệm duy nhất của phương trình là

$$x = -4,\ y = \frac{4}{3}.$$

Bài tập

24. Phương trình $x^5 - 209x + 56 = 0$ có hai nghiệm có tích bằng 1. Hãy tìm hai nghiệm đó.

25. Giải các phương trình sau

a) $x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0$ b) $x^5 + 10x^3 + 20x - 18 = 0$.

26. Cho $a < b < c$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$. Chứng minh rằng

$$a^2 - c = b^2 - a = c^2 - b = 2.$$

27. Giải và biện luận theo a

$$x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a.$$

28. Giải và biện luận theo a

$$x^2 - \sqrt{a - x} = a.$$

29. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$

b) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}\left(\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{(1+x)^3}\right) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$.

30. Tìm tất cả các nghiệm số thực của phương trình

$$64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2\sqrt{1 - x^2}.$$

31. Giải các phương trình sau

a) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$ b) $2x^2 + 4x = \sqrt{\dfrac{x + 3}{2}}$.

32. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 + 15} = 3\sqrt[3]{x} - 2 + \sqrt{x^2 + 8}.$$

33. Giải phương trình:

$$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}.$$

34. Các số α và β thoả mãn các đẳng thức

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 1,\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5.$$

Hãy tìm $\alpha + \beta$.

Chương V

HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Hệ phương trình là bộ của hai hay nhiều hơn các phương trình với cùng tập hợp các ẩn số. Khi giải hệ phương trình, ta đi tìm các giá trị của ẩn số thoả mãn tất cả các phương trình của hệ. Tập nghiệm của hệ là tập hợp tất cả các bộ giá trị của ẩn số thoả mãn các phương trình của hệ. Một cách chặt chẽ, giải hệ phương trình là tìm ra tập nghiệm của nó.

Hệ phương trình có thể vô nghiệm, hữu hạn nghiệm hoặc vô số nghiệm.

Hai hệ phương trình cùng tập ẩn (I) và (II) được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm. Hệ phương trình (II) được gọi là hệ quả của hệ phương trình (I) nếu mọi nghiệm của (I) đều là nghiệm của (II).

Ví dụ 1. Hai hệ phương trình

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \quad \text{và} \quad \text{(II)}\ \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

là tương đương vì có cùng tập nghiệm là $S = \{(2; 3), (3; 2)\}$. □

Ví dụ 2. Với hai hệ phương trình sau

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \quad \text{và} \quad \text{(II)}\ \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

thì (II) là hệ quả của (I) vì

$$S_{I} = \{(2; 3), (3; 2)\}, S_{II} = \{(2; 3), (3; 2), (-2; -3), (-3; -2)\}. \square$$

Khi giải hệ phương trình, ta dùng các phép biến đổi để đưa hệ về các dạng đơn giản hơn. Trong các phép biến đổi đó, quan trọng nhất là các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình. Ta gọi chúng là ***các phép biến đổi tương đương***. Như vậy

Phép biến đổi tương đương biến một hệ phương trình thành một hệ phương trình tương đương với nó.

Chẳng hạn, khi ta thay một phương trình của hệ bằng một phương trình tương đương với nó thì đó là một phép biến đổi tương đương. Ngoài các phép biến đổi tương đương trên một phương trình (xem phần phương trình tương đương), ta thường dùng các phép biến đổi được mô tả trong định lí sau (ở đây ta chỉ trình bày trường hợp hai ẩn, trường hợp n ẩn cũng có kết quả tương tự).

Định lí 1

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y) \\ f_2(x,y) = g_2(x,y) \end{cases} \qquad (*)$$

có tập xác định D; h(x, y) là một hàm số xác định trên D (h(x, y) có thể là một hằng số). Khi đó trên D, hệ phương trình đã cho tương đương với mỗi hệ sau:

1) $\begin{cases} f_1(x,y) + h(x,y) = g_1(x,y) + h(x,y) \\ f_2(x,y) = g_2(x,y) \end{cases}$

2) $\begin{cases} f_1(x,y)h(x,y) = g_1(x,y)h(x,y) \\ f_2(x,y) = g_2(x,y) \end{cases}$ *nếu h(x, y) khác 0 với mọi x thuộc D.*

3) $\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y) \\ f_2(x,y) + f(f_1(x,y))h(x,y) = g_2(x,y) + f(g_1(x,y))h(x,y) \end{cases}$

trong đó f(x) là một hàm số bất kì xác định trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Các phép biến đổi ở 1) và 2) là các phép biến đổi tương đương trên một phương trình, do đó là phép biến đổi tương đương của hệ. Ta chứng minh kết luận thứ ba.

Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ (*) thì

$$f_1(x_0, y_0) = g_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0) = g_2(x_0, y_0),$$

do đó $$f_2(x_0, y_0) + f(f_1(x_0, y_0))h(x_0, y_0) = g_2(x_0, y_0) + f(g_1(x_0, y_0))h(x_0, y_0),$$

suy ra (x_0, y_0) cũng là nghiệm của 3).

Ngược lại, nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của 3) thì ta có

$$f_1(x_0, y_0) = g_1(x_0, y_0),$$

$$f_2(x_0, y_0) + f(f_1(x_0, y_0))h(x_0, y_0) = g_2(x_0, y_0) + f(g_1(x_0, y_0))h(x_0, y_0).$$

Suy ra

$$f_2(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) + f(f_1(x_0, y_0))h(x_0, y_0) - f(f_1(x_0, y_0))h(x_0, y_0) =$$

$$= g_2(x_0, y_0) + f(g_1(x_0, y_0))h(x_0, y_0) - f(g_1(x_0, y_0))h(x_0, y_0) = g_2(x_0, y_0),$$

suy ra (x_0, y_0) là nghiệm của (*). Vậy (*) và 3) tương đương. □

Ngoài ra, ***quy tắc thay thế*** dưới đây cũng là một phép biến đổi tương đương thông dụng.

Định lí 2

> *Hệ phương trình* (I) $\begin{cases} y = f(x) \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$ *tương đương với*
>
> *hệ phương trình* (II) $\begin{cases} y = f(x) \\ F(x, f(x)) = 0. \end{cases}$

Chứng minh. Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ (I).

Khi đó $y_0 = f(x_0)$, $F(x_0, y_0) = 0$, do đó $F(x_0, f(x_0)) = 0$ tức là (x_0, y_0) là một nghiệm của (II). Ngược lại tương tự.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Giải. Ta biến đổi tương đương hệ phương trình (với $f(x) = x^2$ và $h(x,y) = -1$).

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2-(x+y)^2=5-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x.y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x(3-x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases} \qquad \square$$

Bên cạnh các phép biến đổi tương đương, chúng ta còn có thể sử dụng các phép biến đổi đưa về hệ phương trình hệ quả, tức là hệ có tập nghiệm lớn hơn hay bằng tập nghiệm của hệ ban đầu (theo quan hệ bao hàm). Định lí dưới đây nêu ra một số phép biến đổi hệ quả thường sử dụng.

Định lí 3

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases} \qquad (*)$$

có tập xác định D. Khi đó trên D, các hệ phương trình sau là hệ quả của (*):

1) $\begin{cases} f_1^2(x,y)=g_1^2(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases}$

2) $\begin{cases} f_1(x,y)f_2(x,y)=g_1(x,y)g_2(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases}$

3) $\begin{cases} f_1^2(x,y)+f_2^2(x,y)=g_1^2(x,y)+g_2^2(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y). \end{cases}$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1}=3-2y \\ \sqrt{x}=\sqrt{6-2y}. \end{cases}$

Giải. Từ phương trình thứ nhất, ta suy ra $x-1=9-12y+4y^2$. (3)

Từ phương trình thứ hai, ta suy ra $x=6-2y$. (4)

Thay $x=6-2y$ vào phương trình (3), ta được

$$5-2y=9-12y+4y^2 \Leftrightarrow 2y^2-5y+2=0.$$

Phương trình cuối cùng có nghiệm $y=\frac{1}{2}$ và $y=2$.

Tuy nhiên, chỉ ứng với $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 5$ thì ta có $(5; \frac{1}{2})$ là nghiệm, còn ứng với $y = 2$ thì $(x ; y) = (2 ; 2)$ là nghiệm của hệ (3), (4) nhưng không là nghiệm của hệ đề bài. Như vậy là các phép biến đổi của chúng ta không tương đương. Việc bình phương các phương trình mà không có điều kiện ràng buộc đã sinh ra ***các nghiệm ngoại lai***. Để xử lí các tình huống này, ta có thể thử lại hoặc đặt ra các điều kiện ràng buộc khi biến đổi phương trình (ví dụ nếu hai vế cùng dấu thì phép bình phương hai vế của phương trình là phép biến đổi tương đương). □

Đối với hệ bất phương trình, chúng ta cũng có các định nghĩa tương tự về ***hệ bất phương trình tương đương*** và ***hệ bất phương trình hệ quả***. Định lí dưới đây mô tả một số phép biến đổi thông dụng trên hệ bất phương trình.

Định lí 4

Cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} f_1(x,y) > g_1(x,y) \\ f_2(x,y) > g_2(x,y) \end{cases} \qquad (*)$$

có tập xác định D ; $h(x, y)$ là một hàm số xác định trên D ($h(x, y)$ có thể là một hằng số). Khi đó trên D, hệ phương trình đã cho tương đương với mỗi hệ sau:

1) $\begin{cases} f_1(x,y) + h(x,y) > g_1(x,y) + h(x,y) \\ f_2(x,y) > g_2(x,y) \end{cases}$

2) $\begin{cases} f_1(x,y)h(x,y) > g_1(x,y)h(x,y) \\ f_2(x,y) > g_2(x,y) \end{cases}$ *nếu $h(x, y)$ luôn dương với mọi x thuộc D.*

Trong khi đó hệ sau là hệ bất phương trình hệ quả của (*)

3) $\begin{cases} f_1(x,y) > g_1(x,y) \\ f_2(x,y) + f_1(x,y)h(x,y) > g_2(x,y) + g_1(x,y)h(x,y) \end{cases}$

nếu $h(x, y)$ luôn dương với mọi x thuộc D.

Ngoài các hệ phương trình và hệ bất phương trình, trong thực tế chúng ta còn gặp các *hệ phương trình - bất phương trình*, tức là các hệ có chứa cả phương trình và bất phương trình. Các khái niệm về các *phép biến đổi tương đương* và *biến đổi hệ quả* trên các hệ này được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 5. Giải hệ $\begin{cases} |x-2y|+y=3 \\ x-y=5. \end{cases}$

Giải. Một cách tự nhiên, hệ tương đương với

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ x-2y+y=3 \\ x-y=5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 2y \\ 2y-x+y=3 \\ x-y=5. \end{cases}$$

Hệ đầu tiên vô nghiệm còn với hệ thứ hai, hai phương trình cho ta nghiệm $y = 4$, $x = 9$. Nghiệm này không thoả mãn bất phương trình $x < 2y$ nên bị loại. Vậy hệ đã cho vô nghiệm. □

§2. MỘT SỐ DẠNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Hệ phương trình bậc nhất (tuyến tính)

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ có dạng

$$(1) \quad \begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$$

với $a^2 + b^2 \neq 0$ và $a'^2 + b'^2 \neq 0$.

Để giải hệ, ta tiến hành như sau:

– Nhân hai vế của phương trình (1) với b', hai vế của phương trình (2) với $-b$ rồi cộng các vế tương ứng, ta được

$$(ab'-a'b)x = cb' - c'b. \qquad (3)$$

– Nhân hai vế của phương trình (1) với $-a'$, hai vế của phương trình (2) với a rồi cộng các vế tương ứng, ta được

$$(ab'-a'b)y = ac' - a'c. \qquad (4)$$

– Trong (3) và (4), ta đặt $D = ab' - a'b$, $D_x = cb' - c'b$ và $D_y = ac' - a'c$. Khi đó ta có hệ phương trình hệ quả

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} D.x = D_x \\ D.y = D_y. \end{cases}$$

Đối với hệ (II), ta xét các trường hợp sau đây :

1) $D \neq 0$, lúc này hệ (II) có một nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right).$$

Ta thấy đây cũng là nghiệm của hệ phương trình (I).

2) $D = 0$, lúc này hệ (II) trở thành

$$\begin{cases} 0.x = D_x \\ 0.y = D_y. \end{cases}$$

– Nếu $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ (II) vô nghiệm nên hệ (I) vô nghiệm.

– Nếu $D_x = D_y = 0$ thì hệ (II) có vô số nghiệm. Tuy nhiên, muốn tìm nghiệm của hệ (I), ta phải trở về hệ (I) (do (II) chỉ là hệ phương trình hệ quả).

Theo giả thiết, hai số a và b không cùng bằng 0 nên ta có thể giả sử $a \neq 0$ (trường hợp $b \neq 0$ cũng giải tương tự). Ta có

$$D = ab' - a'b = 0 \Rightarrow b' = \frac{a'}{a} b;$$

$$D_x = ac' - a'c = 0 \Rightarrow c' = \frac{a'}{a} c.$$

Bởi vậy, hệ (I) có thể viết lại thành

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \dfrac{a'}{a}(ax + by) = \dfrac{a'}{a} c. \end{cases}$$

Do đó, tập nghiệm của hệ (I) trùng với tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$. Nghiệm của phương trình này có dạng $(x; y) = \left(\dfrac{c}{a} - bt; at \right)$ với t là số thực bất kì.

Kết quả trên có thể tóm tắt như sau

Để giải hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = c & (a^2 + b^2 \neq 0) \\ a'x + b'y = c' & (a'^2 + b'^2 \neq 0) \end{cases}$

ta tính $D = ab' - a'b$, $D_x = cb' - c'b$, $D_y = ac' - a'c$.

1) $D \neq 0$ *: Hệ có một nghiệm duy nhất* $(x; y)$, *trong đó*

$$x = \frac{D_x}{D}; \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

2) $D = 0$

* $D_x \neq 0$ *hoặc* $D_y \neq 0$*: Hệ vô nghiệm.*

* $D_x = D_y = 0$*: Hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình* $ax + by = c$.

Ghi chú: Biểu thức $pq' - p'q$ được gọi là một định thức cấp hai và kí hiệu là

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}$$

Như vậy, các biểu thức D, D_x, D_y mà chúng ta gặp khi giải hệ (1) đều là các định thức cấp hai:

$$D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, D_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}, D_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 5y = -9 \\ 2x - y = 7. \end{cases}$

Giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3.(-1) - 2.5 = -13 \neq 0;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -9 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = (-9).(-1) - 7.5 = -26;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 2.(-9) = 39.$$

Từ đó suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{D_x}{D};\dfrac{D_y}{D}\right)=(2;-3)$. □

Ví dụ 2. Giải và biện luận theo a, b hệ phương trình

$$\begin{cases}(a+b)x+(a-b)y=a\\(2a-b)x+(2a+b)y=b.\end{cases}$$

Giải. Ta có

$$D=\begin{vmatrix}a+b & a-b\\2a-b & 2a+b\end{vmatrix}=(a+b)(2a+b)-(2a-b)(a-b)=6ab;$$

$$D_x=\begin{vmatrix}a & a-b\\b & 2a+b\end{vmatrix}=a(2a+b)-b(a-b)=2a^2+b^2;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a+b & a\\2a-b & b\end{vmatrix}=(a+b)b-(2a-b)a=-2a^2+2ab+b^2.$$

Từ đó:

- Nếu $ab\neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{2a^2+b^2}{6ab};\dfrac{-2a^2+2ab+b^2}{6ab}\right)$.
- Nếu $ab=0$ thì xảy ra các trường hợp sau

  + Nếu $a=0$, $b\neq 0$: Hệ vô nghiệm.

  + Nếu $b=0$, $a\neq 0$: Hệ vô nghiệm.

  + Nếu $a=b=0$: Mọi $(x;y)$ là nghiệm của hệ. □

Ví dụ về giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

trong đó các hệ số của ba ẩn x, y, z trong mỗi phương trình của hệ không đồng thời bằng 0.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - y + 4z = 0 & (1) \\ x + 5y - 2z = 3 & (2) \\ -x + 8y - 2z = 1. & (3) \end{cases}$$

Giải. Từ phương trình (3) ta suy ra $x = 8y - 2z - 1$. Thay vào các phương trình (1), (2), ta được

$$4(8y - 2z - 1) - y + 4z = 0 \Leftrightarrow 31y - 4z = 4;$$

$$8y - 2z - 1 + 5y - 2z = 3 \Leftrightarrow 13y - 4z = 4.$$

Ta thu được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc

$$\begin{cases} 31y - 4z = 4 \\ 13y - 4z = 4. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $y = 0$, $z = -1$. Thay vào (1) ta tìm được $x = 1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x ; y ; z) = (1 ; 0 ; -1)$. □

Nhận xét. Qua ví dụ trên, ta thấy: Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn số là *khử dần các ẩn* để quy về giải các phương trình hay hệ phương trình có ẩn số ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số hay phương pháp thế giống như đối với hệ phương trình hai ẩn.

Ứng dụng của hệ phương trình bậc nhất

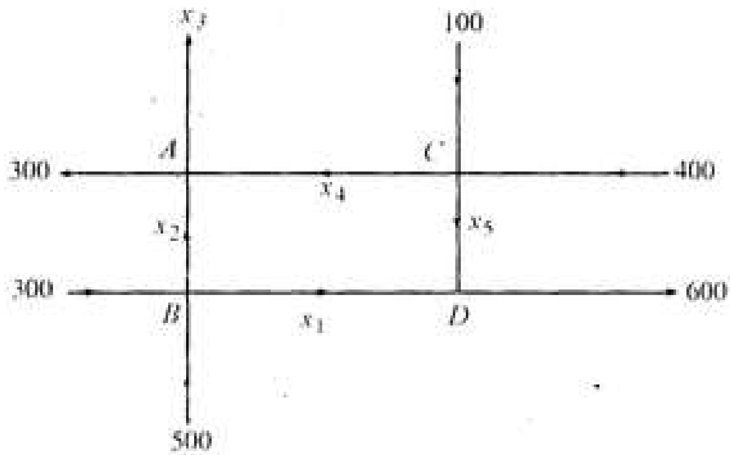
Hệ phương trình bậc nhất có nhiều ứng dụng quan trọng trong khoa học kĩ thuật. Dưới đây chúng ta sẽ xem xét hai ví dụ trong lí thuyết mạng lưới và mạch điện.

Dòng chảy trong mạng lưới

Một mạng lưới bao gồm một tập hợp các điểm, được gọi là các *nút*, và các đường hay cung, gọi là các *nhánh*, nối giữa một số các cặp nút. Hướng của các nhánh được xác định và lưu lượng dòng chảy cũng được chỉ rõ hoặc kí hiệu bởi các biến số.

Một trong những mặc định cơ sở của dòng chảy trong mạng lưới là tổng dòng chảy vào mạng lưới luôn bằng tổng dòng chảy ra của mạng lưới và tại mỗi nút cũng vậy. Ví dụ nếu tại nút *A* có một dòng chảy vào với lưu lượng 30 và hai dòng chảy ra với lưu lượng x_1, x_2 tương ứng thì ta phải có $x_1 + x_2 = 30$. Mục tiêu của bài toán phân tích mạng lưới là xác định lưu lượng dòng chảy trong các nhánh khi biết một số thông tin (ví dụ đầu vào của mạng lưới).

Ví dụ 4. Mạng lưới trong hình vẽ mô tả mạng lưới giao thông (lưu lượng tính bằng số ô-tô chạy trong một giờ) tại một số con đường một chiều của một thành phố vào buổi sáng ngày làm việc trong tuần. Hãy xác định quy luật dòng chảy chung của mạng lưới.



Hình 5.1

Giải. Trước tiên ta sẽ viết các phương trình mô tả dòng chảy của mạng lưới hệ thống, sau đó tìm lời giải chung cho hệ thống. Ta kí hiệu các nút và những lưu lượng cần tìm của các nhánh như hình 5.1. Tại các nút, ta cho tổng dòng chảy vào bằng tổng dòng chảy ra.

Giao lộ (nút)	*Dòng chảy vào*	*Dòng chảy ra*
A	300 + 500	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_4$	$300 + x_3$
C	100 + 400	$x_4 + x_5$
D	$x_1 + x_5$	600

Ngoài ra, tổng dòng chảy vào hệ thống (500 + 300 + 100 + 400) bằng tổng dòng chảy ra của hệ thống ($300 + x_3 + 600$), từ đây suy ra $x_3 = 400$. Kết hợp phương trình này với 4 phương trình đầu được viết lại, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 800 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 300 \\ x_4 + x_5 = 500 \\ x_1 + x_5 = 600 \\ x_3 = 400. \end{cases}$$

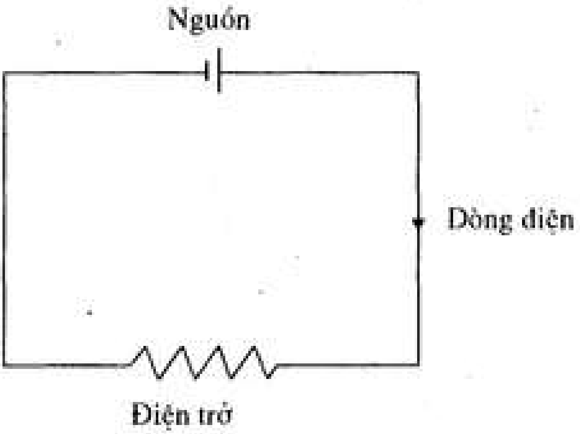
Giải hệ này ta thu được

$$\begin{cases} x_1 = 600 - x_5 \\ x_2 = 200 + x_5 \\ x_3 = 400 \\ x_4 = 500 - x_5 \\ x_5 \text{ bất kì.} \end{cases}$$

Do các đường đi trong hệ thống đều là một chiều nên ta phải có tất cả các lưu lượng đều không âm, từ đó dẫn đến điều kiện đối với x_5 là $0 \le x_5 \le 500$. □

Mạch điện

Mạch điện đơn giản nhất bao gồm pin và điện trở. Ví dụ về điện trở có đèn chiếu sáng, mô-tơ, lò sưởi... Xem hình 5.2 (hình vẽ gồm pin nguồn, dòng điện, điện trở).



Hình 5.2

Nguồn điện thế, ví dụ như pin, sẽ tạo ra dòng điện chạy trong mạch. Mỗi một điện trở trong mạng lưới sẽ cản dòng điện và "sử dụng" một phần điện thế của mạch.

Theo định luật Ohm, phần điện thế bị mất khi đi qua điện trở bằng tích của điện trở R nhân với cường độ dòng điện I:

$$V = R.I.$$

Điện thế được tính bằng vôn (volt), điện trở bằng ôm (ohm) và cường độ dòng điện bằng am-pe (amp).

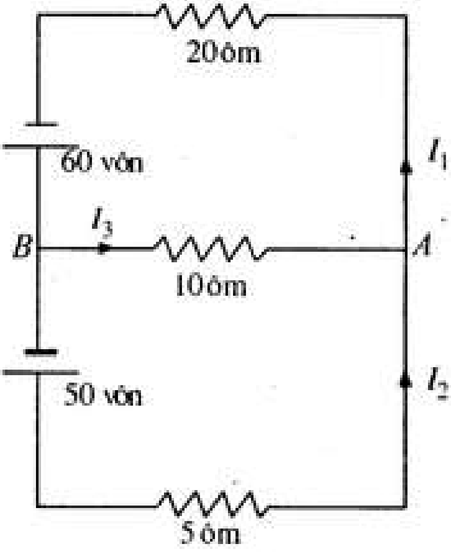
Cường độ dòng điện trong mạch điện tuân thủ hai luật. Luật thứ hai áp dụng cho các vòng kín, tức là các đường khép kín đi qua dãy các nhánh bắt đầu và kết thúc ở cùng một nút.

Định luật Kirchhoff

1. (Luật cường độ dòng điện) Tổng đại số của tất cả các dòng đến và rời một nút nào đó của mạch điện bằng không.

2. (Luật điện thế) Tổng đại số của độ tăng và giảm về điện thế gặp phải khi đi một vòng kín quanh một mạch điện nào đó phải bằng không.

Ví dụ 5. Xác định các cường độ dòng điện I_1, I_2, I_3 trong mạch điện mô tả ở hình 5.3.



Hình 5.3

Giải. Định luật Kirchhoff về cường độ dòng điện tại các nút cho ta

Tại nút A : $I_1 = I_2 + I_3$ (1)

Tại nút B : $I_2 + I_3 = I_1$

Hai phương trình này như nhau nên ta chỉ giữ lại một phương trình. Luật điện thế cho chúng ta hai phương trình từ hai vòng kín. Với vòng ở trên, ta chọn chiều ngược chiều kim đồng hồ, tức là cùng chiều với I_1 và I_3, từ đó

$$20I_1 + 10I_3 = 60. \qquad (2)$$

Với vòng dưới, chiều ngược chiều kim đồng hồ cùng chiều với I_2 nhưng ngược chiều với I_3. Vì thế ta có

$$5I_2 - 10I_3 = 50. \qquad (3)$$

Ngoài ra còn có một vòng kín thứ ba là vòng lớn. Với vòng này ta cũng chọn chiều ngược chiều kim đồng hồ và theo định luật Kirchhoff về điện thế

$$20I_1 + 5I_2 = 60 + 50.$$

Chú ý rằng phương trình này có thể thu được bằng cách cộng hai phương trình (2) và (3), như thế phương trình không cho thêm thông tin gì về các cường độ dòng điện.

Như vậy ta có hệ phương trình sau đối với các cường độ dòng điện

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 20I_1 + 10I_3 = 60 \\ 5I_2 - 10I_3 = 50. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $I_1 = 4$ amp, $I_2 = 6$ amp và $I_3 = -2$ apm. Dấu – của I_3 có nghĩa là dòng điện I_3 đi ngược với hướng được ghi trên hình vẽ của mạch.

2. Hệ phương trình bậc 2 hai ẩn

Hệ phương trình bậc 2 hai ẩn có dạng tổng quát :

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ $(i = 1, 2)$ là các hằng số (hoặc tham số) cho trước và x, y là các ẩn số.

Trong trường hợp tổng quát, phép giải hệ phương trình bậc 2 hai ẩn sẽ dẫn đến phép giải phương trình đại số bậc cao (bậc ≥ 4). Tuy nhiên, trong một số trường hợp đặc biệt, hệ phương trình bậc 2 hai ẩn có thể giải được nhờ phép giải phương trình bậc 2. Dưới đây chúng ta xét các trường hợp thường gặp.

Hệ có chứa một phương trình bậc nhất

Nếu một trong hai phương trình của hệ không chứa các số hạng bậc hai, chẳng hạn nếu $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ thì hệ có thể giải được dễ dàng bằng cách rút y theo x (hoặc x theo y) từ phương trình thứ nhất rồi thế vào phương trình thứ hai để thu được một phương trình bậc 2 theo x. Giải phương trình nàyđể tìm x, sau đó dùng phương trình thứ nhất để tính y theo x tương ứng.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ x^2 + y^2 + xy = 37. \end{cases}$$

Giải. Từ phương trình thứ nhất, rút $y = \dfrac{25 - 3x}{4}$ rồi thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$x^2 + \left(\frac{25-3x}{4}\right)^2 + x\left(\frac{25-3x}{4}\right) = 37$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 + 100x - 12x^2 = 592$$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 50x + 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{11}{13}.$$

Từ đó ta tìm được tập nghiệm của hệ là $\{(3, 4), (\frac{11}{13}, \frac{73}{13})\}$. □

Chú ý là phương pháp thế có thể sử dụng trong tình huống tổng quát hơn, chỉ cần khuyết hệ số của y^2 (lúc đó rút y theo x) hoặc của x^2 (lúc đó rút x theo y). Tuy nhiên, do lúc đó y là hàm bậc hai hoặc hàm phân thức theo x nên khi thế vào phương trình thứ hai, ta sẽ thu được phương trình bậc cao.

Hệ có chứa một phương trình đẳng cấp (tức là **thuần nhất**) **bậc 2**

Nếu một trong hai phương trình của hệ không chứa các số hạng bậc nhất và tự do, chẳng hạn nếu $d_1 = e_1 = f_1 = 0$ (phương trình tương ứng được gọi là phương trình đẳng cấp bậc 2) thì hệ cũng có thể đưa về phương trình bậc hai bằng cách đặt ẩn phụ $y = tx$ rồi thay vào phương trình đẳng cấp, từ đó tìm được t. Với mỗi giá trị t tìm được, thay $y = tx$ vào phương trình thứ hai để tìm x và tìm y tương ứng.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 3y = 19. \end{cases}$$

Giải. Nếu $y = 0$ thì từ phương trình thứ nhất suy ra $x = 0$, thay vào phương trình thứ hai không thoả mãn. Vậy $y \neq 0$. Đặt $x = ty$ rồi thay vào phương trình thứ nhất, ta được $(t^2 - 2t - 3)y^2 = 0$. Từ đó, do $y \neq 0$ ta suy ra $t = 3$ hoặc $t = -1$.

Với $t = 3$, thay $x = 3y$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$9y^2 + y^2 + 6y + 3y = 19 \Leftrightarrow 10y^2 + 9y - 19 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -\frac{19}{10}.$$

Với $t = -1$, thay $x = -y$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$y^2 + y^2 - 2y + 3y = 19 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; y = \frac{-1 \pm 3\sqrt{17}}{4}.$$

Từ đây ta tìm được tập nghiệm của hệ là

$$\{(3;1), (-\frac{57}{10}; -\frac{19}{10}), (\frac{1-3\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+3\sqrt{17}}{4}), (\frac{1+3\sqrt{17}}{4}; \frac{-1-3\sqrt{17}}{4})\}.$$

Phương pháp này có thể áp dụng để giải hệ phương trình có hai phương trình bán đẳng cấp bậc 2, tức là hệ có dạng

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + f_2 = 0 \end{cases}$$

vì rõ ràng từ hai phương trình bán đẳng cấp này, ta có thể tạo ra một phương trình đẳng cấp bậc hai, cụ thể là

$$f_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2) - f_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) = 0. \square$$

Hệ đối xứng loại 1

Đa thức $F(x, y)$ được gọi là đối xứng đối với x, y nếu $F(x, y) = F(y, x)$ với mọi x, y. Hệ có dạng

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$$

với $F(x, y)$, $G(x, y)$ là các đa thức đối xứng đối với x, y được gọi là hệ đối xứng loại 1. Trong trường hợp hệ phương trình bậc 2, hệ đối xứng loại 1 có dạng

$$\begin{cases} a_1(x^2+y^2)+b_1xy+c_1(x+y)+d_1=0 \\ a_2(x^2+y^2)+b_2xy+c_2(x+y)+d_2=0. \end{cases}$$

Cách giải chung cho hệ đối xứng loại 1 là đặt $S = x + y$, $P = xy$ (điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$) rồi sử dụng tính chất của đa thức đối xứng, đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} F_1(S,P)=0 \\ G_1(S,P)=0. \end{cases}$$

Giải hệ này, tìm được S, P rồi dùng định lí Viete đảo để tìm x, y.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^2+y^2+x+y=8. \end{cases}$

Giải. Đặt $S = x + y$, $P = xy$ với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$ và sử dụng công thức

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

ta đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} S^2-P=7 \\ S^2-2P+S=8. \end{cases}$$

Từ phương trình (1) suy ra $P = S^2 - 7$. Thay vào phương trình (2), ta được

$$S^2-2(S^2-7)+S=8 \Leftrightarrow S^2-S-6=0 \Leftrightarrow S=3 \vee S=-2.$$

Từ đó ta được các cặp (S, P) là $(3, 2)$ và $(-2, -3)$. Giải các phương trình tương ứng, ta tìm được tập nghiệm của hệ ban đầu là

$$\{(1:2),(2:1),(1:-3),(-3:1)\}. \quad \square$$

Hệ đối xứng loại 2

Hệ đối xứng loại 2 là hệ có dạng

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F(y,x)=0 \end{cases}$$

trong đó $F(x, y)$ là một đa thức không đối xứng. Trong trường hợp hệ phương trình bậc hai, hệ đối xứng loại hai có dạng

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \\ c_1x^2+b_1xy+a_1y^2+e_1x+d_1y+f_1=0. \end{cases}$$

Phương pháp chung để giải hệ đối xứng loại 2 là trừ hai phương trình vế theo vế để được phương trình có dạng $(x-y)G(x, y)=0$, sau đó giải hệ trong từng trường hợp $x=y$ và $G(x, y)=0$. Chú ý rằng trong trường hợp hệ phương trình bậc 2 thì $G(x, y)$ là biểu thức bậc nhất, do đó việc giải hệ đưa về hệ có chứa một phương trình bậc nhất.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x=y^2-2 \\ y=x^2-2. \end{cases}$$

Giải. Trừ hai phương trình vế theo vế, ta được

$$x-y=(y-x)(y+x) \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0.$$

Xét hai trường hợp

a) $x-y=0 \Leftrightarrow y=x$, thay vào phương trình đầu, ta được

$$x=x^2-2, \text{ suy ra } x=-1 \text{ hoặc } x=2.$$

b) $x+y+1=0 \Leftrightarrow y=-1-x$, thay vào phương trình đầu, ta được

$$x=1+2x+x^2-2 \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta được tập nghiệm của hệ là

$$\{(-1;-1), (2;2), (\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}), (\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2})\}. \square$$

3. Một số dạng hệ phương trình khác

Hệ phương trình hai ẩn bậc cao

Các phương pháp được trình bày trong phần hệ phương trình bậc hai hai ẩn có thể tiếp tục áp dụng cho trường hợp hệ phương trình bậc cao hai ẩn với các dạng tương ứng. Vấn đề mà chúng ta gặp phải ở đây là các phương trình hệ quả thu được sẽ có bậc cao. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

Giải. Đây là hệ có chứa một phương trình bậc nhất. Ta giải bằng phương pháp thế. Rút $y = 5 - 2x$ và thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$x^3 + 125 - 150x + 60x^2 - 8x^3 = 9$$

$$\Leftrightarrow 7x^3 - 60x^2 + 150x - 116 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(7x^2 - 46x + 58) = 0.$$

Giải ra ta được

$$x = 2,\ x = \frac{23+\sqrt{123}}{7},\ x = \frac{23-\sqrt{123}}{7}.$$

Giá trị y tương ứng được tính từ công thức $y = 5 - 2x$

$$y = 1,\ y = \frac{-11-2\sqrt{123}}{7},\ y = \frac{-11+2\sqrt{123}}{7}.$$

Từ đó ta được tập nghiệm của hệ là

$$\left\{(2;1),\ \left(\frac{23+\sqrt{123}}{7};\frac{-9-2\sqrt{123}}{7}\right), \left(\frac{23-\sqrt{123}}{7};\frac{-9+2\sqrt{123}}{7}\right)\right\}. \square$$

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

Giải. Đây là hệ đối xứng loại 1, ta giải bằng cách đặt $S = x + y$, $P = xy$ với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Sử dụng các công thức

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = S(S^2 - 3P) = S^3 - 3SP,$$

thay vào ta được hệ

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ S^3 - 3SP = 9. \end{cases}$$

Rút $P = \dfrac{S^2 - 5}{2}$ từ phương trình đầu rồi thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$S^3 - 3S\frac{S^2 - 5}{2} = 9$$

$$\Leftrightarrow S^3 - 15S + 18 = 0 \Leftrightarrow (S - 3)(S^2 + 3S - 6) = 0.$$

Suy ra $S = 3, S = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2}, S = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2}$ và tương ứng

$$P = 2, P = \frac{11 - 3\sqrt{33}}{4}, P = \frac{11 + 3\sqrt{33}}{4}.$$

Kiểm tra điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$, ta loại cặp nghiệm cuối.

Với cặp $(S, P) = (3, 2)$, ta tìm được các nghiệm $(x, y) = (1, 2)$ và $(x, y) = (2, 1)$.

Với cặp $(S, P) = \left(\dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2}, \dfrac{11 - 3\sqrt{33}}{4}\right)$, ta tìm được các nghiệm

$$(x, y) = \left(\frac{-3 + \sqrt{33} + \sqrt{-2 + 6\sqrt{33}}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{33} - \sqrt{-2 + 6\sqrt{33}}}{4}\right),$$

$$(x, y) = \left(\frac{-3 + \sqrt{33} - \sqrt{-2 + 6\sqrt{33}}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{33} + \sqrt{-2 + 6\sqrt{33}}}{4}\right). \quad \square$$

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 2 - y^3 \\ y = 2 - x^3. \end{cases}$$

Giải. Đây là hệ đối xứng loại 2. Trừ hai phương trình vế theo vế, ta được

$$x - y = x^3 - y^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1. \end{cases}$$

Với $x - y = 0$, thay $y = x$ vào phương trình đầu, ta được

$$x = 2 - x^3 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

ta có nghiệm $(x, y) = (1, 1)$.

Với $x^2 + y^2 + xy = 1$, ta kết hợp phương trình này với tổng của hai phương trình ban đầu để được hệ đối xứng loại 1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x + y = 4 - (x^3 + y^3). \end{cases}$$

Chuyển sang hệ hai ẩn S, P với $S = x + y$, $P = xy$ ($S^2 - 4P \ge 0$), ta được

$$\begin{cases} S^2 - P = 1 \\ S = 4 - (S^3 - 3SP). \end{cases}$$

Rút $P = S^2 - 1$ từ phương trình thứ nhất rồi thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$S = 4 - [S^3 - 3S(S^2-1)] \quad \Leftrightarrow S^3 - 2S + 2 = 0. \qquad (*)$$

Điều kiện $S^2 - 4P \ge 0$ suy ra $S^2 - 4(S^2-1) \ge 0 \Rightarrow S^2 \le \dfrac{4}{3}$. Ta sẽ chứng minh (*) không có nghiệm thoả mãn điều kiện này. Thật vậy, giả sử ngược lại, S là nghiệm của (*) thoả mãn $S^2 \le \dfrac{4}{3}$. Ta viết (*) dưới dạng $S(2 - S^2) = 2$, suy ra $S > 0$. Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$S^2(2 - S^2)^2 = 4 \Leftrightarrow 2S^2(2 - S^2)(2 - S^2) = 8.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân cho ba số $2S^2$, $2 - S^2$, $2 - S^2$, ta được

$$2S^2(2-S^2)(2-S^2) \le (\frac{4}{3})^3 < 8.$$

Mâu thuẫn. Vậy (*) không có nghiệm thoả mãn điều kiện $S^2 \le \frac{4}{3}$.

Kết luận : (1; 1) là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. □

Hệ phương trình ba ẩn

Nói chung các phương pháp cơ bản để giải hệ phương trình như phương pháp thế, phương pháp tổng hợp các phương trình, phương pháp đánh giá, phương pháp giải hệ phương trình đối xứng vẫn có thể áp dụng để giải các hệ phương trình có số ẩn số lớn hơn 2. Tuy nhiên độ phức tạp của bài toán sẽ gia tăng đáng kể. Dưới đây chúng ta sẽ xem xét hai dạng hệ phương trình ba ẩn thường gặp.

Hệ phương trình đối xứng loại 1

Hệ phương trình đối xứng loại 1 là hệ có dạng

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \\ H(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Trong đó F, G, H là các đa thức đối xứng đối với x, y, z. Cách giải hệ dạng này cũng tương tự như giải hệ đối xứng loại 1 của hai ẩn, tức là từ các phương trình của hệ, tìm được $S = x + y + z$, $T = xy + yz + zx$, $P = xyz$ rồi từ đó áp dụng định lí Viete đảo để tìm x, y, z.

Ví dụ 13. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=10 \\ x^7+y^7+z^7=350. \end{cases}$$

Giải. Ta có $x + y + z = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$. Kết hợp với phương trình thứ hai, ta được $xy + yz + zx = -5$.

Đặt $P = xyz$ thì x, y, z là nghiệm của phương trình

$$X^3 - 5X - P = 0.$$

Từ đó nếu đặt $S_n = x^n + y^n + z^n$ thì ta có $S_n = 5S_{n-2} + PS_{n-3}$, $S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = 10$. Ta lần lượt tìm được

$$S_3 = 3P, S_4 = 50, S_5 = 25P, S_7 = 175P.$$

Kết hợp với phương trình thứ ba, ta suy ra $P = 2$.

Vậy x, y, z là nghiệm của phương trình

$$X^3 - 5X - 2 = 0 \Leftrightarrow (X+2)(X^2 - 2X - 1) = 0.$$

Phương trình này có các nghiệm $-2 ; 1-\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có 6 nghiệm là $(x;y;z) = (-2 \; ; \; 1-\sqrt{2} \; ; \; 1+\sqrt{2})$ và các hoán vị.

Hệ phương trình đối xứng loại 2

Hệ phương trình đối xứng loại 2 là hệ có dạng

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ F(y,z,x) = 0 \\ F(z,x,y) = 0. \end{cases}$$

trong đó $F(x, y, z)$ là một đa thức không đối xứng.

Để giải hệ dạng này, ta có thể sử dụng các phương pháp cộng đại số, tổng hợp các phương trình hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm số. Trong một số trường hợp, có thể dùng các phép thế lượng giác.

Ví dụ 14. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0. \end{cases}$$

Giải. Cộng ba phương trình vế theo vế, ta được

$$(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 = 0. \qquad (*)$$

Nếu $x > 2$ thì từ phương trình thứ nhất ta suy ra $y^3 = 6x(x-2) + 8 > 8$, suy ra $y > 2$. Từ phương trình thứ hai lại suy ra $z > 2$. Điều này mâu thuẫn với đẳng thức (*).

Nếu $x < 2$ thì từ phương trình thứ ba, ta suy ra $6z(z-2) = x^3 - 8 < 0$, suy ra $z < 2$. Từ phương trình thứ hai lại suy ra $y < 2$, mâu thuẫn với (*).

Vậy chỉ còn khả năng $x = 2$. Khi $x = 2$, phương trình thứ nhất cho ta $y = 2$, phương trình thứ hai cho ta $z = 2$. Thử lại vào phương trình thứ ba thấy thoả mãn.

Vậy $(x; y; z) = (2; 2; 2)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. □

Ví dụ 15. Cho x, y, z là các số thực thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x = y(4-y) \\ y = z(4-z) \\ z = x(4-x). \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị có thể có của $S = x + y + z$.

Giải. Nếu có một trong ba số x, y, z bằng 0 thì từ hệ phương trình suy ra các số còn lại cũng bằng 0. Rõ ràng $(0, 0, 0)$ là một nghiệm của hệ. Vậy 0 là một giá trị mà S có thể nhận.

Tiếp theo ta giả sử $xyz \neq 0$. Đặt $T = xy + yz + zx$, $P = xyz$. Nhân các phương trình vế theo vế rồi giản ước cho tích xyz, ta được

$$1 = (4-y)(4-z)(4-x) \Rightarrow 63 - 16S + 4T - P = 0. \qquad (1)$$

Cộng ba phương trình vế theo vế, ta được

$$3(x+y+z) - (x^2+y^2+z^2) = 0 \Rightarrow 3S - S^2 + 2T = 0. \qquad (2)$$

Cuối cùng, nhân phương trình đầu với y, phương trình thứ hai với z và phương trình thứ ba với x rồi cộng lại vế theo vế, ta được

$$xy + yz + xz = 4(x^2+y^2+z^2) - (x^3+y^3+z^3)$$

$$\Rightarrow T = 4(S^2 - 2T) - (S^3 - 3ST + 3P). \qquad (3)$$

Từ (2) ta suy ra $T = \dfrac{S^2-3S}{2}$. Thay vào (1), suy ra $P = 2S^2 - 22S + 63$. Thay vào (3) ta được phương trình

$$S^3 - 22S^2 + 159S - 378 = 0 \Leftrightarrow (S-6)(S-7)(S-9) = 0.$$

Với $S = 6$, ta được $T = 9$, $P = 3$. Phương trình $X^3 - 6X^2 + 9X - 3 = 0$ có 3 nghiệm thực, do đó ta nhận giá trị này.

Với $S = 7$, ta được $T = 14$, $P = 7$. Phương trình $X^3 - 7X^2 + 14X - 7 = 0$ có 3 nghiệm thực, do đó ta nhận giá trị này.

Với $S = 9$, ta được $T = 27$, $P = 27$. Phương trình $X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = 0$ có 3 nghiệm thực (là 3, 3, 3), do đó ta nhận giá trị này.

Vậy S có thể nhận các giá trị 0, 6, 7, 9. □

Lưu ý. Có thể giải bài này bằng phép thế lượng giác như sau : trước tiên chứng minh nếu x, y, z là nghiệm thì $0 \le x, y, z \le 4$. Sau đó đặt $x = 4\sin^2\alpha$ và thay vào các phương trình của hệ thì lần lượt tính được $z = 4\sin^2 2\alpha$, $y = 4\sin^2 4\alpha$, $x = 4\sin^2 8\alpha$. Từ đó suy ra $\sin^2\alpha = \sin^2 8\alpha$. Bài toán tiếp theo sẽ được đưa về bài toán tính các tổng lượng giác.

Bài tập

1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3(x+y)}{x-y} = -7 \\ \dfrac{5x-y}{y-x} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 3z = -1. \end{cases}$

2. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2ax + 3y = 5 \\ (a+1)x + y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2. \end{cases}$

3. a) Giải và biện luận theo tham số a hệ phương trình

$$\begin{cases} 6ax + (2-a)y = 3 \\ (a-1)x + ay = 2. \end{cases}$$

b) Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ. Tìm một hệ thức giữa x và y độc lập với a.

4. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a; b)$ sao cho hệ phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ 6x + by = 4. \end{cases}$$

5. Tìm tất cả các giá trị a sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + (a-1)y = 2 + 4a \\ 3|x| + 2y = a - 5 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất. Hãy tìm nghiệm này.

6. *Phương pháp hệ số bất định*

a) Tìm đa thức $P(x)$ có bậc nhỏ nhất sao cho

$$P(-1) = 1, P(1) = 3, P(2) = 5, P(3) = 8.$$

b) Tìm đa thức $P(x)$ có bậc nhỏ nhất sao cho $P(x+1) - P(x) = x^3$ với mọi x. Từ đó suy ra công thức tính tổng $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

c) Tìm các hằng số A, B, C sao cho đẳng thức sau đúng với mọi x :

$$\frac{x^2-1}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

7. *Ma phương*

Các số tự nhiên từ 1 đến 9 được điền vào các ô của hình vuông 3×3 sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng nhau. Hỏi số ở ô vuông nằm chính giữa bằng bao nhiêu ?

8. Ba chiếc xe tải cùng chở hàng. Lượng hàng sẽ được chở hết nếu cả ba xe đều chở mỗi xe 8 chuyến. Lượng hàng cũng được chở hết nếu xe thứ nhất chở 4 chuyến, xe thứ hai chở 2 chuyến và xe thứ ba chở 16 chuyến. Nếu như xe thứ nhất và xe thứ ba chở tương ứng 6 và 12 chuyến thì xe thứ hai phải chở mấy chuyến để chuyển hết số hàng ?

9. *Bài toán cổ*. Hãy giải bài toán dân gian sau

Em đi chợ phiên
Anh gửi một tiền
Cam, thanh yên, quýt
Không nhiều thì ít
Mua đủ một trăm
Cam ba đồng một
Quýt một đồng năm
Thanh yên tươi tốt
Năm đồng một trái.

Hỏi mỗi thứ mua bao nhiêu trái, biết rằng một tiền là 60 đồng?

10. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + y^2 = 149. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 - 3xy - y^2 - y = 1. \end{cases}$

11. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4x + 3y. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 \\ 9y^2 + 11xy - 8x^2 = 6. \end{cases}$

12. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ y^2 - 3y = 2x. \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 55 \\ xy = 24. \end{cases}$

13. Tìm điều kiện đối với m để hệ sau có nghiệm (x, y)

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = m \\ x^2 + xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

14. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 + m. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 0$.

b) Với những giá trị nào của m thì hệ có nghiệm ?

15. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 9. \end{cases}$$

16. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+y+xy=a \\ x^2y+xy^2=3a-8. \end{cases}$$

17. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} xy+x^2=m(y-1) \\ xy+y^2=m(x-1). \end{cases}$$

18. Cho a, b là các số thực dương cho trước, tìm tất cả các cặp số dương x, y thoả mãn phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2+b^2 \\ x^3+y^3=a^3+b^3. \end{cases}$$

19. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^9+y^9=1. \end{cases}$$

20. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40 \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$$

21. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3+y^2x+3x-6y=0 \\ x^2+xy=3. \end{cases}$$

22. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0. \end{cases}$$

23. Biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + |y - 3| = m. \end{cases}$$

24. Tìm $ax^5 + by^5$ nếu các số thực a, b, x, y thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 7 \\ ax^3 + by^3 = 16 \\ ax^4 + by^4 = 42. \end{cases}$$

25. Cho biết hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 15 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 35 \end{cases}$$

có một bộ nghiệm (x, y, z) thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 < 10$. Hãy tính $x^5 + y^5 + z^5$.

26. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2 \\ x + y + 2z = 4(a^2 + 1) \\ z^2 - xy = a^2. \end{cases}$$

27. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = y + 1 \\ y^2 = z + 1 \\ z^2 = x + 1. \end{cases}$$

28. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 2 - y^2 \\ y = 2 - z^2 \\ z = 2 - x^2. \end{cases}$$

29. Cho a, b, c là các số thực dương không đồng thời bằng nhau. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^2 - zx = b \\ z^2 - xy = c. \end{cases}$$

30. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a. \end{cases}$$

31. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91 \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

32. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ y^2 + yz + z^2 = 28 \\ z^2 + zx + x^2 = 21. \end{cases}$$

33. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = -24 \\ xz = yt \\ x - y + z + t = 0. \end{cases}$$

34. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + yz = 4 \\ y^2 + zx = 4 \\ z^2 + xy = 10. \end{cases}$$

35. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16. \end{cases}$$

36. *Tìm cực trị bằng cách đưa về điều kiện có nghiệm của một hệ*

Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện

$$x + y + z = 5, x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

a) Chứng minh rằng $1 \leq x, y, z \leq \frac{7}{3}$;

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tích xyz.

37. *Tính toán hình học bằng cách lập hệ phương trình*

Cho tứ giác $ABCD$ có AB vuông góc với CD và $AB = 2$, $BC = 13$, $CD = 8$, $DA = 5$. Hãy tìm diện tích tứ giác.

38. Có hai người A và B xuất phát cùng một lúc đi ngược chiều nhau từ các thành phố M và N. Khi họ gặp nhau, người ta nhận thấy rằng A đã đi nhiều hơn B 6 km. Nếu mỗi người tiếp tục đi theo hướng cũ với cùng vận tốc thì A sẽ đến N sau 4,5 giờ, còn B đến M sau 8 giờ tính từ thời điểm họ gặp nhau. Hãy xác định khoảng cách MN.

§3. MỘT SỐ DẠNG HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Hệ bất phương trình một ẩn

Hệ bất phương trình một ẩn thường xuất hiện khi chúng ta giải các bất phương trình vô tỉ, bất phương trình có dấu giá trị tuyệt đối hoặc bất phương trình có chứa lôgarit. Hệ bất phương trình một ẩn cũng có thể xuất hiện trong các bài toán tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc một khoảng hay một đoạn nào đó. Cách giải hệ bất phương trình một ẩn là giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy phần giao của các tập nghiệm thu được.

Ví dụ 1. Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3x - 5 \le 0 \\ x^2 - 3x + 2 \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} < 0. \end{cases}$$

Giải. Giải lần lượt từng bất phương trình của hệ, ta được

Bất phương trình thứ nhất có tập nghiệm là $S_1 = (-\infty; \frac{5}{3}]$;

Bất phương trình thứ hai có tập nghiệm là $S_2 = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$;

Bất phương trình thứ ba có tập nghiệm là $S_3 = (-1; 3)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (-1; 1].$$

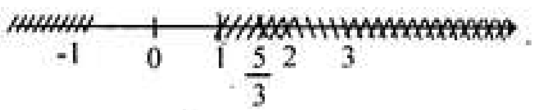
Ta cũng có thể trình bày lời giải ví dụ trên như sau

$$\begin{cases} 3x - 5 \le 0 \\ x^2 - 3x + 2 \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{3} \\ x \le 1 \vee x \ge 2 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le 1.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là

$$S = (-1; 1].$$

Chú ý: Để dễ xác định tập nghiệm S, ta biểu diễn các tập nghiệm trên trục số bằng cách gạch đi các điểm (phần) không thuộc tập nghiệm của từng bất phương trình trong hệ, phần còn lại sẽ biểu diễn tập nghiệm cần tìm (hình 5.4).



Hình 5.4

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$x^2 + \sqrt{3 - x} \ge 3.$$

Giải. Ta biến đổi tương đương bất phương trình đã cho

$$x^2+\sqrt{3-x}\ge 3 \Leftrightarrow \begin{cases}3-x\ge 0\\ 3-x^2\le 0\end{cases} \vee \begin{cases}3-x^2\ge 0\\ 3-x\ge (3-x^2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\le -\sqrt{3} \vee \sqrt{3}\le x\le 3 \vee \begin{cases}(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)\ge 0\\ (x-2)(x+1)(x^2+x-3)\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\le -\sqrt{3} \vee \sqrt{3}\le x\le 3 \vee -\sqrt{3}\le x\le -1 \vee \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\le x\le \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x\le -1 \vee \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\le x\le 3.$$

Ví dụ 3. Cho phương trình $2x^2-2mx+m^2-1=0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm x thuộc $[-1; 1]$.

Giải. Đặt $f(x)=2x^2-2mx+m^2-1$. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thuộc $[-1; 1]$ khi và chỉ khi

i) hoặc $f(-1)f(1)\le 0$;

ii) hoặc $af(-1)>0$, $af(1)>0$, $\Delta\ge 0$, $-1<\dfrac{S}{2}<1$.

Điều kiện i) tương đương với $(m^2+2m+1)(m^2-2m+1)\le 0 \Leftrightarrow m=-1 \vee m=1$.

Điều kiện ii) tương đương với hệ bất phương trình theo m:

$$\begin{cases}2(m^2+2m+1)>0\\ 2(m^2-2m+1)>0\\ 4m^2-8(m^2-1)\ge 0\\ -1<\dfrac{m}{2}<1.\end{cases}$$

Giải hệ này bằng cách giải từng bất phương trình rồi kết hợp lại, ta được

$$-\sqrt{2}\le m\le \sqrt{2},\ m\ne \pm 1.$$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta suy ra tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm x thuộc $[-1; 1]$ là $m\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax + by + c < 0,$$

$$ax + by + c > 0,$$

$$ax + by + c \leq 0,$$

$$ax + by + c \geq 0,$$

trong đó a, b, c là những số cho trước sao cho $a^2 + b^2 \neq 0$; x, y là các ẩn.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ gọi là một nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \leq 0$ và $ax + by + c \geq 0$ được định nghĩa tương tự.

Như vậy, trong mặt phẳng toạ độ, mỗi nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi một điểm và tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một tập hợp điểm. Ta gọi tập hợp điểm ấy là ***miền nghiệm*** của bất phương trình.

Định lí dưới đây cho chúng ta thấy miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một nửa mặt phẳng.

Định lí

> *Trong mặt phẳng toạ độ, đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ (d)) gồm các điểm thoả mãn bất phương trình $ax + by + c > 0$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ (d)) gồm các điểm có toạ độ thoả mãn bất phương trình $ax + by + c < 0$.*

Từ định lí, ta suy ra

Nếu $(x_0 ; y_0)$ là một nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$ (hay $ax + by + c < 0$) thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm $M(x_0 ; y_0)$ chính là miền nghiệm của bất phương trình ấy.

Vậy để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$, ta làm như sau :

- *Vẽ đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$.*

- *Xét một điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên (d).*

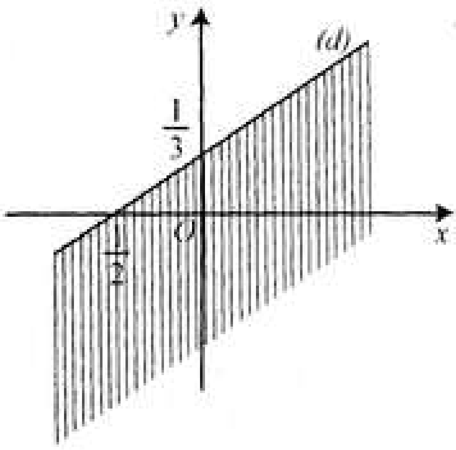
- *Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.*

- *Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.*

Chú ý. Đối với các bất phương trình dạng $ax + by + c \le 0$ hoặc $ax + by + c \ge 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

Ví dụ 4. Xác định miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3y + 1 \le 0$.

Giải. Trên mặt phẳng toạ độ, đường thẳng $(d): 2x - 3y + 1 = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng, chọn một điểm M bất kì không thuộc đường thẳng, chẳng hạn $M(0; 0)$. Ta thấy $(0; 0)$ không phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ (d) không chứa điểm $M(0; 0)$. (Trên hình 5.5, miền nghiệm là nửa mặt phẳng không bị gạch).



Hình 5.5

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Dưới đây là một ví dụ về *hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*

$$(\text{I}) \quad \begin{cases} 3x - y + 3 > 0 \\ -2x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 > 0. \end{cases}$$

Trong mặt phẳng toạ độ, ta gọi tập hợp các điểm có toạ độ thoả mãn mọi bất phương trình trong hệ là *miền nghiệm của hệ*. Vậy miền nghiệm của hệ là giao của các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:

- *Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ miền còn lại.*

- *Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng toạ độ, miền còn lại không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.*

Ví dụ 5. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I)

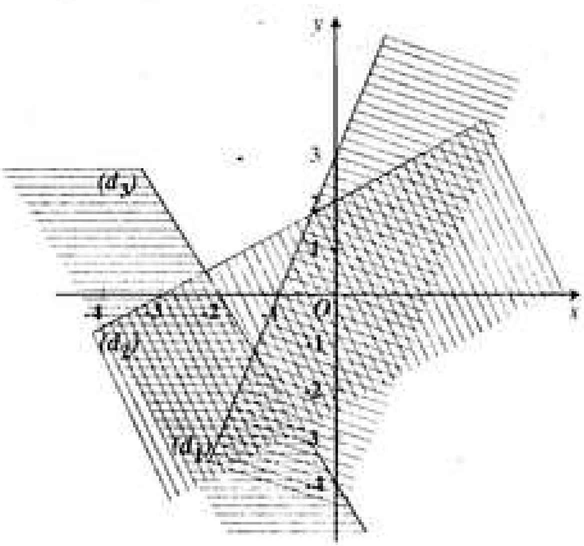
Giải. Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng

$(d_1) : 3x - y + 3 = 0;$

$(d_2) : -2x + 3y - 6 = 0;$

$(d_3) : 2x + y + 4 = 0.$

Thử trực tiếp ta thấy (0; 0) là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa là gốc toạ độ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình của hệ (I). Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch chéo trên hình 5.6 (không kể biên) là miền nghiệm của hệ (I). □



Hình 5.6

Một ví dụ áp dụng vào bài toán kinh tế

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến *Quy hoạch tuyến tính*. Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế. Sau đây là một ví dụ đơn giản.

Bài toán

Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140kg chất *A* và 9kg chất *B*. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20kg chất *A* và 0,6 kg chất *B*. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10kg chất *A* và 1,5kg chất *B*. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II ?

Phân tích bài toán. Nếu sử dụng x tấn nguyên liệu loại I và y tấn nguyên liệu loại II thì theo giả thiết, có thể chiết xuất được $(20x + 10y)$ kg chất A và $(0,6x + 1,5y)$ kg chất B. Theo giả thiết, x, y phải thoả mãn các điều kiện:

$$0 \le x \le 10 \text{ và } 0 \le y \le 9;$$

$$20x + 10y \ge 140, \text{ hay } 2x + y \ge 14;$$

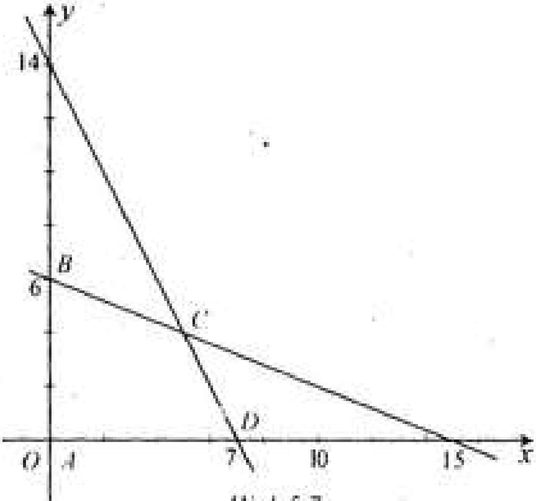
$$0,6x + 1,5 \ge 9, \text{ hay } 2x + 5y \ge 30.$$

Tổng số tiền mua nguyên liệu là $T(x;y) = 4x + 3y$.

Bài toán đã cho trở thành: Tìm các số x và y thoả mãn hệ bất phương trình

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30. \end{cases}$$

sao cho $T(x; y) = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.



Hình 5.7

Bài toán này dẫn đến hai bài toán nhỏ sau:

Bài toán 1. Xác định tập hợp (S) các điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn hệ (II).

Bài toán 2. Trong tất cả các điểm thuộc (S), tìm điểm $(x; y)$ sao cho $T(x;y)$ có giá trị nhỏ nhất.

* Việc giải bài toán 1 chính là việc xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) mà ta đã lập được. Thực hiện cách làm như trên, ta được miền nghiệm (S) của hệ (II) là miền tứ giác $ABCD$ trên hình 5.7 (kể cả biên).

* Để giải bài toán 2, ta thừa nhận rằng biểu thức $T(x ; y)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị ấy đạt được tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$ (xem bài tập 44). Bằng cách tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D rồi so sánh các giá trị tương ứng của $T(x; y)$, ta được $T(5; 4) = 32$ là giá trị nhỏ nhất.

Vậy để chi phí nguyên liệu ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II (khi đó chi phí tổng cộng là 32 triệu đồng). □

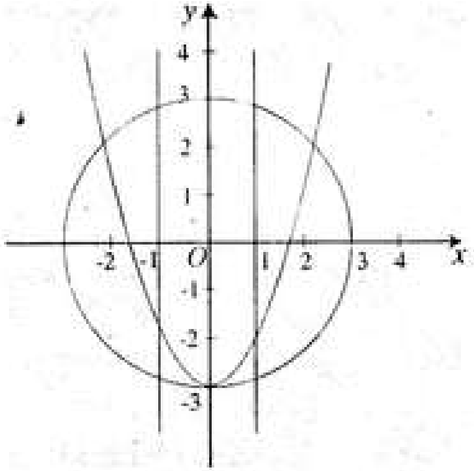
3. Một số dạng hệ bất phương trình khác

Phương pháp hình học trình bày ở phần bất phương trình bậc nhất hai ẩn cũng có thể áp dụng để biểu diễn nghiệm của bất phương trình hai ẩn bất kì dạng $F(x, y) < 0$, $F(x, y) > 0$, $F(x, y) \leq 0$, $F(x, y) \geq 0$, trong đó $F(x, y)$ là một hàm hai ẩn bất kì. Phương pháp chung là vẽ đồ thị của đường cong $F(x, y) = 0$, sau đó xét dấu của các miền mà đường cong này chia mặt phẳng bằng cách xét dấu của $F(x, y)$ tại các điểm thuộc các miền tương ứng.

Ví dụ 6. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y \geq x^2 - 3 \\ |x| \leq 1. \end{cases}$$

Giải. $x^2 + y^2 - 9 = 0$ là đường tròn tâm $(0 ; 0)$ bán kính 3, $y - x^2 + 3 = 0$ là một parabol còn $|x| = 1$ là cặp đường thẳng song song với trục tung $x = -1$, $x = 1$. Dễ thấy $(0; 0)$ là nghiệm của tất cả ba bất phương trình của hệ, nghĩa là gốc toạ độ thuộc vào miền nghiệm của cả ba bất phương trình (chú ý $|x| = 1$ chia mặt phẳng thành 3 miền, trong đó chỉ có 1 miền là nghiệm của bất phương trình $|x| \leq 1$). Sau khi tô màu các miền không thích hợp, miền còn lại không bị tô màu trên hình 5.8 (kể cả biên) là nghiệm của hệ.



Hình 5.8

Ví dụ 7. Biểu diễn trên mặt phẳng tất cả các điểm $(x; y)$ thoả mãn bất phương trình $|x + y| + |x - y| \le 4$.

Giải. Để phá dấu giá trị tuyệt đối, ta cần xét dấu của $x + y$ và $x - y$. Vì thế, sẽ có tất cả 4 trường hợp và miền nghiệm của bất phương trình đề bài là hợp miền nghiệm của 4 hệ bất phương trình dưới đây:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\\ 2x\le 4\end{cases}\qquad \text{(II)}\ \begin{cases} x+y\ge 0\\ x-y\le 0\\ 2y\le 4\end{cases}$$

$$\text{(III)}\ \begin{cases} x+y\le 0\\ x-y\ge 0\\ -2y\le 4\end{cases}\qquad \text{(IV)}\ \begin{cases} x+y\le 0\\ x-y\le 0\\ -2x\le 4.\end{cases}$$

Giải các hệ bất phương trình này theo phương pháp đã trình bày ở mục 2 rồi kết hợp lại, ta tìm được miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền bên trong của hình vuông $ABCD$ với $A(2 ; 2)$, $B(2 ; -2)$, $C(-2 ; -2)$, $D(-2 ; 2)$ kể cả biên. □

Hệ bất phương trình hai ẩn có những ứng dụng quan trọng trong các bài toán cực trị hai biến với những điều kiện ràng buộc. Ngoài ra, chúng còn được sử dụng để giải một số bài toán biện luận điều kiện có nghiệm của phương trình. Dưới đây chúng ta xét một ví dụ như vậy.

Ví dụ 8. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình

$$x^2 + \sqrt{a - x} = a.$$

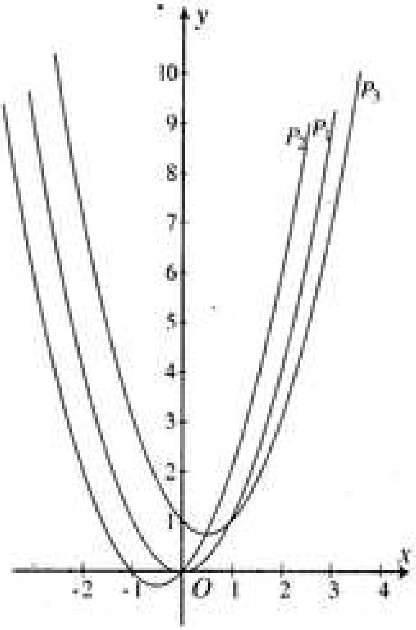
Giải

Ta biến đổi tương đương phương trình đã cho như sau

$$x^2+\sqrt{a-x}=a \Leftrightarrow \begin{cases} a-x^2\ge 0\\ a-x=(a-x^2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-x^2\ge 0\\ (x^2+x-a)(x^2-x+1-a)=0.\end{cases}$$

Xét mặt phẳng toạ độ Oxy trong đó trục Oy đại diện cho tham số a. Miền nghiệm của bất phương trình $a - x^2 \ge 0$ là miền trên của parabol $y = x^2$ (P_1) còn nghiệm của phương trình $(x^2 + x - a)(x^2 - x + 1 - a) = 0$ là hợp của hai parabol $y = x^2 + x$ (P_2) và $y = x^2 - x + 1$ (P_3) (xem hình 5.9)



Hình 5.9

Như vậy, với mỗi tham số a, số nghiệm của phương trình đề bài bằng với số giao điểm của đường thẳng $y = a$ với phần hợp của hai parabol (P_2) và (P_3) nằm ở phần trên của parabol (P_1). Từ đây, sau khi tính toạ độ các đỉnh parabol và các giao điểm của các parabol, ta dễ dàng rút ra các kết luận sau:

– Nếu $a < 0$: phương trình vô nghiệm;

– Nếu $0 \le a \le \dfrac{3}{4}$: phương trình có 1 nghiệm;

– Nếu $\dfrac{3}{4} < a \le 1$: phương trình có 3 nghiệm;

– Nếu $a > 1$: Phương trình có 2 nghiệm.

Bài tập

39. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 0 < 2x + 3 < 1 \\ x^2 > 2x + 3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0 < x + 4 < 2 \\ \dfrac{2x-1}{3+x} > 1 \\ (2x-1)(x+3) > 0. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1) + 16 \\ 4(2+x) < 3x + 8. \end{cases}$

40. Giải các bất phương trình sau:

a) $|2x-3|+|3x+5|>4x+8$ b) $\sqrt{2x-x^2}<5-x$

c) $x^2 \geq x\left(2+\sqrt{12-2x-x^2}\right)$.

41. Tìm tất cả các giá trị của tham số α sao cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2+2x+\alpha \leq 0 \\ x^2-4x-6\alpha \leq 0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

42. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho phương trình $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ có hai nghiệm và cả hai nghiệm đều lớn hơn 3.

43. Với giá trị nào của a thì các nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$ nằm giữa các nghiệm của phương trình $x^2 - 2(a+1)x + a(a-1) = 0$?

44. Nêu phương pháp tổng quát tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức $P(x; y) = ax + by$ $(b \neq 0)$ trên một miền đa giác phẳng lồi (kể cả biên) trong hệ toạ độ Oxy.

45. Tìm giá trị lớn nhất của $P(x; y) = 5x + 6y$ với (x, y) là các số thực thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x+y \leq 10 \\ x-y \geq 3 \\ 5x+4y \leq 35 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

46. Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Biết rằng một máy không thể sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm; máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 một ngày chỉ làm việc không quá 4 giờ.

Giả sử xí phiệp sản xuất trong một ngày được x (tấn) sản phẩm I và y (tấn) sản phẩm II.

a) Viết các phương trình biểu thị các điều kiện bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm (S) của hệ đó.

b) Gọi T (triệu đồng) là số tiền lãi mỗi ngày của xí nghiệp. Hãy biểu diễn T theo x, y.

c) Ở câu a) ta thấy (S) là một miền đa giác. Biết rằng T có giá trị lớn nhất tại $(x_0 ; y_0)$ với $(x_0 ; y_0)$ là toạ độ một trong các đỉnh của (S).

Hãy đặt kế hoạch sản xuất của xí nghiệp sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

47. Một người thợ mộc làm những chiếc bàn và những chiếc ghế. Mỗi một chiếc bàn khi bán lãi 150 nghìn đồng. Mỗi một chiếc ghế khi bán lãi 50 nghìn đồng. Người thợ mộc có thể làm 40 giờ/tuần và tốn 6 giờ để làm một cái bàn, 3 giờ để làm một cái ghế. Khách hàng yêu cầu người thợ mộc làm số ghế ít nhất là gấp ba lần số bàn. Một cái bàn chiếm chỗ bằng 4 cái ghế và ta có phòng để được nhiều nhất 4 cái bàn/tuần.

Hãy lập phương án cho người thợ mộc để số lãi thu được là lớn nhất.

48. Biểu diễn miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x+3y<13 \\ 4x-2y<3 \\ -x+2y>-1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \\ 1 \le x+y \le 3. \end{cases}$ c) $2 \le |x| + |y| \le 4$.

49. Biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ tất cả các điểm $(x; y)$ thoả mãn bất phương trình kép

$$4 \le x^2 + y^2 \le 2(|x| + |y|).$$

Chuyên đề 1

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

Khi chứng minh các bất đẳng thức, ta thường sử dụng một số bất đẳng thức cổ điển : bất đẳng thức A-G, bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Chebyshev, bất đẳng thức Holder, bất đẳng thức Jensen và bất đẳng thức hoán vị. Bất đẳng thức A-G và bất đẳng thức Cauchy có cách phát biểu đơn giản, dễ hình dung và được sử dụng thường xuyên nhất nên đã được giới thiệu trong §3, §4, §5 chương III. Bất đẳng thức Jensen cũng có phát biểu rất rõ ràng, dễ hiểu, nhưng việc kiểm tra điều kiện sử dụng bất đẳng thức Jensen lại đòi hỏi học sinh phải có những kiến thức đơn giản về phép toán đạo hàm mà các em học sinh lớp 10 chưa được học, vì vậy chưa thể giới thiệu ngay trong chuyên đề này. Các bất đẳng thức cổ điển còn lại có phát biểu phức tạp và khó hình dung hơn nhưng chỉ đòi hỏi các kiến thức toán trung học cơ sở và sẽ được bổ sung trong chuyên đề này.

§1. BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV[1)]

Xuất phát từ đẳng thức hiển nhiên

$$2\left(a_1x_1+a_2x_2\right)=\left(a_1+a_2\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(a_1-a_2\right)\left(x_1-x_2\right),$$

ta thấy :

- Nếu $\left(a_1-a_2\right)\left(x_1-x_2\right)\geq 0$, tức là nếu $\begin{cases}a_1\leq a_2\\x_1\leq x_2\end{cases}$ hoặc nếu $\begin{cases}a_1\geq a_2\\x_1\geq x_2\end{cases}$ thì

$$2\left(a_1x_1+a_2x_2\right)\geq\left(a_1+a_2\right)\left(x_1+x_2\right).$$

- Nếu $\left(a_1-a_2\right)\left(x_1-x_2\right)\leq 0$, tức là nếu $\begin{cases}a_1\leq a_2\\x_1\geq x_2\end{cases}$ hoặc nếu $\begin{cases}a_1\geq a_2\\x_1\leq x_2\end{cases}$ thì

$$2\left(a_1x_1+a_2x_2\right)\leq\left(a_1+a_2\right)\left(x_1+x_2\right).$$

[1)] Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) - nhà toán học Nga.

Như vậy, nếu a_1, a_2 và x_1, x_2 là hai dãy số đơn điệu cùng chiều (cùng tăng hoặc cùng giảm) thì $2(a_1x_1 + a_2x_2) \geq (a_1 + a_2)(x_1 + x_2)$. Nếu hai dãy đã cho là hai dãy đơn điệu ngược chiều thì ta có bất đẳng thức tương tự nhưng với chiều ngược lại.

Tổng quát hơn, ta cũng có:

Định lí (*Bất đẳng thức Chebyshev*):

> *Cho hai dãy số* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *và* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.
> *Nếu hai dãy số đã cho đơn điệu cùng chiều (cùng tăng hoặc cùng giảm) thì*
> $n(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$.
> *Nếu hai dãy số đã cho là hai dãy đơn điệu (tăng, giảm) ngược chiều thì*
> $n(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n) \leq (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$.

Chứng minh. Vì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = a_1\sum_{j=1}^{n} x_j + a_2\sum_{j=1}^{n} x_j + \ldots + a_n\sum_{j=1}^{n} x_j$$

nên

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ix_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) =$$

$$= \left(na_1x_1 - a_1\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + \left(na_2x_2 - a_2\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + \ldots + \left(na_nx_n - a_n\sum_{j=1}^{n} x_j\right)$$

$$= \sum_{j=2}^{n} a_1(x_1 - x_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} a_2(x_2 - x_j) + \ldots + \sum_{j=1}^{n-1} a_n(x_n - x_j)$$

$$= \sum_{j=2}^{n} (a_1 - a_j)(x_1 - x_j) + \sum_{j=3}^{n} (a_2 - a_j)(x_2 - x_j) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)(x_{n-1} - x_n)$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (a_i - a_j)(x_i - x_j).$$

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hai dãy đơn điệu cùng chiều (ngược chiều) thì tất cả các số hạng của vế phải đều không âm (không dương), do đó suy ra đpcm. □

Nếu định nghĩa tích của hai dãy $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ và $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ là dãy $a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, ..., a_nx_n$ và gọi $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$ là trung bình cộng của dãy $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ thì có thể phát biểu bất đẳng thức Chebyshev dưới dạng dễ nhớ như sau: Trung bình cộng của tích hai dãy đơn điệu cùng chiều không nhỏ hơn tích các trung bình cộng của hai dãy đó:

$$\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}.$$

Trung bình cộng của tích hai dãy đơn điệu ngược chiều không lớn hơn tích các trung bình cộng của hai dãy đó.

Bất đẳng thức Chebyshev có những ứng dụng rất thú vị. Các bất đẳng thức thường có cấu trúc đối xứng với các biến nên việc sắp xếp lại các biến luôn có thể thực hiện được. Vì vậy, trước khi sử dụng bất đẳng thức Chebyshev, ta cần tiến hành sắp xếp lại các biến mà không làm mất tính tổng quát của bài toán. Khả năng áp dụng bất đẳng thức Chebyshev dễ nhận ra nhất là khi trong bất đẳng thức cần chứng minh có tổng các số hạng của tích 2 dãy đơn điệu.

Ta có thể dễ dàng tạo ra các bất đẳng thức mới từ bất đẳng thức Chebyshev như sau: Chọn 2 hàm số đơn điệu $f(x), g(x)$ xác định trên K, $K \subset \mathbb{R}$. Khi đó với $\forall x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in K$, ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right) \text{(nếu } f, g \text{ đơn điệu cùng chiều);}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right) \text{(nếu } f, g \text{ đơn điệu ngược chiều).}$$

Chẳng hạn, hai hàm số $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ đơn điệu ngược chiều trên $K = (0; +\infty)$ nên ta có

$$\forall a, b, c > 0, \frac{a^3}{a^2 + 1} + \frac{b^3}{b^2 + 1} + \frac{c^3}{c^2 + 1} \leq \frac{1}{3}\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1}\right).$$

Một ví dụ khác: Hai hàm số $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{1 - x}$ đơn điệu tăng trong khoảng $K = (0; 1)$ nên ta có

$$\forall a,b,c \in (0;1), \frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c} \geq \frac{1}{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\right).$$

Rất dễ nhận ra những bất đẳng thức này được chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Chebyshev, nhưng khi tiếp tục đánh giá vế phải của chúng nhờ các bất đẳng thức cổ điển khác như bất đẳng thức A-G, bất đẳng thức Cauchy,... hoặc cấu trúc của bất đẳng thức Chebyshev bị dấu đi bởi những đẳng thức điều kiện bổ sung thì sẽ khó nhận ra mối liên hệ trực tiếp với bất đẳng thức Chebyshev. Chẳng hạn, áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geq \frac{9}{3-(a+b+c)}$, do đó ta cũng có

$$\forall a,b,c \in (0;1),\ \frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c} \geq \frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{3-(a+b+c)}.$$

Bổ sung điều kiện $a+b+c=1$ ta được bất đẳng thức mới : với mọi a,b,c dương và có tổng bằng 1, ta luôn có

$$\frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c} \geq \frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{2}.$$

Các ví dụ rút ra từ các kì thi MO sau đây sẽ minh hoạ rõ phương pháp sử dụng bất đẳng thức Chebyshev.

Ví dụ 1 *(Balkan MO)*. Cho n số dương $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{2-x_1}+\frac{x_2}{2-x_2}+\frac{x_3}{2-x_3}+\ldots+\frac{x_n}{2-x_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Chứng minh. Vì bất đẳng thức cần chứng minh đối xứng đối với tất cả các biến nên không mất tổng quát, ta có thể giả thiết $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ được sắp theo thứ tự tăng.

Vì các số đã cho dương và có tổng bằng 1 nên dãy $2-x_1, 2-x_2, 2-x_3, \ldots, 2-x_n$ là dãy giảm các số dương, do đó dãy $\frac{1}{2-x_1}, \frac{1}{2-x_2}, \frac{1}{2-x_3}, \ldots, \frac{1}{2-x_n}$ là dãy tăng.

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy tăng và sử dụng giả thiết $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, ta được

$$n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{2-x_i}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}\geq\frac{n^2}{2n-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}=\frac{n^2}{2n-1}.$$

Do đó $n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{2-x_i}\right)\geq\frac{n^2}{2n-1}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{2-x_i}\geq\frac{n}{2n-1}$.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x_1=x_2=x_3=...=x_n=\frac{1}{n}$.

Ví dụ 2 (*China MO*). Cho n số dương $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\frac{x_3}{\sqrt{1-x_3}}+...+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+...+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Chứng minh. Không mất tổng quát, có thể giả thiết dãy số dương đã cho là dãy tăng, khi đó dãy $\frac{1}{\sqrt{1-x_1}},\frac{1}{\sqrt{1-x_2}},\frac{1}{\sqrt{1-x_3}},...,\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$ cũng là dãy số tăng. Theo bất đẳng thức Chebyshev và giả thiết, ta có

$$n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}.\qquad(1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy thì $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}}$

mà $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\right)^2\leq n\left(\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)=n(n-1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\leq\sqrt{n(n-1)}$ nên suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}}=\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2\leq n.\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=n$ nên $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leq\sqrt{n}$.

Do đó $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=x_3=...=x_n=\frac{1}{n}$.

Trong ví dụ sau đây, nếu sử dụng bất đẳng thức Chebyshev để đánh giá vế trái thì không dẫn đến mối liên hệ với đẳng thức điều kiện, vì vậy trước khi áp dụng Chebyshev, ta cần biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh.

***Ví dụ 3** (CW MO 2005).* Cho 5 số dương a,b,c,d,e thoả mãn điều kiện

$$\sum\frac{1}{4+a}=1 \text{ (tức là } \frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}=1\text{)}.$$

Chứng minh rằng $\sum\frac{a}{4+a^2}\leq 1$.

Chứng minh. Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh bằng cách sử dụng giả thiết $\sum\frac{1}{4+a}=1$, ta được

$$\sum\frac{a}{4+a^2}\leq 1\Leftrightarrow\sum\frac{a}{4+a^2}\leq\sum\frac{1}{4+a}\Leftrightarrow\sum\left(\frac{a}{4+a^2}-\frac{1}{4+a}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{4(a-1)}{\left(4+a^2\right)(4+a)}\leq 0\Leftrightarrow\sum\frac{1-a}{\left(4+a^2\right)(4+a)}\geq 0.$$

Không mất tổng quát, giả sử $a\leq b\leq c\leq d\leq e$. Như vậy ta có hai dãy giảm

$$\frac{1-a}{4+a},\frac{1-b}{4+b},\frac{1-c}{4+c},\frac{1-d}{4+d},\frac{1-e}{4+e}$$

và

$$\frac{1}{4+a^2},\frac{1}{4+b^2},\frac{1}{4+c^2},\frac{1}{4+d^2},\frac{1}{4+e^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta được

$$5\sum\frac{1-a}{\left(4+a^2\right)(4+a)}\ge\left(\sum\frac{1}{4+a^2}\right)\left(\sum\frac{1-a}{4+a}\right)$$

$$\Rightarrow\sum\frac{1-a}{\left(4+a^2\right)(4+a)}\ge\frac{1}{5}\left(\sum\frac{1}{4+a^2}\right)\left(\sum\frac{1-a}{4+a}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\sum\frac{1}{4+a^2}\right)\left(\sum\left(\frac{5}{4+a}-1\right)\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\sum\frac{1}{4+a^2}\right)\left(5\sum\frac{1}{4+a}-5\right)=0 \text{ (do giả thiết } \sum\frac{1}{4+a}=1\text{)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=e=\frac{1}{5}$.

Bài tập

1. Cho n số dương $a_1,a_2,\ldots,a_n$ có tổng bằng n. Chứng minh rằng

$$a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+\ldots+a_n^{n+1}\ge a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n.$$

2. Chứng minh rằng bất đẳng thức $Q_n\ge A_n$ (trung bình toàn phương không bé hơn trung bình cộng) là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Chebyshev.

3. Cho a,b,c,d là bốn số không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\ge\frac{2}{3}.$$

4. Cho a, b, c là ba số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1.$$

5. Cho bốn số dương a,b,c,d thoả mãn điều kiện

$$a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Chứng minh rằng

$$2(a+b+c+d)\ge\sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}+\sqrt{c^2+3}+\sqrt{d^2+1}.$$

6. (Darij Grinberg). Chứng minh rằng với các số dương a,b,c

$$\frac{\sqrt{a+b}}{c}+\frac{\sqrt{b+c}}{a}+\frac{\sqrt{c+a}}{b}\geq\frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

7. Chứng minh rằng với ba số dương a,b,c, luôn có

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geq\frac{3}{2}.$$

8. Cho $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ là n số dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\frac{1}{1+x_3^2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n^2}=1.$$

Chứng minh rằng

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n\geq(n-1)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right).$$

9. Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c, luôn có .

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}.$$

§2. BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER[1)]

Bất đẳng thức Cauchy có một dạng mở rộng cũng hay được dùng trong chứng minh bất đẳng thức, đó là bất đẳng thức Holder. Đây là một bất đẳng thức mạnh nhưng có cách phát biểu hơi cồng kềnh, khó nhìn nhưng thực ra hoàn toàn dễ hiểu, các em học sinh nên cố gắng làm quen và luyện tập vận dụng. Để bớt khó khăn, sau khi phát biểu bất đẳng thức này ở dạng tổng quát, chúng ta sẽ làm quen với những trường hợp riêng hay được sử dụng nhất.

[1)] Otto Holder (1859-1937)- nhà toán học Đức.

Định lí (*Bất đẳng thức Holder*)

> *Với m bộ n số dương*
>
> $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}), (a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{2,n}), \ldots, (a_{m,1}, a_{m,2}, a_{m,3}, \ldots, a_{m,n})$,
>
> *ta có*
>
> $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n} a_{m,j}\right)$
>
> $\geq \left(\sqrt[m]{a_{1,1}.a_{2,1}.a_{3,1}...a_{m,1}} + \sqrt[m]{a_{1,2}.a_{2,2}.a_{3,2}...a_{m,2}} + \ldots + \sqrt[m]{a_{1,n}.a_{2,n}.a_{3,n}...a_{m,n}}\right)^m$.

Nếu sử dụng kí hiệu $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1.x_2...x_n$ thì có thể viết gọn lại bất đẳng thức Holder như sau

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{i,j}}\right)^m.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi m dãy đã cho tương ứng tỉ lệ.

Đúng là cồng kềnh và hơi khó nhìn, nhưng đừng ngại. Trước hết, chú ý đến các số hạng trong dấu ngoặc của vế phải bất đẳng thức, ta thấy $\sqrt[m]{a_{1,1}a_{2,1}...a_{m,1}}$ là trung bình nhân của các số hạng thứ nhất của m bộ số đã cho. Tương tự, $\sqrt[m]{a_{1,2}a_{2,2}...a_{m,2}}$ là trung bình nhân các số hạng thứ hai của m bộ số đã cho,...

Như vậy ta cũng gọi bộ n số $\left(\sqrt[m]{a_{1,1}a_{2,1}...a_{m,1}}, \sqrt[m]{a_{1,2}a_{2,2}...a_{m,2}}, \ldots, \sqrt[m]{a_{1,n}a_{2,n}...a_{m,n}}\right)$ là trung bình nhân của m bộ số đã cho và bất đẳng thức Holder có cách phát biểu dễ nhớ sau đây: Tích các tổng các số hạng của m bộ n số dương sẽ nhỏ đi khi thay các bộ số đã cho bởi trung bình nhân các bộ số đó.

Để làm quen với bất đẳng thức Holder, ta hãy bắt đầu bằng những trường hợp riêng đơn giản nhất.

Trường hợp đơn giản nhất mà không tầm thường là khi $m = n = 2$. Lúc này ta có 2 bộ 2 số (2 cặp số) dương $(a_{1,1}, a_{1,2}); (a_{2,1}, a_{2,2})$. Bất đẳng thức Holder khẳng định rằng

$$(a_{1,1} + a_{1,2})(a_{2,1} + a_{2,2}) \geq \left(\sqrt{a_{1,1}.a_{2,1}} + \sqrt{a_{1,2}.a_{2,2}}\right)^2.$$

Hoặc để tránh căn thức, bất đẳng thức này có thể viết dưới dạng:

$$\left(a_{1.1}^2+a_{1.2}^2\right)\left(a_{2.1}^2+a_{2.2}^2\right)\geq\left(a_{1.1}.a_{2.1}+a_{1.2}.a_{2.2}\right)^2.$$

Nếu không dùng chỉ số thì bất đẳng thức này còn có dạng quen thuộc hơn nhiều:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq(ax+by)^2.$$

Đây chính là bất đẳng thức Cauchy quen thuộc. Tổng quát hơn, bất đẳng thức Cauchy

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2\right)\geq\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n\right)^2$$

là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Holder trong trường hợp 2 bộ n số dương:

$$\left(a_1^2,a_2^2,a_3^2,\ldots,a_n^2\right),\left(x_1^2,x_2^2,x_3^2,\ldots,x_n^2\right).$$

Cũng vậy, với ba cặp số dương $(a,b);(x,y);(\alpha,\beta)$ thì vế trái bất đẳng thức Holder là $(a+b)(x+y)(\alpha+\beta)$ (tích các tổng các số của mỗi cặp), còn vế phải là $\left(\sqrt[3]{ax\alpha}+\sqrt[3]{by\beta}\right)^3$ và ta có

$$(a+b)(x+y)(\alpha+\beta)\geq\left(\sqrt[3]{ax\alpha}+\sqrt[3]{by\beta}\right)^3.$$

Nếu không sử dụng căn thức thì bất đẳng thức Holder cho 3 cặp số dương ($m=3$, $n=2$) có dạng

$$\left(a^3+b^3\right)\left(x^3+y^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3\right)\geq(ax\alpha+by\beta)^3.$$

Tương tự, bất đẳng thức Holder cho 3 bộ 3 số dương $(m=n=3)$ là

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)\geq(ax\alpha+by\beta+cz\gamma)^3$$

hay $$(a+b+c)(x+y+z)(\alpha+\beta+\gamma)\geq\left(\sqrt[3]{ax\alpha}+\sqrt[3]{by\beta}+\sqrt[3]{cz\gamma}\right)^3.$$

Các trường hợp cụ thể này đều rất rõ ràng và dễ hiểu, đặc biệt có thể viết tường minh phép chứng minh mà có thể lặp lại hoàn toàn khi chứng minh bất đẳng thức Holder trong trường hợp tổng quát. Để làm ví dụ, ta chứng minh bất đẳng thức Holder trong trường hợp $m=n=3$.

Ví dụ 1 *(Bất đẳng thức Holder cho 3 bộ 3 số dương).* Giả sử $a,b,c;x,y,z;\alpha,\beta,\gamma$ là những số dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)\geq(ax\alpha+by\beta+cz\gamma)^3.$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức A-G cho 3 số dương ta có

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{\alpha^3}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}\geq\frac{3ax\alpha}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)}}$$

Viết hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại, ta được

$$3\geq\frac{3\left(ax\alpha+by\beta+cz\gamma\right)}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)}\geq\left(ax\alpha+by\beta+cz\gamma\right)$$

hay $\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)\geq\left(ax\alpha+by\beta+cz\gamma\right)^3$

Ví dụ 2. Với n số dương $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$, ta luôn có

$$\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\left(1+a_3\right)\ldots\left(1+a_n\right)\geq\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}\right)^n.$$

Nhận xét: Đây là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Holder áp dụng cho n cặp số dương $\left(1,a_1\right),\left(1,a_2\right),\left(1,a_3\right),\ldots,\left(1,a_n\right)$. Tuy nhiên, cũng có thể chứng minh trực tiếp kết quả này bằng cách áp dụng bất đẳng thức A-G.

Chứng minh. Theo bất đẳng thức A-G, ta có

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\frac{1}{1+a_3}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{\sqrt[n]{\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\left(1+a_3\right)\ldots\left(1+a_n\right)}}$$

và

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\frac{a_3}{1+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{1+a_n}\geq\frac{n\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}}{\sqrt[n]{\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\left(1+a_3\right)\ldots\left(1+a_n\right)}}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên, ta suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3 (*IMO 2001, Pro. A2*). Chứng minh rằng

$$\forall a,b,c>0,\ \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

Chứng minh. Đặt $L=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$.

$$A = a\left(a^2 + 8bc\right) + b\left(b^2 + 8ca\right) + c\left(c^2 + 8ab\right) = a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $L \geq 1$. Áp dụng bất đẳng thức Holder cho 3 bộ 3 số dương, ta có $L.L.A \geq (a+b+c)^3$. Do đó chỉ còn phải chứng minh

$$(a+b+c)^3 \geq A$$

hay
$$(a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

$$\Leftrightarrow c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 \geq 0,$$

bất đẳng thức này đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4 *(Junior Balkan 2000)*. Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương :

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai bộ 3 số dương, ta được

$$\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right)(a+b+c) \geq \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^2$$

và
$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(b+c+a) \geq (a+b+c)^2.$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(a+b+c)^2 \geq \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^2 (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên, ta đã áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 bộ 3 số dương mà cũng có thể coi là áp dụng bất đẳng thức Holder cho 2 bộ 3 số dương. Nếu áp dụng bất đẳng thức Holder cho m bộ 3 số dương thì ta có kết quả tổng quát hơn sau đây.

Ví dụ 5. Với a,b,c là 3 số dương, m là số nguyên dương, ta luôn có

$$\frac{a^{m+1}}{b^m} + \frac{b^{m+1}}{c^m} + \frac{c^{m+1}}{a^m} \geq \frac{a^m}{b^{m-1}} + \frac{b^m}{c^{m-1}} + \frac{c^m}{a^{m-1}}.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Holder cho m bộ 3 số dương, ta có

$$\left(\frac{a^{m+1}}{b^m}+\frac{b^{m+1}}{c^m}+\frac{c^{m+1}}{a^m}\right)^{m-1}(a+b+c)\geq\left(\frac{a^m}{b^{m-1}}+\frac{b^m}{c^{m-1}}+\frac{c^m}{a^{m-1}}\right)^m \quad (1)$$

và

$$\left(\frac{a^m}{b^{m-1}}+\frac{b^m}{c^{m-1}}+\frac{c^m}{a^{m-1}}\right)(b+c+a)^{m-1}\geq(a+b+c)^m$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^m}{b^{m-1}}+\frac{b^m}{c^{m-1}}+\frac{c^m}{a^{m-1}}\right)\geq a+b+c. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\left(\frac{a^{m+1}}{b^m}+\frac{b^{m+1}}{c^m}+\frac{c^{m+1}}{a^m}\right)^{m-1}\geq\left(\frac{a^m}{b^{m-1}}+\frac{b^m}{c^{m-1}}+\frac{c^m}{a^{m-1}}\right)^{m-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^{m+1}}{b^m}+\frac{b^{m+1}}{c^m}+\frac{c^{m+1}}{a^m}\geq\frac{a^m}{b^{m-1}}+\frac{b^m}{c^{m-1}}+\frac{c^m}{a^{m-1}}. \square$$

Ví dụ 6 *(Singapore MO 2002)*. Chứng minh rằng

$$\forall a,b,c>0,\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Holder cho 3 bộ 3 số dương

$$(1,1,1);\left(a^3,b^3,c^3\right);\left(a^3,b^3,c^3\right)$$

ta có $(1+1+1)\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq(1.a.a+1.b.b+1.c.c)^3$

hay $\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3$. $\square$

Bài tập

10. Cho ba số dương a,b,c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}}\geq 1.$$

11. *(Crux).* Với các số thực dương $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ có tổng bằng 1, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f = \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \frac{x_3}{\sqrt{1-x_3}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}.$$

12. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \geq \sqrt{3},$$

trong đó a, b, c là những số dương sao cho các căn thức tồn tại.

13. Chứng minh rằng nếu $n \geq 2$ và $x, y, z \geq 0$ thì

$$\sum_{cyclic} \sqrt[3]{x^3 + nxyz} \leq \sqrt[3]{n+1}.(x+y+z).$$

(kí hiệu $\sum_{cyclic} \sqrt[3]{x^3+nxyz} = \sqrt[3]{x^3+nxyz} + \sqrt[3]{y^3+nxyz} + \sqrt[3]{z^3+nxyz}$, nghĩa là các số hạng của tổng, kể từ số hạng thứ hai trở đi, được suy từ số hạng đầu bằng cách *hoán vị vòng quanh* các chữ cái x, y, z).

14. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$,

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}.$$

15. Cho a, b, c, d là bốn số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\left(a^4+1\right)\left(b^4+1\right)\left(c^4+1\right)\left(d^4+1\right) \geq \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}+d+\frac{1}{d}}{4}\right)^4.$$

16. Cho x, y, z là 3 số dương thay đổi luôn có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f = x^4 + 2y^4 + 3z^4$.

17. Giả sử m, n là hai số nguyên dương tuỳ ý đã cho, $a_1, a_2, ..., a_n$ là n hằng số dương cho trước. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f = a_1x_1^m + a_2x_2^m + ... + a_nx_n^m,$$

trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là n số dương thay đổi luôn có tổng bằng n.

§3. KHAI TRIỂN ABEL[1] VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

Định lí (*Khai triển Abel*)

> *Giả sử* $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ *và* $(y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ *là hai bộ* n *số thực đã cho. Ta có công thức khai triển sau đây*
>
> $$x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = (x_1 - x_2)c_1 + (x_2 - x_3)c_2 + ... + (x_{n-1} - x_n)c_{n-1} + x_nc_n$$
>
> *trong đó* $c_k = \sum_{i=1}^{k} y_i$.

Phép chứng minh *công thức khai triển Abel* nói trên khá hiển nhiên, các bạn chỉ cần khai triển và rút gọn vế phải để được vế trái. Thật lạ lùng là mặc dầu có hình thức cực kì đơn giản như vậy nhưng công thức này lại rất hay được dùng trong đại số, đặc biệt là trong các chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 1. Cho hai dãy số thực $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n);(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$. Chứng minh rằng

$$a_1(x_1 - x_2) + a_2(x_2 - x_3) + a_3(x_3 - x_4) + ... + a_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + a_nx_n$$
$$= a_1x_1 + (a_2 - a_1)x_2 + (a_3 - a_2)x_3 + ... + (a_n - a_{n-1})x_n.$$

Chứng minh. Khai triển và rút gọn hai vế, ta dễ dàng kiểm tra tính đúng đắn của đẳng thức trên, tuy nhiên cũng có thể thấy đẳng thức trên là hệ quả trực tiếp của công thức khai triển Abel. Thật vậy, chú ý rằng

$$a_2 = a_1 + (a_2 - a_1),\ a_3 = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2), ...$$

nên áp dụng khai triển Abel cho hai dãy số

$$(x_1, x_2, x_3, ..., x_n);(y_1 = a_1, y_2 = a_2 - a_1, ..., y_n = a_n - a_{n-1}),$$

ta có ngay kết quả (do $c_k = \sum_{i=1}^{k} y_i = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_i - a_{i-1}) = a_i$). □

Một áp dụng đơn giản khác của khai triển Abel là bất đẳng thức Abel sau đây.

Ví dụ 2 (*Bất đẳng thức Abel*).

Cho hai dãy số thực $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n), (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$, trong đó dãy thứ nhất là một dãy số giảm. Nếu đặt $c_k = y_1 + y_2 + ... + y_k$ và $M = \max_{k=1,2,...,n} c_k$; $m = \min_{k=1,2,...,n} c_k$ thì

[1] Niels Henrik Abel (1802-1829) - nhà toán học Na Uy.

$$mx_1 \le x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \le Mx_1.$$

Chứng minh. Áp dụng công thức khai triển Abel, ta có

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = (x_1 - x_2)c_1 + (x_2 - x_3)c_2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)c_{n-1} + x_nc_n$$

$$\le (x_1 - x_2)M + (x_2 - x_3)M + \dots + (x_{n-1} - x_n)M + x_nM = Mx_1.$$

Tương tự $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \ge mx_1$.

Ví dụ 3. Cho dãy giảm n số dương $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ thoả mãn điều kiện

$$\forall k \le n,\ x_1 + x_2 + \dots + x_k \ge \sqrt{k}.$$

Chứng minh rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Nhận xét: Vế trái bất đẳng thức cần chứng minh là tổng các số hạng của tích hai dãy $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Áp dụng công thức khai triển Abel cho hai dãy này để liên hệ với giả thiết $x_1 + x_2 + \dots + x_k \ge \sqrt{k}$.

Chứng minh. Đặt $a_k = \sqrt{k}$. Theo công thức khai triển Abel, ta có

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 - x_2)x_1 + (x_2 - x_3)(x_1 + x_2) + \dots +$$
$$+ (x_{n-1} - x_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\ge a_1(x_1 - x_2) + a_2(x_2 - x_3) + \dots + a_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + a_nx_n$$

$$= a_1x_1 + (a_2 - a_1)x_2 + (a_3 - a_2)x_3 + \dots + (a_n - a_{n-1})x_n \text{ (ví dụ 1).}$$

Lại áp dụng khai triển Abel, ta có

$$a_1x_1 + (a_2 - a_1)x_2 + (a_3 - a_2)x_3 + \dots + (a_n - a_{n-1})x_n$$
$$= (a_1 - (a_2 - a_1))x_1 + ((a_2 - a_1) - (a_3 - a_2))(x_1 + x_2) + \dots +$$

$$+ ((a_{n-1} - a_{n-2}) - (a_n - a_{n-1}))(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + (a_n - a_{n-1})\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= (2a_1 - a_2)x_1 + (2a_2 - a_1 - a_3)(x_1 + x_2) + \dots +$$
$$+ (2a_{n-1} - a_{n-2} - a_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + (a_n - a_{n-1})(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\geq (2a_1 - a_2) + (2a_2 - a_1 - a_3)a_2 + \ldots + (2a_{n-1} - a_{n-2} - a_n)a_{n-1} + (a_n - a_{n-1})a_n$$

Mặt khác, $(2a_k - a_{k-1} - a_{k+1})a_k = \left[\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) - \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\right]\sqrt{k}$

$$= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}\right)}{\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}.$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)^2 \left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)^2 < 2(k + k - 1).2(k + 1 + k) = 4\left(4k^2 - 1\right) < 16k^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right) < 4k$$

và $\sqrt{k}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}\right) = \dfrac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}} = \dfrac{2\sqrt{k}}{\sqrt{\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}\right)^2}}$

$$> \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{2(k+1+k-1)}} = 1.$$

Suy ra $\dfrac{\sqrt{k}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}\right)}{\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)} > \dfrac{1}{4k} \Rightarrow (2a_k - a_{k-1} - a_{k+1})a_k > \dfrac{1}{4k}$.

Do đó

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > \left(2 - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{4.2} + \frac{1}{4.3} + \ldots + \frac{1}{4.(n-1)} + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\sqrt{n}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

$$> \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

Ví dụ 4 (*Romania MO, Singapore MO*). Chứng minh rằng nếu

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} = 0$$

thì

$$\sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}}\right).$$

Chứng minh. Đặt $a_i = \sqrt{x_i}, c_i = \sqrt{i} - \sqrt{i-1}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\left(a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n\right)^2 \geq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

Chọn n số dương $b_1, b_2, \ldots, b_n$ có tổng các bình phương bằng 1 sao cho

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \text{ (ta tính được } b_i^2 = \frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\text{).}$$

Ta phải chứng minh

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ic_i\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_ic_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\left(c_i - b_i\right) \geq 0.$$

Áp dụng khai triển Abel, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(c_i - b_i\right) = \left(a_1 - a_2\right)\left(c_1 - b_1\right) + \left(a_2 - a_3\right)\left(c_1 + c_2 - b_1 - b_2\right) + \ldots +$$

$$+ \left(a_{n-1} - a_n\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} c_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Chú ý rằng $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ và

$$\sum_{i=1}^{k} c_i - \sum_{i=1}^{k} b_i = \sqrt{k} - \sum_{i=1}^{k} b_i \geq \sqrt{k} - \sqrt{k\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right)} \geq \sqrt{k} - \sqrt{k\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)} = 0$$

nên tổng trên không âm (đpcm). □

Sử dụng khai triển Abel, ta cũng có thể dễ dàng chứng minh bất đẳng thức hoán vị, một bất đẳng thức rất mạnh (bất đẳng thức A-G, bất đẳng thức Chebyshev cũng là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức này).

Ví dụ 5 *(Bất đẳng thức hoán vị).* Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là hai dãy đơn điệu giảm. Nếu $c_1, c_2, \ldots, c_n$ là một hoán vị[1] tuỳ ý của $b_1, b_2, \ldots, b_n$ thì

---

[1] Mỗi cách sắp thứ tự các số hạng của dãy $b_1, b_2, \ldots, b_n$ được gọi là một hoán vị của dãy này. Chẳng hạn, 1,2,3 có 6 hoán vị là $(1,2,3); (1,3,2); (2,1,3); (2,3,1); (3,1,2); (3,2,1)$. Có thể chứng minh được rằng dãy $b_1, b_2, \ldots, b_n$ có $n! = 1.2.3\ldots n$ hoán vị.

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n.$$

Ngoài ra nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là hai dãy đơn điệu ngược chiều thì bất đẳng thức trên đổi chiều.

Chứng minh. Ta chỉ xét trường hợp hai dãy đơn điệu giảm, trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Cần chứng minh bất đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n} a_ic_i \ge 0$.

Ta có $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n} a_ic_i = a_1(b_1 - c_1) + a_2(b_2 - c_2) + ... + a_n(b_n - c_n)$.

Áp dụng công thức khai triển Abel, tổng này được khai triển thành

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2)(b_1 - c_1) &+ (a_2 - a_3)(b_1 + b_2 - c_1 - c_2) + ... + \\ &+ (a_{n-1} - a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} - c_1 - c_2 - ... - c_{n-1}) + \\ &+ a_n(b_1 + b_2 + ... + b_n - c_1 - c_2 - ... - c_n).\end{aligned}$$

Vì $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$ và $c_1, c_2, ..., c_n$ là một hoán vị của $b_1, b_2, ..., b_n$ nên với mọi $k = 1, 2, ..., n$, ta có $b_1 + b_2 + ... + b_k \ge c_1 + c_2 + ... + c_k$;

đặc biệt có $b_1 + b_2 + ... + b_n = c_1 + c_2 + ... + c_n$ do đó tất cả các số hạng trong khai triển trên đều không âm, suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Chú ý:

- Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là hai dãy đơn điệu tăng thì bất đẳng thức hoán vị vẫn đúng. Thật vậy, nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là hai dãy đơn điệu tăng và $c_1, c_2, ..., c_n$ là một hoán vị của $b_1, b_2, ..., b_n$ thì $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ và $b_n, b_{n-1}, ..., b_1$ là hai dãy đơn điệu giảm, do đó, theo bất đẳng thức vừa chứng minh, ta có

$$a_nb_n + a_{n-1}b_{n-1} + ... + a_1b_1 \ge a_nc_n + a_{n-1}c_{n-1} + ... + a_1c_1.$$

- Kết hợp trường hợp hai dãy đơn điệu cùng chiều và trường hợp hai dãy trái chiều, ta có thể phát biểu bất đẳng thức hoán vị như sau: Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là hai dãy đơn điệu cùng chiều và $c_1, c_2, ..., c_n$ là một hoán vị tuỳ ý của $b_1, b_2, ..., b_n$ thì

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n \ge a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + ... + a_1b_n.$$

Các ví dụ sau đây cho thấy hiệu lực của bất đẳng thức hoán vị.

Ví dụ 6 (Bất đẳng thức A-G). Chứng minh rằng nếu n số dương có tích bằng 1 thì tổng của chúng không bé hơn n.

Chứng minh. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số dương đã cho. Vì $a_1a_2...a_n = 1$ nên có thể chọn được n số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ sao cho $a_1 = \frac{x_1}{x_2}, a_2 = \frac{x_2}{x_3}, ..., a_n = \frac{x_n}{x_1}$. Bất đẳng thức cần chứng minh là $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

Không mất tổng quát, có thể giả thiết $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{n-1} \geq x_n$. Áp dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy ngược chiều $x_1, x_2, ..., x_n$ và $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$, ta được

$$x_1.\frac{1}{x_1} + x_2.\frac{1}{x_2} + ... + x_n.\frac{1}{x_n} \leq x_1.\frac{1}{x_2} + x_2.\frac{1}{x_3} + ... + x_n.\frac{1}{x_1}$$

hay $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} \geq n$. □

Ví dụ 7 *(IMO 1978).* Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng $\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Chứng minh. Sắp xếp dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ thành dãy đơn điệu tăng $x_1, x_2, ..., x_n$ thì áp dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy đơn điệu ngược chiều $x_1, x_2, ..., x_n$ và $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{n^2}$, ta được

$$x_1.\frac{1}{1^2} + x_2.\frac{1}{2^2} + ... + x_n.\frac{1}{n^2} \leq a_1.\frac{1}{1^2} + a_2.\frac{1}{2^2} + ... + a_n.\frac{1}{n^2}$$

hay
$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + ... + \frac{x_n}{n^2}.$$

Nhưng $x_1, x_2, ..., x_n$ là dãy đơn điệu tăng các số nguyên dương nên

$$x_i \geq i, (i = 1, 2, ..., n),$$

do đó $\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + ... + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + ... + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. □

Ví dụ 8 (IMO 1984). Giả sử a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

Nhận xét: Điều kiện a,b,c là ba cạnh tam giác được đặc trưng bởi các bất đẳng thức thuần nhất bậc nhất như $a+b-c>0$, còn bất đẳng thức cần chứng minh là thuần nhất bậc 4, cần giảm xuống bậc nhất (để liên kết với giả thiết). Do đó ta biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh bằng cách chia bất đẳng thức đó cho abc.

Chứng minh. Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)}{abc}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-ab}{c}+\frac{b^2-bc}{a}+\frac{c^2-ca}{b}\ge 0.$$

Không mất tổng quát, có thể giả thiết $a\le b\le c$, như vậy $(a-b)(a+b-c)\le 0$ hay $\left(a^2+bc\right)-\left(b^2+ca\right)\le 0\Rightarrow a^2+bc\le b^2+ca$.

Do đó $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ và a^2+bc,b^2+ca,c^2+ab là hai dãy số đơn điệu ngược chiều, vì vậy theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\frac{a^2+bc}{a}+\frac{b^2+ca}{b}+\frac{c^2+ab}{c}\le\frac{a^2+bc}{c}+\frac{b^2+ca}{a}+\frac{c^2+ab}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-ab}{c}+\frac{b^2-bc}{a}+\frac{c^2-ca}{b}\ge 0.$$

Bài tập

18. Cho 6 số dương a,b,c,x,y,z thoả mãn điều kiện

$$\frac{c}{z}\le 1,\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}\le 1,\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\le 1,\ x\le y\le z.$$

Chứng minh rằng $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

19. Cho 2 dãy số dương $a_1,a_2,\dots,a_n$ và $b_1,b_2,\dots,b_n$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n \\ a_1 \ge b_1 \\ a_1a_2 \ge b_1b_2 \\ \dots \\ a_1a_2\dots a_n \ge b_1b_2\dots b_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n \ge b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

20. Cho 2 dãy số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n \\ \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \le \sum_{i=1}^{k} b_i^2, (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} b_i$.

21. Giả sử các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} a_1 \ge \dfrac{a_1 + a_2}{2} \ge \dots \ge \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ b_1 \ge \dfrac{b_1 + b_2}{2} \ge \dots \ge \dfrac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \ge \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}\right)$.

22. *(IMO 1975)*. Cho 2 dãy số đơn điệu tăng $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng nếu $c_1, c_2, \dots, c_n$ là một hoán vị của $b_1, b_2, \dots, b_n$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} (a_i - c_i)^2.$$

23. *(IMO 1983)*. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \le 3abc.$$

24. Chứng minh rằng bất đẳng thức Chebyshev là hệ quả của bất đẳng thức hoán vị.

Chuyên đề 2

MỘT SỐ VẤN ĐỀ CỦA TOÁN TỔ HỢP

§1. NGUYÊN LÍ DIRICHLET

Nguyên lí Dirichlet hay còn gọi là nguyên lí "chuồng và thỏ" có phát biểu rất đơn giản : "Nếu nhốt 3 con thỏ vào 2 cái chuồng thì phải có một chuồng chứa ít nhất 2 con thỏ". Thế nhưng, trái với vẻ bề ngoài đơn giản và gần như hiển nhiên đó, nguyên lí Dirichlet có những ứng dụng rất hiệu quả và sâu sắc trong các chứng minh toán học, đặc biệt là trong các chứng minh về sự tồn tại của một đối tượng thoả mãn những tính chất nào đó.

Dưới đây, chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh nguyên lí Dirichlet ở dạng tổng quát và xem xét một số ứng dụng của nguyên lí Dirichlet trong các bài toán chứng minh.

Nguyên lí Dirichlet

> *Nếu nhốt $n.m + r$ (m, n, r là các số nguyên dương) con thỏ vào n cái chuồng thì phải có ít nhất một chuồng chứa không ít hơn $m + 1$ con thỏ.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại, mỗi chuồng chứa không quá m con thỏ thì tổng số thỏ sẽ không quá $m.n$ con thỏ. Mâu thuẫn với giả thiết là số thỏ bằng $m.n + r$.

Bản thân nguyên lí Dirichlet khá đơn giản và dễ hiểu như vậy, tuy nhiên việc ứng dụng nguyên lí này lại không hề đơn giản. Vấn đề ở đây là phát hiện ra "*chất Dirichlet*" trong bài toán, dạng toán và sau đó xác định đâu là chuồng và đâu là thỏ. Có những trường hợp chuồng và thỏ gần như đã có sẵn, nhưng có những trường hợp chúng ta phải *xây chuồng, tạo thỏ*. Dưới đây ta xem xét *một số dạng áp dụng nguyên lí Dirichlet*.

1. Dạng 1 : Phân chia tập hợp để tạo các n - tập (các chuồng)

Ví dụ 1. Trong hình vuông có cạnh bằng 1 đặt 51 điểm bất kì phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất ba trong số 51 điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Giải. Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con có độ dài cạnh bằng 0,2.

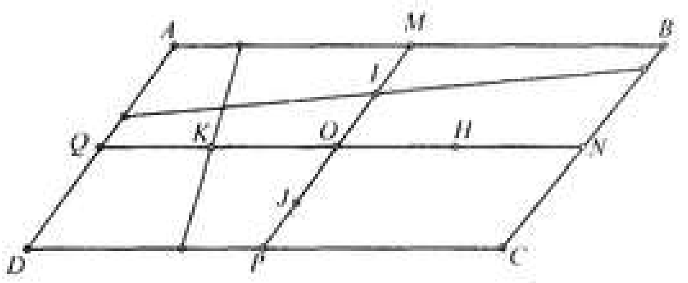
Khi đó tồn tại một hình vuông con chứa ít nhất 3 điểm (giả sử là M, N, P) trong 51 điểm đó (vì $51 = 2.25 + 1$). Giả sử $ABCD$ là hình vuông con đó và I là tâm của nó. Xét hình tròn $(\mathscr{C})$ tâm I, bán kính $R = \frac{1}{7}$. Ta có $IM, IN, IP \le 0.1\sqrt{2} < \frac{1}{7}$.

Vậy M, N, P nằm trong hình tròn $(\mathscr{C})$.

> ***Nhận xét*** *: Nội dung cơ bản của phương pháp là chia một đối tượng lớn thành nhiều đối tượng nhỏ (các đối tượng này như các "chuồng"). Sau đó áp dụng nguyên lí Dirichlet cho các đối tượng nhỏ đó.*

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ và 25 đường thẳng. Mỗi đường thẳng chia $ABCD$ thành hai hình thang với tỉ số diện tích là $\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng trong 25 đường thẳng đó có 7 đường thẳng đồng quy.

Giải. Gọi M, N, P, Q, K, H, I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng như hình vẽ:



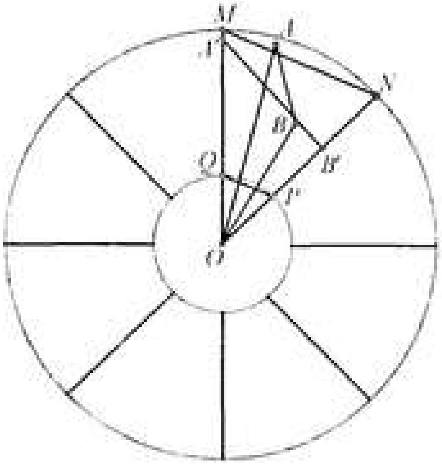
Xét 25 đường thẳng đã cho. Với mỗi đường thẳng đó có một trong hai khả năng sau xảy ra:

- Đường thẳng đó cắt cạnh AB và CD. Khi đó nó phải đi qua K hoặc H.
- Đường thẳng đó cắt cạnh AD và BC. Khi đó nó phải đi qua I hoặc J.

Như vậy sẽ có 7 đường thẳng cùng đi qua một trong bốn điểm I, J, K, H nêu trên (đpcm).

Ví dụ 3. Trong hình tròn ($\mathscr{C}$) tâm O, bán kính $R = 2{,}5$ cho 10 điểm bất kì. Chứng minh rằng có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2.

Giải. Chia hình tròn thành 9 phần như hình vẽ (gồm một hình tròn bán kính 1 ở trong và tám "*hình thang cong*" bằng nhau ở ngoài) :



Theo nguyên lí Dirichlet thì có một phần chứa ít nhất hai điểm (giả sử là A và B) trong 10 điểm đã cho. Xét hai trường hợp :

- Hai điểm A, B nằm trong hình tròn nhỏ : khi đó $AB < 2$.

- Hai điểm A, B nằm trong hoặc trên các cạnh của một trong các "*hình thang cong*" còn lại : Giả sử "*hình thang cong*" đó là $MNPQ$. Khi đó xét hình thang $MNPQ$ có : $QP < 1$; $QM = 1{,}5$; $PN = 1{,}5$; $MN < 2$; $QN < 2$; $PM < 2$. Do đó khoảng cách giữa hai điểm bất kì thuộc hình thang $MNPQ$ và miền trong của nó đều nhỏ hơn 2.

• Nếu A, B thuộc hình thang $MNPQ$ hoặc miền trong của nó thì ta có đpcm.

• Nếu A, B không nằm hoàn toàn trong hình thang thì lấy trên đoạn OM điểm A' sao cho $OA' = OA$, lấy trên đoạn ON điểm B' sao cho $OB' = OB$.

Vì $OA = OA'$, $OB = OB'$ và $\widehat{AOB} \le \widehat{A'OB'}$ nên ta suy ra $AB \le A'B' < 2$.

Vậy trong mọi trường hợp thì $AB < 2$ (đpcm).

2. Dạng 2 : Xây dựng các n - tập theo đối tượng xuất phát

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng cho 2009 điểm. Biết rằng trong 3 điểm bất kì lấy từ các điểm đã cho luôn có hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng có 1005 điểm nằm trong hình tròn bán kính 1.

Giải. Lấy điểm M trong 2009 điểm đó và xét hình tròn $(\mathscr{C})$ có tâm M, bán kính bằng 1.

- Nếu tất cả các điểm đều thuộc $(\mathscr{C})$ thì $(\mathscr{C})$ là hình tròn cần tìm.

- Nếu có điểm N sao cho $MN \geq 1$ thì xét hình tròn $(\mathscr{C}')$ có tâm N, bán kính 1. Khi đó với mọi điểm P trong 2007 điểm còn lại, luôn xảy ra một trong hai khả năng sau: $\left[\begin{array}{l} PM < 1 \Rightarrow P \in (\mathscr{C}) \\ PN < 1 \Rightarrow P \in (\mathscr{C}') \end{array}\right.$ (vì $MN \geq 1$). Từ 2007 điểm này sẽ có ít nhất 1004 điểm cùng thuộc $(\mathscr{C})$ (hoặc $(\mathscr{C}')$). Khi đó hình tròn $(\mathscr{C})$ (hoặc $(\mathscr{C}')$) là hình tròn cần tìm.

> ***Nhận xét*** *: Trong ví dụ trên, việc chọn ra các n - tập được bắt đầu từ việc chọn ra một "đối tượng xuất phát" là điểm M. Từ "đối tượng xuất phát" này, ta lập luận để suy ra các đối tượng (trường hợp) tiếp theo... Đây là một kĩ thuật hay dùng trong các bài toán sử dụng nguyên lí Dirichlet.*

***Ví dụ* 5.** Trong mặt phẳng cho 9 đường thẳng song song nằm ngang và 9 đường thẳng song song nằm dọc. Người ta đánh dấu các giao điểm của các đường thẳng này bởi hai màu xanh (X) và đỏ (Đ). Chứng minh rằng tồn tại 2 đường thẳng nằm ngang và 2 đường thẳng nằm dọc sao cho 4 giao điểm của chúng được tô cùng màu.

Giải. Xét 3 giao điểm đầu của các đường thẳng nằm ngang. Trên mỗi đường thẳng này có 2^3 cách tô màu 3 giao điểm đầu. Có 9 đường thẳng nằm ngang với $2^3 = 8$ cách tô màu nên có hai đường thẳng có cùng cách tô màu 3 điểm đầu tiên. Trên hai đường đó thì trong 3 cách tô màu phải có hai màu trùng nhau, suy ra đpcm. □

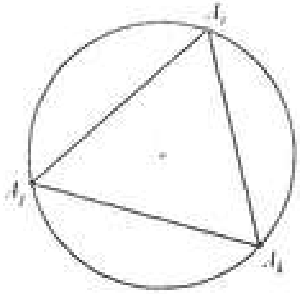
Ví dụ 6. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{1981}$ nội tiếp (O). Chứng minh rằng trong số 64 đỉnh bất kì của đa giác luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

Giải

Nhận xét : Nếu có hai dây cung (được tạo thành từ 1981 đỉnh của đa giác) có độ dài bằng nhau và không có đỉnh chung thì ta sẽ có một hình thang.

Xét độ dài các dây cung A_1A_2, A_1A_3,..., A_1A_{1981}. Ta thấy $A_1A_2 = A_1A_{1981}$, $A_1A_3 = A_1A_{1980}$,..., $A_1A_{991} = A_1A_{992}$ và các độ dài này đôi một khác nhau. Vậy có 990 độ dài các dây cung có một đỉnh là A_1 và đó cũng là tất cả các độ dài của các dây cung được tạo thành từ 1981 điểm đã cho.

Trong 64 đỉnh sẽ có $C_{64}^2 = 2016$ dây cung. Vì có 990 độ dài suy ra có ít nhất 3 dây cung có cùng độ dài. Nếu các dây cung này đều đôi một có đỉnh chung thì sẽ tạo thành một tam giác đều (vì chỉ có đúng 2 dây cung chung đỉnh có cùng độ dài) như hình vẽ:



Khi đó đường tròn sẽ được chia ra thành 3 cung bằng nhau, suy ra số đỉnh của đa giác phải là số nguyên lần của 3, điều này là vô lí vì 1981 không chia hết cho 3. Vậy trong 3 dây cung có cùng độ dài này có ít nhất hai dây cung không có chung đỉnh, hai dây cung đó tạo thành một hình thang cân có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác ban đầu.

3. Dạng 3 : Xây dựng các dãy số

Ví dụ 7. Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng 19791979...197900...0 chia hết cho 2000.

Giải. Xét dãy số: 1979, 19791979,..., $\underbrace{19791979...1979}_{2001 \text{ số } 1979}$. Khi chia các số hạng của dãy này cho 2000, sẽ có hai số hạng có cùng số dư và hiệu của chúng có dạng 19791979...19790...0 chia hết cho 2000.

> ***Nhận xét*** *: Nội dung chủ yếu để giải các dạng toán này là tạo ra các dãy số từ bài toán. Sau đó ta áp dụng nguyên lí Dirichlet cho các số hạng của dãy số được chọn (Các số hạng thay cho các "thỏ").*

Ví dụ 8. Xét 100 số nguyên dương $a_1, a_2,..., a_{100}$ với $a_i \le 100\ \forall i = 1, 2,..., 100$ và $a_1 + a_2 + ... + a_{100} = 200$. Chứng minh rằng trong 100 số đó luôn tồn tại một vài số có tổng bằng 100.

Giải

- Nếu $a_i = a_j$ với mọi $i \neq j$ thì hiển nhiên.

- Nếu $a_1 \neq a_2$ thì lập dãy sau:

$$a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}.$$

• Nếu tồn tại một số hạng nào trong dãy chia hết cho 100 thì số hạng đó bằng 100 (đpcm).

• Nếu không có số hạng nào chia hết cho 100 thì trong 100 số này khi chia cho 100 sẽ có hai số hạng có cùng số dư. Hiệu của chúng cho ta tổng cần tìm.

h1. *Điều kiện $a_1 \neq a_2$ sử dụng ở chỗ nào trong lập luận trên đây?*

Ví dụ 9. Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kì, luôn có ít nhất một số có tổng các chữ số chia hết cho 11.

Giải. Giả sử các số đó là $a_1 < a_2 < \ldots < a_{39}$. Xét 20 số hạng đầu tiên của dãy này, sẽ có hai số tận cùng là 0 và có một số (trong hai số này) có chữ số ngay trước chữ số tận cùng khác 9. Gọi số này là N.

Xét các số $N + 1, N + 2, \ldots, N + 19$ thuộc 39 số đã cho. Khi đó:

$$S(N + i) = S(N) + i \text{ với } i = 1, 2, \ldots, 9$$

và $S(N + 19) = S(N) + 10$ (kí hiệu $S(a)$ là tổng các chữ số của a).

Trong 11 số liên tiếp $S(N), S(N) + 1, \ldots, S(N) + 9, S(N) + 10$ thì có một số chia hết cho 11 (đpcm).

4. Dạng 4 : Xây dựng bảng

Ví dụ 10. Cho n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bất kì. Chứng minh rằng luôn tồn tại số thực x sao cho $a_1 + x, a_2 + x, \ldots, a_n + x$ đều là các số vô tỉ.

Giải. Giả sử t là số vô tỉ bất kì. Ta sẽ chứng minh trong các số $t, 2t, \ldots, (n + 1)t$ sẽ có một số thoả mãn.

Giả thiết phản chứng là không có số nào trong các số trên thoả mãn. Lập bảng $(n + 1)\times n$ như sau:

$t+a_1$	$t+a_2$	...	$t+a_n$
$2t+a_1$	$2t+a_2$	...	$2t+a_n$
...	...	...	...
$(n+1)t+a_1$	$(n+1)t+a_2$	...	$(n+1)t+a_n$

Có $n+1$ hàng và n cột. Theo giả thiết phản chứng thì trong mỗi hàng có ít nhất một số hữu tỉ nên có ít nhất $n+1$ số hữu tỉ. Vì có n cột nên có một cột chứa hai số hữu tỉ, giả sử là $kt + a_i$ và $mt + a_i$ $(m < k)$. Khi đó hiệu của chúng $(k - m)t$ là số hữu tỉ, vô lí. Vậy ta có đpcm.

Nhận xét *: Nội dung cơ bản của phương pháp này là lập các bảng. Sau đó áp dụng nguyên lí Dirichlet cho các hàng (hoặc cột) để suy ra các tính chất mới cần sử dụng.*

Ví dụ 11. Cho tập $A \subset \mathbb{N}^*$ có tính chất: trong N số tự nhiên liên tiếp bất kì $(N > 1)$ luôn tồn tại một số thuộc A. Chứng minh rằng tồn tại hai số trong A sao cho số này chia hết cho số kia.

Giải. Xét bảng $(N+1)\times N$ ($N+1$ dòng, N cột) được xây dựng như sau:

Hàng 1:	1	2	3	4	...	N
Hàng 2:	$1+1.2...N$	$2+1.2...N$	$3+1.2...N$	$4+1.2...N$	...	$N+1.2...N$
...						
Hàng i:	$1+k$	$2+k$	$3+k$	$4+k$	...	$N+k$
Hàng $i+1$:	$1+k+M$	$2+k+M$	$3+k+M$	$4+k+M$	...	$N+k+M$
...						

(với $M = (k+1)(k+2)...(k+N)$).

Theo giả thiết thì trong mỗi hàng luôn tồn tại một phần tử của A. Do có $N+1$ hàng và N cột nên có một cột chứa hai phần tử của A và trong hai phần tử này thì phần tử thuộc hàng sau sẽ chia hết cho phần tử thuộc hàng trước nó.

Bài tập

1. Chứng minh rằng từ 5 số nguyên bất kì, luôn tìm được 3 số có tổng chia hết cho 3.

2. Chứng minh rằng từ n số nguyên bất kì, luôn tìm được một số hoặc một số số có tổng chia hết cho n.

3. Cho 9 điểm bất kì nằm trong hình vuông đơn vị. Chứng minh rằng tìm được 3 điểm lập thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn hay bằng $\frac{1}{8}$.

4. Trong một giải vô địch bóng đá có 10 đội tham gia, hai đội bất kì phải đấu với nhau đúng một trận. Chứng minh rằng tại mọi thời điểm của giải đấu, luôn có hai đội có số trận đấu bằng nhau.

5. Trên mặt phẳng cho 5 điểm có toạ độ nguyên, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác được tạo thành từ 5 điểm trên, có ít nhất ba tam giác có diện tích nguyên.

6. Viết n số thành một hàng ngang. Chứng minh rằng hoặc có một số chia hết cho n hoặc có một số số liên tiếp có tổng chia hết cho n ($n > 1$).

7. Chứng minh rằng trong 11 số tự nhiên tùy ý, luôn có thể chọn ra hai số có hiệu bình phương chia hết cho 20.

8. Trên đường tròn cho 16 điểm được tô bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Các dây cung nối 2 điểm trong 16 điểm trên được tô bởi hai màu: tím, đen. Chứng minh rằng ta luôn có 3 trong 16 điểm trên được tô cùng màu và 3 dây cung nối chúng cũng được tô cùng màu.

9. Trong mặt phẳng cho n - giác lồi có toạ độ các đỉnh là những số nguyên ($n > 4$).

   a) Chứng minh rằng ở trên cạnh hoặc trong đa giác đó còn có ít nhất một điểm nguyên khác nữa.

   b) Chứng minh rằng bên trong đa giác đó còn có ít nhất một điểm nguyên khác nữa.

10. Trên đường tròn, một số cung được tô màu đen, phần còn lại tô màu đỏ. Biết tổng độ dài các cung màu đen nhỏ hơn nửa chu vi của đường tròn. Chứng minh rằng có thể kẻ được một đường kính của đường tròn với hai đầu mút cùng màu đỏ.

11. Cho 69 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 100. Chứng minh rằng có thể chọn được 4 số a, b, c, d sao cho $a < b < c$ và $a + b + c = d$.

12. Trên bàn cờ 10×10, người ta viết các số từ 1 đến 100. Mỗi hàng chọn ra số lớn thứ ba. Chứng minh rằng tồn tại một hàng có tổng các số trong hàng đó nhỏ hơn tổng các số lớn thứ ba được chọn.

13. Trong 100.000.000 số hạng đầu của dãy Fibonacci, có tồn tại hay không một số hạng tận cùng là 4 chữ số 0 ?

§2. BẤT BIẾN VÀ ĐƠN BIẾN

Bất biến là một trong những khái niệm trung tâm của toán học. Nó có mặt trong hầu hết các lĩnh vực của Toán học hiện đại. Chẳng hạn, các bất biến được sử dụng trong việc nghiên cứu các đồ thị phẳng, giải tích hàm, phương trình vi phân ...

Nhưng bất biến không phải là một khái niệm gì cao siêu mà các học sinh phổ thông bình thường không gặp và không hiểu được. Đôi khi bất biến chỉ là tính chẵn lẻ, là sự chia hết cho 3, là tính đối xứng của một trạng thái, là sự bảo toàn góc ... tức là những điều rất dễ hiểu và dễ nhận thấy.

Bất biến là những đại lượng (hay tính chất) không thay đổi trong quá trình chúng ta thực hiện các phép biến đổi. Chẳng hạn khi thực hiện phép tịnh tiến thì khoảng cách giữa hai điểm sẽ không thay đổi. Với phép vị tự thì khác: khoảng cách có thể sẽ thay đổi, nhưng sẽ có một bất biến khác, đó là tỉ lệ giữa hai đoạn thẳng. Một ví dụ khác về bất biến: Lấy một số nguyên dương N (viết trong hệ thập phân). Phép biến đổi T biến N thành tổng các chữ số của N. Ví dụ: $1997 \to 26 \to 8 \to 8 \ldots$

Vậy có gì bất biến ở đây? Có đấy, tất cả các số N, $T(N)$, $T(T(N))$ ... đều có cùng số dư khi chia cho 9. Đó chính là bất biến.

Đơn biến, trái lại, là một đại lượng luôn thay đổi, nhưng chỉ theo một chiều (tức là tăng lên hay giảm xuống). Ví dụ xét bộ số nguyên dương (a, b, c). Phép biến đổi T biến (a, b, c) thành $(|b - c|, |c - a|, |a - b|)$. Khi đó có thể chứng minh được rằng hàm số $S(a, b, c) = a + b + c$ là một hàm không tăng, tức là một đơn biến đối với phép biến đổi T.

Dưới đây chúng ta sẽ tìm hiểu về khái niệm bất biến, đơn biến và ứng dụng của chúng trong việc giải các bài toán. Có hai mẫu bài toán tổng quát thường được giải quyết bằng bất biến và đơn biến :

Bài toán 1. Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ω vào Ω. Có hai trạng thái ω và ω' thuộc Ω. Hỏi có thể dùng hữu hạn các phép biến đổi thuộc T để đưa trạng thái ω về trạng thái ω' được không?

Bài toán 2. Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ω vào Ω. Cần chứng minh rằng, bắt đầu từ một trạng thái ω bất kì, sau một số hữu hạn các phép biến đổi từ T, ta sẽ đi đến trạng thái kết thúc (trong nhiều trường hợp, đó là trạng thái ổn định, tức là sẽ không tiếp tục thay đổi khi bị tác động bởi các phép biến đổi từ T, tình huống $T(8) = 8$ ở trên đây là một ví dụ).

Bất biến và đơn biến sẽ giúp chúng ta giải quyết các tình huống căn bản này. Tất nhiên, các tình huống áp dụng sẽ muôn hình vạn trạng, nhưng cũng cần có những kiến thức cơ bản và lối tư duy chung để tiếp cận các vấn đề. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Xét một bảng vuông 4×4 ô. Tại mỗi ô của bảng vuông có chứa dấu "+" hoặc dấu "-". Mỗi một lần thực hiện, cho phép đổi dấu của tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Giả sử bảng vuông ban đầu có 1 dấu "+" và 15 dấu "-". Hỏi có thể đưa bảng ban đầu về bảng có toàn dấu cộng được không?

Câu trả lời là không và lời giải khá đơn giản. Thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng -1. Xét tích tất cả các số trên bảng vuông. Khi đó, qua mỗi phép biến đổi, tích này không thay đổi (vì sẽ đổi dấu 4 số). Vì vậy, cho dù ta thực hiện bao nhiêu lần, từ bảng vuông có 1 dấu "+" và 15 dấu "-" sẽ chỉ đưa được về các bảng vuông có số lẻ dấu "-", có nghĩa là không thể đưa về bảng có toàn dấu cộng.

Ví dụ 2. Trên bảng có các số $\frac{1}{96}, \frac{2}{96}, \frac{3}{96}, \ldots, \frac{96}{96}$. Mỗi một lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số a, b bất kì trên bảng và thay bằng $a + b - 2ab$. Hỏi sau 95 lần thực hiện phép xoá, số còn lại trên bảng là số nào?

Thoạt nhìn, ai cũng thấy ngán vì đề bài yêu cầu tính toán quá nhiều. Hơn nữa, trong bài toán trên, thứ tự thực hiện các phép toán lại không được nói rõ, tạo ra một tình huống gần như không thể xử lí nổi. Nhưng chính những khó khăn đó lại gợi mở ra cách giải. Đó là sử dụng bất biến.

Giả sử các số trên đang là $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Ta cho tương ứng bảng này với $(2a_1 - 1)(2a_2 - 1)\ldots(2a_k - 1)$. Khi đó, sau mỗi lần biến đổi, tích trên bị mất đi hai thừa số $(2a-1)(2b-1)$ và được thêm vào thừa số

$$2(a + b - 2ab) - 1 = -(2a - 1)(2b - 1).$$

Do đó tích trên vẫn không đổi (chỉ đổi dấu). Vì tích ban đầu bằng 0 (do bảng ban đầu có chứa số $\frac{48}{96} = \frac{1}{2}$) nên số cuối cùng s cũng phải cho tích số bằng 0, tức là $2s - 1 = 0$, suy ra $s = \frac{1}{2}$. □

Ví dụ 3. Cho 3 số nguyên không âm a, b, c bất kì. Mỗi một lần thực hiện, ta biến bộ (a, b, c) thành bộ $(|b - c|, |c - a|, |a - b|)$. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép biến đổi, ta thu được bộ có chứa số 0. □

Đặt $M = \max\{a, b, c\}$. Ta chứng minh rằng nếu bộ (a, b, c) không chứa số 0 thì M sẽ giảm sau khi thực hiện phép biến đổi. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó ta có $|b - c| < b \le a$, $|c - a| < a$, $|a - b| < a$, suy ra

$$\max\{|b - c|, |c - a|, |a - b|\} < a = \max\{a, b, c\}.$$

Như vậy, nếu ta chưa thu được số 0 thì M sẽ nhỏ đi ít nhất một đơn vị (do tính chất của số nguyên). Quá trình này không thể kéo dài vô hạn. Vì thế, chắc chắn phải có lúc nào đó xuất hiện số 0.

Trong ví dụ trên, $\max\{a, b, c\}$ chính là một đơn biến. Đây là một phương pháp khá hiệu quả để chứng minh một quá trình là dừng. Chú ý rằng phương pháp này thường sử dụng các tính chất cơ bản sau đây của số tự nhiên :

i) $m < n$ suy ra $m \le n - 1$;

ii) Một tập con không rỗng bất kì của $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất (tính sắp thứ tự tốt).

$\boxed{\text{h2.}}$ *Ví dụ 3 còn đúng không nếu a, b, c là các số thực ?*

Ví dụ 4. Trong quốc hội Mỹ, mỗi một nghị sĩ có không quá 3 kẻ thù. Chứng minh rằng có thể chia quốc hội thành 2 viện sao cho mỗi một nghị sĩ có không quá một kẻ thù trong viện của mình.

Giải. Ta chia quốc hội ra thành 2 viện A, B một cách bất kì. Với mỗi viện A, B, ta gọi $s(A)$, $s(B)$ là tổng của tổng số các kẻ thù của mỗi thành viên tính trong viện đó. Giả sử rằng cách chia này vẫn chưa thoả mãn yêu cầu, tức là vẫn có một nghị sĩ nào đó có nhiều hơn 1 kẻ thù trong viện của mình. Không mất tính tổng quát, giả sử nghị sĩ x thuộc A có ít nhất 2 kẻ thù trong A. Khi đó ta thực hiện phép biến đổi sau: chuyển x từ A sang B để được cách chia mới là $A' = A \setminus \{x\}$ và $B' = B \cup \{x\}$. Vì x có ít nhất 2 kẻ thù trong A và A' không còn chứa x nên ta có

$$s(A') \leq s(A) - 4$$

(trong tổng mất đi ít nhất 2 kẻ thù của x và 2 kẻ thù (chính là x) của các kẻ thù của x trong A).

Vì x có không quá 3 kẻ thù và có ít nhất 2 kẻ thù trong A nên x có nhiều nhất 1 kẻ thù trong B (hay B'), cho nên

$$s(B') \leq s(B) + 2.$$

Từ đó $s(A') + s(B') \leq s(A) + s(B) - 2$. Như vậy nếu (A, B) là một cách chia chưa thoả mãn điều kiện thì ta có thể biến đổi A, B để có một cách chia mới có tổng $s(A) + s(B)$ nhỏ đi ít nhất 2 đơn vị. Rõ ràng quá trình này không thể thực hiện được mãi, có nghĩa là tồn tại cách chia (A^*, B^*) mà ở đó không tồn tại nghị sĩ có quá 1 kẻ thù trong viện của mình, đó chính là dpcm.

Bất biến cũng có thể xuất hiện trong các bài toán về trò chơi. Trò chơi Nim là một ví dụ điển hình.

Ví dụ 5. Có 3 đống sỏi có k, m, n viên sỏi. Hai người cùng chơi trò chơi sau: Người thứ nhất chọn ra một đống sỏi và bốc đi một số sỏi tuỳ ý (ít nhất là 1 viên sỏi); sau đó đến lượt người thứ hai chọn ra một đống sỏi và bốc đi một số sỏi tuỳ ý (ít nhất là 1 viên sỏi); và cứ như thế tiếp tục. Người nào đến lượt mình không thể bốc được nữa (tức là không còn viên sỏi nào) sẽ là người thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng.

Ý tưởng của lời giải bài toán này là tìm một tính chất của bộ (k, m, n) sao cho với mọi cách bốc sỏi thành bộ (k', m', n'), tính chất này sẽ bị mất đi, nhưng từ bộ (k', m', n') không có tính chất này, luôn tìm được một cách bốc để đưa về bộ mới có tính chất này. Giả sử có một tính chất như vậy (giả sử là T) và giả sử bộ $(0, 0, 0)$ có tính chất T. Khi đó người đi trước sẽ thắng cuộc nếu bộ (k, m, n) ban đầu không có tính chất T và sẽ thua cuộc nếu bộ ban đầu có tính chất T.

Ta sẽ không đề cập đến lời giải tổng quát của bài toán này mà chỉ giải thích về "tính chất T" thông qua một trường hợp đơn giản của bài toán Nim.

Cụ thể, xét bài toán Nim trong trường hợp chỉ có hai đống sỏi. Khi đó ta nói bộ (m, n) có tính chất T nếu $m = n$. Rõ ràng $(0, 0)$ có tính chất T. Từ bộ (m, n) có tính chất T (tức là $m = n$), với mọi cách bốc sỏi, ta đều phá đi tính chất T của nó. Ngược lại, với bộ (m, n) không có tính chất T, ta luôn đưa được về bộ có tính chất T bằng cách bốc đi $|m - n|$ viên sỏi ở đống sỏi có số sỏi nhiều hơn. Như thế T thoả mãn tính chất nói trên nên nếu ban đầu hai đống sỏi có số sỏi khác nhau thì người thứ nhất thắng cuộc, còn nếu hai đống sỏi có số sỏi giống nhau thì người thứ hai thắng cuộc.

Bài tập

14. Ở Vương quốc "Sắc màu kì ảo" có 45 hiệp sĩ : 13 hiệp sĩ tóc đỏ, 15 hiệp sĩ tóc vàng, 17 hiệp sĩ tóc xanh. Khi hai hiệp sĩ có màu tóc khác nhau gặp nhau, tóc của họ sẽ lập tức đổi sang màu thứ ba. Hỏi có thể có một lúc nào đó, tất cả các hiệp sĩ đều có màu tóc giống nhau?

15. Có 7 chiếc cốc cùng dung tích đang đựng nước theo thứ tự chiếm

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10} \text{ cốc.}$$

Cho phép trút tất cả nước từ một cốc sang một cốc khác nếu nước không tràn ra ngoài hoặc đổ nước từ cốc này sang cốc khác cho đến khi đầy thì dừng lại. Hỏi có thể hay không sau một số lần đổ nước, một chiếc cốc nào đó chứa nước chiếm

a) $\frac{1}{12}$ cốc b) $\frac{1}{6}$ cốc ?

16. Một đường tròn được chia làm 6 cung, trên đó viết các số 1, 0, 1, 0, 0, 0 (theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Mỗi một lần thực hiện, bạn có thể cộng hai số ở cạnh nhau với 1. Hỏi có thể xảy ra trường hợp sau một số lần thực hiện, tất cả các số trên các cung tròn bằng nhau hay không?

17. Trên bảng có bốn số 3, 4, 5, 6. Mỗi một lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số x, y có trên bảng và thay bằng $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ và $x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$. Hỏi sau một số hữu hạn bước thực hiện, trên bảng có thể xuất hiện một số nhỏ hơn 1 được không ?

18. Trên bàn có 100 viên kẹo. Hai người cùng thay phiên nhau bốc đi k viên kẹo, trong đó $k \in \{1, 2, 3\}$. Ai bốc được viên kẹo cuối cùng là người thắng. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng ?

19. Trên bảng có một số nguyên. Người ta ghi nhớ chữ số cuối cùng của số này, sau đó xoá đi và cộng thêm vào với số còn lại trên bảng 5 lần chữ số vừa xoá. Ban đầu trên bảng ghi số 7^{1998}. Hỏi có thể hay không sau một số lần thực hiện như thế, ta thu được số 1998^7 ?

20. Số nguyên dương có 4 chữ số trên bảng có thể biến đổi thành một số có 4 chữ số khác theo quy tắc sau: hoặc cộng thêm 1 vào hai chữ số liên tiếp của nó nếu hai chữ số này đều không bằng 9; hoặc trừ đi 1 từ hai chữ số liên tiếp của nó nếu hai chữ số này đều không bằng 0. Hỏi bằng các phép biến đổi như vậy, có thể thu được số 1234 từ số 2002 hay không ?

21. Hai người chơi trò chơi sau : Ban đầu có các số 1, 2, 3, 4 xếp theo một vòng tròn. Mỗi một lần thực hiện, người thứ nhất cộng vào hai số cạnh nhau nào đó 1 đơn vị, còn người thứ hai đổi chỗ hai số cạnh nhau nào đó. Người thứ nhất thắng nếu sau một nước đi nào đó, tất cả các số bằng nhau. Hỏi người thứ hai có thể cản trở người thứ nhất chiến thắng không ?

22. Tam thức $f(x)$ có thể được thay bằng các tam thức

$$x^2 f\left(\frac{1}{x}+1\right) \qquad \text{hoặc} \qquad (x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Hỏi có thể hay không bằng các phép biến đổi như vậy, từ tam thức $x^2 + 4x + 3$ thu được tam thức $x^2 + 10x + 9$?

23. Cho một bàn cờ vua 8×8. Hỏi rằng quân mã có thể đi nước đầu tiên từ ô dưới cùng bên trái và kết thúc ở ô trên cùng bên phải hay không? (với điều kiện nó phải đi qua tất cả các ô trên bàn cờ và mỗi ô chỉ đi qua đúng một lần).

24. Một hình tròn được chia thành 14 hình quạt. Mỗi hình đặt một viên bi. Ta thực hiện một nước đi như sau: Mỗi lần 2 viên bi ở 2 hình quạt khác nhau di chuyển sang 2 hình quạt kề với 2 ô đó nhưng theo chiều ngược nhau. Hỏi rằng sau một số lần thực hiện nước đi đó, ta có thể đưa tất cả các viên bi về cùng một ô hay không ?

25. Giải phương trình $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$.

26. Cho dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ và

$$x_{n+1} = \frac{5x_n - 12y_n}{13}, \; y_{n+1} = \frac{12x_n + 5y_n}{13}.$$

Tính $x_n^2 + y_n^2$ với $n = 10^6$.

§3. NGUYÊN LÍ CỰC HẠN

Nguyên lí cực hạn hay còn gọi là nguyên lí khởi đầu cực hạn có phát biểu khá đơn giản: Một tập hợp hữu hạn (khác rỗng) các số thực bất kì đều có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất. Nguyên lí đơn giản này giúp chúng ta có thể "khởi đầu" từ một trong hai "đầu mút", nhỏ nhất hoặc lớn nhất, từ đó cho chúng ta những thông tin bổ sung mà nếu xét một vị trí bất kì khác sẽ không có được.

Nguyên lí cực hạn thường được sử dụng để chứng minh sự tồn tại hay không tồn tại của một đối tượng nào đó. Dưới đây chúng ta sẽ xem xét một số ví dụ.

Ví dụ 1. Cho n điểm xanh và n điểm đỏ trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể nối $2n$ điểm này bằng n đoạn thẳng có đầu mút khác màu sao cho chúng đôi một không giao nhau.

Giải. Với mỗi cách nối $2n$ điểm bằng n đoạn thẳng xanh-đỏ, ta tính tổng độ dài các đoạn thẳng được nối. Do số cách nối là hữu hạn nên tồn tại cách nối có tổng độ dài nói trên là nhỏ nhất. Ta chứng minh rằng cách nối này thoả mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử ngược lại, tồn tại hai đoạn thẳng cắt nhau, giả sử đó là AB và CD cắt nhau tại O (A, C được tô màu đỏ, còn B, D được tô màu xanh).

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

$$AD < OA + OD$$

$$BC < OB + OC\,.$$

Suy ra $AD + BC < AB + CD$.

Như vậy nếu ta giữ nguyên $n - 2$ đoạn nối còn lại và thay AB, CD bằng AD, BC thì tổng các đoạn nối của cách nối mới nhỏ hơn cách nối của chúng ta. Mâu thuẫn với tính nhỏ nhất.

Vậy tồn tại cách nối $2n$ điểm bằng n đoạn thẳng xanh–đỏ sao cho chúng không cắt nhau. □

Nguyên lí cực hạn cũng có thể sử dụng để trình bày lời giải bài toán sử dụng đơn biến một cách khá hiệu quả. Ta xem lại bài toán sau :

Ví dụ 2. Trong quốc hội Mỹ, mỗi một nghị sĩ có không quá 3 kẻ thù. Chứng minh rằng có thể chia quốc hội thành 2 viện sao cho mỗi một nghị sĩ có không quá một kẻ thù trong viện của mình.

Giải. Đây chính là ví dụ 4 trong phần bất biến. Lời giải sử dụng bất biến thông qua đại lượng $s(A) + s(B)$, trong đó (A, B) là một cách chia quốc hội Mỹ thành 2 viện, dựa vào tính chất : nếu trong A hoặc B có 1 nghị sĩ có ít nhất 2 kẻ thù thì ta có thể biến đổi $A \to A'$, $B \to B'$ sao cho $s(A') + s(B') < s(A) + s(B)$.

Ta có thể trình bày lời giải bài toán này bằng nguyên lí cực hạn. Gọi (A, B) là cách chia quốc hội Mỹ ra thành 2 viện sao cho $s(A) + s(B)$ nhỏ nhất (Nhắc lại, $s(A)$ là tổng của tổng số các kẻ thù của mỗi thành viên tính trong viện A). Khi đó, (A, B) chính là cách phân chia cần tìm. Thật vậy, nếu ngược lại, trong A (hoặc B) có 1 nghị sĩ có ít nhất 2 kẻ thù thì bằng phép biến đổi nói trên, ta được cách chia mới A', B' với $s(A') + s(B') < s(A) + s(B)$, mâu thuẫn với cách chọn A, B. □

Trong số học, nguyên lí cực hạn thường được áp dụng thông qua việc xét ước số nhỏ nhất, ước số lớn nhất, nghiệm nguyên dương nhỏ nhất … Sau đây chúng ta xem xét một ví dụ điển hình trong số học sử dụng nguyên lí cực hạn.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n sao cho $15n + 1$ chia hết cho n.

Giải. Rõ ràng $n = 1$ là một nghiệm của bài toán. Tiếp theo, giả sử $n > 1$. Gọi p là ước số nguyên tố lẻ nhỏ nhất của n. Giả sử k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $15^k - 1$ chia hết cho p.

Vì $15^{2n} - 1 = (15^n - 1)(15^n+1)$ chia hết cho n nên $15^{2n}-1$ chia hết cho p. Như vậy $(15, p) = 1$ và theo định lí nhỏ Fermat, ta có $15^{p-1} - 1$ chia hết cho p. Theo định nghĩa của k, ta suy ra k là ước số của các số $p - 1$ và $2n$.

Vì k chia hết $p - 1$ nên $k \le p - 1 < p$.

Nếu k là số lẻ thì k sẽ chia hết n (vì k chia hết $2n$). Ta có k chia hết n, $k < p$, nhưng p là ước số nguyên tố lẻ nhỏ nhất của n nên $k = 1$, như thế p chia hết $15^k - 1 = 14$.

Nếu $k = 2l$, l nguyên dương thì $l < 2l = k < p$, $k = 2l$ chia hết $2n$. Từ đó $l < p$, l chia hết n và tương tự như trên, $l = 1 \Rightarrow k = 2$. Từ đó p chia hết $15^k - 1 = 14.16$.

Trong cả hai trường hợp, ta suy ra $p = 7$, tức là $15^n + 1$ chia hết cho 7. Nhưng rõ ràng $15^n + 1$ chia 7 dư 2, mâu thuẫn.

Vậy số lẻ n duy nhất thoả mãn điều kiện $5^n + 1$ chia hết cho n là $n = 1$. □

Hãy nhìn vào hai đầu mút! Nguyên lí cực hạn trong bài toán đại số đôi khi được thể hiện một cách đơn giản như vậy. Ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 4. Cho $n \geq 4$ và các số thực phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại bốn số a, b, c, d thuộc $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sao cho

$$a + b + c + nabc \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leq a + b + d + nabd.$$

Giải. Giả sử $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Chọn $a = a_1, b = a_2, c = a_3, d = a_n$. (1)

Ta sẽ chứng minh rằng

$$a + b + c + nabc \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leq a + b + d + nabd.$$

Từ (1) suy ra

$$(a_i - a)(a_i - b)(a_i - c) \geq 0 \text{ với mọi } 1 \leq i \leq n$$

$$\Leftrightarrow \quad a_i^3 - (a + b + c)a_i^2 + (ab + bc + ca)a_i - abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_i^3 \geq (a + b + c)a_i^2 - (ab + bc + ca)a_i + abc.$$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng lại vế theo vế, ta được

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \geq (a + b + c)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - (ab + bc + ca)\sum_{i=1}^{n} a_i + nabc = a + b + c + nabc.$$

Tương tự, từ (1) ta lại có

$$(a_i - a)(a_i - b)(a_i - d) \leq 0 \text{ với mọi } 1 \leq i \leq n$$

và từ đây, làm tương tự như trên, ta suy ra $\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \le a + b + d + nabd$. □

Nguyên lí cực hạn không chỉ áp dụng cho các tập hợp hữu hạn mà còn cho các tập hợp vô hạn. Cụ thể ở đây, ta sử dụng tính sắp thứ tự tốt của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ (cũng như các tích Descartes $\mathbb{N}^k$) : Mọi tập con không rỗng của $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 0$ không có nghiệm nguyên khác (0, 0, 0).

Giải. Giả sử ngược lại, tồn tại nghiệm nguyên $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm nguyên với $|x_0| + |y_0| + |z_0|$ dương và nhỏ nhất.

Vì $x_0^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 = 0$ nên suy ra x_0 chia hết cho 3. Đặt $x_0 = 3x_1$. Thay vào phương trình, ta được

$$9x_1^3 + y_0^3 + 3z_0^3 = 0.$$

Từ đây lại suy ra y_0 chia hết cho 3, đặt $y_0 = 3y_1$. Thay vào phương trình, ta lại được

$$3x_1^3 + 9y_1^3 + z_0^3 = 0.$$

Từ đây suy ra z_0 chia hết cho 3, đặt $z_0 = 3z_1$ và cuối cùng ta có

$$x_1^3 + 3y_1^3 + 9z_1^3 = 0.$$

Như vậy ta được nghiệm (x_1, y_1, z_1) của phương trình với

$$0 < |x_1| + |y_1| + |z_1| < |x_0| + |y_0| + |z_0|.$$

Mâu thuẫn với cách chọn (x_0, y_0, z_0). Vậy điều giả sử là sai và ta có đpcm.

Ví dụ 6. Cho $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn điều kiện

$$f(n+1) > f(f(n)) \text{ với mọi } n \text{ nguyên dương.}$$

Chứng minh rằng $f(n) = n$ với mọi n nguyên dương.

Giải. Gọi d là phần tử nhỏ nhất trong miền giá trị của f, tức là

$$d = \min\{ f(n) : n \in \mathbb{N}^* \}.$$

Giả sử $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(m) = d$. Nếu $m > 1$ thì ta thấy rằng $d = f(m) > f(f(m-1))$. Mâu thuẫn với cách chọn d. Vậy $m = 1$. Suy ra f có giá trị nhỏ nhất duy nhất tại 1.

Bây giờ ta lại xét tập hợp $\{f(n) : n \geq 2\}$. Bằng lí luận tương tự như trên, ta cũng suy ra tập này có phần tử nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất này bằng $f(2)$.

Hơn nữa, $f(1) < f(2)$ theo cách chọn của f(1). Thật vậy, nếu $f(1) = f(2)$ thì $f(1) > f(f(1))$, mâu thuẫn. Điều này có thể được tiếp tục để được

$$f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(n) < \ldots \qquad (1)$$

Nhận xét rằng $f(1) \geq 1$. Kết hợp với (1), ta suy ra $f(k) \geq k$ với mọi k nguyên dương. Giả sử $f(k) > k$ với k nào đó. Khi đó $f(k) \geq k + 1$. Sử dụng (1) ta suy ra $f(k+1) \leq f(f(k))$. Nhưng điều này mâu thuẫn với điều kiện $f(k+1) > f(f(k))$.

Ta suy ra rằng $f(k) = k$ với mọi k nguyên dương. □

Bài tập

27. Tập hợp S các sinh viên của một trường đại học có tính chất: bất kì hai sinh viên có cùng số người quen trong S thì không có người quen chung trong S. Chứng minh rằng tồn tại một sinh viên chỉ có đúng một người quen trong S.

28. Một quốc gia có 100 sân bay. Khoảng cách giữa các sân bay là khác nhau. Mỗi một sân bay chỉ có một chuyến bay đến sân bay gần nhất. Chứng minh rằng không có sân bay nào có quá 5 chuyến bay đến.

29. Tại một buổi dạ hội có 100 người đến. Sau đó tất cả những người không có người quen nào ra về. Tiếp theo, tất cả những người có đúng một người quen trong số những người còn lại ra về. Những người có đúng 2 người quen, 3 người quen,..., 99 người quen trong những người còn lại cũng làm vậy. Hỏi nếu cứ thực hiện như vậy thì số lớn nhất những người còn ở lại không ra về là bao nhiêu ?

30. Có 3 trường học, mỗi trường có n học sinh. Mỗi một học sinh quen với ít nhất $n + 1$ học sinh từ hai trường khác. Chứng minh rằng người ta có thể chọn ra từ mỗi trường một bạn sao cho ba học sinh được chọn đôi một quen nhau.

31. Trên đường thẳng cho 50 đoạn thẳng. Chứng minh rằng hoặc có 8 đoạn thẳng trong chúng đôi một giao nhau, hoặc có 8 đoạn thẳng trong chúng đôi một rời nhau.

32. Chứng minh rằng mọi đa giác lồi có diện tích bằng 1 đều có thể phủ bằng một hình chữ nhật có diện tích không lớn hơn 2.

33. Chứng minh rằng trong 15 số nguyên dương thuộc $\{2, 3, \ldots, 1992\}$ và đôi một nguyên tố cùng nhau, có ít nhất một số nguyên tố.

34. Một số số thực dương được viết trên bảng. Tổng của các tích đôi một của chúng bằng 1. Chứng minh rằng ta có thể xoá đi một số để tổng các số còn lại nhỏ hơn $\sqrt{2}$.

35. Có một bộ các quả cân có tính chất sau:

1) Trong bộ có ít nhất 5 quả cân có trọng lượng khác nhau.

2) Với hai quả cân bất kì, tìm được hai quả cân khác có tổng trọng lượng bằng với tổng trọng lượng của hai quả cân đó.

Hỏi bộ quả cân này có ít nhất là bao nhiêu quả cân ?

36. Chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên dương sao cho $k = \dfrac{a^2 + b^2}{ab - 1}$ là số nguyên thì $k = 5$.

37. Trên đường thẳng có $2n + 1$ đoạn thẳng. Mỗi một đoạn thẳng giao với ít nhất n đoạn thẳng khác. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng giao với tất cả các đoạn thẳng còn lại.

38. Trong mặt phẳng cho n điểm ($n > 1$). Hai người chơi lần lượt nối một cặp điểm chưa được nối bằng một vectơ với một trong hai chiều. Nếu sau nước đi của người nào đó, tổng các vectơ đã vẽ bằng 0 thì người thứ hai thắng; nếu cho đến khi không còn vẽ được vectơ nào nữa mà tổng vẫn chưa có lúc nào bằng 0 thì người thứ nhất thắng. Hỏi ai là người thắng cuộc nếu chơi đúng ?

39. Trong một tam giác nhọn, khoảng cách từ trung điểm một cạnh bất kì đến đỉnh đối diện bằng tổng khoảng cách từ điểm đó đến các cạnh tam giác. Chứng minh rằng tam giác đó đều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh (Tổng Chủ biên), Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên), *Đại số 10 nâng cao*, NXB Giáo dục, 2006.

[2] David C.Lay, *Linear algebra and Its applications*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[3] *Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam* (1990-2006), NXB Giáo dục, 2007.

[4] *Tuyển tập 10 năm đề thi Olympic 30/4*, Toán 10, NXB Giáo dục, 2006.

[5] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc*, NXB Giáo dục, 2008.

[6] Birkhoff, Garrett and Saunders MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, third edition, MacMillan, 1965.

[7] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri thức, 2006.

[8] Phạm Văn Thuận, Lê Vĩ, *Bất đẳng thức - Suy luận và Khám phá*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2007.

[9] Vũ Dương Thuỵ (Chủ biên), Nguyễn Văn Nho, *40 năm Olympic Toán học quốc tế*, NXB Giáo dục 2002.

[10] Internet : www.Mathlinks.ro.

[11] Internet : www.diendantoanhoc.net.

[12] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

[13] Internet, The MacTutor History of Mathematics archive.

MỤC LỤC