BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 1 (259)
1999

Sổ Cmục

Chúc Mừng Năm Mới
1999

CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT : 35 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

GS LÊ VĂN THIÊM sinh ngày 29.3.1918, mất năm 1991, quê quán ở huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh. Năm 1948 giáo sư là người Việt Nam đầu tiên được nhận học vị tiến sĩ quốc gia về toán học tại Pháp. Cuối năm 1949 giáo sư về nước, từng làm hiệu trưởng trường Khoa học cơ bản, trường Sư phạm cao cấp, rồi làm giám đốc Đại học Sư phạm khoa học, phó hiệu trưởng trường Đại học Tổng hợp. Giáo sư là Viện trưởng đầu tiên của Viện Toán học Việt Nam, là tổng biên tập đầu tiên của hai tạp chí toán là Tập san Toán Lý (sau này là Tạp chí Toán học) và Acta Mathematica Vietnamica. Giáo sư cũng từng là trưởng ban Khoa học cơ bản, Ủy ban Khoa học Nhà nước, trưởng ban Toán Lý. Từ 1956 đến 1980 giáo sư là đại diện toàn quyền của Việt Nam tại Viện liên hợp nghiên cứu nguyên tử Dubna (Liên Xô). Giáo sư Lê Văn Thiêm là hội trưởng đầu tiên của Hội Toán học Việt Nam. Giáo sư có 20 công trình khoa học công bố ở trong và ngoài nước trong đó có 2 cuốn sách chuyên khảo. Giáo sư là người có công đầu trong việc đặt nền móng cho ngành toán Việt Nam. Giải thưởng toán học mang tên giáo sư đã được Hội Toán học Việt Nam, Hội Giảng dạy Toán học phổ thông thành lập từ năm 199

Nhà giáo Nhân dân NGUYỄN THÚC HÀO sinh ngày 11.10.1912, quê quán ở Nam Đàn, Nghệ An. Năm 1935 Giáo sư tốt nghiệp cao học Toán học tại Macxây (Pháp). Từ năm 1945 đến 1946 là giám đốc Trung học Vụ Trung Bộ, quyền giám đốc Đại học Khoa học Hà Nội. Giáo sư là hiệu trưởng trường ĐHSP Vinh từ 1959 đến 1975 và là Phó chủ tịch Hội Toán học Việt Nam từ thời kì đầu đến những năm 80. Đánh giá về Toán học và Tuổi trẻ, giáo sư đã viết : "Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ra đời đúng lúc và góp phần quan trọng vào việc bồi dưỡng kiến thức và lòng say mê toán học cho sinh viên, học sinh và cán bộ giảng dạy toán học trẻ suốt một thời gian dài. Mong rằng từ nay về sau, tạp chí vẫn giữ được và phát huy thêm ảnh hưởng rộng lớn của một tờ báo mang tên Toán học và Tuổi trẻ". Bước sang tuổi 87, giáo sư vẫn viết bài cho Toán học và Tuổi trẻ.

Nhà giáo Nhân dân NGÔ THÚC LANH sinh ngày 21.2.1923, quê quán ở Ứng Hòa, Hà Tây. Giáo sư là cán bộ giảng dạy tại trường Đại học sư phạm Hà Nội, được phong Giáo sư năm 1984, là ủy viên ban chấp hành Hội Toán học Việt Nam 10 năm đầu tiên của Hội. Hồi ức về Toán học và Tuổi trẻ, giáo sư đã viết : "Báo Toán học và Tuổi trẻ ra mắt bạn đọc số báo đầu tiên, giữa lúc trong các trường phổ thông trung học trên toàn miền Bắc đang dấy lên phong trào say mê học tập toán học... Trong cao trào học tập toán học đó, báo Toán học và Tuổi trẻ đã được các học sinh yêu toán, và các thầy cô giáo dạy toán ở các trường phổ thông trung học hoan nghênh một cách nồng nhiệt... Nhiều bạn đọc của tờ báo, nhờ nỗ lực bản thân và được bồi dưỡng về kiến thức cũng như về phương pháp qua tờ báo, đã giành được những giải thưởng về toán trong những kì thi quốc gia và quốc tế, mang lại vinh quang cho đất nước...".

Giáo sư đề nghị : "Nên tăng cường việc giải thích ý nghĩa của các khái niệm toán học để giúp học sinh nắm vững và sử dụng đúng các khái niệm đó. Nên giới thiệu tuổi trẻ và cống hiến của các nhà toán học lỗi lạc để nêu gương sáng cho học sinh noi theo".

Nhà giáo Nhân dân NGUYỄN ĐÌNH TRÍ sinh ngày 10.1.1931, quê quán tại Lý Nhân, Hà Nam, là PTS Toán học, được phong giáo sư năm 1984, từng là phó hiệu trưởng trường Đại học Bách khoa. Giáo sư là ủy viên thường vụ Hội Toán học Việt Nam khóa 1, chủ tịch Hội Toán học Việt Nam khóa 2, tham dự nhiều đại hội toán học quốc tế. Hiện nay giáo sư là Chủ tịch Viện Tin học sử dụng tiếng Pháp. Nghĩ về Toán học và Tuổi trẻ, giáo sư đã viết : "Hồi tưởng lại về sự ra đời của báo Toán học và Tuổi trẻ tôi thấy công lao to lớn của các nhà toán học lớp trước, các nhà toán học Tạ Quang Bửu, Lê Văn Thiêm, Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng Tụy... Báo đã tập hợp được một đội ngũ đông đảo các cộng tác viên đầy tâm huyết. Báo đã thực sự có tác động kích thích niềm say mê học toán của biết bao thế hệ học sinh trung học.

Giáo sư kiến nghị : "Nên có những bài giới thiệu các vấn đề toán học nảy sinh từ các lĩnh vực khác (kinh tế, sinh học, môi trường, vật lí, cơ học, tin học, ...) viết dưới dạng vui hơn. Nên tổ chức hợp tác, trao đổi với các tạp chí tương tự ở các nước khác..."

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 36
Số 259 (1-1999)
Tòa soạn : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
ĐT : 04.8262477-04.9714359

TRONG SỐ NÀY

- *Ảnh bìa 1 :* Đoàn Việt Nam và các bạn đoàn Lào gặp gỡ ở SEAMO 98 - Trịnh Kim Chi (Hà Tĩnh) và Ngô Văn Sáng (Hà Nội), Huy chương vàng SEAMO 98.

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC HỮU TỈ BẰNG CÁCH XÉT NGHIỆM ĐA THỨC

LÊ QUANG TRUNG
(*CĐSP Minh Hải*)

1. Khi giải một số bài toán gồm các phân thức hữu tỉ, nếu khai triển các phép tính trên các phân thức đại số thường gặp những biến đổi rất phức tạp. Song nếu ta biểu thị nó dưới dạng đa thức thì nhiều khi công việc trở nên dễ dàng.

Cơ sở của cách làm này dựa vào các mệnh đề dưới đây :

Mệnh đề 1: "Nếu đa thức $f(x) = Ax + B$ triệt tiêu tại hai giá trị khác nhau của x thì $A = B = 0$ hay $f(x)$ đồng nhất bằng không".

Chứng minh: Giả sử với $x_1 = a$, $x_2 = b$ $(a \neq b)$ mà $f(a) = f(b) = 0$, hay $Aa + B = 0$ và $Ab + B = 0$, từ đó $A(a - b) = 0$. Vì $a - b \neq 0$ nên $A = 0$ suy ra $B = 0$.

Mệnh đề 2: "Nếu đa thức $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ triệt tiêu tại 3 giá trị khác nhau của x thì $A = B = C = 0$ hay $f(x)$ đồng nhất bằng không"

Chứng minh: Giả sử với $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = d$ (đôi một khác nhau) mà $f(a) = f(b) = f(d) = 0$ hay $Aa^2+Ba+C = 0$, $Ab^2+Bb+C = 0$, $Ad^2 + Bd + C = 0$. Từ các đẳng thức trên suy ra: $A(a^2-b^2)+B(a-b) = 0$, $A(a^2-d^2) + B(a-d) = 0$. Vì $a-b \neq 0$, $a-d \neq 0$ nên $A(a+b) + B = 0$; $A(a+d) + B = 0$ suy ra $A(b-d) = 0$, vì $b-d \neq 0$ nên $A = 0$. Từ đó ta suy ra $B = 0$, $C = 0$.

Tổng quát ta có *mệnh đề* : "Nếu đa thức bậc không quá n triệt tiêu tại $n+1$ giá trị khác nhau của x thì tất cả các hệ số của nó bằng không hay đa thức ấy đồng nhất bằng không"

2. Một số ví dụ :

Ví dụ 1. Tính tổng sau :

$$\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Giải. Tổng trên chỉ xác định khi a, b, c đôi một khác nhau.

Nếu thay d bằng x và đặt tổng trên bằng $f(x)$ thì $f(x)$ là một đa thức bậc không quá 2 đối với x. Ta nhận thấy : $f(a) = f(b) = f(c) = 1$. Như vậy $f(x)$-1 là một đa thức bậc không quá 2 nhận 3 số khác nhau a, b, c làm nghiệm. Vậy $f(x)-1 \equiv 0$ hay $f(x) \equiv 1$ $\Rightarrow f(d) = 1$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng (với a, b, c đôi một khác nhau):

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$$

Giải.

Xét đa thức

$$f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - x^2$$

Ta thấy $f(x)$ là một đa thức bậc không quá 2 nhận 3 số khác nhau a, b, c làm nghiệm vậy $f(x) \equiv 0$ và bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3. Đơn giản biểu thức

$$P = \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Giải. Sau khi quy đồng mẫu số ta được tử số là :

$$f(a) = (a-b)(b+c)(c+a) + (b-c)(a+b)(c+a) + (c-a)(a+b)(b+c) + (a-b)(b-c)(c-a)$$

Ta thấy $f(a)$ là một đa thức bậc không quá 2 đối với a có 3 nghiệm : $a = b$, $a = c$, $a = 0$.

Nếu b, c khác nhau và đều khác 0 thì 3 nghiệm này đôi một khác nhau nên $f(a) \equiv 0$ và ta có $P = 0$

Nếu $b = 0$ hoặc $c = 0$ hoặc $b = c$ thì ta đều có $f(a) = 0$ suy ra $P = 0$

4. Một số bài tập áp dụng :

Bài 1. Đơn giản biểu thức

$$\frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 - ab}{(c+a)(c+b)}$$

Bài 2. Chứng minh rằng :

$$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)} + \frac{c+d+a}{(c-b)(d-b)(a-b)(x-b)} + \frac{d+a+b}{(d-c)(a-c)(b-c)(x-c)} + \frac{a+b+c}{(a-d)(b-d)(c-d)(x-d)} = \frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$$

./.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM, ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGÀY THỨ NHẤT 10/7/1998
(Thời gian : 180 ph)

Câu 1. 1) Cho a và b là hai số khác 0 và thỏa mãn điều kiện $a + b \neq 0$. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right|$

b) $\sqrt{a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}} = \left|a+b-\frac{ab}{a+b}\right|$

2) Sử dụng kết quả trên, tính giá trị biểu thức sau :

$$x = \sqrt{1+\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ số } 9}{}^2+0,\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ số } 9}{}^2}, \text{ với } n \geq 2$$

Câu 2. Chứng minh rằng :

$$x + \frac{4x^3}{(x-1)(x+1)^3} > 3, \ \forall x > 1.$$

Câu 3. Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá $(4+\sqrt{15})^7$.

Câu 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+4yz+2z=0 \\ x+2xy+2z^2=0 \\ 2xz+y^2+y+1=0 \end{cases}$$

Câu 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng BD và các tiếp tuyến với (O) tại A, C đồng quy tại S. Kí hiệu I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng :

a) $AB.CD = AD.BC$; b) $\frac{SB}{SD}=\frac{IB}{ID}=\frac{AB.CB}{AD.CD}$

NGÀY THỨ HAI 11/7/1998
(Thời gian 180 ph)

Câu 1. x, y, z, t là 4 số dương nhỏ hơn 1 và thỏa mãn điều kiện : $xyzt = (1-x)(1-y)(1-z)(1-t)$

Chứng minh rằng :

$$x(1-t) + t(1-z) + z(1-y) + y(1-x) \geq 1.$$

Câu 2. Tìm các số nguyên dương n sao cho số

$$S_n = 1.2.3...7 + n(n+1)(n+2)...(n+7)$$

có thể viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai số nguyên dương.

Câu 3. Giải bất phương trình :

$$\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x(x^2-x+1)} \leq \sqrt{\frac{(x^2+1)^3}{x}}.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC cân ở B, cạnh bên AB lớn hơn cạnh đáy AC và biết diện tích tam giác ABC bằng 1. Chứng minh rằng ta có thể đặt tam giác ABC lọt vào một miền tam giác vuông có diện tích không vượt quá $\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm M nằm trong hình chữ nhật.

1) Chứng minh :

$$MA + MB + MC + MD \leq AB + AC + AD$$

2) Tìm tất cả vị trí có thể có của điểm M sao cho

$$MA.MC \leq MB.MD.$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 13

Problem. Consider an arbitrary finite set of $n > 1$ points on the plane. Let d be the largest distance between two points of this set. Prove that we can draw a circle of radius $\sqrt{3}d/2$ that completely surrounds the n points.

Solution. Choose two points P and Q of these n points such that d is the distance between them. Then we draw two circles of radius d with P and Q as centers. Now all the n points of the set lie in each circle, so they lie in the area of the plane that is common two both circles. If the two circles intersect at the points A and B, then the circle C having AB as diameter encloses the whole common area of the first two circles and hence the whole set of n points. Let O be the center of this new circle. Since AOP is a rectangular triangle with $OP = d/2$ and $PA = d$, we get $OA^2 = AP^2 - OP^2 = d^2 - (d/2)^2 = 3d^2/4$

From this it follows that $OA = \sqrt{3}d/2$ is the radius of the new circle.

Từ mới.

finite = hữu hạn (tính từ)
set = tập hợp (danh từ), đặt (động từ)
point = điểm
plane = mặt phẳng
distance = khoảng cách
draw = vẽ
circle = vòng tròn
radius = bán kính
completely = hoàn toàn, đầy đủ (tính từ)
surround = bao bọc, vây quanh
choose = chọn
center = tâm, trung tâm
area = vùng, diện tích
common = chung, giống nhau (tính từ)
intersect = giao (động từ)
diameter = đường kính
enclose = chứa đựng, kèm theo
whole = tất cả
rectangular = vuông (tính từ)
triangle = tam giác

NGÔ VIỆT TRUNG

Bài T1/255. *Tìm các chữ số a, b, c, d biết rằng $\overline{abcd1998}$ chia hết cho 1997.*

Lời giải. *Cách 1.* của *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A, Nguyễn Trãi, **Hải Dương.**

Đặt $\overline{abcd} = A$ $(1000 \le A \le 9999)$

Theo đầu bài ta có :

$(10^4.A + 1998) \vdots 1997$

$\Leftrightarrow (15A + 1) \vdots 1997$ (1)

$\Leftrightarrow 133(15A+1) \vdots 1997$ (vì $(133;1997) = 1$)

$\Leftrightarrow (2A - 133) \vdots 1997$

$\Leftrightarrow 7(2A-133) \vdots 1997$ (2) (vì $(7;1997) = 1$)

Từ (1) và (2) suy ra

$(A + 932) \vdots 1997$

Do $1000 \le A \le 9999$ nên

$A = 1065, 3062, 5059, 7056, 9053$.

Cách 2. của *Trần Thu Huế*, 9H, Lê Hồng Phong, **Yên Bái**.

Đặt $\overline{abcd} = A$ $(1000 \le A \le 9999)$

Theo đầu bài ta có :

$(10^4.A + 1998) \vdots 1997$

$\Leftrightarrow (15A + 1) \vdots 1997$

$\Leftrightarrow 15A = 1997B + 1996$

$\Leftrightarrow 2B + 1 = 15A - 1995B - 1995$

$\Leftrightarrow 2B + 1 \vdots 15$

$\Leftrightarrow B \equiv 7 \pmod{15}$

$\Leftrightarrow B = 15k + 7$

Vì $1000 \le A \le 9999$ nên $6 \le B \le 74$, $0 \le k \le 4$.

Thay k bằng 0, 1, 2, 3, 4 ta có 5 số thỏa mãn đề bài là :

$\overline{abcd} = 1065, 3062, 5059, 7056, 9053$.

Nhận xét. Có trên 400 bạn gửi lời giải tới, hầu hết là đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Hoàng Quân*, 9T, chuyên Mai Sơn, *Chu Tiến Dũng*, 9T, Chu Văn An, Mai Sơn, **Sơn La**. *Nguyễn Xuân Khánh*, 8C, *Nguyễn Ngọc Hoàng*, 9B; *Bùi Thanh Hòa*, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**. *Lê Kim Thu*, 8A, Hai Bà Trưng, Mê Linh; *Hoàng Thị Liên*, 9A, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**. *Đỗ Quyên Anh*, 9A, Lê Quý Đôn, Từ Liêm, **Hà Nội**. *Bùi Hải Nam*, 8T; *Phạm Hồng Thịnh*, 8B ; *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, NK Trần Phú: *Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An, **Hải Phòng**. *Đặng Duy Hưng*; 9B, Trương Hán Siêu, TX Ninh Bình, **Ninh Bình**. *Nguyễn Đức Tài*, 9A, Tây Đô, Vĩnh Lộc; *Nguyễn Văn Giáp*, *Lê Hải Bằng*, 9A, Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; *Mai Vũ Hà*, 9C, Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; *Bùi Ngọc Hân*, 9C, Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa, **Thanh Hóa**. *Lê Thị Ngọc Trâm*, 9a, Đô Lương; *Cao Ngọc Cường*, 9A, Diễn Thọ, Diễn Châu, **Nghệ An**. *Phan Thanh Nga*, 7, Phan Đình Phùng, Hương Khê, **Hà Tĩnh**. *Trần Huy lập*, 9^1, Nguyễn Tri Phương, TP Huế, **Thừa Thiên - Huế**; *Lê Trần Phước Cường*, 9^1, Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Thảo Nguyên*, 6G, Tịnh Thiện, Sơn Tịnh; *Vũ Thành Trung*, 9a, Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ, *Trần Cao Thanh Ngọc*, *Trần Thái An Nghĩa*, 9I, Trần Hưng Đạo, TX Quảng Ngãi, **Quảng Ngãi**. *Hồ Vĩ Đại*, *Nguyễn Quang Uy*, 9^{14}, Thái Nguyên, TP Nha Trang, **Khánh Hòa**, *Châu Hoàng Huy*, 9T, TX **Cao Lãnh**; *Phạm Ngọc Giao*, $9A_1$, Thủ Khoa Nghĩa, TX Châu Đốc, **An Giang**.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/255. *Giải phương trình*

$$(\sqrt{x^2+1} - x)^5 + (\sqrt{x^2+1} + x)^5 = 123.$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x^2+1} - x = a$; $\sqrt{x^2+1} + x = b$. Khi đó :

$a + b = 2\sqrt{x^2+1}$ và $ab = 1$. Vì thế :

$$\begin{aligned}
a^5 + b^5 - 123 &= \\
&= (a^3+b^3)(a^2+b^2) - (a+b) - 123 = \\
&= [(a+b)^3 - 3(a+b)][(a+b)^2 - 2] - (a+b) - 123 \\
&= (a+b)^5 - 5(a+b)^3 + 5(a+b) - 123 \\
&= (a+b-3)[(a+b)^4 + 3(a+b)^3 + 4(a+b)^2 + \\
&\qquad + 12(a+b) + 41] \\
&= (2\sqrt{x^2+1} - 3)[16(x^2+1)^2 + \\
&+ 24\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1) + 16(x^2+1) + 24\sqrt{x^2+1} + 41]
\end{aligned}$$

Suy ra : phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow x = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét. 1) Có 150 bạn gửi lời giải tới tòa soạn. Đa số các bạn đã giải bài toán theo cách sau : "Đặt $\sqrt{x^2+1} - x = t$ (*). Khi đó, từ phương trình đã cho ta có phương trình :

$$t^5 + \frac{1}{t^5} = 123 \Leftrightarrow t^{10} - 123t^5 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_{1,2}^5 = \frac{123 \pm 55\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow t_{1,2} = \sqrt[5]{\frac{123 \pm 55\sqrt{5}}{2}} \quad (**)$$

Tiếp theo, thay (**) vào (*) rồi giải phương trình nhận được ta sẽ tìm được tất cả các nghiệm của phương trình đã cho".

Do không nhận ra, rằng $\dfrac{123 \pm 55\sqrt{5}}{2} = \left(\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^5$ nên hầu hết các bạn giải theo cách trên đã không chỉ ra được các nghiệm của phương trình đã cho dưới dạng rút gọn.

2) Không ít bạn cho lời giải sai vì chỉ xét nghiệm nguyên. Chẳng hạn, có bạn đã giải như sau :

"Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}\,.A(x) = 123$ (1) Vì vế trái của (1) chia hết cho 2, mà $123 \not\vdots 2$ nên phương trình đã cho vô nghiệm".

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T3/255. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng :*

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\le a+b+c \quad (*)$$

Lời giải. (của đa số các bạn gửi về).

Do a, $b > 0$ nên :

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\ge$$
$$\ge (a+b)(2ab-ab)=(a+b)ab$$
$$\Rightarrow a^3-5b^3\ge ab(a+b)-6b^3=$$
$$=b(a^2+ab-6b^2)=b(a+3b)(a-2b)$$
$$\Rightarrow 5b^3-a^3\le(ab+3b^2)(2b-a)$$
$$\Rightarrow \frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\le 2b-a \quad (1).$$

Tương tự ta có $\dfrac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}\le 2c-b$ (2)

$$\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\le 2a-c \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta nhận được điều phải chứng minh. Bất đẳng thức (*) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi (1), (2), (3) đồng thời trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

Nhận xét. Tất cả các bạn đều giải đúng (trừ hai bạn lí luận a, b, c vai trò bình đẳng và sắp thứ tự a, b, c ?). Các bạn *Nguyễn Đức Nhật*, 9B, THCS Nguyễn Trường Tộ, **Hà Nội**; *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, **Hải Dương**; *Nguyễn Thế Hùng*, 9C, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Trần Thái An Nghĩa* và *Nguyễn Tiến Khải*, 9I, THCS Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi**; *Vũ Xuân Ngọc Tín*, 7A, THCS Quang Trung, Trần Phú, **Đồng Nai**; *Lưu Đức Chiến*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; ... đã tổng quát hóa bài toán và cho phép chứng minh đúng. Bạn đọc nhỏ tuổi nhất tham gia giải tốt là *Vũ Hồng Sơn*, $6A_1$, THCS Lê Quý Đôn, **Hải Dương**.

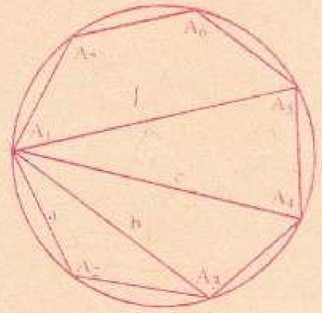
Các bạn sau đây cũng cho lời giải tốt : *Nguyễn Lâm Hưng*, 8^1, THCS Hồng Bàng, Q5, **TP Hồ Chí Minh**; *Chu Tiến Dũng*, 9 Toán, THCS Chu Văn An, Mai Sơn, **Sơn La**; *Phạm Ngọc Giao*, $9A_1$, PTTH Thủ Khoa Nghĩa, Châu Đốc, **An Giang**; *Phạm Quang Huy*, 8A, THCS thị trấn Yên Ninh, Yên Khánh, **Ninh Bình**; *Lê Trần Phước Cương*, 9^1, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Lê Gia Khánh*, $8A_1$, THCS Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Lê Tâm*, 8E, THCS Kỳ Anh, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Trần Quang Hùng*, 9B, THCS Hải Đình, Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Trương Minh Doan*, $9A_6$, THCS Vũng Tàu, **Vũng Tàu**; *Trần Huy Lập*, 9^1, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế, **Thừa Thiên - Huế**; *Huỳnh Đặng Ngân*, 9B, THCS Đống Đa, Quy Nhơn, **Bình Định**; ...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/255. *Kí hiệu S_A, S_B, S_C tương ứng là diện tích của các thất giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$, $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$. Giả sử $A_1A_2=B_1B_3=C_1C_4$. Chứng minh rằng :*

$$\frac{S_A}{2}<S_B+S_C<S_A$$

Lời giải. Đặt $A_1A_2=a$, $A_1A_3=b$, $A_1A_4=c$. Vì $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ là thất giác đều nên trong tứ giác $A_1A_3A_4A_5$ ta có : $A_3A_4=A_4A_5=a$, $A_1A_3=A_3A_5=b$, $A_1A_4=A_1A_5=c$.



Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $A_1A_3A_4A_5$ ta có $A_1A_4\cdot A_3A_5=A_1A_3\cdot A_4A_5+A_3A_4\cdot A_1A_5$ hay $ab+ac=bc$.

Suy ra $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}=1$.

Vì $\Delta A_1A_2A_3\sim\Delta B_1B_2B_3$ nên $\dfrac{B_1B_2}{B_1B_3}=\dfrac{A_1A_2}{A_1A_3}$.

Suy ra : $B_1B_2=\dfrac{a^2}{b}$. Tương tự ta có : $C_1C_2=\dfrac{a^2}{c}$.

Mặt khác các thất giác đều đồng dạng với nhau, nên :

$$\frac{S_B}{S_A}+\frac{S_C}{S_A}=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

hay $\dfrac{S_B+S_C}{S_A}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{a}{c}\right)^2$.

$$\text{Do } \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)^2\le\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)^2-\frac{2a^2}{bc}=1-\frac{2a^2}{bc}<1.$$

Để ý rằng $b\ne c$ nên $\dfrac{1}{2}<\dfrac{S_B+S_C}{S_A}<1$ hay

$$\frac{S_A}{2}<S_B+S_C<S_A$$

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Thái Nguyên: *Mai Nguyên Dũng*, 10K10 PTTH Năng khiếu, **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Đức Vinh*, 8B, THCS Yên lạc, *Trần Trung Hiếu*, 9B THCS Lập Thạch, **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Thích*, 9A THCS Yên Phong, **Hải Phòng:** *Đỗ Ngọc Kiên*, 9D, NK Trần Phú, *Vũ Ngọc Minh*, *Phạm Đức Hiệp*, *Triệu Tuấn Đạt*, 9T THCS Chu Văn An, **Hà Tây**: *Lê Quyết Thắng*, 9B, chuyên Ứng Hòa, **Hải Dương:** *Lê Đình Tiến*, *Ngô Xuân Bách*, *Vũ Thành Long*, 9A Nguyễn Trãi, **Hà Nội:** *Nguyễn Hùng Cường*, 9A THCS ái Mộ, Gia Lâm, *Ngô Mạnh Dũng*, $9A_1$ THCS Phù Lỗ, Sóc Sơn, *Đỗ Trung Tiến*, 8C, Hà Nội - Amsterdam, **Nam Định:** *Phạm Ngọc Anh*, $9A_1$, THCS Giao Hà, Giao thủy, **Thanh Hóa:** *Bùi Ngọc Hân*, 9C, PTCS Trần Mai Ninh, **Quảng Bình:** *Hoàng Ngọc Tùng*, 9A THCS Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch, *Hà Nhật Sang*, 9B, THCS Hải Đình, Đồng Hới, **Quảng Nam:** *Đặng Quang Huy*, 9/1 THCS Lương Thế Vinh, Duy Xuyên, **Quảng Ngãi:** *Vũ Thành Trung*, 9A THCS

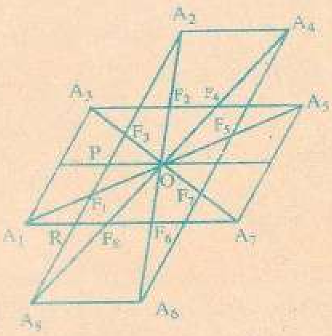
Nguyễn Nghiêm, **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tôn Bảo, Hồ Vĩ Đại*, 9[T], THCS Thái Nguyên, Nha Trang, *Trương Anh Huy*, 9[3] Phan Chu Trinh, Diên Khánh, **Kon Tum:** *Võ Trọng Nghĩa*, 12A TH chuyên, **Ninh Thuận:** *Lâm Hoàng Nguyên*, 9/6 THCS Võ Thị Sáu, TX Phan Rang - Tháp Chàm, **Đồng Tháp:** *Trần Minh Tùng*, 9A[2], THCS Cao Lãnh.

VKT

Bài T5/255. *Trên mặt phẳng cho hai hình bình hành $A_1A_3A_5A_7$ và $A_2A_4A_6A_8$ có chung tâm O. Các cạnh của hình bình hành $A_2A_4A_6A_8$ cắt các tia OA_1, OA_3, OA_5, OA_7 lần lượt tại F_1, F_3, F_5, F_7. Các cạnh của hình bình hành $A_1A_3A_5A_7$ cắt các tia OA_2, OA_4, OA_6, OA_8 lần lượt tại F_2, F_4, F_6, F_8. Với mỗi $k = 1, 2, ..., 8$ đặt $\lambda_k = \frac{OF_k}{OA_k}$. Chứng minh rằng tồn tại $k \in \{1, 2, 3, ..., 8\}$ để $\lambda_k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Nhận xét. Trong số các bạn gửi bài về chỉ có 2 bạn giải đúng. Bạn *Nguyễn Hoàng Thạch*, lớp 9C, trường THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm, **Hà Nội,** chỉ ra phản ví dụ : Khi hai hình chữ nhật đồng tâm cắt nhau dạng hình chữ thập thì có thể xảy ra $\frac{OF_k}{OA_k} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ với mọi $k \in \{1, 2, ..., 8\}$. Cách dựng như sau :

Cho hình bình hành $A_1A_3A_5A_7$ tâm O (h.1). Gọi M, F_1, F_3, F_5, F_7 lần lượt là trung



điểm của A_1A_3, OA_1, OA_3, OA_5, OA_7. Đường thẳng F_1F_3 cắt OM, A_3A_5, A_1A_7 lần lượt tại P, Q, R. Trên tia PQ lấy A_2 và trên tia PR lấy A_8 sao cho $\frac{PQ}{PA_2} = \frac{PR}{PA_8} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dựng hình bình hành $A_2A_4A_6A_8$ nhận O làm tâm thì dễ dàng thấy : $\frac{OF_i}{OA_i} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ với $i = 1, 3, 5, 7$ và $\frac{OF_j}{OA_j} = \frac{PQ}{PA_2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ với $j = 2, 4, 6, 8$.

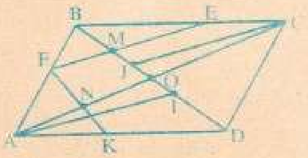
Để tránh xảy ra trường hợp như hình 1, ta phải bổ sung vào *giả thiết đề bài* như sau : *Trên mặt phẳng cho 2 hình bình hành $A_1A_3A_5A_7$ và $A_2A_4A_6A_8$ có chung tâm O sao cho không có cạnh nào của hình bình hành này cắt 2 cạnh đối của hình bình hành kia.*

Lời giải. Xét 2 trường hợp :

a) Nếu tồn tại 1 đỉnh (chẳng hạn A_1) của hình bình hành này nằm trong hình bình hành hoặc nằm trên cạnh của hình bình hành kia thì $\frac{OF_1}{OA_1} \geq 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Kết luận bài toán đúng.

b) Nếu mọi đỉnh của hình bình hành này đều nằm ngoài hình bình hành kia thì (theo giả thiết bổ sung) mỗi cạnh của hình bình hành này phải cắt 2 cạnh kề nhau của hình bình hành kia. (Lời giải sau đây dựa theo bạn *Phạm Đức Hiệp*, lớp 9T, trường THCS Chu Văn An, **Hải Phòng**).

Nhận xét 1. (h. 2) Cho tam giác ABC với trung tuyến BO. Gọi M là trung điểm BO. Một đường thẳng qua M cắt cạnh BA tại F và cắt cạnh BC tại E thì có :



$$\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4 \quad (1)$$

Chứng minh. Kẻ $AI // EF$ và cắt tia BO ở I, kẻ $CJ // FE$ và cắt tia BO ở J. Ta có :

$$\frac{BA}{BF} = \frac{BI}{BM} \text{ và } \frac{BC}{BE} = \frac{BJ}{BM} \text{ nên}$$

$$\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = \frac{BI + BJ}{BM} = \frac{2BO}{BM} = 4.$$

Nhận xét 2. (h. 2) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BO, AO. Lấy điểm F trên cạnh AB, nếu tia FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K thì có :

$$BE + AK \geq BC \quad (2)$$

Chứng minh : Theo (1) có

$$\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4 \text{ và } \frac{AB}{AF} + \frac{AD}{AK} = 4.$$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ ta có :}$$

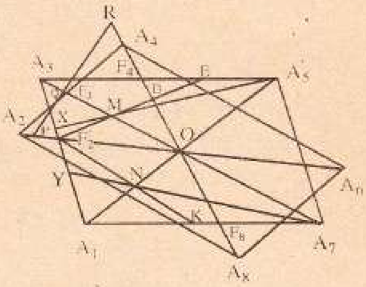
$$8 = AB\left(\frac{1}{BF} + \frac{1}{AF}\right) + BC\left(\frac{1}{BE} + \frac{1}{AK}\right) \text{ nên}$$

$$8 \ge \frac{4AB}{BF+AF} + \frac{4BC}{BE+AK}$$

$$\Rightarrow 1 \ge \frac{BC}{BE+AK} \Rightarrow BE + AK \ge BC.$$

Chứng minh bài toán (h. 3)

Giả sử A_2 nằm bên trong góc $\angle A_1OA_3$. tia OA_2 cắt cạnh A_1A_3 tại F_2. Theo giả thiết đoạn thẳng A_4A_8 đi qua O phải cắt A_3A_5 tại F_4. cắt A_1A_7 tại F_8. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA_3, OA_1. Ta chứng tỏ rằng *một trong hai tia F_2M, F_2N phải cắt đoạn thẳng F_4F_8.*



Gọi X và Y lần lượt là giao điểm của tia A_5M và A_7N với cạnh A_1A_3.

Nếu F_2 thuộc đoạn XA_3 (hay YA_1) thì tia F_2M phải cắt đoạn thẳng OF_4 (hay OF_8).

Nếu F_2 nằm trong đoạn XY, giả sử tia F_2M cắt cạnh A_3A_5 ở E, tia F_2N cắt cạnh A_1A_7 ở K mà $A_3E < A_3F_4$ và $A_1K < A_1F_8$, thế thì $A_3E + A_1K < A_3F_4 + A_1F_8 = A_3A_5$ trái với (2).

Không mất tổng quát coi F_2M cắt đoạn thẳng OF_4 tại điểm D nghĩa là $OF_4 \ge OD$ (3).

Ta chỉ ra rằng nếu $\dfrac{OF_k}{OA_k} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ với mọi $k \in \{1, 2, ..., 8\}$ thì dẫn đến mâu thuẫn.

Vì $\dfrac{OF_2}{OA_2}$ và $\dfrac{OF_3}{OA_3}$ đều nhỏ hơn $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên có thể lấy được điểm P nằm trong đoạn thẳng A_2F_2 ($OF_2 < OP < OA_2$) và điểm Q nằm trong đoạn thẳng A_3F_3 ($OF_3<OQ< OA_3$) sao cho

$$\frac{OF_2}{OP} = \frac{OQ}{OA_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (4).$$

Do đoạn thẳng PQ cắt đoạn thẳng A_2F_3 nên tia PQ cắt tia OA_4 tại R với $OR>OA_4$ (5).

Thay $OA_3=2OM$ vào (4) được $\dfrac{OM}{OQ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (6).

Từ (4) và (6) suy ra $PQ // MF_2$ nên $\dfrac{OD}{OR} = \dfrac{OM}{OQ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{OF_4}{OA_4}$.

Kết hợp với (3) có $OA_4 > OR . \dfrac{OF_4}{OD} \ge OR$ mâu thuẫn với (5).

Vậy phải tồn tại $k \in \{1, 2, ...; 8\}$ để $\dfrac{OF_k}{OA_k} \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$./.

VIỆT HẢI

Bài T6/255. *Dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định như sau :*

$a_1 = 1964$, $a_2 = 96$,

$a_{n+2} = 30a_{n+1}^2 - 75a_{n+1}a_n - 1944a_n$ $(n \ge 1)$.

Chứng minh rằng không có số hạng nào của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là tổng các lũy thừa bậc bảy của ba số nguyên.

Lời giải. Với x là số nguyên tùy ý, theo định lí Fecma $x^{29} - x \equiv 0 \pmod{29}$.

Chú ý $x^{29} - x = x(x^7-1)(x^7+1)(x^{14}+1)$.
$x^{14}+1 = (x^7-12)(x^7+12)+145$ mà $145 = 5.29$ do đó $x^7 \equiv a \pmod{29}$ với $a \in \{0, \pm1, \pm12\}$, suy ra

$x^7 + y^7 + z^7 \equiv b \pmod{29}$ (x, y, z là các số nguyên tùy ý) với $b \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm10, \pm11, \pm12, \pm13, \pm14\}$

Xét dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ theo mod 29 ta có :
$a_1 \equiv -8$, $a_2 \equiv 9$, $a_3 \equiv 8$, $a_4 \equiv -9$,
$a_5 \equiv -8$, $a_6 \equiv 9$, ... (tuần hoàn chu kỳ 4).

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Nhận xét. Đây không phải là bài toán dạng mới lạ, ví dụ : xem Bài 2 - thi học sinh giỏi toán toàn quốc lớp 12, 1987. Tuy vậy chỉ có ba bạn giải đúng: Đỗ Tuyết Nhung, 12A, PTTH Amsterdam, **Hà Nội**; *Cao Thế Thu*, 12A$_1$, PTTH chuyên, **Vĩnh Phúc**; *Phạm Hoàng Hiệp*, 11A$_1$, PTTH Hồng Quang, **Hải Dương.**

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/255. Cho các số nguyên dương l, m và cho đa thức

$$P(x) = a_0x^{m+1} + a_1x^m + ... + a_mx, \; a_0 \ne 0$$

Lập dãy số $\left\{v_n = \sum_{k=0}^{\ln} P\left(\frac{1}{n+k}\right) ; \; n = 1,2,...\right\}$.

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Lời giải. (của bạn *Đỗ Quang Dương*, 12T, Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**). Ta có :

$$v_n = a_0 \sum_{k=0}^{\ln}\left(\frac{1}{n+k}\right)^{m+1} + a_1 \sum_{k=0}^{\ln}\left(\frac{1}{n+k}\right)^{m} + ...$$

$$+ a_{m+1-i} \sum_{k=0}^{\ln}\left(\frac{1}{n+k}\right)^{i} + ... + a_m \sum_{k=0}^{\ln}\left(\frac{1}{n+k}\right) \quad (1)$$

Với $i \ge 2$ ta có : $0 \le \sum_{k=0}^{\ln}\left(\frac{1}{n+k}\right)^{i} \le \frac{\ln+1}{n^i}$ mà $\frac{\ln+1}{n^i} \to 0$ khi $n\to\infty$ (2)

Với $i = 1$ có :

$$S_n = \sum_{k=0}^{ln} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{nl} \left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{nl} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \text{ ở đó } f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Dễ thấy $\sum_{k=1}^{nl} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ là tổng tích phân của $f(x)$ trên $[0, l]$ với các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$ ($i=0, 1, 2, \ldots, nl$) và cách chọn điểm $\xi_k = \frac{k}{n}$ ($k = 1, 2, \ldots, nl$). Thành thử

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \int_0^l f(x)\,dx = \int_0^l \frac{dx}{1+x} = \ln(1+l) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) dễ dàng suy ra

$$\lim_{n\to\infty} v_n = a_m \ln(1+l).$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Đăng Trung, Trương Thanh Tùng*, 12A, PTTH chuyên **Yên Bái**; *Đỗ Tuyết Nhung*, 12A, PTTH Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**; *Phạm Hồng Quân*, 11 Toán, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**, *Cao Thế Thu*, $12A_1$, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**; *Trần Đức Chính*, *12CT, ĐHKH Huế*, Trần Như Quang, *12CT, Quốc học Huế*, **Thừa Thiên - Huế**; *Trần Chí Hòa*, $12T_1$ PTTH Đồng Hới, *Nguyễn Hoa*, $12T_1$, PTTH Năng khiếu, **Quảng Bình**; *Trần Tuấn Anh*, 11 Toán, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**; *Nguyễn Minh Lực*, 12A, Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Trần Đình Nguyên*, 11T, PTNK **TP Hồ Chí Minh.**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/255. *Cho đa thức*

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \le 1$ khi $|x| \le 1$.

Chứng minh rằng với mọi $M > 1$ thì :

$$|f(x)| \le \frac{32}{3}M^4 - \frac{32}{3}M^2 + 1 \text{ khi } |x| \le M$$

Lời giải. Ta có :

$|f(-1)| \le 1$, $\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right| \le 1$, $|f(0)| \le 1$,

$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le 1$, $|f(1)| \le 1$.

Xét $1 < x < M$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrăng, ta có :

$$f(x) = f(1)\frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)}$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}$$

$$+ f(0)\frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{(0+1)\left(0+\frac{1}{2}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)}$$

$$+ f\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(x+1)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}-0\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}$$

$$+ f(-1)\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(-1+\frac{1}{2}\right)(-1-0)\left(-1-\frac{1}{2}\right)(-1-1)}$$

$$= \frac{2}{3}f(1)(x^2+x)\left(x^2-\frac{1}{4}\right) - \frac{8}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)(x^2-1)$$

$$+4f(0)(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right) - \frac{8}{3}f\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$$

$$+\frac{2}{3}f(-1)(x^2-x)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$$

$$\le \frac{2}{3}|f(1)|\left|(x^2+x)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\right| +$$

$$+\frac{8}{3}\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\left|\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)(x^2-1)\right|$$

$$+4|f(0)|\left|(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\right| +$$

$$+\frac{8}{3}\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|\left|(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)\right|$$

$$+\frac{2}{3}|f(-1)|\left|(x^2-x)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\right|$$

$$\le \frac{2}{3}(x^2+x)\left(x^2-\frac{1}{4}\right) + \frac{8}{3}\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)(x^2-1)$$

$$+4(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right) + \frac{8}{3}(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{2}x\right) +$$

$$+\frac{2}{3}(x^2-x)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{32}{3}x^4 - \frac{32}{3}x^2 + 1 \le \frac{32}{3}M^4 - \frac{32}{3}M^2 + 1$$

Xét $|x| \le 1$. Khi đó

$$|f(x)| \le 1 < \frac{32}{3}M^4 - \frac{32}{3}M^2 + 1.$$

Bài toán được chứng minh.

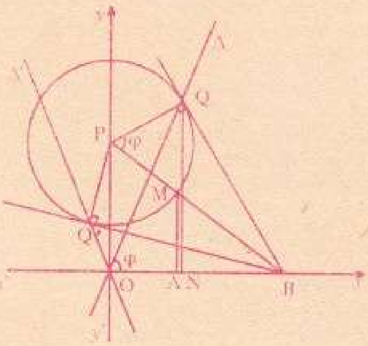
Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Phạm Hồng Quân, Trần Quang Đại, Nguyễn Minh Hùng*, 11 Toán-Tin, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Trần Tuấn Anh*, 11 Toán-Tin, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**; *Tưởng Thanh Tùng*, 12A2 PTTH chuyên **Yên Bái**; *Đào Thị Mỹ Châu*, 11T, Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Nguyễn Hồng Quang*, 12A1, PTTH **Lào Cai**; *Đỗ Tuyết Nhung*, 12A, PTTH Amsterdam, **Hà Nội**; *Trần Hoàng Đức Chính*, 12T, ĐHKHTN Huế, **Thừa Thiên - Huế**; *Ngô Quốc Anh*, 10A Toán, ĐHKHTN, **Hà Nội**; *Hoàng Phúc Mỹ*, 11A, PTTH

Ngô Quyền, **Biên Hòa**; *Nguyễn Lê Cường*, 11 Lý, PTTH NK **Quảng Bình**; *Nguyễn Thanh Xuân*, 12A1, PTTH Nam Sách, **Hải Dương**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/255. *Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, cho hai điểm A, B trên Ox với các hoành độ tương ứng a, b sao cho 0<a<b. Một điểm P di động trên đường thẳng Oy. Đường thẳng vuông góc với Ox tại A cắt đường thẳng BP tại điểm M. Gọi Q, Q' là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ B tới đường tròn tâm P bán kính PM. Tìm tập hợp các điểm Q và Q'.*

Lời giải 1. (Dựa theo *Nguyễn Tuấn Châu*, 10A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**). Gọi N là hình chiếu vuông góc của Q trên trục $x'Ox$, dễ thấy hai tam giác vuông OQN và PBQ đồng dạng (vì có $\angle NOQ = \angle BOQ = \angle BPQ$ do 4 điểm O, P, Q, B cùng thuộc đường tròn đường kính BP. Từ đó ta được : $\dfrac{NQ}{ON} = \dfrac{QB}{PQ}$; (1)



Mặt khác, lại có $PQ = PM$ (= R),

$\dfrac{PM}{PB} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{a}{b}$ hay $PB = \dfrac{b}{a}PM = \dfrac{b}{a}R$

và : $QB^2 = BP^2 - PQ^2$,

do đó : $QB^2 = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2}R^2$,

hay là : $\dfrac{QB^2}{PQ^2} = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2}$; (2)

Nhưng $ON = x$ và $NQ = y$ là hoành độ và tung độ của tiếp điểm Q nên từ (1) và (2) ta thu được phương trình sau đây (trong hệ tọa độ Oxy) biểu thị quỹ tích của điểm Q và Q' :

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}x; \quad (3)$$

Kết luận: Quỹ tích các tiếp điểm Q và Q' là hai đường thẳng Δ và Δ' đi qua O có phương trình (3). Để ý thêm rằng hai đường thẳng Δ, Δ' này nhận hai trục $x'Ox$ và $y'Oy$ làm các đường phân giác và hợp với trục $x'Ox$ góc $\pm\varphi = \pm$ arc cos $\dfrac{a}{b}$.

Lời giải 2. (Dựa theo *Đỗ Tuyết Nhung*, 12A, PTTH Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**) Trước hết, dễ thấy rằng 5 điểm O, B, P, Q và Q' cùng thuộc đường tròn đường kính BP. Từ đó ta được : $\angle BOQ = \angle BPQ$, hay sử dụng góc có hướng của hai đường thẳng trong mặt phẳng, ta viết lại :

$$(Ox, OQ) = (PB, PQ) = \varphi \pmod{\pi} \ (1)$$

Mặt khác, lại có (theo chứng minh như trong lời giải 1)

$$\cos\varphi = \cos\angle BPQ = \frac{PQ}{BP} = \frac{PM}{PB} = \frac{OA}{OB},$$

tức là $\cos\varphi = \dfrac{a}{b}$ (const)

hay $\varphi = \text{arc cos}\,\dfrac{a}{b} \pmod{\pi}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : Q thuộc đường thẳng Δ cố định, đi qua O và hợp với Ox một góc $\varphi = \arccos\dfrac{a}{b}$.

Chứng minh tương tự, Q' thuộc đường thẳng Δ' đi qua O và hợp với Ox một góc $\varphi' = \pi - \varphi = \text{arc cos}\left(-\dfrac{a}{b}\right)$.

Để hoàn thiện lời giải, ta còn phải chứng minh phần đảo. Đề nghị các bạn tự làm lấy, bổ sung cho lời giải được hoàn chỉnh.

Nhận xét. Bài toán này thuộc loại dễ, về cơ bản chỉ cần sử dụng kiến thức toán ở PTCS. Tuy nhiên, nhiều lời giải còn dài dòng, đặc biệt có một số bạn tính toán quá cồng kềnh hoặc tính sai. Thật đáng tiếc có đến 7 lời giải sai.

Hoan nghênh nhiều bạn đang học lớp 8 hoặc 9 ở trường PTCS cũng tham gia giải bài toán trên.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/255. *Cho tứ diện đều ABCD. Hãy tìm trên các mặt phẳng : (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) các điểm X, Y, Z, T sao cho tổng độ dài các cạnh của tứ diện XYZT nhỏ nhất.*

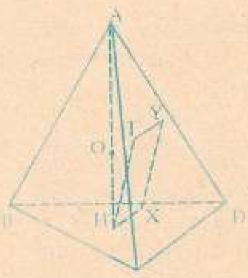
Lời giải.

Gọi O là tâm của tứ diện đều $ABCD$ (h.1). H, I, J, K theo thứ tự là hình chiếu của O trên mặt phẳng: (BCD), (CDA), (DAB), (ABC).

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên :

$$\left(\frac{\overrightarrow{HI}}{HI} + \frac{\overrightarrow{HJ}}{HJ} + \frac{\overrightarrow{HK}}{HK}\right) \perp (BCD)$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{IJ}}{IJ} + \frac{\overrightarrow{IK}}{IK} + \frac{\overrightarrow{IH}}{IH}\right) \perp (CDA)$$



$$\left(\frac{\overrightarrow{JK}}{JK}+\frac{\overrightarrow{JH}}{JH}+\frac{\overrightarrow{JI}}{JI}\right)\perp(DAB)$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{KH}}{KH}+\frac{\overrightarrow{KI}}{KI}+\frac{\overrightarrow{KJ}}{KJ}\right)\perp(ABC)\ (*)$$

Giả sử X, Y, Z, T là các điểm bất kì, theo thứ tự thuộc các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Ta thấy :

$$XY+XZ+XT+ZT+TY+YZ$$

$$=\frac{XY.HI}{HI}+\frac{XZ.HJ}{HJ}+\frac{XT.HK}{HK}+\frac{ZT.JK}{JK}+\frac{TY.KI}{KI}+\frac{YZ.IJ}{IJ}$$

$$\geq\frac{\overrightarrow{XY}.\overrightarrow{HI}}{HI}+\frac{\overrightarrow{XZ}.\overrightarrow{HJ}}{HJ}+\frac{\overrightarrow{XT}.\overrightarrow{HK}}{HK}+\frac{\overrightarrow{ZT}.\overrightarrow{JK}}{JK}+\frac{\overrightarrow{TY}.\overrightarrow{KI}}{KI}+\frac{\overrightarrow{YZ}.\overrightarrow{IJ}}{IJ}$$

$$=\frac{(\overrightarrow{XH}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IY}).\overrightarrow{HI}}{HI}+\frac{(\overrightarrow{XH}+\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JZ}).\overrightarrow{HJ}}{HJ}+\frac{(\overrightarrow{XH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KT}).\overrightarrow{HK}}{HK}+\frac{(\overrightarrow{ZJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KT}).\overrightarrow{JK}}{JK}$$

$$+\frac{(\overrightarrow{TK}+\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IY}).\overrightarrow{KI}}{KI}+\frac{(\overrightarrow{YI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JZ}).\overrightarrow{IJ}}{IJ}$$

$$=HI+HJ+HK+JK+KI+IJ+$$

$$\overrightarrow{XH}\left(\frac{\overrightarrow{HI}}{HI}+\frac{\overrightarrow{HJ}}{HJ}+\frac{\overrightarrow{HK}}{HK}\right)+\overrightarrow{YI}\left(\frac{\overrightarrow{IJ}}{IJ}+\frac{\overrightarrow{IK}}{IK}+\frac{\overrightarrow{IH}}{IH}\right)+$$

$$+\overrightarrow{ZJ}\left(\frac{\overrightarrow{JK}}{JK}+\frac{\overrightarrow{JH}}{JH}+\frac{\overrightarrow{JI}}{JI}\right)+\overrightarrow{TK}\left(\frac{\overrightarrow{KH}}{KH}+\frac{\overrightarrow{KI}}{KI}+\frac{\overrightarrow{KJ}}{KJ}\right)$$

Vì XH, YI, ZJ, TK theo thứ tự thuộc các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) nên theo (*) ta có :

$$XY+XZ+XT+ZT+TY+YZ \geq HI+HJ+HK+JK+KI+IJ \qquad (1)$$

Nếu đẳng thức xảy ra ở (1) thì : $\overrightarrow{XY}\uparrow\uparrow\overrightarrow{HI}$; $\overrightarrow{YZ}\uparrow\uparrow\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{ZT}\uparrow\uparrow\overrightarrow{JK}$; $\overrightarrow{TX}\uparrow\uparrow\overrightarrow{KH}\Rightarrow$ $\exists\ \alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ sao cho :

$$\alpha\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{XY};\ \beta\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{YZ};\ \gamma\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{ZT};\ \delta\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{TX}.$$

Suy ra : $\alpha\overrightarrow{HI}+\beta\overrightarrow{IJ}+\gamma\overrightarrow{JK}+\delta\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{0}$

Lại có : $\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{0}$ và ba vectơ bất kì trong các vectơ $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{KH}$ không đồng phẳng nên $\alpha=\beta=\gamma=\delta$. Suy ra

$$\begin{cases}\alpha\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{XY}\\ \alpha\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{YZ}\\ \alpha\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{ZT}\\ \alpha\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{TX}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{XZ}\\ \alpha\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{ZX}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha(HI+HJ+HK+JK+KI+IJ)=$$
$$=XY+XZ+XT+ZT+TY+YX\ (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có $\alpha=1$.

Suy ra : $\overrightarrow{HX}=\overrightarrow{IY}=\overrightarrow{JZ}=\overrightarrow{KT}$ (h.1).

Đặt $\overrightarrow{HX}=\overrightarrow{IY}=\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{KT}=\vec{a}$.

Ta thấy tứ diện $XYZT$ là ảnh của tứ diện $HIJK$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{a}}$. Nếu $\vec{a}\neq\vec{0}$ thì $H\neq X$; $I\neq Y$ và $HX//IY\Rightarrow\vec{a}//\overrightarrow{CD}$.

Tương tự $\vec{a}//\overrightarrow{DB}$. Mâu thuẫn.

Vậy : $\vec{a}=\vec{0}$. Suy ra : X, Y, Z, T tương ứng trùng với H, I, J, K.

Ngược lại, nếu X, Y, Z, T tương ứng trùng với H, I, J, K thì dễ thấy đẳng thức xảy ra ở (1).

Kết luận: Tổng độ dài các cạnh của tứ diện $XYZT$ nhỏ nhất khi và chỉ khi X, Y, Z, T tương ứng trùng với H, I, J, K.

Nhận xét. 1) Bài này chỉ có 19 bạn tham gia giải, 5 bạn giải sai. Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt :

Lương Anh Hùng, $12A_1$, TH Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**; *Phạm Đình Quốc Hưng*, 10T, Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Trần Tuấn Anh*, 11T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**; *Đỗ Quang Dương*, 12T, Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Phùng Văn Đồng*, $12A_1$, PTTH Quảng Oai, Ba Vì, **Hà Tây**; *Hoàng Tùng*, $11A_1$, PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**; *Tô Minh Hoàng*, 10T, PTTH NK, *Phạm Hồng Quân*, 11T, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Đào Thị Mỹ Châu*, *Lê Anh Tuấn*, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Cao Thế Thụ*, *Nguyễn Trung Hiếu*, *Phạm Hoàng Hà*, *Vũ Văn Phong*, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**;

2) Ngoài lời giải trên, bài toán còn có thể được giải theo hai hướng khác nữa.

+ *Hướng thứ nhất:* Thông qua hai bổ đề.

Bổ đề 1: Cho tam giác ABC, M là một điểm trong mặt phẳng (ABC). H, I, K là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Khi đó :

$$MH+MI+MK\geq h,$$

với h là đường cao của tam giác đều. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ M nằm trong tam giác đều.

Bổ đề 2. Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau theo giao tuyến d và φ là góc phẳng giữa chúng. M, N là hai điểm trên (α), (β) tương ứng và h, k là khoảng cách từ M, N tới d. Khi đó :

$$MN\geq(h+k)\sin\frac{\varphi}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}MN\perp d,\ h=k\\ \angle MIN=\varphi\end{cases}$

trong đó I là hình chiếu (vuông góc) của M trên d.

Nhiều bạn giải theo hướng này, nhưng không bạn nào giải quyết được triệt để vấn đề "khi nào đẳng thức xảy ra"

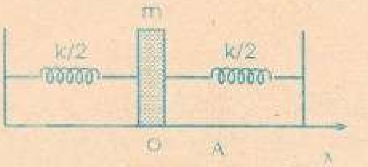
+ *Hướng thứ hai:* Phương pháp tọa độ. Các bạn giải theo hướng này đều phải thông qua các biến đổi đại số khá cầu kì. Trong số đó, bạn *Đỗ Quang Dương* có lời giải gọn gàng hơn cả.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/255. *Vật có khối lượng m gắn vào hai lò xo nằm ngang có độ giống như nhau, trượt theo mặt bàn nằm ngang (xem hình vẽ). Giả thiết hệ số ma sát μ giữa vật và mặt bàn không đổi. Kéo vật ra khỏi vị trí cân bằng khoảng A rồi buông ra không vận tốc ban đầu.*

1) Lập phương trình chuyển động của vật và tìm nghiệm của nó trong khoảng thời gian $0 < t < \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

2) Xác định A để sau n lần vật đi qua vị trí cân bằng, biên độ dao động của nó không nhỏ thua B.



Hướng dẫn giải. 1) Xét theo phương ngang (phương chuyển động) vật chịu tác dụng của lực đàn hồi $F_{đh} = -kx$ và lực ma sát $F_{ms} = \mu P = \mu mg$. Áp dụng định luật II Niutơn, chọn gốc tọa độ trục Ox tại vị trí cân bằng ta có : $x'' + \omega^2 x = \frac{\mu g}{k}$, với $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Đặt $X = x - \frac{\mu mg}{k}$, ta có phương trình $X'' - \omega^2 X = 0$. Nghiệm của phương trình (trong khoảng thời gian $0 < t < \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$) là :

$$X = A_1\sin(\omega t + \varphi).$$

Từ điều kiện ban đầu suy ra

$$A_1 = A - \frac{\mu mg}{k},\ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Từ đó

$$x = \left(A - \frac{\mu mg}{k}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\mu mg}{k}$$

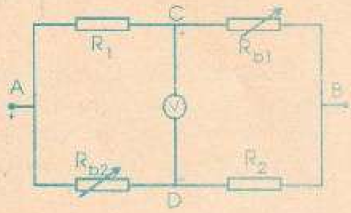
2) Xét thời điểm $t = \frac{\pi}{\omega}$ (vật đến điểm biên bên trái), suy ra sau $\frac{1}{2}$ chu kì (nghĩa là sau một lần vật đi qua vị trí cân bằng) lực ma sát làm giảm biên độ dao động một lượng bằng $\frac{2\mu mg}{k}$. Như vậy sau n lần vật đi qua vị trí cân bằng, biên độ dao động là $A - n\frac{2\mu mg}{k}$. Theo đề bài phải có $A - n\frac{2\mu mg}{k} \geq B$, suy ra $A \geq B + \frac{2n\mu mg}{k}$

Nhận xét. Khi biểu diễn kết quả cuối cùng, các biểu thức phải có dạng như trên mới là hoàn chỉnh. Các em có lời giải đầy đủ và đúng : *Phạm Tuấn Bình*, 12B$_1$, *Trần Quang Duân*, 11A$_3$, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**; *Hồ Khánh Nam*, 11 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Văn Tập*, 12A$_1$, PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng**.

MAI ANH

Bài L2/255. *Cho mạch điện như hình vẽ. Cho biết :* U_{AB} *không đổi;* $R_1 = 5\Omega$; $R_2 = 10\Omega$; $R_V = \infty$; $R_d \approx 0$.

Ban đầu giá trị của R_{b1} *và* R_{b2} *là* $R_{b1} = 8\Omega$; $R_{b2} = 20\Omega$.



Điều chỉnh R_{b1} *tăng dần. Hỏi phải điều chỉnh* R_{b2} *như thế nào để số chỉ V (cực dương tại C) luôn luôn không đổi.*

Hướng dẫn giải. Vì $R_V = \infty$, mạch điện có hai nhánh song song. Ta có, lúc đầu :

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1 + R_{b1}} = \frac{U_{AB}}{13};\ I_2 = \frac{U_{AB}}{R_{b2} + R_2} = \frac{U_{AB}}{30}.$$

Suy ra $U_{CD} = -I_1R_1 + I_2R_{b2} = \frac{11U_{AB}}{39}$ (1).

Khi điều chỉnh R_{b1} tăng dần, ta có $R_{b1} = 8 + x$ ($x > 0$) và $R_{b2} = 20 + y$ (y có thể > 0 hoặc < 0), tính toán tương tự như trên suy ra :

$$U'_{CD} = \frac{U_{AB}(110 + 20x + 8y + xy)}{390 + 30x + 13y + xy} \quad (2).$$

Vì U_{CD} không đổi : $U_{CD} = U'_{CD}$, suy ra $y = -\frac{450x}{28x + 169}$. Dễ dàng thấy rằng khi x tăng thì y giảm và khi $x \to \infty$ thì $y \to -16{,}07\Omega$, có nghĩa là khi R_{b1} tăng dần từ 8Ω đến rất lớn (∞) thì R_{b2} giảm dần từ 20Ω về đến xấp xỉ $3{,}93\Omega$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và đầy đủ : *Lê Huyền Đức*, 12A$_1$, PTTH Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**; *Vũ Quốc Huy*, 10CL, chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**; *Trần Hoài Nam, Hà Mạnh Hùng, Đào Nhật Tân, Phạm Danh Tuyên*, 12A$_1$, *Trần Việt Hưng, Đỗ Văn Tuấn*, 11A$_3$, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**; *Phạm Hồng Nam*, 9A, trường Trung Tâm, Sông Công, **Thái Nguyên**; *Lê Cường*, Bo11A, khối chuyên Lí, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**; *Dương Tấn Khải*, 12A, Trung học chuyên **Trà Vinh**.

MAI ANH

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/259. Dãy số $p_1, p_2, p_3, \ldots$ được xác định như sau : $p_1 = 5$, p_n là thừa số nguyên tố lớn nhất của số $1 + p_1p_2..p_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng p_n khác 7 với mọi n.

NGÔ ĐỨC HOÀNG
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T2/259. Chứng minh rằng nếu m, n là hai số thỏa mãn $19|m| + 5|n| \geq 2000$ thì phương trình sau có nghiệm :

$$20mx^2 + 5nx + 100 - m = 0$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Thái Bình)

Bài T3/259. Giải phương trình :

$$(x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x$$

NGUYỄN PHƯỚC
(Thừa Thiên - Huế)

Bài T4/259. Cho các đường tròn tâm O_1 bán kính R_1 và tâm O_2 bán kính R_2 sao cho tiếp tuyến chung ngoài M_1M_2 vuông góc với tiếp tuyến chung trong N_1N_2 tại điểm A. Gọi tiếp tuyến chung trong thứ hai là P_1P_2. (Các tiếp điểm M_1, N_1, P_1 thuộc đường tròn tâm O_1 và các tiếp điểm M_2, N_2, P_2 thuộc đường tròn tâm O_2). Tính diện tích tam giác AP_1P_2 theo R_1 và R_2.

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T5/259. Cho bốn số dương a, b, c, d. Giả sử phương trình $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ có 4 nghiệm thuộc khoảng $(0 ; 1/2)$ (các nghiệm không nhất thiết phân biệt). Chứng minh rằng :

$$21a + 164c \geq 80b + 320d.$$

VIÊN NGỌC QUANG
(Hà Nội)

Bài T6/259. Cho hàm số $f: R^+ \to R^+$ thỏa mãn: $f(4x) + 1999f(2x) = 2000f(x)$ với mọi $x \in R^+$.

Chứng minh rằng tồn tại số thực $k > 1$ để $f(x) = f(kx)$ với mọi $x \in R^+$.

PHÙNG ĐỨC TUẤN
(Hà Nội)

Bài T7/259. Cho ba dãy số (x_n), (y_n), (z_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ được xác định như sau : x_0, y_0, z_0 là các số dương cho trước,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_nz_n}, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_nx_n}, \quad z_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_ny_n}$$

với mọi $n \geq 0$. Tìm tất cả các số thực a để $x_n > a\sqrt[3]{n}$ với mọi n.

NGUYỄN VŨ HƯNG
(Hà Nội)

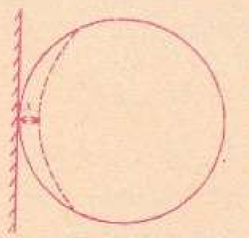
Bài T8/259. Cho tam giác ABC. Các đường tròn bàng tiếp của tam giác đó tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm N. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của N lên BC, CA, AB. Gọi R và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC theo thứ tự. Chứng minh rằng :

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

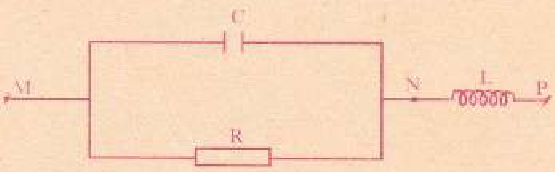
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/259. Khi ta chạm nhẹ vào tường một quả bóng, nó bị biến dạng như hình vẽ. Khi đó độ biến dạng x của quả bóng là rất nhỏ so với bán kính của nó và có thể coi rất gần đúng là áp suất P của không khí trong quả bóng không thay đổi trong quá trình va chạm. Bỏ qua độ đàn hồi của vỏ quả bóng. Hãy xác định thời gian va chạm giữa bóng và tường.



MINH TUYẾN
(Khánh Hòa)

Bài L2/259. Một mạch điện được mắc như hình vẽ. Cho biết : Hiệu điện thế giữa 2 đầu cuộn cảm được biểu diễn bằng phương trình :



$u_{NP} = 40\sqrt{6}\sin\omega t$. Cường độ dòng điện qua điện trở R bằng $1A$. Cường độ dòng điện qua cuộn cảm nhanh pha $\frac{\pi}{6}$ so với hiệu điện thế giữa M và N, nhưng chậm pha $\frac{\pi}{6}$ so với hiệu điện thế giữa M và P. Tính : U_{MN}, U_{MP}, R, Z_L, Z_C ? Lập phương trình biểu diễn u_{MN}, u_{MP}, I_R, I_C, I_L.

PHẠM HÙNG QUYẾT
(Hà Nội)

CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT KỈ NIỆM 35 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Nhân kỉ niệm 35 năm (10.1964-10.1999) ngày báo Toán học và Tuổi trẻ ra số đầu tiên, tạp chí THTT tổ chức một cuộc thi giải toán đặc biệt.

Đề thi sẽ in trên 4 số báo 1/1999, 3/1999, 5/1999, 7/1999 và hạn cuối cùng nhận bài tương ứng là ngày 10 của tháng 3, tháng 5, tháng 7, tháng 9 năm 1999 theo dấu bưu điện. Mỗi số sẽ có 4 bài : 2 bài dành cho THCS và 2 bài dành cho THPT. Tất cả các bạn đang học từ lớp 6 đến lớp 12 đều được dự thi. Học sinh THCS có thể giải bài của THPT còn học sinh THPT không được giải bài của THCS.

Mỗi bài giải viết riêng trên 1 tờ giấy. Số của bài ra ghi ở góc trên bên trái, họ tên và địa chỉ (lớp, trường, quận (huyện), thành phố (tỉnh)) ghi ở góc trên bên phải. Trên phong bì ghi rõ : *"Thi giải toán 35 năm TH&TT"*. Bài giải chỉ gửi về một địa chỉ :

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
25, Hàn Thuyên, Hà Nội

Giải thưởng sẽ được công bố trên tạp chí TH & TT và sẽ được trao vào dịp lễ kỉ niệm 35 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

Mong đông đảo các bạn hưởng ứng cuộc thi

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỀ TOÁN

CÁC LỚP THCS

Bài T1/THCS. Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn :

$$|a(b-c)| > |b^2 - ac| + |c^2 - ab|$$

và phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thực.

Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm thực dương nhỏ hơn $\sqrt{3} - 1$.

Bài T2/THCS. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ và điểm M bất kì. Chứng minh rằng :

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geq MA_2 + MA_4 + MA_6$$

CÁC LỚP THPT

Bài T1/THPT. Ta nói số nguyên t là số tam giác nếu $t = \frac{n(n+1)}{2}$ với số nguyên dương n. Tìm tất cả cặp số nguyên (a, b) có tính chất : với mọi số nguyên t, t là số tam giác khi và chỉ khi $at + b$ là số tam giác.

Bài T2/THPT. Cho ΔABC có :

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$$

Chứng minh rằng xảy ra ít nhất một trong ba đẳng thức sau :

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}b, \quad m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

PROBLEMS ON THE OCCASION OF THE 35th ANNIVERSARY OF THE JOURNAL

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/THCS. Let a, b, c be three real numbers satisfying the conditions: $|a(b-c)|>|b^2-ac| +|c^2-ab|$ and the equation $ax^2+bx+c = 0$ has real roots.

Prove that this equation possesses a positive root less than $\sqrt{3}$ - 1.

T2THCS. Let be given a regular heptagon $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ and an arbitrary point M. Prove that

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geq MA_2 + MA_4 + MA_6.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T1/THPT. An integer t is called a triangular number if $t = \frac{n(n+1)}{2}$ for a positive integer n. Find all pair of integers (a, b) satisfying the condition : for every integer t, t is a triangular number if and only if $at+b$ is a such one.

T2/THPT. Let be given a triangle ABC such that $m_a+m_b+m_c=\sqrt{3}/2\ (a+b+c)$. Prove that at least one of the following equalities occur :

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}b,\ m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS.

T1/259. The sequence of numbers $p_1, p_2, p_3, \ldots$ is defined by : $p_1 = 5$ and p_n is the greatest prime divisor of $1 - p_1p_2 \ldots p_{n-1}$ for every $n \geq 2$.

Prove that p_n is distinct from 7 for all n.

T2/259. Prove that if two numbers m, n satisfy the condition $19|m| - 5|n| \geq 2000$, then the equation $20mx^2 - 5nx + 100 - m = 0$ possesses roots.

T3/259. Solve the equation

$$(x + 3\sqrt{x} - 2)(x - 9\sqrt{x} - 18) = 168x.$$

T4/259. Let be given two circles with centers O_1, O_2 and radii R_1, R_2 respectively such that the external common tangent M_1M_2 is perpendicular to the internal common tangent N_1N_2 and let P_1P_2 be the second internal common tangent (the touching

(Xem tiếp trang 22)

ĐỀ THI TUYỂN SINH TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI - 1998

MÔN THI : TOÁN

Thời gian làm bài : 180 phút

PHẦN I: *(Dành cho tất cả các thí sinh)*

Câu I. Cho hàm số

$y = f(x) = x^4 + 2mx^2 + m$, m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) > 0$ với mọi x. Với các giá trị m tìm được ở trên, chứng minh rằng hàm số :

$F(x) = f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+f^{(4)}(x) > 0$ với mọi x

($f^{(4)}(x)$ là kí hiệu đạo hàm cấp 4 của hàm số $f(x)$ tại điểm x)

Câu II.

a) Giải phương trình lượng giác :

$$\frac{1}{\text{tg}x + \text{cotg}2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\text{cotg}x - 1}$$

b) Hai góc A, B của ΔABC thỏa mãn điều kiện $\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} = 1$. Chứng minh rằng : $\frac{3}{4} \le \text{tg}\frac{C}{2} < 1$.

Câu III. Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác trực chuẩn $Oxyz$ cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

(d) : $x = 1+2t$, $y = 2-t$, $z = 3t$;

(P) : $2x-y-2z+1 = 0$

a) Tìm tọa độ các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 1.

b) Gọi K là điểm đối xứng của điểm $I(2; -1; 3)$ qua đường thẳng (d). Hãy xác định tọa độ điểm K.

Câu IV. a) Giải bất phương trình :

$$\log_3\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2} > \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$$

b) Biện luận theo tham số a về số nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{2 - x^2}\sin x + \sqrt{2 + x^2}\cos x = |a+1| + |a-1|$$

PHẦN II.

Câu Va. *(Dành cho thí sinh chưa phân ban)*

a) Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) có phương trình $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến của (P) kẻ tại hai điểm $A(1; 2)$ và $B(4; 5)$.

b) Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x)dx$$

Câu Vb. *(Dành cho thí sinh chuyên ban)*

a) Viết khai triển Niuton của biểu thức $(3x-1)^{16}$. Từ đó chứng minh rằng :

$$3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - ... + C_{16}^{16} = 2^{16}.$$

b) Tính tích phân $J = \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x}\, dx$

(Các bạn tự giải và đón xem đáp án ở một số tạp chí sau)

VUI MỘT TÍ...

CÔ-SI NGƯỜI VIỆT NAM

Ngọc: Đố cậu Gonbac người nước nào?
Thành: Đức !
Ngọc: Thế Lobasepxki ?
Thành: Dễ ợt, người Nga
Ngọc: Thế Andrei Willy ?
Thành: Càng dễ, người Anh
Ngọc: Còn Côsi thì sao ?
Thành: Người Pháp
Ngọc: Sai bét, cô Si nhà tớ là người Việt Nam "xin" đấy nhé.
Thành: Cậu bảo sao ?... À, ừ nhỉ !

NGUYỄN THẠC DŨNG
(Lớp A_1K43 - khoa Toán - Cơ Trường ĐH KHTN - ĐH Quốc gia Hà Nội)

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI THI HỌC SINH GIỎI TOÁN PHỔ THÔNG TRUNG HỌC (3-1998)

(Đề bài đăng số 252 (tháng 6 năm 1998))

BẢNG A

Bài 1. Xét dãy số (x_n) với $x_1 = a$ và

$$x_{n+1} = 1 + \ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right) (\forall n > 1).$$

Nếu $a = 1$ thì $x_n = 1$ $(\forall n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

Xét $a > 1$. Ta chứng minh bằng quy nạp là $x_n > 1$ $(\forall n)$ bằng cách chứng tỏ hàm số $f(x) = x^2-1-\ln x$ đồng biến trên $[1, \infty)$ và $f(1) = 0$, suy ra $f(x)>0$ $(\forall x > 1)$.

Tiếp theo chứng minh rằng nếu $x_n > 1$ $(\forall n)$ thì $x_n > x_{n+1}$ $(\forall n)$ hay $x_n - x_{n+1} > 0$ bằng cách

xét hàm số $g(x) = x-1-\ln\left(\frac{x^2}{1+\ln x}\right)$ trên $[1, \infty)$

Có $g'(x) = \dfrac{x-1+x\ln x-2\ln x}{x(1+\ln x)}$ (3)

Xét hàm $h(x) = x^2-1+x\ln x - 2\ln x$ trên $[1, \infty)$.

Có $h'(x) = 2\left(1-\frac{1}{x}\right) + \ln x.$

Ta thấy $h'(x) > 0$ $(\forall x>1)$ và $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên $h(x)$ đồng biến trên $[1, \infty)$ mà $h(1) = 0$, suy ra $h(x) > 0$ ($\forall x > 1$ và $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Từ đó có $g'(x) > 0$ $(\forall x > 1)$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên $g(x)$ đồng biến trên $[1, \infty)$ mà $g(1) = 0$, suy ra $g(x) > 0$ $(\forall x > 1)$ và $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó nếu $x_n > 1$ $(\forall n)$ thì $x_n > x_{n+1}$ $(\forall n)$

Ta thấy rằng (x_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ với $x_1 = a > 1$ là đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 1, do đó dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Vì $x_n > 1$ $(\forall n)$ nên $b \geq 1$.

Từ hệ thức xác định dãy (x_n) ở đề bài, chuyển qua giới hạn được : $b = 1 + \ln\left(\frac{b^2}{1+\ln g}\right)$ hay

$b - 1 - \ln\left(\frac{b^2}{1+\ln b}\right) = 0.$

Từ phần khảo sát hàm g(x) ở trên có $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra $b = 1$ hay $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 1$.

Bài 2. a) Trong ΔBCD với trọng tâm A_o có $3\overrightarrow{OA_o} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Từ đó và từ $-\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA}$ có

$3\overrightarrow{OA_o} - \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$ (1)

trong đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$, còn G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OG}$. Từ (1) có $\overrightarrow{OA_o} - \overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OE} - 2\overrightarrow{OA_o} \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A_1A_o} = 2\overrightarrow{A_oE}$ (2) ; (2) chứng tỏ rằng điểm E nằm trên đường thẳng A_1A_o

Lập luận tương tự ta cũng có $\overrightarrow{B_1B_o} = 2\overrightarrow{B_oE}$, $\overrightarrow{C_1C_o} = 2\overrightarrow{C_oE}$, $\overrightarrow{D_1D_o} = 2\overrightarrow{D_oE}$, suy ra điểm E nằm trên các đường thẳng A_1A_o, B_1B_o, C_1C_o, D_1D_o, nghĩa là $E \equiv F$ là giao điểm của các đường thẳng A_1A_o, B_1B_o, C_1C_o, D_1D_o.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ nên G là trung điểm PQ. Mặt khác $\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OG}$ nghĩa là G là trung điểm OF. Như vậy tứ giác $POQF$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $PO \parallel FQ$ (3)

Trong ΔOAB có $OA = OB = R$, $PA = PB \Rightarrow$ ΔOAB cân đáy AB với OP là đường trung tuyến $\Rightarrow$ $OP \perp AB$ (4).

Từ (3) (4) suy ra $FQ \perp AB$.

Bài 3. a) Đặt $a_n = b_n + t$ $(\forall n)$ với t là tham số, thay vào (1) được $b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n + 8t + 20$.

Ta chọn t để $8t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = -5/2$, lúc đó

$b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n \Leftrightarrow b_{n+2} - 4b_{n+1} - 5b_n = 0$

Phương trình đặc trưng $x^2 - 4x - 5 = 0$ có 2 nghiệm là 5 và -1, từ đó có công thức tổng quát $b_n = c_1 5^n + c_2(-1)^n$, cho $n = 0$, $n = 1$ ta tính được

$c_1 = \frac{125}{6}$ và $c_2 = \frac{10}{6}$ .vậy $a_n = \frac{125}{6}\cdot 5^n + \frac{10}{6}(-1)^n - \frac{5}{2}$

b) Giả sử h là số nguyên dương thỏa mãn

$$a_{n+h} \equiv a_n \pmod{1998}\ (\forall n) \qquad (2)$$

Từ $a_o = 20$, $a_1 = 100 \Rightarrow h \geq 2$.

Ta sẽ chứng minh rằng h thỏa mãn (2) $\Leftrightarrow$ h chẵn, $h \geq 2$ và $a_{h-1} \equiv 0 \pmod{1998}$ (*)

Điều kiện cần. $a_h = a_{o+h} \equiv a_o = 20 \pmod{1998}$

và $a_{h+1} \equiv a_1 = 100 \pmod{1998}$ (3)

$5a_{h-1} = a_{h+1} - 4a_h - 20 \equiv 0 \pmod{1998} \Rightarrow$ $a_{h-1} \equiv 0$ (mod1998) vì $(5, 1998) = 1$

Nếu h lẻ $\Rightarrow$ h-1 chẵn, ta có $a_h = 5a_{h-1} \equiv 0 \pmod{1998}$ trái với $a_h \equiv 20 \pmod{1998}$ (3).

Vậy h phải chẵn, $h \geq 2$ và $a_{h-1} \equiv 0 \pmod{1998}$.

Điều kiện đủ. Giả sử $h \geq 2$, h chẵn và $a_{h-1} \equiv 0 \pmod{1998}$. Lúc đó $5a_{h-2} = a_{h-1} \equiv 0 \pmod{1998}$

$\Rightarrow a_h = 4a_{h-1} + 5a_{h-2} + 20 \equiv 20 = a_o \pmod{1998}$

$a_{h+1} = 4a_h + 5a_{h-1} + 20 \equiv 100 = a_1 \pmod{1998}$

Bằng chứng minh quy nạp dễ dàng suy ra $a_{n+h} \equiv a_n \pmod{1998}$

c) Từ điều kiện (*) $h \geq 2$, h chẵn và $a_{h-1} \equiv 0 \pmod{1998}$

h-1 lẻ $\Rightarrow a_{h-1} = \frac{5^2}{6}(5^h - 1) \equiv 0 \pmod{1998}$

$$\Rightarrow \frac{5^h - 1}{6} \equiv 0 \pmod{1998}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 5^h \equiv 1 \pmod{6.1998} \\ h \text{ chẵn} \end{cases}$$

$1998 = 2.3^3.37 \Rightarrow 6.1998 = 2^2.3^4.37$ nên áp dụng

ĐL Ơle : $5^h \equiv 1 \pmod{2^2}$ (4) thỏa mãn với $\forall h$

$5^n \equiv 1 \pmod{3^4}$ (5) $\Leftrightarrow h \,\vdots\, 2.3^3 = 54$

$5^h \equiv 1 \pmod{37}$ (6) $\Leftrightarrow h \,\vdots\, 36$

h chẵn

$(*) \Leftrightarrow h \,\vdots\, [54, 36] = 108.$

Đáp số $h_{\min} = 108.$

Bài 4. Giả sử tồn tại dãy (x_n) thỏa mãn để bài.

Với mọi $n \in N^*$ ta sắp xếp $x_1, x_2, ..., x_n$ thành dãy không giảm $x_{i_1} \le x_{i_2} \le ... \le x_{i_n}$

Ở đó $(i_1, i_2, ..., i_n)$ là một hoán vị của $(1, 2, ..., n)$. Đặt $A = 0{,}666$, ta có :

$$2A \ge x_{i_n} - x_{i_1} = (x_{i_n} - x_{i_{n-1}}) + (x_{i_{n-1}} - x_{i_{n-2}}) + ...$$

$$... + (x_{i_2} - x_{i_1}) \ge \left(\frac{1}{i_n(i_n+1)} + \frac{1}{i_{n-1}(i_{n-1}+1)}\right) + ...$$

$$... + \left(\frac{1}{i_2(i_2+1)} + \frac{1}{i_1(i_1+1)}\right) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{i_n(i_n+1)} - \frac{1}{i_1(i_1+1)}$$

$$\ge 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{n+1}.$$

Cho $n \to \infty$ thì $\frac{4}{3} - \frac{2}{n+1} \to \frac{4}{3} > 1{,}332 = 2A.$

$\Rightarrow$ mâu thuẫn.

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, xét các điểm $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-2, -2)$ và $M(x, y)$. Ta có $F(x, y) = F(M) = MA + MB + MC$.

Ta chuyển về bài toán : Tìm giá trị nhỏ nhất của $F(M)$ là tổng khoảng cách từ điểm M của mặt phẳng tới 3 đỉnh A, B, C của ΔABC cân đáy AB. Ở đây ΔABC có 3 góc nhọn ($\text{tg}\angle OCB = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{tg}45^\circ \Rightarrow \angle ACB < 90^\circ$). Bạn đọc tự chứng minh bài toán quen thuộc :

Bổ đề. Cho ΔABC có 3 góc nhọn và điểm M tùy ý trong mặt phẳng ABC thì $F(M) = MA + MB + MC$ nhỏ nhất khi điểm M nhìn các cạnh AB, BC, CA dưới cùng một góc 120°.

Chú ý xét trường hợp điểm P bất kì nằm ngoài ΔABC thì $\exists$ M nằm trên cạnh ΔABC sao cho $PA+PB+PC > MA+MB+MC$ và trường hợp điểm P nằm trên cạnh hoặc nằm trong ΔABC (3 góc nhọn) thì $\exists$ M nằm trong ΔABC sao cho $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$ thỏa mãn $F(M) < F(P)$.

Trở lại tính $F(x, y)$: $M \in CO$ và $\angle OMB = 60^\circ$, $OB = \sqrt{2}$, $OM = \frac{OB}{\text{tg}60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

$$x_M = y_M = \frac{OM}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{6} + 2\sqrt{2}.$$

Bài 6. Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc m thỏa mãn để bài

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \ (a_m \ne 0)$$

Ta chứng minh cho trường hợp $k = 1998$. Lúc đó (1) trở thành

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{a_i(x^{2k} - 1)^i}{x^{ki}} = \frac{x^{2n} - 1}{x^n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i x^n (x^{2k} - 1)^i x^{k(m-i)} = x^{km}(x^{2n} - 1) \quad (2)$$

đúng với $\forall x \ne 0$

Vế trái có bậc : $n + 2km$

Vế phải có bậc : $2n + km$. Vậy $n = km$.

Ta chứng tỏ m phải lẻ. Nếu m chẵn, đặt $y = x^k$ khi đó (2) $\Leftrightarrow P\left(y - \frac{1}{y}\right) = y^m - \frac{1}{y^m}$ $(\forall y > 0)$ (3)

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i (y^2 - 1)^i y^{m-i} = y^{2m} - 1 \ (\forall y > 0)$$

Đẳng thức này đúng với $0 \ne \forall y \in R$ (kể cả $y < 0$)

Ở (3) cho $y = 2 \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}\right) = 2^m - \frac{1}{2^m} > 0$

Cho $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^m} - 2^m < 0$

mâu thuẫn, vậy m lẻ

- Đảo lại, ta chứng minh nếu $n = km$ và m lẻ thì tồn tại đa thức bậc m là $P_m(y)$ thỏa mãn :

$$P_m\left(y - \frac{1}{y}\right) = y^m - \frac{1}{y^m} \ (\forall x \ne 0)$$

(đặt $y = x^k$ thì (3) $\Rightarrow$ (1)).

Chứng minh quy nạp theo m.

Với $m = 1 \Rightarrow \exists\, P_1(y) = y$

Với $m = 3 \Rightarrow \exists\, P_3(y) = y^3 + 3y$

Giả sử đã có $P_1, P_3, ..., P_m$. Đặt

$P_{m+2}(y) = (y^2+2)P_m(y) - P_{m-2}(y)$. Khi đó

$$P_{m+2}\left(y - \frac{1}{y}\right) =$$

$$= \left[\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + 2\right] P_m\left(y - \frac{1}{y}\right) - P_{m-2}\left(y - \frac{1}{y}\right) =$$

$$= \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^m - \frac{1}{y^m}\right) - \left(y^{m-2} - \frac{1}{y^{m-2}}\right) =$$

$$= y^{m+2} - \frac{1}{y^{m+2}} \ (\forall y \ne 0)$$

Kết luận :

$$P_m\left(x^k - \frac{1}{x^k}\right) = (x^k)^m - \frac{1}{x^{km}} = x^n - \frac{1}{x^n} \ (\forall x \ne 0),$$

Vậy $n = 1998m$ với m lẻ./.

Lời giải của bảng B sẽ đăng trong số tiếp sau

Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

CÁC PHƯƠNG PHÁP VIẾT PHƯƠNG TRÌNH PHÂN GIÁC MỘT GÓC CỦA TAM GIÁC

TRẦN LƯƠNG CÔNG KHANH
(Sở GD-ĐT Bình Thuận)

Sách Hình học lớp 12 (*không chuyên ban*) và lớp 10 (*ban KHTN*) có trình bày về phương trình phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau như sau :

Cho 2 đường thẳng cắt nhau

$(d_1) : a_1x + b_1y + c_1 =$

$(d_2) : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$

Phương trình các phân giác của *các góc* tạo bởi (d_1) và (d_2) là :

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \qquad (1)$$

Trong thực hành, khi viết phương trình phân giác trong (*hoặc ngoài*) một góc của tam giác, nghĩa là một góc hoàn toàn xác định, học sinh thường lúng túng trong việc *chọn một trong hai dấu* $\pm$ trong công thức (1). Bài viết này, thông qua ví dụ cụ thể, giới thiệu các phương pháp viết phương trình phân giác một góc của tam giác nhằm giúp học sinh khắc phục khó khăn đã nêu.

Ví dụ. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(19, \sqrt{35})$, $B(2, 0)$, $C(18, 0)$. Viết phương trình phân giác trong góc $\hat{A}$.

Phương pháp 1. Phương pháp này sử dụng tính chất phân giác một góc của tam giác và khái niệm điểm chia một đoạn thẳng theo một tỉ số cho trước(*).

* Cho ΔABC, phân giác trong và ngoài của góc $\hat{A}$ cắt đường thẳng BC tại T và S. Ta có :

$$\frac{TB}{TC} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{AC}$$

* Điểm M gọi là chia đoạn AB theo tỉ số k nếu $\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}$. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$ thì :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}$$

Bài giải 1. Gọi T là giao điểm của phân giác trong góc $\hat{A}$ với đoạn BC thì :

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB}{AC} = \frac{18}{6} = 3$$

Vì T thuộc đoạn BC nên từ tỉ số trên ta suy ra $\overrightarrow{TB} = -3\,\overrightarrow{TC}$, nghĩa là T chia đoạn BC theo tỉ số -3. Do đó :

$$\begin{cases} x_T = \dfrac{x_B + 3x_C}{1+3} = 14 \\ y_T = \dfrac{y_B + 3y_C}{1+3} = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình phân giác trong AT là :

$$(AT) : \frac{x - 19}{14 - 19} = \frac{y - \sqrt{35}}{0 - \sqrt{35}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{35}x - 5y - 14\sqrt{35} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - \sqrt{35}y - 98 = 0$$

Chú ý: Nếu gọi S là giao điểm của phân giác ngoài góc $\hat{A}$ với đường thẳng BC thì S chia đoạn BC theo tỉ số 3 (*đối với chương trình chuyên ban*) hoặc -3 (*đối với chương trình không chuyên ban*). Do đó $S(26, 0)$ và phương trình phân giác ngoài góc $\hat{A}$ là : $(AS) : \sqrt{35}x + 7y - 26\sqrt{35} = 0$ $\Leftrightarrow 5x + \sqrt{35}y - 130 = 0$.

Phương pháp 2: Tìm một vectơ chỉ phương của đường phân giác nhờ những chú ý sau :

* Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k > 0$ thì $\vec{b} = \dfrac{k}{|\vec{a}|}\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và có độ dài (*môđun*) bằng k.

* Nếu 2 vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ có độ dài bằng nhau thì vectơ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ là một vectơ chỉ phương của đường phân giác góc AOB trong hình thoi $OACB$.

Bài giải 2. Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-17, -\sqrt{35})$, $|\overrightarrow{AB}| = 18$

$\overrightarrow{AC} = (-1, -\sqrt{35})$, $|\overrightarrow{AC}| = 6$

Đặt $\vec{a} = \dfrac{6}{AB}\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{17}{3}, -\dfrac{\sqrt{35}}{3}\right)$

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-1, -\sqrt{35})$

(*) Khái niệm điểm chia một đoạn thẳng theo một tỉ số cho trước được định nghĩa khác nhau giữa sách không chuyên ban và chuyên ban. Bài viết này sử dụng định nghĩa và định lý trong sách Hình học 10 (ban KHTN). Việc áp dụng định nghĩa và định lí của sách Hình học 12 (không chuyên ban) cũng cho kết quả tương tự.

thì $\vec{a}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AC}| = 6$ nên $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = \left(-\frac{20}{3}, -\frac{4\sqrt{35}}{3}\right)$ là một vectơ chỉ phương của phân giác trong góc $\hat{A}$. Do đó, $-\frac{3}{4}\vec{v} = (5, \sqrt{35})$ cũng là một vectơ chỉ phương của phân giác trong góc $\hat{A}$. Phương trình phân giác trong góc $\hat{A}$ là :

$$\begin{cases} x = 19 + 5t \\ y = \sqrt{35} + \sqrt{35}t \end{cases} \quad (t \in R)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{35}x - 5y - 14\sqrt{35} = 0 \Leftrightarrow 7x - \sqrt{35}y - 98 = 0$$

Chú ý. $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ chính là một vectơ chỉ phương của đường phân giác ngoài góc $\hat{A}$.

Phương pháp 3. Dùng tính chất của miền định bởi đường thẳng :

* Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng (d) : $ax+by+c=0$ chia mặt phẳng thành hai miền. Khi điểm $M\ (x_o, y_o)$ lưu động trong một miền xác định, biểu thức $ax_o + by_o + c$ luôn có dấu không đổi và dấu này cũng gọi là dấu của miền chứa điểm M đối với (d).

* Mọi đường thẳng (d) đều chia mặt phẳng thành 2 miền đối dấu.

Bài giải 3. Ta có :

$$(AB) : \frac{x-19}{2-19} = \frac{y-\sqrt{35}}{0-\sqrt{35}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{35}x - 17y - 2\sqrt{35} = 0$$

$$(AC) : \frac{x-19}{18-19} = \frac{y-\sqrt{35}}{0-\sqrt{35}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{35}x - y - 18\sqrt{35} = 0$$

Phương trình phân giác trong góc $\hat{A}$ có dạng:

$$\frac{\sqrt{35}x - 17y - 2\sqrt{35}}{18} = \alpha\frac{\sqrt{35}x - y - 18\sqrt{35}}{6}$$

(với α là một trong hai số ±1)

$$\Leftrightarrow \sqrt{35}(1 - 3\alpha)x + (3\alpha - 17)y + \sqrt{35}(54\alpha - 2) = 0$$

B và C nằm về hai phía khác nhau đối với phân giác trong góc $\hat{A}$ nên dấu của miền chứa B và của miền chứa C phải đối nhau. Dấu của miền chứa B và C lần lượt là dấu của $48\alpha\sqrt{35}$ và dấu của $16\sqrt{35}$ khi thay tọa độ của B và C vào phương trình đường phân giác trong. Suy ra $\alpha = -1$. Vậy phương trình phân giác trong góc $\hat{A}$ là :

$$4\sqrt{35}\,x - 20y - 56\sqrt{35} = 0 \Leftrightarrow 7x - \sqrt{35}y - 98 = 0$$

Chú ý. Đối với phân giác ngoài của góc $\hat{A}$, miền chứa B và C có cùng dấu nên $\alpha = 1$. Phương trình phân giác ngoài góc $\hat{A}$ là :

$$-2\sqrt{35}x - 14y + 52\sqrt{35} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + \sqrt{35}y - 130 = 0.$$

Phương pháp 4. Đưa bài toán đang xét về bài toán viết phương trình phân giác góc nhọn (*hoặc góc tù*) nhờ sử dụng kết quả sau :

* Nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$ thì góc $\angle BAC$ nhọn. Nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$ thì góc $\angle BAC$ tù.

* Cho hai đường thẳng cắt nhau (d_1) : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và (d_2) : $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có hai vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$. Ta có bảng sau :

	Phương trình phân giác góc nhọn tạo bởi (d_1) và (d_2)	Phương trình phân giác góc tù tạo bởi (d_1) và (d_2)
$\vec{n_1}.\vec{n_2} > 0$	$t_1 = -t_2$	$t_1 = t_2$
$\vec{n_1}.\vec{n_2} < 0$	$t_1 = t_2$	$t_1 = -t_2$

trong đó, t_1, t_2 là khoảng cách đại số từ $M(x, y)$ đến (d_1), (d_2).

Bài giải 4. Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-17, -\sqrt{35})$,

$$\overrightarrow{AC} = (-1, -\sqrt{35})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 17 + 35 > 0$$

$\Rightarrow$ góc $\angle BAC$ là góc nhọn. Vậy phân giác trong góc $\hat{A}$ chính là phân giác của góc nhọn tạo bởi AB, AC.

Phương trình các đường thẳng AB, AC và các vectơ pháp tuyến lần lượt là :

(AB) : $\sqrt{35}x - 17y - 2\sqrt{35} = 0$

(AC) : $\sqrt{35}x - y - 18\sqrt{35} = 0$

$\vec{n_1} = (\sqrt{35}, -17)$; $\vec{n_2} = (\sqrt{35}, -1)$

$\vec{n_1}.\vec{n_2} = 35 + 17 > 0$ nên phương trình phân giác góc nhọn $\angle BAC$ là :

$$\frac{\sqrt{35}x - 17y - 2\sqrt{35}}{18} = -\frac{\sqrt{35}x - y - 18\sqrt{35}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{35}x - 5y - 14\sqrt{35} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - \sqrt{35}y - 98 = 0$$

Chú ý. Phương trình phân giác góc ngoài sẽ có dạng $t_1 = t_2$. Dĩ nhiên, phương pháp này không dùng được để viết phương trình phân giác góc vuông.

Trên đây là các phương pháp viết phương trình phân giác một góc của tam giác. Khi bài toán viết phương trình phân giác là một câu nhỏ của một bài toán lớn hơn, tùy theo giả thiết và yêu cầu của bài toán mà ta chọn cách giải có lợi nhất. Chẳng hạn, nếu bài toán chỉ cho tọa độ 3 đỉnh A, B, C và yêu cầu tính độ dài 3 cạnh AB, AC, BC, viết phương trình phân giác trong góc $\hat{A}$, tính tọa độ giao điểm của phân giác trong với BC thì ta nên dùng phương pháp 1. Nếu bài toán cho tọa độ 3 đỉnh A, B, C và yêu cầu viết phương trình tham số rồi suy ra phương trình tổng quát của phân giác trong góc $\hat{A}$ thì nên chọn phương pháp 2. Nếu bài toán không cho tọa độ đỉnh mà lại cho phương trình 3 đường thẳng AB, AC, BC và yêu cầu viết phương trình phân giác trong góc $\hat{A}$ thì có thể dùng phương pháp 3 hoặc 4.

Trong tạp chí THTT số 248 (2/1998) đã trình bày về phương tích của một điểm đối với một đường cônic. Bài báo này tiếp tục nghiên cứu vấn đề : Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường cônic là đường gì ?

ĐƯỜNG CÔNIC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG CÔNIC

NGUYỄN ĐẠO PHƯƠNG
(GV trường PTTH Hà Nội - Amsterdam)

I. ĐƯỜNG CÔNIC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG CÔNIC

1) Phương tích của điểm $M(x_0, y_0)$ đối với đường cônic :

Ta đã biết trên mặt phẳng tọa độ với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, phương tích của điểm $M(x_0, y_0)$ đối với đường cônic

$(1-e^2)x^2 - 2pex + y^2 = 0$ (Γ) là

$$\mathbf{P}_{M/\Gamma(x,y)} = (1-e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2$$

Nếu tịnh tiến và quay hệ trục Oxy một góc nào đó thì với hệ trục tọa độ mới IXY điểm M có tọa độ X_o, Y_o, đường $\Gamma(x, y) = 0$ có phương trình mới $\Gamma(X, Y) = 0$ là :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F=0$$

và phương tích của điểm $M(X_o, Y_o)$ với $\Gamma(X, Y) = 0$ sẽ là :

$$\mathbf{P}_{M/\Gamma(X,Y)} = AX_o^2+2BX_oY_o+CY_o^2+2DX_o+2EY_o+F.$$

Do đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy, phương tích của điểm $M(x_o, y_o)$ với đường cônic

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = 0$ là :

$$\mathbf{P}_{M/\Gamma(x,y)} = Ax_o^2+2Bx_oy_o+Cy_o^2+2Dx_o+2Ey_o+F$$

2) Đường cônic đẳng phương của hai đường cônic

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường cônic :

$$A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1 = 0 \quad (\Gamma_1)$$

$$A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2D_2x + 2E_2y + F_2 = 0 \quad (\Gamma_2)$$

Ta tìm tập hợp các điểm $M(x_o, y_o)$ có cùng phương tích đối với Γ_1 và Γ_2, nghĩa là

$$\mathbf{P}_{M/\Gamma_1(x,y)} = \mathbf{P}_{M/\Gamma_2(x,y)}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_1(x_o; y_o) - \Gamma_2(x_o; y_o) = 0$$

hay là

$$(A_1-A_2)x_o^2 + 2(B_1-B_2)x_oy_o + (C_1-C_2)y_o^2 + 2(D_1-D_2)x_o + 2(E_1-E_2)y_o + F_1 - F_2 = 0$$

Đặt $A_3 = A_1-A_2$, $B_3 = B_1-B_2$, $C_3 = C_1-C_2$, $D_3 = D_1-D_2$, $E_3 = E_1-E_2$, $F_3 = F_1-F_2$ ta được

$$A_3x_o^2+2B_3x_oy_o+C_3y_o^2+2D_3x_o+2E_3y_o+F_3 = 0$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường cônic có phương trình là $A_3x^2 + 2B_3xy + C_3y^2 + 2D_3x + 2E_3y + F_3 = 0$ (Γ_3) (1) và gọi là đường cônic đẳng phương của hai đường cônic Γ_1, Γ_2. Biểu diễn hình học đường cônic đẳng phương (cũng là biểu diễn hình học đường bậc hai có phương trình (1)), ta sẽ được một trong ba đường cônic : elip, hypebol, parabol hoặc một đường tròn, một điểm, một cặp đường thẳng trùng nhau, song song hoặc cắt nhau, hoặc các đường ảo (*).

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

1. Cho

$x^2-y = 0$ (Γ_1)

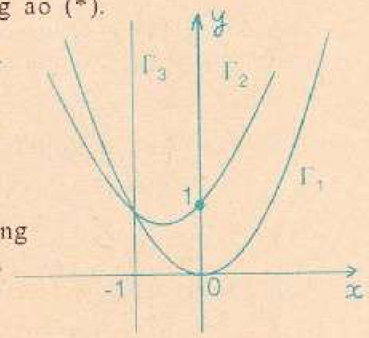
$x^2+x+1-y = 0$ (Γ_2)

Đường cônic đẳng phương của chúng là

$x + 1 = 0$ (Γ_3)

(một đường thẳng)

(hình 1)



Hình 1

2. Cho $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ (Γ_1)

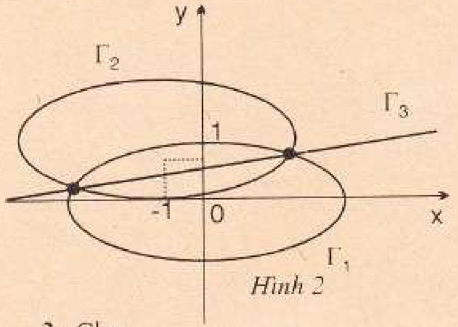
$x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$ (Γ_2)

Đường cônic đẳng phương của chúng là :

$2x - 8y + 5 = 0$ (Γ_3) (một đường thẳng)

(hình 2)

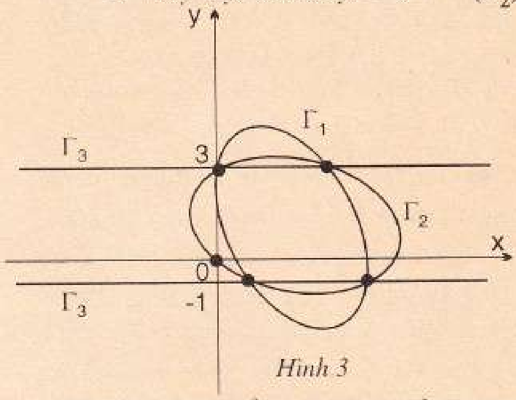
(*) Về biểu diễn hình học một đường bậc hai, bạn đọc có thể tìm thấy trong cuốn sách "Hình học cao cấp", tập I, giáo sư Nguyễn Đình Trí chủ biên hoặc trong cuốn sách "Tuyển chọn các bài toán về ba đường cônic" của các tác giả Nguyễn Đạo Phương và Phan Huy Khải.



Hình 2

3. Cho

$$5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18 = 0 \quad (\Gamma_1)$$
$$5x^2+4xy+8y^2-24x-24y = 0 \quad (\Gamma_2)$$



Hình 3

Đường cônic đẳng phương của chúng là :

$$6y^2 - 12y - 18 = 0 \ (\Gamma_3)$$

$$\Gamma_3\ (x,\ y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=3 \end{array}\right.$$

(cặp đường thẳng song song) (hình 3)

4. Cho $x^2+4y^2-3x+8y = 0$ (Γ_1)

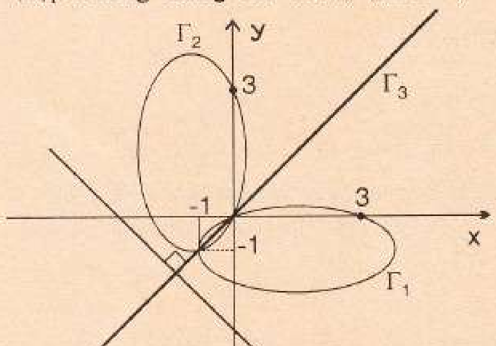
$$4x^2+y^2+8x-3y = 0 \ (\Gamma_2)$$

Đường cônic đẳng phương của chúng là :

$$(x-y)(3x+3y-11) = 0 \ (\Gamma_3)$$

$$\Gamma_3(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-x=0 \\ 3x+3y-11=0 \end{array}\right.$$

(cặp đường thẳng cắt nhau) (hình 4).



Hình 4

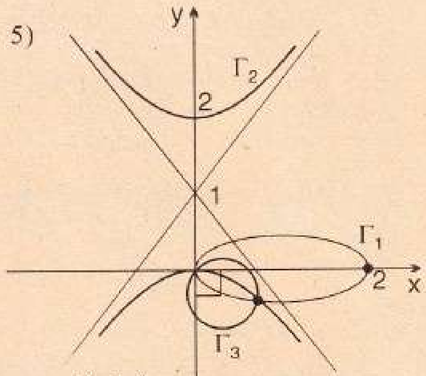
5. Cho $x^2+3y^2-2x = 0$ (Γ_1)

$$x^2-y^2+2y = 0 \ (\Gamma_2)$$

Đường cônic đẳng phương của chúng là :

$$x^2+y^2-x+y = 0 \quad (\Gamma_3)$$

(đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$) (hình 5)



Hình 5

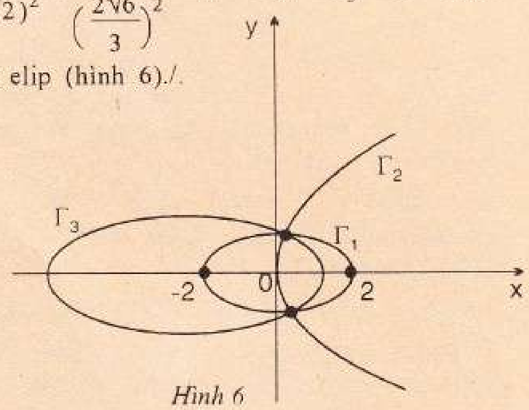
6. Cho $x^2+4y^2-4 = 0$ (Γ_1)

$$-4x+y^2 = 0 \ (\Gamma_2)$$

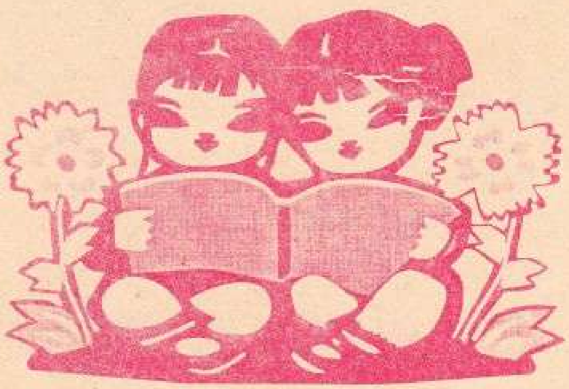
Đường cônic đẳng phương của chúng là :

$$x^2+4x+3y^2-4 = 0 \qquad (\Gamma_3) \quad \text{hay}$$

$$\frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 1.$$ Vậy Γ_3 là một đường elip (hình 6)./.



Hình 6



Từ máy TURING đến máy VI TÍNH

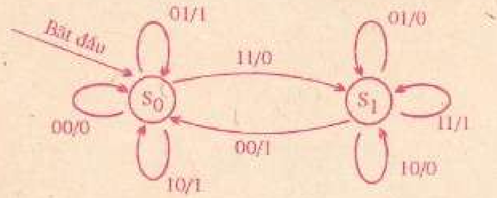
PHẠM TRÀ ÂN
(*Viện Toán học*)

Nói một cách ngắn gọn, Tin học là ngành khoa học về xử lí thông tin bằng máy tính điện tử. Trong Tin học, máy tính vừa là công cụ vừa là đối tượng nghiên cứu. Để nghiên cứu máy tính có nhiều cách. Các nhà vật lí dùng các phương pháp vật lí, các nhà tin học dùng các phần mềm tin học, còn các nhà toán học lại sáng tạo ra các mô hình toán học của máy tính, rồi nghiên cứu các khía cạnh toán học khác nhau trên mô hình này, từ đó rút ra máy tính có thể làm được gì và không làm được gì. Sau đây là một thí dụ, và để đơn giản ta xét trường hợp máy tính chỉ có bộ nhớ trong (không có bộ nhớ ngoài).

Vì chỉ có bộ nhớ trong, nên cho dù có lớn đến mấy, bộ nhớ của máy cũng chỉ là hữu hạn. Ta xét một máy toán học, gọi là ôtômát hữu hạn (trạng thái), kí hiệu là A, gồm các bộ phận sau : tập S hữu hạn là tập các trạng thái : tập I hữu hạn là tập các tín hiệu vào, tập O hữu hạn là tập các tín hiệu ra, hàm $f : S \times I \to S$ là hàm chuyển trạng thái, hiểu theo nghĩa với mọi $s \in S$, $a \in I \Rightarrow f(s, a) = s' \in S$; hàm g: $S \times I \to O$ là hàm ra ; phần tử $s_0 \in S$ là trạng thái ban đầu. Các bộ phận này có quan hệ với nhau như sau : tại thời điểm bắt đầu làm việc, máy ở trạng thái s_0, khi nhận tín hiệu vào $x_1 \in I$, máy sẽ chuyển sang trạng thái mới $s_1 = f(s_o, x_1)$ và cho tín hiệu ra $y_1 = g(s_o, x_1)$. Tiếp theo khi nhận tín hiệu vào $x_2 \in I$, máy sẽ chuyển sang trạng thái $s_2 = f(s_1, x_2)$ và cho ra $y_2 = g(s_1, x_2)$ v.v... Như vậy máy $A = (S, I, O, f, g, s_0)$ là bộ 6 và có thể biểu diễn bằng một trong hai cách tương đương sau đây. Thí dụ : máy A có $S = \{s_o, s_1\}$, $I = \{00, 01, 10, 11\}$, $O = \{0, 1\}$, với các hàm f, g được cho bởi bảng 1. Bảng 1 hoàn toàn xác định máy A và được gọi là dạng bảng của máy. Bây giờ ta xác định một đồ thị (graph) có hướng theo quy tắc sau : tập đỉnh của đồ thị là S, cạnh gán nhãn a/b từ đỉnh s_i đến đỉnh s_j nếu có $s_j = f(s_i, a)$ và $b = g(s_i, a)$. Ví dụ máy được cho bởi bảng 1 sẽ có đồ thị như hình 2, đồ thị như thế gọi là dạng đồ thị của máy. Bây giờ ta muốn thiết kế một máy A thực hiện phép cộng 2 số bất kì ở dạng nhị phân. Kí hiệu $(x)_2$ là dạng nhị phân của x, ví dụ $(5)_2 = 101$, $(13)_2 = 1101$, $(18)_2 = 10010$.

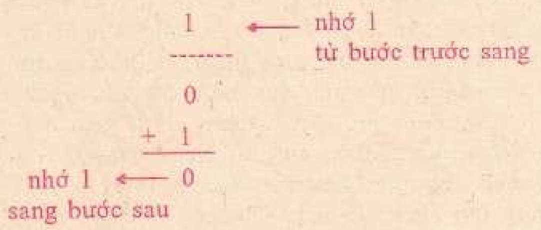
Trạng thái	f				g			
	Tín hiệu vào				Tín hiệu vào			
	00	01	10	11	00	01	10	11
s_0	s_0	s_0	s_0	s_1	0	1	1	0
s_1	s_0	s_1	s_1	s_1	1	0	0	1

Bảng 1. *Dạng bảng của máy A*



Hình 2. *Dạng đồ thị của máy A*

Giả sử ta muốn cộng 2 số x và y và : $(x)_2 = x_1x_2...x_k$, $(y)_2 = y_1y_2...y_k$, với $x_i, y_i \in \{0, 1\}$. (Giả thiết $(x)_2$, $(y)_2$ có cùng độ dài không làm mất tính tổng quát, vì nếu không ta thêm các số 0 vào bên trái của số có ít chữ số, để số chữ số của chúng trở thành bằng nhau mà không làm thay đổi đến kết quả của phép cộng). Như vậy, các tín hiệu vào của ôtômát A cần xây dựng sẽ là các bộ có thể (x_i, y_i) với $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ nên $I = \{00, 01, 10, 11\}$. Tín hiệu ra của A sẽ là kết quả của phép cộng $x_i + y_i$ (môđulô 2), nên $O = \{0, 1\}$. Phép cộng $x_i + y_i$ (môđulô 2) có nhớ và máy sẽ dùng trạng thái để nhớ : máy sẽ ở trạng thái s_o nếu như phép cộng ở bước này không có nhớ, và máy sẽ ở trạng thái s_1 nếu như có nhớ. Ví dụ phép cộng 0+1 (môđulô 2) (tín hiệu vào 01) có nhớ 1 từ bước trước chuyển sang (trạng thái s_1) sẽ được thực hiện trên giấy và trên máy như hình 3 và 4, lúc đó $g(s_1, 01) = 0$ và $f(s_1, 01) = s_1$. Đến đây, dựa vào quy tắc vừa nêu, ta đã có thể xác định được hoàn toàn các hàm f và g dưới dạng



Hình 3. *Thực hiện phép cộng 0+1 (có nhớ 1 từ bước trước) trên giấy.*

$$s_1 \xrightarrow{01/0} s_1$$

Hình 4. *Thực hiện phép cộng 0+1 (có nhớ 1 từ bước trước) trên máy A.*

bảng, đó chính là các hàm f và g ở bảng 1. Như vậy bảng 1 và hình 2 chính là các dạng biểu diễn của máy cộng A. Ta có thể kiểm nghiệm lại hoạt động của máy cộng này trên ví dụ $(13)_2 + (5)_2 = (18)_2$ trên giấy (hình 5), và trên máy (hình 6).

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\quad 101 \\ \hline 10010 \end{array}$$

Hình 5. *Phép cộng $(13)_2 + (5)_2 = (18)_2$ trên giấy*

vào	x		1	1	0	1
	y		0	1	0	1
trạng thái	s	s_1	s_1	s_0	s_1	s_0
ra	z	1	0	0	1	0

Hình 6. *Phép cộng $(13)_2 + (5)_2 = (18)_2$ trên máy A.*

Như vậy mọi máy tính chỉ cần có bộ nhớ trong tối thiểu là 2 đều có thể thực hiện được phép cộng 2 số bất kì ở dạng nhị phân. Thật đơn giản quá phải không các bạn ! Nhưng tình huống sẽ khác đi nếu ta xét phép nhân 2 số bất kì ở dạng nhị phân. Về mặt trực quan ta thấy để nhân 2 số ta cần đến thông tin về độ dài của số nhân và số bị nhân. Vì vậy cho dù bộ nhớ trong của máy có lớn đến mấy, cũng chỉ là hữu hạn, và ta chỉ cần xét phép nhân của 2 số đủ lớn (so với dung lượng của bộ nhớ trong) là máy sẽ không còn đủ sức "nhớ" nữa trong quá trình thực hiện phép nhân 2 số này. Sẽ xuất hiện hiện tượng "tràn bộ nhớ" và máy sẽ rối loạn thông tin, không tiếp tục làm việc được nữa. Do đó để thực hiện phép nhân 2 số bất kì ở dạng nhị phân, dùng máy chỉ có bộ nhớ trong là không đủ, mà phải dùng đến máy có thêm bộ nhớ ngoài vô hạn tiềm năng (hiểu theo nghĩa tại mọi thời điểm dung lượng của bộ nhớ ngoài đều là hữu hạn, nhưng cần đến bao nhiêu có bấy nhiêu). Đó chính là máy Turing, một mô hình toán học của máy tính hiện đại, đã được nhà toán học Turing đề xuất vào năm 1938, góp phần tạo ra "Cái thủa ban đầu" của Tin học./.

PROBLEMS... *(Tiếp trang 13)*

points M_i, N_i, P_i lie on the circle with center O_i $(i = 1, 2)$). Calculate the area of triangle AP_1P_2 in terms of R_1 and R_2.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T5/259. Let be given four positive numbers a, b, c, d. Suppose that the equation $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ has four roots (not necessarily distinct) in the interval $(0; \frac{1}{2})$. Prove that

$$21a + 164c \geq 80b + 320d.$$

T6/259. Let be given a function $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ satisfying the condition $f(4x)+1999f(2x) = 2000 f(x)$ for every $x \in \mathbf{R}^+$. Prove that there exists a real number $k>1$ such that $f(x) = f(kx)$ for every $x \in \mathbf{R}^+$.

T7/259. Let (x_n), (y_n), (z_n), $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ be three sequences of numbers defined by :

x_0, y_0, z_0 are given positive numbers,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n z_n},\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n x_n},\ z_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n y_n}$$

for every $n \geq 0$.

Find all real numbers a such that $x_n > a\sqrt[3]{n}$ for every n.

T8/259. Let be given a triangle ABC. The excribed circles of ABC touch the sides BC, CA, AB respectively at A_1, B_1, C_1. The lines AA_1, BB_1, CC_1 are concurrent at N. Let D, E, F be respectively the orthogonal projections of N on BC, CA, AB. Prove that

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

where R and r are respectively the circumradius and inradius of ABC./.

Đính chính : Đề toán T10/258 tháng 12/1998 đã in nhầm giá trị n. Xin sửa lại như sau :

"Cho $\alpha \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$. Đặt $n = \left[\dfrac{2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right] + 1$

Hỏi trong không gian có thể dựng được hay không n đường thẳng cùng đi qua một điểm và góc giữa 2 đường thẳng bất kì trong chúng không nhỏ hơn α ? Vì sao ?"

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

Nhìn ra thế giới

LTS. Bắt đầu từ tháng 1/1999 Tạp chí THTT sẽ đăng các đề thi chọn học sinh giỏi toán quốc gia của các nước trên thế giới. Xin mời các bạn thử sức thi tài giải các bài toán này và gửi ngay về Tòa soạn tạp chí Toán học và Tuổi trẻ 25 Hàn Thuyên, Hà Nội. Tạp chí sẽ đăng lời giải của bạn nào gửi về sớm nhất và sẽ có tặng phẩm cho lời giải hay.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA ÔXTRALIA (2-1995)

Ngày thứ nhất (4 giờ)

1. Chứng minh rằng không có nhiều hơn 9 số nguyên tố ở giữa 10 và 10^{29} mà chúng được viết trong hệ thập phân bởi toàn chữ số 1.

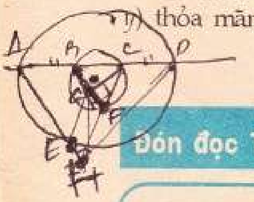
2. Trên một đường tròn chọn $4n$ điểm (n là số nguyên dương) và đánh số thứ tự liên tiếp 1, 2, 3, ..., $4n$ theo chiều kim đồng hồ. Tất cả $2n$ "điểm chẵn" (đánh số chẵn) được chia thành n cặp, và các điểm của mỗi cặp được nối bởi một dây cung màu xanh. Tương tự tất cả $2n$ "điểm lẻ" (đánh số lẻ) được chia thành n cặp, và các điểm của mỗi cặp được nối bởi một dây cung màu vàng. Việc chọn các điểm và các dây cung được thực hiện sao cho không có 3 dây cung (cùng màu, hoặc trộn lẫn 2 màu) có 1 điểm chung.

Chứng minh rằng có ít nhất n điểm ở đó dây cung xanh và dây cung vàng giao nhau.

3. Một đường thẳng cắt 2 đường tròn đồng tâm tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự. Kẻ các dây cung song song AE và BF (mỗi dây thuộc một đường tròn). Kẻ CG vuông góc với BF tại G và DH vuông góc với AE tại H. Chứng minh rằng $GF = HE$.

4. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn

$$y^2(x-1) = x^5-1.$$



Ngày thứ hai (4 giờ)

5. Tìm tất cả số thực r sao cho có đúng một cặp số thực (x, y) thỏa mãn các điều kiện :

(i) $y - x = r$

(ii) $x^2 + y^2 + 2x \le 1$.

6. Với mỗi số nguyên dương n, giả sử $f(n, 0)$, $f(n, 1)$, ..., $f(n, 2n)$ là các số nguyên được xác định như sau :

đa thức $f(n, 0) + f(n, 1)x + f(n, 2)x^2 + ... + f(n, 2n)x^{2n}$ đồng nhất với đa thức $(x^2+x+1)^n$.

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn giá trị n mà có đúng 3 trong các số $f(n, k)$ ($k = 0, 1, ..., 2n$) là lẻ.

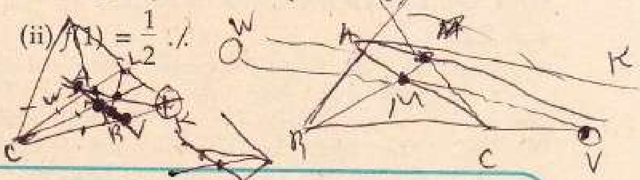
7. Các đường thẳng nối 3 đỉnh của tam giác ABC với một điểm (trong cùng mặt phẳng này) cắt các cạnh BC, CA, AB tại các điểm K, L, M tương ứng. Đường thẳng qua M mà song song với KL cắt BC tại V và cắt AK tại W. Chứng minh rằng $VM = MW$.

8. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}^+$ là tập hợp các số thực dương) sao cho :

(i) $f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right)$ với mọi số thực dương x, y ;

$K(V, M, W, C) = -1 \Rightarrow K(C, A, A, L) = 1$

(ii) $f(1) = \frac{1}{2}$.



BÀN TRÒN ĐỌC THƠ

• Nhân dịp đầu năm 1999, CLB nhận được bài thơ của bạn Nguyễn Thạc Dũng, lớp A_1K43, khoa Toán-Cơ, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, xin giới thiệu cùng bạn đọc :

CHÚC MỪNG NĂM MỚI

Chúc *xuân Toán học ngự đất trời*
Mừng *thay báo Toán đến muôn nơi*
Năm *tháng trưởng thành từ trang báo*
Mới *vạn tài năng, mới cuộc đời.*

• Nhân vui Xuân, bạn Phạm Ngọc Thanh (69, Trường Thi, TP Thanh Hóa) góp về một bài thơ tình có rất nhiều ... nguyên tố hóa học. Mong nhận được phát hiện của các bạn về các nguyên tố này.

NHỚ

Những chiều thơ thẩn dọc sân ga
Nhìn lá vàng rơi lại nhớ nhà
Nhớ sớm ra đi em gái nhỏ
Nước mắt lăn dài lúc tiễn ta

Nhớ mái chèo khua, tiếng ru hời
Nhớ tiếng em ca lẫn tiếng cười
Chẳng biết quê nhà em có nhớ
U buồn nhìn mãi áng mây trôi.

C.L.B

KẾT QUẢ "CHƠI ĐÔ-MI-NÔ KIỂU TOÁN" (số 257)

Không ngờ "trò" này lại được đông đảo bạn đọc "ham chơi" đến thế ! Bạn "nhí" nhất là *Ngô Thị Huyền Trang*, 5A, trường Tiểu học Tô Hiệu, Buôn Mê Thuột, **Đắc Lắc**. Đại biểu vùng cao là *La Ái Lân*, 11D, trường dân tộc nội trú tỉnh **Lâm Đồng**. Ở tận cực bắc đất nước là *Nguyễn Trang*, số 3 phố Ngô Gia Tự, phường Đông Kinh, thị xã **Lạng Sơn**. Xa và có lẽ "cao niên" nhất là bạn *Lê Văn Tú*, $17D_3$, trường Cao đẳng Sư phạm tỉnh **Bạc Liêu**. Bạn "chơi" có lập luận nhất và khẳng định đúng : "Chỉ có một cách chơi !" là bạn *Đinh Hải Yến*, $10A_1$, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** (một số bạn có nói ra ý này nhưng... chỉ nói thôi!). Nhiều bạn đã cắt thật và cho vào túi... nilông gửi về Câu lạc bộ. Đáp án ở hình bên là của tất cả các bạn. Những bạn gửi về nhanh hơn là : *Nguyễn Bá Thịnh*, chợ Cầu Hai, HTX Bắc Hà, Phú Lộc, **Thừa Thiên - Huế**; *Nguyễn Thị Hoài Vũ*, 10^7, PTTH Hoàng Hoa Thám, **Đà Nẵng**; *Phạm Thị Thanh Hà*, 10G, PTTH Phan Đình Phùng, **Hà Tĩnh**; *Hoàng Ngọc Quang*, xóm 5, xã Tây Lương, Tiền Hải, **Thái Bình**; *Trần Thanh Lâm*, 9D, PTTH Hoài Ân, **Bình Định**; *Phan Thanh Huyền*, $5A_1$, THCS Nguyễn Tri Phương, Quận Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Trịnh Lan Hương*, 7H, THCS Trưng Vương, **Hà Nội**; *Trần Vĩnh Hùng*, 9A, THCS Nguyễn Hàm Ninh, Ba Đồn, Quảng Trạch, **Quảng Bình**; *Đào Lê Anh*, 6E, trường Đặng Thai Mai, TP Vinh, **Nghệ An**.

0	6	2	5	0	0	5
0	4	3	2	6	6	2
6	1	6	1	3	1	1
6	1	2	5	1	1	6
0	2	2	5	3	4	4
3	1	2	4	0	4	4
3	0	3	3	5	5	4
5	5	0	2	6	3	4

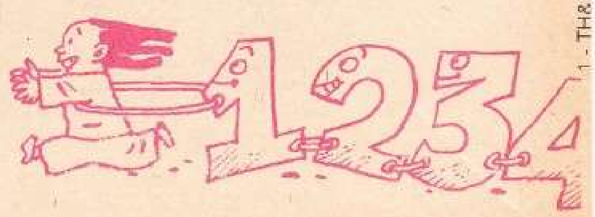
L.T.N

"Bệnh" lần này được sự tham gia "hội chẩn" cỡ "toàn quốc" ! Công thức chẳng lẽ sai ? Lời giải như rất đúng. Còn kết quả cuối cùng nhìn như vô lí : $I = I + 1$ (!). Bạn *Phạm Minh Đức*, K83, Yên Hòa, Cầu Giấy, **Hà Nội** đã "phán" rất đúng: $I = 1 + I$ cũng không có gì lạ ! Bởi I là kí hiệu cho một tập hợp các hàm, mà $1 + I$ cũng là tập hợp đó chứ còn gì nữa ? Vậy thì $I = 1 + I$! "Bác sỹ" *Hoàng Anh Nam*, PTTH CB Kinh Môn, **Hải Dương** khẳng định : "Tất cả đều đúng !". Như vậy, nhiều bạn đã nhận ra dấu đẳng thức ở đây là dấu đẳng thức giữa các tập hợp, chứ không phải đẳng thức giữa các số ! Vậy thì lời giải ấy đi đến cái gì ? Bạn *Hà Chi Thiện*, 12C, PTTH Tam Nông, Tam Thanh, **Phú Thọ** kết luận : "Lời giải ấy không đi đến kết quả gì !. Một số bạn đã mắc sai lầm khi nghi ngờ lời giải. Còn một số bạn hiểu ý nhưng diễn đạt chưa... chuẩn và dễ hiểu ! Bài toán này giải quyết như sau :

$$I = \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

Xin cám ơn thêm các bạn : *Tô Thị Ngọt*, 12B, PTTH Nguyễn Viết Xuân, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Quang Long*, 4D, K.35, Khoa Toán - Tin, ĐHSP-ĐHQG Hà Nội; *Kiều Mạnh Hùng*, K39A, Khoa toán, ĐHSP Vinh, **Nghệ An**; *Đào Xuân Dũng*, trường Trung học Kĩ thuật, **Quảng Ninh**; *Nguyễn Thị Hân*, GV trường PTTH Cao Bá Quát, Tân Hòa, Quốc Oai, **Hà Tây**.

KIHIVI



CHƠI KỲ NÀY:

CÓ BAO NHIÊU CON ĐƯỜNG MỪNG XUÂN MỚI

Bạn chỉ được đi từ một ô sang ô kề ô này. Bắt đầu từ ô trên cùng ở góc bên trái và các bạn

M	Ừ	N	G	X	U	Â	N	M	Ớ	I
Ừ	N	G	X	U	Â	N	M	Ớ	I	
N	G	X	U	Â	N	M	Ớ	I		
G	X	U	Â	N	M	Ớ	I			
X	U	Â	N	M	Ớ	I				
U	Â	N	M	Ớ	I					
Â	N	M	Ớ	I						
N	M	Ớ	I							
M	Ớ	I								
Ớ	I									
I										

hãy đi theo luật trên để được một hành trình mà các chữ ở các ô đi qua sẽ là **mừng xuân mới**. Có đúng bao nhiêu con đường như thế ?

NGỌC MAI

MỘT NGHIỆM ĐI ĐÂU

Bài toán: Giải phương trình nghiệm nguyên sau :

$$x^2y^2 - x^2 - 3y^2 - 2x + 1 = 0$$

Lời giải. $x^2y^2 - x^2 - 3y^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2y^2 - 3y^2 = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow y^2(x^2 - 3) = (x + 1)^2$ (*)

y^2; $(x + 1)^2$ là các số chính phương nên $x^2 - 3$ là số chính phương. Do đó đặt $x^2 - 3 = z^2$ ($z \in \mathbf{Z}$)

$\Leftrightarrow x^2 - z^2 = 3 \Leftrightarrow (|x| + |z|)(|x| - |z|) = 3$

ta có $|x| + |z| \geq |x| - |z|$; 3 và $|x| + |z|$ không âm nên $|x| - |z|$ không âm.

Do vậy chỉ có $\begin{cases} |x| + |z| = 3 \\ |x| - |z| = 1 \end{cases} \Rightarrow 2|x| = 4$

$\Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$.

Thay $x = 2$ vào (*) ta có $y = \pm 3$.

Thay $x = -2$ vào (*) ta có $y = \pm 1$.

Thử lại : Ta có các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là ($x = 2$; $y = 3$), ($x = 2$; $y = -3$); ($x = -2$; $y = 1$); ($x = -2$; $y = -1$).

Nhưng phương trình còn có nghiệm nguyên ($x = -1$; $y = 0$) nữa. Sai ở đâu mà bị mất nghiệm nguyên này? Hãy tìm lời giải đúng.

NGUYỄN ĐỨC TÂN
(TP Hồ Chí Minh)

Giải đáp bài

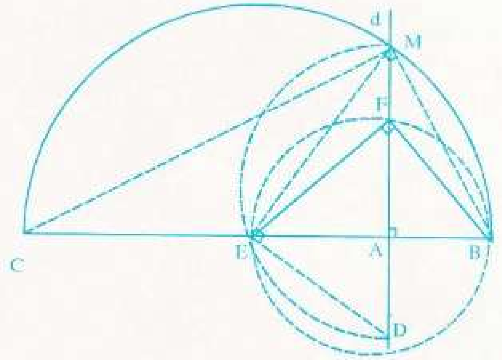
DỰNG ĐOẠN THẲNG

(Theo cách giải của *Nguyễn Trung Tuyến*, 10A3, *Lê Quang Vinh*, 10 Lý, Trường PTTH chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc)**

Lấy điểm A nằm giữa hai điểm B, C sao cho $AB = a$ (cm) và $CA = 6a$ (cm). Dựng nửa đường tròn đường kính CB.

- Qua A kẻ đường thẳng $d \perp CB$ tại A. Đường thẳng d cắt nửa đường tròn tại M. Tam giác CMB vuông tại M :

$MA = \sqrt{CA.AB} = \sqrt{6a.a} = a\sqrt{6}$



- Trên tia đối của tia AM lấy điểm D sao cho $AD = a$. Dựng đường tròn đường kính MD, cắt CA tại E. Tam giác MED vuông ở E nên :

$EA = \sqrt{MA.AD} = \sqrt{a\sqrt{6}.a} = a\sqrt[4]{6}$

- Dựng đường tròn đường kính EB, cắt AM tại F. Tam giác EFB vuông ở F nên $FA = \sqrt{EA.AB} = \sqrt{a\sqrt[4]{6}.a} = \sqrt[8]{6} = a.6^{1/8}$(cm).

Tổng quát hơn ta luôn dựng được đoạn thẳng $a.b^{1/2^n}$ với a, b dương và $n \in N^*$.

BÌNH PHƯƠNG

1999 VÀ CÁC CHỮ SỐ 2

Năm 1999 đã đến. Các bạn hãy dùng các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa để khi thực hiện các phép tính đó chỉ với các chữ số 2 thì được kết quả là số 1999.

NGÔ HÂN

Minh họa cho CLB : **HỮU KHOA**

KHỐI CHUYÊN TOÁN - TIN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI.

* Thành lập : tháng 9 năm 1965.
* Số lượng giáo viên : 12 trong đó có 6 giáo viên Toán.
* Từ năm 1989 mở thêm hệ Tin học.
* Tốt nghiệp phổ thông trung học : 100%.
* Trúng tuyển vào Đại học : 100% với nhiều học sinh đạt điểm cao được đi du học ở nước ngoài.
* Hơn 100 giải học sinh giỏi Quốc gia
* 47 giải Quốc tế về môn Toán.
* Ba học sinh đạt huy chương vàng Quốc tế môn Toán hai năm liền là : Ngô Bảo Châu, Đào Hải Long, Ngô Đắc Tuấn.
* 17 giải Quốc tế về Tin học.
* Hai học sinh đạt giải Tin học Quốc tế hai năm liền là : Phạm Bảo Sơn, Bùi Thế Duy.
* Nơi đầu tiên có học sinh nữ thi Quốc tế và đoạt giải : *Nguyễn Thị Thiều Hoa*, huy chương bạc môn Toán tại Áo, *Trần Minh Châu*, huy chương bạc môn Tin học tại Thụy Điển.
* Nhiều học sinh đạt giải trong các kì thi giải toán trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
* Gần 200 học sinh cũ có học vị Phó tiến sĩ, 20 học sinh đạt học vị Tiến sĩ. tiêu biểu : Nguyễn Tiến Dũng 24 tuổi bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ tại Pháp, Lê Thị Hồng Vân 28 tuổi là nữ Tiến sĩ trẻ nhất của Việt Nam được giải thưởng Viện Vật lí Triest của Ý.
* Giáo sư Tiến sĩ Đào Trọng Thi, Phó Giám đốc Đại học Quốc gia Hà Nội và GSTS Trần Văn Nhung, Vụ trưởng Vụ hợp tác Quốc tế của Bộ Giáo dục và Đào tạo là các học sinh cũ của Khối.
* Giáo viên Toán của Khối đã tham gia nhiều đề tài khoa học, viết nhiều cuốn sách quý, biên soạn nhiều đề thi Đại học, tham gia bồi dưỡng giáo viên và học sinh nhiều tỉnh, thành phố trong cả nước.
* Năm 1995, Khối được Nhà nước tặng thưởng Huân chương lao động hạng nhì.

Các thầy giáo của Khối : Phan Đức Chính, Nguyễn Vũ Lương, Phạm Văn Hùng là Trưởng Đoàn, Phó Đoàn và quan sát viên ở kỳ thi 38^{th} IMO tại Achentina.

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT61M9

Chế bản tại Tòa soạn.
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 1999

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng