TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

3 2007
Số 357

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04)5121607, (04)5121606; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

VỀ BÀI TOÁN IMO lần thứ 44

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

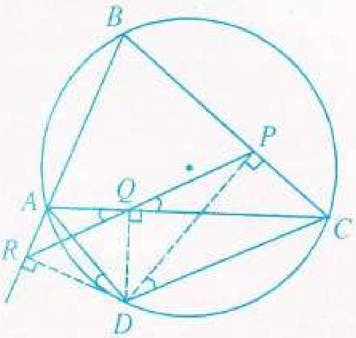
Trong kì thi Toán Quốc tế – IMO lần thứ 44 được tổ chức tại Tokyo Nhật Bản ngày 13–14/7/2003 có một bài toán hình học do Phần Lan đề nghị (Bài 4, thi ngày 14/7/2003) như sau:

✪**Bài toán(*).** *Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q và R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng minh rằng PQ = QR khi và chỉ khi các đường phân giác của các góc* $\widehat{ABC}$ *và* $\widehat{ADC}$ *cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AC.*

Khi vẽ hình bài toán (*), chúng ta nhận thấy rằng có nét của bài toán đường thẳng Simson. Trước hết chúng ta chứng minh bài toán đó.

✪**Bài toán 1.** *Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q và R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng minh rằng P, Q, R thuộc một đường thẳng* (gọi là *đường thẳng Simson*).

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Nối Q với R, Q với P. Ta phải chứng minh $\widehat{AQR} = \widehat{CQP}$.

Thật vậy, từ đề bài ta có các tứ giác $AQDR$, $DCPQ$, $BPDR$ đều là tứ giác nội tiếp.

Do đó $\widehat{AQR} = \widehat{ADR}$ (1); $\widehat{CQP} = \widehat{PDC}$ (2).

Mặt khác $\widehat{RDP} = \widehat{ADC}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$).

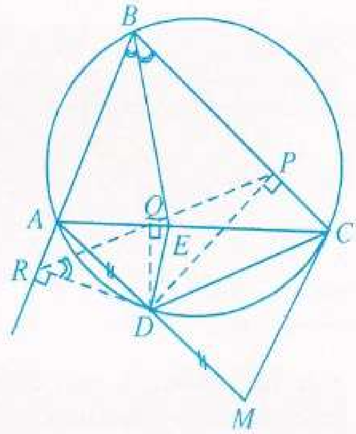
Nên $\widehat{ADR} = \widehat{PDC}$ (3).

Vậy từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AQR} = \widehat{CQP}$. ❐

• Trở lại bài toán (*). Ta thấy rằng để $PQ = QR$ thì $RQ = \frac{1}{2}PR$. Vậy phải chăng các đường phân giác của các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau tại E trên AC sẽ tạo ra tính chất tỉ lệ đoạn thẳng?

Thật vậy, chúng ta có một lời giải đẹp sau đây.

Trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho $DM = DA$ (h.2).



Hình 2

Theo tính chất phân giác trong của tam giác, ta có E thuộc AC khi và chỉ khi

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC}\left(= \frac{AE}{EC}\right) \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DM}{DC}.$$

Mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{MDC}$ (cùng bù với $\widehat{ADC}$) nên $\Delta ABC \backsim \Delta MDC \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \widehat{MCD}$, $\widehat{CAB} = \widehat{CMD}$; mà tứ giác $AQDR$ nội tiếp nên $\widehat{DRQ} = \widehat{DAQ}$ và $\widehat{RDQ} = \widehat{CMD}$ $(= \widehat{CAB})$

$$\Leftrightarrow \Delta DRQ \backsim \Delta MAC \text{ (g.g)} \Leftrightarrow \frac{RQ}{AC} = \frac{DR}{MA} = \frac{DR}{2.AD} \quad (4)$$

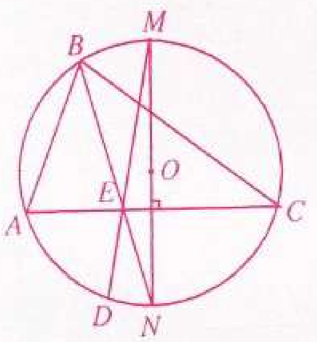
Dễ thấy $\Delta ADC \backsim \Delta RDP$ (g.g) nên $\dfrac{RP}{AC}=\dfrac{RD}{AD}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $RQ=\dfrac{1}{2}RP \Leftrightarrow RQ=QP$. □

Khi giải xong bài toán (*). Chúng ta có thể phát biểu bài toán dựng hình sau đây.

✪**Bài toán 2.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hãy dựng điểm D trên cung $\overset{\frown}{AC}$ sao cho: Nếu P, Q, R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA, AB thì PQ = QR.*

Lời giải. Dựa vào bài toán (*) ta có cách dựng như sau (h.3) :



Hình 3

– Dựng đường kính MN vuông góc với AC.

– Nối BN cắt AC tại E.

– Nối ME cắt đường tròn (O) tại D. Điểm D là điểm phải dựng.

Bài toán luôn dựng được và có một nghiệm hình. □

Nếu cho D bất kì trên đường tròn ta có bài toán tổng quát hơn sau đây.

✪**Bài toán 3.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tìm tất cả các điểm D trên đường tròn sao cho thỏa mãn điều kiện: Nếu P, Q, R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA, AB thì tồn tại hai trong ba đoạn PQ, QR, PR là bằng nhau.*

Qua lời giải bài toán 2, ta thấy bài toán 3 sẽ có ba nghiệm hình (xin dành cho bạn đọc).

Khi phát triển từ bài toán (*) đến bài toán 3, bất chợt tôi phát hiện ra rằng $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DA}{DC}$ nếu viết lại là $\dfrac{AB}{DA}=\dfrac{BC}{DC}$ thì gợi ý cho ta đến đường phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$. Lại sử dụng bài toán (*) thì hai đường phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên BD. Ta có bài toán sau đây.

✪**Bài toán 4.** *Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q, R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi I, K, H tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ C xuống các đường thẳng AB, BD, DA. Chứng minh rằng PQ = QR khi và chỉ khi IK = OH.*

Tuy nhiên, nếu chưa biết được bài toán (*) thì bài toán 4 còn cách giải nào khác chăng? (Xin dành bạn đọc).

Để kết thúc bài viết này, mời các bạn tham khảo một số bài tập sau đây.

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn và nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thay đổi trên (O). Gọi H, I, K lần lượt là các điểm đối xứng với M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) I, H, K thẳng hàng.

b) Đường thẳng IHK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng không tồn tại hai điểm M, N trên đường tròn (O) sao cho hai đường thẳng Simson của M, N đối với tam giác ABC song song với nhau.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi R, P tương ứng là chân đường vuông góc của D xuống AB, BC. Gọi I, H tương ứng là chân đường vuông góc của C xuống AB, AD. Chứng minh rằng $RP = IH$.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi R, P tương ứng là chân đường vuông góc của D xuống AB, BC. Gọi I, H tương ứng là chân đường vuông góc của C xuống AB, AD. Gọi E, F tương ứng là chân đường vuông góc của B xuống AD, DC. Chứng minh rằng IH, RP, EF cắt nhau tại một điểm.

Chào IMO 2007 - Đợt 3

Bài I-11. Gọi A', B' và C' tương ứng là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B và C của tam giác ABC không vuông. Gọi D, E và F theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $AB'C'$, tam giác $BC'A'$ và tam giác $CA'B'$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF theo $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

Bài I-12. Cho số tự nhiên $n > 6$. Xét tất cả các số tự nhiên nằm trong khoảng $(n(n-1); n^2)$ và nguyên tố cùng nhau với $n(n-1)$. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của tất cả các số tự nhiên đó bằng 1.

V. AXTAKHÔP
(CHLB Nga)

Bài I-13. Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$, và thỏa mãn hệ thức

$$f(x-y) + f(xy) = f(x) - f(y) + f(x).f(y)$$

với mọi số thực x, y.

TRẦN NAM DŨNG
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài I-14. Một lớp học có 15 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Vào ngày 8 tháng 3, một số học sinh nam đã gọi điện thoại chúc mừng một số học sinh nữ. Biết rằng ta có thể phân chia tất cả các học sinh của lớp một cách duy nhất thành 15 cặp sao cho mỗi cặp đều gồm một học sinh nam và một học sinh nữ mà học sinh nam đó đã gọi điện chúc mừng. Hỏi có tối đa bao nhiêu cuộc điện thoại đã được gọi ?

X. BERLÔV
(CHLB Nga)

Bài I-15. Hãy chỉ ra tất cả các cách tô tất cả các số tự nhiên bởi ba màu xanh, đỏ, vàng sao cho trong mỗi cách tô, các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

1) Mỗi số tự nhiên được tô một màu và mỗi màu được dùng để tô vô số số tự nhiên;

2) Số 2 không được tô màu xanh;

3) Nếu số a được tô màu đỏ và số b được tô màu vàng thì số $a + b$ được tô màu xanh.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(Gia Lai)

HELLO IMO 2007

I-11. Let A', B', C' be the feet of the altitudes of nonright triangle ABC issued from A, B, C respectively. Let D, E, F be the incenters of triangles $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ respectively. Calculate the circumradius of triangle DEF in terms of $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

I-12. Let be given a natural number $n > 6$. Consider all natural number belonging to the interval $(n(n-1); n^2)$ which are coprime with $n(n-1)$. Prove that the greates common divisor of these natural numbers is 1.

I-13. Find all functions f defined on the set of all real number $\mathbb{R}$, with values in $\mathbb{R}$, satisfying the condition

$$f(x-y) + f(xy) = f(x) - f(y) + f(x).f(y)$$

for all real numbers x, y.

(Xem tiếp trang 6)

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

NĂM HỌC 2006-2007

(Đề thi đã đăng trên THTT số 355, tháng 1 năm 2007)

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. 1) Để A có nghĩa thì
$a \neq -1$, $a \neq -2$ và $a \neq -3$.

2) Quy đồng mẫu số với mẫu số chung $(a+1)(a+2)(a+3)$ đi đến

$$A = \frac{4(a^3+6a^2+11a+6)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = 4.$$

Bài 2. 1) Với $m = -60$ thì PT tương ứng có hai nghiệm $x_1 = -6$; $x_2 = 10$.

2) ĐK để PT có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là $m < 4$. Theo định lí Viète, ta thấy

$$x_1 + x_2 = 4,\ x_1.x_2 = m \qquad (1)$$

Mặt khác $x_2^2 - x_1^2 = 8 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 8$, suy ra $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Thay vào (1) được $m = 3$ (thỏa mãn điều kiện $m < 4$).

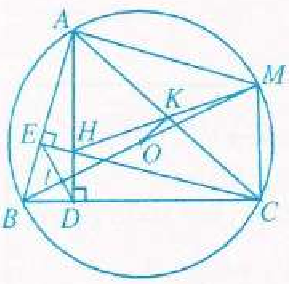
Bài 3. 1) Khi $m = 2$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x+4y=3 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp thế ta thấy hệ trên có hai nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(-1\,;\,1)$ và $\left(\frac{23}{17};\frac{7}{17}\right)$.

2) Với $y_0 = 1$, hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x+m^2=3 \\ x^2 \quad =1 \end{cases}$

Có bốn giá trị của m thỏa mãn đề bài là $\sqrt{-2}, \sqrt{2}, -2, 2.$



Hình 1

Bài 4. (h. 1).

Vì $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ nên tứ giác $AEDC$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{BAC} = \widehat{BDE}$.

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$, do đó $\widehat{BDE} = \widehat{BMC}$. Suy ra tứ giác $DIMC$ nội tiếp.

2) Dễ thấy tứ giác $AHCM$ là hình bình hành, nên K là trung điểm của AC, dẫn tới $OK \perp AC$.

3) Từ điều kiện $\widehat{AOK} = 60^\circ$, ta có $OK = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OB$. Lại vì $OK = \frac{1}{2}BH$ nên $BH = BO$. Nghĩa là tam giác HBO cân tại B.

Bài 5. Từ giả thiết suy ra $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3 = -\frac{1}{z^3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} = -3.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{3}{xyz}.$$

Vậy $A = xyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right) = 3.$

NGÀY THỨ HAI

Bài 6. ĐK $x > 6$, $y > 2$ và $z > 1750$.

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{\left(4-\sqrt{x-6}\right)^2}{\sqrt{x-6}} + \frac{\left(2-\sqrt{y-2}\right)^2}{\sqrt{y-2}} + \frac{\left(16-\sqrt{z-1750}\right)^2}{\sqrt{z-1750}} = 0.$$

Từ đó $(x\,;\,y\,;\,z) = (22\,;\,6\,;\,2006)$.

Bài 7. Ta có

$$A = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)(y-1) + 2006$$
$$= \left((x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 + 2006.$$

Do đó $A_{\min} = 2006$, đạt được khi $(x\,;\,y) = (1\,;\,1)$.

Bài 8. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz-zx=7 \\ xy+yz+zx=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=6 & (1) \\ y(x+z)=9 & (2) \\ xy+yz-zx=7 & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2) ta thấy y và $x + z$ là hai nghiệm của PT $t^2 - 6t + 9 = 0$. PT này có hai nghiệm $t_1 = t_2 = 3$. Thay vào trên, ta có

$$\begin{cases} y=3 \\ x+z=3 \\ zx=2 \end{cases}$$

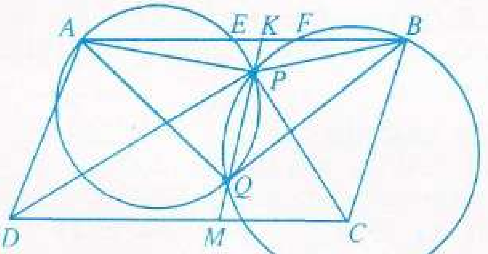
Kết luận: Hệ đã cho có hai nghiệm $(x ; y ; z)$ là $(1 ; 3 ; 2)$ và $(2 ; 3 ; 1)$.

Bài 9. Đặt $t = y^2 + 3y$ thì $(x - 2006)^2 = t^2 + 2t$. Nếu $t > 0$ thì $t^2 < t^2 + 2t < (t + 1)^2$.

Do đó $(x - 2006)^2$ không là số chính phương.

Vậy $t \le 0$, lúc đó $y^2 + 3y = y(y + 3) \le 0$. Vì y nguyên nên $y \in \{0, -1, -2, -3\}$. Vậy các cặp số nguyên $(x ; y)$ cần tìm là $(2006 ; -3)$, $(2006; -2)$, $(2006 ; - 1)$, $(2006 ; 0)$.

Bài 10. Giả sử K là giao điểm của PQ và AB, M là giao điểm của PQ và CD (h. 2). Do tứ giác $AQPE$ nội tiếp, nên $\Delta KAQ \backsim \Delta KPE \Rightarrow KE.KA = KP.KQ$. Tương tự có $KF.KB = KP.KQ$. Suy ra $\dfrac{KA}{KB}=\dfrac{KF}{KE}$ (1).



Hình 2

Do $\Delta PKF \backsim \Delta PMD$ nên $\dfrac{KF}{MD}=\dfrac{KP}{PM}$ (2)

$\Delta PKE \backsim \Delta PMC$ nên $\dfrac{KE}{MC}=\dfrac{KP}{PM}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{KA}{KB}=\dfrac{MD}{MC} \Rightarrow PQ//AD$.

Bài 11. *Hướng dẫn*: Chỉ cần chứng minh các tam giác FAB và ECD cân.

PHẠM NGỌC QUANG

(Sở GD – ĐT Thanh Hóa) giới thiệu

MỘT SỐ DẠNG TOÁN... *(Tiếp trang 8)*

✪Thí dụ 5. *Cho hàm số*

$$y=\frac{x^2-(m+3)x+3m+1}{x-1}.$$

Tìm m để hàm số có CĐ và CT và các giá trị CĐ, CT của hàm số cùng âm.

Lời giải. $y'=\dfrac{x^2-2x-2m+2}{(x-1)^2}$.

Hàm số có CĐ và CT khi $m>\dfrac{1}{2}$. Giả sử đồ thị có điểm CĐ và CT là $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$.

Ta có $y_1 = 2x_1 - m - 3$; $y_2 = 2x_2 - m - 3$.

Theo định lí Viète $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = - 2m + 2$.

Từ đó $\begin{cases} y_1+y_2 = -2m-2 \\ y_1y_2 = m^2-6m+5. \end{cases}$

Ta có $y_{CĐ} < 0$, $y_{CT} < 0$ khi

$$\begin{cases} y_1+y_2 = -2m-2<0 \\ y_1y_2 = m^2-6m+5>0. \end{cases}$$

Giải hệ trên và kết hợp với điều kiện $m > \dfrac{1}{2}$, ta được $\dfrac{1}{2}<m<1$ hoặc $m > 5$. ❐

Bài tập làm thêm

Bài 1. Cho hàm số $y = (x - m)^2(x - 1)$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và tìm quỹ tích điểm cực tiểu của đồ thị.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $\dfrac{y_{CĐ}}{x_{CĐ}}+\dfrac{y_{CT}}{x_{CT}}<3$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+5)x+m+3}{x+1}$.

Tìm m để hàm số có cực trị tại điểm $x > 1$. Hãy xác định đó là điểm cực đại hay cực tiểu của đồ thị.

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10
THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC 2006 - 2007

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1 (*2 điểm*)

Cho biểu thức

$$A=\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}.$$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm các giá trị nguyên của x sao cho giá trị tương ứng của biểu thức A nguyên.

Bài 2 (*2 điểm*)

1) Giải phương trình

$$\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x-6=0.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2\\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4.\end{cases}$$

Bài 3 (*2 điểm*)

1) Có tồn tại hay không các số nguyên x, y sao cho $2x^2+y^2=2007$?

2) Cho a, b, x, y là các số thực thoả mãn : $x^2+y^2=1$ và $\dfrac{x^4}{a}+\dfrac{y^4}{b}=\dfrac{1}{a+b}$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x^{2006}}{a^{1003}}+\frac{y^{2006}}{b^{1003}}=\frac{2}{(a+b)^{1003}}.$$

Bài 4 (*2 điểm*)

Cho tam giác ABC có $AB=3$cm, $BC=4$cm, $CA=5$cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành bốn phần. Hãy tính diện tích mỗi phần.

Bài 5 (*2 điểm*)

1) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn. M là một điểm trên cung AC (không chứa điểm B), kẻ MH vuông góc với AC, MK vuông góc với BC (H thuộc AC, K thuộc BC). Gọi P, Q tương ứng là trung điểm của AB và KH. Chứng minh rằng tam giác PQM là tam giác vuông.

2) Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đôi một ngoài nhau và tâm của ba đường tròn này cùng nằm trên một đường thẳng. Giả sử tồn tại đường tròn (O_4) tiếp xúc với cả ba đường tròn ấy. Chứng minh rằng bán kính của đường tròn (O_4) không thể đồng thời bé hơn các bán kính của ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3).

TRẦN VĂN HẠNH

(GV CĐSP Quảng Ngãi) giới thiệu

HELLO... *(Tiếp trang 3)*

I-14. A group of students consists of 15 boys and 15 girls. On The Day of Women, some boys congratulated some girls by telephone. Suppose that we can only partition the group into 15 pairs such that each pair consists of a boy and a girl which had been congratulated by this boy. How many congratulations there were at most?

I-15. Describe all ways to color all natural numbers in blue, red and yellow so that:

i) each natural number is colored in one color and each color is used to color an infinite set of natural numbers,

ii) the number 2 is not colored in blue,

iii) if the natural number a is colored in red and the natural number b is colored in yellow then the number $a+b$ is colored in blue.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN về cực đại, cực tiểu của hàm số

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

I. Một số kiến thức chung về cực trị của các hàm số trong chương trình phổ thông

1) *Hàm số* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì y' không đổi dấu, HS không có cực trị.

Nếu $\Delta' > 0$ thì PT y' = 0 có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua nghiệm nên hàm số có cực đại (CĐ) và cực tiểu (CT).

Hai điểm CĐ và CT đối xứng với nhau qua điểm uốn.

Chia đa thức y cho y', ta được $y = y'.\ q(x) + r(x)$, trong đó $q(x)$, $r(x)$ là các nhị thức bậc nhất và lần lượt là thương, số dư của phép chia nói trên.

Giả sử đồ thị có điểm CĐ, CT là $(x_1\ ;\ y_1)$, $(x_2\ ;\ y_2)$.

Vì $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ nên tọa độ các điểm CĐ, CT thỏa mãn $y = r(x)$. Đó chính là PT đường thẳng đi qua hai điểm CĐ, CT của đồ thị.

2) *Hàm số* $y = ax^4 + bx^2 + c\quad (a \neq 0)$
Ta có $y' = 2x(2ax^2 + b)$.

Nếu $ab \geq 0$, hàm số có một cực trị tại $x = 0$.

Nếu $ab < 0$, hàm số có ba điểm cực trị. Vì đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng nên ba điểm cực trị luôn tạo thành một tam giác cân.

3) *Hàm số* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ (a và $a' \neq 0$).

Ta có $y' = \dfrac{aa'x^2 + 2ab'x + bb' - a'c}{(a'x + b')^2}$.

Gọi tam thức trên tử số của y' là f(x). Hàm số có cực trị khi PT y' = 0 có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 = -\dfrac{b'}{a'}$.

Ta được điều kiện $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(x_0) \neq 0. \end{cases}$

Hai điểm CĐ, CT đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận.

Với hàm số có dạng $y = \dfrac{u}{v}$ thì $y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Khi y' = 0 ta có $u'v = v'u$ hay $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u'}{v'}$.

Do đó tọa độ các điểm CĐ, CT thỏa mãn $y = \dfrac{2a}{a'}.x + \dfrac{b'}{a'}$. Đó chính là PT đường thẳng đi qua hai điểm CĐ, CT của đồ thị.

Trong phần áp dụng dưới đây, các bước tìm điều kiện để hàm số có cực trị cũng như các tính toán chi tiết xin dành cho bạn đọc tự thực hiện.

II. Áp dụng

1. Hàm số đa thức

✪**Thí dụ 1.** *Cho hàm số* $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$. *Tìm m để hàm số có CĐ và CT đồng thời hai điểm CĐ, CT của đồ thị cách đều đường thẳng (d) có phương trình* $y = x - 1$.

Lời giải. $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT khi $m > -3$.

Chia đa thức y cho y', ta được

$$y = y'\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{m}{3} + 1\right)x + 2 - \frac{m}{3}.$$

Giả sử đồ thị có điểm CĐ, CT là $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$.

PT đường thẳng đi qua hai điểm CĐ, CT là

$$y = -2\left(\frac{m}{3} + 1\right)x + 2 - \frac{m}{3} \quad (d_1)$$

Các điểm CĐ, CT cách đều đường thẳng (d) trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $(d_1) \,//\, (d)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{m}{3} + 1\right) = 1 \\ 2 - \frac{m}{3} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{9}{2} < -3 \text{ (loại)}.$$

Trường hợp 2. Trung điểm của đoạn AB nằm trên (d).

Tọa độ trung điểm AB là $E: \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \\ y = -m \end{cases}$

Vì $E(1 ; -m) \in (d)$, suy ra $m = 0$. ❒

✪Thí dụ 2. *Cho hàm số* $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$.

Tìm m để đồ thị của hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải. Ta có $y' = 4x(x^2 - m)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x^2 = m$.

Hàm số có ba cực trị khi $m > 0$.

Tọa độ ba điểm cực trị là $A(0 ; m-1)$, $B(-\sqrt{m} ; -m^2 + m - 1)$, $C(\sqrt{m} ; -m^2 + m - 1)$.

Ta luôn có $AB = AC$, nên tam giác ABC đều khi $AB^2 = BC^2$. Lúc đó

$$m^4 + m = 4m \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}. ❒$$

Lưu ý. Các bạn hãy tự đề xuất và giải bài toán trên trong trường hợp tam giác ABC là vuông cân hoặc có góc bằng 120^0.

2) Hàm số phân thức

✪Thí dụ 3. *Cho hàm số*

$$y = \frac{x^2 - (3m+2)x + m + 4}{x - 1}.$$

Tìm m để hàm số có CĐ và CT và khoảng cách giữa hai điểm CĐ, CT của đồ thị nhỏ hơn 3.

Lời giải. Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x + 2m - 2}{(x-1)^2}$.

Hàm số có CĐ, CT khi $m < \frac{3}{2}$. Giả sử đồ thị có các điểm CĐ, CT là $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$. Khi đó

$y_1 = 2x_1 - 3m - 2$; $y_2 = 2x_2 - 3m - 2$.

Theo định lí Viète $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = 2m - 2$.

Ta có $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 5(x_1 - x_2)^2$

$AB^2 = 5\,[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 60 - 40m$

$AB < 3 \Leftrightarrow AB^2 = 60 - 40m < 9 \Leftrightarrow m > \frac{51}{40}$.

Đáp số : $\frac{51}{40} < m < \frac{3}{2}$. ❒

✪Thí dụ 4. *Cho hàm số* $y = \frac{x^2 + mx + 3}{x + 1}$.

Tìm m để hàm số có CĐ và CT đồng thời hai điểm CĐ, CT của đồ thị nằm về hai phía của đường thẳng (d): $2x + y - 1 = 0$.

Lời giải. $y' = \frac{x^2 + 2x + m - 3}{(x+1)^2}$.

Hàm số có CĐ, CT khi $m < 4$. Giả sử đồ thị có điểm CĐ, CT là $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$.

Ta có $y_1 = 2x_1 + m$; $y_2 = 2x_2 + m$.

A, B nằm về hai phía của đường thẳng (d) khi:

$$(2x_1 + y_1 - 1)(2x_2 + y_2 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (4x_1 + m - 1)(4x_2 + m - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4(m-1)(x_1 + x_2) + (m-1)^2 < 0.$$

Theo định lí Viète $x_1 + x_2 = -2$; $x_1x_2 = m - 3$.

Thay vào BPT trên, ta được $m^2 + 6m - 39 < 0$

$\Rightarrow -3 - 4\sqrt{3} < m < -3 + 4\sqrt{3}$. ❒

Lưu ý. Hai điểm A, B nằm về hai phía của đường $f(x,y) = 0$ khi $f(x_1,y_1).f(x_2,y_2) < 0$.

(Xem tiếp trang 5)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I. *(3 điểm)*

Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m-1)x + 1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 1$.

2) Chứng tỏ rằng với mọi giá trị khác 0 của m, đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó B, C có hoành độ phụ thuộc tham số m. Tìm giá trị của m để các tiếp tuyến tại B, C song song với nhau.

Câu II. *(2 điểm)*

1) Giải phương trình

$$3 - 4\sin^2 2x = 2\cos 2x(1 + 2\sin x).$$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ trên $[-3\,;\,3]$.

Câu III. *(1 điểm)*

Tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn

$$\begin{cases} \dfrac{2^{\sin A}}{2^{\sin B}} + 4\sin A = 1 + 4\sin B \\ \dfrac{2^{\sin B}}{2^{\sin C}} + 4\sin B = 1 + 4\sin C. \end{cases}$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Câu IV. *(1 điểm)*

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x.\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$.

PHẦN TỰ CHỌN

Câu Va. *(3 điểm)*

(Theo chương trình THPT không phân ban)

Hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy $AB = a$; chiều cao $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

1) Tính diện tích thiết diện tạo thành và tìm tỉ số thể tích của hai phần hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (P).

2) Tính sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (SAB).

Câu Vb. *(3 điểm)*

(Theo chương trình THPT phân ban thí điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{i^5 + i^7 + ... + i^{2007}}{i^4 + i^5 + ... + i^{2008}} \text{ (trong đó } i^2 = -1).$$

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;\,-3;\,-2)$; đường cao BK và trung tuyến CM lần lượt nằm trên các đường thẳng

$$(d_1)\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{4};$$

$$(d_2)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{1}.$$

Lập phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB, AC của tam giác ABC.

NGUYỄN THANH CẢNH

(GV CĐSP Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI... *(Tiếp trang 10)*

• $a \in \{5, 7, 9\}$, thì a có 3 cách chọn; c có 5 cách chọn ($c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$); b có 8 cách chọn. Từ đó có $3 \times 5 \times 8 = 120$ (cách chọn).

• $a \in \{6, 8\}$, thì a có 2 cách chọn; c có 4 cách chọn; b có 8 cách chọn. Vậy có

$2 \times 4 \times 8 = 64$ (cách chọn).

Số các số cần tìm $120 + 64 = 184$ (số).

Câu Vb. 1) Xét hàm

$f(x) = 8.27^x - 38.18^x + 57.12^x - 27$.

Sử dụng định lí về dấu tam thức bậc hai ta thấy $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

PT có duy nhất nghiệm $x = 0$.

2) • Ta có $V_{SAMN} = \dfrac{1}{3}SO.S_{AMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

• Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.AMN$. Sử dụng công thức

$S_{SAMN} = \dfrac{1}{3}r(S_{AMN} + S_{ASN} + S_{SMN})$,

ta tính được $r = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$.

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Câu I. 1) *Bạn đọc tự giải.*

2) Giả sử $M\left(x_0;\dfrac{x_0^2}{x_0-1}\right)$ với $x_0>1$ là một điểm thỏa mãn đề bài. A và B là giao điểm của tiếp tuyến với đồ thị với các tiệm cận đứng, tiệm cận xiên tương ứng, $I(1;2)$ là giao điểm của hai tiệm cận. Khi đó $A\left(1;\dfrac{2x_0}{x_0-1}\right)$, $B(2x_0-1;2x_0)$.

Dựng $BH\perp AI$. Ta có $S_{ABI}=\dfrac{1}{2}IA.BH=2$ (đvdt).

Mặt khác $S_{ABI}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}\Rightarrow IA.IB=4\sqrt{2}$.

Từ đó $IA+IB\geq 4\sqrt[4]{2}$. Từ định lí Cosin cho ΔAIB có $AB^2=IA^2+IB^2-2IA.IB.\cos 45^\circ$

$\geq 2IA.IB-8=8(\sqrt{2}-1)$.

Kết luận: Chu vi tam giác AIB đạt giá trị nhỏ nhất ứng với $M\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

Câu II. 1) ĐK $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

PT đã cho tương đương với

$(1-\cos x).(1-\sin x).(\sin x-\cos x)\times$
$\times(\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=0$.

Phương trình đã cho có nghiệm

$x=k2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ $x=\dfrac{\pi}{4}+\alpha+k2\pi$;

$x=\dfrac{\pi}{4}-\alpha+k2\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z},\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$.

2) ĐK $x>3$ hoặc $x\leq -3$. Dễ thấy $x=-3$ là một nghiệm của PT.

Với $x\neq -3$. Chia cả hai vế của PT cho $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$ thu được $2|x-3|=x+3$.

Đáp số: PT đã cho có hai nghiệm $x=-3$ và $x=11$.

Câu III. 1) Ta có

$$9I-4J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin x-2\cos x)dx=1.$$

$I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3\sin x+2\cos x}$. Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$.

Khi đó $I+J=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+3t-t^2}$.

$$I+J=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\ln\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{13}+1}-\ln\frac{\sqrt{13}-3}{\sqrt{13}+3}\right).$$

2) $I=\dfrac{4}{13\sqrt{13}}\left(\ln\dfrac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{13}+1}-\ln\dfrac{\sqrt{13}-3}{\sqrt{13}+3}\right)+\dfrac{1}{13}$;

$J=\dfrac{9}{13\sqrt{13}}\left(\ln\dfrac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{13}+1}-\ln\dfrac{\sqrt{13}-3}{\sqrt{13}+3}\right)-\dfrac{1}{13}$.

Câu IV. 1) Ta có $B(b;3b-4)\in d_1$; $D(d;6-d)\in d_2$. Vì $A,C\in d_3//Oy$, nên B và D đối xứng nhau qua d_3. Suy ra $\begin{cases}b+d=6\\3b-4=6-d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\d=4.\end{cases}$

Do đó $B(2;2)$; $D(4;2)$, dẫn tới tâm hình vuông $ABCD$ là $I(3;2)$. Mặt khác $A(3;a)\in d_3$ và $IA^2=IB^2$ nên $(a-2)^2=1\Rightarrow a=3$ hoặc $a=1$. Bài toán có hai nghiệm hình:

$A(3;3)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$, $D(4;2)$;

$A(1;3)$, $B(2;2)$, $C(3;3)$, $D(4;2)$.

2) Đặt $F(a,b,c)=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}$.

Giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

Ta có $F(a,b,c)-F(a,b,\sqrt{ab})$

$$=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}-\frac{a}{a+b}-\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{ab}-c)^2}{(a+c)(b+c)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\geq 0 \quad (1)$$

Để ý rằng $F(a,b,\sqrt{ab})-\dfrac{7}{5}=\dfrac{1}{\frac{b}{a}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+1}-\dfrac{7}{5}$.

Đặt $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leq 3$, ta thấy

$$\frac{1}{\frac{b}{a}+1}+\frac{2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+1}-\frac{7}{5}=\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{2}{x+1}-\frac{7}{5}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}(3-x)\left((2x-1)^2+1\right)\geq 0 \quad (2)$$

BĐT (2) đúng, từ (1), (2) có BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)=\left(3;1;\dfrac{1}{3}\right)$ và các hoán vị.

Câu Va. 1) Xét hàm $f(x)=x^5-5x-5$. Lập bảng biến thiên, xét dấu đạo hàm $f'(x)$.

2) Giả sử $n=\overline{abc}$ là số cần tìm ($a\geq 5$). Xét các khả năng

(Xem tiếp trang 9)

Phương pháp GIẢI MỘT DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC trong tam giác

NGUYỄN LÁI
(GV THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Giả sử f(A, B, C) là biểu thức chứa các hàm số lượng giác của các góc trong tam giác ABC.

Giả sử các góc A, B, C thỏa mãn hai điều kiện:

1) $f(A)+f(B)\geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$

hoặc $f(A).f(B)\geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$ (1)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$;

2) $f(C)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq 2f\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$

hoặc $f(C).f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ (2)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $C=\frac{\pi}{3}$.

Khi cộng (hoặc nhân) (1), (2) ta sẽ có BĐT

$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (3)

hoặc $f(A).f(B).f(C)\geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (4)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$.

Tương tự ta cũng có bất đẳng thức với chiều ngược lại.

Để minh họa cho phương pháp trên ta xét các bài toán sau đây.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\geq\frac{4}{2+\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}}$$

$$\geq\frac{4}{2+\sqrt{2(\sin A+\sin B)}}=\frac{4}{2+2\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}}$$

$$\geq\frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\geq\frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}\quad(5)$$

$\left(\text{có dạng } f(A)+f(B)\geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$.

Tương tự

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}\geq\frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}}\quad(6)$$

Cộng theo vế (5) và (6) ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}$$

$$\geq 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}}\right)$$

$$\geq\frac{4}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}.$$

Suy ra $\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}$

$\geq \frac{3}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.□

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A\sin B}$$

$$\geq 1+\frac{2}{\sqrt{\sin A.\sin B}}+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin A.\sin B}}\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\sin B}}\right)^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(A-B)-\cos(A+B)}}\right)^2$$

$$\geq\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(A+B)}}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (7)$$

$\left(\text{có dạng } f(A).f(B)\geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$.

Tương tự

$$\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)^2 \quad (8)$$

Nhân theo vế của (7) và (8) ta có

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)$$

$$\geq\left(\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)\right)^2\geq\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^4.$$

Suy ra $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)$

$$\geq\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^3=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.□

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}\geq\frac{3}{64}.$$

Lời giải. Trường hợp tam giác ABC tù hoặc vuông.

Giả sử $A=\max\{A, B, C\}\geq 90^\circ$, lúc đó

$\cos\frac{A+B}{2}>0$ và $\cos\left(\frac{C+60^\circ}{2}\right)>0$.

Ta có

$$\frac{\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}}{2}\geq\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{\cos A+\cos B}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^3$$

$$\geq\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)^3=\sin^6\frac{A+B}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}\geq 2\sin^6\frac{A+B}{4} \quad (9)$$

$\left(\text{có dạng } f(A)+f(B)\geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$.

Tương tự

$$\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{60^\circ}{2}\geq 2\sin^6\frac{C+60^\circ}{4} \quad (10)$$

Cộng theo vế của (9) và (10) có

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{60^\circ}{2}$$

$$\ge 2\left(\sin^6\frac{A+B}{4}+\sin^6\frac{C+60^\circ}{4}\right)$$

$$\ge 4\sin^6\frac{A+B+C+60^\circ}{8} = 4\sin^6\frac{60^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2} \ge 3\sin^6\frac{60^\circ}{2}=\frac{3}{64} \quad (11)$$

Trường hợp tam giác ABC nhọn, các BĐT (9), (10) và (11) luôn đúng. ❐

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$\le 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$= 2.\sqrt{2}\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).$$

Nên BĐT đã cho được viết lại dưới dạng

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\le\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 \quad (*)$$

• Nếu $\max\{A; B; C\} \ge \frac{3\pi}{4}$ thì vế trái của biểu thức (*) không dương nên BĐT đã cho luôn đúng.

• Nếu $\max\{A; B; C\} < \frac{3\pi}{4}$ thì

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)>0;\ \cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)>0;\ \cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)>0,$$

nên $\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(A-B)\right]$$

$$\le\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)\right]\le\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\le\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (12)$$

$\left(\text{có dạng } f(A).f(B)\le f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\right).$

Tương tự

$$\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\le\cos^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (13)$$

Do đó nhân theo vế của (12) và (13) và tương tự ta có

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\le\left[\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

$$\le\cos^4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\le\cos^3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Do đó

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$\le 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. ❐

Mời các bạn tiếp tục giải các bài toán sau đây theo phương pháp trên.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có

1) $\tan^3\frac{A}{2}+\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{C}{2}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\dfrac{1}{\sin^n\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^n\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^n\frac{C}{2}}\ge 3.2^n$

(n là số thực dương);

3) $A.\cos\frac{A}{4}+B.\cos\frac{B}{4}+C.\cos\frac{C}{4}\le\frac{\pi\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$;

4) Nếu tam giác ABC nhọn thì

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-A\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-C\right)$$

$$\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})^3.\cos A.\cos B.\cos C.$$

Dùng máy tính CASIO *fx - 570MS* để giải phương trình và hệ phương trình đồng dư

MAI TẤN ĐẠT
(GV THPT Thiều Văn Chỏi, Kế Sách, Sóc Trăng)

Khi hai số nguyên a và b chia cho m ($m \in \mathbb{N}$ và $m > 1$) được cùng một số dư ta nói a đồng dư với b theo modun m và viết $a \equiv b \pmod{m}$. Việc tìm nghiệm của phương trình hoặc hệ phương trình đồng dư đôi lúc gặp khó khăn. Ở đây tôi giới thiệu cách để giải phương trình và hệ phương trình đồng dư nhờ máy tính bỏ túi CASIO *fx-570MS*.

1. Phương trình đồng dư bậc nhất

Dạng $ax \equiv b \pmod{m}$, $a \not\equiv 0 \pmod{m}$

Thí dụ 1. Giải phương trình đồng dư

$$9x \equiv 6 \pmod{15}.$$

Lời giải. Ta biến đổi $9x \equiv 6 \pmod{15}$ thành $3x \equiv 2 \pmod{5}$, rồi tìm x nhờ máy tính bỏ túi như sau:

Cách 1. Dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$. Ta dùng ô nhớ A để giải. Ta nhập vào máy biểu thức:

$$A = A + 1 : (3A - 2) \div 5$$

Nhấn phím $\boxed{\text{CALC}}$ màn hình hiện A? Ta nhập A ban đầu là 1 rồi nhấn các phím $\boxed{=}$ thì có kết quả A + 1 là 2; (3A − 2) ÷ 5 là 0,8. Nhấn $\boxed{=}$ liên tiếp đến khi A + 1 có giá trị bằng 4 thì (3A − 2) ÷ 5 có giá trị bằng 2 là số nguyên. Do đó ta được $x \equiv 4 \pmod{5}$.

Vậy phương trình có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x \equiv 4 \pmod{15} \\ x \equiv 9 \pmod{15} \\ x \equiv 14 \pmod{15}. \end{array}\right.$

Cách 2. Dùng lập trình nhập từ bàn phím máy tính. Ta nhập vào máy biểu thức:

$$A = A + 1 : (3A - 2) \div 5$$

rồi nhấn phím $\boxed{=}$ liên tục đến khi nào (3A − 2) ÷ 5 có giá trị là số nguyên thì ta chọn giá trị A + 1 khi đó. Ta được $x \equiv 4 \pmod{5}$.

Chú ý. Thông qua việc giải phương trình đồng dư ta có thể áp dụng giải bài toán như sau: *Tìm số nguyên dương nhỏ nhất x để khi chia nx cho m thì được dư là r, trong đó n, m, r là các số nguyên dương đã cho.*

2. Hệ phương trình đồng dư bậc nhất một ẩn

Dạng $\left\{\begin{array}{l} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{array}\right.$

trong đó $m_1, m_2, \dots, m_n$ là các số nguyên tố sánh đôi.

Thí dụ 2. Bài toán Hàn Tín điểm binh dẫn đến giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{7}. \end{array}\right.$$

Lời giải. *Cách 1.* Dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$. Cho ô nhớ A chứa số 0. Ta nhập vào máy biểu thức:

$$A = A + 1 : (A - 2) \div 3 : (A - 3) \div 5 : (A - 4) \div 7$$

Nhấn phím $\boxed{\text{CALC}}$ thì màn hình hiện A? Ta nhập A ban đầu là 1 rồi nhấn các phím $\boxed{=}$ thì ta có kết quả A + 1 là 2;

$(A-2) \div 3$ là 0; $(A-3) \div 5$ là $-0{,}2$;

$(A-4) \div 7$ là $-0{,}285714285\ldots \left(-\dfrac{2}{7}\right)$.

Nhấn phím $\boxed{=}$ liên tiếp cho đến khi các giá trị của $(A-2) \div 3$, $(A-3) \div 5$ và $(A-4) \div 7$ đều là những số nguyên thì ta chọn A + 1 khi đó. Ta có khi A + 1 có giá trị là 53 thì các giá trị của $(A-2) \div 3$; $(A-3) \div 5$ và $(A-4) \div 7$ thứ tự là 17; 19; 7 đều là những số nguyên.

Do đó $x \equiv 53 \pmod{105}$ trong đó $105 = 3.5.7$.

Cách 2. Dùng lập trình nhập từ bàn phím máy tính. Cho ô nhớ A chứa số 0. Ta nhập vào máy biểu thức

$$A = A + 1 : (A-2) \div 3 : (A-3) \div 5 : (A-4) \div 7$$

Nhấn phím $\boxed{=}$ liên tục đến khi các giá trị của $(A-2) \div 3$, $(A-3) \div 5$ và $(A-4) \div 7$ là những số nguyên thì ta chọn A + 1 là 53.

Do đó $x \equiv 53 \pmod{105}$ trong đó $105 = 3.5.7$.

3. Phương trình đồng dư bậc cao

Dạng $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod{m}$ trong đó $a_0 \not\equiv 0 \pmod{m}$, $n > 1$, $m > 1$.

Thí dụ 3. Giải phương trình đồng dư

$$x^4 + 2x^3 - 9x + 1 \equiv 0 \pmod{5^3}$$

Lời giải.

Cách 1. Dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$.

Ta cũng cho ô nhớ A chứa số 0. Nhập vào máy biểu thức:

$$A = A + 1 : (A^4 + 2A^3 - 9A + 1) \div 5^3$$

Nhấn phím $\boxed{\text{CALC}}$ trên màn hình xuất hiện A? Nhập 1 rồi ấn các phím $\boxed{=}$ thì ta có kết quả A + 1 là 2 ; $(A^4 + 2A^3 - 9A + 1) \div 5^3$ là 0.12. Nhấn phím $\boxed{=}$ liên tiếp cho đến khi nhận được giá trị của $(A^4 + 2A^3 - 9A + 1) \div 5^3$ là số nguyên thì ta chọn được A + 1 là 57. Ta có $x \equiv 57 \pmod{5^3}$.

Cách 2. Dùng lập trình nhập từ bàn phím. Ta cũng cho ô nhớ A chứa số 0. Nhập vào máy biểu thức:

$$A = A + 1 : (A^4 + 2A^3 - 9A + 1) \div 5^3$$

Rồi ta nhấn liên tiếp phím $\boxed{=}$ cho đến khi nhận được giá trị của $(A^4 + 2A^3 - 9A + 1) \div 5^3$ là số nguyên thì ta chọn A + 1 khi đó. Ta cũng có $x \equiv 57 \pmod{5^3}$.

Tóm lại, dù dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$ hay lập trình nhập từ bàn phím thì kết quả vẫn như nhau. Nhưng đôi khi dùng phím $\boxed{\text{CALC}}$ có lợi hơn, bởi vì ở bước n thì ta có thể thay đổi giá trị của A nhập từ bàn phím, còn cách dùng lập trình nhập từ bàn phím thì không thay đổi giá trị của A được mà nó tuân thủ theo lập trình đã lập. Ngoài ra cũng có thể sử dụng máy tính CASIO fx–*500MS* để giải.

Bài tập áp dụng

Bài 1. Giải các phương trình đồng dư sau:

a) $6x \equiv 27 \pmod{33}$; b) $9x \equiv 42 \pmod{52}$;

c) $91x \equiv 84 \pmod{143}$.

Bài 2. Giải các hệ phương trình đồng dư sau:

a) $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{7} \\ 2x \equiv 3 \pmod{5} \\ 5x \equiv 1 \pmod{9} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv -5 \pmod{15} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ 7x \equiv 5 \pmod{12} \\ 17x \equiv 19 \pmod{30}. \end{cases}$

Bài 3. Giải các phương trình đồng dư sau:

a) $2x^2 + 3x + 1 \equiv 0 \pmod{27}$;

b) $x^3 + 2x^2 + 2x - 2 \equiv 0 \pmod{27}$;

c) $3x^3 + 2x^2 + x - 1 \equiv 0 \pmod{125}$;

d) $x^3 + 2x^2 + 3x + 9 \equiv 0 \pmod{27}$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/357. (Lớp 6) Cho hai bình, mỗi bình có dung tích 1 lít. Bình thứ nhất đựng đầy nước và bình thứ hai không đựng gì cả. Ban đầu, người ta rót $\frac{1}{2}$ lượng nước trong bình thứ nhất sang bình thứ hai, tiếp đó lại rót $\frac{1}{3}$ lượng nước trong bình thứ hai sang bình thứ nhất, sau đó lại rót $\frac{1}{4}$ lượng nước có trong bình thứ nhất sang bình thứ hai và quá trình này tiếp tục : $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$... Hỏi cứ rót đi, rót lại như thế thì sau lần rót thứ 2007 có bao nhiêu nước trong mỗi bình ?.

NGUYỄN ANH THUẤN
(Sở Giáo dục – Đào tạo Hải Phòng)

Bài T2/357. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong; E, F lần lượt là hình chiếu của A trên BI, CE. Chứng minh rằng $2EF^2 = AI^2$.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

Bài T3/357. Tìm tất cả các tập hợp hữu hạn A ($A \subset \mathbb{N}^*$) sao cho tồn tại tập hợp hữu hạn B ($B \subset \mathbb{N}^*$) thoả mãn $A \subset B$ và tổng các số của tập hợp B bằng tổng bình phương các số của tập hợp A.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)

Bài T4/357. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n ($n \geq 2$) ta có

$$1+\sqrt{1+\frac{4}{3!}}+\sqrt[3]{1+\frac{9}{4!}}+\ldots+\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{(n+1)!}} < n+\frac{1}{2}$$

trong đó kí hiệu $n! = 1.2.3...n$.

TRẦN HỒNG SƠN
(GV THPT bán công Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T5/357. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ lấy điểm M bất kì (M khác B, C) . Các đường thẳng CM và DB cắt nhau tại điểm E; các đường thẳng DM và AB cắt nhau tại điểm F. Chứng minh rằng hai tam giác ABE và DOF có diện tích bằng nhau.

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, TP Quy Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/357. Chứng minh rằng với mỗi cặp số nguyên dương n và k, số $\left(\sqrt{n}-1\right)^k$ được biểu diễn dưới dạng $\sqrt{a_k}-\sqrt{a_k-(n-1)^k}$ với $a_k \in \mathbb{N}^*$.

NGUYỄN ĐÔNG SƠ
(Sở Giáo dục – Đào tạo Hải Dương)

Bài T7/357. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq 5.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGUYỄN VĂN ĐÍNH
(SV lớp K49XF, ĐH Xây dựng Hà Nội)

Bài T8/357. Cho dãy (x_n) (n = 0, 1, 2, ...) được xác định như sau :

x_0, x_1, x_2 là các số dương cho trước;

$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}+\sqrt{x_{n-1}}$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy (x_n) (n = 0, 1, 2, ...) hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

NGUYỄN TRỌNG QUÂN
(SV lớp 44C4, ĐH Thuỷ Lợi, Hà Nội)

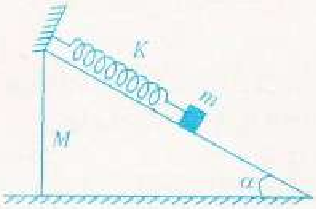
Bài T9/357. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Mặt cầu tâm I, bán kính r nội tiếp tứ diện tiếp xúc với các mặt đối diện các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ theo thứ tự tại

B_1, B_2, B_3, B_4. Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 là độ dài các đường cao tương ứng hạ từ A_1, A_2, A_3, A_4 của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian, ta đều có

$$\frac{MB_1^2}{h_1}+\frac{MB_2^2}{h_2}+\frac{MB_3^2}{h_3}+\frac{MB_4^2}{h_4}\geq r.$$

NGUYỄN TIẾN LÂM
(SV K50A1s, khoa Toán- Cơ - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ



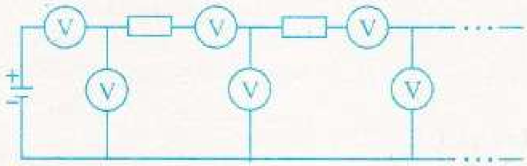
Bài L1/357. Trên một mặt phẳng nằm ngang có một cái nêm, góc nhọn ở đỉnh là α. Trên mặt phẳng nghiêng của nêm có một vật gắn với lò xo có độ cứng k và đầu kia của lò xo gắn chặt vào nêm (như hình vẽ). Khối lượng của nêm là M, khối lượng của vật là m. Hãy tính chu kì dao động nhỏ của toàn hệ thống, bỏ qua mọi ma sát.

TRỊNH VĂN MỪNG
(GV THPT Trần Hưng Đạo, Thanh Xuân, Hà Nội)

Bài L2/357. Một mạch điện gồm một số rất lớn ô mạng, mỗi ô gồm một điện trở và hai vôn kế (như hình vẽ). Các vôn kế giống nhau, các điện trở giống nhau. Mạch điện được mắc vào nguồn điện. Cặp vôn kế đầu tiên chỉ 6V và 4V. Hãy tìm

a) Số chỉ của cặp vôn kế thứ hai.

b) Tổng số chỉ của mọi vôn kế.



TÔ GIANG
(Hà Nội) sưu tầm

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/357. (For 6th grade)

Let be given two bottles, the first bottle contains 1 liter of water, the second bottle is empty. One pours $\frac{1}{2}$ of the quantity of water contained in the first bottle into the second one, then one pours $\frac{1}{3}$ of the quantity of water contained in the second bottle into the first one, then one pours $\frac{1}{4}$ of the quantity of water contained in the first bottle into the second one, and so on, one pours $\frac{1}{5}$, then $\frac{1}{6}$, then $\frac{1}{7}$, ... After the 2007th turn of such pouring, what are the quantities of water left in each bottle?

T2/357. (For 7th grade)

Let ABC be a right-angled triangle with right angle at A and let I be the point of intersection of its innner angled-bisectors. Take the orthogonal projection E of A on the line BI then the orthogonal projection F of A on the line CE. Prove that $2EF^2 = AI^2$.

T3/357. Find all finite subset $A \subset \mathbb{N}^*$ such that there exists a finite subset $B \subset \mathbb{N}^*$ containning A so that the sum of the numbers in B is equal to the sum of the squares of the numbers in A.

T4/357. Prove that for every natural number $n \geq 2$, we have

$$1+\sqrt{1+\frac{4}{3!}}+\sqrt[3]{1+\frac{9}{4!}}+\ldots+\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{(n+1)!}}< n+\frac{1}{2}$$

where $n!$ denotes $1.2.3...n$.

T5/357. Let $ABCD$ be a square inscribed in the circle (O). On the minor arc $\overset{\frown}{BC}$, take an arbitrary point M distinct from B, C. The lines CM and DB intersect at a point E, the lines DM and AB intersect at a point F. Prove that the triangles ABE and DOF have equal areas.

(Xem tiếp trang 27).

★**Bài T1/353.** *Tìm số tự nhiên có 2n chữ số dạng* $\overline{a_1a_2...a_{2n-1}a_{2n}}$ *thoả mãn hệ thức*

$$\overline{a_1a_2...a_{2n-1}a_{2n}} = \overline{a_1a_2}+...+\overline{a_{2n-1}a_{2n}} + 2006 \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $T = \overline{a_1a_2...a_{2n-1}a_{2n}}$ và

$$P = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + ... + \overline{a_{2n-1}a_{2n}} + 2006.$$

Ta thấy $T > a_1 10^{2n-1} > 10^{2n-1}$ (2)

$$P \le 81n + 2006 < 100n + 2100 = 100(n+21) \quad (3)$$

Theo giả thiết (1) thì từ (2) và (3) có

$$10^{2n-1} < 100(n+21) \quad (4)$$

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng BĐT (4) không đúng với mọi $n \ge 3$. Suy ra $n \le 2$ nên từ (1) có

$$\overline{a_1a_2a_3a_4} = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + 2006 \quad (5)$$

• Nếu $a_1 = 1$ thì ở (5) vế trái nhỏ hơn 2000 nên nhỏ hơn vế phải;

• Nếu $a \ge 3$ thì ở (5) vế phải nhỏ hơn $2.100 + 2006 = 2206$ nên nhỏ hơn vế trái.

Vậy $a_1 = 2$, từ (5) có

$$\overline{a_2a_3a_4} = 2a_2 + \overline{a_3a_4} + 6$$

hay $98a_2 + a_3(10 - a_4) + a_4 = 6$
nên chỉ có thể $a_2 = 0$, lúc đó có

$$a_3(10 - a_4) + a_4 = 6 \quad (6)$$

Nếu $a_3 \ge 1$ thì ở (6) vế trái không nhỏ hơn 10, suy ra $a_3 = 0$ và $a_4 = 6$. Số phải tìm là 2006, thử lại đúng. ❒

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: *Nguyễn Hữu Trung*, 6B, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** *Đỗ Trường Sơn*, 6E, THCS Phan Chu Trinh, Ba Đình, *Lê Hồng Dung*, 6A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Cầu Giấy; **Hải Dương:** *Phạm Thị Hải Yến*, *Trịnh Bá Thắng*, 6A1, THCS Vũ Hữu, Tráng Liệt, Bình Giang; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Bảo Nhi*, 6/5, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

VIỆT HẢI

★**Bài T2/353.** *Có hay không ba số a, b, c thoả mãn*

$$\frac{a}{b^2-ca} = \frac{b}{c^2-ab} = \frac{c}{a^2-bc} \ ?$$

Lời giải. Giả sử tồn tại các số a, b c thỏa mãn dãy đẳng thức đã cho. Ta phải có điều kiện

$$b^2 - ca \ne 0,\ c^2 - ab \ne 0,\ a^2 - bc \ne 0 \quad (*)$$

Đặt $\frac{a}{b^2-ca} = \frac{b}{c^2-ab} = \frac{c}{a^2-bc} = \frac{1}{k}$ $(k \ne 0)$.

Ta có $\begin{cases} ak = b^2 - ca \\ bk = c^2 - ab \\ ck = a^2 - bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2k = ab^2 - ca^2 & (1) \\ b^2k = bc^2 - ab^2 & (2) \\ c^2k = ca^2 - bc^2 & (3) \end{cases}$

Cộng từng vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$(a^2+b^2+c^2)k = ab^2 - ca^2 + bc^2 - ab^2 + ca^2 - bc^2 = 0,$$

suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ trái với điều kiện (*).

Vậy không tồn tại ba số a, b, c thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Nhận xét. 1) Rất đông các bạn tham gia giải và đều cho câu trả lời đúng: "không tồn tại". Tuy nhiên, nhiều bạn có mắc sai lầm về lập luận lôgic. Chẳng hạn, trong bước đặt điều kiện: $a^2 \ne ac$, $c^2 \ne ab$, $a^2 \ne ab \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ne ab + bc = ca$.

2) Các bạn cần lưu ý khi áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

Chẳng hạn $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{a \pm b}{m \pm n}$ chỉ đúng khi mẫu của phân số mới phải khác 0.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả:

Bắc Ninh: *Vũ Thắng*, 6A, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Song Toàn*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Phùng Thị Nhung*, *Kiều Thị Thủy Nguyên*, *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, *Lê Thị Thanh Loan*, 6A1, THCS Thạch Đà, Mê Linh, *Khổng Hoàng Trang*, 7D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Hải**

Dương: *Trần Thị Mận*, 4A1, Tiểu học Nghĩa An, Ninh Giang; **Hải Phòng:** *Đặng Tuấn Anh*, 7B8, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền; **Quảng Ninh:** *Đỗ Thái Chủng*, 7A1, THCS Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Liêm*, 7A, THCS Yên Trường, Yên Định; **Nghệ An:** *Chúc Thị Thông*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Bùi Văn Hoàng*, 7B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành. **Quảng Bình:** *Võ Thành Văn*, 7B, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Trị:** *Trần Thị Kim Chi*, 6/2, THCS Nguyễn Trãi, TX. Đông Hà; **Bình Định:** *Bùi Hồng Ngọc*, 7A6, THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, *Huỳnh Kim Lĩnh*, 7A3, THCS Phước An, Tuy Phước.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/353. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

(i) $\dfrac{x-y\sqrt{2006}}{y-z\sqrt{2006}}$ là một số hữu tỉ,

(ii) $x^2+y^2+z^2$ là một số nguyên tố.

Lời giải. Từ điều kiện (i) suy ra

$$\frac{x-y\sqrt{2006}}{y-z\sqrt{2006}}=\frac{m}{n} \qquad (1)$$

Trong đó m, n là các số nguyên thỏa mãn $n>0$, $(m,n)=1$.

Hệ thức (1) có thể viết thành

$$nx-my=(ny-mz)\sqrt{2006} \qquad (2)$$

Vì $\sqrt{2006}$ là số vô tỉ và m, n, x, y, z là các số nguyên nên từ (2) suy ra $nx-my=ny-mz=0$.

Từ đó $\begin{cases} nx=my \\ ny=mz \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{y}{z} \Rightarrow xz=y^2.$

Ta được $x^2+y^2+z^2=(x+z)^2-2xz+y^2$
$=(x+z)^2-y^2=(x+z+y)(x+z-y).$

Vì $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố và $x+z+y$ là số nguyên lớn hơn 1 nên $x+z-y=1$.

Do đó $x^2+y^2+z^2=x+z+y \qquad (3)$

Nhưng x, y, z đều là các số nguyên dương nên $x^2\ge x$, $y^2\ge y$, $z^2\ge z$.

Đẳng thức (3) xảy ra khi và chỉ khi $x^2=x$, $y^2=y$, $z^2=z$. Ta được $x=y=z=1$.

Khi đó $\dfrac{x-y\sqrt{2006}}{y-z\sqrt{2006}}=1$ và $x^2+y^2+z^2=3$.

Các điều kiện của đầu bài thỏa mãn.

Vậy có một bộ số $(x;y;z)=(1;1;1)$ thỏa mãn bài toán. ❒

Nhận xét. 1) Một số bạn khi tìm ra $x=y=z=1$, không thử lại các điều kiện của đầu bài đã kết luận nghiệm. Làm như vậy là không đầy đủ vì đó mới chỉ là điều kiện cần đối với nghiệm của bài toán mà thôi.

Một số bạn từ phân tích $x^2+y^2+z^2=(x+z+y)(x+z-y)$ đã vội kết luận $x^2+y^2+z^2$ là một hợp số (!).

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Trường Giang*, 8A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Phan Quốc Khánh*, 9C, THCS Tam Dương, Tam Dương, *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế, *Dương Hồng Quân*, 8A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, *Lê Thanh Nga*, 7A1, THCS Trưng Vương, Thanh Lâm, Mê Linh; **Bắc Giang:** *Tạ Ngọc Cảnh*, 9A, THCS Đức Thắng, Hiệp Hòa; **Bắc Ninh:** *Vũ Thắng*, 6A, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Hà Nội:** *Vũ Yến Nhi*, 9I, THCS Hữu Nghị Việt Nam – Angiêri Q. Thanh Xuân; **Hải Dương:** *Dương Văn Sơn*, 7C, THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ; *Mạc Đức Huy*, 8C, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn, *Trần Thị Mận*, 4A, TH Nghĩa An, Ninh Giang ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Huy Linh*, 9B, THCS Yên Bái, Yên Định; *Lê Thị Thương*, 9E, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Tăng Văn Bình*, 9B, *Nguyễn Danh Dũng*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Cao Thị Thanh Hoa*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **TP Huế:** *Trần Thị Hoàng Dung*, 6[4], THCS Nguyễn Tri Phương; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Lê Nam*, 9D, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **TP Cần Thơ:** *Phạm Thị Tuyết Hạnh*, 8A1, THCS Bình Thủy; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 8/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh;

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T4/353. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xyz$, trong đó x, y, z là các số thực thoả mãn*

$$\frac{8-x^4}{16+x^4}+\frac{8-y^4}{16+y^4}+\frac{8-z^4}{16+z^4}\ge 0 \qquad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{8-x^4}{16+x^4}+1\right)+\left(\frac{8-y^4}{16+y^4}+1\right)+\left(\frac{8-z^4}{16+z^4}+1\right)\ge 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16+x^4}+\frac{1}{16+y^4}+\frac{1}{16+z^4}\ge\frac{1}{8} \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra

$$\frac{1}{16+x^4} \geq \left(\frac{1}{16}-\frac{1}{16+y^4}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{16+z^4}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{y^4}{16+y^4}+\frac{z^4}{16+z^4}\right)$$

$$\geq \frac{1}{8}\cdot\frac{y^2z^2}{\sqrt{(16+y^4)(16+z^4)}} \text{ (BĐT Cauchy)} \quad (3)$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{16+y^4} \geq \frac{1}{8}\cdot\frac{x^2z^2}{\sqrt{(16+x^4)(16+z^4)}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{16+z^4} \geq \frac{1}{8}\cdot\frac{x^2y^2}{\sqrt{(16+x^4)(16+y^4)}} \quad (5)$$

Nhân theo từng vế của các BĐT (3), (4), (5) và rút gọn, ta được

$$x^4y^4z^4 \leq 8^3 \Leftrightarrow |xyz| \leq 4\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow -4\sqrt[4]{2} \leq xyz \leq 4\sqrt[4]{2}.$$

Giá trị lớn nhất của P là $4\sqrt[4]{2}$ đạt được khi trong ba số x, y, t có hai số bằng $-\sqrt[4]{8}$, số còn lại bằng $\sqrt[4]{8}$ hoặc cả ba số đều bằng $\sqrt[4]{8}$. Giá trị nhỏ nhất của P là $-4\sqrt[4]{2}$ đạt được khi trong ba số x, y, t có hai số bằng $\sqrt[4]{8}$, số còn lại bằng $-\sqrt[4]{8}$ hoặc cả ba số đều bằng $-\sqrt[4]{8}$. □

Nhận xét. 1) Một số bạn đã không thận trọng khi viết: $\max P = 4\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x=y=z=\sqrt[4]{8}$; $\min P = -4\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x=y=z=-\sqrt[4]{8}$.

2) Cũng với cách giải trên, một số bạn đã mở rộng, tổng quát bài toán đã cho. Chẳng hạn:

"Cho n số thực x_i thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{n}\frac{a-x_i^{2k}}{b+x_i^{2k}} \geq 0$, trong đó $k \in \mathbb{N}^*$, $a+b=na$, $a>0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Chứng minh rằng $-\sqrt[2k]{a^n} \leq x_1x_2...x_n \leq \sqrt[2k]{a^n}$".

(Bài toán đã cho là trường hợp đặc biệt của bài toán này, khi $a=8$, $b=16$, $n=3$, $k=2$).

3) Các bạn có những mở rộng, tổng quát hóa đúng bài toán đã cho là:

Thái Bình: *Hoàng Tú Anh*, 9B, THCS TTr. Đông Hưng, *Bùi Thị Hoa*, 9C, THCS TTr. Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Thanh Hóa:** *Trần Xuân Quang*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn; **Nghệ An:** *Hồ Hữu Quân*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Trần Viết Thành*, 9A2, THCS Trà Lân, Con Cuông; *Tăng Văn Bình*, 9B, *Nguyễn Danh Dũng*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bến Tre:** *Lê Hạnh Thư*, 9[7], THCS Hương Mỹ, Mỏ Cày.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/353. *Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng $\frac{2}{9} \leq a^3+b^3+c^3+3abc < \frac{1}{4}$.*

Lời giải. Đặt $T = a^3+b^3+c^3+3abc$.

Do $a+b+c=1$ nên

$$T = (a+b)^3+c^3+3abc-3ab(a+b)$$
$$= (a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)+3abc-3ab(a+b)$$
$$= 1-3c(a+b)+3abc-3ab(1-c)$$

Vậy $T = 1-3(ab+bc+ca)+6abc$ (1)

Lại có

$$a^2 \geq a^2-(b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$$
$$b^2 \geq b^2-(a-c)^2 = (a+b-c)(-a+b+c)$$
$$c^2 \geq c^2-(a-b)^2 = (a-b+c)(-a+b+c).$$

Hơn nữa a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $a+b-c>0$, $a-b+c>0$, $-a+b+c>0$;

$$abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$
$$= (1-2c)(1-2b)(1-2a)$$
$$= 1+4(ab+bc+ca)-2(a+b+c)-8abc$$
$$= -1+4(ab+bc+ca)-8abc > 0.$$

Do đó $6abc \geq -\frac{2}{3}+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)$ (2)

và $ab+bc+ca-2abc > \frac{1}{4}$ (3)

• Từ (1), (2) và áp dụng BĐT $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ ta có

$$T \geq \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(ab+bc+ca) \geq \frac{1}{3}-\frac{1}{9}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9};$$

$T=\frac{2}{9}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

• Từ (1) và (3) dẫn đến

$$T = 1 - 3[(ab + bc + ca)] - 2abc$$
$$< 1 - 3.\frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \square$$

Nhận xét. 1) Bài toán có thể tổng quát hóa như sau: Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác có chu vi bằng $2p$. Chứng minh rằng $\frac{16p^3}{9} \le a^3+b^3+c^3+3abc \le 2p^3$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: *Đào Hoàng Tùng*, 8A3, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** *Trần Xuân Quang*, 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** *Bùi Viết Lộc*, 8A, THCS Viên Thành, Yên Thành, *Bùi Văn Hoàng*, 7B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; **Hà Tĩnh:** *Dương Đức Lâm*, A1 K32, Nguyễn Trung Thiên, Thạch Hà; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phượng Hải*, 6D, THCS Quách Xuân Kì, Bố Trạch; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 8^7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Bùi Trần Long*, 9A5, THCS Chu Văn An, Q.1.

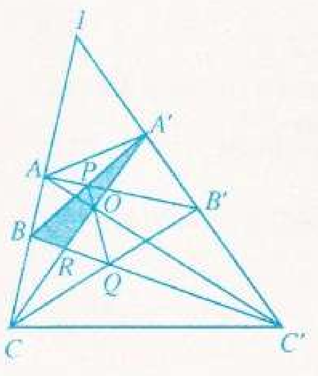
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T6/353. *Cho tứ giác lồi AA'C'C có hai đường thẳng AC và A'C' cắt nhau tại I. Lấy điểm B trên cạnh AC và điểm B' trên cạnh A'C'. Gọi O là giao điểm của AC' và A'C; P là giao điểm của AB' và A'B; Q là giao điểm của BC' và B'C. Chứng minh rằng ba điểm P, O, Q thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi R là giao điểm của $A'C$ và BC'. Áp dụng định lí Menelaus cho:

• Tam giác $BA'I$ với cát tuyến (PAB'), ta có

$$\frac{PA'}{PB} \cdot \frac{AB}{AI} \cdot \frac{B'I}{B'A'} = 1 \quad (1)$$



• Tam giác $CA'I$ với cát tuyến (AOC'), ta có

$$\frac{OC}{OA'} \cdot \frac{C'A'}{C'I} \cdot \frac{AI}{AC} = 1 \quad (2)$$

• Tam giác CRB với cát tuyến (OAC'), ta có

$$\frac{OR}{OC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{C'B}{C'R} = 1 \quad (3)$$

• Tam giác $B'QC'$ với cát tuyến(BIC), ta có

$$\frac{BQ}{BC'} \cdot \frac{IC'}{IB'} \cdot \frac{CB'}{CQ} = 1 \quad (4)$$

• Tam giác $B'QC'$ với cát tuyến (RCA'), ta có

$$\frac{RC'}{RQ} \cdot \frac{CQ}{CB'} \cdot \frac{A'B'}{A'C'} = 1 \quad (5)$$

Nhân theo vế các đẳng thức (1), (2), (3), (4), (5) và rút gọn, ta thu được $\frac{PA'}{PB} \cdot \frac{QB}{QR} \cdot \frac{OR}{OA'} = 1$.

Áp dụng định lí Menelaus đảo cho tam giác $RA'B$, ta thấy ba điểm P, O, Q thẳng hàng. $\square$

Nhận xét. 1) Thật ra, giả thiết AC cắt $A'C'$ tại I là không cần thiết. Bài toán này chính là nội dung của *định lí Pappus*. Bạn đọc có thể xem, chẳng hạn:

H.S.M. Coxeter and S.L.Greitzer, ***Geometry Revisited****, The Mathematical Association of America Press, 1967, p.67.*

2) Số lời giải gửi về tòa soạn không nhiều. Sau đây là những bạn có lời giải tốt:

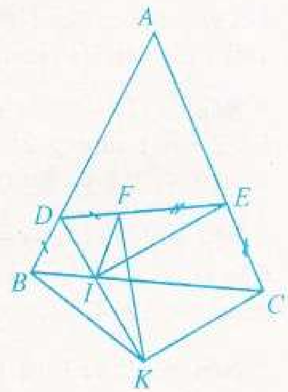
Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Thái Bình:** *Bùi Thị Hoa*, 9C, THCS TTr. Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Thanh Hóa:** *Trần Xuân Quang*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, *Lê Nhật Minh*, 9E, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Đặng Trung Đức*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Tăng Văn Bình*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Bùi Viết Lộc*, 8A, THCS Viên Thành, *Bùi Văn Hoàng*, 7B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành.

HỒ QUANG VINH

★Bài T7/353. *Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB và điểm E trên cạnh AC sao cho DE = BD + CE. Tia phân giác của góc BDE cắt cạnh BC tại I.*

a) Tính độ lớn của góc DIE.

b) Chứng minh rằng đường thẳng DI luôn đi qua một điểm cố định khi D và E di động trên các cạnh AB và AC tương ứng.



Lời giải. Lấy $F \in DE$ sao cho $FD = BD$ thì $FE = CE$. Ta có

$\Delta BDI = \Delta FDI$. Suy ra $\widehat{BID} = \widehat{FID}$ (1).

Đồng thời $\widehat{DFI} = \widehat{DBI} = \widehat{ECI}$. Suy ra tứ giác $FECI$ nội tiếp đường tròn. Lại có $FE = CE$ nên $\widehat{FIE} = \widehat{CIE}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DIE} = 90^o$.

b) Gọi K là giao điểm của DI và đường thẳng vuông góc với AC tại C. Suy ra $IKCE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Do đó I, K, C, E, F cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $\widehat{DFK} = \widehat{KCA} = 90^o$. Lại có $\Delta KBD = \Delta KFD$ (c.g.c) nên $\widehat{DBK} = \widehat{DFK} = 90^o$. Như vậy K là một điểm cố định và ta có điều phải chứng minh. ❐

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:

Vĩnh Phúc: *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch; **Nam Định:** *Phạm Thị Điệp*, 7A , THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Hải Phòng:** *Lê Mạnh Thắng*, 8C9, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; **Thanh Hóa:** *Lê Trần Mạnh*, 9E, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa ; **Nghệ An:** *Bùi Văn Hoàng*, 7B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; **Thanh Hóa:** *Lê Nhật Minh*, 9E, THCS Chu Văn An; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, 8 H, THCS Hùng Vương, TP Tuy Hòa; **Cần Thơ:** *Phạm Thị Tuyết Hạnh*, 8 [11] , THCS Bình Thủy.

VŨ KIM THỦY

★Bài T8/353. *Tìm tất cả các số nguyên dương n lớn hơn 1 thoả mãn điều kiện : Với mọi k thoả mãn $1 < k < n$ và $(k, n) = 1$ thì k là số nguyên tố.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Văn Hùng*, 10 Toán, THPT chuyên Hà Nam, TX. Phủ Lý, **Hà Nam**).

* Nếu $(n, 2) = 1$ thì $n < 2$, vì nếu $n > 2^2$ thì $(n, 2^2) = 1$ nhưng 2^2 không là số nguyên tố, trái với điều kiện bài ra. Vậy $n = 3$.

* Nếu $n \vdots 2$ và $(n, 3) = 1$. Lí luận tương tự như trên ta có $n < 3^2$. Khi đó bằng cách thử ta tìm được $n \in \{2; 4; 8\}$.

* Nếu $n \vdots 2, n \vdots 3$ và $(n, 5) = 1$ ta có $n < 5^2$. Bằng cách thử ta tìm được $n \in \{6; 12; 18; 24\}$

* Nếu $n \vdots 2, n \vdots 3, n \vdots 5$ và $(n, 7) = 1$ ta có $n < 7^2$. Bằng cách thử ta tìm được $n = 30$.

Kí hiệu p_m là số nguyên tố thứ m, với $p_1 = 2$; $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ..., ta có bổ đề sau.

Với mọi $m \geq 4$ thì $p_{m+1}^2 < p_1p_2...p_m$.

Chứng minh bổ đề bằng quy nạp. Với $m = 4$ bổ đề đúng, vì $p_5^2 = 11^2 = 121 < 2.3.5.7 = 210$.

Giả sử bổ đề đúng với $m \geq 4$. Ta chứng minh bổ đề đúng với $m + 1$. Theo định lí Berdand–Chebysev giữa p_{m+1} và $2p_{m+1}$ có ít nhất một số nguyên tố. Do đó $p_{m+2} < 2p_{m+1}$. Vậy $p_{m+2}^2 < 4p_{m+1}^2 < 4p_1p_2...p_m < p_1p_2...p_mp_{m+1}$. Giả sử $n \vdots p_1$, $n \vdots p_2$ ..., $n \vdots p_m$ và $(n, p_{m+1}) = 1$ $(m \geq 4)$. Khi đó $n \vdots p_1p_2...p_m$ nên $n \geq p_1p_2...p_m$.

Mặt khác ta phải có $n < p_{m+1}^2$, vì nếu $p_{m+1}^2 < n$ thì do $(n, p_{m+1}) = 1$ nên p_{m+1}^2 là số nguyên tố. Vô lí. Ta có $p_1p_2...p_m \leq n < p_{m+1}^2$, điều này trái với bổ đề. Thành thử tất cả các giá trị n cần tìm là $n \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30\}$. ❐

Nhận xét. 1) Có thể chứng minh bổ đề đã nêu trong lời giải một cách trực tiếp không sử dụng định lí Berdand–Chebysev. Tuy nhiên, tất cả các bạn đều chứng minh bổ đề bằng cách dùng định lí Berdand–Chebysev như trên.

2) Một số bạn không quan niệm $n = 2$ là một nghiệm vì không tồn tại $1 < k < 2$. Ta vẫn nên coi $n = 2$ là một nghiệm (dù là nghiệm tầm thường, vì trong lôgic Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ luôn đúng nếu P sai.

3) Khá nhiều bạn có lời giải sai hoặc không chính xác.

4) Các bạn có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Phan Anh Sơn*, 102, THPT Lập Thạch; **Hà Nội:** *Nguyễn Thị Thanh Hoa*, 11 Toán; **Thanh Hóa:** *Đào Đức Huân*, 11T chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Lê Đình Khuê*, 10A$_1$, THPT Phan Bội Châu; **Bến Tre:** *Trần Minh Hoàng*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T9/353. *Tìm tất cả các đa thức P(x) thoả mãn điều kiện*

$$P(x^{2006} + y^{2006}) = (P(x))^{2006} + (P(y))^{2006} \quad (1)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Xét trường hợp khi $P(x)$ là đa thức hằng: $P(x) \equiv c$. Thế vào (1), ta thu được $c = 2c^{2006}$ hay $c = 0$ hoặc $c = \sqrt[2005]{\frac{1}{2}}$. Vậy ta được hai đa thức hằng $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv \sqrt[2005]{\frac{1}{2}}$.

Xét trường hợp $P(x)$ khác hằng số. giả sử $P(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$.

Khi đó $n = \deg P(x) \geq 1$. Từ (1), lần lượt thay $x = t$, $y = t$ và $x = t$, $y = 0$, ta nhận được

$$\begin{cases} P(2t^{2006}) = 2(P(t))^{2006} \\ P(t^{2006}) = (P(t))^{2006} + (P(0))^{2006} \end{cases} \quad (2)$$

So sánh hệ số bậc cao nhất trong (2), ta có

$$\begin{cases} 2^n.a^n = 2.a_n^{2006} \\ a_n = a_n^{2006} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a_n = 1, \\ n = 1. \end{cases}$$

Tiếp theo, so sánh hệ số tự do trong (2), ta thu được $a_0 = 2a_0^{2006}$ hay $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = \sqrt[2005]{\frac{1}{2}}$.

Vậy chỉ có thể xảy ra hai khả năng: $P(x) = x$ hoặc $P(x) = x + \sqrt[2005]{\frac{1}{2}}$. Dễ thấy, đa thức $P(x) = x$ thỏa mãn điều kiện bài ra. Đa thức $P(x) = x + \sqrt[2005]{\frac{1}{2}}$ không thỏa mãn điều kiện đề bài. Để chứng minh điều này, ta chỉ cần thay $x = 1$, $y = 0$ vào (1), ta thấy ngay (1) không thỏa mãn.

Kết luận: Có ba đa thức thỏa mãn điều kiện bài ra, đó là

$P(x) = 0$, $P(x) = \sqrt[2005]{\frac{1}{2}}$, $P(x) = x$. ❒

Nhận xét. Đây là một bài toán thuộc loại trung bình và thuộc dạng quen thuộc nên có rất nhiều bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải tương tự cách đã trình bày ở trên. Một số bạn còn mở rộng bài toán theo các hướng khác nhau. Xin nêu bài toán do bạn *Đinh Ngọc Thái*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Vũng Tàu** đề xuất.

"Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(\sqrt[m]{x^n + y^n}) = \sqrt[m]{(P(x))^n + (P((y))^n}$$

với mọi số thực x, y trong đó m, n là các số nguyên dương phân biệt và n lẻ."

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T10/353. *Giải phương trình*

$$2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{... + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}}}}}$$

$$= 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad (1)$$

trong đó biểu thức vế trái có cả thảy 2006 dấu căn thức bậc hai.

Lời giải. Giả sử x là một nghiệm của phương trình, ta suy ra $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$.

Mặt khác $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$= (2x + 1)(x^2 + x + 1)$,

$x^2 + x + 1 > 0$.

Do đó $2x + 1 \geq 0$, tức là $x \geq -\frac{1}{2}$ (2)

Với $x \geq -\frac{1}{2}$, ta có

$$\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \left|x + \frac{1}{2}\right| = x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = x + \frac{1}{2} \text{ v.v...}$$

Bởi vậy biểu thức ở vế trái của phương trình (1) bằng $2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x + 1$.

Kết hợp với (2), phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} 2x + 1 = (2x + 1)(x^2 + x + 1) \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 1)(2x + 1) = 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

Kết luận: phương trình (1) có hai nghiệm

$x = -\frac{1}{2}$ và $x = 0$. ❒

Nhận xét. Phương trình căn thức trên khá đơn giản. Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán trên. Hầu hết các bạn giải đúng, chỉ có một số ít bạn vội vàng kết luận phương trình có đúng một nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ hoặc có ba nghiệm $x \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$. Hoan nghênh các bạn lớp 6, lớp 7 sau tham gia và có lời giải tốt:

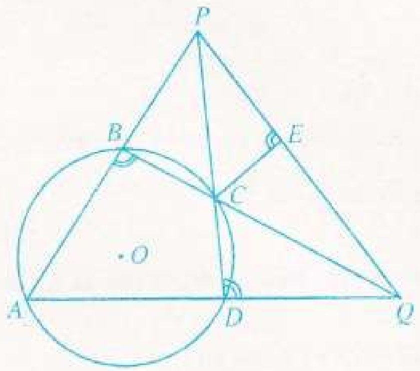
Bắc Ninh: *Nguyễn Hữu Trung*, 6B, THCS Yên Phong; **Hải Dương:** *Dương Văn Sơn*, 7C, THCS Phan Bội Châu, Tứ Kì; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Trần Hữu Dũng*, 7C, THCS Quảng Hải, Quảng Xương, *Nguyễn Tiến Liên*, 7A, THCS Yên Trường, Yên Định, *Đinh Uýt Nây*, 6B, THCS Lê Hữu Lập; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phương Thảo*, 6D, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T11/353. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại P, AD và BC cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng* $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = R^2$.

Lời giải. (Theo bạn *Trần Văn Hạnh*, 10A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**)

Lấy E trên PQ sao cho tứ giác $PBCE$ nội tiếp



Ta có $\widehat{PEC} = \widehat{ABC} = \widehat{QDC}$ nên tứ giác $QDCE$ nội tiếp. Suy ra

$$PO^2 - R^2 + QO^2 - R^2 = \mathscr{P}_{P/(O)} + \mathscr{P}_{Q/(O)}$$
$$= \overline{PC}.\overline{PD} + \overline{QC}.\overline{QB} = \overline{PE}.\overline{PQ} + \overline{QE}.\overline{QP}$$
$$= \overline{PQ}(\overline{PE} - \overline{QE}) = \overline{PQ}^2 = (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ})^2$$
$$= OP^2 + OQ^2 - 2\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}.$$

Vậy $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = R^2$. ❒

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên, một số bạn giải quá dài.

2) Đặt $R = AC \cap BD$. Tương tự như phép chứng minh đẳng thức $\mathscr{P}_{P/(O)} + \mathscr{P}_{Q/(O)} = PQ^2$, ta có các đẳng thức $\mathscr{P}_{Q/(O)} + \mathscr{P}_{R/(O)} = QR^2$; $\mathscr{P}_{R/(O)} + \mathscr{P}_{P/(O)} = RP^2$.

Từ ba đẳng thức trên, dễ dàng chứng minh được kết quả thú vị sau: O là trực tâm tam giác PQR.

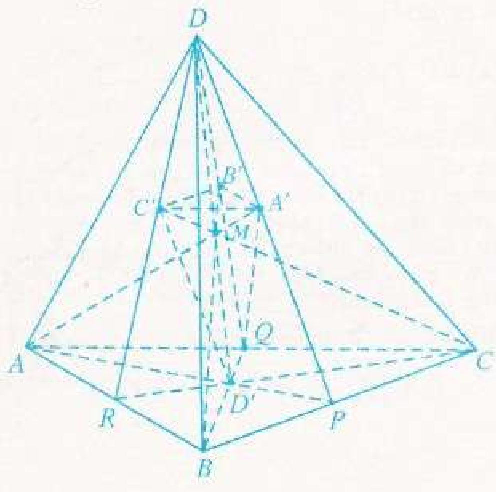
3) Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tốt:

Hải Dương: *Đỗ Đức Tài*, 11T1, THPT Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Quang Giang*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Bằng*, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành; *Nguyễn Thị Huyền*, 12A2, *Lê Minh Thông*, 10A2, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** *Hoàng Văn Sáng*, 10T, THPT chuyên Thái Bình, TP Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Thúy Hằng*, 11B7, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa; **Nghệ An:** *Thân Trọng Đức*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Bình Định:** *Lê Thị Xuân Thu*, $10A_i$, THPT An Nhơn I; *Nguyễn Minh Nhơn*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T12/353. *Cho tứ diện ABCD và M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt các mặt BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng thể tích của tứ diện A'B'C'D' không vượt quá* $\frac{1}{27}$ *thể tích của tứ diện ABCD.*

Lời giải. (Theo *Đinh Ngọc Thái*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa – Vũng Tàu**).



Trước hết, để biểu thị các giao điểm A', B', C', D' của các đường thẳng MA, MB, MC, MD lần lượt với các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$ được chính xác trên hình vẽ (hình biểu diễn) ta lưu ý rằng $AD' \cap DA' = P \in BC$; $BD' \cap DB' = Q \in CA$; $CD' \cap DC' = R \in AB$; v.v... Ngoài ra, để trình bày được gọn gàng ta đưa vào các kí hiệu sau đây.

Đặt $\frac{AM}{AA'} = x$, $\frac{BM}{BB'} = y$, $\frac{CM}{CC'} = z$, $\frac{DM}{DD'} = t$. Gọi V, V'; v_1, v_2, v_3, v_4 ; v'_1, v'_2, v'_3 và v'_4 lần lượt là thể tích các tứ diện $ABCD$, $A'B'C'D'$; $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$; $MB'C'D'$, $MC'D'A'$, $MD'A'B'$ và $MA'B'C'$. Thế thì ta có các hệ thức sau:

$$\frac{v'_1}{v_1}=\frac{MB'}{MB}.\frac{MC'}{MC}.\frac{MD'}{MD} = \frac{1-y}{y}.\frac{1-z}{z}.\frac{1-t}{t} \quad (1)$$

$$\frac{v_1}{V}=\frac{MA'}{AA'} = 1 - x \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{v'_1}{V}=\frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{yzt}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có ba hệ thức nữa (bằng cách hoán vị vòng quanh) biểu thị các tỉ số $\frac{v'_2}{V}, \frac{v'_3}{V}$ và $\frac{v'_4}{V}$ theo x, y, z và t.

Sau đó, cộng theo vế bốn tỉ số $\frac{v'_i}{V}$ (i = 1, 2, 3, 4) ta thu được hệ thức:

$$\frac{v'}{V}=\frac{v'_1+v'_2+v'_3+v'_4}{V}$$

$$= \frac{(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)}{xyzt}(x+y+z+t) \quad (i)$$

Mặt khác, ta có $\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{V}=1$; từ đó suy ra

$$x + y + z + t = 3 \quad (ii)$$

(suy từ $(1-x) + (1-y) + (1-z) + (1-t) = 1$).

Do điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên $1-x > 0$, $1-y > 0$, $1-z > 0$, $1-t > 0$. Đến đây ta áp dụng BĐT Cauchy rồi rút gọn nhờ (ii), thì được

$$(1-x)(1-y)(1-z) \le \left(\frac{1-x+1-y+1-x}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3-x-y-z}{3}\right)^3 = \left(\frac{t}{3}\right)^3$$

và ba BĐT tương tự (nhờ hoán vị vòng quanh)

$$(1-y)(1-z)(1-t) \le \left(\frac{x}{3}\right)^3$$

$$(1-z)(1-t)(1-x) \le \left(\frac{y}{3}\right)^3$$

$$(1-t)(1-x)(1-y) \le \left(\frac{z}{3}\right)^3$$

Vậy có

$$\frac{(1-x)(1-y)(1-x)(1-t)}{xyzt} \le \frac{1}{81} \quad (iii)$$

Cuối cùng, đối chiếu (i), (ii) và (iii) ta thu được BĐT cần tìm $\frac{V'}{V} \le \frac{1}{27}$ hay là $V' \le \frac{1}{27}V$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t$. Tóm lại, thể tích của tứ diện $A'B'C'D'$ *lớn nhất* bằng $\frac{1}{27}$ thể tích của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi *M là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.* ❒

Nhận xét. 1) Bài toán này về nội dung kiến thức hình học chỉ đòi hỏi kĩ năng về so sánh thể tích các hình chóp tam giác, cụ thể là tỉ số thể tích của hai hình chóp tam giác có góc tam diện ở đỉnh bằng nhau. Ngoài ra, để trình bày lời giải được gọn gàng cũng đòi hỏi ở người làm toán tự đề xuất những kí hiệu cần thiết sao cho lời giải không rườm rà và dễ theo dõi. Tuy nhiên,một điều cần lưu ý nữa là về mặt hình vẽ, hầu hết các bạn chỉ vẽ biểu diễn tượng trưng các điểm A', B', C', D' mà không để ý đến sự chính xác của hình biểu diễn. Trong việc giải bài toán hình học (hình học phẳng cũng như hình học không gian), nhất thiết phải coi trọng khâu vẽ hình và phải tuân thủ quy tắc biểu diễn hình sao cho không những trực quan mà còn phải chính xác nữa.

2) Một số bạn nhận xét rằng bài toán trên đây là bài toán tương tự trong không gian của bài toán trong hình học phẳng (khi thay tam giác bởi tứ diện) sau: M là một điểm nằm trong tam giác ABC; AM, BM, CM lần lượt cắt BC, CA, AB ở A', B', C'. Thế thì ta có: $S' \le \frac{1}{4}S$, trong đó S và S' lần lượt là diện tích của các

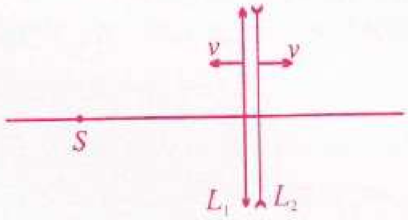
tam giác ABC, $A'B'C'$. Ngoài ra, một số bạn còn thiết lập được biểu thức sau

$$V' = \frac{3V.v_1v_2v_3v_4}{(V-v_1)(V-v_2)(V-v_3)(V-v_4)}.$$

3) Ngoài bạn *Đinh Ngọc Thái*, các bạn sau đây có lời giải đúng và tương đối gọn: **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Đại Dương*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Trần Tấn Phong*, 11A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hải Dương:** *Nguyễn Ngọc Uyển*, 12A3, THPT Phúc Thành, Kinh Môn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa – Vũng Tàu.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★Bài L1/353. *Cho một nguồn sáng điểm S đứng yên, nằm trên quang trục chính của hệ thấu kính đồng trục gồm thấu kính hội tụ L_1 có tiêu cự f_1 và thấu kính phân kì L_2 có tiêu cự $f_2 = -2f_1$. Khi hai thấu kính đặt sát nhau thì S cách thấu kính L_1 một khoảng $d = 3f_1$, và có ảnh tạo bởi hệ là S'. Sau đó cả hai thấu kính bắt đầu chuyển động theo hướng ngược chiều nhau với cùng độ lớn vận tốc v (hình vẽ). Hãy xác định độ lớn vận tốc và hướng chuyển động của ảnh S'.*



Lời giải. Sơ đồ tạo ảnh

$$S \xrightarrow[d_1 \quad d'_1]{L_1} S_1 \xrightarrow[d_2 \quad d'_2]{L_2} S'$$

Khi mỗi thấu kính chuyển động được một khoảng x, tại thời điểm t kể từ khi chuyển động, ta có:

$$d_1 = d - x,\ d'_1 = \frac{d_1f_1}{d_1-f_1} = \frac{(d-x)f_1}{d-x-f_1},$$

$$d_2 = 2x - d'_1 = 2x - \frac{(d-x)f_1}{d-x-f_1},$$

$$d'_2 = \frac{d_2f_2}{d_2-f_2} = \frac{\left[2x-\dfrac{(d-x)f_1}{d-x-f_1}\right].f_2}{2x-\dfrac{(d-x)f_1}{d-x-f_1}-f_2}.$$

Vì vị trí S cố định nên gọi khoảng cách từ S đến ảnh của hệ S' là $y = SS'$ thì vận tốc của ảnh là $V = y'_{(t)}$.

Ta có $y = SS' = d_1 + 2x + d'_2$

$$= d + x + \frac{\left[2x-\dfrac{(d-x)f_1}{d-x-f_1}\right].f_2}{2x-\dfrac{(d-x)f_1}{d-x-f_1}-f_2}$$

$$\Rightarrow y'_{(t=0)} = x'_{(t)}\left\{1+\frac{1-2\left(\dfrac{d}{f_1}-1\right)^2}{\left[d\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\right)-1\right]^2}\right\}$$

(tại $t = 0$ thì $x = 0$).

mà vận tốc chuyển động của thấu kính là

$$v = x'_{(t)} \Rightarrow y'_{(t)} = v\left\{1+\frac{1-2\left(\dfrac{d}{f_1}-1\right)^2}{\left[d\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\right)-1\right]^2}\right\}$$

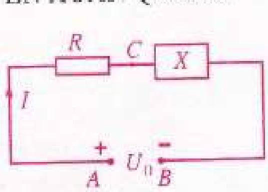
thay $d = 3f_1$, $f_2 = -2f_1$ vào ta được $V = -27v$. Vậy vận tốc dịch chuyển của ảnh tại thời điểm ban đầu là $V = 27v$ và ảnh chuyển động theo chiều lại gần điểm S (khoảng cách $y = SS'$ giảm). □

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc: *Lê Thanh Định*, 12A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Trần Việt Long*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hưng Yên:** *Phạm Đức Linh*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Nghĩa*, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/353. *Một đoạn mạch điện gồm một điện trở R mắc nối tiếp với một linh kiện X mà hiệu điện thế giữa hai cực của X là $U_X = U_{CB} = a\sqrt{I}$, với a là một hằng số, I là cường độ dòng điện trong mạch (hình vẽ). Biết hiệu điện thế đặt vào hai*



đầu đoạn mạch có trị số không đổi U_0, hãy xác định cường độ dòng điện I trong mạch. Áp dụng với: $U_0 = 24$V, $R = 5\Omega$; $a = V/A^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải. Theo bài ra ta có

$U_0 = IR + U_X = IR + a\sqrt{I}$

Suy ra $IR + a\sqrt{I} - U_0 = 0$ (1)

Phương trình (1) có các nghiệm

$$\sqrt{I_1} = \frac{-a+\sqrt{a^2+4U_0R}}{2R} \quad (2)$$

$$\sqrt{I_2} = \frac{-a-\sqrt{a^2+4U_0R}}{2R} \quad (3)$$

Nghiệm (3) loại vì $\sqrt{I_2} < 0$. Từ (2) suy ra

$$I = \left(\sqrt{I_1}\right)^2 = \frac{\left(-a+\sqrt{a^2+4U_0R}\right)^2}{4R^2}.$$

Thay số với $U_0 = 24$ V; $R = 5\Omega$; $a = 2$ V/A$^{1/2}$ thì

$$I = \frac{\left(-2+\sqrt{2^2+4.24.5}\right)^2}{4.5^2} = 4\text{ (A)}.$$

Vậy cường độ dòng điện trong mạch bằng $I = 4$ A. ❒

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn:

Yên Bái: *Nguyễn Ngọc Minh*, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Giang**: *Nhữ Văn Vịnh*, 11A1, THPT Tân Yên II; **Bắc Ninh**: *Trịnh Duy Chiến*, 12A1, THPT Quế Võ I, *Trần Việt Long*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Đại Dương*, *Hoàng Mạnh Thắng*, 11A3, *Tạ Ngọc Thắng*, *Nguyễn Kim Ngọc*, *Nguyễn Trung Quân*, 10A3, *Nguyễn Hoàng Giang*, 10A10, *Phạm Văn Giang*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây**: *Nguyễn Ngọc Đăng*, 11A1, THPT Phú Xuyên A; **Hà Nội**: *Lê Xuân Ngân*, 10A, chuyên Lí, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương**: *Bùi Tiến Mạnh*, 11A1, THPT Nguyễn Trãi, *Tạ Văn Đức*, 10C, THPT Kim Thành; **Hưng Yên**: *Nguyễn Hữu Thịnh*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên, *Phạm Ngọc Tiến*, 12A1, THPT Tiên Lữ; **Quảng Ninh**: *Vũ Nam Phong*, 12E1, THPT Cẩm Phả; **Thanh Hoá**: *Lê Bá Sơn*, *Nguyễn Duy Hùng*, 11F, THPT chuyên Lam Sơn, *Lê Công Tuấn Anh*, 10A1, THPT Yên Định, *Đỗ Ngọc Tuấn*, 11A1, THPT Hoằng Hoá 2, *Lê Vũ Sang*, 12A, THPT Nông Cống III, *Trần Hoàng Đại*, 12B3, THPT Triệu Sơn I, Lê Trung Dũng, 11A1, THPT Đông Sơn I; **Nghệ An**: *Nguyễn Ánh Minh*, *Nguyễn Tất Nghĩa*, *Nguyễn Lê Thương*, 11A3, *Nguyễn Đức Sơn*, A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Phương Thuỳ*, 12K, THPT Lý Tự Trọng, Thạch Hà; **Quảng Trị**: *Dương Mạnh Tuấn*, 12G, THPT Gio Linh; **Đắc Lắc**: *Nguyễn Văn Hà*, 10T2, THPT Ngô Gia Tự; **Bà Rịa-Vũng Tàu**: *Dương Văn An*, 11A1, THPT Châu Thành, Thị xã Bà Rịa; **Tiền Giang**: *Trương Mai Thanh Tâm*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Bình Định**: *Võ Nhật Minh*, *Nguyễn Tấn An*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN THUẬN

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/357. Prove that for every couple of positive integers n, k the number $(\sqrt{n}-1)^k$ can be written in the form $\sqrt{a_k} - \sqrt{a_k-(n-1)^k}$ with $a_k \in \mathbb{N}^*$.

T7/357. Prove that for every triangle ABC, we have

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq 5.$$

When does equality occur?

T8/357. Consider the sequence of numbers (x_n) (n = 0, 1, 2, ...) defined as follows: x_0, x_1, x_2 are given positive numbers; $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}$ for all $n \geq 1$. Prove that the sequence (x_n) (n = 0, 1, 2, ...) has a finite limit and find its limit.

T9/357. Let be given a tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$. Its inscribed sphere has center I, has radius r and touches the faces opposite the vertices A_1, A_2, A_3, A_4 at B_1, B_2, B_3, B_4 respectively. Let h_1, h_2, h_3, h_4 be the measures of the altitudes of $A_1A_2A_3A_4$ issued from A_1, A_2, A_3, A_4 respectively. Prove that for every point M in space, we have

$$\frac{MB_1^2}{h_1} + \frac{MB_2^2}{h_2} + \frac{MB_3^2}{h_3} + \frac{MB_4^2}{h_4} \geq r.$$

Giải bài *CHÀO IMO 2007* - Đợt 1

★Bài I-1. *Hãy tìm số tự nhiên nhỏ nhất không chia hết cho 11 và có tính chất: Khi thay bất kì chữ số nào bởi một chữ số sai khác với chữ số đó 1 đơn vị ta sẽ nhận được một số chia hết cho 11.*

Lời giải. Gọi số phải tìm là $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ gồm $n + 1$ chữ số với $a_n \neq 0$, $0 \leq a_i \leq 9$ với $i = 0, 1, \dots, n$.

1) Giả sử có chữ số a_i nào đó ($0 \leq i \leq n$) mà $0 < a_i < 9$ thì khi thay a_i trong A bởi a_i+1 được $A_1 = A + 10^i$ chia hết cho 11, khi thay a_i trong A bởi $a_i - 1$ được $A_2 = A - 10^i$ chia hết cho 11, suy ra $A_1 - A_2 = 2.10^i$ chia hết cho 11, nhưng điều này không thể xảy ra. Vậy $a_i = 0$ hoặc $a_i = 9$ với mọi i ($0 \leq i \leq n$) và $a_n = 9$.

2) Giả sử có chữ số a_i nào đó ($0 \leq i \leq n - 1$) mà $a_i = a_{i+1}$.

• Nếu $a_i = a_{i+1} = 9$ thì khi thay a_i trong A bởi $a_i - 1 = 8$ được $A_3 = A - 10^i$ chia hết cho 11, khi thay a_{i+1} trong A bởi $a_{i+1} - 1 = 8$ được $A_4 = A - 10^{i+1}$ chia hết cho 11, suy ra $A_3 - A_4 = 9.10^i$ chia hết cho 11, nhưng điều này không thể xảy ra.

• Nếu $a_i = a_{i+1} = 0$ thì khi thay a_i trong A bởi $a_i + 1 = 1$ được $A_5 = A + 10^i$ chia hết cho 11, khi thay a_{i+1} trong A bởi $a_{i+1} + 1 = 1$ được $A_6 = A + 10^{i+1}$ chia hết cho 11, suy ra $A_6 - A_5 = 9.10^i$ chia hết cho 11, nhưng điều này không thể xảy ra.

Do bất kì hai chữ số đứng cạnh nhau phải không bằng nhau nên số phải tìm hoặc có dạng $A = 9090...909$ gồm $2k+1$ chữ số ($a_{2j} = 9$ và $a_{2j+1} = 0$ với mọi j mà $0 \leq j \leq k-1$, $A_{2k} = 9$) hoặc có dạng $B = 9090...90$ gồm $2k+2$ chữ số ($a_{2j} = 0$, và $a_{2j+1} = 9$ với mọi j mà $0 \leq j \leq k$, $a_{2k+2} = 9$).

3) Chú ý rằng thay $a_1 = 9$ trong B bởi 8 được $B - 10 = (A-1)10$ chia hết cho 11 $\Leftrightarrow$ $A-1$ chia hết cho 11 mà $A < B$ nên số nhỏ nhất thỏa mãn đề bài có dạng $A = 9090...909$ gồm $k+1$ chữ số 9 với điều kiện $A-1$ chia hết cho 11. Theo tiêu chuẩn chia hết cho 11 thì $A - 1$ chia hết cho 11 $\Leftrightarrow$ C chia hết cho 11, trong đó C bằng tổng các chữ số có chỉ số chẵn trừ đi tổng các chữ số có chỉ số lẻ

$\Leftrightarrow 9(k+1) - 1$ chia hết cho 11.

Số $9(k+1) - 1$ nhỏ nhất chia hết cho 11 là $9.5 - 1 = 44$, lúc đó số A nhỏ nhất phải tìm là $A = 909090909$ có 9 chữ số. Thử lại đúng. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn thay thế lập luận ở phần 2 bằng cách dựa vào tiêu chuẩn chia hết cho 11 để chứng minh rằng các chữ số có chỉ số chẵn phải bằng nhau và các chữ số có chỉ số lẻ phải bằng nhau.

2) Bằng cách trên có thể giải bài toán tương tự khi thay 11 bởi một số nguyên tố khác 2, 3, 5.

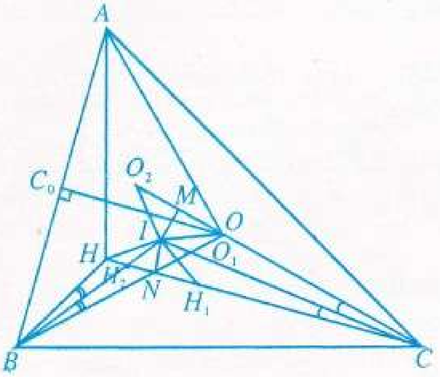
3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Trần Bá Trung, Mạc Thế Trường*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Trần Đức Minh*, 10A2, PTCTT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Đại*, 11 chuyên Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thái Bình:** *Nguyễn Tiến Hưởng*, 10A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Quảng Ninh:** *Phạm Đức Mạnh*, 11 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Nghệ An:** *Hoàng Đức Hải*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Đắk Lắk:** *Trần Như Ngọc*, 10A4, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Krông Pắk; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Minh Triết*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Đinh Ngọc Thái*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Vũng Tàu.

VIỆT HẢI

★Bài I-2. *Xét tam giác nhọn không cân ABC. Gọi H, I và O tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng hoặc không có đỉnh nào hoặc có đúng hai đỉnh của tam giác ABC nằm trên đường tròn đi qua H, I, O.*

Lời giải. Vì ABC là một tam giác nhọn không cân nên ba điểm H, I, O không thẳng hàng và đều nằm trong đường tròn (O) và vì vậy, cả ba đỉnh của ΔABC không thể cùng nằm trên



đường tròn (HIO). Bởi lẽ đó, ta chỉ cần chứng minh rằng: *Không thể xảy ra trường hợp chỉ có đúng một đỉnh của tam giác ABC nằm trên đường tròn (HIO).*

Giả sử đỉnh B nằm trên đường tròn (HIO); thế thì ta có: $\widehat{IHO}=\widehat{IBO}=\widehat{IBH}=\widehat{IOH}$ (do BI là phân giác của góc $\widehat{OBH}$; cũng vậy CI và AI tương ứng cũng là phân giác của các góc $\widehat{OCH}$ và $\widehat{OAH}$ theo một tính chất đã biết của tam giác liên quan đến trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác). Và do đó, tam giác IOH cân ở I nên $IH = IO$.

Tiếp theo, ta chứng tỏ rằng: *Nếu góc $\widehat{ACB} \neq 60^o$ thì C nằm trên đường tròn (HIO).*

Thật vậy, đặt $IH = IO = d$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các tia CO và CH. Lấy các điểm O_1 và O_2 trên tia CO sao cho $IO_1 = IO_2 = d$ và O_1 nằm trong đoạn CM, còn M nằm trong đoạn O_1O_2. Tương tự, lấy các điểm H_1 và H_2 trên tia CH sao cho $IH_1 = IH_2 = d$ và H_1 nằm trong đoạn CN, còn N nằm trong đoạn H_1H_2 (xem hình vẽ). Rõ ràng là sẽ xảy ra: $O_1 \equiv O$ hoặc $O_2 \equiv O$; hoặc $H_1 \equiv H$ hoặc $H_2 \equiv H$.

Giả sử $O_1 \equiv O$ và $H_1 \equiv H$ (hoặc $O_2 \equiv O$ và $H_2 \equiv H$); thế thì ta có $CO = CH$ (vì khi đó dễ thấy rằng $\Delta CIO = \Delta CIH$ do CI là phân giác của góc $\widehat{OCH}$ và $IO = IH$). Lại vì $CH = 2OC_0$, trong đó C_0 là trung điểm của cạnh AB; bởi vậy ta được $CH = 2OC\cos\widehat{ACB}$. Suy ra: $\cos\widehat{ACB} = \frac{1}{2}$, hay là $\widehat{ACB} = 60^o$, trái với giả thiết $\widehat{ACB} \neq 60^o$. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng chỉ có thể xảy ra: hoặc $O_1 \equiv O$ và $H_2 \equiv H$, hoặc $O_2 \equiv O$ và $H_1 \equiv H$. Khi đó ta có $\widehat{IO_1O_2}=\widehat{IO_2O_1}$ $=\widehat{IH_1H_2}=\widehat{IH_2H_1}$.

Từ đó suy ra $COIH$ là một tứ giác nội tiếp. Nói khác đi là nếu góc $\widehat{ACB} \neq 60^o$ mà đường tròn (HIO) đã đi qua đỉnh B thì cũng đi qua đỉnh C và ta thu được kết luận cần tìm.

Bây giờ giả sử cả hai đỉnh B và C đều không nằm trên đường tròn (HIO). Khi đó, theo kết quả vừa chứng minh ở trên thì ta phải có $\widehat{CBA} = 60^o$ và $\widehat{ACB} = 60^o$, và do đó $\widehat{BAC} = 60^o$ dẫn đến trái với giả thiết của bài toán, vì ABC là một tam giác không cân nên cũng không đều.

Đến đây, lời giải của bài toán đã được hoàn tất. ❒

Nhận xét. 1) Chứng minh trên đây cũng chỉ ra rằng nếu ABC là một tam giác không cân thì trực tâm H, tâm nội I và tâm ngoại O không thẳng hàng. Và khi đó, đường tròn (HIO) đi qua hai trong ba đỉnh của tam giác khi và chỉ khi tam giác ABC có một góc bằng 60^o.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả:

Mạc Thế Trường, Nguyễn Huy Hoàng, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh **Vĩnh Phúc.**

Ngoài ra bạn *Đặng Tuấn Anh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An** cũng có lời giải đúng và ngắn gọn bằng cách sử dụng Định lí sin chứng minh phản chứng rằng nếu đường tròn (HIO) chỉ đi qua một đỉnh của tam giác ABC, chẳng hạn đỉnh A thì tam giác ABC phải là cân ở A, mâu thuẫn với giả thiết. Sau đó chứng minh rằng đường tròn (HIO) đi qua hai đỉnh, chẳng hạn B và C khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 60^o$.

3) Bạn *Mạc Thế Trường* còn chỉ rõ rằng Bài toán I–2 trên đây là "Problem 10.2, 2000" trong "Cuộc thi giải toán mùa đông của Bulgari năm 2000, cũng là bài toán 246 trang 276 của cuốn sách "Tuyển chọn các bài toán từ những cuộc thi tại một số nước Đông Âu, tập 1", NXBGD."

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★**Bài I–3.** *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức $xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z)$. Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?*

Lời giải. Đặt $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$, với $a > -1$, $b > -1$ và $c > -1$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$(a+1)(b+1)(c+1) + 2((a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2)+8$ $\geq 5(a+b+c+3)$ hay

$$abc + ab + bc + ca + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0 \quad (*)$$

Để ý rằng $(ab)(bc)(ca) = a^2b^2c^2 \geq 0$, nên trong ba số ab, bc, ca có ít nhất một số không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $ab \geq 0$. Kết hợp với $c > -1$, ta thấy

$$ab(c + 1) \geq 0 \quad (1)$$

Mặt khác dễ thấy

$$b^2 + bc + c^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$c^2 + ac + a^2 \geq 0 \quad (3)$$

$$a^2 + b^2 \geq 0 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra bất đẳng thức (*) được chứng minh. Do đó bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$, hay $x = y = z = 1$.❐

Nhận xét. 1) Có nhiều phương án để giải quyết bài toán này, chẳng hạn:

- Phân tích biểu thức $P(x; y; z)$ thành tổng các đại lượng không âm;
- Sử dụng *phương pháp dồn biến*;
- Sử dụng *bất đẳng thức Schur* dưới dạng

$4(xy + yz + zx) \le \frac{9xyz}{x+y+z} + (x+y+z)^2$ (trong đó x, y, z là các số thực dương).

2) Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: *Trần Đức Minh, Đỗ Văn Đức*, 10A2, *Trịnh Ngọc Dương*, 11A1 Toán, khối PTCT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Đỗ Đức Tài*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, *Trần Văn Hạnh*, 10A5, THPT Ninh Giang; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Huy Hoàng, Mạc Thế Trường, Văn Mạnh Tuấn*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Đại*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Tăng Văn Bình*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Hoàng Đức Hải, Đặng Tuấn Anh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng, Lê Tâm Thư*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TX. Đông Hà; **Gia Lai:** *Từ Đức Phong*, 11C3, THPT Hùng Vương; **TP. Hồ Chí Minh:** *Võ Văn Tuấn*, 10 Toán, PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, *Lê Minh Triết*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

★Bài I-4. *Cho bảng ô vuông kích thước 5 × 5. Hỏi có thể tô màu 16 ô vuông con của bảng sao cho trong bất kì bảng con 2 × 2 nào cũng chỉ có không quá 2 ô vuông con được tô màu hay không?*

			*	
			*	
			*	
*	*	*	*	+
			+	+

Lời giải. Giả sử ta có thể tô màu 16 ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 5 × 5 sao cho trong bất kì bảng con 2 × 2 nào đều có không quá 2 ô vuông con được tô màu.

Khi đó, trong bảng con 4 × 4 nằm ở góc trên bên trái (bảng có viền đậm) sẽ có tối đa 4 × 2 = 8 ô được tô màu (do bảng được hợp thành bởi 4 bảng 2 × 2 độc lập). Suy ra ở 9 ô không nằm trong bảng 4 × 4 vừa nêu phải có tối thiểu 16 − 8 = 8 ô được tô màu. Vì mỗi bảng 2 × 2 đều có không quá 2 ô vuông được tô màu nên trong 3 ô đánh dấu + phải có ít nhất 1 ô không được tô màu. Suy ra trong 9 ô này phải có đúng 8 ô được tô màu và trong 3 ô đánh dấu + phải có 1 ô không được tô màu. Do đó, mỗi ô đánh dấu * đều nằm trong một bảng 2 × 2 mà trong bảng đó đã có 2 ô được tô màu nên tất cả các ô đánh dấu * đều không được tô màu. Suy ra, trong bảng 3 × 3 nằm ở góc trên bên trái phải có 8 ô được tô màu. Khi đó, tồn tại bảng con 2 × 2 (của bảng 3 × 3 vừa nêu) có ít nhất 3 ô được tô màu. Điều này mâu thuẫn với giả thiết trong mỗi bảng 2 × 2 chỉ có tối đa 2 ô được tô màu. Vì vậy, không thể tô màu 16 ô vuông con của bảng ô vuông 5 × 5 sao cho trong bất kì bảng con 2 × 2 nào cũng chỉ có không quá 2 ô vuông con được tô màu. ❐

Nhận xét. Có 37 bạn tham gia giải bài này với phương pháp phân chia bảng 5 × 5 thành các phần khác nhau, sử dụng nguyên tắc Dirichlet và đều cho câu trả lời đúng là " Không thể". Tuy nhiên, đa số còn lập luận dài dòng, đưa vào nhiều kí hiệu gây khó hiểu và phức tạp. Một số bạn còn chỉ ra được rằng nếu thay "16 ô vuông" bởi "15 ô vuông" thì có thể tô màu được theo yêu cầu bài ra.

2) Các bạn sau đây có lời giải gọn gàng hơn:

Nam Định: *Nguyễn Quốc Đại*, 11 chuyên Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hải Hà*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hoá:** *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn; **Bắc Giang:** *Lê Trung Kiên*, 12 chuyên Toán, THPT chuyên Bắc Giang;**TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Minh Triết*, 11chuyên Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** *Nguyễn Hải Việt*, 10A1, THPT Lương Văn Chánh; **Gia Lai:** *Từ Đức Phong*, 11C3, THPT Hùng Vương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài I-5. *Trên mặt phẳng, cho một số điểm màu đỏ và một số điểm màu xanh. Người ta nối các điểm khác màu với nhau sao cho hai điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:*

1) Mỗi điểm màu đỏ được nối với ít nhất một điểm màu xanh;

2) Mỗi điểm màu xanh được nối với 1 hoặc 2 điểm màu đỏ.

Chứng minh rằng có thể xóa đi không quá một nửa số điểm (trong số các điểm đã cho) sao cho với các điểm còn lại, mỗi điểm màu xanh được nối với đúng một điểm màu đỏ.

Lời giải. (*Dựa theo lời giải của Vũ Hữu Tiệp*, 12 Toán THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**)

Giả sử m và n tương ứng là số điểm màu xanh và số điểm màu đỏ đã cho ($m, n \in \mathbb{N}^*$).

Ta gọi một điểm màu xanh là điểm xanh loại 1 nếu nó được nối với đúng 1 điểm màu đỏ và là điểm xanh loại 2 nếu nó được nối với đúng 2 điểm màu đỏ.

Giả sử x là số điểm xanh loại 1 và y là số điểm xanh loại 2. ($x, y \in \mathbb{N}, x + y = m$). Đặt $k = \left[\dfrac{n}{2}\right]$.

Ta gọi một phương án xóa các điểm là *phương án tốt* nếu với các điểm còn lại, mỗi điểm màu xanh được nối với đúng một điểm màu đỏ, và trong các điểm bị xóa có đúng k điểm màu đỏ.

Xét phương án xóa điểm sau: Xóa k điểm màu đỏ tùy ý và xóa các điểm màu xanh sau đây:

– Tất cả các điểm xanh loại 1 mà mỗi điểm đều được nối với điểm màu đỏ trong số k điểm đã bị xóa;

– Tất cả các điểm xanh loại 2 mà mỗi điểm đều được nối với 2 điểm màu đỏ trong số k điểm đã bị xóa;

– Tất cả các điểm xanh loại 2 mà mỗi điểm đều không nối với điểm màu đỏ nào trong số k điểm đã bị xóa.

Dễ thấy, phương án xóa điểm nêu trên là một phương án tốt.

Ngược lại, dễ thấy, trong mỗi phương án tốt, cùng với k điểm màu đỏ bị xóa ta phải xóa tất cả các điểm màu xanh có tính chất như đã mô tả ở trên.

Từ đó suy ra, có tất cả C_n^k phương án tốt và:

– Mỗi điểm màu xanh loại 1 sẽ bị xóa trong C_{n-1}^{k-1} phương án;

– Mỗi điểm màu xanh loại 2 sẽ bị xóa trong $(C_{n-2}^{k-2} + C_{n-2}^{k})$ phương án.

Do đó, tổng số điểm xanh (kể cả lặp) bị xóa trong tất cả C_n^k phương án tốt là:

$$S = xC_{n-1}^{k-1} + y(C_{n-2}^{k-2} + C_{n-2}^{k}).$$

Suy ra, theo nguyên lí Dirichlet, phải tồn tại một phương án tốt mà trong đó số điểm xanh bị xóa không vượt quá $t = \dfrac{S}{C_n^k}$.

Để ý rằng $C_{n-1}^{k-1} \le \dfrac{1}{2}C_n^k$ và $C_{n-2}^{k-2} + C_{n-2}^{k} \le \dfrac{1}{2}C_n^k$, ta có $t \le \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{m}{2}$. Kết hợp điều này với $k \le \dfrac{n}{2}$ được $t + k \le \dfrac{m+n}{2}$, nghĩa là phương án tốt này thỏa mãn yêu cầu đề bài. ❐

Nhận xét: Trong số các bạn tham gia giải bài chỉ có bạn *Vũ Hữu Tiệp* có lời giải đúng. Các bạn khác cho lời giải sai, do chưa có hình dung đúng về các phương án nối có thể của hệ điểm xanh – đỏ đã cho. *Có một bạn đã chứng minh đề bài sai bằng cách chỉ ra một cách xóa thỏa mãn yêu cầu "với các điểm còn lại, mỗi điểm màu xanh được nối với đúng một điểm màu đỏ" và đồng thời số điểm bị xóa lớn hơn nửa tổng số điểm đã cho !?*

NGUYỄN KHẮC MINH

X hỏi ? Y, Z trả lời.

Hỏi - số này

ĐƯỜNG KHUẤT

1.(3.07). Trong các bài toán hình học không gian thường gặp các bài toán phải vẽ thêm hình phụ (các yếu tố đường vuông góc, phân giác, v.v...) để giải toán. Tuy nhiên khi vẽ thêm hình như vậy thì nhiều đường thẳng trở thành bị che khuất, mong khi đó ở các ý chứng minh trước ta đã vẽ nó là nét liền. Có nhiều biện pháp cho rằng:

1. Vẽ lại hình khác để chứng minh (giả sử hình vẽ rắc rối, và bài làm nhiều câu thì rất mất thời gian).

2. Vẽ hình ra giấy nháp trước, sau đó mới vẽ vào bài làm (như vậy bạn phải làm xong bài toán đó ở ngoài thôi mới được trình bày trong bài làm).

3. Các nét vẽ thêm sau không ảnh hưởng đến hình vẽ và kết quả của các ý đã chứng minh trước mặc dù nó đã che khuất các nét vẽ trước.

Bạn thấy ý kiến 3 là đúng hay sai, phương pháp của bạn như thế nào? Tòa soạn chờ giải đáp của các bạn gửi về.

MAI CƯỜNG
(THPT C Bình Lục, Hà Nam)

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 357 (3-2007)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

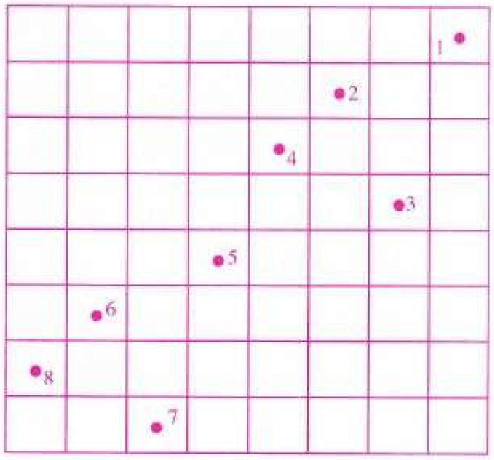
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.5121607, 04.5121606
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THƠ. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

Giải đáp bài:

Vui Tết với Bàn cờ điện tử đổi màu



Vì có 8 hàng (8 cột) nên để đổi màu tất cả các hàng (các cột) thì cần ít nhất 8 quân. Có rất nhiều cách đặt quân tuân theo đúng luật chơi. Hình bên là một cách Hà có thể đặt.

Nhận xét. Hai bạn *Nguyễn Thu Thủy,* 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái;** *Nguyễn Thanh Hoàn,* 11A1, THPT Khoái Châu, **Hưng Yên** có lời giải đúng và gửi sớm.

BÍNH NAM HÀ

Giải đáp ô chữ:

Mùa Xuân hội nhập

				L	Ậ	P	X	U	Â	N					
					Á	Â	U								
N	G	U	Ồ	N	N	H	Â	N	L	Ự	C				
						U	N								
L	À	N	S	Ó	N	G	Đ	Ầ	U	T	Ư				
						G	I	A	N	H	Ậ	P	W	T	O
			A	S	E	A	N								
		X	U	Ấ	T	K	H	Ẩ	U						
				T	H	Ế	H	Ệ	T	R	Ẻ				
		Đ	I	N	H	H	Ợ	I							
			C	H	À	O	I	M	O						

Cột dọc sẽ là: *XUÂN ĐINH HỢI*

Các bạn giải đúng và gửi sớm được nhận quà:

Đỗ Đức Thọ, 11 Lí, THPT Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**; *Nguyễn Thị Thanh Tâm,* 11B, THPT chuyên Tuyên Quang, **Tuyên Quang**; *Hoàng Văn Huy,* 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang, **Bắc Giang**; *Trần Phúc Đạt,* 10 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Nguyễn Thanh Hòa,* 10A2, THPT Phan Đình Phùng, **Hà Nội**; *Trần Văn Ngọc Tân,* Lớp 12/1, THPT Hoàng Diệu, Điện Bàn, **Quảng Nam;** *Phạm Thị Thúy Nga*, thôn Nhuông, Yên Trung, Ý Yên, **Nam Định**.

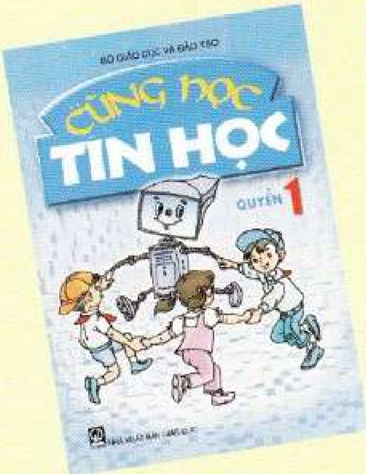
VŨ ĐÔ QUAN

TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU BỘ SÁCH GIÁO KHOA TIN HỌC MỚI

Quyển 1, 2 và 3 dành cho các lớp 3, 4, 5, cấp Tiểu học:

CÙNG HỌC TIN HỌC

Hãy học Tin học để vừa học vừa chơi với máy tính

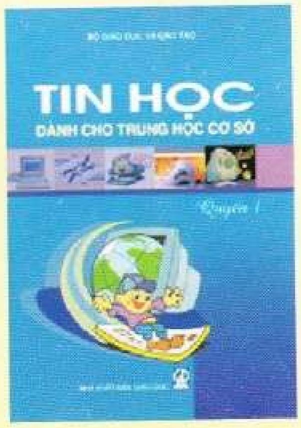


- Đây là bộ sách Tin học được biên soạn theo chương trình mới nhất do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành. Ngoài ra, sách còn giới thiệu nhiều phần mềm trò chơi hấp dẫn giúp các em vừa chơi vừa học một cách hiệu quả.
- Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại kết hợp với nhiều tranh ảnh minh họa hấp dẫn.
- Nội dung được trình bày phù hợp với lứa tuổi học sinh Tiểu học.

Quyển 1, 2, 3 và 4 dành cho các lớp 6, 7, 8, 9 cấp Trung học cơ sở:

TIN HỌC DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

- Đây là bộ sách Tin học được biên soạn theo chương trình mới nhất do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành, là bộ sách giáo khoa chính thống đầu tiên dành cho lứa tuổi học sinh THCS.
- Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại kết hợp với nhiều tranh ảnh minh họa hấp dẫn.
- Nội dung được trình bày phù hợp với lứa tuổi học sinh THCS, trang bị cho các em công cụ để học tốt các môn học khác.



ĐỊA CHỈ LIÊN HỆ:

CÁC ĐƠN VỊ TẬP THỂ ĐẶT MUA SÁCH THEO ĐỊA CHỈ:

- Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP. Hà Nội, 187B Giảng Võ, Hà Nội.
  ĐT: 04.8562011 Fax: 04.8562493.
- Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. HCM.
  ĐT: 08.8358423 Fax: 08.8390727.
- Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP. Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.
  ĐT: 0511.894504 Fax: 0511.827368.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT59M7

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2007

Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng