TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
11 2008
Số 377

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Chào mừng

NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM 20/11


www.vtc.vn
CUỘC THI
"TÀI NĂNG TOÁN HỌC
KHỐI TRUNG HỌC CƠ SỞ NĂM 2008"
TÌM KIẾM TÀI NĂNG
TÔN VINH TRÍ TUỆ
100.000.000 VNĐ
tổng giá trị giải thưởng
Tổ chức tại
www.truongtructuyen.vn

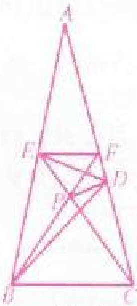
DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT BÀI TOÁN HÌNH HAY với nhiều cách giải

ĐINH CAO PHẠN
(Sở Giáo dục - Đào tạo Gia Lai)

Giải được bài toán hình học hay, ta đã cảm thấy thích thú rồi. Nhưng nếu một bài hình học hay mà giải được bằng nhiều cách thì niềm vui còn nhân lên rất nhiều. Bài viết này xin giới thiệu với bạn đọc 10 cách giải cho bài toán hình khá hay và rất quen thuộc. Chúng ta cùng bắt đầu với bài toán đó nhé!

Bài toán 1. *Cho tam giác cân ABC (AB = AC) với $\widehat{BAC} = 20°$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD} = 50°$, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{BCE} = 60°$. Tính $\widehat{CED}$.*



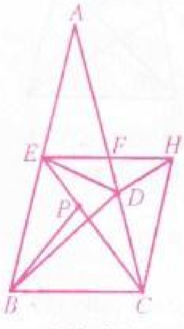
Hình 1

***Lời giải.* Cách 1.** (h. 1) Vẽ $EF \parallel BC$ (F thuộc AC), thì $BEFC$ là hình thang cân. Gọi P là giao điểm của BF và CE, do $\widehat{BCE} = 60°$ nên ΔBPC đều $\Rightarrow CP = CB$ (1)

Do $\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 50°$ nên ΔBCD cân tại C, dẫn đến $CD = CB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔDCP cân tại C nên $\widehat{CPD} = 80°$; $\widehat{DPF} = 40°$. Mà $\widehat{DFP} = 40°$ nên ΔDPF cân $DP = DF$.

Từ đó $\Delta DPE = \Delta DFE$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{PED} = \widehat{FED} = 30°$. Hay $\widehat{CED} = 30°$.



Hình 2

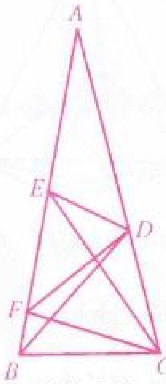
Cách 2. (h. 2). Dựng hình bình hành $BEHC$. Trên CE lấy điểm P sao cho $CP = CB$, dễ thấy ΔBPC đều. Theo cách 1 ta có $BP = BC = CD$, và $\widehat{EBP} = \widehat{HCD} = 20°$.

Do đó $\Delta EBP = \Delta HCD$(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{BEC} = 40°$.

Do $\widehat{CHE} = \widehat{CBA} = 80° \Rightarrow \widehat{DHE} = 40°$.

Vậy HD là phân giác của góc CHE.

Ta cũng có CD là phân giác góc ECH (do $\widehat{ECD} = \widehat{DCH} = 20°$). Do đó D là giao điểm ba đường phân giác của ΔECH. Vậy ED là phân giác góc CEH. Từ đó $\widehat{CED} = 30°$.



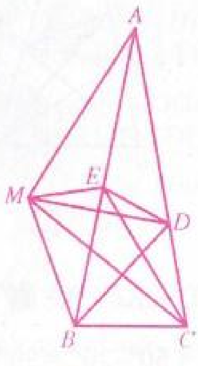
Hình 3

Cách 3. (h. 3). Lấy F trên AB sao cho $\widehat{BCF} = 20°$ thì $\widehat{CBF} = \widehat{CFB} = 80°$, nên $CF = CB$.

Mặt khác $CD = CB$ $\Rightarrow CF = CD$ và $\widehat{DCF} = 60°$ nên ΔCDF đều, dẫn đến $DF = FC$.

Vì $\widehat{CEF} = \widehat{ECF} = 40°$ nên ΔCFE cân, dẫn đến $FC = FE$.

Do đó $FE = FD = FC$, hay F là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔEDC nên $\widehat{CED} = \frac{1}{2}\widehat{CFD}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung). Mà $\widehat{CFD} = 60°$ nên $\widehat{CED} = 30°$.



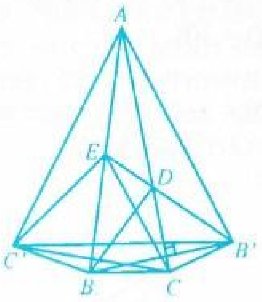
Hình 4

Cách 4. (h. 4). Lấy M trên tia phân giác góc BCD sao cho $\widehat{ABM} = 30°$. Do ΔBCD cân tại C nên CM là đường trung trực của cạnh BD suy ra $BM = DM$.

Mặt khác $\widehat{DBM} = 60°$ nên ΔDBM đều.

Từ giả thiết có $\widehat{DBE} = 30°$, dẫn đến BE là phân giác của góc DBM. Suy ra BE là đường trung trực của DM nên ΔAMD cân tại A. Do đó $\widehat{MAC} = 40°$. Lại có $\widehat{MCA} = 40°$, suy ra $\widehat{AMC} = 100°$.

Xét ΔAMC có E là giao điểm của hai đường phân giác nên ME là phân giác của góc AMC suy ra $\widehat{AME} = \widehat{CME} = 50°$. Do $\widehat{CMD} = 30°$ nên $\widehat{EMD} = 20° = \widehat{ECD}$. Do đó $MEDC$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{CMD} = \widehat{CED}$ (cùng chắn cung CD). Vậy $\widehat{CED} = 30°$.



Hình 5

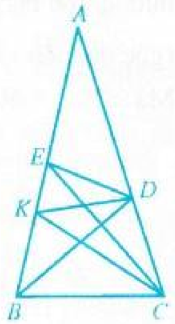
Cách 5. (h. 5) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua AC và C' đối xứng với C qua AB. Ta có $\widehat{AB'D} = \widehat{ABD} = 30°$. Vì $\widehat{B'AC'} = 60°$ và $AB' = AC'$ nên $\Delta AC'B'$ đều và $B'D$ là trung trực của AC'.

Mặt khác $\widehat{AC'E} = \widehat{ACE} = \widehat{EAC'} = 20°$ nên $\Delta EAC'$ cân tại E, do đó E thuộc trung trực của AC', hay E, D, B' thẳng hàng. Từ đó với lưu ý $\widehat{BEC} = \widehat{BAB'} = 40°$, ta thấy $CE \parallel AB'$, vậy $\widehat{CED} = \widehat{AB'D} = 30°$.

Cách 6. (h. 6) Vẽ phân giác CK của góc ACB, ta có $\widehat{BKC} = 60°$.

Ta có $\Delta CBK = \Delta CDK$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{CKD} = 60°$.

Xét ΔCKD có E là giao điểm của phân giác trong tại C và phân giác ngoài tại K, do đó DE là phân giác ngoài tại D.

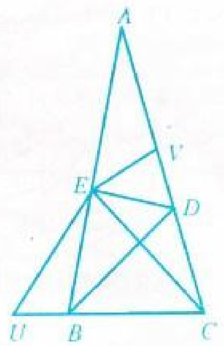


Hình 6

Ta có $\widehat{KDE} = \widehat{EDA} = \dfrac{1}{2}(180° - \widehat{KDC}) = 50°$ suy ra $\widehat{CED} = \widehat{ADE} - \widehat{DCE} = 50° - 20° = 30°$.

Cách 7. (h. 7)

Dựng đường tròn tâm C, bán kính CE. Đường tròn này cắt tia CB tại U và cắt AC tại V.



Hình 7

Ta có $CE = CU$ và $\widehat{BCE} = 60°$ nên ΔCEU đều, do đó $EU = EC$ và $\widehat{CEU} = 60°$.

Vì $\widehat{CEB} = 40°$ nên $\widehat{BEU} = 20°$.

Lại có ΔACE cân nên $AE = CE$, do đó $AE = EU$.

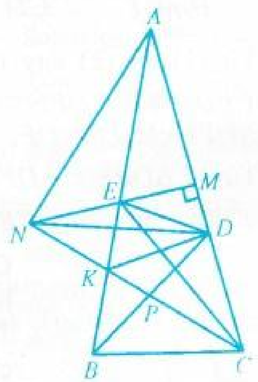
Có $\Delta AEV = \Delta EUB$ ($AE = EU$, $\widehat{EAV} = \widehat{UEB} = 20°$, $AV = AC - CV = AB - EC = AC - AE = EB$) nên $EV = BU$ và $\widehat{AVE} = \widehat{EBU} = 180° - \widehat{ABC} = 180° - 80° = 100°$.

Mặt khác $BU = CU - BC = CV - CD = DV$ nên $EV = DV$. Do đó ΔEVD cân tại V, suy ra $\widehat{DEV} = \dfrac{1}{2}\widehat{AVE} = 50°$.

Ta có ΔCVE cân tại C có $\widehat{ECV} = 20°$, suy ra $\widehat{CEV} = \widehat{CVE} = 80°$. Từ đó $\widehat{CED} = \widehat{CEV} - \widehat{DEV} = 80° - 50° = 30°$.

Cách 8. (h. 8)

Từ E vẽ $EM \perp AC$, tia ME cắt phân giác của góc ACB tại N. CN cắt AB tại K và cắt BD tại P.



Hình 8

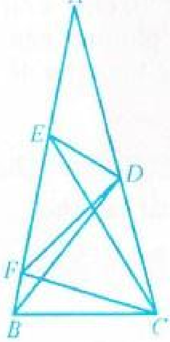
Ta có $\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 50°$ nên ΔCBD cân, suy ra CP là trung trực của BD, nên ΔKBD cân. Do đó $\widehat{AKD} = 2\,\widehat{KBD} = 60°$.

Lại có ΔAEC cân ($\widehat{EAC} = \widehat{ECA} = 20°$) nên $\widehat{AEM} = \widehat{MEC} = 70°$ (1)

và EM cũng là trung trực của AC, do đó ΔANC cân. Từ đó $\widehat{NAE} = \widehat{DAE} = 20^o$.

Có $\Delta ANK = \Delta ADK$ (c.g.c) nên $AN = AD$, hay ΔAND cân, suy ra $AE \perp ND$. Vậy E là trực tâm ΔAND nên $DE \perp AN$. Từ đó $\widehat{ADE} = 50^o$ $\Rightarrow \widehat{MED} = 40^o$ (2)

Từ (1) và (2) có $\widehat{CED} = 30^o$.



Hình 9

Cách 9. (h. 9) Lấy F trên AB sao cho $\widehat{DCF} = 60^o \Rightarrow \widehat{FCB} = 20^o \Rightarrow \Delta BCF$ cân ($\widehat{CFB} = \widehat{CBF} = 80^o$), nên $CF = CB$. Ta có ΔBCD cân ($\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 50^o$) suy ra $CB = CD$.

Từ đó $CF = CD$ mà $\widehat{DCF} = 60^o$ nên ΔCDF đều, do đó $\widehat{FCE} = 40^o = \widehat{FEC}$ nên $FE = FC$, suy ra $FE = FD$.

Vậy ΔFED cân tại F.
Vì $\widehat{EFD} = 40^o$, suy ra $\widehat{FED} = 70^o$.
Ta có $\widehat{CED} = \widehat{FED} - \widehat{FEC} = 70^o - 40^o = 30^o$.

Cách 10. (h. 10) (dành cho bậc THPT)

Đặt $x = \widehat{CED}$ thì $\widehat{CDE} = 160^o - x$.

Trong ΔCDE, có

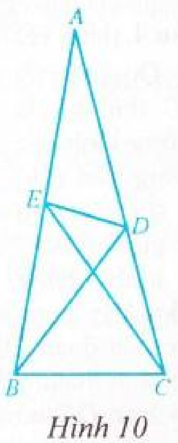
$$\frac{CE}{\sin(160^0 - x)} = \frac{CD}{\sin x}$$

hay

$$\frac{CE}{CD} = \frac{\sin(160^0 - x)}{\sin x} \quad (1)$$

Trong ΔBCE có

$$\frac{CE}{\sin 80^0} = \frac{BC}{\sin 40^0}$$



Hình 10

hay $\dfrac{CE}{BC} = \dfrac{2\sin 40^0 \cos 40^0}{\sin 40^0} = 2\cos 40^o$ (2)

Do ΔBCD cân nên $CD = BC$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\sin(160^0 - x) = 2\cos 40^o.\sin x$$

Áp dụng công thức $\sin(180^o - a) = \sin a$ ta có

$\sin(20^o + x) = 2\sin x.\cos 40^o$

$(= 2\cos(60^o - 20^o).\ \sin x)$

$\Leftrightarrow \sin 20^o.\cos x + \cos 20^o.\sin x$

$= \cos 20^o \sin x + \sqrt{3}\sin 20^o.\ \sin x$

hay $\sin 20^o.\cos x = \sqrt{3}\sin 20^o.\sin x$

$\Rightarrow \cot x = \sqrt{3}$.

Vậy $x = 30^o$. Từ đó $\widehat{CED} = 30^o$.

Cuối cùng xin nêu một bài toán cũng rất lí thú và quen thuộc, các bạn hãy tìm xem có bao nhiêu cách giải chúng?

✪**Bài toán 2.** *Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{BAC} = 20^o$). Lấy E trên AB sao cho AE = BC. Tính số đo góc ACE.*

Gợi ý

Cách 1.
Dựng đường tròn tâm A, bán kính AB. Lấy U, V trên (O) sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{BAU} = \widehat{UAV} = 20^o$.

Cách 2.
Dựng tam giác AEQ cân, với $\widehat{AQE} = 20^o$.

Cách 3.
Dựng tam giác ACQ cân, với $\widehat{ACQ} = 20^o$.

Cách 4.
Lấy lần lượt các điểm F trên AB, D trên AC, E' trên AB sao cho $CB = CF = FD = DE'$, rồi chứng minh E trùng E',

Cách 5.
Lấy E' trên AB sao cho $\widehat{ACE'} = 10^o$.
Chứng minh $AE' = BC$ từ đó E trùng E'.

Trong $\Delta ACE'$ có $\dfrac{AE'}{\sin 10^o} = \dfrac{CE'}{\sin 20^o}$

Trong $\Delta BCE'$ có

$$\frac{BC}{\sin 30^o} = \frac{CE}{\sin 80^o} = \frac{CE'}{\cos 10^o}.$$

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10
Trường THPT AMSTERDAM và THPT CHU VĂN AN, HÀ NỘI
NĂM HỌC 2008 - 2009

(Đề thi đã đăng trên THTT số 375 tháng 9 năm 2008)

Câu 1. Điều kiện $x \geq -6, y \geq -6$.

Trừ theo vế hai PT của hệ đã cho ta được

$$P = \sqrt{x+19} - \sqrt{y+19} + \sqrt{x+6} - \sqrt{y+6}$$
$$= (m-2008)(y-x) \qquad (1)$$

1) Với $m = 2008$, ta có $P = 0$ (2)

Nếu $x > y$ thì $\sqrt{x+19} > \sqrt{y+19}$ và $\sqrt{x+6} > \sqrt{y+6}$, suy ra $P > 0$ (mâu thuẫn (2)).

Tương tự, nếu $x < y$ thì $P < 0$ (mâu thuẫn (2)).

Vậy $x = y$, thay vào PT thứ nhất của hệ (với $m = 2008$) ta được

$$\sqrt{x+19} - \sqrt{x+6} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+19} = \sqrt{x+6} + 1.$$

Bình phương hai vế, rút gọn được $6 = \sqrt{x+6}$.

Tìm được nghiệm của hệ đã cho $(x ; y) = (30 ; 30)$.

2) Với $m > 2008$, lập luận tương tự như trên, từ (1) suy ra $x = y$. Do đó số nghiệm của hệ đã cho là số nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x+19} - \sqrt{x+6} = (m-2008)x \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra $x > 0$. Giả sử $x_1 > x_2 > 0$ là hai nghiệm của PT (3), khi đó ta có

$$\sqrt{x_i+19} - \sqrt{x_i+6} = (m-2008)x_i,\ i = 1, 2.$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên, nhân liên hợp ta được

$$(x_1 - x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1+19}+\sqrt{x_2+19}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+6}+\sqrt{x_2+6}}\right)$$
$$= (x_1 - x_2)(m-2008)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1+19}+\sqrt{x_2+19}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+6}+\sqrt{x_2+6}}$$
$$= m - 2008 \qquad (4)$$

Dễ thấy vế phải của (4) là một số âm, trong khi vế trái dương, mâu thuẫn.

Vậy phương trình (3) có không quá một nghiệm.

Câu 2. 1) Ta có $a_n = 3(n+1)^2 + 10$ và $3(n+1)^2$ có tận cùng là 0, 2, 3, 5, 7 hoặc 8. Do đó a_n chia 5 dư 0, 2 hoặc 3. Suy ra với a_i, a_k không chia hết cho 5 và chia cho 5 có số dư khác nhau thì $a_i + a_k \vdots 5$.

2) Với n lẻ thì $a_n = 3(n+1)^2 + 10$ chia 4 dư 2. Mặt khác, do a_n là số chính phương nên a_n chia 4 dư 0 hoặc 1. Vậy không tồn tại n để a_n là số chính phương.

Câu 3. Đặt $t = \sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}$, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Bài toán trở thành tìm b lớn nhất sao cho

$$-t^2 + (b-1)t + b - 2 \leq 0,\ \forall t \in \left[0 ; \sqrt{2}\right]$$

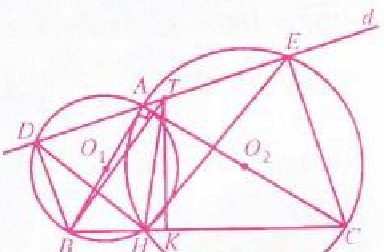
$$\Leftrightarrow \frac{t^2+t+2}{t+1} \geq b,\ \forall t \in \left[0 ; \sqrt{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow M = t + 1 + \frac{2}{t+1} - 1 \geq b,\ \forall t \in \left[0 ; \sqrt{2}\right].$$

Sử dụng BĐT Cauchy ta có $M \geq 2\sqrt{2} - 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \sqrt{2} - 1$.

Suy ra $M \geq b$, $\forall t \in \left[0 ; \sqrt{2}\right]$ khi và chỉ khi $b \leq 2\sqrt{2} - 1$. Vậy giá trị lớn nhất có thể của b thoả mãn bài toán là $b = 2\sqrt{2} - 1$.

Câu 4. (hình vẽ)



1) Do AB và AC thứ tự là đường kính các đường tròn (O_1) và (O_2) suy ra tứ giác $BDEC$ là hình thang vuông. Vậy trung trực của đoạn DE chính là đường trung bình của hình thang $BDEC$. Do đó đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua trung điểm của BC.

2) Ta có $S_{BDEC} = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACE}$.

Tam giác ABD có AB không đổi nên S_{ABD} lớn nhất $\Leftrightarrow$ đường cao hạ từ D xuống AB lớn nhất $\Leftrightarrow$ D là điểm chính giữa của cung AB. Khi đó $\widehat{BAD} = 45° \Rightarrow \widehat{CAE} = 45°$ (vì $\widehat{BAC} = 90°$),

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG
NĂM HỌC 2008 - 2009

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Cau 1. (*2 điểm*)

Cho phương trình ẩn x

$$x^4 - 2(2m+1)x^2 + 4m^2 = 0 \qquad (1)$$

1) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

2) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 17$$

Câu 2. (*1 điểm*).

Rút gọn biểu thức

$$A = \sqrt[3]{3b-1+b\sqrt{8b-3}} + \sqrt[3]{3b-1-b\sqrt{8b-3}}$$

với $b \geq \dfrac{3}{8}$.

Câu 3. (*2 điểm*).

Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{9-y} = m \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{9-x} = m \end{cases}$

với m là tham số

1) Giải hệ phương trình khi $m = 2\sqrt{5}$.

2) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất.

Câu 4. (*1 điểm*)

Tìm các số thực x sao cho $x + \sqrt{2009}$ và $\dfrac{16}{x} - \sqrt{2009}$ đều là số nguyên.

Câu 5. (*3 điểm*). Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và một điểm P cố định khác O ($OP < R$). Hai dây AB và CD thay đổi sao cho AB vuông góc với CD tại P. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, AD. Các đường thẳng EP, FP cắt BD, BC lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, B, P cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $BD = 2EO$.

3) Tìm giá trị lớn nhất, và giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác $ACBD$.

Câu 6. (1 điểm). Cho x, y thỏa mãn $16x^2 - 9y^2 \geq 144$. Chứng minh rằng

$$|2x - y + 1| \geq 2\sqrt{5} - 1.$$

HOÀNG VĂN ĐẮC

(*GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương*) giới thiệu

---

lúc này E là điểm chính giữa cung AC, dẫn đến S_{AEC} lớn nhất.

Do đó S_{BDEC} lớn nhất khi và chỉ khi D là điểm chính giữa cung AB. Lúc này ta có

$$S_{BDEC} = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACE} = \frac{1}{4}(b+c)^2.$$

3) Gọi T là trung điểm của DE. Ta có

$\widehat{BHD} = \widehat{BAD}$ (cùng chắn cung BD),

$\widehat{CHE} = \widehat{CAE}$ (cùng chắn cung CE).

Suy ra $\widehat{DHE} = \widehat{BAC} = 90°$, dẫn đến $HT = TD$.

Sử dụng định lí Pythagore cho các tam giác vuông ta có

$$KB^2 = TB^2 - TK^2 = TB^2 - TH^2 + HK^2$$
$$= TB^2 - TD^2 + HK^2 = BD^2 + HK^2 \text{ (đpcm).}$$

Câu 5. Xét các tập con gồm không quá 2 phần tử của A. Giả sử các tổng của các phần tử của mỗi tập con đó đều khác nhau. Suy ra các phần tử của A đều khác 0. Giả sử 6 phần tử của A là $a_1 < a_2 < ... < a_6$. Khi đó $a_1 \geq 1$; $a_2 \neq a_1$ nên $a_2 \geq 2$; $a_3 \neq a_1$, $a_3 \neq a_2$ và $a_3 \neq a_1 + a_2$ nên $a_3 \geq 4$. Lập luận tương tự ta có $a_4 \geq 7$, $a_5 \geq 14$, $a_6 \geq 22$. Vô lí vì $a_i \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ ...\ ;\ 14\}$.

Vậy trong các tập đang xét, có ít nhất hai tập có tổng các phần tử bằng nhau. Ta có điều phải chứng minh.

ĐOÀN VĂN TỀ

(*Sở GD&ĐT Hà Nội*) giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN và một số dạng toán liên quan

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Đồng biến, nghịch biến là các khái niệm cơ bản nhất của hàm số (HS). Sử dụng khảo sát sự biến thiên của HS, giúp chúng ta giải quyết được một lớp rất rộng các bài toán (Các bạn có thể xem thêm các bài trong cùng chuyên mục trên các số báo 359 (5/2007) hoặc 361 (7/2007). Sau đây là một số vấn đề và dạng toán thường gặp trong chương trình phổ thông.

I. LÍ THUYẾT

• Hàm số $y = y(x)$ đồng biến trong khoảng $(a\ ;\ b)$ khi và chỉ khi $y'(x) \geq 0\ \ \forall x \in (a\ ;\ b)$, và tập hợp các giá trị x trong khoảng $(a\ ;\ b)$ thoả mãn $y'(x) = 0$ là hữu hạn.

• Nếu hàm số $y = y(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, $y'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và tập hợp các giá trị x trong mỗi khoảng $(a\ ;\ b)$ thoả mãn $y'(x) = 0$ là hữu hạn thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đối với HS nghịch biến, ta cũng có các mệnh đề tương tự.

II. CÁC DẠNG TOÁN CÓ LIÊN QUAN

1. Tìm điều kiện để hàm số đồng biến, nghịch biến trong một khoảng cho trước

★**Thí dụ 1**. *Cho hàm số*

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2m+1)x^2 + (3m+2)x - 5m + 2.$$

a) Tìm m để hàm số nghịch biến trong khoảng $(0\ ;\ 1)$.

b) Tìm m để hàm số nghịch biến trong một khoảng có độ dài lớn hơn 1.

Lời giải. a) Ta có $y' = x^2 - (2m+1)x + 3m + 2$.

HS nghịch biến trong khoảng $(0\ ;\ 1)$ khi và chỉ khi

$$y' = f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3m + 2 \leq 0, \forall x \in (0;1).$$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi phương trình (PT) $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$$x_1 \leq 0 < 1 \leq x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 \leq 0 \\ (1-x_1)(1-x_2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+2 \leq 0 \\ m+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2.$$

b) Tam thức $y' = f(x)$ có biệt thức $\Delta = 4m^2 - 8m - 7$.

Nếu $\Delta \leq 0$ thì $y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, HS luôn đồng biến, không thoả mãn.

Nếu $\Delta > 0$ thì $y' \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$, HS nghịch biến trong khoảng $(x_1; x_2)$. Để HS nghịch biến trong khoảng có độ dài lớn hơn 1 thì

$$|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > 1 \qquad (1)$$

Theo định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 = 2m + 1$; $x_1x_2 = 3m + 2$.

Thay vào (1), tìm được $m < 1 - \sqrt{3}$ hoặc $m > 1 + \sqrt{3}$. ❒

Lưu ý. Nếu $a > 0$ thì tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0,\ \ \forall x \in (\alpha;\beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0. \end{cases}$$

• ***Bài toán***. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a > 0)$. Tìm điều kiện để HS nghịch biến trong một khoảng có độ dài lớn hơn k.

Cách giải. Tính y'; Điều kiện của bài toán được thỏa mãn khi PT $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt $(\Delta > 0)$ sao cho

$$|x_1 - x_2| > k \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > k^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > k^2;$$

Sử dụng định lí Viète suy ra kết quả.

★**Thí dụ 2.** *Tìm m để hàm số*

$$y=\frac{1}{3}x^3-(3m-1)x^2+(m+3)x+4m-3$$

đồng biến trong khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $y'=x^2-2(3m-1)x+m+3$.

HS đồng biến trong khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'=f(x)=x^2-2(3m-1)x+m+3\geq 0$, $\forall x\in(1;+\infty)$.

Điều kiện để ra được thoả mãn trong hai trường hợp sau:

1) $\Delta'\leq 0$ (vì khi đó $y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, HS đồng biến trên $\mathbb{R}$).

Ta có $\Delta'\leq 0\Leftrightarrow 9m^2-7m-2\leq 0\Leftrightarrow -\frac{2}{9}\leq m\leq 1$.

2) PT $y'=f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1<x_2\leq 1$. Khi đó

$$\begin{cases}\Delta>0\\ af(1)\geq 0\\ \frac{S}{2}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9m^2-7m-2>0\\ -5m+6\geq 0\\ 3m-1<1\end{cases}\Leftrightarrow m<-\frac{2}{9}.$$

Hợp kết quả hai trường hợp, ta được $m\leq 1$. □

Lưu ý. Giả sử a là một số thực dương thì HS

$$y=ax^2+bx+c\geq 0,\ \forall x\in(\alpha;\beta)$$

trong hai trường hợp sau:

1) $\Delta\leq 0$.

2) PT y' = 0 có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $(\alpha;\beta)\cap(x_1;x_2)=\varnothing$.

★**Thí dụ 3.** *Cho hàm số*

$$y=\frac{x^2-(3m+1)x+5m-1}{x-m}.$$

Tìm m để hàm số đồng biến trong khoảng $(0\,;1)$.

Lời giải. Điều kiện xác định $x\neq m$.

HS xác định trong khoảng $(0;1)$ khi $m\leq 0$ hoặc $m\geq 1$ (1)

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2mx+3m^2-4m+1}{(x-m)^2}$.

HS đồng biến trong khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'\geq 0$ hay

$$f(x)=x^2-2mx+3m^2-4m+1\geq 0,\ \forall x\in(0\,;1).$$

Vì $f(x)$ là một tam thức bậc hai có $\frac{S}{2}=m\notin(0\,;1)$ nên $f(x)$ (đồng biến trong khoảng $(0\,;1)$ khi và chỉ khi

$$y'=f(x)\geq 0,\ \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)\geq 0\\ f(1)\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4m+1\geq 0\\ 3m^2-6m+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\leq\frac{1}{4}\quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta được $m\leq 0$. □

Lưu ý. • Khi nói một HS đồng biến hoặc nghịch biến trong khoảng nào đó thì trước hết, nó phải xác định trong khoảng đó.

• Nếu $f(x)=ax^2+bx+c$ và $\frac{S}{2}=-\frac{b}{2a}\notin(\alpha\,;\beta)$ thì

$$f(x)\geq 0,\ \forall x\in(\alpha;\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)\geq 0\\ f(\beta)\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)\leq 0,\ \forall x\in(\alpha;\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)\leq 0\\ f(\beta)\leq 0.\end{cases}$$

2. Sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để giải phương trình, bất phương trình

★**Thí dụ 4.** *Giải phương trình*

$$\log_3\frac{x^2+x+1}{2x^2-2x+3}=x^2-3x+2.$$

Lời giải. Đặt $u=x^2+x+1$; $v=2x^2-2x+3$ ($u>0$, $v>0$) suy ra $v-u=x^2-3x+2$.

PT đã cho tương đương với

$$\log_3\frac{u}{v}=v-u\Leftrightarrow\log_3 u-\log_3 v=v-u$$

$$\Leftrightarrow\log_3 u+u=\log_3 v+v\quad (1)$$

Xét HS $f(t)=\log_3 t+t$, có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0$, $\forall t>0$ nên HS đồng biến khi $t>0$.

Từ (1) có $f(u)=f(v)$, suy ra $u=v$ hay $v-u=0$, tức là $x^2-3x+2=0$.

PT có nghiệm $x=1$, $x=2$. □

Lưu ý. • Với phương trình dạng $\log_a \frac{u}{v} = v - u$ với u, v dương và $a > 1$, ta thường biến đổi

$\log_a u - \log_a v = v - u \Leftrightarrow \log_a u + u = \log_a v + v.$

Vì HS $f(t) = \log_a t + t$ đồng biến khi $t > 0$, suy ra $v = u$.

• Với các điều kiện trên, ta có BPT

$\log_a \frac{u}{v} < v - u \Leftrightarrow f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v.$

★Thí dụ 5. *Giải bất phương trình*

$$\log_5(3+\sqrt{x}) > \log_4 x.$$

Lời giải. ĐK $x > 0$.

Đặt $t = \log_4 x \Leftrightarrow x = 4^t$, BPT trở thành

$\log_5(3+2^t) > t \Leftrightarrow 3 + 2^t > 5^t \Leftrightarrow \frac{3}{5^t} + \left(\frac{2}{5}\right)^t > 1.$

HS $f(t) = \frac{3}{5^t} + \left(\frac{2}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$.

BPT trở thành $f(t) > f(1) \Leftrightarrow t < 1$, ta được $\log_4 x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 4$. ❒

Lưu ý. • Với BPT dạng $\log_a u < \log_b v$, ta thường giải như sau:

Đặt $t = \log_a u$ (hoặc $t = \log_b v$); đưa về BPT mũ; sử dụng chiều biến thiên của HS để suy ra nghiệm.

• Với PT dạng $\log_a u = \log_b v$, ta thường giải như sau:

Đặt $t = \log_a u = \log_b v \Rightarrow \begin{cases} u = a^t \\ v = b^t \end{cases}$; sử dụng phương pháp thế để đưa về một PT mũ; tìm t (thông thường PT có nghiệm t duy nhất); suy ra x.

3. Sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để chứng minh bất đẳng thức

★Thí dụ 6. *Chứng minh rằng với x dương, ta có bất đẳng thức* $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Lời giải. BĐT phải chứng minh tương đương với $x > \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

Xét HS $f(x) = x - \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$, có

$$f'(x) = 1 - \frac{1+x}{1+x+\frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{2+2x+x^2} > 0.$$

HS đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó với $x > 0$, ta có $f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow x > \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$. ❒

Lưu ý. Với x dương và $n \in \mathbb{N}^*$, ta có bất đẳng thức tổng quát sau:

$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, hay

$\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) < x$.

Cách chứng minh tương tự thí dụ 6. ❒

★Thí dụ 7. *Chứng minh rằng với* $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, *ta có* $\sin x + \tan x > 2x$.

Lời giải. Xét HS $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, để ý rằng với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $0 < \cos x < 1$, suy ra $\cos x > \cos^2 x$, nên

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

$$= \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)^2 > 0, \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

HS đồng biến trong khoảng $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và liên tục trong $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ có $f(x) > f(0) = 0$, suy ra $\sin x + \tan x > 2x$. ❒

Lưu ý. Cũng chứng minh tương tự như trên, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $2\sin x + \tan x > 3x$.

(Xem tiếp trang 11)

PHƯƠNG PHÁP LỰA CHỌN CÁC KIẾN THỨC HÌNH HỌC PHẲNG để giải các bài toán mở rộng không gian

ĐÀO TAM
(GV khoa Toán ĐH Vinh, Nghệ An)

Các bạn học sinh khá giỏi toán ở trường phổ thông thường quan tâm phát triển, mở rộng các bài toán từ hình học phẳng thành các bài toán trong không gian. Việc luyện tập thói quen như vậy chẳng những giúp học sinh nâng cao hứng thú học tập mà còn góp phần rèn luyện năng lực tự học, tự khám phá, kiến tạo kiến thức mới.

Nhiều khi thông qua việc xem xét các đối tượng, quan hệ tương tự, xem xét mối quan hệ nhân quả, quan hệ giữa cái chung và cái riêng chúng ta có thể hình dung bài toán hình học không gian được mở rộng từ bài toán phẳng là đúng. Tuy nhiên từ trực giác hình học đến việc kiểm chứng tính đúng đắn của bài toán mới được đề xuất chứa đựng nhiều khó khăn về mặt kĩ thuật: khó khăn nổi bật là cách chuyển tải những tính chất, quan hệ của các đối tượng hình học phẳng sang các đối tượng mới của hình học không gian, liên quan đến mở rộng số chiều và liên quan tới các dạng tính chất bất biến của các phép biến đổi điểm, không phải bao giờ cũng tương thích.

Để khắc phục khó khăn nêu trên và góp phần nâng cao hiệu quả việc huy động kiến thức của hình học phẳng thích hợp cho việc giải các bài toán mở rộng không gian, chúng tôi chú trọng các biện pháp được đúc kết từ thực tiễn dạy học cách khai thác, mở rộng các bài toán.

BIỆN PHÁP 1. *Từ các bài toán phẳng, nhờ sử dụng quan hệ tương tự giữa các đối tượng, quan hệ nhân quả, mở rộng thành các bài toán không gian và việc giải các bài toán không gian được tiến hành nhờ tách các bộ phận phẳng thích hợp cho việc sử dụng bài toán phẳng ban đầu hoặc sử dụng cách giải tương tự trong mặt phẳng.*

Tác dụng của biện pháp trên là tạo quy trình chuyển việc giải một bài toán trong không gian về giải một nhóm bài toán trong mặt phẳng đã biết phương pháp.

Có thể khảo sát biện pháp trên thông qua các thí dụ sau đây.

★**Thí dụ 1.** *Cho góc xOy và điểm A nằm trong góc đó.*

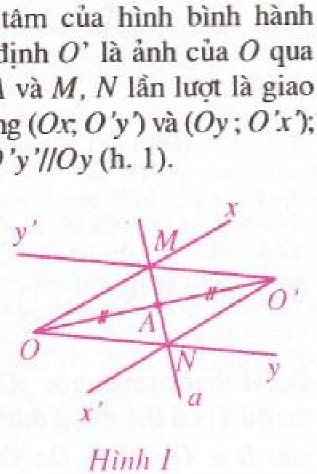
1) *Dựng qua A đường thẳng a sao cho a cắt tia Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N sao cho* $AM = AN$.

2) *Dựng qua A đường thẳng a sao cho a cắt Ox, Oy tại các điểm M và N sao cho* $\frac{AM}{AN} = k$ ($k > 0$ *cho trước*).

Có thể giải câu 1 của bài toán bằng hai cách.

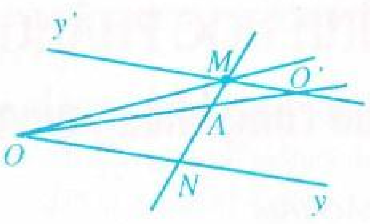
Cách 1. Xem A là tâm của hình bình hành dựng được nhờ xác định O' là ảnh của O qua phép đối xứng tâm A và M, N lần lượt là giao của các cặp đường thẳng (Ox; $O'y'$) và (Oy ; $O'x'$); trong đó $O'x'//Ox$; $O'y'//Oy$ (h. 1).

Cách 2. Xem M là giao của Ox với $O'y'$; trong đó $O'y'$ là ảnh của Oy qua phép đối xứng tâm A (h.1).



Hình 1

• *Chú ý*. Có thể xem O' là ảnh của A qua phép vị tự $V_{(O,\,2)}$.



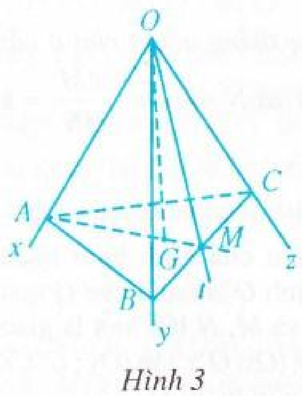
Hình 2

Câu 2 của bài toán được giải nhờ sử dụng phép vị tự $V_{(A,\,-k)}$. Việc dựng a quy về dựng điểm M là giao của Ox với $O'y'$ là ảnh của Oy qua phép vị tự nêu trên (h. 2).

Khi xem trung điểm của đoạn thẳng là trọng tâm của hai đầu mút, tương tự với khái niệm trọng tâm của tam giác chúng ta có thể mở rộng sang bài toán trong không gian như sau:

Với G là điểm cho trước trong miền góc tam diện Oxyz. Hãy dựng mặt phẳng (α) qua G sao cho (α) cắt các cạnh Ox, Oy, Oz của góc tam diện tại các điểm tương ứng A, B, C sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm.

Có thể giải bài toán này bằng cách tách các bộ phận phẳng để sử dụng bài toán ban đầu như sau:



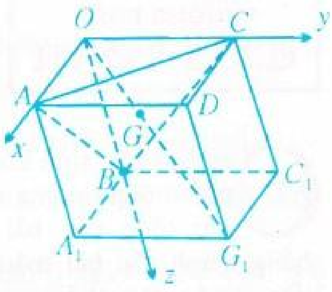
Hình 3

Cách 1. Mặt phẳng xác định bởi đường thẳng Ox và điểm G cắt mặt phẳng yOz theo giao tuyến Ot. Khi đó G thuộc miền góc xOt. Theo thí dụ 1 có thể dựng được đoạn thẳng AM sao cho $\frac{GM}{GA}=\frac{1}{2}$ (1), với $A \in Ox$, $M \in Ot$ nhờ sử dụng phép vị tự $V_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}$ (h. 3).

Do M thuộc miền góc yOz nên theo câu 1 của thí dụ 1, có thể dựng được đoạn thẳng BC sao cho $B \in Oy$, $C \in Oz$ và $MB = MC$ (2) nhờ phép đối xứng tâm M. Từ (1), (2) suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC.

Cách 2. Xác định A thuộc Ox nhờ sử dụng phép vị tự $V_{(G,\,-2)}$. Khi đó A là giao điểm của Ox với mặt phẳng là ảnh của mặt phẳng yOz. Từ thí dụ 1 dựng được BC nhận M là trung điểm với $B \in Oy$, $C \in Oz$.

Cách 3.



Hình 4

Dựng hình hộp $OADC.BA_1G_1C_1$ nhận OG_1 làm đường chéo và các cạnh xuất phát từ O: OA, OB, OC lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz, trong đó G_1 là ảnh của G qua phép vị tự $V_{(O,3)}$. Khi đó mặt phẳng (ABC) cắt OG_1 tại G và G là trọng tâm tam giác ABC (h. 4).

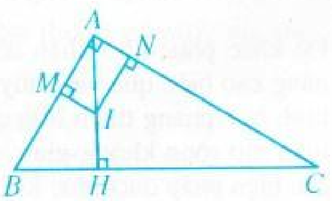
★**Thí dụ 2.** Xét bài toán sau: "*Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là trung điểm của đường cao AH. Chứng minh rằng*

$$a^2\overrightarrow{IA}+b^2\overrightarrow{IB}+c^2\overrightarrow{IC}=\vec{0} \quad (1)$$

Bài toán này được giải nhờ biến đổi tương đương hệ thức (1) về dạng

$$\overrightarrow{AI}=\frac{b^2}{2a^2}\overrightarrow{AB}+\frac{c^2}{2a^2}\overrightarrow{AC} \quad (2)$$

Hệ thức (2) được chứng minh nhờ nhân vectơ vế trái của (1) với số $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{2a^2}$; đồng thời sử dụng hệ thức $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ trong hình chữ nhật $AMIN$; $M \in AB, N \in AC$ và ba tam giác đôi một đồng dạng AMI, AHB, CAB (h. 5).



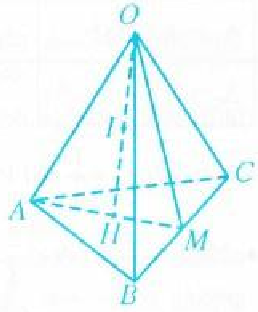
Hình 5

Chú ý (2) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AH}=\frac{b^2}{a^2}\overrightarrow{AB}+\frac{c^2}{a^2}\overrightarrow{AC}$ (3)

Có thể mở rộng bài toán trên thành bài toán trong không gian như sau:

Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi S_O, S_A, S_B, S_C lần lượt là diện tích các mặt của tứ diện đối diện với các đỉnh tương ứng O, A, B, C. Gọi I là trung điểm đường cao AH của tứ diện. Chứng minh rằng $S_O^2\overrightarrow{IO}+S_A^2\overrightarrow{IA}+S_B^2\overrightarrow{IB}+S_C^2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Sử dụng hệ thức $S_O^2=S_A^2+S_B^2+S_C^2$ thì hệ thức cần chứng minh tương đương với $\overrightarrow{OH}=\frac{S_A^2}{S_O^2}\overrightarrow{OA}+\frac{S_B^2}{S_O^2}\overrightarrow{OB}+\frac{S_C^2}{S_O^2}\overrightarrow{OC}$. Từ đó có thể giải bài toán này nhờ sử dụng kiến thức hình phẳng sau (h. 6):



Hình 6

Tam giác AOM vuông tại O; M là giao của AH với BC; OH là đường cao của tam giác vuông AOM.

Tam giác BOC vuông tại O có đường cao OM.

Đặt $OA=a, OB=b, OC=c, AM=x, OM=m$.

Áp dụng hệ thức (3) vào tam giác vuông OAM và BOC ta có $\overrightarrow{OH}=\frac{m^2}{x^2}\overrightarrow{OA}+\frac{a^2}{x^2}\overrightarrow{OM}$ (4)

$$\overrightarrow{OM}=\frac{c^2}{BC^2}\overrightarrow{OB}+\frac{b^2}{BC^2}\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{c^2}{b^2+c^2}\overrightarrow{OB}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\overrightarrow{OC} \quad (5)$$

Thay (5) vào (4) ta được
$$\overrightarrow{OH}=\frac{S_A^2}{S_O^2}\overrightarrow{OA}+\frac{S_B^2}{S_O^2}\overrightarrow{OB}+\frac{S_C^2}{S_O^2}\overrightarrow{OC}.$$

BIỆN PHÁP 2. *Lựa chọn các phép chiếu song song (đặc biệt là chiếu vuông góc) thích hợp để chuyển việc giải các bài toán trong không gian với giả thiết, kết luận chứa các tính chất bất biến qua các phép chiếu trên về việc giải các bài toán trong mặt phẳng.*

Ngoài hai biện pháp chủ yếu trên chúng ta cũng cần quan tâm biện pháp trải hình không gian lên mặt phẳng, sử dụng định lí Thales trong không gian để chuyển cách giải một số dạng toán trong không gian về giải các bài toán trong mặt phẳng.

Chúng ta sẽ khắc sâu biện pháp 1 và khảo sát biện pháp 2 qua việc tìm tòi lời giải các bài toán sau đây.

1. Cho tứ diện $ABCD$. Qua các đỉnh A, B, C, D dựng các mặt phẳng (R), (α), (β), (γ) lần lượt song song với các mặt phẳng chứa các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$. Các mặt phẳng (R), (α), (β), (γ) đôi một cắt nhau tạo thành tứ diện $MNPQ$. Chứng minh rằng A, B, C, D tương ứng là trọng tâm các mặt của tứ diện $MNPQ$.

2. Chứng minh rằng nếu một tứ diện có các mặt đôi một có diện tích bằng nhau thì đường vuông góc chung của cặp đường thẳng chứa các cạnh đối diện tương ứng đi qua các trung điểm của cặp cạnh đối diện đó.

3. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Hãy dựng đường thẳng d cắt các đường thẳng a, b, c tương ứng tại các điểm A, B, C sao cho $\frac{BA}{BC}=k\ (k>0)$.

4. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC tương ứng tại các điểm A', B', C' và (α) cắt SG tại G'. Chứng minh rằng
$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{3SG}{SG'}.$$

HÀM SỐ... *(Tiếp trang 8)*

BÀI TẬP

1. Giải phương trình, bất phương trình

a) $\log_2\sin x=2\log_3\tan x$;

b) $\log_2\frac{x^2+3x+5}{2x^2+2x+3}<x^2-x-2$.

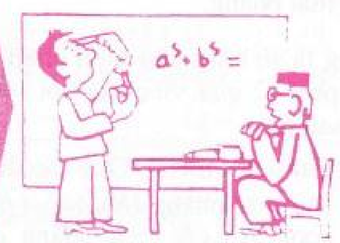
2. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x, \quad \forall x>0$;

b) $\cos x+e^x\ge 2+x-\frac{x^2}{2}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$;

c) $\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^b\le\left(2^b+\frac{1}{2^b}\right)^a, \quad a\ge b>0$.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN



ỨNG DỤNG CỦA MỘT CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI THÀNH TÍCH

TÔ MẠNH HOAN
(GV trường THPT chuyên Thái Bình)

Trong những bài toán liên quan đến phương trình bậc cao hơn hai, ta thường sử dụng phép phân tích đa thức thành nhân tử để chuyển về dạng phương trình tích, trong đó mỗi nhân tử của tích là đa thức có bậc không quá hai. Bài viết này giới thiệu một công thức biến đổi thành tích và một vài ứng dụng của nó.

I. NHẬN XÉT. *Cho tam thức bậc hai*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

Khi đó

$$f(f(x)) - x = (f(x) - x)(a(f(x) + x) + b + 1).$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} f(f(x)) - x &= af^2(x) + bf(x) + (f(x) - ax^2 - bx) - x \\ &= a(f^2(x) - x^2) + b(f(x) - x) + (f(x) - x) \\ &= (f(x) - x)(a(f(x) + x) + b + 1). \ \square \end{aligned}$$

II. ỨNG DỤNG

✪Bài toán 1. *Giải và biện luận theo tham số a, b phương trình*

$$x = a - b(a - bx^2)^2.$$

Lời giải.

• Với $b = 0$, phương trình (PT) trở thành $x = a$ (duy nhất) $\forall a \in \mathbb{R}$.

• Với $b \neq 0$, kí hiệu tam thức bậc hai $a - bx^2 = f(x)$.

Phương trình đã cho có dạng $x = f(f(x))$

$\Leftrightarrow (f(x) - x)(b(f(x) + x) - 1 = 0$ (theo nhận xét)

$\Leftrightarrow (bx^2 + x - a)(b^2x^2 - bx + 1 - ab) = 0$.

Đặt $f_1(x) = bx^2 + x - a$ với $\Delta_1 = 4ab + 1$

$f_2(x) = b^2x^2 - bx + 1 - ab$ với $\Delta_2 = b^2(4ab - 3)$.

Bảng xét dấu của Δ_1, Δ_2

ab	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$\Delta_1 = 4ab + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\Delta_2 = b^2(4ab - 3)$		$-$		$-$	0	$+$	

• Nếu $ab < -\frac{1}{4}$ thì PT vô nghiệm.

• Nếu $-\frac{1}{4} \leq ab < \frac{3}{4}$ $(b \neq 0)$ thì PT có các nghiệm là $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4ab + 1}}{2b}$.

• Nếu $\frac{3}{4} \leq ab$ thì PT có các nghiệm là

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4ab + 1}}{2b};\ x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4ab - 3}}{2b}. \ \square$$

✪Bài toán 2. *Cho* $f(x) = x^2 + bx + 1$ *với* $b \in \left(3; \frac{7}{2}\right)$. *Giải bất phương trình* $f(f(x)) > x$.

Lời giải. Áp dụng nhận xét, ta có

$f(f(x)) > x$

$\Leftrightarrow (f(x) - x)(f(x) + x + b + 1) > 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + (b - 1)x + 1)(x^2 + (b + 1)x + b + 2) > 0$ (1)

Đặt $f_1(x) = x^2 + (b - 1)x + 1$ với $\Delta_1 = (b + 1)(b - 3)$

$f_2(x) = x^2 + (b + 1)x + b + 2$ với $\Delta_2 = b^2 - 2b - 7$.

Với $b \in \left(3; \frac{7}{2}\right)$ thì $\Delta_2 < 0$ nên $f_2(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f_1(x) = x^2 + (b - 1)x + 1 > 0$ (2)

Lại có, khi $b \in \left(3; \frac{7}{2}\right)$ thì $\Delta_1 > 0$.

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là tập nghiệm của BPT (2) và bằng

$$\left(-\infty;\frac{1-b-\sqrt{\Delta_1}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-b+\sqrt{\Delta_1}}{2};+\infty\right).\ \square$$

✪**Bài toán 3.** *Cho tam thức bậc hai*

$$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0).$$

Biết rằng phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm. Chứng minh rằng phương trình $f(f(x)) = x$ cũng vô nghiệm.

Lời giải. Theo nhận xét, ta có

$f(f(x)) = x$

$\Leftrightarrow (f(x)-x)(a(f(x)+x)+b+1)=0$

$\Leftrightarrow f_1(x).f_2(x)=0$.

với $f_1(x) = ax^2+(b-1)x+c$

$f_2(x) = a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1$.

Do PT $f(x)-x=0$ vô nghiệm nên

$\Delta_1=(b-1)^2-4ac<0$ và

$f_1(x)=0$ vô nghiệm

Suy ra $\Delta_2=a^2(\Delta_1-4)<0$ nên $f_2(x)=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x)) = x$ vô nghiệm. $\square$

Bạn có thể chứng minh điều ngược lại : Nếu phương trình $f(f(x)) = x$ vô nghiệm thì phương trình $f(x) = x$ cũng vô nghiệm.

Nếu suy nghĩ, tìm tòi sâu hơn một chút, ta có thể nêu ra và giải quyết được bài toán sau đây.

✪**Bài toán 4.** *Cho tam thức bậc hai*

$$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0).$$

Chứng minh rằng hai phương trình $f(x) = x$ và $f(f(x)) = x$ tương đương với nhau khi và chỉ khi $(b-1)^2\le 4(ac+1)$.

Lời giải. Biến đổi như bài toán 3 ta dẫn đến

• Với $\Delta_1<4$ thì $\Delta_2<0\Leftrightarrow f_2(x)=0$ vô nghiệm. Suy ra $f(f(x))=x\Leftrightarrow f_1(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x$.

• Với $\Delta_1=4$ thì $\Delta_2=0$, PT $f_2(x)=0$ có nghiệm kép $x_0=-\dfrac{b+1}{2a}$ và PT $f_1(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Ta có $f_2(x) = a.f_1(x)+(2ax+b-1)$ nên

$f_2(x_0) = af_1(x_0)+(2ax_0+b-1)=0$

$\Leftrightarrow f_1(x_0)=0$. Chứng tỏ $x_0=x_1$ hoặc $x_0=x_2$.

Vì vậy $f(f(x))=x\Leftrightarrow f(x)=x$.

• Khi $\Delta_1>4$ thì hai nghiệm x_1, x_2 của PT $f_1(x)=0$ không có nghiệm nào trùng với nghiệm của $f_2(x)=0$, tức là PT $f(f(x))=x$ và PT $f(x)=x$ không tương đương.

Vậy PT $f(x)=x$ và PT $f(f(x))=x$ tương đương với nhau khi và chỉ khi $\Delta_1\le 4$ hay là

$$(b-1)^2\le 4(ac+1).\ \square$$

Trao đổi về sách giáo khoa GIẢI TÍCH 12 NÂNG CAO

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN HUY ĐOAN
(Chủ biên SGK Giải tích 12 Nâng cao)

VẤN ĐỀ 3. Trong chương trình Đại số 10 (chuẩn và nâng cao) đã không đề cập đến định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai. Vậy phải giải bài toán sau đây như thế nào?

Bài toán (trích bài tập 58, *Đại số và Giải tích nâng cao*, trang 56):

Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d_m) đi qua điểm $A(-2\ ;\ 2)$ và có hệ số góc m cắt đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị ?

⊠**Trả lời.** Xin giới thiệu hai cách giải bài toán trên mà không cần sử dụng định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai.

Cách 1. (giải trực tiếp). Phương trình của (d_m) là $y = mx + 2m + 2$. Hoành độ giao điểm của (C) và (d_m) là nghiệm của phương trình $\frac{2x-1}{x+1} = mx + 2m + 2$, tức là nghiệm khác -1 của phương trình $mx^2 + 3mx + 2m + 3 = 0$ (1)

Đường thẳng (d_m) cắt (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của (C) tức là (d_m) cắt (C) tại hai điểm nằm khác phía của nhau đối với đường tiệm cận đứng $x = -1$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < -1 < x_2$. (2)

Đặt $x = t - 1$, phương trình (1) trở thành phương trình $mt^2 + mt + 3 = 0$ (ẩn t) và điều kiện (2) trở thành

Phương trình $mt^2 + mt + 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu. (3)

Áp dụng định lí Viète, ta có (3) xảy ra khi và chỉ khi $m < 0$.

Cách 2 (dùng phép tịnh tiến hệ tọa độ). Dễ thấy (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$. Ta sẽ tịnh tiến hệ tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với giao điểm hai tiệm cận, tức là trùng với điểm $I(-1 ; 2)$. Muốn vậy, ta thực hiện phép chuyển hệ tọa độ sau:

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 2. \end{cases}$$

Trong hệ tọa độ mới IXY, đường cong (C) có phương trình $Y = \frac{2(X-1)-1}{(X-1)+1} - 2$, hay $Y = \frac{-3}{X}$;

còn đường thẳng (d_m) có phương trình $Y = m(X-1) + 2m + 2 - 2$, hay $Y = mX + m$. Đường thẳng (d_m) cắt (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của (C) khi và chỉ khi phương trình (ẩn X) $\frac{-3}{X} = mX + m$ có hai nghiệm trái dấu. Từ đó ta thu được kết quả như cách 1.

VẤN ĐỀ 4. Trong bài "Khảo sát và vẽ đồ thị của một số hàm đa thức", SGK *Giải tích 12 nâng cao* có đề cập đến khái niệm *điểm uốn của đồ thị*, nhưng không nói đến *tính lồi lõm của đường cong*. Vậy giáo viên cần giải thích vai trò của điểm uốn trong việc vẽ đồ thị của hàm số như thế nào?

⊠**Trả lời.** Sách giáo khoa *Giải tích 12 nâng cao* đã viết theo đúng chương trình là không đưa khái niệm lồi lõm của đường cong vào bài học chính thức, mặc dù có đề cập đến khái niệm điểm uốn của đồ thị hàm số. Mục đích chủ yếu của việc đưa khái niệm điểm uốn là để giúp học sinh vẽ đồ thị được dễ dàng hơn. Điều này được hiểu như sau:

– Trước hết điểm uốn là một điểm thuộc đồ thị hàm số. Do đó nó cũng được coi là một điểm đặc biệt cần phải xác định khi vẽ đồ thị.

– Đối với hàm số bậc ba, điểm uốn còn là tâm đối xứng của đồ thị. Điều này đã được khẳng định trong SGK (tr. 39). Khi vẽ đồ thị của hàm số bậc ba, học sinh cần vận dụng tính chất này để nhanh chóng xác định một số điểm đặc biệt khác. Ví dụ: Nếu đồ thị cắt trục hoành tại điểm $A(-4 ; 0)$ và có điểm uốn là $I(-1 ; 2)$ thì chắc chắn đồ thị còn phải đi qua điểm đối xứng với A qua I, tức là điểm $A'(2 ; 4)$. Hơn nữa, giáo viên nên yêu cầu học sinh thể hiện được tính đối xứng của đồ thị hàm số bậc ba qua đồ thị của nó.

– Theo chương trình, học sinh chỉ khảo sát và vẽ đồ thị hai loại hàm số có liên quan đến điểm uốn. Giáo viên nên tổng kết để học sinh hiểu được các dạng đồ thị có thể có của hai loại hàm số đó. Khi đã nắm được các dạng đồ thị, trên cơ sở khảo sát chiều biến thiên của hàm số, học sinh có thể dễ dàng vẽ đồ thị mà không cần hiểu khái niệm lồi lõm của đường cong.

Ngoài ra, đối với học sinh khá và giỏi, giáo viên nên giới thiệu bài đọc thêm "Tính lồi lõm và điểm uốn của đường cong" (*Giải tích 12 nâng cao*, tr. 59) để học sinh hiểu thêm ý nghĩa hình học của khái niệm này.

TIN TỨC GIẢI THƯỞNG 100000 USD *đã có chủ*

Cách đây vài năm, trên báo Toán học và Tuổi trẻ, tác giả đã viết bài "*Những giả thuyết liên quan đến số nguyên tố Mersenne*" (số nguyên tố Mersenne là những số nguyên tố có dạng $2^p - 1$, thí dụ như các số $3 = 2^2 - 1$; $7 = 2^3 - 1$, ...) trong đó có đưa tin: Hiệp hội tìm kiếm các số nguyên tố lớn – GIMPS (The Great Internet Mersenne Prime Search) đã tuyên bố sẽ trao 100000 USD cho ai tìm được số nguyên tố có nhiều hơn 10 triệu chữ số.

Ngày 15/9/2008 các nhà nghiên cứu ở **San Diego CA và Orlando FL** (Hoa Kỳ), đã tìm ra hai số **nguyên tố** là $2^{37156667}-1$ và $2^{43112609}-1$ có 11185272 và 12978189 chữ số. Đây là hai số nguyên tố Mersenne thứ 45 và 46 được tìm thấy cho tới nay.

Ngoài ra, GIMPS hứa sẽ trao 150000USD cho người đầu tiên tìm được số nguyên tố có số chữ số lớn hơn 100000000 (một trăm triệu). Tuy nhiên cho tới nay vẫn chưa ai tìm được số nguyên tố lớn hơn hai số trên. Biết đâu bạn lại là người đầu tiên tìm ra số nguyên tố như vậy.

Thông tin chi tiết hơn có thể xem trong:

http://123.uhm.vn/335

Ngoài ra, các bạn có thể xem thêm một số bài viết có liên quan đến các số nguyên tố Mersenne trong cuốn *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ, Quyển 4*, NXBGD, năm 2008, Trang 103 – 112.

TẠ HỒNG QUẢNG
(Trung tâm CNTT, PVGAS)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/377. (Lớp 6) Cho

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008};$$

$$B=\frac{2007}{1}+\frac{2006}{2}+\frac{2005}{3}+...+\frac{2}{2006}+\frac{1}{2007}.$$

Tính $\frac{B}{A}$.

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)

Bài T2/377. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là điểm tuỳ ý trên cạnh BC (M khác B, M khác C và M không là trung điểm của cạnh BC). Từ B, C kẻ các đường thẳng theo thứ tự vuông góc với AM tại H và K. Qua C kẻ đường thẳng song song với AM cắt BH tại N, AN cắt CK tại P, BP cắt AM tại I. Chứng minh rằng $IB = IP$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Thừa Thiên – Huế)

Bài T3/377. Cho a, b, c, d, e là các số tự nhiên thoả mãn

$$a^4+b^4+c^4+d^4+e^4=2009^{2008}.$$

Chứng minh rằng $abcde$ chia hết cho 10^4.

ĐẬU THỊ HOÀNG OANH
(GV THCS Phạm Hữu Chí, Long Điền, Bà Rịa – Vũng Tàu)

Bài T4/377. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a \ge b \ge c$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

TRẦN TUẤN ANH
(GV khoa Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/377. Từ hai điểm A và B (A khác B) nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AM, BN tới đường tròn (M, N là các tiếp điểm, M khác N) Chứng minh rằng, nếu $AM = BN$ thì đường thẳng MN hoặc song song với AB hoặc đi qua trung điểm của AB.

NGUYỄN XUÂN BÌNH
(Nhà xuất bản Giáo dục)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/377. Một số được gọi là *số đẹp* nếu nó là hợp số và không chia hết cho 2, 3, 5 (ví dụ ba số 49, 77, 91 là ba *số đẹp* nhỏ nhất). Hỏi có tất cả bao nhiêu *số đẹp* nhỏ hơn 1000?

TRẦN BÁ DUY LINH
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T7/377. Cho tam giác ABC và hai điểm D, E trên cạnh BC sao cho $\frac{BD}{CD}=2.\frac{CE}{BE}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt AB, và AC tương ứng tại M và N. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác AMN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi D, E di động trên cạnh BC.

LÊ QUỐC HÁN
(GV ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T8/377. Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt[3]{abc}+k.\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}.$$

NGUYỄN TIẾN LÂM
(SV K50A1S, khoa Toán – Cơ – Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/377. Tìm các số thực x, y, z sao cho

$$x^6+y^6+z^6-6(x^4+y^4+z^4)+10(x^2+y^2+z^2)$$
$$-2(x^3y+y^3z+z^3x)+6(xy+yz+zx)=0.$$

ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

Bài T10/377. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(x^3-y)+2y(3f^2(x)+y^2)=f(y+f(x))$$

$\forall x, y\in\mathbb{R}$.

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T11/377. Cho dãy số (u_n), $(n = 1, 2, \ldots)$ được xác định bởi $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = 4u_n - 5u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng với mọi số thực $a > \sqrt{5}$, ta đều có $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n}{a^n}\right) = 0$.

LÊ HOÀI BẮC

(GV THPT Nguyễn Văn Cừ, Xuân Sơn, Châu Đức, Bà Rịa – Vũng Tàu)

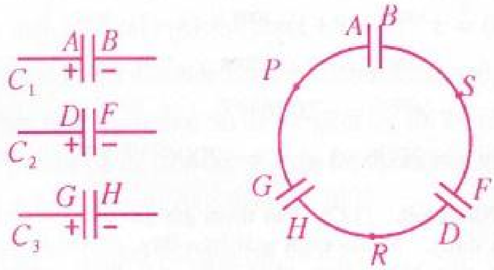
Bài T12/377. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm A_1, B_1, C_1 với $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Trên các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ lấy các điểm A_2, B_2, C_2 với $A_2 \in B_1C_1$, $B_2 \in A_1C_1$, $C_2 \in A_1B_1$. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy khi và chỉ khi A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

VŨ HỮU CHÍN

(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/377. Cho ba tụ điện có điện dung và điện tích thứ tự là $C_1 = 2\,\mu F$, $Q_1 = 40\,\mu C$; $C_2 = 5\,\mu F$, $Q_2 = 30\,\mu C$; $C_3 = 4\,\mu F$, $Q_3 = 20\,\mu C$. Các bản cực A, D và G mang điện tích dương. Mắc các tụ điện trên theo hình vẽ. Hãy tính các hiệu điện thế U_{PR}, U_{RS}, U_{SP}.



NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

Bài L2/377. Một con tàu đi dọc Xích đạo theo hướng Đông với vận tốc 45 km/h. Hỏi đồng hồ quả lắc đặt trên con tàu sẽ chạy nhanh hay chậm bao nhiêu sau 3 giờ? Giả thiết đồng hồ chạy đúng khi tàu đứng yên ?

ĐỖ TUẤN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/377. (For 6th grade) Let

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008};$$

$$B = \frac{2007}{1} + \frac{2006}{2} + \frac{2005}{3} + \ldots + \frac{2}{2006} + \frac{1}{2007}.$$

Determine $\dfrac{B}{A}$.

T2/377. (For 7th grade) Let ABC be a right isosceles triangle with right angle at A. M is an arbitrary point on the side BC (M differs from B, C as well as the midpoint of BC). The altitudes from B and C onto AM meet AM at H and K, respectively. The line through C and parallel to AM meets BH at N, AN meets CK at P, BP intersects with AM at I. Prove that $IB = IP$.

T3/377. Let a, b, c, d, and e be natural numbers such that

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = 2009^{2008}.$$

Prove that $abcde$ is a multiple of 10^4.

T4/377. Let a, b, c be positive real numbers such that $a \geq b \geq c$. Prove the inequality

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

T5/377. Let AM and BN be two tangent lines from two points A, B (A differs from B) outside the circle (O) (M, N are on the circle, M and N are different). Prove that if $AM = BN$, then the line MN is either parallel to AB or passes through its midpoint.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/377. A number is said to be a *beautiful number* if it is a composite number and but it is not a multiple of either 2, 3 or 5 (for example, the three smallest *beautiful numbers* are 49, 77 and 91). How many *beautiful numbers* which are less than 1000?

(Xem tiếp trang 28)

★Bài T1/373. *Viết các số 1, 2, 3, ..., 2007 thành dãy theo thứ tự tuỳ ý ta được số A. Hỏi số $A + 2008^{2007} + 2009$ có phải là số chính phương không ?*

Lời giải. • Gọi t_s là tổng các chữ số của số s thì s và t_s có cùng số dư khi chia cho 9, nghĩa là $s = t_s + 9a$ với a là số tự nhiên. Do số A được viết bởi các số 1, 2, 3, ..., 2007 nên

$$t_A = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_{2007} = 1 + 2 + 3 + ... + 2007 - 9k = B - 9k \text{ với } k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Vì tổng của 9 số tự nhiên liên tiếp bằng $a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+8) = 9(a+4)$, là số chia hết cho 9, nên tổng của 2007= 9.223 số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho 9, nghĩa là

$$B = 1 + 2 + 3 + ... + 2007 = 9h \text{ với } h \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Từ (1), (2) có $t_A = 9h - 9k = 9(h-k)$, suy ra

$$A = 9m \text{ với } m \in \mathbb{N} \quad (3)$$

• Do $(9u+1)(9v+1) = 9(9uv + u + v) + 1$ với u, v là các số tự nhiên, nên số

$$C = 2008^{2007} + 2009 = (9.223+1)^{2007} + 9.223 + 2 = 9n + 3 \text{ với } n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

• Từ (3), (4) suy ra số

$$A + C = A + 2008^{2007} + 2009 = 9(m+n) + 3 \quad (5)$$

Nếu $A + C$ là số chính phương mà chia hết cho *số nguyên tố* 3 thì nó phải chia hết cho 9, nhưng điều này mâu thuẫn với (5).

Vậy $A + C$ không thể là số chính phương. ❐

Nhận xét. 1) Nhiều bạn suy ra được $B = 9h$ (2) bằng cách áp dụng công thức

$$B = 1 + 2 + 3 + ... + 2007 = \frac{2007.2008}{2} = 9.223.1004 .$$

Một số bạn phát biểu không chuẩn xác khi xem B là tổng các chữ số của A (!).

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Minh Hiếu, Nguyễn Thị Huệ, Hoàng Minh Phương, Nguyễn Thị Kim Anh, Nguyễn Ngân Giang, Nguyễn Thị Thu Hà*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Dũng*, 6A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Thanh Hóa:** *Mai Thu Phương*, 6A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Lai, Hà Trung; **Nghệ An:** *Phan Thanh Tùng*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Vũ Văn Hoàng*, 6A, THCS Thái Hòa II, TX. Thái Hòa, Nghĩa Đàn.

VIỆT HẢI

★Bài T2/373. *Cho hai đa thức*

$$f(x) = (x-2)^{2008} + (2x-3)^{2007} + 2006x$$

và $g(y) = y^{2009} - 2007y^{2008} + 2005y^{2007}$.

Giả sử f(x) sau khi khai triển và thu gọn ta tìm được tổng tất cả các hệ số của nó là s. Hãy tính s và tính giá trị của g(s).

Lời giải. Dễ thấy rằng tổng các hệ số của $f(x)$ sau khi khai triển và thu gọn chính là giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = 1$. Ta có

$$s = f(1) = (1-2)^{2008} + (2.1-3)^{2007} + 2006.1 = (-1)^{2008} + (-1)^{2007} + 2006 = 1 - 1 + 2006 = 2006.$$

Khi đó, thay $2007 = s + 1$, $2005 = s - 1$ ta được

$$g(s) = s^{2009} - (s+1)s^{2008} + (s-1)s^{2007} = s^{2009} - s^{2009} - s^{2008} + s^{2008} - s^{2007} = -s^{2007} = -2006^{2007}.$$

Vậy $s = 2006$ và $g(s) = -2006^{2007}$. ❐

Nhận xét. 1) Các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải đúng. Ngoài cách giải trên đây, có thể tính $g(s)$ trực tiếp bằng cách phân tích $g(s)$ thành nhân tử: $g(s) = s^{2007}(s(s-2007) + 2005)$ rồi thay $s = 2006$.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn:

Phú Thọ: *Lê Thị Phương*, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Triệu Duy Hải*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thu Hà, Phạm Thị Khánh Linh, Phạm Văn Minh, Hoàng Minh Phương, Nguyễn Thị Thu Hường, Nguyễn Thị Thanh Vân*, 6A1, *Bùi Thị Ngọc Mai, Nguyễn Thị Thơm*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Phạm Huy Hoàng*, 7A5, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Hải Dương:** *An Duy Mạnh*, 7/3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, *Phạm Quý Cường*, 7A1, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Thanh Hóa:** *Hoàng Tiến Dũng*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Mai Thu Hương*, 6A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Mỹ Vy*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Đăk Lăk:** *Lê Quang Hiếu*, 7A5, THCS Huỳnh Thúc Kháng, TP. Buôn Ma Thuột; **Bình Định:** *Bùi Nguyễn Thái Hân*, 7A3, THCS Lê Hồng Phong, Quy Nhơn; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Hải Như*, 7I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; *Dương Như Bảo Lộc*, 7C, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh*, *Trần Đức Tín*, 7/1, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/373. *Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+y+z = 15 & (1) \\ x^3+y^3+z^3 = 495 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Cách 1. Do $x^3+y^3+z^3 = 495 < 8^3$ và x, y, z nguyên dương nên $1 \le x, y, z \le 7$. Ta có

$$x^3+y^3+z^3$$
$$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)-3xyz \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$5(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)-xyz=165.$$

Do đó $xyz \vdots 5$. Vì vai trò của x, y, z như nhau nên ta có thể giả sử $z \vdots 5$, lại có $1 \le z \le 7$ nên $z = 5$.

Thay $z = 5$ vào HPT được $\begin{cases} x+y=10 \\ xy = 21. \end{cases}$

Từ đó tìm được $x = 3$; $y = 7$ hoặc $x = 7$; $y = 3$.

Vậy hệ phương trình có 6 nghiệm nguyên dương $(x ; y ; z)$ là $(3 ; 7 ; 5)$, $(7 ; 3 ; 5)$, $(5 ; 3 ; 7)$, $(5 ; 7 ; 3)$, $(3 ; 5 ; 7)$, $(7 ; 5 ; 3)$.

Cách 2. Vai trò của x, y, z như nhau, giả sử ba số cần tìm là $3 + a$, $5 + b$, $7 + c$ (với $a + b + c = 0$; $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a > -3$, $b > -5$, $c > -7$). Khi đó

$$x^3+y^3+z^3 = (3+a)^3+(5+b)^3+(7+c)^3$$
$$= 495+9(a^2+b^2+c^2)+27(a+b+c)$$
$$= 495+9(a^2+b^2+c^2).$$

Để cho $x^3+y^3+z^3=495$ thì $a^2+b^2+c^2=0$ $\Leftrightarrow a=b=c=0$. Do đó ba số cần tìm là 3, 5, 7.

Vậy hệ phương trình có 6 nghiệm như ở cách 1. ❒

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Tuy nhiên, một số bạn kết luận HPT chỉ có 1 nghiệm mà quên vai trò x, y, z bình đẳng nên HPT sẽ có 6 nghiệm là hoán vị của bộ nghiệm tìm được; có bạn thử trực tiếp bộ (3 ; 5 ; 7) thấy thỏa mãn HPT đã kết luận ngay đó là tất cả nghiệm của hệ phương trình (!)

2) Các bạn sau đây có lời giải gọn và sáng sủa:

Hà Nội: *Phạm Huy Hoàng*, 7A5, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, *Nguyễn Thị Hương Lý*, 7A1, THCS Đông Thọ, *Đỗ Vũ Thạch*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Minh Phương*, 6A1, *Phạm Mỹ Linh*, 8A1, *Đỗ Công Huân*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hữu Dũng*, *Trịnh Duy Hải*, 7A3, THCS Lâm Thao, *Đặng Duy Linh*, *Nguyễn Quốc Hùng*, 9E, THCS Văn Lang; **Nghệ An:** *Võ Duy Văn*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, *Vũ Hồng Ái*, *Hoàng Trọng Đường*, *Cao Xuân Bang*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Trương Đình Đức*, *Nguyễn Văn Thắng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phương Thảo*, 6D, THCS Quách Xuân Kì, Bố Trạch; **Quảng Nam:** *Huỳnh Thị Diệu Linh*, 8A4, THCS Lương Thế Vinh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T4/373. *Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*
$$(a+b+c)^3+a(2bc-1)+b(2ac-1)+c(2ab-1).$$

Lời giải. Ta có

$$A = (a+b+c)^3+a(2bc-1)+b(2ac-1)+c(2ab-1)$$
$$= (a+b+c)^3-(a+b+c)+6abc.$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovski

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)=3 \quad (1)$$

Suy ra $a+b+c \le \sqrt{3}$ (2)

Do a, b, c không âm nên từ (1) và (2) ta suy ra

$$(a+b+c)^3 \le 3(a+b+c)$$
$$\Rightarrow (a+b+c)^3-(a+b+c) \le 2(a+b+c) \le 2\sqrt{3} \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và theo (2) ta có

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta thu được

$$A \le 2\sqrt{3}+6.\frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

$A=\frac{8\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$ đẳng thức ở (1) và (4) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy $\max A=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. ❒

Nhận xét. 1) Bằng cách giải tương tự như trên, ta dễ dàng có được kết quả tổng quát sau:

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$, thì giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^3 + a_1(2a_2a_3...a_n - 1)$$
$$+a_2(2a_1a_3...a_n - 1) + ... + a_n(2a_1a_2...a_{n-1} - 1)$$

là $(n-1)\sqrt{n} + \dfrac{2n}{\sqrt{n^n}}$.

Giá trị lớn nhất của B đạt được khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

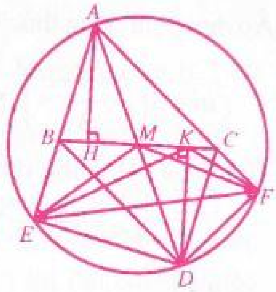
2) Rất đông các bạn tham gia giải bài này, tất cả các bạn đều có kết quả đúng. Các cách giải là khá phong phú. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn là:

Phú Thọ: *Triệu Duy Hải*, 7A3, *Đào Quốc Hiếu*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thế Bảo*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Trưởng*, 9A, THCS Yên Phong, *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Hà Nội:** *Nguyễn Trường Giang*, phòng 511, A9, TT Nghĩa Tân; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đăng Sơn*, 9A, THCS TTr. Quán Lào, Yên Định; **Nghệ An:** *Đặng Trung Anh*, *Võ Duy Văn*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Bình Định:** *Nguyễn Thái Hán*, 7A3, THCS Lê Hồng Phong, Quy Nhơn; **Bình Thuận:** *Trình Quang Lộc*, 9K, THCS Tân An; **Phú Yên:** *Lê Cao Thắng*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/373. *Cho tam giác ABC có góc BAC khác 90°, đường cao AH và trung tuyến AM. Trên các tia AB và AC theo thứ tự lấy các điểm E và F sao cho ME = MF = MA. Gọi K là điểm đối xứng của H qua M. Chứng minh rằng E, M, K, F cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải. Ta chứng minh cho trường hợp $\widehat{BAC} < 90°$ (trường hợp $\widehat{BAC} > 90°$ chứng minh tương tự).



Nếu $AB = AC$ thì $H \equiv M \equiv K$, ta có đpcm. Xét trường hợp $AB \neq AC$.

Vẽ đường tròn tâm M, bán kính MA, đường kính AD. Đường tròn này đi qua các điểm E và F. Ta có $\widehat{AED} = \widehat{AFD} = 90°$, $AHDK$ và $ABDC$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $DK \perp BC$ (do $AH \perp BC$).

Do đó các tứ giác $BEDK$ và $DFCK$ nội tiếp; dẫn đến $\widehat{EKD} = \widehat{EBD} = \widehat{BAC}$, $\widehat{DKF} = \widehat{DCF} = \widehat{BAC}$.

Do đó $\widehat{EKF} = \widehat{EKD} + \widehat{DKF} = 2\widehat{BAC}$.

Lại có $\widehat{EMF} = 2\widehat{EAF}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung).

Vậy $\widehat{EMF} = \widehat{EKF}$ hay $EMKF$ là tứ giác nội tiếp (đpcm).□

Nhận xét. Có nhiều bạn cho lời giải đúng, các bạn sau đây làm tốt hơn cả:

Thái Nguyên: *Phạm Thu Hà*, 9A4, THCS Chu Văn An; **Vĩnh Phúc:** *Hà Quang Nhận*, THCS Như Thuỵ; **Phú Thọ:** *Trần Xuân Thuỷ*, 8A, THCS Cấp Dẫn, Cẩm Khê; *Tạ Hải Nam*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Quang Rực*, *Nguyễn Đình Duy*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** *Đậu Hải Đăng*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hà Nam:** *Lê Minh Thiệu*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Nam Định:** *Vũ Văn Tú*, 9A, THCS Xuân Trường *Nguyễn Ngọc Sơn*, 9A1, THCS Lý Thường Kiệt,*Nguyễn Văn Quý*, 9A, THCS Hải Hậu; **Thái Bình:** *Phạm Quỳnh Trang*, 9A và *Nguyễn Thị Lệ Dung*, 9E, THCS Thị trấn Đông Hưng; **Thanh Hoá:** *Hoàng Tiến Dũng*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; *Trịnh Đăng Sơn*, THCS Thị Trấn Quán Lào, Yên Định; **Nghệ An:** *Đinh Thị Quỳnh Trang*, 9B, THCS Bến Thuỷ, Vinh, *Lưu Tuấn Quang*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Hồ Khánh Duy*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, 9I, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hoà; **Đà Nẵng:** *Huỳnh Thị Vân Anh*, K561, H20/11, Hoàng Diệu, Hải Châu; **Bình Thuận:** *Trình Quang Lộc*, 9K, THCS Tân An.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/373. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}(x-1)\sqrt{x-1}.$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình có thể viết thành

$$2\sqrt{2}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 9(x-1)\sqrt{x-1} \qquad (1)$$

Nhận thấy

$$\sqrt{2}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \sqrt{x+1+2\sqrt{(x+1)(x-1)}+x-1}$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2} = \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}.$$

Thay vào (1), ta được

$$2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right) = 9(x-1)\sqrt{x-1}$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=(9x-11)\sqrt{x-1}$ (2)

Suy ra $9x-11>0$.

Với điều kiện đó, bình phương hai vế của (2), ta được

$4(x+1)=(x-1)(9x-11)^2$

$\Leftrightarrow 81x^3-279x^2+315x-125=0$

$\Leftrightarrow (3x-5)(27x^2-48x+25)=0.$

• Nếu $3x-5=0$ thì $x=\frac{5}{3}$, thoả mãn các điều kiện của bài toán.

• Nếu $27x^2-48x+25=0$ thì do $\Delta'=24^2-27.25<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{5}{3}$. □

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán bằng cách : Đặt $u=\sqrt{x+1}$, $u\geq 0$; $v=\sqrt{x-1}$, $v\geq 0$; đưa về hệ phương trình của u, v ; tìm u, v và suy ra x.

2) Có rất nhiều bạn tham gia giải, đặc biệt là các bạn học sinh THCS. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thái Nguyên: *Tạ Quang Tuấn*, 9A1, THCS Tân Thành, TP Thái Nguyên; **Phú Thọ**: *Tạ Hải Nam*, 9A, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Phạm Mỹ Linh, Nguyễn Thế Bảo*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Quang Rực*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội**: *Nguyễn Mạnh Hùng*, 9C, THCS Thạch Thất; **Nam Định**: *Nguyễn Văn Quý*, 9A, THCS Hải Hậu; **Thanh Hoá**: *Lê Tuấn Anh*, 9F, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hoá ; *Trịnh Đăng Sơn*, 9A, THCS Thị Trấn Quán Lào, Yên Định, *Lê Văn Kiên*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Lam Sơn, Bỉm Sơn; **Nghệ An**: *Đậu Thế Vũ*, 9B, *Cao Xuân Bang*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Bình**: *Nguyễn Phương Thảo*, 6D, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Trị**: *Nguyễn Văn Hải Như*, 7I, *Nguyễn Hữu Ánh*, 8I, THCS Thành Cổ, TX Quảng Trị; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Thị Trâm, Nguyễn Thị Diễm My*, 8A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Phú Yên**: *Lê Cao Thắng*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu; **Khánh Hoà**: *Nguyễn Đình Luận*, 8^1, THCS Mai Xuân Thưởng, Vĩnh Hải, Nha Trang; **Ninh Thuận**: *Tô Đình Tân*, 9_3, THCS Nguyễn Trãi, TP Phan Rang, Tháp Chàm; **Đắk Lăk**: *Lê Nhâm Quý*, 9H, THCS Huỳnh Thúc Kháng, TP Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T7/373. *Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{\tan A}{\tan B}+\frac{\tan B}{\tan C}+\frac{\tan C}{\tan A}\geq\frac{\sin 2A}{\sin 2B}+\frac{\sin 2B}{\sin 2C}+\frac{\sin 2C}{\sin 2A}.$$

Lời giải. Cách 1. Ta có

$$\frac{\tan B+\tan C}{\tan C+\tan A}=\frac{\sin A.\cos A.\cos C}{\sin B.\cos B.\cos C}=\frac{\sin 2A}{\sin 2B}.$$

Tương tự có

$$\frac{\tan C+\tan A}{\tan A+\tan B}=\frac{\sin 2B}{\sin 2C};\ \frac{\tan A+\tan B}{\tan B+\tan C}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A}.$$

Đặt $a=\tan A$, $b=\tan B$, $c=\tan C$ ($a>0$, $b>0$, $c>0$). BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}\quad(1)$$

Cộng 3 vào hai vế ta được

$$\frac{a+b}{b}+\frac{b+c}{c}+\frac{c+a}{a}\geq\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}+3$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b+c}\right)+(b+c)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+a}\right)+(c+a)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+a}\right)\geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)c}{b(b+c)}+\frac{(b+c)a}{c(c+a)}+\frac{(c+a)b}{a(a+b)}\geq 3\quad(2)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương suy ra BĐT (2) đúng, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Khi đó ABC là tam giác đều.

Cách 2. Đặt $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$; $\tan A=x$, $\tan B=y$, $\tan C=z$ ($a, b, c, x, y, z>0$). Giả sử $y=\max\{x, y, z\}$. Sử dụng định lí sin và định lí côsin trong tam giác ABC, ta được

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{4S}{b^2+c^2-a^2}=\frac{4S}{x};$$

$$\sin 2A=2\sin A.\cos A=2.\frac{a}{2R}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Tương tự với đối với B và C, từ đó ta có BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\geq\frac{x(y+z)}{y(z+x)}+\frac{y(z+x)}{z(x+y)}+\frac{z(x+y)}{x(y+z)}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{y}{x}-\frac{x(y+z)}{y(z+x)}\right)+\left(\frac{z}{y}-\frac{y(z+x)}{z(x+y)}\right)+\left(\frac{x}{z}-\frac{z(x+y)}{x(y+z)}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx).T\geq 0\quad(3)$$

trong đó

$$T=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z+x}+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{x+y}+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{y+z}$$

$$=\frac{(y-x)(y-z)}{xy(x+z)(y+x)}+\frac{(z-x)^2}{xz(x+y)(y+z)}\geq 0.$$

Từ đây suy ra BĐT (3) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$, tức là ABC là tam giác đều. ❒

Nhận xét. 1) Đa số các bạn tham gia đều cho lời giải đúng. Một số bạn chứng minh được BĐT tổng quát cho BĐT (1) như sau:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\dots+\frac{a_n}{a_1}\geq\frac{a_1+a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_2+a_3}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_n+a_1}{a_1+a_2}$$

2) Các bạn sau đây có lời giải gọn hơn cả:

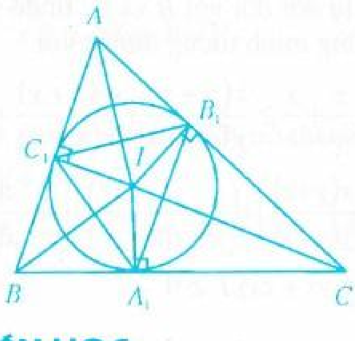
Hà Nội: *Trần Thế Khải*, 10A1 Toán, *Nguyễn Khánh Việt*, 10A2 Toán, *Trần Nhật Tân*, 12A1 Toán, THPT chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Hưng*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Nam Tài*, *Quách Đăng Hưng*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương:** *Trần Hoàng Sơn*, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Vĩnh Phúc:** *Đinh Tiến Dũng*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hoài Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Hán Ngọc Trụ*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Nghệ An:** *Đậu Ngọc Hiền*, 11A1, THPT Diễn Châu 4; *Lê Trọng Hiển*, lớp 11, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Quốc Thắng*, 12A6, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T8/373. *Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Gọi p, S, R theo thứ tự là nửa chu vi, diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; p_1 là nửa chu vi tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$p_1^2\leq\frac{pS}{2R}.$$

Lời giải.



Gọi r là bán kính đường tròn tâm I. Theo định lí sin cho tam giác $A_1B_1C_1$, ta có

$$2r=\frac{B_1C_1}{\sin A_1}=\frac{C_1A_1}{\sin B_1}=\frac{A_1B_1}{\sin C_1}$$

$$=\frac{2p_1}{\sin A_1+\sin B_1+\sin C_1}\quad(1)$$

Mặt khác, theo một kết quả quen thuộc $\sin A_1+\sin B_1+\sin C_1\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$, nên từ (1) suy ra

$$2p_1\leq 3\sqrt{3}.r\text{, hay } p_1^2\leq\frac{27r^2}{4}\quad(2)$$

Theo *bất đẳng thức Cauchy* cho ba số dương

$$S_{ABC}=p.r=\frac{BC.CA.AB}{4R}\leq\frac{(2p)^3}{27.4R}.$$

Từ đó $r^2\leq\frac{2p^2r}{27R}$, suy ra $\frac{27r^2}{4}\leq\frac{pS}{2R}$ (3)

Từ (2) và (3) ta thu được $p_1^2\leq\frac{27r^2}{4}\leq\frac{pS}{2R}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. ❒

Nhận xét. Số lời giải gửi về Tòa soạn khá nhiều, tất cả đều giải đúng. Sau đây là danh sách những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: *Lưu Văn Đan*, *Trần Thế Khải*, 10A1, *Trần Nhật Tân*, 12A1, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Phạm Duy Long*, 10T1, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam; **Thái Nguyên:** *Lưu Xuân Khôi*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Quảng Ninh:** *Ngô Đức Long*, 10T, THPT chuyên Hạ Long; **Bắc Ninh:** *Quách Đăng Hưng*, *Nguyễn Nam Tài*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Vĩnh Phúc:** *Lê Anh Chúc*, *Nguyễn Mạnh Quân*, 10A1, *Phạm Hữu Đức*, 10A10, *Phan Quốc Khánh*, 11A1, *Nguyễn Hoàng Hải*, *Nguyễn Khánh Duy*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** *Hà Phương Anh*, 12A1, THPT chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** *Vũ Thanh Tú*, 12A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Quý*, 9A, THCS Hải Hậu, *Trần Trọng Huy*, 10A, *Trần Thị Hồng Vân*, 11A, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Mai Chí Đạt*, 10E, THPT Hà Trung, *La Hồng Quân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Đậu Thế Vũ*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Đinh Thị Quỳnh Trang*, 10A1, *Lê Hồng Thái*, 11A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Nam Anh*, 10A1, *Nguyễn An Tịnh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Lê Đức Tín*, 11A, THPT Diễn Châu 3, *Lê Trọng Hiển*, 11A, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Thiều Đăng Ba*, *Nguyễn Tâm Đăng*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Lê Văn Tấn Quyền*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Hưng*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, 9I, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 12A1, THPT Châu Thành; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Kiên Giang:** *Vũ Đại Nghĩa*, 11T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **Vĩnh Long:** *Huỳnh Minh Tuấn*, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Cà Mau:** *Nguyễn Phạm Tuấn Anh*, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

HỒ QUANG VINH

★Bài T9/373. *Cho tập hợp khác rỗng A ($A \subset \mathbb{N}^*$) thỏa mãn điều kiện: Nếu a thuộc A thì 4a và $[\sqrt{a}]$ cũng thuộc A (kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Chứng minh rằng $A = \mathbb{N}^*$.*

Lời giải. Theo bạn *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành 1, **Bắc Ninh).**

Gọi a_0 là số nguyên dương bé nhất thuộc A.

Nếu $a_0 > 1$ thì $[\sqrt{a_0}] \in A$ và $[\sqrt{a_0}] \le \sqrt{a_0} < a_0$. Mâu thuẫn với cách chọn a_0.

Vậy $a_0 = 1$ từ giả thiết suy ra $4^n \in A,\ \forall n \Rightarrow$

$$[\sqrt{4^n}] = 2^n \in A, \forall n \Rightarrow \left[(2^n)^{\frac{1}{2^m}}\right] \in A, \forall m, n. \quad (1)$$

Ta chứng minh nhận xét sau: Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $k^{2^m} \le 2^n < (k+1)^{2^m}$. Thật vậy, chọn $m \in \mathbb{N}^*$ để

$2^m(\log_2(k+1) - \log_2 k) \ge 2$, khi đó

$\log_2(k+1)^{2^m} - \log_2(k)^{2^m} \ge 2$.

Vậy $\exists n \in \mathbb{N}^*$ để $\log_2 k^{2^m} \le n < \log_2(k+1)^{2^m}$

$$\Rightarrow k^{2^m} \le 2^n < (k+1)2^m \Rightarrow k = \left[(2^n)^{\frac{1}{2^m}}\right].$$

Từ (1) suy ra $k \in A$. Vậy $\mathbb{N}^* \subset A$. Lại có $A \subset \mathbb{N}^*$. Vậy $A = \mathbb{N}^*$. □

Nhận xét. 1) Một số bạn phát hiện đề bài in nhầm $\mathbb{N}^*$ thành $\mathbb{N}$ và đã sửa lại đề như trên. Xin cảm ơn các các bạn.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Doãn Tiến Đại*, 10A1 Toán, khối THPT ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Quý Tuấn*, 11T, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Thái Nguyên:** *Lưu Xuân Khôi*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** *Trịnh Phương Thu*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Đà Nẵng:** *Lê Văn Tấn Quyền*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 12A1, THPT Châu Thành; **Quảng Ngãi:** *Lê Nguyên Khánh*, THPT chuyên Lê Khiết; **Kiên Giang:** *Vũ Đại Nghĩa*, 11T, THPT chuyên; **TP Hồ Chí Minh:** *Võ Đức Huy*, 11A, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T10/373. *Cho a là số tự nhiên không nhỏ hơn 3. Xét dãy số $(u_n)(n = 1, 2, \ldots)$ có tính chất $u_1 = a$ và $u_{n+1} = u_n - \left[\frac{u_n}{2}\right] + 1$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Chứng minh rằng tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_n = u_k$ với mọi $n \ge k$.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh nhận xét sau: nếu $u \in \mathbb{N}^*$, $u \ge 4$ thì $u > u - \left[\frac{u}{2}\right] + 1 \ge 3$.

Thật vậy vì $u \ge 4$ suy ra $\frac{u}{2} \ge 2$. Do đó $\left[\frac{u}{2}\right] \ge 2 > 1$. Bởi vậy $u > u - \left[\frac{u}{2}\right] + 1$.

Cũng từ $u \ge 4$ ta có

$$u = \frac{u}{2} + \frac{u}{2} \ge \frac{u}{2} + 2 \ge \left[\frac{u}{2}\right] + 2.$$

Bởi vậy $u - \left[\frac{u}{2}\right] + 1 \ge 3$.

Theo nhận xét trên ta thấy: nếu $u_n \ge 4$ thì $u_n > u_{n+1} \ge 3$. Chú ý $u_n \in \mathbb{Z}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra tồn tại $u_k = 3$. Khi đó ta thấy ngay $u_n = 3$ với mọi $n \ge k$. Khẳng định đã được chứng minh. □

Nhận xét. Đây là bài toán tổ hợp số học. Cách lí luận trên cũng đã quen thuộc với nhiều bạn học sinh. Các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Hữu Trưởng*, 9A, THCS Yên Phong; **Quảng Ninh:** *Giang Thọ Anh*, 10T, THPT chuyên Hạ Long; **Hà Nội:** *Đào Trọng Anh*, 10A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên, *Lưu Văn Đan*, *Trần Thế Khải*, 10A1 Toán, THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Phạm Đức Nam*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 10A1, THPT chuyên; **Đăk Lăk:** *Trương Thành Công*, 9A, THCS Nguyễn Khuyến, Eakar, *Lê Quang Hiếu*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh*, 9I, THCS Hùng Vương, TP. Biên Hòa; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T11/373. *Xác định tất cả các đa thức với hệ số thực P(x), Q(x) và R(x) thỏa mãn điều kiện $\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}=R(x)$ với mọi số thực x.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Ta viết điều kiện bài ra dưới dạng

$$\sqrt{P(x)}=\sqrt{Q(x)}+R(x)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P(x)\ge 0, Q(x)\ge 0, \sqrt{Q(x)}+R(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}\\ P(x)=Q(x)+(R(x))^2+2R(x)\sqrt{Q(x)}, \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Từ đó $R(x)\sqrt{Q(x)}$ là một hàm đa thức. Vậy hoặc $R(x)\equiv 0$ hoặc $Q(x)\equiv(M(x))^2$ với $M(x)$ là một đa thức.

• Trường hợp $R(x)\equiv 0$, từ điều kiện $\sqrt{P(x)}=\sqrt{Q(x)}+R(x)$ suy ra $P(x)\equiv Q(x)$, ta thu được

$(P(x),Q(x),R(x))=(0,T(x),T(x))$, với $T(x)$ là đa thức tùy ý, là nghiệm của bài toán.

• Trường hợp $Q(x)\equiv(M(x))^2$. Thế vào điều kiện $\sqrt{P(x)}=\sqrt{Q(x)}+R(x)$, ta thu được

$\sqrt{P(x)}=M(x)+R(x)$

hay $P(x)=(M(x)+R(x))^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $P(x)\equiv(N(x))^2$, trong đó $N(x)$ là một đa thức. Từ các điều kiện $Q(x)\equiv(M(x))^2$ và $P(x)\equiv(N(x))^2$, ta thu được $R(x)=N(x)-M(x)$, tức là

$(P(x),Q(x),R(x))$

$=((N(x))^2,(M(x))^2,N(x)-M(x))$,

với $M(x), N(x)$ là các đa thức tùy ý, thỏa mãn điều kiện bài ra. □

Nhận xét. Đây là một bài toán về phương trình hàm trong đa thức với hệ số thực thuộc dạng không quen thuộc ở bậc phổ thông nên có rất ít bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Nội: *Trần Thế Khải*, 10A1 Toán, THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** *Tạ Minh Tùng*, THPT Thái Thụy; **Thừa Thiên – Huế:** *Võ Thành Văn*, 11Toán THPT chuyên, ĐH Huế; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 12A1 THPT Châu Thành; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Quốc Thắng*, 12A6, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T12/373. *Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G, bán kính mặt cầu ngoại tiếp R. Chứng minh rằng*

$$GA+GB+GC+GD+4R\ge$$
$$\frac{2}{\sqrt{6}}(AB+AC+AD+BC+CD+DB).$$

Lời giải. Trước hết, xin giới thiệu hai bổ đề,

Bổ đề 1. Nếu G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì

$$GA^2=\frac{3(AB^2+AC^2+AD^2)-(CD^2+DB^2+BC^2)}{16}.$$

Chứng minh. Gọi G_a là trọng tâm của tam giác BCD. Ta có

$$GA^2=\frac{9}{16}AG_a^2=\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})^2$$

$$=\frac{3(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2)-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})^2-(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}{16}$$

$$=\frac{3(AB^2+AC^2+AD^2)-(CD^2+DB^2+BC^2)}{16}.$$

Bổ đề 2. Nếu O, G theo thứ tự là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì

$$R^2-OG^2=\frac{GA^2+GB^2+GC^2+GD^2}{4}$$

$$=\frac{AB^2+AC^2+AD^2+CD^2+DB^2+BC^2}{16}.$$

Chứng minh. Theo hệ thức Leibnitz, với mọi điểm M, ta có

$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$

$=GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+4MG^2$.

Từ đó, cho M trùng O, ta được

$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$

$=GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+4OG^2$. Suy ra

$$R^2-OG^2=\frac{GA^2+GB^2+GC^2+GD^2}{4} \quad (1)$$

Từ bổ đề 1, suy ra

2 – TH&TTT11-A

$$\frac{GA^2+GB^2+GC^2+GD^2}{4}$$
$$=\frac{AB^2+AC^2+AD^2+CD^2+DB^2+BC^2}{16} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra điều phải chứng minh.

Trở lại việc giải bài toán T12/373.

Ta có $R.GA = OA.GA \ge \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}$

$$= \frac{OA^2+GA^2-OG^2}{2} = \frac{GA^2+R^2-OG^2}{2}.$$

Từ đó, theo các bổ đề 1 và 2, ta có

$$R.GA \ge \frac{AB^2+AC^2+AD^2}{8}.$$

Theo BĐT Cauchy và BĐT Bunyakovski, ta có

$$\sqrt{6}(R+GA) \ge 2\sqrt{6}\sqrt{R.GA} = \sqrt{3}\sqrt{8R.GA}$$
$$\ge \sqrt{3(AB^2+AC^2+AD^2)}$$
$$\ge \sqrt{(AB+AC+AD)^2} = AB+AC+AD.$$ Tương tự

$$\begin{cases} \sqrt{6}(R+GB) \ge BC+BD+BA; \\ \sqrt{6}(R+GC) \ge CD+CA+CB; \\ \sqrt{6}(R+GD) \ge DA+DB+DC. \end{cases}$$

Suy ra

$$GA+GB+GC+GD+4R$$
$$\ge \frac{2}{\sqrt{6}}(AB+AC+AD+BC+CD+DB).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ diện $ABCD$ là đều. ❒

Nhận xét. 1) Đa số các bạn giải theo hướng sau:

$$\sum GA + 4R \ge 2\sqrt{(\sum GA)4R}$$
$$= 2\sqrt{4\left(\sum OA.GA\right)} \ge 2\sqrt{4\left(\sum \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}\right)}$$
$$= 2\sqrt{4\left(\sum (\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})\overrightarrow{GA}\right)}$$
$$= 2\sqrt{4\left(\overrightarrow{OG}(\sum \overrightarrow{GA}) + \sum GA^2\right)} \ge 2\sqrt{4\left(\sum GA^2\right)}$$
$$= 2\sqrt{\sum AB^2} \ge 2\sqrt{\frac{1}{6}\left(\sum AB\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{6}}\sum AB.$$

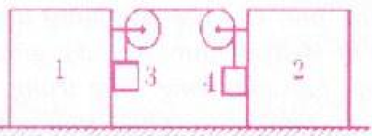
2) $\sqrt{6}(R+GA) \ge AB+AC+AD$ là một bất đẳng thức đẹp.

3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Đỗ Vũ Thạch*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; *Khương Mạnh Tuấn*, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, TP Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Vân*, 11A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nội:** *Phạm Việt Hà*, 11A2, THPT Tùng Thiện, TP Sơn Tây; *Phạm Đức Nam*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Q. Cầu Giấy; **Nghệ An:** *Lê Đức Tin*, 11A1, THPT Diễn Châu 3; **Bình Định:** *Phạm Thị Mỹ Hảo*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Hưng*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Vĩnh Long:** *Huỳnh Minh Tuấn*, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài L1/373.** *Cho hệ cơ học như hình vẽ. Các vật 1 và vật 2 có cùng khối lượng M, các vật 3 và vật 4 có cùng khối lượng m. Bỏ qua mọi ma sát. Khối lượng các ròng rọc không đáng kể. Tìm gia tốc của mỗi vật.*



Lời giải. Do tính đối xứng, gia tốc các vật 1 và vật 2 bằng nhau, gia tốc các vật 3 và vật 4 bằng nhau. Khi vật 1 và vật 2 dịch chuyển được một đoạn S thì vật 3 và vật 4 cũng chuyển động theo phương thẳng đứng một đoạn bằng S. Gia tốc vật 3 và vật 4 theo phương ngang cũng bằng gia tốc của vật 1 và vật 2.

Chọn hệ trục tọa độ có trục Ox nằm ngang, trục Oy hướng thẳng đứng xuống.

Ta có $a_1 = a_2 = a$; $a_{3y} = a_{4y} = a$.

Phương trình định luật 2 Newton cho vật 1 và vật 3 có dạng

$$T - N = Ma \qquad (1)$$
$$N = ma_{3x} = ma \qquad (2)$$
$$mg - T = ma_{3y} = ma \qquad (3)$$

Cộng theo vế ba phương trình trên ta được

$$a = \frac{m}{M+2m}g.$$

Gia tốc của vật 3 và 4 có độ lớn:

$$a_3 = a_4 = a\sqrt{2}.$$

Vectơ gia tốc của vật 3 và vật 4 hợp với phương ngang một góc α với

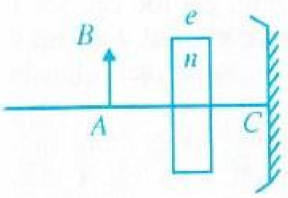
$$\tan\alpha = \frac{a_{3y}}{a_{3x}} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0. \square$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt:

Hải Dương: *Tạ Văn Đức*, 12A, THPT Kim Thành; **Đăk Lăk:** *Trương Công Thành*, 11T1, THPT Ngô Gia Tự, EaKar; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Ngọc Duy*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Hà Tĩnh:** *Cao Xuân Cử*, 12 Toán, THPT chuyên; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Duy Hùng*, 12 F, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Đông*, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Bình Định:** *Phan Đăng Thành*, 11A1, *Phan Thành Luân*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP Hồ Chí Minh:** *Trương Đức Toàn*, 12CL, THPT Nguyễn Thượng Hiền.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/373. *Một gương cầu lõm có tiêu cự f = 12 cm, ảnh của vật AB hứng được trên màn ảnh là A_1B_1 = 9mm. Nếu đặt giữa vật và gương một bản mặt song song trong suốt có độ dày e = 2cm và có chiết suất n thì phải dịch chuyển màn ảnh đi một đoạn 13 cm mới hứng được ảnh của vật là A_2B_2 = 12mm. Hãy tính chiết suất n.*



Lời giải. (Theo bạn *Lê Văn Giang*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hoá**)

Khi chưa đặt bản mặt song song, sơ đồ tạo ảnh:

$$AB \xrightarrow[d;\,d']{G} A_1B_1$$

Ta có $d' = \dfrac{df}{d-f}$ (1)

$K_1 = \dfrac{f}{f-d}$; $|K_1| = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{0,9}{AB}$ (2)

Khi đặt bản mặt song song, sơ đồ tạo ảnh:

$$AB \xrightarrow{BMSS} A_1'B_1' \xrightarrow[(d-\Delta d)]{G} A_2'B_2' \xrightarrow[(d'+a-\Delta d)]{BMSS} A_2B_2$$

với Δd là độ dịch chuyển so với vật của ảnh tạo bởi bản mặt song song;

$$\Delta d = e\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad (3)$$

còn a = 13cm.

Ta có $d' + a - \Delta d = \dfrac{(d-\Delta d)f}{d-\Delta d - f}$ (4)

$K_2 = \dfrac{f}{f-(d-\Delta d)}$; $|K_2| = \dfrac{A_2B_2}{AB} = \dfrac{1,2}{AB}$ (5)

Từ (2) và (5) ta được $\left|\dfrac{K_1}{K_2}\right| = \dfrac{0,9}{1,2} = \dfrac{3}{4}$.

Suy ra $\dfrac{f-(d-\Delta d)}{f-d} = \dfrac{3}{4}$ $\dfrac{f-(d-\Delta d)}{f-d} = \dfrac{3}{4}$

hay $d = f + 4\Delta d$ (6)

Từ (1), (4) và (6) ta có phương trình

$$(\Delta d)^2 - 13(\Delta d) + 12 = 0.$$

Phương trình này cho $\Delta d = 12\text{cm}$ và $\Delta d = 1\text{cm}$.

Với $\Delta d = 12cm$, từ (3) suy ra $n = -\dfrac{1}{5}$ (loại).

Với $\Delta d = 1cm$, từ (3) suy ra $n = 2$.

Chiết suất của chất làm bản mặt song song là $n = 2$. $\square$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Văn Đông*, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hải Dương:** *Nguyễn Văn Nguyên*, *Phạm Đình Tuấn*, *Vũ Xuân Thịnh*, 12A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; **Thanh Hoá:** *Lê Văn Giang*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, *Hà Văn Toàn*, 12G, THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn, *Lê Xuân Thắng*, 11A1, THPT Triệu Sơn 3, *Nguyễn Thanh Tùng*, 12A1, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hoá; **Nghệ An:** *Phạm Minh Khoa*, 11A1, THPT Diễn Châu 3, *Đinh Viết Thắng*, K17A1, THPT Diễn Châu 4, *Nguyễn Thị Loan*, 11A1, THPT Đô Lương 2; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Vĩnh Sang*, 11A1, THPT thị xã Sa Đéc; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trương Quốc Tân*, 10 Lí, PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, *Trương Đức Toàn*, 12 chuyên lí, THPT Nguyễn Thượng Hiền; **Bình Định:** *Lê Nguyễn Pháp*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Ngọc Dung*, 11Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Về cách lập MA PHƯƠNG

TRẦN VIỆT HÙNG
(Sở GD&ĐT Sóc Trăng)

(Tiếp theo kì trước)

LẬP MA PHƯƠNG TỪ HAI MA PHƯƠNG ĐÃ BIẾT

Giả sử ta đã biết hai ma phương (MP) là $M_r = M_r(0;d)$ bậc r gồm r^2 số $d, 2d, ..., r^2d$ và $M_s = M_s(0;d)$ bậc s gồm s^2 số $d, 2d, ..., s^2d$. Chú ý rằng từ MP $M_n(a;d)$ gồm n^2 số $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + n^2d$ ta luôn tìm được MP $M_n(0;d)$ gồm n^2 số d, $2d$, ..., n^2d khi trong mỗi ô vuông nếu ghi số k thì thay bằng số $k - a$, và ngược lại.

Từ các MP đã biết M_r, M_s (với $r > 2$, $s > 2$) ta có thể lập được MP $M_{rs} = M_{rs}(0;d)$ gồm r^2s^2 số $d, 2d, ..., r^2s^2d$ theo các bước dưới đây. Để minh họa ta thực hiện lập MP M_{12} (0;1) từ các MP đã biết $M_4 = M_4(0;1)$ (hình 1) và $M_3 = M_3(0;1)$ (hình 2).

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Ma phương $M_4(0;1)$

Hình 1

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ma phương $M_3(0;1)$

Hình 2

Bước 1. **Tạo mẫu trên bảng hình vuông $r \times r$ ô**

Ta chọn một MP trong hai MP đã biết làm MP cơ bản, chẳng hạn chọn MP M_r, rồi tạo mẫu trên bảng hình vuông $r \times r$ ô bằng cách sau: Trong mỗi ô vuông của MP M_r nếu ghi số t (t lấy các giá trị d, $2d$, ..., r^2d) thì ta thay t bởi kí hiệu $M_s\left(\left(\frac{t}{d}-1\right)s^2d\ ;\ d\right)$.

Trên hình 3 trong mỗi ô vuông của MP cơ bản $M_4(0;1)$ ta đã thay số t với các giá trị t bằng 1, 2, ..., 16 bởi kí hiệu $M_3((t-1).9\ ;1)$.

$M_3(15.9;1)$	$M_3(1.9;1)$	$M_3(2.9;1)$	$M_3(12.9;1)$
$M_3(4.9;1)$	$M_3(10.9;1)$	$M_3(9.9;1)$	$M_3(7.9;1)$
$M_3(8.9;1)$	$M_3(6.9;1)$	$M_3(5.9;1)$	$M_3(11.9;1)$
$M_3(3.9;1)$	$M_3(13.9;1)$	$M_3(14.9;1)$	$M_3(0;1)$

Bảng tạo mẫu ứng với MP cơ bản M_4

Hình 3

Bước 2. **Điền số vào bảng hình vuông $rs \times rs$ ô**

Vẽ bảng hình vuông $rs \times rs$ ô và chia thành r^2 hình vuông nhỏ kích thước $s \times s$ ô. Ta tính các MP $M_s\left(\left(\frac{t}{d}-1\right)s^2d;d\right)$ với $\frac{t}{d}$ chạy từ 1 đến r^2 bằng cách cộng $\left(\frac{t}{d}-1\right)s^2.d$ vào mỗi số trong các ô vuông của MP $M_s(0;d)$ đã biết. Sau đó viết các MP $M_s\left(\left(\frac{t}{d}-1\right)s^2d;d\right)$ vào các hình vuông nhỏ kích thước $s \times s$ ô trong bảng hình vuông $rs \times rs$ ô sao cho MP đó nằm ở vị trí tương ứng trong bảng tạo mẫu; ta nhận được bảng hình vuông $rs \times rs$ số. Việc chứng minh bảng số nhận được là một ma phương chỉ là sự khái quát hóa của chứng minh cho trường hợp $rs = 4.3 = 12$ như dưới đây.

139	144	137	13	18	11	22	27	20	112	117	110
138	140	142	12	14	16	21	23	25	111	113	115
143	136	141	17	10	15	26	19	24	116	109	114
40	45	38	94	99	92	85	90	83	67	72	65
39	41	43	93	95	97	84	86	88	66	68	70
44	37	42	98	91	96	89	82	87	71	64	69
76	81	74	58	63	56	49	54	47	103	108	101
75	77	79	57	59	61	48	50	52	102	104	106
80	73	78	65	55	60	53	46	51	107	100	105
31	36	29	121	126	119	130	135	128	4	9	2
30	32	34	120	122	124	129	131	133	3	5	7
35	28	33	125	118	123	134	127	132	8	1	6

Hình 4

Trên hình 4 ta đã điền các MP $M_3((t-1).9;1)$ với t bằng 1, 2, ..., 16 vào các vị trí tương ứng trong bảng tạo mẫu ứng với MP cơ bản M_4 ở hình 3, ta được bảng hình vuông 12 × 12 ô. Ta sẽ chỉ ra rằng bảng số lập được là một ma phương bậc 12. Giả sử trong MP M_4 các số hạng ở một hàng (hoặc một cột) là t_1, t_2, t_3, t_4 thì hằng số của MP M_4 bằng

$$t_1+t_2+t_3+t_4=S_4=\frac{4.(4^2+1)}{2}=34.$$

Ba số ở mỗi hàng (hoặc mỗi cột) của MP M_3 có tổng bằng hằng số $S_3=\dfrac{3(3^2+1)}{2}=15$. Từ đó tổng các số ở mỗi hàng (hoặc mỗi cột) của bảng hình vuông 12 × 12 ô vừa được lập bằng $(t_1+t_2+t_3+t_4-4)3.9+4.15=870$, nghĩa là bằng hằng số

$$S_{12}=\frac{12.(12^2+1)}{2}=870 \text{ của MP } M_{12}\,(0;1).$$

Vậy bảng số hình vuông 12 × 12 ô vừa được lập là một ma phương.

Chú ý. 1) Nếu chọn M_s làm MP cơ bản thì cùng với MP M_r đã biết ta lập được MP M_{sr}.

2) Các MP có bậc $2k$ với k là số nguyên tố thì không lập được theo cách trên vì không có MP bậc 2, nhưng tìm được theo cách lập MP bậc chẵn (đã đăng trong kì trước).

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T7/377. Let D and E be two points on the side BC of a triangle ABC such that $\dfrac{BD}{CD}=2.\dfrac{CE}{BE}$. The circumcircle of ADE meets AB and AC at M and N, respectively. Prove that regardless of the positions of the points D and E on BC, the centroid of the triangle AMN lies on a fixed line.

T8/377. Find the smallest real number k such that the following inequality holds for all non-negative real numbers a, b, c.

$$\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt[3]{abc}+k.\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/377. Determine all triple of real numbers x, y, z such that

$$x^6+y^6+z^6-6(x^4+y^4+z^4)+10(x^2+y^2+z^2)$$
$$-2(x^3y+y^3z+z^3x)+6(xy+yz+zx)=0.$$

T10/377. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f(x^3-y)+2y(3f^2(x)+y^2)=f(y+f(x))$$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$.

T11/377. Consider the sequence (u_n), $(n=1, 2, \ldots)$ given by the following recursive formula $u_1=u_2=1$, $u_{n+1}=4u_n-5u_{n-1}$ for all $n\ge 2$.

Prove that $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{a^n}\right)=0$ for all real number $a>\sqrt{5}$.

T12/377. Choose three points A_1, B_1, C_1 on the sides of a triangle ABC, ($A_1\in BC$, $B_1\in AC$, $C_1\in AB$) such that AA_1, BB_1, CC_1 meet at a common point. Again, choose three points A_2, B_2, C_2 on the sides of the triangle $A_1B_1C_1$ ($A_2\in B_1C_1$, $B_2\in A_1C_1$, $C_2\in A_1B_1$). Prove that the three lines AA_2, BB_2, CC_2 meet at a common point if and only if so do A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

Translated by LE MINH HA

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ

trên Tạp chí TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

NĂM HỌC 2007 - 2008

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lí năm học 2007 – 2008 được bắt đầu từ tháng 9 năm 2007 đến tháng 8 năm 2008. Cuộc thi này được khá đông các bạn trẻ yêu toán và vật lí cấp THCS và THPT trên khắp toàn quốc tham gia. Chất lượng các bài giải gửi về Toà soạn đã được nâng thêm một bậc so với năm học 2006 2007. Các tỉnh có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải là *Hà Nội, Vĩnh Phúc, Bắc Ninh, Hải Dương, Thanh Hoá, Nghệ An*. Hai giải Xuất sắc về môn Toán thuộc về hai bạn *Phạm Quang Thịnh, Nguyễn Hoàng Hải*; giải Nhất môn Vật lí thuộc về *Nguyễn Mạnh Quân*, bạn cũng là người đoạt giải Nhì môn Toán lần này. Xin chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi, và hẹn gặp lại các bạn trong cuộc thi ở năm học tiếp theo. Sau đây là danh sách những bạn đoạt giải Toán và Vật lí năm học 2007 – 2008.

MÔN TOÁN

Giải Xuất sắc (2 giải)

1. *Phạm Quang Thịnh*, 9I, THCS Hùng Vương, Tp. Tuy Hòa, **Phú Yên.**
2. *Nguyễn Hoàng Hải*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc , **Vĩnh Phúc**.

Giải Nhất (6 giải)

1. *Nguyễn Hữu Dũng*, 6A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, **Bắc Ninh**.
2. *Vũ Đình Long*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
3. *Nguyễn Văn Quý*, 9A, THCS Hải Hậu, **Nam Định**.
4. *La Hồng Quân*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hóa**.
5. *Trần Thế Khải*, 10A1 Toán, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
6. *Trần Văn Hạnh*, 11A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**.

Giải Nhì (10 giải)

1. *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**.
2. *Mai Thu Phương*, 6A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung, **Thanh Hóa**.
3. *Nguyễn Quân Dương*, 8B, THCS Thanh Mai, Thanh Oai, **Hà Nội**.
4. *Trần Thị Ánh Nguyên*, 9/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.
5. *Lê Thị Tuyết Mai*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
6. *Lê Đại Thành*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **TP. Cần Thơ**.
7. *Nguyễn Mạnh Quân*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TP Hà Đông, **Hà Nội**.
8. *Khổng Hoàng Thao*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
9. *Trần Quang Sự*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
10. *Vũ Thanh Tú*, 11A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, **Hải Dương**.

Giải Ba (26 giải)

1. *Nguyễn Minh Hiếu*, 6A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
2. *Trần Quang Minh*, 7/1, THCS Trần Huỳnh, Tx. Bạc Liêu, **Bạc Liêu**.
3. *Nguyễn Văn Bảo*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
4. *Nguyễn Văn Thắng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
5. *Hoàng Minh Lập*, 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương, **Thái Bình**.

6. *Nguyễn Quang Rực*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**.
7. *Phùng Ngọc Quý*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
8. *Nguyễn Trường Giang*, 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**.
9. *Đậu Thế Vũ*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.
10. *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội**.
11. *Trương Thành Công*, 9A, THCS Nguyễn Khuyến, Eakar, **Đăk Lăk**.
12. *Đỗ Vũ Thạch*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**.
13. *Nguyễn Khánh Việt*, 10A2, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
14. *Lê Văn Tấn Quyền*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.
15. *Vũ Minh Thắng*, 10T1, Khối THPT chuyên, ĐHSP **Hà Nội**.
16. *Phạm Duy Long*, 10T1, Trường Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**.
17. *Phạm Đức Nam*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Cầu Giấy, **Hà Nội**.
18. *Nguyễn Ngọc Trung*, 10A1 Toán, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
19. *Châu Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.
20. *Mạc Thế Trường*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
21. *Nguyễn Đức Công*, 11A1, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**.
22. *Nguyễn Văn Pha*, 11A3, THPT Bắc Kiến Xương, **Thái Bình**.
23. *Võ Thành Văn*, 11T, PTCT, ĐHKH Huế, **Thừa Thiên - Huế**.
24. *Trịnh Ngọc Dương*, 12A1, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
25. *Dương Văn An*, 12A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.
26. *Phạm Đức Mạnh*, 12T, THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**.

Giải Khuyến khích (**36** giải).

1. *Hoàng Tiến Dũng*, 6A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**.
2. *Hoàng Phương Linh*, 6B, Trường Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**.
3. *Vũ Ngọc Nhật Minh*, 6A, THCS Chu Văn An, TP. Lạng Sơn, **Lạng Sơn**.
4. *Vũ Ngọc Cương*, 7/1, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.
5. *Lê Minh Phúc*, 7A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội**.
6. *Đinh Uýt Nây*, 7B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**.
7. *Hoàng Anh Tú*, 7I, Trường Marie-Curie, **Hà Nội**
8. *Hồ Khánh Duy*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.
9. *Nguyễn Thế Bảo*, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
10. *Nguyễn Thị Diễm My*, 8A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
11. *Nguyễn Thị Trầm*, 8A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
12. *Nguyễn Hữu Ánh*, 8I, THCS Thành Cổ, Tx. Quảng Trị, **Quảng Trị**.
13. *Nguyễn Ngọc Long*, 9A, THCS Vũ Kiệt, Thuận Thành, **Bắc Ninh**.
14. *Nguyễn Hữu Trường*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**.
15. *Tạ Hải Nam*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
16. *Triệu Thị Quỳnh Mai*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
17. *Nguyễn Thanh Tùng*, 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**.
18. *Nguyễn Thị Kim Tuyến*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
19. *Nguyễn Đồng Tiến*, 9A3, THCS Lương Thế Vinh, Quy Nhơn, **Bình Định**.
20. *Nguyễn Tiến Hòa*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm, **Hà Nam**.

21. *Bùi Văn Vượng*, 9B, THCS Hải Hậu, **Nam Định**.
22. *Lê Cao Thăng*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu, **Phú Yên**.
23. *Lưu Văn Đan*, 10A1 Toán, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
24. *Nguyễn Minh Hiếu*, 10A1 Toán, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
25. *Hồ Hữu Quân*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu I, **Nghệ An**.
26. *Ngô Đức Long*, 10T, THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**.
27. *Nguyễn Văn An*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
28. *Đào Trọng Anh*, 10A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên, **Hà Nội**.
29. *Trần Thị Hồng Vân*, 11A, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
30. *Trần Quốc Luật*, 11A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn, **Hà Tĩnh**.
31. *Lê Xuân Thăng*, 11A1, THPT Triệu Sơn 3, **Thanh Hóa**.
32. *Nguyễn Sơn Tùng*, 11A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì, **Hà Nội**.
33. *Nguyễn Huy Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
34. *Huỳnh Minh Tuấn*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.
35. *Hoàng Đức Ý*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
36. *Đỗ Thị Thu Thảo*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.

MÔN VẬT LÍ

Giải Nhất (1 giải)

1. *Nguyễn Mạnh Quân*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội**.

Giải Nhì (2 giải)

1. *Nguyễn Văn Bảo*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.
2. *Trần Hoàng Bá*, 12 Toán, THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**.

Giải Ba (4 giải)

1. *Nguyễn Ngọc Duy*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.
2. *Nguyễn Thành Linh*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.
3. *Trần Việt Long*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.
4. *Nguyễn Duy Hùng*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

Giải Khuyến khích (9 giải)

1. *Trần Văn Giai*, 11A3, K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
2. *Phạm Đình Tuấn*, 11A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, **Hải Dương**.
3. *Phạm Đức Linh*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.
4. *Lê Bá Sơn*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
5. *Bùi Tiến Mạnh*, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.
6. *Nguyễn Đức Sơn*, 12A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
7. *Vũ Quang Hiệu*, 12A4, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**.
8. *Nguyễn Khắc Quyền*, 12B, Chuyên Lí, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
9. *Trần Thế Minh*, 12A1, K33, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tĩnh**.

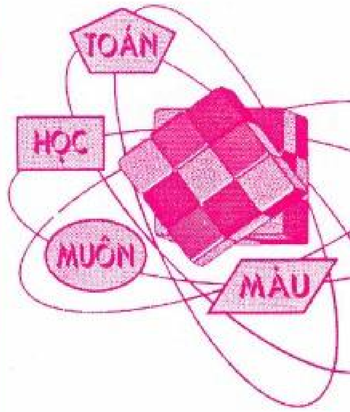
Xin chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải. Các bạn hãy gửi địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Giải thưởng và Giấy Chứng nhận. Lưu ý : ghi rõ tên lớp, trường, tỉnh (không ghi khóa học).

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 377(11.2008)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

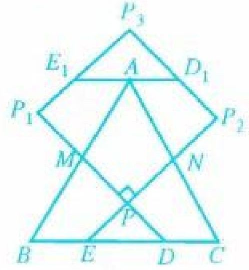
Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.
Trị sự, phát hành : HOÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



PHÂN CHIA TAM GIÁC ĐỀU, ghép thành hình vuông

Bạn Toán muốn phân chia một tam giác đều thành bốn đa giác rồi ghép chúng lại (không hở, không chờm lên nhau).

Bạn Toán làm như sau. Trên cạnh AB của tam giác đều ABC lấy trung điểm M và trên cạnh AC lấy trung điểm N, rồi dựng tam giác MNP vuông cân tại P, tia MP và tia NP cắt BC tương ứng tại D và E (h. 1). Cắt tam giác ABC theo các đường thẳng MD và NE. Đặt tứ giác $MBEP$ vào vị trí MAE_1P_1, đặt tứ giác $NCDP$ vào vị trí NAD_1P_2 và đặt tam giác EDP vào vị trí $E_1D_1P_3$, bạn Toán cho rằng đã ghép được hình vuông $PP_1P_3P_2$.



Hình 1

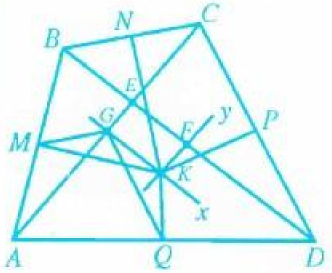
Dành cho bạn đọc

1) Hãy chỉ ra rằng cách phân chia và ghép hình của bạn Toán là chưa chuẩn xác.

2) Có thể điều chỉnh cách phân chia trên như thế nào để đạt được kết quả mong muốn?

Giải đáp: PHÂN CHIA TỨ GIÁC thành bốn tứ giác có diện tích bằng nhau

(Đề đăng trên THTT số 373 tháng 7.2008)



Hình 2

Gọi G là trùng điểm của AC và F là trung điểm của BD (h. 2).

• Dễ thấy

$$S_{GMAQ} = S_{GMA} + S_{GAQ} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ACD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Qua điểm G kẻ đường thẳng $x//BD$ (hoặc x trùng BD khi G thuộc BD) thì với điểm X bất kì thuộc x ta có

$$S_{XMQ} = S_{GMQ} \text{ nên } S_{XMAQ} = S_{GMAQ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Tương tự có $S_{XNCP} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = S_{XMAQ}$ (1)

• Lập luận như trên qua điểm F kẻ đường thẳng $y//AC$ (hoặc y trùng AC khi F thuộc AC) thì với điểm Y bất kì trên y ta có

$$S_{YMBN} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = S_{YPDQ} \quad (2)$$

• Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng x và y (hay K là điểm đối xứng của điểm E qua trung điểm của GF) thì từ (1) và (2) có

$$S_{KMAQ} = S_{KNCP} = S_{KMBN} = S_{KPDQ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Vậy K là điểm cần tìm.

• Trong trường hợp giao điểm E của AC và BD là trung điểm của AC thì điểm K cần tìm trùng với trung điểm F của BD.

Các bạn sau có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm:

1. *Nguyễn Thu Thủy*, 12 Toán, THPT Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**.
2. *Lê Hữu Nguyên*, 10B1, THPT Yên Định II, Yên Định, **Thanh Hóa**.
3. *Phan Phú Nguyên*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
4. *Lê Thị Phương Thanh*, 8A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. **Nam Định**.
5. *Trần Xuân Thắm*, 11A1, THPT Phương Xá, Cẩm Khê, **Phú Thọ**.

PHI PHI

TRƯỜNG THPT CHUYÊN THÁI BÌNH
40 năm xây dựng, phát triển và trưởng thành

Hiệu trưởng, Nhà giáo ưu tú
TÔ MẠNH HOAN

Thực hiện lời dạy của Chủ tịch Hồ Chí Minh vĩ đại: "Dù khó khăn đến đâu cũng phải tiếp tục thi đua dạy tốt và học tốt"; Năm 1968, UBHC tỉnh Thái Bình có Quyết định: 264/QĐ về việc mở lớp cấp III phổ thông dạy học sinh có năng khiếu Toán đặt tại trường cấp III thị xã Thái Bình (nay là trường THPT Lê Quý Đôn). Năm 1974, các lớp chuyên Toán được tái tuyển và đặt tại trường cấp III Nam Thư Trì (nay là trường THPT Nguyễn Trãi.

Đến năm 1984 trường mở thêm hệ Chuyên Ngữ văn và tiếng Nga. Ngày 15.9.1988 UBND tỉnh Thái Bình có quyết định 463/QĐ-UB thành lập trường THPT chuyên Thái Bình và đặt tại ngõ 70 Lê Lợi thị xã Thái Bình, với sự lãnh đạo và quản lí của thầy Nguyễn Luận - hiệu trưởng đầu tiên của nhà trường. Ngày đầu thành lập có 8 lớp với 195 học sinh, 24 thầy cô giáo giỏi, tâm huyết và 7 nhân viên phục vụ.

Năm 1993, trường THPT chuyên Thái Bình được tiếp nhận cơ sở cũ của Ban cơ khí nông nghiệp tỉnh Thái Bình, tại 194 Lý Thường Kiệt thành phố Thái Bình và một phần cơ sở của Công ti xây lắp làm khu kí túc xá rộng rãi và khang trang hơn.

Sau 20 năm xây dựng và phát triển, trường THPT chuyên Thái Bình đã kế tiếp truyền thống 20 năm trước của các lớp chuyên Toán, Ngữ Văn, tiếng Nga và luôn là điểm sáng, vườn ươm tài năng trẻ của Thái Bình. Đến nay trường có 31 lớp đủ 11 môn chuyên, hàng nghìn học sinh và hàng trăm cán bộ, giáo viên, công nhân viên.

Hằng năm, tỉ lệ học sinh thi đỗ vào Đại học, Cao đẳng là 95%, nhà trường luôn đạt danh hiệu Tiên tiến và Tiên tiến Xuất sắc, 3 lần được Bộ GD&ĐT và 2 lần được Chính phủ tặng Bằng khen. Với những thành tích cho sự nghiệp trồng người, Chủ tịch nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam đã tặng thưởng nhà trường Huân chương Lao động hạng Ba năm 1998, Huân chương Lao động hạng Nhì năm 2002.

Trên nền tảng giáo dục toàn diện, trường THPT chuyên Thái Bình luôn coi trọng tinh thần đoàn kết và khơi dậy sức mạnh của đội ngũ giáo viên giỏi, học sinh giỏi để đủ sức đua tài với các tỉnh, thành phố trong cả nước và các lớp chuyên trong các trường Đại học. Qua 20 kì dự thi học sinh giỏi Quốc gia, nhà trường đã đoạt 737 giải gồm: 15 giải Nhất, 128 giải Nhì, 305 giải Ba, 289 giải Khuyến khích.

Trường có hơn 100 lượt học sinh giỏi các bộ môn Toán, Tin học, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Tiếng Nga, được dự tuyển học sinh giỏi Quốc tế và đã vinh dự đoạt 8 giải Quốc tế và khu vực Châu Á - Thái Bình Dương (APMO). Đó là các học sinh: Tô Huy Quỳnh (Huy chương (HC) Bạc Toán Quốc tế), Đoàn Nhật Dương (HC Vàng Toán APMO và HC Bạc Toán Quốc tế), Trần Văn Hoàng (HC Đồng Toán APMO), Bùi Việt Hà (HC Đồng Toán Quốc tế), Bùi Lê Minh (Bằng khen Vật lí APMO), Trần Ngọc Tân (HC Bạc môn Hóa học Quốc tế), Nguyễn Trọng Toàn (HC Đồng Vật lí APMO).

Mỗi bước trưởng thành của nhà trường đều có sự đóng góp lớn lao của đội ngũ giáo viên tâm huyết, giỏi chuyên môn, hết mình vì học sinh thân yêu. Nhà nước đã trao tặng danh hiệu cao quý "Nhà giáo ưu tú" tới 9 nhà giáo: Thầy Lê Quang Cầu (1988), thầy Đặng Thuyên (1990), thầy Tô Mạnh Hoan (1992), thầy Nguyễn Văn Ngọc (1994), thầy Bùi Đình Khiết (1996), thầy Nguyễn Luận (1998), thày Trịnh Văn Thân (2000), thầy Nguyễn Mạnh Ngọc (2002), thầy Nguyễn Trọng Khánh (2008). Tổng liên đoàn lao động Việt Nam đã tặng "Bằng Lao động sáng tạo" tới 6 nhà giáo...

Thi đua lập thành tích chào mừng kỉ niệm 40 năm hệ chuyên và 20 năm thành lập trường chuyên (tổ chức vào các ngày thứ Bảy, Chủ Nhật - 15, 16.11.2008) năm học 2007-2008 thầy và trò nhà trường đã đạt được thành tích xuất sắc:

* Thi đỗ tốt nghiệp THPT: 100% trong đó 25,1% giỏi; 28,2% khá.
* Thi đỗ Đại học đạt 95% trong đó có 2 em: Nguyễn Thị Thu Hà, Bùi Thọ Sơn đạt tối đa 30 điểm.
* Thi học sinh giỏi tỉnh: đoạt 52 giải / 60 thí sinh (86,7%).
* Thi học sinh giỏi Quốc gia: đoạt 45 giải / 66 thí sinh (68,2%).
* Thi học sinh giỏi Quốc tế đoạt 1 HC Đồng Vật lí (Nguyễn Trọng Toàn)
* 3 HC Bạc Toán SMO (Lương Thu Hương, Đỗ Trung Kiên, Nguyễn Văn Năng).
* Học sinh Vũ Hoàng Kim Anh (lớp 11 Chuyên Ngữ Văn) đoạt giải Ba cấp tỉnh và được dự thi kể chuyện "Tấm gương đạo đức Hồ Chí Minh" khu vực II tại thành phố Nam Định tháng 9/2008.

Các thế hệ cán bộ, giáo viên, công nhân viên và học sinh THPT chuyên Thái Bình xin được bày tỏ lòng biết ơn Đảng bộ Hội đồng nhân dân tỉnh, UBND tỉnh, Nhân dân Thái Bình, Sở GD&ĐT, các ban ngành, đoàn thể và các quý vị đã dành cho nhà trường sự quan tâm, động viên và tình cảm tốt đẹp để nhà trường có được những kết quả như ngày nay và sẽ tốt hơn nữa.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT11M8
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2008
Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng