Tác giả: TS. Võ Văn Tuấn Dũng

GIÁO TRÌNH
QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN THỐNG KÊ

Tác giả: **TS. Võ Văn Tuấn Dũng**

GIÁO TRÌNH
QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN THỐNG KÊ

Chương 1:

MỞ ĐẦU

§1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

1.1. Vài nét khái quát

Bài toán tối ưu là bài toán tìm giá trị cực tiểu (hay cực đại) của một hàm số phụ thuộc nhiều biến số trên tập hợp các biến số thỏa mãn những điều kiện nhất định. Các mô hình và phương pháp tối ưu có nhiều ứng dụng rộng rãi và đa dạng trong thực tiễn, đặc biệt trong kinh tế và kỹ thuật.

Trong các bài toán tối ưu thì quan trọng nhất và đáng chú ý trước nhất là các bài toán tối ưu tuyến tính, hay còn gọi là *bài toán qui hoạch tuyến tính*, tức là bài toán tìm cực tiểu (cực đại) một hàm tuyến tính với các biến số thoả mãn các phương trình và/hoặc bất phương trình tuyến tính. Qui hoạch tuyến tính là bài toán tối ưu đơn giản nhất, được ứng dụng rộng rãi nhất trong nhiều lĩnh vực khác nhau của kinh tế, đời sống và quốc phòng. Đây cũng là lớp bài toán được nghiên cứu đầy đủ và hoàn chỉnh nhất, cả về mặt lý thuyết tổng quát và về mặt tính toán. Hơn nữa, qui hoạch tuyến tính còn được sử dụng trong nhiều bài toán tối ưu khác, với tư cách như một bài toán con (subroutine).

1.2. Bài toán tối ưu tổng quát

Bài toán tối ưu tổng quát có dạng như sau: Tìm tập hợp các biến số $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ thoả mãn

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min \text{ (hay max)} \tag{1.1}$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, & (1.2) \\ h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, p, & (1.3) \end{cases}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \subset R^n, \tag{1.4}$$

trong đó f, các g_i ($i = 1, \dots, m$), h_j ($j = 1, \dots, p$) là những hàm số cho trước, X là tập hợp cho trước nào đó. Chẳng hạn, $X = R^n_+ = \{ x \in R^n : x \geq 0 \}$ hoặc $X = Z^n$ (tập hợp các điểm nguyên trong R^n).

Bài toán (1.1) - (1.4) còn được gọi là bài toán *qui hoạch toán học*. Hàm f(x) được gọi là *hàm mục tiêu*, các hàm g_i ($i = 1, \dots, m$) và h_j ($j = 1, \dots, p$) được gọi là các *hàm ràng buộc*. Các hệ thức (1.2) - (1.4) được gọi là các *ràng buộc*, mỗi ràng buộc (1.2) là *ràng buộc bất đẳng thức*, mỗi ràng buộc (1.3) là *ràng buộc đẳng thức*. Tập hợp

$$D = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m; h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p\} \quad (1.5)$$

được gọi là *miền ràng buộc* hay *miền chấp nhận được*. Mỗi điểm $x \in D$ được gọi là một *phương án* hay *điểm chấp nhận được*. Một phương án $x^* \in D$ đạt cực tiểu (hay cực đại) của hàm mục tiêu, cụ thể là

$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D$ đối với bài toán min,

$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$ đối với bài toán max,

được gọi là một *phương án tối ưu* hay *lời giải* của bài toán. Khi đó $f(x^*)$ được gọi là *giá trị tối ưu* của bài toán.

Đối với mỗi bài toán tối ưu (1.1) - (1.4) có thể xẩy ra một trong ba khả năng loại trừ nhau sau đây:

a) miền ràng buộc của bài toán là rỗng: $D = \varnothing$;

b) cực tiểu (cực đại) của f trên D bằng $-\infty$ $(+\infty)$;

c) f đạt cực tiểu (cực đại) hữu hạn trên D.

1.3. Phân loại các bài toán tối ưu

Để tiện cho việc nghiên cứu (dựa vào tính chất của hàm mục tiêu, các hàm ràng buộc, các hệ số, các biến số ...), người ta thường chia ra một số lớp bài toán tối ưu sau đây:

- *Qui hoạch tuyến tính* (QHTT) nếu hàm mục tiêu f(x) và tất cả các hàm ràng buộc $g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, $h_j(x)$, $j = 1, \dots, p$, đều là tuyến tính và X là một tập hợp lồi đa diện. Một số trường hợp riêng quan trọng của bài toán qui hoạch tuyến tính là bài toán vận tải, bài toán sản xuất đồng bộ ...

- *Qui hoạch tham số* nếu các hệ số trong biểu thức của hàm mục tiêu hay trong các hàm ràng buộc phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Đơn giản nhất là bài toán qui hoạch tuyến tính tham số với các hệ số ở hàm mục tiêu hay ở vế phải các ràng buộc phụ thuộc vào một tham số.

- *Qui hoạch động* nếu đối tượng được xét là các quá trình có thể chia ra thành nhiều giai đoạn hoặc các quá trình phát triển theo thời gian. Trong nhiều trường hợp bài toán qui hoạch động lại có thể diễn đạt như một bài toán tĩnh và thường đưa được về dạng bài toán qui hoạch tuyến tính với kích thước lớn.

- *Qui hoạch phi tuyến* nếu hàm mục tiêu f(x) hay một trong các hàm ràng buộc $g_i(x)$, $h_j(x)$ không phải là tuyến tính hay nếu X không phải là một tập hợp lồi đa diện (Chẳng hạn khi X là tập hợp các điểm rời rạc hay X là một tập hợp không lồi).

- *Qui hoạch lồi* nếu hàm mục tiêu cần tìm cực tiểu là lồi (hay hàm cần tìm cực đại là lõm) và miền ràng buộc D là một tập lồi. Đây là lớp bài toán qui hoạch phi tuyến được nghiên cứu nhiều nhất. Một trường hợp riêng quan trọng của qui hoạch lồi là *qui hoạch toàn phương*, trong đó xét bài toán tìm cực tiểu của một hàm lồi bậc hai với các ràng buộc tuyến tính.

- *Qui hoạch lõm* nếu hàm mục tiêu cần tìm cực tiểu là lõm và miền ràng buộc D là một tập lồi. Đây là một bài toán điển hình trong lớp các bài toán qui hoạch phi tuyến không lồi đã được nghiên cứu khá kỹ. Đơn giản nhất là bài toán tìm cực tiểu của một hàm lõm với các ràng buộc tuyến tính.

- *Qui hoạch phân thức* nếu hàm mục tiêu là thương của hai hàm số cho trước và miền ràng buộc D là một tập hợp lồi. Trường hợp riêng đáng chú ý là *qui hoạch phân tuyến tính* khi hàm mục tiêu là thương của hai hàm tuyến tính afin.

- *Qui hoạch rời rạc* nếu miền ràng buộc D là một tập hợp rời rạc. Trường hợp khi các biến chỉ nhận giá trị nguyên, ta có một *qui hoạch nguyên.* Một số trường hợp riêng quan trọng của qui hoạch nguyên là *qui hoạch với biến Boole* khi các biến số chỉ nhận gía trị 0 hay 1, và *qui hoạch tuyến tính nguyên*, đó là bài toán qui hoạch tuyến tính với các biến số chỉ lấy giá trị nguyên.

- *Qui hoạch đa mục tiêu* nếu trên cùng một miền ràng buộc D ta xét đồng thời hai hay nhiều mục tiêu khác nhau (tuyến tính hoặc không tuyến tính).
- Ngoài ra còn có *qui hoạch ngẫu nhiên* khi các tham số trong bài toán không có giá trị xác định mà được mô tả bởi các phân phối xác suất, *qui hoạch lồi đảo* khi miền ràng buộc là hiệu của hai tập hợp lồi, *qui hoạch d.c.* khi hàm mục tiêu hay hàm ràng buộc là hiệu của hai hàm lồi, *qui hoạch Lipschitz* với các hàm trong bài toán Lipschitz ...

1.4. Nội dung nghiên cứu

Khi nghiên cứu các bài toán tối ưu người ta có thể chia ra ba hướng sau đây:

a) Các vấn đề công nghệ hay thực tiễn: xây dựng các mô hình toán học, thu thập dữ liệu, giải thích và phân tích kết quả tính toán, v.v ...

b) Các vấn đề toán học: nghiên cứu các phương pháp toán học để giải các lớp bài toán tối ưu nhất định.

c) Các vấn đề tính toán: nghiên cứu sơ đồ tính toán cho các phương pháp toán học đã đề xuất, xây dựng và hoàn thiện các chương trình máy tính tương ứng, v.v ...

Dĩ nhiên ba hướng này không hoàn toàn tách biệt nhau. Chẳng hạn, các mô hình toán học cho các vấn đề thực tiễn cần được xây dựng sao cho phù hợp nhất với các phương pháp tính toán hiện có, đôi khi phải tuyến tính hoá hàm mục tiêu hay các hàm ràng buộc để có thể áp dụng được các phương pháp của qui hoạch tuyến tính. Việc nghiên cứu các sơ đồ tính toán theo các phương pháp toán học đã có và thực tiễn tính toán thường giúp hoàn thiện bản thân phương pháp toán học. Một số vấn đề như tích luỹ sai số làm tròn, tốc độ hội tụ, hiệu quả của một thuật toán đơn giản nhất là nghiên cứu nhờ thực nghiệm.

Trong các phần tiếp theo của giáo trình sẽ tập trung chủ yếu vào các khía cạnh toán học và tính toán của lớp bài toán qui hoạch tuyến tính: nội dung bài toán và ý nghĩa thực tiễn, các tính chất cơ bản, các thuật toán giải chính, lý thuyết đối ngẫu và một số bài toán qui hoạch tuyến tính đặc biệt (bài toán với biến bị chặn trên, bài toán vận tải). Cuối cùng nêu danh mục các tài liệu tham khảo chính và trong phần phụ lục nêu hai chương trình máy tính viết trên ngôn ngữ PASCAL giải bài toán qui hoạch tuyến tính tổng quát và bài toán vận tải dạng bảng.

§2. CƠ SỞ GIẢI TÍCH LỒI

2.1. Không gian tuyến tính n chiều R^n

Một bộ n số thực được xếp theo một thứ tự xác định $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là một *véctơ n chiều*. Các số x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gọi là *thành phần* của véctơ x. Ví dụ: $x = (1, -2, 0, 3)$ là véctơ 4 chiều.

Xét hai véctơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ và một số thực α.

- Hai vectơ x, y gọi là *bằng nhau*, ta viết $x = y$, nếu $x_i = y_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.
- Phép toán *cộng* các véctơ x, y và *nhân* véctơ x với số α được định nghĩa như sau:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

- Tập hợp tất cả các véctơ n chiều, với phép toán cộng các véctơ và nhân véctơ với một số thực xác định như trên, gọi là *không gian tuyến tính n chiều R^n*. Các véctơ n chiều cũng gọi là các *điểm* của R^n.
- Một véctơ x có dạng $x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k$ ($\alpha_i \in R$) gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của các véctơ $x^1, x^2, \dots, x^k$.

Hơn nữa, nếu $\alpha_i \geq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$ thì x gọi là một *tổ hợp lồi* của các véctơ $x^1, x^2, \dots, x^k$.

- Hệ vectơ $\{x^1, \dots, x^n\}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu hệ thức

$$\alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_n x^n = 0$$

chỉ xảy ra khi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

- Hệ vectơ $\{x^1, \dots, x^n\}$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu nó không độc lập tuyến tính.

Nếu hệ vectơ $\{x^1, \dots, x^n\}$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính, ta cũng nói các vectơ $x^1, \dots, x^n$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính.

Trong R^n số véctơ độc lập tuyến tính tối đa là n. Mỗi hệ gồm n véctơ độc lập tuyến tính của R^n gọi là một *sơ sở* của nó. Giả sử $\{a^1, a^2, \dots, a^n\}$ là một sơ sở của R^n thì bất kỳ véctơ $x \in R^n$ đều là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $a^1, a^2, \dots, a^n$. Nếu $m < n$ thì R^m gọi là *không gian con* của R^n.

2.2. Tôpô trong R^n

Độ dài hay *chuẩn* của một véctơ $x \in R^n$ là số thực không âm

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Khoảng cách giữa hai điểm x, y là số $\|x - y\|$. Một dãy $\{x^k\} \subset R^n$ gọi là *hội tụ* tới x^0 (khi $k \to \infty$): $\lim_{k\to\infty} x^k = x^0$, nếu khoảng cách từ x^k tới x^0 dần tới 0, nghĩa là $\|x^k - x^0\| \to 0$.

Hình cầu tâm $a \in R^n$ bán kính r là tập hợp các điểm $x \in R^n$ cách a không quá r. Ta ký hiệu nó là $S = \{x : \|x - a\| \le r\}$. Hình cầu này tạo nên một *r-lân cận* của điểm a.

Một điểm $x \in C \subset R^n$ gọi là *điểm trong* của C nếu có một r-lân cận nào đó của x nằm trọn trong C. Nếu trong lân cận bất kỳ của điểm x đều có các điểm thuộc C và các điểm không thuộc C thì x gọi là *điểm biên* của C. Tập hợp tất cả các điểm biên của C gọi là *biên* của C.

Một tập hợp $C \subset R^n$ gọi là *giới nội* nếu nó chứa trong một hình cầu tâm O nào đó, tức là tồn tại số r đủ lớn để cho $\|x\| \le r, \forall x \in C$.

Một tập hợp $C \subset R^n$ gọi là *mở* nếu với mọi $x \in C$ đều tồn tại một hình cầu tâm x nằm trọn trong C. Một tập hợp $F \subset R^n$ gọi là *đóng* nếu với mọi dãy hội tụ $\{x^k\} \subset F$ ta đều có $\lim_{k\to\infty} x^k \in F$. Tập hợp F là đóng khi và chỉ khi tập hợp $C = R^n \setminus F$ là mở hay khi và chỉ khi F chứa mọi điểm biên của nó.

Cho trước một tập hợp tuỳ ý $C \subset R^n$, bao giờ cũng tồn tại một tập hợp đóng nhỏ nhất chứa C (giao của tất cả các tập hợp đóng chứa C), đó là tập hợp các điểm x sao cho $x = \lim_{k\to\infty} x^k$ với $\{x^k\} \subset C$. Tập hợp này gọi là *bao đóng* của C và được ký hiệu là $\overline{C}$ hay *cl* C.

Một tập hợp C gọi là *compac* nếu mọi dãy vô hạn $\{x^k\} \subset C$ đều chứa một dãy con $\{x^{k_\nu}\}$ hội tụ tới một phần tử của C. Tập hợp $C \subset R^n$ là compac khi và chỉ khi C đóng và giới nội (Định lý Bolzano-Weierstrass).

Ta gọi *tích vô hướng* của hai véctơ x, y $\in R^n$, ký hiệu $<x,y>$, là số thực

$$<x,y> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Nếu $<x,y> = 0$ thì ta nói hai véctơ x, y là *trực giao nhau*.

Các tính chất của tích vô hướng:

a) $<x,y> = <y,x>$ (giao hoán).

b) $<x^1 + x^2,y> = <x^1,y> + <x^2,y>$ (phân phối đối với phép cộng).

c) $<\lambda x,y> = <x,\lambda y> = \lambda<x,y>$.

d) $<x,x> \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = O. Dễ thấy rằng $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$.

2.3. Đường thẳng, đoạn thẳng và siêu phẳng

1. Đường thẳng, đoạn thẳng:

Cho hai điểm a, b $\in R^n$. Ta gọi *đường thẳng* đi qua a, b là tập hợp điểm có dạng

$$\{x \in R^n : x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in R\}.$$

Nếu buộc $0 \leq \lambda \leq 1$ thì ta có *đoạn thẳng* [a, b].

Trong không gian hai chiều, một phương trình bậc nhất $ax + by = c$ xác định một đường thẳng, một bất phương trình bậc nhất $ax + by \leq c$ xác định một nửa mặt phẳng. Trong không gian ba chiều, một phương trình bậc nhất $ax + by + cz = d$ xác định một mặt phẳng, một bất phương trình bậc nhất $ax + by + cz \leq d$ xác định một nửa không gian.

2. Siêu phẳng:

Cho $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in R^n$ $(c \neq 0)$ và $\alpha \in R$. Tập hợp tất cả các điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ thoả mãn phương trình bậc nhất (tuyến tính)

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \alpha$$

được gọi là một *siêu phẳng* trong R^n, ký hiệu là $H(c,\alpha)$.

Siêu phẳng $H(c,\alpha)$ là giao của hai tập hợp $\{x \in R^n: <a,x> \leq \alpha\}$ và $\{x \in R^n: <a,x> \geq \alpha\}$, ký hiệu lần lượt là $H^-(c,\alpha)$, $H^+(c,\alpha)$.

$H^-(c,\alpha)$ và $H^+(c,\alpha)$ gọi là các *nửa không gian đóng*. Các tập hợp $\{x \in R^n : \langle a,x\rangle < \alpha\}$ và $\{x \in R^n : \langle a,x\rangle > \alpha\}$ gọi là các *nửa không gian mở*.

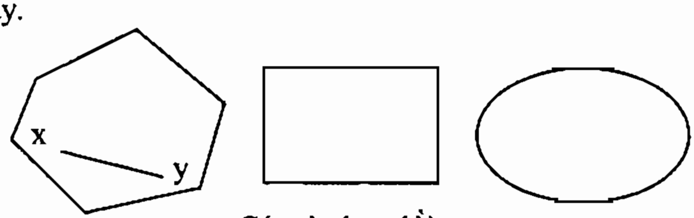
Ví dụ : Đường thẳng $x_1 + 2x_2 = 2$ là một siêu phẳng trong R^2.

2.4. Tập hợp lồi

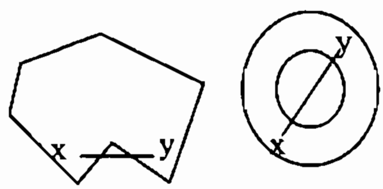
Một tập hợp $C \subset R^n$ gọi là *tập lồi* nếu

$$\forall x, y \in C, 0 \le \lambda \le 1 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C,$$

tức là nếu C chứa hai điểm nào đó thì nó chứa cả đoạn thẳng nối hai điểm ấy.



Các tập hợp lồi



Các tập hợp không lồi

Các ví dụ về tập hợp lồi : toàn không gian R^n, siêu phẳng, nửa không gian đóng (mở), hình cầu trong R^n; hình tam giác, hình vuông, hình tròn, hình elip, mặt phẳng, nửa mặt phẳng trong R^2... Tuy nhiên, đường tròn hay hình vành khăn không phải là tập hợp lồi.

Một số tính chất cơ bản của các tập hợp lồi

a) Giao của một số bất kỳ tập hợp lồi là lồi.

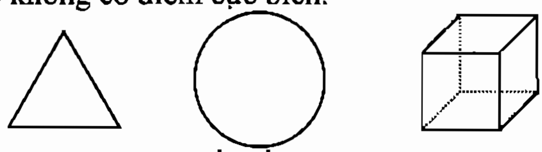
b) Nếu hai tập hợp C, D là tập lồi thì C + D, αC ($\alpha \in R$) cũng lồi.

c) Tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của một số hữu hạn điểm trong R^n là một tập hợp lồi.

- **Điểm cực biên** : Một điểm x của tập hợp lồi C gọi là một *điểm cực biên* của C nếu x không thể biểu diễn dưới dạng một tổ hợp lồi của hai điểm khác biệt bất kỳ nào khác của C, tức là không tồn tại y, z $\in$ C, $y \neq z$, sao cho $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ với $0 < \lambda < 1$.

Tập hợp các điểm cực biên của C ký hiệu là $\ddot{C}$. Số điểm cực biên của một tập hợp lồi có thể là hữu hạn hay vô hạn.

Các ví dụ về điểm cực biên : trong R^2 mỗi đỉnh của một tam giác là một điểm cực biên của nó, mỗi điểm trên đường tròn là một điểm cực biên của hình tròn bao gồm cả vòng tròn chu vi. Nếu tập hợp lồi không chứa biên thì nó không có điểm cực biên.



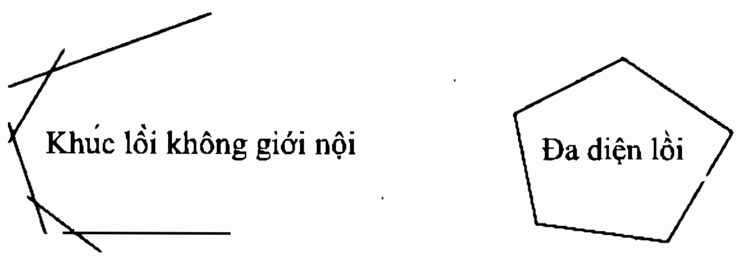
Ví dụ về điểm cực biên

Cho trước một tập hợp tuỳ ý $C \subset R^n$, bao giờ cũng tồn tại một tập hợp lồi nhỏ nhất bao hàm C (giao của tất cả các tập hợp lồi bao hàm C), đó là tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của các điểm thuộc C. Tập hợp này gọi là *bao lồi* của C và được ký hiệu là *conv*C. Ví dụ: khi C là 8 đỉnh của một hình lập phương thì convC là toàn bộ hình lập phương đó.

2.5. Tập hợp lồi đa diện hay khúc lồi

Một tập hợp lồi mà nó là giao của một số hữu hạn nửa không gian đóng gọi là một *tập hợp lồi đa diện* hay một *khúc lồi*. Nói cụ thể hơn, đó là tập hợp các điểm $x \in R^n$ nghiệm đúng $Ax \leq b$, trong đó A là một ma trận mxn và $b \in R^m$. Một khúc lồi có thể không giới nội.

Một khúc lồi giới nội còn được gọi là một *đa diện lồi*. Các đa giác lồi theo nghĩa thông thường trong R^2 là những ví dụ hiển nhiên về đa diện lồi.



Ta có định lý biểu diễn sau đây đối với các tập hợp lồi đa diện (khúc lồi).

Định lý 2.1.

a) Bất kỳ điểm x thuộc đa diện lồi C đều có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi của một số hữu hạn điểm cực biên của C, tức là :

$$x \in C \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u^i \text{ với } \lambda_i \geq 0,\ \Sigma\lambda_i = 1,\ u^i\ (i = 1, \dots, p) \text{ là các}$$

đỉnh của C.

b) Với khúc lồi C không giới nội, mỗi $x \in C$ có thể biểu diễn dưới dạng một tổ hợp lồi của các đỉnh của C cộng với một tổ hợp tuyến tính không âm của các phương cực biên của C, nghĩa là $x \in C \Rightarrow$ $x = \sum_{i \in I} \lambda_i u^i + \sum_{j \in J} \mu_j v^j$, với $\lambda_i \geq 0$, $\Sigma\lambda_i = 1$, $\mu_j \geq 0$, I và J hữu hạn, u^i là các đỉnh của C ($i \in I$), v^j ($j \in J$) là phương của các cạnh vô hạn của C.

2.6. Hàm tuyến tính và hàm tuyến tính afin

Một *hàm tuyến tính* (hay *dạng tuyến tính*) trong R^n là một hàm số có dạng

$$f(x) = \langle c,x\rangle = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

trong đó $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n$ cho trước tuỳ ý. Dĩ nhiên, với mọi $x, y \in R^n$ và mọi số thực λ ta có

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Một *hàm tuyến tính afin* là một hàm số có dạng

$$f(x) = \langle c,x\rangle + \alpha,$$

trong đó $c \in R^n$, $\alpha \in R$ cho trước tuỳ ý. Nếu f(x) là hàm tuyến tính afin thì với mỗi $x, y \in R^n$ và mọi số thực λ, μ sao cho $\lambda + \mu = 1$ ta có

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

2.7. Hàm lồi và hàm lõm

Một hàm f(x) xác định trên một tập hợp lồi $C \subset R^n$ gọi là *lồi* trên C nếu với mọi $x, y \in C$ và mọi số thực $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Nếu bất đẳng thức trên thoả mãn với dấu < với mọi $x \neq y$ và $0 < \lambda < 1$ thì hàm f(x) gọi là *lồi chặt*.

Hàm f(x) gọi là *lõm* (*lõm chặt*) nếu -f(x) là lồi (*lồi chặt*).

Rõ ràng hàm tuyến tính afin $f(x) = <c,x> + \alpha$ là vừa lồi vừa lõm, vì với mọi x, $y \in R^n$ và mọi số thực λ ta có $f[\lambda x + (1 - \lambda)y] = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Tuy nhiên, hàm đó không phải là hàm lồi chặt hay lõm chặt.

Cho hàm số thực f(x) xác định trên một tập khác rỗng $C \subset R^n$. Ta nói điểm $x^0 \in C$ là điểm *cực tiểu tuyệt đối* (hay *cực tiểu toàn cục*) của f trên C nếu $f(x^0) \le f(x)$, với mọi $x \in C$. Điểm $x^0 \in C$ gọi là điểm *cực tiểu địa phương* của f nếu tồn tại số $\varepsilon > 0$ sao cho $f(x^0) \le f(x)$, với mọi $x \in C$ thỏa mãn $\|x - x^0\| < \varepsilon$.

Các khái niệm điểm *cực đại địa phương* và *cực đại tuyệt đối* (hay *cực đại toàn cục*) được định nghĩa tương tự. Định lý sau đây nói lên một tính chất rất đáng chú ý là : bất kỳ điểm cực tiểu địa phương nào của một hàm lồi trên một tập hợp lồi cũng là điểm cực tiểu tuyệt đối.

Định lý 2.2.

Cho f(x) là hàm lồi xác định trên tập hợp lồi C. Nếu $x^0 \in C$ là một điểm cực tiểu địa phương của f thì x^0 cũng là điểm cực tiểu toàn cục của f trên C.

Hệ quả.

Bất cứ điểm cực đại địa phương nào của một hàm lõm trên một tập hợp lồi cũng là điểm cực đại tuyệt đối.

BÀI TẬP

1. Cho C, D là hai tập hợp lồi trong R^n. Chứng minh rằng $C \cap D$, $C + D$ và $C - D$ là các tập hợp lồi.

2. Chứng minh rằng các nửa không gian của R^n xác định bởi siêu phẳng

$$H(c,\alpha) = \{ x \in R^n : <c,x> = \alpha \}$$

   với $c \in R^n$, $c \neq 0$ và $\alpha \in R$ là những tập hợp lồi.

3. Chứng minh rằng các tập hợp sau đây là các tập hợp lồi:

   a) $A = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \ge ax_1 + b,\ a,b \in R \}$

   b) $B = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \ge ax_1^2\ (a > 0) \}$

c) $C = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \le \pi^2 \}$

4. Chứng tỏ $K = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \le ax_1^2 \ (a > 0) \}$ không phải là tập hợp lồi.

5. Biểu diễn trọng tâm của tam giác ABC dưới dạng tổ hợp lồi của các đỉnh A, B, C.

Xét trường hợp các đỉnh có toạ độ : $A = (-1, -1)$, $B = (1, 3)$, $C = (5,1)$.

6. Vẽ miền thoả mãn các bất phương trình tuyến tính (bậc nhất) sau:

$-2x_1 + 5x_2 \le 10, \quad -x_1 + 3x_2 \le 3, \quad 2x_1 + x_2 \le 6, \quad x_1 + 2x_2 \ge 2.$

Chỉ rõ các điểm cực biên (đỉnh) của miền này.

7. Chứng minh rằng một tổ hợp tuyến tính không âm bất kỳ của các hàm lồi là một hàm lồi.

8. Hãy xác định xem các hàm sau đây có phải là hàm lồi hay không?

a) $|x|$ với mọi $x \in R$.

b) e^x với mọi $x \in R$.

c) $(x - 1)^3$ với $1 \le x < +\infty$.

d) $(x - 1)^3$ với $0 \le x < +\infty$.

e) $\log x$ với $0 < x < +\infty$.

f) e^{-x^2} với $0 \le x < +\infty$.

9. Cho $f(x)$ là một hàm lồi trên một tập hợp lồi C khác rỗng trong R^n. Chứng minh rằng tập hợp các điểm $(x,t) \in R^n x R$ sao cho $x \in C$ và $t \ge f(x)$ là một tập hợp lồi.

10. Cho A là ma trân mxn, $b \in R^m$. Chứng minh rằng tập hợp sau đây là lồi:

$$D = \{x \in R^n : Ax = b, x \ge O\}$$

(D là tập hợp các phương án của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc).

11. Cho $g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, là các hàm lồi, $h_j(x)$, $j = 1, \dots, p$, là các hàm tuyến tính afin, $x \in R^n$. Chứng minh rằng tập hợp sau đây là lồi:

$$M = \{x \in R^n : g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m; h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p; x \ge O\}$$

(M là tập hợp các phương án của bài toán qui hoạch lồi dạng chuẩn).

Chương 2:

QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Qui hoạch tuyến tính (Linear Programming) khai sinh lịch sử phát triển của mình từ năm 1939, khi nhà toán học Nga nổi tiếng, Viện sĩ L.V. Kantorovich đề xuất những thuật toán đầu tiên để giải nó trong một loạt công trình nghiên cứu về kế hoạch hoá sản xuất, và nó thực sự phát triển mạnh mẽ kể từ khi nhà toán học Mỹ G.B. Dantzig đề xuất phương pháp đơn hình (simplex method) giải qui hoạch tuyến tính vào năm 1947 để giải các bài toán xuất phát từ việc lập kế hoạch cho không quân Mỹ. Vậy có thể nói là, cũng như phép tính vi tích phân hình thành vào thế kỷ 17 từ việc giải các bài toán cơ học, qui hoạch tuyến tính hình thành vào giữa thế kỷ 20 do nhu cầu của các bài toán quản lý. Qui hoạch tuyến tính ngay từ khi ra đời đã chiếm một vị trí hết sức quan trọng trong tối ưu hóa. Trước hết mô hình tuyến tính là mô hình rất phổ biến trong thực tế, vì tính đơn giản dễ hiểu của nó. Mặt khác, về mặt lý thuyết, có thể xấp xỉ với độ chính xác cao các bài toán tối ưu phi tuyến bởi dãy các bài toán qui hoạch tuyến tính.

§1. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Một xí nghiệp dự định sản xuất hai loại sản phẩm là S_1 và S_2. Để làm được một đơn vị S_1 cần 4 đơn vị vật liệu V_1, 5 đơn vị vật liệu V_2. Để làm được 1 đơn vị S_2 cần 3 đơn vị V_1, 2 đơn vị V_2. Giá bán một đơn vị S_1 là 50 ngàn đồng, một đơn vị S_2 là 30 ngàn đồng.

Hỏi xí nghiệp nên sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm S_1 và S_2 để tổng thu nhập là lớn nhất, biết rằng xí nghiệp chỉ có 1.200 đơn vị vật liệu V_1 và 1.080 đơn vị vật liệu V_2.

Chi phí vật liệu \ Sản phẩm / Vật liệu	S_1	S_2
V_1 : 1.200	4	3
V_2 : 1.080	5	2
Giá bán 1 đơn vị SP	50.000 đ	30.000 đ

Mô hình toán học. Gọi x_1, x_2 lần lượt là số đơn vị sản phẩm S_1, S_2 cần sản xuất. Số đơn vị vật liệu V_1 cần có là $4x_1 + 3x_2$. Do xí nghiệp chỉ có 1.200 đơn vị vật liệu V_1 nên x_1 và x_2 phải thỏa mãn

$$4x_1 + 3x_2 \leq 1.200.$$

Tương tự, số đơn vị vật liệu V_2 cần có là $5x_1 + 2x_2$, vì thế x_1 và x_2 phải thoả mãn

$$5x_1 + 2x_2 \leq 1.080.$$

Tất nhiên ta còn phải có $x_1 \geq 0$ và $x_2 \geq 0$.

Tổng thu nhập của xí nghiệp (cần làm cực đại) sẽ là $f = 50x_1 + 30x_2$ (ngàn đồng).

Vậy bài toán đặt ra được phát biểu thành: Tìm các biến số x_1 và x_2 sao cho

$$f = 50x_1 + 30x_2 \to \max,$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 1.200, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 1.080, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

1.2. Bài toán xác định khẩu phần thức ăn

Một xí nghiệp chăn nuôi cần mua hai loại thức ăn tổng hợp T_1, T_2 cho gia súc với tỉ lệ chế biến: 1 kg T_1 chứa 3 đơn vị dinh dưỡng D_1 (chất béo), 1 đơn vị dinh dưỡng D_2 (Hyđrat cacbon) và 1 đơn vị dinh dưỡng D_3 (Protein); 1 kg T_2 chứa 1 đơn vị D_1, 1 đơn vị D_2 và 2 đơn vị

D_3. Mỗi bữa ăn cho gia súc cần tối thiểu 60 đơn vị D_1, 40 đơn vị D_2 và 60 đơn vị D_3. Hỏi xí nghiệp cần mua bao nhiêu kg T_1, T_2 cho mỗi bữa ăn, sao cho vừa đảm bảo tốt dinh dưỡng cho bữa ăn của gia súc, vừa để tổng số tiền chi mua thức ăn là nhỏ nhất. Cho biết 1 kg T_1 giá 20 ngàn đồng, 1 kg T_2 giá 15 ngàn đồng.

Các chất	Mức tối thiểu	Các loại thức ăn	
		T_1	T_2
D_1	60	3	1
D_2	40	1	1
D_3	60	1	2
Giá 1 kg thức ăn		20 ngàn	15 ngàn

Mô hình toán học. Gọi x_1, x_2 lần lượt là số kg thức ăn T_1, T_2 cần mua cho mỗi bữa ăn. Số đơn vị chất D_1 có trong mỗi bữa ăn là $3x_1 + x_2$, vì thế x_1 và x_2 cần thỏa mãn

$$3x_1 + x_2 \geq 60,$$

Tương tự, để đáp ứng nhu cầu về chất D_2 và D_3 cho mỗi bữa ăn, x_1 và x_2 cần thỏa mãn

$$x_1 + x_2 \geq 40,$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 60,$$

Tất nhiên, ta cũng đòi hỏi

$$x_1 \geq 0 \text{ và } x_2 \geq 0.$$

Số tiền chi mua thức ăn (cần làm cực tiểu) bằng $f = 20x_1 + 15x_2$ (ngàn đồng).

Vậy bài toán nêu trên được phát biểu thành: Tìm các biến số x_1 và x_2 sao cho

$$f = 20x_1 + 15x_2 \rightarrow \min,$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 60, \\ x_1 + x_2 \geq 40, \\ x_1 + 2x_2 \geq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

1.3. Bài toán vận tải

Cần vận chuyển xi măng từ 3 kho K_1, K_2, K_3 tới 4 công trường xây dựng T_1, T_2, T_3, T_4. Cho biết lượng xi măng có ở mỗi kho, lượng xi măng cần ở mỗi công trường và giá cước vận chuyển (ngàn đồng) một tấn xi măng từ mỗi kho tới mỗi công trường như sau :

Kho xi măng	Công trường xây dựng			
	T_1 : 130 tấn	T_2 : 160 tấn	T_3 : 120 tấn	T_4 : 140 tấn
K_1 : 170 tấn	20	18	22	25
K_2 : 200 tấn	15	25	30	15
K_3 : 180 tấn	45	30	40	35

Vấn đề là tìm kế hoạch vận chuyển xi măng từ các kho tới các công trường sao cho mọi kho phát hết lượng xi măng có, mọi công trường nhận đủ lượng xi măng cần và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất?

Vấn đề nêu trên có thể mô hình hoá như sau: Đặt x_{ij} là lượng xi măng cần vận chuyển từ kho K_i ($i = 1, 2, 3$) tới công trường T_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Các biến số cần thoả mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 170 \text{ (kho } K_1 \text{ giao hết lượng xi măng có)}, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \text{ (kho } K_2 \text{ giao hết lượng xi măng có)}, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180 \text{ (kho } K_3 \text{ giao hết lượng xi măng có)}, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 130 \text{ (công trường } T_1 \text{ nhận đủ số xi măng cần)}, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 160 \text{ (công trường } T_2 \text{ nhận đủ số xi măng cần)}, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120 \text{ (công trường } T_3 \text{ nhận đủ số xi măng cần)}, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 140 \text{ (công trường } T_4 \text{ nhận đủ số xi măng cần)}, \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4 \text{ (lượng hàng vận chuyển không âm)}, \end{cases} \qquad (1.3)$$

Tổng chi phí vận chuyển (cần làm cực tiểu) bằng: $f = 20x_{11} + 18x_{12} + 22x_{13} + 25x_{14} + 15x_{21} + 25x_{22} + 30x_{23} + 15x_{24} + 45x_{31} + 30x_{32} + 40x_{33} + 35x_{34}$.

Vậy bài toán trở thành : Tìm các biến số x_{ij} thỏa mãn các điều kiện (1.3) sao cho hàm f đạt cực tiểu ($f \to \min$).

1.4. Bài toán pha cắt vật liệu

Trong thực tế ta thường phải cắt những vật liệu dài (thanh thép, ống nước, băng giấy...) có độ dài cho trước thành những đoạn ngắn hơn với số lượng nhất định để sử dụng. Nên cắt như rhế nào cho tốn ít vật liệu nhất ?

Ví dụ: một phân xưởng cốt thép có những thanh thép nguyên dài 3,8 mét, cần cắt thành ba loại đoạn ngắn hơn T_1, T_2, T_3 với độ dài tương ứng 1,8 mét, 1,4 mét và 1,0 mét. Có tất cả 5 mẫu cắt khác nhau (xem bảng dưới đây).

Loại đoạn cần	Mẫu cắt					Số đoạn cần có
	I	II	III	IV	V	
T_1 dài $1{,}8^m$	2	0	1	0	1	400
T_2 dài $1{,}4^m$	0	2	0	0	1	400
T_3 dài $1{,}0^m$	0	1	2	3	0	1.300
Phần thừa	$0{,}2^m$	0	0	$0{,}8^m$	$0{,}6^m$	

Hỏi cần phải cắt theo mỗi mẫu bao nhiêu thanh thép nguyên để vừa có đủ số lượng các đoạn T_1, T_2, T_3 mà phân xưởng cần, vừa sao cho tổng phần thép thừa là nhỏ nhất ?

Mô hình toán học. Gọi x_j ($j = 1, \dots, 5$) là số thanh thép nguyên cần cắt theo mẫu j. Số đoạn T_1 thu được là $2x_1 + x_3 + x_5$. Phân xưởng cần có 400 đoạn T_1. Vì thế, các biến số phải thỏa mãn

$$2x_1 + x_3 + x_5 = 400.$$

Tương tự, để thu được số đoạn T_2 và T_3 phân xưởng cần, các biến số phải thoả mãn

$$2x_2 + x_5 = 400,$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1.300.$$

Tổng số thép thừa bằng $f = 0,2\,x_1 + 0,8\,x_4 + 0,6\,x_5$ (mét).

Bài toán trên sẽ được phát biểu thành: Tìm các biến số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sao cho

$$f = 0,2x_1 + 0,8x_4 + 0,6x_5 \to \min,$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_5 = 400, \\ 2x_2 + x_5 = 400, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1.300. \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases} \qquad (1.4)$$

§2. CÁC DẠNG BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Qui hoạch tuyến tính là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) của một hàm tuyến tính f(x) trên một khúc lồi $D \subset R^n$ được xác định bởi một hệ các phương trình và/hoặc bất phương trình tuyến tính cho trước.

2.1. Bài toán tổng quát

Bài toán này có dạng: Tìm các biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \text{ (hay max)} \qquad (2.1)$$

thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m_1, & (2.2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2, & (2.3) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = m_1 + m_2 + 1, \ldots, m, & (2.4) \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n_1,\ x_j \leq 0,\ j = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2 \leq n, & (2.5) \end{cases}$$

Trong bài toán trên, f gọi là *hàm mục tiêu*, mỗi hệ thức ở (2.2) - (2.5) gọi là một *ràng buộc*. Mỗi ràng buộc (2.2) - (2.4) gọi là một *ràng buộc chính* (dạng *đẳng thức* hay *bất đẳng thức*), mỗi ràng buộc $x_j \geq 0$ hay $x_j \leq 0$ gọi là một *ràng buộc về dấu*.

Điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ thỏa mãn mọi ràng buộc gọi là một *điểm chấp nhận được*, hay một *phương án*. Tập hợp tất cả các phương án, ký hiệu là D, gọi là *miền ràng buộc* hay *miền chấp nhận được*. Một phương án thoả mãn (2.1) gọi là một *phương án tối ưu* hay một *lời giải* của bài toán đã cho.

Bài toán có ít nhất một phương án tối ưu gọi là bài toán *có lời giải*. Bài toán không có phương án (miền ràng buộc rỗng $D = \varnothing$) hoặc có phương án nhưng không có phương án tối ưu, do hàm mục tiêu giảm vô hạn (bài toán tìm min) hoặc tăng vô hạn (bài toán tìm max), gọi là bài toán *không có lời giải*.

Chú ý:

- m_1 là số ràng buộc $\leq$, m_2 là số ràng buộc $\geq$, m là tổng số các ràng buộc chính, n là số biến số của bài toán, n_1 là số ràng buộc $x_j \geq 0$, n_2 là số ràng buộc $x_j \leq 0$ (có thể $n_1 = 0$, $n_2 = 0$). Nếu không có các ràng buộc $\leq$ thì $m_1 = 0$, không có ràng buộc $\geq$ thì $m_2 = 0$, không có ràng buộc = thì $m = m_1 + m_2$.
- Với bài toán bất kỳ, bao giờ ta cũng có thể viết các ràng buộc chính ở dạng sao cho mọi $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ (nếu có $b_i < 0$ ta nhân cả hai vế của ràng buộc i với -1, rồi đổi chiều dấu bất đẳng thức và sắp xếp lại thứ tự các ràng buộc chính nếu cần).

2.2. Dạng chính tắc và dạng chuẩn tắc

Người ta thường xét bài toán qui hoạch tuyến tính ở hai dạng sau đây:

- Dạng *chính tắc*: $$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min \text{ (hay max)}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

(ràng buộc chính chỉ là các đẳng thức và mọi biến đều không âm). Ví dụ: mô hình bài toán vận tải hay mô hình bài toán pha cắt vật liệu nêu ở §1 có dạng chính tắc.

- Dạng *chuẩn* hay *chuẩn tắc*:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{min (hay max)}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq (\leq)\, b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

(ràng buộc chính chỉ gồm các bất đẳng thức ≥ đối với bài toán min hoặc ≤ đối với bài toán max, và mọi biến đều không âm). Ví dụ: mô hình bài toán xác định khẩu phần thức ăn hay mô hình bài toán lập kế hoạch sản xuất đã xét ở §1 có dạng chuẩn.

Để viết bài toán gọn hơn, ta dùng các ký hiệu véctơ và ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(A là ma trận mxn gồm các hệ số ở vế trái ràng buộc chính, A_j là véctơ cột thứ j của ma trận A tương ứng với biến x_j, b là véctơ các hệ số ở vế phải ràng buộc chính, c là véctơ các hệ số ở hàm mục tiêu, x là véctơ các ẩn số, O là véctơ không. Tất cả các véctơ này đều là các véctơ cột).

Với các ký hiệu trên, bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc có dạng :

$\min\{f(x) = \langle c,x \rangle : Ax = b,\ x \geq 0\}$ hay $\max\{f(x) = \langle c,x \rangle : Ax = b,\ x \geq 0\}$

($\langle c,x \rangle$ là tích vô hướng của hai véctơ c và x).

Bài toán qui hoạch tuyến tính chuẩn tắc có dạng:

$\min\{f(x) = \langle c,x \rangle : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ hay $\max\{f(x) = \langle c,x \rangle : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$.

2.3. Chuyển đổi dạng bài toán qui hoạch tuyến tính

Bằng cách thực hiện các phép biến đổi nêu dưới đây, ta có thể chuyển bài toán qui hoạch tuyến tính từ dạng này sang dạng khác. Vì vậy, ta chỉ cần chọn một dạng thuận tiện để nghiên cứu là đủ (thường là dạng chính tắc) mà không làm mất tính tổng quát của các kết quả nghiên cứu.

a) Mỗi ràng buộc đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ có thể thay bằng 2 ràng buộc bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \text{ và } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i.$$

b) Mỗi ràng buộc bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,$$

có thể đưa về ràng buộc đẳng thức nhờ thêm vào một biến mới, gọi là *biến phụ*, $x_{n+i} \geq 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i.$$

c) Một ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ có thể viết lại thành $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq -b_i$ hoặc ngược lại.

d) Nếu biến x_j không bị ràng buộc về dấu thì ta có thể thay nó bởi hiệu của hai biến không âm bằng cách đặt $x_j = x_j^+ - x_j^-$ với

$x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$, Còn nếu $x_j \leq 0$ thì bằng cách đặt biến mới $y_j = -x_j$ ta sẽ có $y_j \geq 0$.

e) Bài toán tìm cực đại: $g \to \max$ có thể đưa về bài toán tìm cực tiểu: $f = -g \to \min$ với cùng các ràng buộc và ta có hệ thức

$$\max\{g(x) : x \in D\} = -\min\{f(x) : x \in D\}.$$

Ví dụ. Đưa bài toán qui hoạch tuyến tính sau về dạng chính tắc và dạng chuẩn tắc

$$f(x) = 2x_1 - x_2 \to \min,$$

với điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- Dạng chính tắc: bằng cách thay $x_1 = x_4 - x_5$ với $x_4, x_5 \geq 0$ và thêm 2 biến phụ $x_6, x_7 \geq 0$, ta đi đến bài toán:

$$f(x) = -x_2 + 2x_4 - 2x_5 \to \min,$$

với điều kiện:

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 2, \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 - x_7 = 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, j = 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

- Dạng chuẩn tắc: bằng cách thay $x_1 = x_4 - x_5$ với $x_4, x_5 \geq 0$, đổi dấu hai vế bất đẳng thức đầu và thay bất đẳng thức cuối bằng hai bất đẳng thức $\geq$, ta đi đến bài toán:

$$f(x) = -x_2 + 2x_4 - 2x_5 \to \min,$$

với điều kiện:

$\min\{f(x) = \langle c,x\rangle : Ax = b,\ x \geq 0\}$ hay $\max\{f(x) = \langle c,x\rangle : Ax = b,\ x \geq 0\}$

($\langle c,x\rangle$ là tích vô hướng của hai véctơ c và x).

Bài toán qui hoạch tuyến tính chuẩn tắc có dạng:

$\min\{f(x) = \langle c,x\rangle : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ hay $\max\{f(x) = \langle c,x\rangle : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$.

2.3. Chuyển đổi dạng bài toán qui hoạch tuyến tính

Bằng cách thực hiện các phép biến đổi nêu dưới đây, ta có thể chuyển bài toán qui hoạch tuyến tính từ dạng này sang dạng khác. Vì vậy, ta chỉ cần chọn một dạng thuận tiện để nghiên cứu là đủ (thường là dạng chính tắc) mà không làm mất tính tổng quát của các kết quả nghiên cứu.

a) Mỗi ràng buộc đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ có thể thay bằng 2 ràng buộc bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \text{ và } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i.$$

b) Mỗi ràng buộc bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,$$

có thể đưa về ràng buộc đẳng thức nhờ thêm vào một biến mới, gọi là *biến phụ*, $x_{n+i} \geq 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i.$$

c) Một ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ có thể viết lại thành $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq -b_i$ hoặc ngược lại.

d) Nếu biến x_j không bị ràng buộc về dấu thì ta có thể thay nó bởi hiệu của hai biến không âm bằng cách đặt $x_j = x_j^+ - x_j^-$ với

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq -2, \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \geq 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \geq 4, \\ -x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq -4, \\ x_j \geq 0,\ j = 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

2.4. Phương pháp hình học giải qui hoạch tuyến tính hai biến

Khi bài toán chỉ có hai biến, ta có thể giải qui hoạch tuyến tính bằng hình học dễ dàng. Chú ý rằng trường hợp riêng này cũng cho phép ta tưởng tượng hình học về bài toán tổng quát.

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính với hai biến số

$\max\{f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 : x = (x_1,x_2) \in D\}$ với

$D = \{x \in R^2 : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ x_j \geq 0, j = 1, 2\}$.

Như đã biết, mỗi bất phương trình tuyến tính $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ và mỗi ràng buộc về dấu $x_j \geq 0$ xác định trong R^2 một nửa mặt phẳng.

Như vậy, miền ràng buộc D là giao của m + 2 nửa mặt phẳng và sẽ là một khúc lồi trong R^2. Phương trình $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ khi α thay đổi sẽ xác định trên mặt phẳng các đường thẳng song song với nhau mà ta sẽ gọi là các *đường mức* (với *giá trị mức* α).

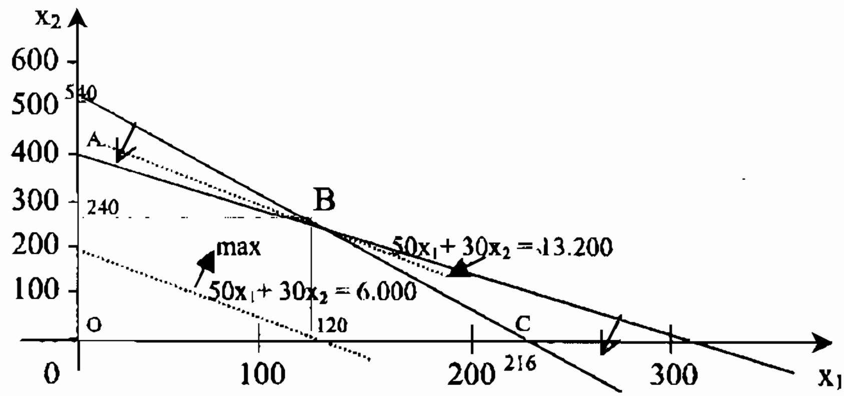
Theo ngôn ngữ hình học, bài toán trở thành: trong số các đường mức cắt D hãy tìm đường mức với giá trị mức α lớn nhất.

Nếu dịch chuyển song song các đường mức theo hướng véctơ pháp tuyến $c = (c_1,c_2)$ thì giá trị mức sẽ tăng, còn nếu dịch chuyển theo hướng ngược lại thì giá trị mức sẽ giảm. Vì vậy, để giải bài toán đặt ra ta tiến hành như sau.

Bắt đầu từ một đường mức cắt D ta dịch chuyển song song nó theo hướng véctơ pháp tuyến $c = (c_1,c_2)$ cho đến khi việc dịch chuyển tiếp theo làm cho đường mức không cắt D nữa thì dừng. Điểm của D (có thể nhiều) nằm trên đường mức cuối cùng này sẽ là một lời giải cần tìm của bài toán, còn giá trị mức đó chính là giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu f.

Ví dụ. Giải bài toán lập kế hoạch sản xuất nêu ở §1:

$\max\{50x_1 + 30x_2 : 4x_1 + 3x_2 \leq 1200,\ 5x_1 + 2x_2 \leq 1080,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$.



Miền ràng buộc của bài toán này là tứ giác lồi OABC. Mỗi đỉnh của nó (O, A, B, C) là giao điểm của 2 đường thẳng tương ứng với 2 ràng buộc khác nhau. Xét đường mức $50x_1 + 30x_2 = 6.000$. Đường thẳng này đi qua hai điểm (120, 0) và (0, 200). Lời giải của bài toán đạt tại đỉnh B = (120, 240) và $f_{max} = 13.200$. (Phương án tối ưu: sản xuất 120 sản phẩm S_1, 240 sản phẩm S_2. Tổng thu nhập lớn nhất xí nghiệp thu được: 13,2 triệu đồng).

Bằng cách giải tương tự, có thể thấy lời giải của bài toán xác định khẩu phần ăn ở §1 là $x^* = (10, 30)$ và $f_{min} = 650$. Vậy, phương án tối ưu là: mỗi bữa ăn mua 10 kg thức ăn T_1 và 30 kg thức ăn T_2. Chi phí nhỏ nhất cho mỗi bữa ăn phải trả là 650 ngàn đồng.

Qua phương pháp giải trình bày trên ta thấy:

a) Nếu miền ràng buộc D của bài toán qui hoạch tuyến tính khác rỗng và giới nội thì bài toán chắc chắn sẽ có lời giải.

b) Nếu bài toán qui hoạch tuyến tính có lời giải thì có ít nhất một đỉnh của miền ràng buộc D là lời giải. Sở dĩ nói ít nhất là vì có trường hợp đường mức ở vị trí giới hạn trùng với một cạnh (hữu hạn hay vô hạn) của D, khi đó mỗi điểm trên cạnh này đều là một lời giải.

Vì thế, để giải bài toán qui hoạch tuyến tính ta chỉ cần xét các đỉnh của D (số đỉnh này là hữu hạn). Phương pháp đơn hình nêu ở chương 3 sử dụng tính chất này.

Với mỗi bài toán qui hoạch tuyến tính chỉ xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- Bài toán không có phương án (miền ràng buộc D rỗng).

- Bài toán có phương án, nhưng không có phương án tối ưu.
- Bài toán có phương án tối ưu (lời giải).

§3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

3.1. Tính chất chung

Sau đây là một số tính chất đáng chú ý về bài toán qui hoạch tuyến tính.

Định lý 3.1.

Tập hợp D các phương án của bài toán qui hoạch tuyến tính (dạng bất kỳ) là một khúc lồi.

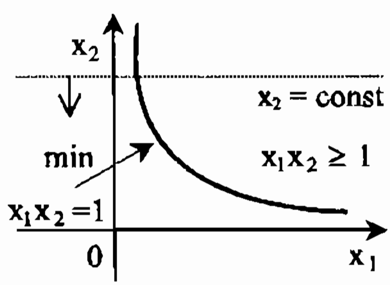
Định lý 3.2

(về sự tồn tại lời giải của bài toán qui hoạch tuyến tính). Nếu một qui hoạch tuyến tính có ít nhất một phương án và hàm mục tiêu bị chặn dưới trong miền ràng buộc (đối với bài toán min) thì bài toán chắc chắn có phương án tối ưu.

Nhận xét.

Kết luận của định lý nói chung không còn đúng đối với các bài toán không phải là một qui hoạch tuyến tính (hàm mục tiêu không phải là tuyến tính hoặc miền ràng buộc không phải là một khúc lồi). Để rõ hơn, ta xét ví dụ cụ thể sau:

$$f = x_2 \to \min, \text{ với điều kiện } x_1x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0.$$



Miền chấp nhận được $D = \{x \in R^2: x_1x_2 \geq 1, x_1 \geq 0\}$ là một tập hợp lồi khác rỗng và hàm mục tiêu bị chặn dưới trong miền này: $x_2 \geq 0$ với mọi $x = (x_1, x_2) \in D$. Điểm $(1/\varepsilon, \varepsilon) \in D$ với mọi $\varepsilon > 0$, nhưng không có $(x_1, 0) \in D$. Vì thế cận dưới của x_2 không đạt được tại bất cứ điểm nào thuộc D.

Cũng có thể lấy ví dụ với hàm mục tiêu phi tuyến và miền ràng buộc là một khúc lồi cho thấy định lý trên không đúng.

Định lý 3.3.

Nếu x^0 là một phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính (dạng bất kỳ) và nếu x^1, x^2 ($x^1 \neq x^2$) là hai phương án thỏa mãn $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, $0 < \lambda < 1$, thì x^1, x^2 cũng là các phương án tối ưu.

3.2. Phương án cực biên

Một phương án $x \in D$ mà đồng thời là đỉnh của D gọi là một *phương án cực biên,* nghĩa là x không thể biểu diễn dưới dạng một tổ hợp lồi của bất cứ hai phương án bất kỳ nào khác của D.

☞ Sau đây ta sẽ tập trung nghiên cứu bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc với giả thiết $m \leq n$ và ma trận A có hạng = m.

Định lý 3.4. (Tính chất đặc trưng của các phương án cực biên)

Để một phương án $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc là phương án cực biên, thì cần và đủ là hệ các véctơ cột A_j của ma trận A ứng với các thành phần $x_j^0 > 0$ là độc lập tuyến tính.

Có thể dùng định lý trên để kiểm tra xem một véctơ cho trước có phải là phương án cực biên của bài toán hay không.

Ví dụ 1. Cho bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc với các điều kiện sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \end{cases} \tag{3.1}$$

Hãy cho biết các véctơ dưới đây

$x^1 = (2, 2, 0)$, $x^2 = (0, 0, 4)$, $x^3 = (1, 1, 2)$

có phải là phương án cực biên của bài toán hay không ?

Giải. Kiểm tra trực tiếp ta thấy x^1, x^2, x^3 thỏa mãn điều kiện (3.1) nên chúng là các phương án của bài toán. Mặt khác, vì

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nên ta thấy hệ $\{A_1, A_2\}$; hệ gồm một véctơ $\{A_3 \neq O\}$ là độc lập tuyến tính. Do đó x^1, x^2 là các phương án cực biên của bài toán. Còn hệ $\{A_1, A_2, A_3\}$ phụ thuộc tuyến tính (do $A_1 + A_2 - 2A_3 = O$) nên x^3 không phải là phương án cực biên của bài toán.

Ví dụ 2. Cho bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc với các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + \quad x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0 \ \ (j=1,2,3,4). \end{cases} \tag{3.2}$$

Xét xem véctơ $x = (1, 0, 1, 3)$ có phải là phương án cực biên của bài toán hay không?

Giải. Kiểm tra trực tiếp ta thấy véctơ x thỏa mãn (3.2). Vậy x là một phương án của bài toán. Mặt khác, hệ 3 véctơ cột

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

độc lập tuyến tính (vì định thức $|A_1, A_3, A_4| = 5 \neq 0$) nên x là một phương án cực biên.

Từ định lý nêu trên ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây:

Hệ quả 3.1.

Số phương án cực biên của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn.

Hệ quả 3.2.

Số thành phần dương trong mỗi phương án cực biên của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc tối đa bằng m (m là số hàng của ma trận A).

Người ta phân ra hai loại phương án cực biên: nếu phương án cực biên có số thành phần dương đúng bằng m, nó được gọi là phương án cực biên *không suy biến*. Trái lại, nó được gọi là phương án cực biên *suy biến*.

Một ứng dụng cụ thể nữa của các kết quả trên là tìm các phương án cực biên của một bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc có kích thước không lớn. Nếu biết thêm miền ràng buộc của bài toán là giới nội thì có thể tìm lời giải của bài toán bằng cách tính và so sánh giá trị hàm mục tiêu tại các phương án cực biên tìm được.

Ví dụ 3. Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán qui hoạch tuyến tính với các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Giải. Bài toán này có m = 2 ràng buộc chính và n = 3 biến. Một phương án cực biên có nhiều nhất m = 2 thành phần dương, tức là có ít nhất n - m = 1 thành phần bằng 0. Vì thế, lần lượt cho $x_1, x_2, x_3 = 0$ ta được:

+ Với $x_1 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_2 = 9/2$; $x_3 = 5$

+ Với $x_2 = 0$, hệ phương trình trên vô nghiệm.

+ Với $x_3 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_1 = 5$; $x_2 = 9/2$.

Như vậy, ta nhận được hai phương án của bài toán: $(0, \frac{9}{2}, 5)$ và $(5, \frac{9}{2}, 0)$. Kiểm tra trực tiếp cho thấy hệ $\{A_2 = (-2, 2)^T, A_3 = (3, -1)^T\}$ và $\{A_1 = (3, -1)^T, A_2 = (-2, 2)^T\}$ là độc lập tuyến tính, nên cả hai phương án trên đều là các phương án cực biên không suy biến (số thành phần dương bằng m = 2).

Ví dụ 4. Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán qui hoạch tuyến tính với các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ \quad 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Giải. Bài toán này có $m = 2$ ràng buộc chính và $n = 4$ biến. Một phương án cực biên có nhiều nhất $m = 2$ thành phần dương, tức là có ít nhất $n - m = 2$ thành phần bằng 0. Vì thế, lần lượt cho mỗi cặp biến $x_1, x_2, x_3, x_4 = 0$ ta được:

- Với $x_1 = x_2 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_3 = 8$; $x_4 = 2$.
- Với $x_1 = x_3 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_2 = 16/3$; $x_4 = 14/3$.
- Với $x_1 = x_4 = 0$, hệ phương trình trên vô nghiêm (không có nghiệm không âm).
- Với $x_2 = x_3 = 0$, hệ phương trình trên vô nghiêm (không có nghiệm không âm).
- Với $x_2 = x_4 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_1 = 4$; $x_3 = 6$.
- Với $x_3 = x_4 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_1 = 7$; $x_2 = 3$.

Như vậy ta nhận được các phương án sau đây:

$$x^1 = (0, 0, 8, 2);\quad x^2 = (0, \tfrac{16}{3}, 0, \tfrac{14}{3});\quad x^3 = (4, 0, 6, 0);\quad x^4 = (7, 3, 0, 0).$$

Kiểm tra trực tiếp cho thấy cả 4 phương án trên đều là các phương án cực biên không suy biến (số thành phần dương bằng $m = 2$).

Định lý 3.5.

Nếu bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc có ít nhất một phương án thì nó cũng có phương án cực biên (miền ràng buộc D có đỉnh).

Định lý 3.6.

Nếu bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì cũng có phương án cực biên tối ưu.

Các định lý trên cho phép tìm phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc trong số các phương án cực biên của bài toán (số này là hữu hạn).

3.3. Cơ sở của phương án cực biên

Từ mục (3.2), suy ra mỗi phương án cực biên x có tương ứng m vectơ độc lập tuyến tính $\{A_j : j \in J\}$. Hệ $\{A_j : j \in J\}$ gọi là *cơ sở của phương án cực biên* x. Các vectơ A_j, $j \in J$ gọi là các *vectơ cơ sở*, ẩn x_j

tương ứng gọi là *ẩn cơ sở*. Các vectơ và ẩn còn lại gọi là *vectơ và ẩn phi cơ sở*.

Đối với phương án cực biên không suy biến thì chỉ có một cách chọn cơ sở duy nhất là hệ các vectơ A_j ứng với các thành phần dương.

Ví dụ 5. Cho bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc với các điều kiện sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 & = 0 \\ x_j \geq 0, j & = 1,2,3. \end{cases}$$

- $x^1 = (1/2, 1/2, 0)$ là phương án cực biên không suy biến và cơ sở là $\{A_1, A_2\}$.
- $x^2 = (0,0,1)$ là phương án cực biên suy biến và cơ sở là $\{A_1, A_3\}$, $\{A_2, A_3\}$.

Bài toán quy hoach tuyến tính được gọi là *không suy biến* nếu tất cả phương án cực biên của nó đều không suy biến (tức là đều có số thành phần dương bằng m).

BÀI TẬP

1. Một xí nghiệp đóng tàu đánh cá cần đóng hai loại tàu 100 mã lực và 50 mã lực. Trong xí nghiệp có ba loại thợ chính quyết định sản lượng kế hoạch. Thợ rèn có 2000 công, thợ sắt có 3000 công và thợ mộc có 1500 công. Định mức lao động cho mỗi loại tàu được cho trong bảng sau:

Định mức lao động / Loại tàu / Loại thợ	100 mã lực	50 mã lực
Thợ sắt (3000)	150	70
Thợ rèn (2000)	120	50
Thợ mộc (1500)	80	40

(công/sản phẩm)

Hỏi xí nghiệp nên đóng tàu mỗi loại bao nhiêu để đạt tổng số mã lực cao nhất ?

2. Một xí nghiệp có thể sử dụng tối đa 510 giờ máy cán, 360 giờ máy tiện và 150 giờ máy mài để chế tạo ba loại sản phẩm A, B và C. Để chế tạo một đơn vị sản phẩm A cần 9 giờ máy cán, 5 giờ máy tiện, 3 giờ máy mài; một đơn vị sản phẩm B cần 3 giờ máy cán, 4 giờ máy tiện; một đơn vị sản phẩm C cần 5 giờ máy cán, 3 giờ máy tiện, 2 giờ máy mài. Mỗi sản phẩm A trị giá 48 ngàn đồng, mỗi sản phẩm B trị giá 16 ngàn đồng và mỗi sản phẩm C trị giá 27 ngàn đồng.

Vấn đề đặt ra là xí nghiệp cần chế tạo bao nhiêu đơn vị sản phẩm mỗi loại để tổng số giá trị sản phẩm xí nghiệp thu được là lớn nhất, với điều kiện không dùng quá số giờ hiện có của mỗi loại máy?

3. Một xí nghiệp điện cơ sản xuất quạt điện các loại. Cần cắt từ một loại tấm tôn các cánh quạt điện theo ba kiểu A, B, C. Có 6 mẫu cắt khác nhau theo bảng sau:

Kiểu cánh quạt	Mẫu cắt					
	1	2	3	4	5	6
A	2	1	1	0	0	0
B	0	1	0	2	1	0
C	0	0	1	0	2	3

Chỉ tiêu sản lượng sản phẩm của xí nghiệp phải hoàn thành ít nhất 4000 cánh quạt kiểu A, 5000 cánh quạt kiểu B và 3000 cánh quạt kiểu C.

Hỏi xí nghiệp có phương án cắt như thế nào để có phế liệu ít nhất ?

4. Cần vận chuyển một loại hàng hoá từ ba xí nghiệp A_1, A_2, A_3 đến các cửa hàng B_1, B_2, B_3, B_4. Lượng hàng có ở mỗi xí nghiệp, lượng hàng cần ở mỗi cửa hàng và chi phí vận chuyển 1 đơn vị hàng từ mỗi xí nghiệp đến mỗi cửa hàng được cho ở bảng sau:

Cửa hàng / Chi phí Vận chuyển / Xí nghiệp	B_1	B_2	B_3	B_4	Khả năng Hàng hoá
A_1	3	4	0	1	40
A_2	1	2	5	6	30
A_3	1	5	8	2	30
Nhu cầu hàng hoá	20	25	30	15	

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho tổng chi phí vận chuyển là bé nhất ?

5. Một trại chăn nuôi gia súc cần mua ba loại thức ăn tổng hợp T_1, T_2, T_3. Theo công thức chế biến thì :

- trong 1 kg T1 có 3 đơn vị dinh dưỡng D1, 1 đơn vị dinh dưỡng D2,
- trong 1 kg T2 có 4 đơn vị dinh dưỡng D1, 2 đơn vị dinh dưỡng D2,
- trong 1 kg T3 có 2 đơn vị dinh dưỡng D1, 3 đơn vị dinh dưỡng D2.

Cho biết giá mua 1 kg T_1 là 15 ngàn đồng, 1 kg T_2 là 12 ngàn đồng, 1 kg T_3 là 10 ngàn đồng và mỗi bữa ăn cho gia súc cần tối thiểu 160 đơn vị dinh dưỡng D_1, 140 đơn vị dinh dưỡng D_2. Vấn đề là tìm số lượng kg T_1, T_2, T_3 cần mua để chi phí mua thức ăn cho một bữa ăn của gia súc là nhỏ nhất?

a) Lập bài toán qui hoạch tuyến tính cho vấn đề nêu trên.

b) Đưa bài toán qui hoạch tuyến tính thu được về dạng chính tắc

6. Đưa về dạng chuẩn tắc và dạng chính tắc các bài toán qui hoạch tuyến tính sau:

a) $f(x) = 2x_1 - x_2 \to \max$,

điều kiện

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_2 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

b) $f(x) = 3x_1 + x_2 \to \min$,

điều kiện

$$\begin{cases} x_1 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. Viết các bài toán qui hoạch tuyến tính sau ở dạng chính tắc:

a) $f(x) = 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min$,

điều kiện

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ge 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

b) $f(x) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$,

điều kiện

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 10, \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 \ge 25, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_2 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

8. Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán qui hoạch tuyến tính với điều kiện ràng buộc sau đây:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$

9. Dùng phương pháp hình học giải các qui hoạch tuyến tính 2 biến sau:

a) $f = -x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 \ \leq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \ \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

b) $f = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ \leq 8, \\ x_1 - 2x_2 \ \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \ \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

c) $f = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Chương 3 :

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

Phương pháp đơn hình giải qui hoạch tuyến tính do G.B. Dantzig đề xuất năm 1947 cho đến hiện nay vẫn là phương pháp được sử dụng nhiều nhất trong việc giải các bài toán qui hoạch tuyến tính. Đối với các bài toán cỡ lớn (có thể đến hàng nghìn biến và hàng trăm ràng buộc) phải dùng đến máy tính, phương pháp đơn hình cũng đã được kiểm nghiệm qua mấy chục năm áp dụng là rất hiệu quả, với thời gian tính toán khá ngắn.

§1. CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

1.1. Đường lối chung

Phương pháp đơn hình giải qui hoạch tuyến tính dựa trên hai tính chất quan trọng sau đây của bài toán qui hoạch tuyến tính:

a) *Nếu qui hoạch tuyến tính chính tắc có phương án tối ưu thì cũng có phương án cực biên tối ưu*, nghĩa là có ít nhất một đỉnh của miền ràng buộc là lời giải của bài toán (Định lý 3.6 , §3, Chương 2).

b) *Mỗi điểm cực tiểu địa phương của hàm tuyến tính* (cũng là hàm lồi) *trên một tập hợp lồi là một điểm cực tiểu tuyệt đối* (Định lý 2.2, §2, Chương 1).

Tính chất a) cho phép tìm phương án tối ưu trong số các phương án cực biên của bài toán (số này là hữu hạn). Tính chất b) cho phép khi kiểm tra tối ưu đối với một phương án cực biên (đỉnh) chỉ cần so sánh nó với các đỉnh lân cận (đỉnh kề) là đủ.

Vì thế, phương pháp đơn hình bắt đầu từ một phương án cực biên nào đó (tuỳ ý) của bài toán mà nó là một đỉnh của miền ràng buộc. Tiếp đó kiểm tra xem phương án hiện có đã phải là phương án tối ưu hay chưa, bằng cách so sánh giá trị hàm mục tiêu tại đỉnh đó với giá trị hàm mục tiêu tại các đỉnh kề với nó. Nếu đúng thì dừng quá trình tính toán. Trái lại, phương pháp sẽ tìm một phương án cực biên mới tốt hơn (với giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn) mà nó là một đỉnh kề với đỉnh trước đó. Quá trình này tiến hành cho tới khi tìm được phương án tối ưu hoặc phát hiện bài toán đã cho không có lời giải.

Như vậy, phương pháp đơn hình tiến hành khảo sát các đỉnh của miền ràng buộc để tìm ra đỉnh tối ưu. Mặc dầu số đỉnh của bài toán nói chung rất lớn, nhưng trên thực tế phương pháp này chỉ đòi hỏi kiểm tra một phần tương đối nhỏ các đỉnh. Chính điều đó thể hiện hiệu quả thực tế của phương pháp đơn hình.

1.2. Cơ sở của phương pháp

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc sau :

$$\begin{cases} f = \langle c, x \rangle \to \min, & (1.1) \\ Ax = b, & (1.2) \\ x \geq 0, & (1.3) \end{cases}$$

trong đó A là một ma trận mxn, $b \in R^m$, c và $x \in R^n$. Cũng như trước đây, ta giả thiết:

- Số ràng buộc chính không lớn hơn số biến của bài toán: $m \leq n$,
- Ma trận A có hạng bằng m.

Bây giờ ta giả thiết thêm rằng:

- Bài toán (1.1) - (1.3) không suy biến.
- Biết trước một phương án cực biên x^0 của bài toán.

Ở cuối chương sẽ nêu cách giải quyết những bài toán không có các giả thiết này.

Không giảm tổng quát, giả sử phương án cực biên x^0 có dạng:

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0) \text{ với } x_j^0 > 0 \ (j = 1, 2, \dots, m).$$

Ký hiệu

$$J_0 = \{j : x_j^0 > 0\} = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Hệ véctơ $\{A_j, j \in J_0\}$ độc lập tuyến tính (Định lý 3.4, §3, Chương 2) và là *cơ sở* của x^0. Để cho tiện, đôi khi ta cũng gọi J_0 (với các tính chất như trên) là cơ sở của x^0. Các véctơ A_j và các biến x_j với $j \in J_0$ là các *véctơ cơ sở* và *biến cơ sở* tương ứng với x^0. Còn các véctơ A_j và các biến x_j với $j \notin J_0$ là các *véctơ* và *biến phi cơ sở* tương ứng với x^0.

Ký hiệu B là ma trận lập nên bởi các véctơ cơ sở đang xét: $B = [A_1, A_2, ..., A_m]$. Khi đó, B có hạng bằng m và có tồn tại ma trận nghịch đảo B^{-1}.

Mỗi véctơ cột A_k ($k = 1, 2, ..., n$) của A được biểu diễn qua các véctơ cơ sở A_j, $j \in J_0$:

$$A_k = \sum_{j \in J_0} z_{jk} A_j = z_{1k}A_1 + z_{2k}A_2 + ... + z_{mk}A_m,\ k = 1, 2, ..., n, \quad (1.4)$$

Ký hiệu các véctơ cột $Z_k = (z_{1k}, z_{2k}, ..., z_{mk})^T$, $X_B^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)^T$ và véctơ hàng $C_B = (c_1, c_2, ..., c_m)$. Hệ thức (1.4) được viết lại thành $A_k = BZ_k$. Từ đó $Z_k = B^{-1}A_k$. Mặt khác, ta có

$$Ax^0 = BX_B^0 = b \ \Rightarrow\ X_B^0 = B^{-1}b.$$

Giá trị hàm mục tiêu tại x^0 bằng

$$f_0 = \langle c, x^0 \rangle = C_B X_B^0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + ... + c_mx_m^0. \quad (1.5)$$

Với mỗi $k = 1, 2, ..., n$ tính số sau đây, gọi là *ước lượng* của biến x_k

$$\Delta_k = C_BZ_k - c_k = C_BB^{-1}A_k - c_k = c_1z_{1k} + c_2z_{2k} + ... + c_mz_{mk} - c_k,$$
$$k = 1, 2, ..., n. \quad (1.6)$$

Định lý 1.1.

(Dấu hiệu tối ưu). *Nếu đối với phương án cực biên x^0 ta có các hệ thức*

$$\Delta_k \leq 0,\ \forall k = 1, 2, ..., n, \quad (1.7)$$

thì x^0 là một phương án tối ưu.

Chú ý:

- Nếu A_k là một véctơ cơ sở ($k \in J_0$) thì trong các hệ số khai triển của A_k theo các vectơ cơ sở ở (1.4) chỉ có duy nhất một hệ số $z_{kk} = 1$, tất cả các hệ số khác đều bằng 0, nghĩa là $Z_k = e^k$ (véctơ đơn vị thứ k trong R^m). Do đó:

$$\Delta_k = C_B Z_k - c_k = c_k - c_k = 0,\ \forall k \in J_0,$$

Vì thế trên thực tế, để kiểm tra tối ưu đối với phương án cực biên hiện có ta chỉ cần kiểm tra điều kiện

$$\Delta_k \le 0,\ \forall k \notin J_0.$$

- Nếu bài toán không suy biến thì (4.7) cũng là điều kiện cần của tối ưu.

Định lý 1.2.

(Dấu hiệu bài toán không có lời giải). *Nếu đối với phương án cực biên x^0 tồn tại $k \notin J_0$ sao cho $\Delta_k > 0$ và $z_{jk} \le 0,\ \forall j \in J_0$ thì bài toán đã cho không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu giảm vô hạn trong miền ràng buộc của bài toán.*

Định lý 1.3.

(Cải tiến phương án hiện có). *Nếu tồn tại chỉ số $s \notin J_0$ sao cho $\Delta_s > 0$ và $z_{js} > 0$ với ít nhất một $j \in J_0$ thì tìm được phương án cực biên mới x^1 tốt hơn phương án x^0: $f(x^1) < f(x^0)$.*

Với các giả thiết của định lý 1.3, véctơ x^1 được xác định như sau:

$$x_j^1 = \begin{cases} x_j^0 - \theta_0 z_{js}, j \in J_0, \\ 0, j \notin J_0, j \neq s, \\ \theta_0, \quad j = s. \end{cases} \tag{1.8}$$

trong đó số θ_0 được xác định từ hệ thức

$$\theta_0 = \min_{j \in J_0} \{\frac{x_j^0}{z_{js}} : z_{js} > 0\} = \frac{x_r^0}{z_{rs}} > 0.$$

Phương án x^1 tương ứng với cơ sở $J_1 = (J \setminus \{r\}) \cup \{s\}$ và $f_1 = f(x^1) = f_0 - \theta_0.\Delta_s < f_0$. Như vậy, biến x_s (biến phi cơ sở đối với x^0) trở thành biến cơ sở đối với x^1 và biến x_r (biến cơ sở đối với x^0) trở thành biến phi cơ sở đối với x^1.

§2. THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

Dựa trên cơ sở lý thuyết vừa trình bày, ta có thuật toán sau đây để giải bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc (1.1) - (1.3), gọi là *thuật toán đơn hình.*

Bước 1. Tìm một phương án cực biên ban đầu x^0 với cơ sở J_0 và $\{A_j, j \in J_0\}$ gồm m véctơ cột độc lập tuyến tính của A (Cách tìm cụ thể sẽ nêu ở §3).

Với mỗi $k \notin J_0$ xác định các hệ số khai triển z_{jk} theo (1.4), tính giá trị mục tiêu theo (1.5) và tính ước lượng của biến x_k theo (1.6).

Để cho gọn, ta đặt $z_{i0} = x_i^0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, $z_{m+1,0} = f_0$ và $z_{m+1,k} = \Delta_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Bước 2. (Kiểm tra tối ưu). Nếu $z_{m+1,k} \leq 0$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, thì phương án x^0 hiện có là phương án tối ưu (Định lý 1.1): dừng thuật toán. Trái lại, chuyển sang Bước 3.

Bước 3. (Kiểm tra bài toán không có lời giải). Nếu có $1 \leq k \leq n$ sao cho $z_{m+1,k} > 0$ và $z_{ik} \leq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$, thì bài toán đã cho không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu không bị chặn dưới trong miền ràng buộc của bài toán (Định lý 1.2): dừng thuật toán. Trái lại, chuyển sang Bước 4.

Bước 4. (Tìm véctơ đưa vào cơ sở). Với mỗi k $(1 \leq k \leq n)$ mà $z_{m+1,k} > 0$ đều tồn tại i $(i = 1, 2, \dots, m)$ với $z_{ik} > 0$. Chọn s thoả mãn

$$z_{m+1,s} = \max\{z_{m+1,k}: z_{m+1,k} > 0, k \geq 1\}.$$

Đưa véctơ A_s vào cơ sở.

Bước 5. (Tìm véctơ đưa ra khỏi cơ sở). Tính giá trị θ_0 theo hệ thức

$$\theta_0 = \min\{\frac{z_{i0}}{z_{is}} : z_{is} > 0\} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} \qquad (2.1)$$

Giả sử tên của biến cơ sở thứ r là i_r. Đưa véctơ A_{i_r} ra khỏi cơ sở.

Bước 6. (Xây dựng phương án cực biên mới). Lập phương án mới x^1 theo (1.8) với cơ sở mới là $J_1 = (J \setminus \{i_r\}) \cup \{s\}$. Tính các hệ số z'_{ik} mới $(i = 1, 2, \dots, m + 1; k = 0, 1, \dots, n)$. Trở lại thực hiện Bước 2 và tiếp tục thuật toán cho tới khi nhận được phương án tối ưu (Bước 2) hoặc phát hiện bài toán không có phương án tối ưu (Bước 3) thì dừng.

Với giả thiết bài toán không suy biến thì thủ tục giải nêu trên phải dừng sau một số hữu hạn bước lặp, bởi vì mỗi lần thực hiện Bước 6 ta nhận được phương án cực biên mới tốt hơn phương án cực biên trước đó và số phương án cực biên của bài toán là hữu hạn.

Để tránh phải tính toán lại các hệ số z_{ik} mỗi khi thay đổi từ cơ sở cũ sang cơ sở mới (Bước 6), ta có thể sử dụng các công thức sau đây, gọi là *công thức đổi cơ sở*:

$$z'_{ik} = \begin{cases} z_{ik} - (z_{rk}/z_{rs})z_{is}, & i \neq r, \\ z_{rk}/z_{rs}, & i = r. \end{cases} \quad (i = 1, 2, ..., m, m+1;\ k = 0, 1, ..., n). \quad (2.2)$$

(Chỉ số cột s và chỉ số hàng r được xác định ở Bước 4 và 5 tương ứng).

Để thuận tiện cho việc tính toán bằng tay, thuật toán giải nêu trên được mô tả lại dưới dạng các bảng (mỗi bảng ứng với một phương án cực biên), gọi là *bảng đơn hình* và các qui tắc biến đổi từ bảng này sang bảng khác cho đến khi nhận được phương án tối ưu hoặc phát hiện bài toán không có lời giải.

Bảng đơn hình đầu tiên ứng với phương án cực biên ban đầu x^0 và cơ sở $\{A_1, ..., A_m\}$ có dạng như sau:

Biến Cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	...	x_k	...	x_n	θ
			c_1	...	c_k	...	c_n	
x_1 ... x_i ... x_m	c_1 ... c_i ... c_m	x_1^0 ... x_i^0 ... x_m^0			z_{1k} ... z_{ik} ... z_{mk}			
		$\langle c, x^0 \rangle$ ‖ $(z_{m+1,0})$			Δ_k ‖ $(z_{m+1,k})$			

Bảng gồm 4 + n cột: cột *Biến cơ sở* (ghi tên m biến cơ sở đối với phương án đang xét), cột *Hệ số* C_B (ghi hệ số mục tiêu của các biến cơ sở) và cột *Phương án* (ghi giá trị các biến cơ sở). Tiếp theo là n cột ứng với n biến của bài toán $x_1, x_2, \dots, x_n$, phía dưới tên biến ghi hệ số mục tiêu của nó. Trong cột x_k ghi các hệ số khai triển của véctơ A_k theo các véctơ cơ sở đang xét (véctơ Z_k). Cột cuối cùng để ghi các tỉ số để xác định θ_0. Ngoài dòng tiêu đề đã nêu, trong bảng có m + 1 dòng: m dòng đầu tương ứng với m ràng buộc chính trong bài toán. Dòng cuối cùng, gọi là *dòng mục tiêu*, lần lượt ghi giá trị hàm mục tiêu (phần tử $z_{m+1,0}$) và ghi các ước lượng của biến x_k, $k = 1, 2, \dots, n$ (các phần tử $z_{m+1,k}$, $k \geq 1$).

Để xây dựng các bảng đơn hình kế tiếp ta lần lượt thực hiện các việc a) - c) như sau:

a) **Tìm cột quay**. Nếu dòng mục tiêu không có phần tử dương ở các cột khác với cột phương án, nghĩa là $z_{m+1,k} = \Delta_k \leq 0$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, thì phương án hiện có là tối ưu. Trái lại, chọn cột x_s với $z_{m+1,s} = \max\limits_{1 \leq k \leq n} z_{m+1,k} > 0$ làm cột quay (Đưa biến x_s vào cơ sở mới).

b) **Tìm dòng quay**. Nếu cột quay không có phần tử dương ở các dòng khác với dòng mục tiêu thì hàm mục tiêu sẽ giảm vô hạn và bài toán không có phương án tối ưu.

Trái lại, chia các phần tử trong cột phương án cho các phần tử dương tương ứng trong cột quay. Dòng ứng với tỉ số nhỏ nhất được chọn làm dòng quay. Phần tử ở dòng quay, cột quay gọi là *phần tử quay*, phần tử này luôn dương và thường được khoanh tròn hoặc để trong ô được tô bóng mờ. Cụ thể, dòng quay là dòng r thoả mãn (2.1). Biến cơ sở ở dòng này bị loại khỏi cơ sở cũ, chẳng hạn đó là biến x_{i_r}.

c) Biến đổi bảng đơn hình.

- Đổi cột Biến cơ sở: biến cơ sở mới là x_s thay cho biến cơ sở cũ là x_{i_r} ở dòng r.
- Đổi cột Hệ số C_B tương ứng: hệ số mục tiêu c_s thay cho hệ số c_{i_r} ở dòng r.
- Xác lập các véctơ đơn vị: ghi số 1 vào ô có cùng tên biến trên dòng và cột của nó, ghi số 0 vào các ô còn lại của cột vừa ghi số 1 (Cột ứng với biến cơ sở là cột đơn vị).

- Biến đổi dòng quay (công thức (2.2) với i = r):

Dòng mới = dòng cũ / phần tử quay,

nghĩa là chia mỗi phần tử ở dòng quay cho phần tử quay ($z_{rs} > 0$). Kết quả nhận được gọi là *dòng chính* (số 1 xuất hiện ở vị trí của z_{rs} cũ).

- Biến đổi các dòng khác theo qui tắc *hình chữ nhật* (công thức (2.2) với $i \neq r$):

Dòng mới = dòng cũ tương ứng - phần tử của nó trên cột quay × dòng chính,

nghĩa là

	Cột ≠ cột quay	Cột quay
Dòng ≠ dòng quay :	**a**	**b**
	$a' = a - b\times\dfrac{c}{d} = a - b\times c'$	
Dòng quay :	**c**	**d** > 0 (phần tử quay)

Nếu trong bảng đơn hình mới vẫn còn $z_{m+1,k} = \Delta_k > 0$, ta lại tiếp tục biến đổi bảng cho đến khi nhận được bảng với mọi $z_{m+1,k} = \Delta_k \leq 0$ (tối ưu) hoặc phát hiện cột quay không chứa phần tử dương $z_{is} \leq 0$, $\forall$ i (bài toán không có phương án tối ưu). Sau một số hữu hạn lần biến đổi bảng ta phải dừng ở một trong hai tình huống trên.

Ví dụ 1. Giải bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc sau đây

$$f = x_1 - x_2 \quad - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \to \min,$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 + x_5 - x_6 = 2, \\ \quad x_2 \qquad + x_4 \qquad + x_6 = 12, \\ \qquad\quad x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \\ \qquad\quad x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Cho $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ ta được phương án cực biên ban đầu $x^0 = (2; 12; 9; 0; 0; 0)$ với trị mục tiêu $f_0 = -10$. Cơ sở của x^0 là $\{A_1, A_2, A_3\}$, tức là $J_0 = \{1, 2, 3\}$. Các biến cơ sở là x_1, x_2, x_3. Các biến phi cơ sở là x_4, x_5, x_6. Các véctơ cơ sở A_1, A_2, A_3 là các véctơ đơn vị, nên A_4 chính là véctơ các hệ số khai triển của nó theo các véctơ cơ sở A_1, A_2, A_3. Cũng vậy đối với A_5 và A_6.

Bảng đơn hình ban đầu có dạng như sau:

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
			1	-1	0	-2	2	-3	
x_1	1	2	1	0	0	1	1	-1	**2**
x_2	-1	12	0	1	0	1	0	1	12
x_3	0	9	0	0	1	2	4	3	4,5
Bảng 1		-10	0	0	0	**2**	-1	1	

Trong dòng mục tiêu (dòng cuối) còn phần tử dương ở cột x_4, x_6 nên phương án x^0 ở bảng này chưa tối ưu. Biến đưa vào cơ sở x_4 (ứng với $\Delta_4 = 2$ lớn nhất), biến loại khỏi cơ sở là x_1 (ứng với tỉ số nhỏ nhất $\theta_0 = \min\{\frac{2}{1}, \frac{12}{1}, \frac{9}{2}\} = 2$). Phần tử quay là $z_{14} = 1$ (trong ô được tô bóng mờ). Biến đổi bảng 1 theo các qui tắc đã nêu ta nhận được bảng 2.

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
			1	-1	0	-2	2	-3	
x_4	-2	2	1	0	0	1	1	-1	
x_2	-1	10	-1	1	0	0	-1	2	5
x_3	0	5	-2	0	1	0	2	5	**1**
Bảng 2		-14	-2	0	0	0	-3	**3**	

Trong dòng cuối của bảng này còn phần tử dương ở cột x_6 nên phương án ở bảng này chưa tối ưu. Biến đưa vào cơ sở x_6 (ứng với $\Delta_6 = 3$ lớn nhất), biến loại khỏi cơ sở là x_3 (ứng với tỉ số nhỏ nhất

$\theta_0 = \min\{5, 1\} = 1$). Phần tử quay là $z_{36} = 5$. Biến đổi bảng 2 ta nhận được bảng 3. Trong bảng này mọi $\Delta_k \le 0$, nên phương án $x^* = (0; 8; 0; 3; 0; 1)$ là tối ưu với $f_{min} = f(x^*) = -17$.

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
			1	-1	0	-2	2	-3	
x_4	-2	3	3/5	0	1/5	1	7/5	0	
x_2	-1	8	-1/5	1	-2/5	0	-9/5	0	
x_6	-3	1	-2/5	0	1/5	0	2/5	1	
Bảng 3		-17	-4/5	0	-3/5	0	-21/5	0	

Ví dụ 2. Ví dụ sau cho thấy bài toán không có phương án tối ưu

$$\begin{cases} f = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to \min, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 7, \\ -4x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -5x_2 + 3x_3 + x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Ta giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (7, 0, 0, 12, 0, 10)$ với cơ sở là các véctơ cột đơn vị A_1, A_4, A_6, tức là $J_0 = \{1, 4, 6\}$. Lập bảng đơn hình ban đầu.

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
			0	1	-3	0	2	0	
x_1	0	7	1	1	-1	0	1	0	
x_4	0	12	0	-4	4	1	0	0	**3**
x_6	0	10	0	-5	3	0	1	1	10/3
Bảng 1		0	0	-1	**3**	0	-2	0	

x_1	0	10	1	0	0	1/4	1	0	
x_3	-3	3	0	-1	1	1/4	0	0	
x_6	0	1	0	-2	0	-3/4	1	1	
Bảng 2		-9	0	2	0	-3/4	-2	0	

ở bảng 1 có $\Delta_3 = 3 > 0$ (cột x_3 là cột quay) nên ta đưa véctơ A_3 vào cơ sở và loại A_4 khỏi cơ sở (dòng x_4 là dòng quay). Trong bảng 2 có $\Delta_2 = 2 > 0$ (cột x_2 là cột quay), nhưng mọi phần tử $z_{i2} \le 0$ ($i = 1, 2, 3$) nên bài toán trên không có phương án tối ưu, vì hàm mục tiêu của bài toán giảm vô hạn trong miền ràng buộc của nó.

Bài toán tìm cực đại ($g \to \max$) được thay bằng bài toán tìm cực tiểu ($f = -g \to \min$).

Ví dụ 3. Giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{cases} g = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 10, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_6 = 12, \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Ta thay bằng tìm $f = -g = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$ với cùng các điều kiện như trên.

Xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 0, 7, 10, 12)$ với cơ sở $\{A_4, A_5, A_6\}$, ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình (các Bảng 1 - 3). Lời giải thu được là $x^* = (5, 4, 0, 0, 11, 0)$ với $f_{min} = -11$. Từ đó $g_{max} = 11$.

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
			-3	1	2	0	0	0	
x_4	0	7	-1	3	1	1	0	0	
x_5	0	10	3	-4	8	0	1	0	10/3
x_6	0	12	4	-2	0	0	0	1	**3**
Bảng 1		0	**3**	-1	-2	0	0	0	
x_4	0	10	0	5/2	1	1	0	1/4	**4**
x_5	0	1	0	-5/2	8	0	1	-3/4	
x_1	-3	3	1	-1/2	0	0	0	1/4	
Bảng 2		-9	0	**1/2**	-2	0	0	-3/4	
x_2	1	4	0	1	2/5	2/5	0	1/10	
x_5	0	11	0	0	9	1	1	-1/2	
x_1	-3	5	1	0	1/5	1/5	0	3/10	
Bảng 3		-11	0	0	-11/5	-1/5	0	-4/5	

Trường hợp bài toán suy biến

Nếu bài toán suy biến thì trong quá trình thực hiện thuật toán đơn hình có thể xảy ra hiện tượng: tỉ số nhỏ nhất θ_0 đạt tại nhiều chỉ số, do đó có nhiều biến đạt tiêu chuẩn loại khỏi cơ sở cũ. Nếu gặp hiện tượng này thì ở bước lặp sau đó có thể xảy ra $\theta_0 = 0$. Khi đó, phương án cực biên và trị hàm mục tiêu không đổi, chỉ có cơ sở của nó thay đổi (Chú ý là trị hàm mục tiêu giảm một lượng bằng tích $\theta_0.\Delta_s = 0$ do $\theta_0 = 0$). Vì thế, sau một số phép biến đổi đơn hình ta có thể gặp lại cơ sở cũ, tình huống đó gọi là *hiện tượng xoay vòng*. Nếu không có biện pháp khắc phục thì thuật toán đơn hình không thể kết thúc.

Sau đây là qui tắc tránh xoay vòng đơn giản do R.G. Bland đề xuất năm 1977:

1. Chọn cột x_s có chỉ số s nhỏ nhất mà $\Delta_s > 0$ làm cột quay (đưa véctơ A_s vào cơ sở).
2. Nếu có nhiều biến đạt tiêu chuẩn loại khỏi cơ sở cũ thì ta chọn biến có chỉ số nhỏ nhất. Dòng chứa biến cơ sở này được chọn làm dòng quay.

Tuy nhiên do hiện tượng xoay vòng rất hiếm gặp trong thực tiễn nên khi có nhiều khả năng chọn cột (dòng) quay ta có thể chọn tuỳ ý một trong số các cột (dòng) đó.

§3. TÌM PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN VÀ CƠ SỞ BAN ĐẦU

3.1. Bài toán chuẩn với ràng buộc ≤ và vế phải không âm

Xét bài toán có dạng

$$\begin{cases} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min, & (3.1) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, & (3.2) \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. & (3.3) \end{cases}$$

với giả thiết mọi $b_i \ge 0$.

Ta thêm vào vế trái mỗi ràng buộc (3.2) một ẩn số phụ $x_{n+i} \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, để biến hệ bất phương trình trên thành hệ phương trình. Trọng hàm mục tiêu, ẩn số phụ có hệ số bằng 0. Bài toán (3.1) - (3.3) tương đương với bài toán dạng chính tắc sau:

$$\begin{cases} f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + 0.x_{n+1} + \ldots + 0.x_{n+m} \rightarrow \min, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n + m. \end{cases}$$

Bài toán này có phương án cực biên ban đầu là $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, $x_{n+1} = b_1, \ldots, x_{n+m} = b_m$. Cơ sở của phương án này gồm m véctơ cột đơn vị ứng với các biến cơ sở x_{n+i}.

Ví dụ 1. Xét bài toán sau:

$$\begin{cases} f = 5x_1 + 8x_2 \to \max, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Đưa vào các biến phụ $x_3, x_4 \ge 0$. Ta có bài toán tương đương

$$\begin{cases} g = -5x_1 - 8x_2 \to \min, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Bài toán này có phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 9, 5)$. Cơ sở của x^0 là $\{A_3, A_4\}$.

3.2. Phương pháp hai pha

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{cases} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min, & (3.4) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, 2, \dots, m, & (3.5) \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \dots, n. & (3.6) \end{cases}$$

Không giảm tổng quát, ta có thể xem như mọi $b_i \ge 0$. Quá trình giải bài toán (3.4) - (3.6) được thực hiện theo hai giai đoạn (hai pha):

► **Pha 1.** Đưa vào các biến giả $t_1, t_2, \dots, t_m \ge 0$ và giải qui hoạch tuyến tính phụ:

$$\begin{cases} g(t) = t_1 + t_2 + \dots + t_m \to \min, & (3.7) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + t_i = b_i, i = 1, 2, \dots, m, & (3.8) \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \dots, n; t_i \ge 0, i = 1, 2, \dots, m. & (3.9) \end{cases}$$

Bài toán (3.7) - (3.9) có ngay một phương án cực biên ban đầu là $(x, t) = (0, \dots, 0; b_1, \dots, b_m)$ với cơ sở gồm m véctơ cột đơn vị ứng với các biến t_i trong hệ phương trình (3.8). Vì thế, ta có thể dùng phương pháp đơn hình để giải nó. Do hàm mục tiêu bị chặn dưới bởi 0, nên bài toán này chắc chắn có phương án cực biên tối ưu, chẳng hạn đó là (x^*, t^*). Có hai khả năng xảy ra:

1) $g(t^*) > 0$, khi đó qui hoạch (3.4) - (3.6) không có phương án, vì nếu có điểm x thoả mãn (3.5) và (3.6) thì véctơ (x, O) sẽ thoả mãn (3.8), (3.9) và 0 sẽ là giá trị cực tiểu của (3.7).

2) $g(t^*) = 0$, tức là trị cực tiểu của (3.7) bằng 0 và $t^* = O$. Nếu cơ sở của phương án (x^*, t^*) không chứa véctơ ứng với biến giả t_i thì x^* là phương án cực biên của bài toán ban đầu và cơ sở của x^* chỉ gồm các véctơ A_j ($j \le n$). Ta chuyển sang thực hiện pha 2.

Trái lại, nếu vẫn còn biến giả t_i (với giá trị 0) trong cơ sở của phương án (x^*, t^*) thì ta cần thực hiện thêm một vài phép lặp đơn hình nữa để đẩy hết các biến giả ra khỏi cơ sở. Cách làm như sau: ta chọn cột quay là cột biến phi cơ sở thực (biến x_j, $j \le n$) mà nó có phần tử khác 0 ở dòng tương ứng với biến giả và dòng này được chọn làm dòng quay. Chú ý là phần tử quay ở đây có thể dương hay âm (khác không). Do giả thiết ma trận A có hạng m nên nếu còn biến giả trong cơ sở (với giá trị 0) thì chắc chắn sẽ tìm được cột quay như trên. Lúc này khi biến đổi bảng có thể bỏ qua các cột ứng với biến giả.

► **Pha 2.** Bảng đơn hình ban đầu ở pha 2 là bảng đơn hình cuối cùng ở pha 1, nhưng với một số sửa đổi như sau:

a) Xoá khỏi bảng cuối cùng ở pha 1 tất cả các cột tương ứng với các biến giả.

b) Thay cột C_B bởi các hệ số mục tiêu ban đầu trong (3.4) tương ứng với các biến cơ sở ở bảng cuối pha 1.

c) Tính lại các phần tử trong dòng mục tiêu theo công thức:

$$z_{m+1,0} = C_B x_B,\ z_{m+1,k} = C_B Z_k - c_k,\ k = 1, 2, \dots, n,$$

trong đó Z_k là cột x_k ở bảng cuối pha 1.

d) Xuất phát từ bảng đơn hình vừa nhận được ở đầu pha 2, ta giải bài toán (3.4) - (3.6) theo thuật toán đơn hình.

Ví dụ 2. Giải qui hoạch tuyến tính sau bằng cách dùng phương pháp hai pha:

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Pha 1. Đưa vào ba biến giả $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ và giải bài toán phụ sau:

$$\begin{cases} g(t) = t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + t_1 = 7, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + t_2 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + t_3 = 5, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4),\ t_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Quá trình giải bài toán phụ được nêu tóm tắt trong các bảng sau (Bảng 1 - 4).

Biến cơ sở	C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	θ
			0	0	0	0	1	1	1	
t_1	1	7	1	2	1	2	1	0	0	7
t_2	1	6	3	-1	-2	1	0	1	0	**2**
t_3	1	5	2	-2	-1	1	0	0	1	5/2
Bảng 1		18	**6**	-1	-2	4	0	0	0	
t_1	1	5	0	7/3	5/3	5/3	1	-1/3	0	**3**
x_1	0	2	1	-1/3	-2/3	1/3	0	1/3	0	
t_3	1	1	0	-4/3	1/3	1/3	0	-2/3	1	3
Bảng 2		6	0	1	**2**	2	0	-2	0	
x_3	0	3	0	7/5	1	1	3/5	-1/5	0	
x_1	0	4	1	3/5	0	1	2/5	1/5	0	
t_3	1	0	0	-9/5	0	0	-1/5	-3/5	1	
Bảng 3		0	0	-9/5	0	0	-6/5	-8/5	0	
x_3	0	3	0	0	1	1				
x_1	0	4	1	0	0	1				
x_2	0	0	0	1	0	0				
Bảng 4		0	0	0	0	0				

Phương án cho ở Bảng 3 $(x^*, t^*) = (4, 0, 3, 0; 0, 0, 0)$ là tối ưu ($t^* = 0$). Tuy nhiên, trong cơ sở của phương án này còn biến giả t_3. Để loại biến giả này khỏi cơ sở ta đưa x_2 vào cơ sở (vì $z_{32} = -9/5 \neq 0$) và thực hiện một phép biến đổi đơn hình, kết quả được Bảng 4, ở bảng này cơ sở không còn biến giả, vì thế ta chuyển sang pha 2.

Pha 2. Trong Bảng 4 ta loại bỏ ba cột ứng với t_1, t_2, t_3, thay cột C_B bởi các hệ số mục tiêu ban đầu và sửa lại dòng cuối (dòng mục tiêu), ta được Bảng 5. Thực hiện một phép lặp đơn hình ta có Bảng 6 và nhận được phương án tối ưu là $x^* = (1, 0, 0, 3)$ với $f_{min} = -1$.

Biến cơ sở	C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
			2	-2	1	-1	
x_3	1	3	0	0	1	1	**3**
x_1	2	4	1	0	0	1	4
x_2	-2	0	0	1	0	0	
Bảng 5		0	0	0	0	**4**	
x_4	-1	3	0	0	1	1	
x_1	2	1	1	0	-1	0	
x_2	-2	0	0	1	0	0	
Bảng 6		-1	0	0	-4	0	

3.3. Phương pháp phạt hay phương pháp bài toán (M).

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc (3.4) - (3.6) với mọi $b_i \geq 0$. Ta gọi đó là *bài toán chính*. Để giải bài toán này theo phương pháp đơn hình ta phải đưa thêm vào bài toán các biến mới $t_i \geq 0$, gọi là các *biến giả* và xét bài toán mở rộng sau, thường gọi là *bài toán (M)*:

$$\begin{cases} F(x,t) = f(x) + Mg(t) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + M(t_1 + \dots + t_m) \to \min, & (3.10) \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + t_i = b_i,\ i = 1, 2, \dots, m, & (3.11) \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n;\ t_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m, & (3.12) \end{cases}$$

trong đó M là một hằng số dương lớn tuỳ ý. Về trực quan có thể thấy rằng làm như thế giống như "phạt" rất nặng các biến $t_i \geq 0$ khiến cho nếu bài toán chính có phương án thì phương án tối ưu (x, t) bất kỳ của bài toán (M) phải có t = O và x là phương án tối ưu của bài toán chính. Bài toán (M) có m ràng buộc chính, n + m biến và ma trận A của nó có hạng bằng m (do chứa m véctơ cột đơn vị). Mặt khác, bài toán (M) lại có ngay phương án cực biên ban đầu là $(x, t) = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ với cơ sở là m véctơ đơn vị ứng với m biến giả t_i. Vì thế, ta có đầy đủ điều kiện để áp dụng thuật toán đơn hình đối với bài toán (M). Phương pháp như thế gọi là *phương pháp phạt* hay *phương pháp bài toán (M).*

Đối với hai bài toán chính và mở rộng trên ta có:

Định lý 3.1.

Có tồn tại số M_0 đủ lớn để với mọi $M > M_0$ ta có:

1. Nếu bài toán chính có dù chỉ một phương án thì mọi phương án cực biên tối ưu (x, t) của bài toán (M) phải có t = O.

2. Nếu bài toán chính có phương án tối ưu x thì bài toán (M) có phương án tối ưu (x, O) và ngược lại.

Như vậy, thay cho bài toán chính ta có thể giải bài toán (M) với $M > M_0$: nếu bài toán (M) có phương án tối ưu (x, t) với $t \neq O$ thì bài toán chính không có phương án, còn nếu bài toán (M) có phương án tối ưu (x, O) thì x là phương án tối ưu của bài toán chính. Nếu bài toán (M) không có phương án tối ưu thì bài toán chính cũng không có phương án tối ưu (hàm mục tiêu giảm vô hạn).

Chú ý:

- Nếu ma trận A của bài toán chính có chứa k véctơ cột đơn vị khác nhau (k < m) thì ta chỉ cần đưa m - k biến giả vào bài toán (M).
- Trong mỗi phép lặp của phương pháp đơn hình khi một biến giả nào đó bị loại khỏi tập hợp các biến cơ sở thì từ đó về sau ta sẽ không bao giờ đưa biến đó vào cơ sở nữa. Vì thế cũng không phải biến đổi cột tương ứng với biến giả đó nữa, trừ khi ta cần đến nó vào những mục đích khác (Chẳng hạn, tìm lời giải của bài toán đối ngẫu).
- Trong bài toán (M), do hàm mục tiêu F phụ thuộc tuyến tính vào M nên các ước lượng của các biến cũng phụ thuộc tuyến tính vào M va ta có thể viết

$$F = \alpha_0 + \beta_0 M \quad \text{và} \quad \Delta_k = \alpha_k + \beta_k M,\ k = 1, 2, \dots, n + m.$$

Qui tắc xét dấu và so sánh các ước lượng như sau:

- $\Delta_k > 0$ nếu $\beta_k > 0$ (α_k bất kỳ) hoặc $\beta_k = 0$, $\alpha_k > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n + m$).
- $\Delta_i > \Delta_j$ nếu $\beta_i > \beta_j$ (α_i và α_j bất kỳ) hoặc $\beta_i = \beta_j$, $\alpha_i > \alpha_j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n + m$).

Khi giải bài toán (M) theo thuật toán đơn hình, ta không cần xác định giá trị cụ thể của số M mà chỉ cần tách dòng mục tiêu (dòng cuối) mỗi bảng đơn hình thành hai dòng riêng: dòng đầu ghi các hệ số α_k, dòng sau ghi các hệ số β_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n + m$).

- Khi giải các bài toán thực tế, ta cũng có thể không cần tách dòng mục tiêu thành hai dòng riêng. Trong trường hợp này hằng số M trong bài toán thường được chọn như sau:

$$M \geq \max\{|a_{ij}|, |b_i|, |c_j|, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ví dụ 3. Giải bài toán sau bằng cách dùng phương pháp phạt (không cần xác định M).

$$\begin{cases} f(x) = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Ma trận ràng buộc A của bài toán không chứa véctơ cột đơn vị nào, nên ta cần đưa thêm vào bài toán ba biến giả $x_5, x_6, x_7 \geq 0$. Bài toán (M) có dạng

$$\begin{cases} F = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + (x_5 + x_6 + x_7)M \rightarrow \min, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 + x_7 = 9, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). \end{cases}$$

Ta giải bài toán (M) bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 0, 0, 2, 6, 9)$ với cơ sở là các véctơ cột đơn vị A_5, A_6 và A_7.

Quá trình giải bài toán (M) được ghi tóm tắt trong các bảng sau (Bảng 1 - 4).

Biến cơ sở	C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
			3	-3	1	-1	M	M	M	
x_5	M	2	-1	1	2	1	1	0	0	2
x_6	M	6	1	1	-1	-1	0	1	0	6
x_7	M	9	3	2	-6	3	0	0	1	4.5
α		0	-3	3	-1	1	0	0	0	
Bảng 1 β		17	3	4	-5	3	0	0	0	
x_2	-3	2	-1	1	2	1		0	0	
x_6	M	4	2	0	-3	-2		1	0	2
x_7	M	5	5	0	-10	1		0	1	1
α		-6	0	0	-7	-2		0	0	
Bảng 2 β		9	7	0	-13	-1		0	0	
x_2	-3	3	0	1	0	6/5		0		
x_6	M	2	0	0	1	-12/5		1		2
x_1	3	1	1	0	-2	1/5		0		
α		-6	0	0	-7	-2		0		
Bảng 3 β		2	0	0	1	-12/5		0		
x_2	-3	3	0	1	0	6/5				
x_3	1	2	0	0	1	-12/5				
x_1	3	5	1	0	0	-23/5				
Bảng 4		8	0	0	0	-94/5				

Trong Bảng 1, số lớn nhất ở dòng cuối là $\beta_2 = 4$ nên Δ_2 lớn nhất và cột x_2 được chọn làm cột quay. Dòng quay là dòng 1 ứng với tỉ số nhỏ nhất min{2, 6, 4.5} = 2.

Trong Bảng 2, cột x_1 là cột quay. Dòng x_7 (dòng 3) là dòng quay.

Trong Bảng 3, cột x_3 là cột quay. Dòng x_6 (dòng 2) là dòng quay.

Cuối cùng, ở Bảng 4 ta thấy $\Delta_k \le 0$ với mọi k = 1, 2, 3, 4, nên phương án cho ở bảng này x = (5, 3, 2, 0, 0, 0, 0) là phương án tối ưu của bài toán (M). Vậy $x^* = (5, 3, 2, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán ban đầu với $f_{min} = 8$.

§4. GIẢI QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG BẤT KỲ

Ví dụ 1. Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình.

$$\begin{cases} f = 5x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + \ \ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Trước hết ta chuyển bài toán trên về bài toán tìm min và có dạng chính tắc bằng cách đưa vào các biến phụ $x_3, x_4 \ge 0$. Ta có bài toán

$$\begin{cases} g = -5x_1 - 8x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \ \ x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 1, 2)$. Cơ sở của x^0 là $\{A_3, A_4\}$. Quá trình giải như sau (Bảng 1 - 3).

Biến cơ sở	C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
			-5	-8	0	0	
x_3	0	1	1	2	1	0	½
x_4	0	2	1	1	0	1	2
Bảng 1		0	5	**8**	0	0	
x_2	-8	1/2	1/2	1	1/2	0	**1**
x_4	0	3/2	1/2	0	-1/2	1	3
Bảng 2		-4	**1**	0	-4	0	
x_1	-5	1	1	2	1	0	
x_4	0	1	0	-1	-1	1	
Bảng 3		-5	0	-2	-5	0	

ở Bảng 3 mọi $\Delta_k \leq 0$ nên $x^*_{CT} = (1, 0, 0, 1)$ là phương án tối ưu của bài toán chính tắc với $g_{min} = -5$. Từ đó suy ra lời giải bài toán ban đầu là $x^* = (1, 0)$ với $f_{max} = -g_{min} = 5$.

Ví dụ 2. Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình.

$$\begin{cases} f = -3x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Trước hết ta thêm vào hai biến bù x_4, $x_5 \geq 0$ để đưa bài toán về dạng chính tắc. Tiếp đó ta đưa vào hai biến giả x_6, $x_7 \geq 0$ để có đủ ba véctơ đơn vị và giải bài toán (M) sau.

$$\begin{cases} f_M = -3x_1 + x_2 - 2x_3 + M(x_6 + x_7) \rightarrow \min, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_7 = 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 7. \end{cases}$$

Ta giải bài toán (M) bằng phương pháp đơn hình với M = 10 (số lớn nhất trong các số có mặt trong bài toán). Quá trình giải ghi ở các bảng sau (bỏ qua hai cột biến giả).

Biến cơ sở	C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
			-3	1	-2	0	0	
x_4	0	10	2	4	-1	1	0	5
x_6	10	4	3	1	1	0	-1	**4/3**
x_7	10	2	1	-1	1	0	0	2
Bảng 1		60	**43**	-1	22	0	-10	
x_4	0	22/3	0	10/3	-5/3	1	2/3	
x_1	-3	4/3	1	1/3	1/3	0	-1/3	4
x_7	10	2/3	0	-4/3	2/3	0	1/3	**1**
Bảng 2		8/3	0	-46/3	**23/3**	0	13/3	
x_4	0	9	0	0	0	1	3/2	6
x_1	-3	1	1	1	0	0	-1/2	
x_3	-2	1	0	-2	1	0	1/2	**2**
Bảng 3		-5	0	0	0	0	**1/2**	

x_4	0	6	0	6	-3	1	0	**1**
x_1	-3	2	1	-1	1	0	0	
x_5	0	2	0	-4	2	0	1	
Bảng 4		-6	0	**2**	-1	0	0	
x_2	1	1	0	1	-1/2	1/6	0	
x_1	-3	3	1	0	1/2	1/6	0	
x_5	0	6	0	0	0	2/3	1	
Bảng 5		-8	0	0	0	-1/3	0	

ở Bảng 5 mọi $\Delta_k \le 0$ nên $x^*_M = (3, 1, 0, 0, 6, 0, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán (M). Từ đó suy ra lời giải bài toán ban đầu là $x^* = (3, 1, 0)$ với $f_{min} = -8$.

Phương pháp đơn hình là phương pháp chính để giải một qui hoạch tuyến tính bất kỳ. Nó bao gồm hai giai đoạn: 1) tìm một phương án cực biên (phương pháp hai pha, phương pháp phạt); 2) kiểm tra tối ưu đối với phương án hiện có (tìm cột quay, dòng quay ...). Bạn đọc muốn tìm hiểu kỹ hơn về phương pháp này có thể xem [1 – 5].

BÀI TẬP

1. Dùng phương pháp đơn hình giải các bài toán sau:

a) $f = -50x_1 - 60x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 9x_1 + 4x_2 \le 36, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

b) $f = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_5 = 152, \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 60, \\ 3x_2 + x_5 \le 36, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,2,\dots,5). \end{cases}$$

c) $f = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 + 6x_7 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 + x_7 = 15, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 + x_7 = -9, \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,\dots,7). \end{cases}$$

d) $f = x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -1, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -3x_1 - x_2 \ge -9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Dùng phương pháp hai pha giải bài toán sau:

$$\begin{cases} f = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 = 2, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,\dots,4). \end{cases}$$

3. Dùng phương pháp phạt giải các bài toán sau:

a) $f = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,\dots,4). \end{cases}$$

b) $f = x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

c) $f = -x_1 - x_2 + 1 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -1, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ -3x_1 - x_2 \ge -9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. Giải các bài toán thực tế cho ở bài tập 1), 2) và 5) Chương 2.

Chương 4 :

QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU

Chương này đề cập tới vấn đề đối ngẫu trong qui hoạch tuyến tính. Đối ngẫu là một phương pháp mà ứng với mỗi bài toán qui hoạch tuyến tính đã cho (gọi là *bài toán gốc*), ta có thể thiết lập một bài toán qui hoạch tuyến tính khác (gọi là *bài toán đối ngẫu*) sao cho từ lời giải của bài toán này ta sẽ thu được thông tin về lời giải của bài toán kia.

Vì thế, đôi khi để có được những hiểu biết cần thiết về một bài toán thì việc nghiên cứu bài toán đối ngẫu của nó lại tỏ ra thuận tiện hơn. Hơn nữa khi phân tích đồng thời cả hai bài toán gốc và đối ngẫu ta có thể rút ra các kết luận sâu sắc cả về mặt toán học lẫn về ý nghĩa thực tiễn.

§1. CÁCH LẬP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

1.1. Cho một qui hoạch tuyến tính, ký hiệu (P), dưới dạng chuẩn:

$$(P): \begin{cases} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

trong đó a_{ij}, b_i, c_j là các hệ số cho trước; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ là véctơ biến cần tìm.

Ta gọi đối ngẫu của (P) là qui hoạch tuyến tính, ký hiệu (Q), có dạng:

$$(Q): \begin{cases} g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to \max, \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \leq c_j,\ j = 1, 2, \dots, n, \\ y_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

ở đây $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$ là véctơ biến cần tìm.

Nhận xét :

a) Các ràng buộc chính trong bài toán (P) (mà ta sẽ gọi là *bài toán gốc*) tương ứng một-một với các biến trong bài toán đối ngẫu (Q) (mà ta sẽ gọi là các *biến đối ngẫu)*, trong khi các biến trong bài toán (P) (biến gốc) sẽ tương ứng một-một với các ràng buộc chính trong bài toán đối ngẫu.

b) Các hệ số ở vế phải ràng buộc chính trong bài toán gốc trở thành các hệ số mục tiêu trong bài toán đối ngẫu, còn các hệ số mục tiêu trong bài toán gốc lại trở thành các hệ số ở vế phải ràng buộc chính trong bài toán đối ngẫu.

c) Bài toán gốc tìm min thì bài toán đối ngẫu tìm max (và ngược lại).

d) Cả hai bài toán (P) và (Q) đều có dạng chuẩn: mọi ràng buộc đều là các bất đẳng thức (≥ đối với bài toán min, ≤ đối với bài toán max) và mọi biến đều không âm.

Dùng ký hiệu véctơ và ma trận, ta có thể viết

Bài toán gốc:

$$\begin{cases} f(x) = \langle c, x\rangle \to \min \\ Ax \geq b, \\ x \geq O. \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu:

$$\begin{cases} g(y) = \langle b, y\rangle \to \max, \\ A^T y \leq c, \\ y \geq O. \end{cases}$$

(A^T là ma trận chuyển vị của A, $\langle a, b\rangle$ là tích vô hướng của hai véctơ a và b).

Ví dụ 1. Đối ngẫu của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn

$$\begin{cases} f(x) = 20x_1 + 15x_2 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 \geq 60, \\ x_1 + x_2 \geq 40, \\ x_1 + 2x_2 \geq 60, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

là bài toán

$$\begin{cases} g(y) = 60y_1 + 40y_2 + 60y_3 \rightarrow \max, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \le 20, \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \le 15, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

1.2. Tương tự, ta định nghĩa đối ngẫu của qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{cases} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \; i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j \ge 0, \; j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

là bài toán

$$\begin{cases} g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \max, \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \le c_j, \; j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

Ở đây, do các ràng buộc chính có dấu = nên các biến đối ngẫu tương ứng không có ràng buộc về dấu (các biến y_i có dấu tuỳ ý). Dưới dạng véctơ - ma trận, ta có thể viết

Bài toán gốc:

$$\begin{cases} f(x) = \langle c, x\rangle \rightarrow \min \\ Ax = b, \; x \ge O. \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu:

$$\begin{cases} g(y) = \langle b, y\rangle \rightarrow \max, \\ A^Ty \le c, \end{cases}$$

Ví dụ 2. Đối ngẫu của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{cases} f(x) = 0{,}2x_1 + 0{,}8x_4 + 0{,}6x_5 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 400, \\ 2x_2 + x_5 = 400, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1300, \\ x_j \ge 0, \; j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

là bài toán

$$\begin{cases} g(y) = 400y_1 + 400y_2 + 1300y_3 \to \max, \\ 2y_1 \le 0{,}2 \\ 2y_2 + y_3 \le 0, \\ y_1 + 2y_3 \le 0, \\ 3y_3 \le 0{,}8 \\ y_1 + y_2 \le 0{,}6. \end{cases}$$

1.3. Tổng quát, xét bài toán qui hoạch tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i,\ i \in I_1, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,\ i \in I_2, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,\ i \in I_3, \\ x_j \ge 0\ (j \in J_1),\ x_j \text{ tuỳ ý } (j \in J_2),\ x_j \le 0\ (j \in J_3), \end{cases}$$

trong đó $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1,...,m\}$, $I_i \cap I_k = \emptyset$, i, k = 1, 2, 3 $(i \neq k)$; $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1,..., n\}$, $J_j \cap J_k = \emptyset$, j, k = 1, 2, 3 $(j \neq k)$.

Ta gọi đối ngẫu của bài toán trên là bài toán:

$$\begin{cases} g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \max, \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \le c_j,\ j \in J_1, \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m = c_j,\ j \in J_2, \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \ge c_j,\ j \in J_3, \\ y_i \ge 0\ (i \in I_1),\ y_i \text{ tuỳ ý } (i \in I_2),\ y_i \le 0\ (i \in I_3). \end{cases}$$

Sơ đồ đối ngẫu tổng quát được tóm tắt trong bảng dưới đây.

SƠ ĐỒ ĐỐI NGẪU TỔNG QUÁT	
Bài toán gốc	**Bài toán đối ngẫu**
Các biến gốc: $x_1, x_2, \ldots, x_n$	*Các biến đối ngẫu:* $y_1, y_2, \ldots, y_m$
Hàm mục tiêu	

$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to$ min	$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to$ max
Các ràng buộc	
$\geq b_i, i \in I_1, a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, i \in I_2, \leq b_i, i \in I_3,$	$\geq 0, i \geq I_1, y_i$ dấu tuỳ ý, $i \in I_2, \leq 0, i \leq I_3,$
$\geq 0, j \in J_1, x_j$ dấu tuỳ ý, $j \in J_2, \leq 0, j \in J_3.$	$\leq c_j, j \in J_1, a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m = c_j, j \in J_2, \geq c_j, j \in J_3.$

Ta nhận xét thêm rằng theo sơ đồ này, nếu hai ràng buộc gốc có dấu ngược nhau thì hai biến đối ngẫu tương ứng cũng có dấu ngược nhau, đồng thời nếu hai biến gốc có dấu trái nhau thì hai ràng buộc đối ngẫu tương ứng cũng có dấu trái nhau. Còn nếu biến gốc có dấu tuỳ ý thì trong ràng buộc đối ngẫu tương ứng sẽ có dấu =.

Hơn nữa có thể thấy rằng nếu lấy đối ngẫu của qui hoạch đối ngẫu thì ta sẽ nhận được chính qui hoạch gốc. Vì thế, bài toán gốc cùng với bài toán đối ngẫu của nó lập nên một cặp qui hoạch đối ngẫu nhau.

Ví dụ 3. Đối ngẫu của bài toán qui hoạch

$$\begin{cases} f(x) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \text{min}, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8, \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

là bài toán qui hoạch

$$\begin{cases} g(y) = 8y_1 + 6y_2 + 3y_3 \to \text{max}, \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 4, \\ y_1 - 2y_2 + 4y_3 \geq -3, \\ -3y_1 + 4y_2 - y_3 = 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \text{ tuỳ ý}, y_3 \leq 0. \end{cases}$$

§2. CÁC ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

2.1. Cặp bài toán đối ngẫu dạng chuẩn

Để tiện cho việc nghiên cứu lý thuyết đối ngẫu, sau đây ta sẽ xét cặp bài toán đối ngẫu (P) và (Q) cho ở dạng chuẩn. Tuy nhiên các kết quả nhận được cũng đúng cho một cặp bài toán đối ngẫu bất kỳ.

Định lý 2.1.

(Đối ngẫu yếu). *Nếu x là một phương án bất kỳ của bài toán gốc (P) và y là một phương án bất kỳ của bài toán đối ngẫu (Q) thì*

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \geq g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m. \quad (2.1)$$

Từ định lý đối ngẫu yếu trên đây ta suy ra ngay các hệ quả sau.

Hệ quả 2.1.

a) *Giá trị mục tiêu của một phương án đối ngẫu bất kỳ là một cận dưới cho giá trị mục tiêu đối với mọi phương án của bài toán gốc.*

b) *Nếu hàm mục tiêu của bài toán gốc không bị chặn dưới trong miền ràng buộc của nó thì bài toán đối ngẫu không có bất kỳ một phương án nào.*

c) *Nếu hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu không bị chặn trên trong miền ràng buộc của nó thì bài toán gốc không có bất kỳ một phương án nào.*

d) *Nếu x^* là một phương án của bài toán gốc, y^* là một phương án của bài toán đối ngẫu và $f(x^*) = g(y^*)$ thì x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc và y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.*

Thật vậy, các kết luận a) – c) là hiển nhiên.

d) *Với bất kỳ phương án x của (P) và phương án y của (Q), theo định lý 2.1. ta có:*

$$f(x) \geq g(y^*) = f(x^*) \geq g(y),$$

các bất đẳng thức này chứng tỏ x^* là phương án tối ưu của (P) (bài toán tìm min) và y^* là phương án tối ưu của (Q) (bài toán tìm max).

Định lý 2.2.

(Đối ngẫu mạnh). *Nếu một qui hoạch có phương án tối ưu thì qui hoạch đối ngẫu của nó cũng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của chúng là bằng nhau.*

Các kết quả nêu trên cho thấy mối quan hệ sau đây giữa hai bài toán gốc và đối ngẫu.

Định lý 2.3.

(Định lý tồn tại). *Đối với mỗi cặp qui hoạch đối ngẫu nhau chỉ có thể xảy ra một trong ba khả năng loại trừ nhau sau đây.*

a) Cả hai qui hoạch đều không có phương án.

b) Cả hai qui hoạch đều có phương án. Khi đó, cả hai qui hoạch đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của các hàm mục tiêu là bằng nhau.

c) Một qui hoạch có phương án và qui hoạch kia không có phương án. Khi đó, qui hoạch có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của nó không giới nội trong miền ràng buộc.

Các ví dụ sau đây minh hoạ cho các tình huống a) - c) nêu trên.

a) Bài toán gốc không có phương án.

$$\begin{cases} f(x) = x_1 \to \min, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu không có phương án.

$$\begin{cases} g(y) = y_1 + y_2 \to \max, \\ y_1 - y_2 = 1, \\ y_1 - y_2 = 0, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

b) Bài toán gốc có phương án.

$$\begin{cases} f(x) = 5x_1 + 10x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 14, \\ x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu có phương án.

$$\begin{cases} g(y) = 14y_1 + 12y_2 \to \max, \\ 2y_1 + y_2 \leq 5, \\ 3y_1 + 4y_2 \leq 10, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Phương án tối ưu của hai bài toán là $x^* = (4; 2)$, $y^* = (2; 1)$ và $f(x^*) = g(y^*) = 40$.

c) Bài toán gốc không có phương án.

$$\begin{cases} f(x) = x_1 \to \min, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu không có phương án tối ưu.

$$\begin{cases} g(y) = y_1 + y_2 \to \max, \\ y_1 - y_2 \leq 1, \\ y_1 - y_2 \leq 0, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Mối liên hệ giữa hai bài toán đối ngẫu còn thể hiện ở hai định lý về độ lệch bù sau đây.

Định lý 2.4.

(Định lý yếu về độ lệch bù). *Một cặp phương án x, y của hai qui hoạch đối ngẫu (P) và (Q) là những phương án tối ưu khi và chỉ khi chúng nghiệm đúng các hệ thức:*

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \tag{2.2}$$

$$x_j\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\right) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \tag{2.3}$$

Ta thấy $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$ là độ lệch (mức chênh lệch giữa vế trái và vế phải) ở ràng buộc i trong bài toán gốc (P), y_i là biến đối ngẫu tương ứng với ràng buộc này. Tương tự, $c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i$ là độ lệch ở ràng buộc j trong bài toán đối ngẫu (Q) và x_j là biến gốc tương ứng với ràng buộc này. Các hệ thức (2.2), (2.3) nói rằng với mỗi ràng buộc gốc hay đối ngẫu thì tích của độ lệch ở ràng buộc này và biến đối ngẫu (hay biến gốc) tương ứng với ràng buộc đó phải bằng không. Nói cách khác, nếu một ràng buộc có độ lệch dương thì biến (gốc hay đối ngẫu) tương ứng với ràng buộc đó phải bằng không; ngược lại, nếu một biến gốc hay đối ngẫu có giá trị dương thì phương án của bài toán đối ngẫu phải thoả mãn ràng buộc tương ứng với dấu = (thoả mãn như một đẳng thức). Như vậy, hệ thức (2.2) có nghĩa là

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i \Rightarrow y_i = 0 \text{ và } y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Hệ thức (2.3) cũng có nghĩa tương tự

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i < c_j \Rightarrow x_j = 0 \text{ và } x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Các đẳng thức (2.2), (2.3) không loại trừ khả năng là với một i nào đó ta có đồng thời $y_i = 0$ và $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$. Tuy nhiên định lý sau cho thấy khả năng này không thể xảy ra đối với tất cả các cặp phương án tối ưu đối ngẫu.

Định lý 2.5.

(Định lý mạnh về độ lệch bù). *Nếu cặp bài toán đối ngẫu (P) và (Q) có phương án thì tồn tại một cặp phương án tối ưu* x^*, y^* *nghiệm đúng*

$$y^* + (Ax^* - b) > 0 \text{ và } x^* + (c - A^T y^*) > 0.$$

2.2. Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu

Nếu biết phương án tối ưu của bài toán gốc, vận dụng lý thuyết đối ngẫu ta có thể suy ra phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu tương ứng mà không cần giải nó.

Ví dụ 1. Bài toán qui hoạch tuyến tính

$$\begin{cases} f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

có phương án tối ưu $x^* = (0, 1, 0, 2, 3)$ với $f_{min} = f(x^*) = 6$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu tương ứng.

Giải. Bài toán đối ngẫu có dạng

$$\begin{cases} g(y) = y_1 + 3y_2 + 8y_3 \to \max, \\ 3y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq 1, \\ y_1 + y_2 + 5y_3 \leq 1, \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 1, \\ y_2 \leq 1, \\ y_3 \leq 1. \end{cases}$$

Gọi y^* là phương án tối ưu của bài toán này. Do x_2^*, x_4^*, $x_5^* > 0$ nên theo định lý 2.4. y^* nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 5y_3 &= 1,\\ y_2 &= 1,\\ y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Giải hệ này ta nhận được

$$y^* = (-5, 1, 1) \text{ với } g_{max} = g(y^*) = -5 + 3 + 8 = 6 = f_{min}.$$

Ví dụ 2. Dùng phương pháp đơn hình giải qui hoạch gốc sau đây, từ đó suy ra lời giải của bài toán đối ngẫu tương ứng với nó.

$$\begin{cases} f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \to \min,\\ x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2,\\ x_2 + x_3 + x_6 = 12,\\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9,\\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Xuất phát từ phương án cực biên ban đầu $x^0 = (2, 12, 9, 0, 0, 0)$ với cơ sở tương ứng là ma trận đơn vị. Quá trình giải được ghi lại trong bảng đơn hình dưới đây (các Bảng 1-3).

Hệ số c_j	Cơ sở	Phương án	1	-1	0	-2	2	-3	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_1	2	1	0	0	1	1	-1	**2**
-1	A_2	12	0	1	0	1	0	1	12
0	A_3	9	0	0	1	2	4	3	4,5
Bảng 1		-10	0	0	0	**2**	-1	1	
-2	A_4	2	1	0	0	1	1	-1	
-1	A_2	10	-1	1	0	0	-1	2	5
0	A_3	5	-2	0	1	0	2	5	**1**

Bảng 2		-14	-2	0	0	0	-3	3	
-2	A_4	3	3/5	0	1/5	1	7/5	0	
-1	A_2	8	-1/5	1	-2/5	0	-9/5	0	
-3	A_6	1	-2/5	0	1/5	0	2/5	1	
Bảng 3		-17	-4/5	0	-3/5	0	-21/5	0	

Để tìm lời giải (phương án tối ưu) của bài toán đối ngẫu ta áp dụng qui tắc sau:

Qui tắc A.

Nếu cơ sở ban đầu là ma trận đơn vị thì để tìm lời giải của bài toán đối ngẫu, ta chọn ra từ bảng đơn hình cuối cùng các Δ_j của các cột biến x_j mà chúng là các biến cơ sở ở bước lặp đầu tiên (bảng 1), rồi cộng thêm với hệ số c_j tương ứng.

Lời giải của bài toán gốc là $x^* = (0, 8, 0, 3, 0, 1)$ với $f_{min} = -17$. Các biến cơ sở ở bước lặp đầu tiên (Bảng 1) là x_1, x_2, x_3. Các véctơ A_1, A_2, A_3 tương ứng đều là các véctơ đơn vị.

Vì thế, lời giải của bài toán đối ngẫu $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} y_1^* = \Delta_1 + c_1 = -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5}, \\ y_2^* = \Delta_2 + c_2 = 0 - 1 = -1, \\ y_3^* = \Delta_3 + c_3 = -\frac{3}{5} + 0 = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Vậy,

$$y^* = (\tfrac{1}{5}, -1, -\tfrac{3}{5}) \text{ và } g_{max} = 2 \times \tfrac{1}{5} + 12 \times (-1) + 9 \times (-\tfrac{3}{5}) = -17 = f_{min}.$$

§3. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

Về thực chất, đây là phương pháp đơn hình áp dụng vào bài toán đối ngẫu, nhưng để tìm lời giải của bài toán gốc và diễn đạt các bước tiến hành theo ngôn ngữ bài toán gốc. Phương pháp này do Lemke G. E. đề xuất năm 1954.

Phương pháp đơn hình giải qui hoạch tuyến tính bắt đầu từ một phương án (nghiệm đúng $Ax = b$ và $x \geq O$) mà nó chưa thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu (định lý 1.1 Chương 3). Sau mỗi bước lặp ta sẽ tìm được một phương án mới tốt hơn phương án cũ và quá trình lặp này tiếp tục cho đến khi nhận được phương án tối ưu.

Phương pháp đơn hình đối ngẫu lại xuất phát từ một "giả phương án" (nghiệm đúng $Ax = b$) mà nó thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu nhưng không thoả mãn điều kiện $x \geq O$, nghĩa là bảng đơn hình ban đầu không có phần tử dương trong dòng mục tiêu (dòng cuối), nhưng lại có phần tử âm ở cột phương án (vì thế có tên gọi *giả phương án*). Các bảng đơn hình được biến đổi sao cho luôn đảm bảo điều kiện tối ưu và quá trình này tiếp diễn cho đến khi nhận được phương án (không còn phần tử âm trong cột Giả phương án). Phương án đó sẽ là phương án tối ưu.

Phương pháp đơn hình đối ngẫu thường được sử dụng khi ta chưa biết một phương án cực biên nào của bài toán gốc, nhưng lại có sẵn một phương án cực biên của bài toán đối ngẫu. Chẳng hạn, khi bài toán cần giải có dạng chuẩn và véctơ hệ số mục tiêu $c \geq O$:

$\min\{f(x) = \langle c, x\rangle : Ax \geq b, x \geq O\}$ (vế phải b tuỳ ý)

Bài toán đối ngẫu có dạng

$\max\{g(y) = \langle b, y\rangle : A^T y \leq c, y \geq O\}$.

Rõ ràng $y^0 = O$ là một phương án cực biên của bài toán đối ngẫu, vì $A^T y^0 = O \leq c$.

Các bước tiến hành thuật toán đơn hình đối ngẫu như sau:

Bước 1. Lập bảng đơn hình đối ngẫu ban đầu (xem ví dụ minh hoạ dưới đây).

Bước 2. Kiển tra tối ưu: nếu mọi phần tử trong cột giả phương án đều không âm thì dừng quá trình giải: ta nhận được phương án tối ưu của bài toán đã cho. Trái lại, chuyển sang Bước 3.

Bước 3. Chọn dòng quay: đó là dòng đầu tiên từ trên xuống mà nó chứa phần tử âm nhỏ nhất trong cột giả phương án.

Bước 4. Chọn cột quay: chia các phần tử trên dòng ước lượng (cuối mỗi bảng) cho các phân tử tương ứng trên dòng quay, nhưng chỉ chia cho những phần tử âm trên dòng quay. Cột quay là cột đầu tiên từ trái sang phải ứng với số nhỏ nhất trong các tỉ số đó.

Bước 5. Biến đổi bảng đơn hình hoàn toàn như trong phương pháp đơn hình thường (thay đổi biến cơ sở, đổi hệ số mục tiêu tương ứng, xác lập các véctơ đơn vị, biến đổi dòng quay và cuối cùng là biến đổi các dòng khác theo qui tắc hình chữ nhật).

Trở lại thực hiện Bước 2 mô tả ở trên.

Chú ý. Khi tìm cột quay, nếu mọi phần tử trên dòng quay đều không âm thì đó là dấu hiệu cho thấy bài toán ban đầu không có phương án.

Ví dụ 1. Giải bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn sau đây.

$$\begin{cases} f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 160, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 140, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc và đổi dấu hai vế các ràng buộc đẳng thức:

$$\begin{cases} f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 \rightarrow \min, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -160, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5 = -140, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Bài toán có n = 5 biến và m = 2 ràng buộc chính, nên mỗi bảng đơn hình gồm n + 3 = 8 cột và m + 1 = 3 dòng. Cũng như trong phương pháp đơn hình thường, bảng đầu tiên ghi lại các hệ số trong bài toán, chỉ khác là cột "Phương án" bây giờ được thay bằng cột "Giả phương án", vì trong thành phần của "phương án" xuất phát có các phần tử âm. Bảng này tương ứng với giả phương án ban đầu $x^0 = (0, 0, 0, -160, -140)$, $f_0 = f(x^0) = 0$.

Biến cơ sở	C_B	Giả phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			15	12	10	0	0
x_4	0	-160	-3	-4	-2	1	0
x_5	0	-140	-1	-2	-3	0	1
Bảng 1		0	-15	-12	-10	0	0

Trong bảng 1, cột giả phương án có phần tử âm, nên ta chưa nhận được phương án tối ưu. Ta chọn dòng x_4 (tương ứng với số âm nhỏ nhất -160) làm dòng quay. Cột quay là cột x_2 (tương ứng với số nhỏ nhất trong ba tỉ số: $\frac{-15}{-3} = 5$, $\frac{-12}{-4} = 3$, $\frac{-10}{-2} = 5$). Phần tử quay bằng -4 (trong ô tô bóng mờ). Biến đổi bảng này theo qui tắc đơn hình ta nhận được bảng 2.

Trong bảng 2, cột giả phương án vẫn còn phần tử âm. Ta chọn dòng x_5 làm dòng quay và chọn cột x_3 làm cột quay. Phần tử quay bằng -2. Biến đổi bảng 2 ta nhận được Bảng 3. Trong bảng này, mọi phần tử trong cột giả phương án đều dương, ta có phương án tối ưu: $x^* = (0, 25, 30)$ với $f_{min} = 600$.

Biến cơ sở	C_B	Giả phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			15	12	10	0	0
x_2	12	40	3/4	1	1/2	-1/4	0
x_5	0	-60	1/2	0	-2	-1/2	1
Bảng 2		480	-6	0	-4	-3	0
X_2	12	25	7/8	1	0	-3/8	1/4
X_3	10	30	-1/4	0	1	1/4	-1/2
Bảng 3		600	-7	0	0	-2	-2

Từ các kết quả tính toán nêu trên, ta cũng có thể tìm được lời giải của bài toán đối ngẫu nhờ vận dụng qui tắc sau đây (tương tự như qui tắc A):

Qui tắc B.

Nếu cơ sở ban đầu là ma trận đơn vị thì để tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu, ta chọn ra từ bảng đơn hình đối ngẫu cuối cùng các Δ_j của các cột biến x_j mà chúng là các biến cơ sở ở bước lặp đầu tiên (bảng 1), rồi cộng thêm với hệ số c_j tương ứng. Sau đó, đổi dấu tổng tìm được nếu biến cơ sở tương ứng ban đầu nhận giá trị âm.

Với ví dụ đang xét ta thấy các biến cơ sở ở bước lặp đầu tiên (Bảng 1) là x_4, x_5 (A_4, A_5 là các véctơ đơn vị). Lúc đầu các biến này đều nhận giá trị âm, nên phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} y_1^* = -\Delta_4 - c_4 = 2 - 0 = 2, \\ y_2^* = -\Delta_5 - c_5 = 2 - 0 = 2, \end{cases}$$

Vậy, $y^* = (2; 2)$ và $g_{max} = 160 \times 2 + 140 \times 2 = 600 = f_{min}$.

Ví dụ sau đây cho thấy bài toán gốc không có phương án.

Ví dụ 2. Dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau.

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_5 = -2, \\ 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -4, \\ 2x_3 - x_5 + x_6 = 2, \\ x_2 + x_3 + 4x_5 + x_7 = 6, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

Xuất phát từ giả phương án $x^0 = (-2,\ 0,\ 0,\ -4,\ 0,\ 2,\ 6)$. Quá trình giải như sau.

Biến cơ sở	C_B	Giả phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			2	-4	1	-1	2	0	0
x_1	2	-2	1	-2	0	0	-2	0	0
x_4	-1	-4	0	4	1	1	-1	0	0
x_6	0	2	0	0	2	0	-1	1	0
x_7	0	6	0	1	1	0	4	0	1
Bảng 1		0	0	-4	-2	0	-5	0	0
x_1	2	6	1	-10	-2	-2	0	0	0
x_5	2	4	0	-4	-1	-1	1	0	0
x_6	0	6	0	-4	1	-1	0	1	0
x_7	0	-10	0	17	5	4	0	0	1
Bảng 2		20	0	-24	-7	-5	0	0	0

ở bảng 2, mọi phần tử trên dòng quay x_7 (dòng được tô bóng mờ) không âm, nên bài toán gốc không có phương án.

Trong các ví dụ trên ta đã may mắn có được các giả phương án thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu. Nói chung, khó có thể tìm những điểm xuất phát như thế cho phương pháp đơn hình đối ngẫu. Về vấn đề này có thể xem [1], [4], [6].

Đối với phương pháp đơn hình ta đã bàn khá kỹ về các kỹ thuật tìm một phương án cực biên ban đầu của bài toán qui hoạch tuyến tính dạng bất kỳ. Song với phương pháp đơn hình đối ngẫu ta sẽ không đi sâu tìm hiểu các thủ tục tìm giả phương án ban đầu thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu. Sở dĩ như vậy là vì ở đây ta chủ yếu dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu để tìm phương án khi đã có bảng đơn hình thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu, nhưng chưa thoả mãn điều kiện $x \geq O$. Các bảng như thế có sẵn trong một số ví dụ đã xét ở trên hoặc dễ xây dựng trong ứng dụng 4.1 xét tới ở §4.

§4. ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU

4.1. Tái tối ưu hoá khi thêm ràng buộc mới vào bài toán

Khi lập mô hình cho các vấn đề thực tế dưới dạng bài toán qui hoạch tuyến tính thường có nhu cầu bổ sung thêm các ràng buộc vào mô hình nhằm làm cho nó phản ánh chính xác hơn vấn đề đang nghiên cứu, đặc biệt khi cần so sánh lời giải thu được từ mô hình với tình huống thực tế được mô hình hoá. Tuy nhiên, việc thêm vào một hay nhiều ràng buộc có thể làm cho lời giải hiện có không thoả mãn các ràng buộc mới này. Trong những trường hợp như thế phương pháp đơn hình đối ngẫu sẽ giúp giải quyết vấn đề một cách hiệu quả mà không cần giải lại toàn bộ bài toán từ đầu. Ví dụ sau minh hoạ cho tình huống này.

Ví dụ. Hãy tìm lời giải của bài toán qui hoạch tuyến tính nhận được từ bài toán cho ở ví dụ 1, §3 bằng cách thêm vào một ràng buộc mới:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 60.$$

Dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu giải bài toán ở ví dụ 1 ta đã nhận được bảng 3:

Biến cơ sở	C_B	Giá phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			15	12	10	0	0
x_2	12	25	7/8	1	0	-3/8	1/4
x_3	10	30	-1/4	0	1	1/4	-1/2
Bảng 3		600	-7	0	0	-2	-2

Bảng này cho thấy $x^* = (0; 25; 30)$ là phương án tối ưu của bài toán với $f_{min} = 600$. Do x^* không thoả mãn ràng buộc mới $x_1 + x_2 + x_3 \geq 60$ nên x^* không phải là một phương án của bài toán mới. Để xử lý ràng buộc mới này ta thêm vào biến bù $x_6 \geq 0$ để đưa ràng buộc về dạng đẳng thức và đổi dấu hai vế đẳng thức ta được: $- x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = - 60$. Bây giờ ta đưa ràng buộc này vào Bảng 3 và lập Bảng 4. Để ý là biến phụ mới x_6 không có mặt trong hai ràng buộc còn lại và trong hàm mục tiêu, vì thế hệ số của x_6 trong hai ràng buộc này cũng như trong hàm mục tiêu bằng 0. Hơn nữa, biến x_6 sẽ là biến cơ sở.

Biến cơ sở	C_B	Giả phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			15	12	10	0	0	0
x_2	12	25	7/8	1	0	-3/8	1/4	0
x_3	10	30	-1/4	0	1	¼	-1/2	0
x_6	0	-60	- 1	- 1	- 1	0	0	1
Bảng 4		600	-7	0	0	-2	-2	0

Do x_2, x_3 là các biến cơ sở nên cột x_2, x_3 phải là các véctơ cột đơn vị với số 1 ở ô có cùng tên biến trên dòng và cột của nó. Muốn thế ta cộng dòng 1 và dòng 2 vào dòng 3. Kết quả ta nhận được Bảng 5.

Biến cơ sở	C_B	Giả phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			15	12	10	0	0	0
x_2	12	25	7/8	1	0	-3/8	1/4	0
x_3	10	30	-1/4	0	1	1/4	-1/2	0
x_6	0	-5	- 3/8	0	0	-1/8	-1/4	1
Bảng 5		600	-7	0	0	-2	-2	0

Bảng này tương ứng với giả phương án $x^0 = (0; 25; 30; 0; 0; -5)$ thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu. Loại biến x_6 khỏi cơ sở và đưa biến x_5 vào cơ sở. Biến đổi Bảng 5 theo phương pháp đơn hình cải biên ta nhận được Bảng 6. Trong bảng này ta thấy mọi phần tử trong cột Giả phương án đều dương nên phương án tối ưu của bài toán mới bây giờ là $x^* = (0; 20; 40)$ với giá trị cực tiểu mới $f_{min} = 640$ (giá trị này đương nhiên lớn hơn giá trị f_{min} cũ).

Biến cơ sở	C_B	Giả phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			15	12	10	0	0	0
x_2	12	20	1/2	1	0	-1/2	0	1
x_3	10	40	1/2	0	1	½	0	-2
x_5	0	20	3/2	0	0	½	1	-4
Bảng 6		640	-4	0	0	-1	0	-8

4.2. Tìm nghiệm không âm của hệ phương trình tuyến tính

Việc tìm nghiệm không âm của một hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, $x \geq O$, với A là ma trận m x n, $b \in R^m$ và $x \in R^n$, có thể qui về việc giải một qui hoạch tuyến tính:

$$\min \{f(x,t) = t_1 + t_2 + \dots + t_m: Ax + t = b, x \geq 0, t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \geq 0\}.$$

Bài toán này chắc chắn có lời giải, bởi vì (0, b) là một phương án và hàm mục tiêu $f(x,t) \geq 0$ với mọi phương án (x, t) của bài toán. Giả sử (x^*, t^*) là một lời giải của bài toán trên. Nếu $t^* = 0$ thì x^* là một nghiệm không âm của hệ phương trình tuyến tính đã cho, còn nếu $t^* \neq O$ thì hệ đã cho vô nghiệm (không có nghiệm không âm).

Ví dụ 1. Việc tìm nghiệm không âm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \end{cases}$$

qui về việc giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + t_1 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + t_2 = 9, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + t_3 = 4, \\ x_j \geq 0, t_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Dùng phương pháp đơn hình giải bài toán này, ta nhận được phương án tối ưu $(x^*, t^*) = (3, 1, 2, 0, 0, 0)$. Vậy nghiệm cần tìm của hệ phương trình đã cho là $x^* = (3, 1, 2)$.

Ngược lại, ta có thể đưa việc giải một bài toán qui hoạch tuyến tính về viêc tìm nghiệm không âm của một hệ phương trình tuyến tính. Thật vậy, xét đại diện bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn: $\min\{f(x) = \langle c, x\rangle : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$. Từ lý thuyết đối ngẫu cho thấy rằng nếu bài toán qui hoạch đã cho có lời giải, chẳng hạn x, thì bài toán đối ngẫu của nó cũng có lời giải, chẳng hạn y, và giá trị của hai hàm mục tiêu là bằng nhau: $\langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle$. Do đó, cặp lời giải (x, y) nghiệm đúng hệ phương trính và bất phương trình tuyến tính:

$$\langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle,\ Ax \geq b,\ A^T y \leq c,\ x \geq O,\ y \geq 0.$$

Bằng cách đưa vào các biến phụ $u, v \geq O$, hệ trên được viết lại thành:

$$\begin{gathered} \langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle, \\ Ax - u = b,\ A^T y + v = c, \\ x \geq O,\ y \geq O,\ u \geq O,\ v \geq 0. \end{gathered}$$

Ví dụ 2. Việc tìm lời giải cho qui hoạch tuyến tính

$$\begin{cases} f(x) = 5x_1 + 10x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 14, \\ x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

có thể qui về việc tìm nghiệm không âm của hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 14y_1 + 12y_2, \\ 2x_1 + 3x_2 - u_1 = 14, \quad 2y_1 + y_2 + v_1 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - u_2 = 12, \quad 3y_1 + 4y_2 + v_2 = 10, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0. \end{cases}$$

Nghiệm không âm của hệ này là (x, y, u, v) = (4; 2; 2; 1; 0; 0; 0; 0). Vậy, phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu tương ứng là x = (4; 2) và y = (2; 1).

4.3. ứng dụng vào bài toán trò chơi ma trận: Định lý minimax

Xét trò chơi ma trận như sau: Có hai người cùng chơi, ký hiệu P_1 và P_2. Người chơi P_1 chọn tập chiến lược chơi $I = \{1, 2, \dots, m\}$. Người chơi P_2 chọn tập chiến lược chơi $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Cho trước ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$, gọi là *ma trận trả tiền*. Nếu P_1 chọn chiến lược $i \in I$ và P_2 chọn chiến lược $j \in J$ thì P_1 thắng P_2 số tiền a_{ij} (P_2 trả cho P_1 số tiền a_{ij}) nếu $a_{ij} \geq 0$. Khi $a_{ij} < 0$ ta hiểu theo nghĩa ngược lại: P_2 thắng $-a_{ij}$, P_1 thua. Vấn đề đặt ra là hãy tìm chiến lược chơi tối ưu cho mỗi đấu thủ (người chơi).

Ví dụ. Trò chơi dân gian "One-Two-Three" (đọc chệch là Oẳn tù tì) là một trò chơi ma trận với tập chiến lược chơi giống nhau đối với cả hai đấu thủ: ở mỗi lần chơi, mỗi người chơi giơ tay ra hiệu chọn "Giấy", "Búa" hoặc "Kéo". Ma trận trả tiền có dạng:

P_1 \ P_2	Giấy	Búa	Kéo
Giấy	0	1	-1
Búa	-1	0	1
Kéo	1	-1	0

Trong những trò chơi như thế, thông tin về cách chơi của các đấu thủ là rất quan trọng, đồng thời số tiền thắng hay thua từ một cuộc chơi (gồm nhiều lần chơi) được tính như là kết quả của các lần chơi. Vì vậy, ta đi đến khái niệm *chiến lược hỗn hợp*. Bây giờ ở mỗi lần chơi, các đấu thủ không chọn cố định một chiến lược chơi cụ thể nào, mà sẽ lựa chọn các chiến lược $i \in I$ hay $j \in J$ theo một tỉ lệ (xác suất) nào đó. Giả sử x_i là tỉ lệ mà P_1 chọn chiến lược $i \in I$ trong cuộc chơi. Véctơ

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ với } x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m \text{ và } x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1,$$

được gọi là một *chiến lược hỗn hợp* của P_1. Tương tự, chiến lược hỗn hợp của P_2 là véctơ

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ với } y_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n \text{ và } y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1.$$

Bài toán của P_1. Số tiền thắng của P_1 khi anh ta chọn chiến lược hỗn hợp x còn P_2 chọn chiến lược j là $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m$ (j = 1, 2, ... , n). Gọi α là số tiền thắng tối thiểu mà P_1 đạt được bất kể P_2 chọn chiến lược nào, nghĩa là

$$\alpha \le a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m, \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Vì thế, P_1 cần giải bài toán:

$$\begin{cases} \alpha \to \max, \\ a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m - \alpha \ge 0, j = 1, 2, \dots, n. \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_m \ge 0. \end{cases}$$

Bài toán của P_2. Số tiền thua của P_2 khi anh ta chọn chiến lược hỗn hợp y còn P_1 chọn chiến lược i là $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n$ (i = 1, 2, ... , m). Gọi β là số tiền thua tối đa mà P_2 phải trả bất kể P_1 chọn chiến lược nào, nghĩa là

$$\beta \ge a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n, \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Vì thế, P_2 cần giải bài toán:

$$\begin{cases} \beta \to \min, \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n - \beta \le 0, i = 1, 2, \dots, m. \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \dots, y_n \ge 0. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng hai bài toán trên lập thành một cặp qui hoạch đối ngẫu nhau. Hơn nữa, rõ ràng cả hai bài toán đều có phương án, nên cả hai đều có phương án tối ưu và max α = min β (số tiền thắng lớn nhất của P_1 bằng số tiền thua nhỏ nhất của P_2). Từ đó ta có

Định lý 4.1

(Định lý minimax). *Với trò chơi ma trận bất kỳ, mỗi đối thủ đều có chiến lược tối ưu x^*, y^* sao cho số tiền thắng lớn nhất của P_1 bằng số tiền thua nhỏ nhất của P_2.*

4.4. Ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu

Xét bài toán xác định khẩu phần thức ăn (bài toán gốc): Người chăn nuôi cần mua n loại thực phẩm cho gia súc trong mỗi bữa ăn. Tỉ lệ các chất dinh dưỡng trong các loại thực phẩm, mức tối thiểu các chất dinh dưỡng cho gia súc trong mỗi bữa ăn và giá tiền của các loại thực phẩm được cho trong bảng sau:

Tỉ lệ chế biến / Thực phẩm / Dinh Dưỡng	1	2	...	j	...	n	Mức dinh dưỡng tối thiểu
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...
i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Giá 1 đ/vị thực phẩm	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	

Vấn đề đặt ra: Người chăn nuôi cần mua bao nhiêu đơn vị thực phẩm mỗi loại cho mỗi bữa ăn để đảm bảo đủ chất dinh dưỡng cho gia súc và tổng số tiền chi mua thực phẩm là ít nhất ?

Mô hình toán học của bài toán :

$$\begin{cases} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Trong đó : x_j là số đơn vị thực phẩm j cần mua trong mỗi bữa ăn ($j = 1, 2,\dots, n$).

Bài toán đối ngẫu của nó có dạng

$$\begin{cases} g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to \max, \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \le c_j,\ j = 1, 2, \dots, n, \\ y_i \ge 0,\ i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Bây giờ xét công việc kinh doanh của một nhà sản xuất thuốc bổ. Gọi y_i là giá một đơn vị chất dinh dưỡng i ở dạng thuốc viên. Nếu người chăn nuôi biết giá của các loại thuốc này (cũng chính là giá một đơn vị chất dinh dưỡng tương ứng), người đó sẽ phải lựa chọn xem nên mua thuốc hay mua thực phẩm để đáp ứng nhu cầu về các chất dinh dưỡng trong khẩu phần thức ăn.

Vì giá một đơn vị thực phẩm j là c_j và giá trị của tất cả các chất dinh dưỡng (ở dạng thuốc viên) có trong một đơn vị thực phẩm j là $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m$, nên người chăn nuôi sẽ không mua thực phẩm j nếu $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m < c_j$, nghĩa là nếu giá tiền mua thuốc rẻ hơn mua thực phẩm, thì người chăn nuôi sẽ đặt $x_j = 0$ (không mua thực phẩm j mà mua thuốc bổ để thay thế).

Mặt khác, nếu nhà sản xuất thuốc đặt giá dương cho một đơn vị thuốc bổ i ($y_i > 0$) thì người chăn nuôi sẽ cố gắng đáp ứng ở mức tối thiểu yêu cầu về chất dinh dưỡng tương ứng trong khẩu phần thức ăn, nghĩa là nếu $y_i > 0$ thì người chăn nuôi sẽ tìm cách mua các loại thực phẩm sao cho

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i.$$

Tương tự như vậy có thể phân tích hành vi của nhà sản xuất thuốc.

Có thể thấy rằng các phân tích kinh tế nêu trên là phù hợp với những kết quả của lý thuyết đối ngẫu (định lý yếu về độ lệch bù) trong qui hoạch tuyến tính. Như vậy, cặp bài toán qui hoạch đối ngẫu nhau chính là cặp bài toán mà người chăn nuôi và nhà sản xuất thuốc cần giải khi muốn tối ưu hoá hoạt động của mình.

BÀI TẬP

1. Viết bài toán đối ngẫu của các qui hoạch tuyến tính sau:

a) $f = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \to \min,$

b) $f = x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$

điều kiện :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 10, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 9, \\ x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

điều kiện :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 8, \\ -x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -4, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \leq 0. \end{cases}$$

2. Xét qui hoạch tuyến tính:

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min,$$
$$\begin{cases} - x_2 + x_3 \geq -1, \\ x_1 - x_3 \geq -1, \\ -x_1 + x_2 \geq -1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng bài toán này trùng với bài toán đối ngẫu của nó (Bài toán tự đối ngẫu).

3. Xét bài toán qui hoạch tuyến tính

$$f(x) = 4x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq -2, \\ x_2 - x_3 \leq 4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \geq -3, \\ x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ -x_1 + 2x_3 \leq 3, \end{cases}$$

Viết bài toán đối ngẫu. Chứng tỏ $x^0 = (-1,1,1)$ là phương án cực biên tối ưu. Xác định một phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

4. Xét bài toán qui hoạch tuyến tính

$$f(x) = 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \min,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -6, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ 4x_1 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 \geq 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

a) Viết bài toán đối ngẫu.

b) Phân tích các tính chất của vectơ $x^0 = (2,0,0,8,6)$ đối với bài toán. Xác định tập phương án tối ưu và các phương án cực biên tối ưu của hai bài toán.

5. Chứng minh rằng nếu bài toán $\min\{\langle c, x\rangle : Ax = b, x \geq 0\}$ có phương án tối ưu thì các bài toán $\min\{\langle c, x\rangle : Ax = b', x \geq 0\}$ cũng có phương án tối ưu, trong đó b' là véctơ vế phải bất kỳ, miễn là miền ràng buộc $\{x \in R^n : Ax = b', x \geq 0\}$ không rỗng.

Gợi ý. Lập bài toán đối ngẫu.

6. Ký hiệu X là tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình $Ax \leq b, x \geq O$ và W là tập hợp nghiệm của hệ $wA \geq c, w \geq O$. Chứng minh rằng nếu $X \neq \varnothing$ và giới nội thì $W \neq \varnothing$ và không giới nội. Ngược lại, nếu $W \neq \varnothing$ và giới nội thì $X \neq \varnothing$ và không giới nội.

Gợi ý. Xét bài toán $\max\{x_1 + x_2 + ... + x_n : x \in X\}$ và bài toán đối ngẫu của nó.

7. Cho A là một ma trận m x n, $b \in R^m$, $c \in R^n$. Chứng minh rằng qui hoạch tuyến tính

$$\langle c, x\rangle - \langle b, y\rangle \to \min,$$

$$Ax \geq b, A^Ty \leq c, x \geq O, y \geq O,$$

hoặc là không có phương án hoặc là có giá trị tối ưu bằng 0.

8. Dùng phương pháp đơn hình đối ngẫu giải các bài toán qui hoạch tuyến tính sau đây và từ lời giải bài toán gốc suy ra lời giải của bài toán đối ngẫu.

a) $f = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 20, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

b) $f = 2x_1 + 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ x_1 + 2x_2 \geq 14, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

Chương 5 :

QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG ĐẶC BIỆT

§1. QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH VỚI BIẾN BỊ CHẶN TRÊN

1.1. Nội dung vấn đề

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính dạng bất kỳ (chính tắc, chuẩn tắc, tổng quát), trong đó một số hay tất cả các biến số có thêm ràng buộc sau đây, gọi là *ràng buộc cận trên*:

$$x_j \le u_j,\ j \in J \subset \{1, 2, \dots , n\}, \tag{1.1}$$

trong đó u_j là hằng số dương cho trước biểu thị giá trị tối đa mà biến x_j có thể nhận. Kinh nghiệm tính toán giải các bài toán qui hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình cho thấy thời gian giải phụ thuộc chủ yếu vào số ràng buộc chính m, còn các ràng buộc không âm (ràng buộc về dấu) có ảnh hưởng không đáng kể. Vì thế, nếu ghép thêm các ràng buộc cận trên (1.1) vào các ràng buộc chính sẽ làm tăng đáng kể thời gian tính toán. Để khắc phục nhược điểm này ta hãy tạm gác bỏ các ràng buộc cận trên khỏi các ràng buộc chính và sẽ xử lý chúng một cách riêng biệt, tương tự như đã làm đối với các ràng buộc về dấu. Việc tạm bỏ các ràng buộc cận trên như thế sẽ không ảnh hưởng tới kết quả giải, nếu như không có biến số nào tăng vượt quá cận trên của nó. Chỉ khi đưa một biến mới vào cơ sở (tăng giá trị của nó) để chuyển sang phương án cực biên mới, thì phương pháp đơn hình có thể sẽ làm tăng một số biến cơ sở. Vì thế, cần có biện pháp xử lý đảm bảo cho các biến cơ sở không tăng vượt quá cận trên của chúng.

1.2. Phương pháp xử lý biến bị chặn trên

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính với các biến bị chặn trên có dạng như sau:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min, \tag{1.2}$$

với các điều kiện

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \tag{1.3}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.4}$$

$$x_j \leq u_j,\ j = 1, 2, \dots, n_1 \leq n, \tag{1.5}$$

trong đó u_j là các hằng số dương hữu hạn cho trước. Khi $n_1 < n$ thì chỉ một số biến có cận trên, còn nếu $n_1 = n$ thì mọi biến đều bị chặn trên. Ký hiệu $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ là véctơ cột thứ j của ma trận ràng buộc (1.3).

Cũng như trước đây, véctơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ thoả mãn các điều kiện (1.3) - (1.5) được gọi là một *phương án*. Một phương án đạt cực tiểu của hàm mục tiêu (1.2) gọi là một *phương án tối ưu* hay *lời giải* của bài toán (1.2) - (1.5).

Về đại thể phương pháp giải bài toán (1.2) - (1.5) tương tự như phương pháp đơn hình giải qui hoạch tuyến tính, nghĩa là ta sẽ xuất phát từ một phương án cực biên nào đó, mỗi phương án cực biên sẽ tương ứng với một sơ sở, dựa vào cơ sở này ta sẽ tính ước lượng cho các biến phi cơ sở, nếu các ước lượng thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu thì dừng thuật toán. Trái lại, ta sẽ tìm cách thay đổi cơ sở để chuyển sang một phương án cực biên mới tốt hơn. Quá trình này được tiếp tục cho đến khi nhận được phương án tối ưu.

Các khái niệm phương án cực biên, cơ sở, tiêu chuẩn tối ưu ... về cơ bản vẫn tương tự như cũ, tuy nhiên cần có đôi chút sửa đổi cho phù hợp với bài toán mới (1.2) - (1.5).

Phương án x được gọi là *phương án cực biên* nếu hệ véctơ

$$\{A_j : 0 < x_j < u_j, j \leq n_1\} \cup \{A_j : x_j > 0, j > n_1\}$$

là độc lập tuyến tính.

Cơ sở của một phương án cực biên ở đây được hiểu là tập hợp chỉ số $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ thoả mãn $|J| = m$, $\{A_j : j \in J\}$ độc lập tuyến tính và

$$J \supset \{j : 0 < x_j < u_j, j \leq n_1\} \cup \{j : x_j > 0, j > n_1\}.$$

Các biến x_j, $j \in J$ gọi là *biến cơ sở*, còn biến x_j, $j \notin J$ gọi là *biến phi cơ sở*. Khác với phương pháp đơn hình thông thường, biến phi cơ sở ở đây có thể nhận giá trị dương: $x_j = u_j$.

Biến thể sau đây của phương pháp đơn hình cho phép giải bài toán (1.2) - (1.5) sau một số hữu hạn bước lặp.

Bước 0. Xây dựng phương án cực biên ban đầu x^1 (Chẳng hạn theo phương pháp phạt như ở §3, Chương 3). Ký hiệu cơ sở của phương án x^1 là J_1. Tìm các hệ số khai triển z_{jk} ($j \in J_1$, $k \notin J_1$) của véctơ A_k từ hệ phương trình

$$A_k = \sum_{j \in J_1} z_{jk} A_j \text{ , } k \notin J_1,$$

và tính các ước lượng

$$\Delta_k = \sum_{j \in J_1} z_{jk} c_j - c_k, \; k \notin J_1.$$

(Cũng như trước đây, $\Delta_j = 0$ với mọi $j \in J_1$ nên không cần tính).

Giá trị các biến cơ sở còn được tính từ hệ phương trình sau:

$$\sum_{j \in J_1} x_j A_j = b - \sum_{j \notin J_1} x_j A_j \text{ ,}$$

trong đó $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ là véctơ các hệ số ở vế phải ràng buộc (1.3).

Bảng đơn hình tương ứng với phương án cực biên x^1 có dạng như sau:

Biến cơ sở	C_J	Phương án	$x_1 = x_1^1$	$x_2 = x_2^1$	...	$x_n = x_n^1$
			c_1	c_2	...	c_n
x_{s_1}	c_{s_1}	z_{10}	z_{11}	z_{12}	...	z_{1n}
x_{s_2}	c_{s_2}	z_{20}	z_{21}	z_{22}	...	z_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_{s_m}	c_{s_m}	z_{m0}	z_{m1}	z_{m2}	...	z_{mn}
Bảng 1		$z_{m+1,0}$	$z_{m+1,1}$	$z_{m+1,2}$	...	$z_{m+1,n}$

trong đó z_{i0} là giá trị biến thứ i trong cơ sở (biến x_{s_i}), $z_{m+1,0}$ là giá trị hàm mục tiêu, $z_{m+1,j}$ là các ước lượng Δ_j.

Đặt k = 1 và tiến hành Bước 1 của vòng lặp thứ k.

Bước 1: kiểm tra tối ưu. Phương án hiện có x^k là tối ưu nếu điều kiện sau đây được thoả mãn

$$\begin{cases} \Delta_j \leq 0 \text{ với mọi } j \notin J_k \text{ và } x_j^k = 0, \\ \Delta_j \geq 0 \text{ với mọi } j \notin J_k, j \leq n_1 \text{ và } x_j^k = u_j. \end{cases}$$

Nếu tiêu chuẩn tối ưu trên đây không được thoả mãn thì ta chuyển sang Bước 2.

Bước 2: tìm cột quay. Chọn biến phi cơ sở x_s đựa vào cơ sở theo qui tắc:

$$\Delta = \max(\Delta^+, \Delta^-) \text{ với}$$

$$\Delta^+ = \max\{\Delta_j : j \notin J_k,\ x_j^k = 0\},$$

$$\Delta^- = \max\{-\Delta_j : j \notin J_k, j \leq n_1,\ x_j^k = u_j\},$$

(Theo qui ước chung max trên tập hợp rỗng bằng $-\infty$).

Ký hiệu $s \notin J_k$ là chỉ số sao cho $\Delta = |\Delta_s|$. Có hai trường hợp xảy ra:

a) $\Delta_s > 0$: giá trị biến cơ sở x_s với $x_s^k = 0$ sẽ tăng và biến này sẽ trở thành biến cơ sở nếu $s > n_1$ hoặc nếu $s \leq n_1$ và giá trị mới của nó chưa đạt tới cận trên u_s.

b) $\Delta_s < 0$: giá trị biến cơ sở x_s với $x_s^k = u_s$ sẽ giảm và biến này sẽ trở thành biến cơ sở nếu giá trị mới của nó vẫn dương.

Bước 3: tìm dòng quay. Ký hiệu

$$\theta = \min(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \text{ với} \tag{1.6}$$

$$\theta_1 = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } s > n_1, \\ u_s & \text{nếu } s \leq n_1. \end{cases}$$

- Trường hợp $\Delta_s > 0$:

$$\theta_2 = \min\left\{\frac{z_{i0}}{z_{is}} : z_{is} > 0\right\},$$

$$\theta_3 = \min\left\{\frac{u_{s_i} - z_{i0}}{-z_{is}} : z_{is} < 0,\ s_i \le n_1\right\}.$$

- Trường hợp $\Delta_s < 0$:

$$\theta_2 = \min\left\{\frac{z_{i0}}{-z_{is}} : z_{is} < 0\right\},$$

$$\theta_3 = \min\left\{\frac{u_{s_i} - z_{i0}}{z_{is}} : z_{is} > 0,\ s_i \le n_1\right\}.$$

(Nếu $s_i > n_1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$, nghĩa là mọi biến cơ sở đều không bị chặn trên thì đặt $\theta_3 = +\infty$. Điều này phù hợp với qui ước chung là min trên tập hợp rỗng bằng $+\infty$).

Nếu $\theta < \theta_1$ thì biến tương ứng với dòng đạt min của θ trong (1.6) sẽ bị loại khỏi cơ sở.

Bước 4: biến đổi cơ sở. Nếu $\theta = \theta_1$ thì cơ sở không thay đổi, chỉ có phương án và giá trị mục tiêu của bài toán biến đổi. Trái lại, ký hiệu r là dòng của bảng đơn hình đạt min của θ trong (1.6), khi đó biến s_r sẽ bị loại khỏi cơ sở và biến s sẽ trở thành biến cơ sở. Cơ sở mới sẽ là:

$$J_{k+1} = (J_k \setminus \{s_r\}) \cup \{s\}.$$

Bước 5: biến đổi phương án và giá trị hàm mục tiêu.

- Trường hợp $\Delta_s > 0$:

Giá trị các biến cơ sở:

$$z'_{i0} = z_{i0} - \theta.z_{is},\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Giá trị biến cơ sở mới khi $\theta < \theta_1$: $z'_{i0} = \theta$.

Giá trị biến phi cơ sở mới: nếu $\theta = \theta_1$ thì $x'_s = u_s$, còn nếu $\theta < \theta_1$ thì $x'_{s_r} = z_{r0} - \theta.z_{rs}$.

Giá trị mục tiêu: $z'_{m+1,0} = z_{m+1,0} - \theta.\Delta_s$.

- Trường hợp $\Delta_s < 0$:

Giá trị các biến cơ sở:

$$z'_{i0} = z_{i0} + \theta.z_{is},\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Giá trị biến cơ sở mới khi $\theta < \theta_1$: $z'_{i0} = u_s - \theta$.

Giá trị biến phi cơ sở mới: nếu $\theta = \theta_1$ thì $x'_s = 0$, còn nếu $\theta < \theta_1$ thì $x'_{s_r} = z_{r0} + \theta.z_{rs}$.

Giá trị mục tiêu: $z'_{m+1,0} = z_{m+1,0} + \theta.\Delta_s$.

Bước 6. Biến đổi dòng quay (dòng r):

$$z'_{rj} = z_{rj}/z_{rs},\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Biến đổi các dòng khác của bảng đơn hình:

$$z'_{ij} = z_{ij} - \frac{z_{rj}}{z_{rs}} z_{is} = z_{ij} - z'_{rj}z_{is},\ i = 1, 2, \dots, m+1,\ i \neq r;\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Như vậy, n cột cuối của bảng được biến đổi hoàn toàn giống như trong phương pháp đơn hình thông thường, chỉ có điều khác là ở đây phần tử quay có thể là số âm.

Quay lại Bước 1 của vòng lặp k + 1.

1.3. Ví dụ minh hoạ

Giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau:

$$f = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$$

với các điều kiện

$$4x_1 + x_2 = 8,$$

$$-2x_1 + x_3 = 4,$$

$$0 \le x_1 \le 4,\ 0 \le x_2 \le 10,\ 0 \le x_3 \le 6.$$

Trong bài toán này cả 3 biến đều bị chặn trên ($u_1 = 4$, $u_2 = 10$, $u_3 = 6$).

Bước 0. Phương án cực biên ban đầu: $x^1 = (0; 8; 4)$ (không cần thêm biến giả), x_2, x_3 là biến cơ sở $J_1 = \{2, 3\}$. x_1 là biến phi cơ sở.

(4, –2) là các hệ số khai triển của véctơ điều kiện A_1 theo các véctơ cơ sở A_2, A_3. $\Delta_1 = 4\times2 - 2\times1 - 1 = 5$.

Bảng đơn hình ban đầu có dạng:

Biến cơ sở	C_J	Phương án	$x_1 = 0$	$x_2 = 8$	$x_3 = 4$
			$c_1 = 1$	$c_2 = 2$	$c_3 = 1$
x_2	$c_2 = 2$	$z_{10} = 8$	$z_{11} = 4$	$z_{12} = 1$	$z_{13} = 0$
x_3	$c_3 = 1$	$z_{20} = 4$	$z_{21} = -2$	$z_{22} = 0$	$z_{23} = 1$
Bảng 1		$z_{30} = 20$	$z_{31} = 5$	$z_{32} = 0$	$z_{33} = 0$

Bước 1. Kiểm tra tối ưu: phương án x^1 hiện có chưa phải là tối ưu, vì biến phi cơ sở x_1 có $x_1^1 = 0$ và $\Delta_1 = 5 > 0$.

Bước 2. Tìm cột quay: biến x_1 được chọn đưa vào cơ sở.

Bước 3. Chọn dòng quay: $\theta_1 = u_1 = 4$, $\theta_2 = 8/4 = 2$, $\theta_3 = (6 - 4)/2 = 1$. Vậy: $\theta = \theta_3 = 1 < \theta_1$. Biến x_3 tương ứng bị loại khỏi cơ sở (r = 2). Phần tử quay là $z_{21} = -2$.

Bước 4. Đổi cơ sở: Do $\theta = 1 < \theta_1 = 4$ nên biến x_1 vào cơ sở thay cho biến cơ sở ở dòng 2 (biến x_3): $J_2 = \{2, 1\}$.

Bước 5. Biến đổi phương án và trị mục tiêu:

- Giá trị biến cơ sở: $z'_{10} = 8 - 1 \times 4 = 4$.
- Giá trị biến cơ sở mới: $z'_{20} = \theta = 1$.
- Giá trị biến phi cơ sở mới: $x_3^2 = u_3 = 6$.
- Giá trị mục tiêu: $z'_{30} = 20 - 1 \times 5 = 15$.

Bước 6. Sau khi biến đổi bảng (ba cột cuối) theo qui tắc đơn hình thông thường với phần tử quay là $z_{21} = -2$ ta thu được bảng đơn hình có dạng (ý nghĩa và các ký hiệu vẫn như trước):

Biến cơ sở	C_j	Phương án	$x_1 = 1$	$x_2 = 4$	$x_3 = 6$
			$c_1 = 1$	$c_2 = 2$	$c_3 = 1$
x_2	$c_2 = 2$	$z_{10} = 4$	$z_{11} = 0$	$z_{12} = 1$	$z_{13} = 2$
x_1	$c_1 = 1$	$z_{20} = 1$	$z_{21} = 1$	$z_{22} = 0$	$z_{23} = -0,5$
Bảng 2		$z_{30} = 15$	$z_{31} = 0$	$z_{32} = 0$	$z_{33} = 2,5$

Trở lại Bước 1 ta thấy: x_3 là biến phi cơ sở có $x_3^2 = u_3 = 6$ và $\Delta_3 = 2,5 > 0$, nên phương án hiện có $x^2 = (1; 4; 6)$ là phương án tối ưu. Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu bằng $z_{30} = 15$.

§2. BÀI TOÁN VẬN TẢI

2.1. Nội dung bài toán và các tính chất

1. **Nội dung bài toán**: Giả sử cần vận chuyển một loại hàng thuần nhất (vật tư, lương thực, ...) từ m địa điểm cung cấp (điểm phát) $A_1, A_2, ..., A_m$ đến n địa điểm tiêu thụ (điểm thu) $B_1, B_2, ..., B_n$. Biết rằng :

   - Số lượng hàng có ở A_i là a_i $(i = 1,..., m)$,
   - Số lượng hàng cần ở B_j là b_j $(j = 1,...,n)$,
   - Chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ A_i đến B_j là c_{ij} $(i = 1,...,m; j = 1,...,n)$.

Vấn đề đặt ra : Lập kế hoạch vận chuyển hàng từ các địa điểm cung cấp đến các địa điểm tiêu thụ để tổng chi phí vận chuyển bé nhất và thoả mãn nhu cầu thu phát.

Đây là một trong những bài toán điển hình và có nhiều ứng dụng nhất của QHTT. Bài toán này không có gì phức tạp nếu mạng lưới giao thông tương đối đơn giản và số địa điểm cung cấp, tiêu thụ không nhiều lắm. Tuy nhiên với những mạng lưới đường giao thông phức tạp thì bằng kinh nghiệm và trực giác khó có thể tìm ra được phương án tối ưu. Khi ấy, cần sử dụng các phương pháp, dựa vào tính chất đặc thù của bài toán để tìm phương án tối ưu.

✦ ***Mô hình toán học của bài toán*** : Gọi x_{ij} là số lượng hàng cần vận chuyển từ A_i đến B_j. Ta có :

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$: tổng chi phí vận chuyển,

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$: số lượng hàng chở đi từ A_i,

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$: số lượng hàng chở tới B_j.

⇒ mô hình toán học của bài toán là :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \text{ (cực tiểu tổng chi phí vận chuyển), (2.1)}$$

với điều kiện

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \text{ (mọi điểm phát giao hết hàng),} & (2.2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \text{ (mọi điểm thu nhận đủ hàng),} & (2.3) \\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1,\ldots, m,\ j = 1,\ldots, n \text{ (lượng hàng vận chuyển không âm).} & (2.4) \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ để bài toán (2.1) - (2.4) giải được là phải có điều kiện cân bằng thu phát, nghĩa là tổng cung bằng tổng cầu:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (2.5)$$

Bài toán vận tải (2.1) - (2.4) là một dạng đặc biệt của qui hoạch tuyến tính. Để thấy rõ điều này ta sắp xếp các biến số theo thứ tự x_{11}, $x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}$ và viết lại hệ ràng buộc chính (2.2) - (2.3) dưới dạng hệ m + n phương trình của m x n biến số x_{ij} như sau:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} \quad \ldots\ldots \quad + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} \quad \ldots\ldots \quad + x_{m2} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} \quad \ldots \quad \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases}$$

Ký hiệu A là ma trận hệ số của hệ phương trình trên (m + n hàng và m x n cột),

$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})^T$ - véctơ cột m x n thành phần,

$c = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn})^T$ - véctơ cột m x n thành phần,

$b = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ - véctơ cột vế phải (m + n thành phần).

Bài toán vận tải (2.1) - (2.4) được viết lại thành bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$f = \langle c, x\rangle \to \min, \qquad (2.6)$$

$$Ax = b, \; x \geq O. \qquad (2.7)$$

Ta gọi A_{ij} là véctơ cột của ma trận A ứng với biến x_{ij}. Dễ thấy rằng A_{ij} có thành phần thứ i và m + j bằng 1, còn các thành phần khác bằng 0.

Véctơ x thoả mãn (2.2) - (2.4) gọi là một *phương án* của bài toán vận tải. Một phương án đạt cực tiểu (2.1) gọi là *phương án tối ưu* hay *lời giải*. Phương án x là phương án cực biên khi và chỉ khi các vectơ cột A_{ij} của A ứng với các $x_{ij} > 0$ là độc lập tuyến tính. Sau đây ta sẽ giả thiết là có điều kiện cân bằng thu phát (2.5).

Do bài toán vận tải có m + n ràng buộc chính, nên ta nghĩ rằng mỗi phương án cực biên cũng có m + n thành phần dương, nhưng thực tế nó chỉ có nhiều nhất m + n – 1 thành phần dương, vì trong số các ràng buộc này có một ràng buộc là thừa (có thể bỏ đi mà không làm ảnh hưởng tới lời giải của bài toán). Một phương án cực biên của bài toán gọi là *không suy biến* nếu số phần tử của tập hợp $G = \{(i, j): x_{ij} > 0\}$ bằng $m + n - 1$, gọi là *suy biến* nếu $|G| < m + n - 1$.

2. Các tính chất của bài toán vận tải

Với điều kiện (2.5), bài toán vận tải (2.1) - (2.4) có các tính chất sau đây:

a) Bài toán luôn có phương án tối ưu.

b) Một trong các ràng buộc (2.2) - (2.3) là thừa và hạng của hệ ràng buộc này bằng $m + n - 1$.

c) Nếu các lượng cung và cầu a_i, b_j là các số nguyên thì bài toán sẽ có lời giải nguyên.

Có thể dùng phương pháp đơn hình để giải bài toán vận tải. Tuy nhiên do bài toán này có dạng đặc biệt nên người ta đã đề ra nhiều thuật toán giải hiệu quả. Trong số đó có thuật toán thế vị mà ta sẽ xét ở mục (2.3) dưới đây.

Mô tả bài toán vận tải dưới dạng bảng : Để cho gọn, trước hết ta ghi lại dữ liệu của bài toán dưới dạng một bảng chữ nhật, gồm m hàng và n cột (Bảng 2.1).

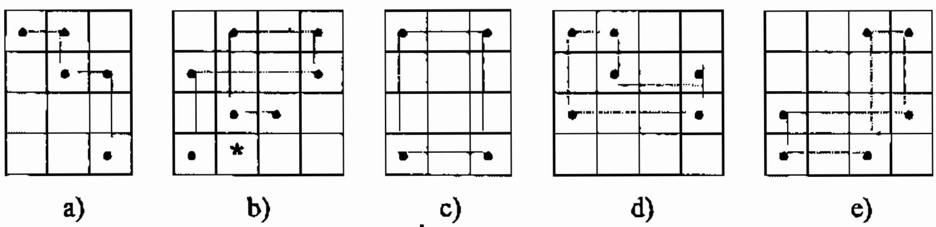
Bảng 2.1. Bảng vận tải

Phát \ Thu	b_1	...	b_j	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
a_i	c_{i1} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
a_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

Ô giao nhau ở hàng i và cột j, ký hiệu là ô (i, j). Mỗi hàng tương ứng với một trạm phát, mỗi cột tương ứng với một trạm thu. Số ghi ở đầu mỗi hàng là lượng cung, số ghi ở đầu mỗi cột là lượng cầu. Chi phí vận chuyển c_{ij} ghi ở góc trên bên trái của ô (i, j), lượng hàng vận chuyển x_{ij} sẽ ghi ở góc dưới bên phải của ô. Ô (i, j) biểu thị tuyến đường vận chuyển từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j. (Đặt $c_{ij} = \infty$ nếu không thể chuyển hàng từ A_i đến B_j).

- Một phương án của bài toán vận tải có thể xét như là một ma trận $x = (x_{ij})_{mxn}$.
- Một tập hợp các ô trong đó 2 ô liên tiếp bao giờ cũng nằm trên cùng một hàng hay một cột và 3 ô liên tiếp không nằm trên cùng một hàng hay một cột được gọi là một *dây chuyền*.
- Một dây chuyền khép kín được gọi là một *chu trình*. Một chu trình bao giờ cũng gồm một số chẵn các ô.

Ví dụ. Dãy ô đánh dấu "•" trong Hình 2.1 a) và b) lập thành các dây chuyền, còn các ô với dấu "•" trong Hình 1.1 c) → e) lập thành các chu trình.



Hình 2.1. Dây chuyền: a) - b). Chu trình: c) - e).

- Cho G là một tập hợp ô bất kỳ của bảng vận tải. Một ô thuộc G gọi là *ô treo* nếu nó là ô duy nhất của G trên hàng hay trên cột của ô đó. Với tập hợp ô cho ở Hình 2.1 a) thì ô (1, 1) và ô (4, 3) là các ô treo. Nếu loại khỏi G ô treo (1, 1) thì ô (1, 2) sẽ trở thành ô treo của tập hợp ô còn lại.

Ta có mối liên hệ quan trọng sau đây.

Định lí 2.1 :

Hệ véctơ A_{ij} của bài toán vận tải là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi các ô tương ứng với các véctơ này không tạo thành chu trình.

Hệ quả.

Véctơ x là một phương án cực biên của bài toán khi và chỉ khi tập hợp các ô (i, j) mà $x_{ij} > 0$ không lập thành chu trình.

Định lí 2.2 :

Số ô tối đa của bảng vận tải không lập thành chu trình là $m + n - 1$.

Định lí 2.3 :

Giả sử T là một tập hợp gồm $m + n - 1$ ô của bảng vận tải, không lập thành chu trình. Khi đó, mỗi ô $(p, q) \notin T$ sẽ tạo với các ô thuộc T một chu trình duy nhất.

Chu trình nói tới trong định lý trên có thể tìm bằng cách loại dần các ô treo của tập hợp ô $G = T \cup \{(p, q)\}$. Ví dụ, tập hợp ô T cho ở Hình 2.1 b) gồm $m + n - 1 = 7$ ô không tạo thành chu trình. Bổ sung vào T ô $(4, 2) \notin T$ (ô đánh dấu *) ta được $G = T \cup \{(4, 2)\}$. Khi đó, bằng cách loại khỏi G ô treo (3, 3) (ô duy nhất của G trên cột 3), rồi ô treo (3, 2) đối với tập hợp ô $G' = G \setminus \{(3, 3)\}$ (ô duy nhất của G' trên hàng 3), ta nhận được chu trình (gồm 6 ô):

$$C = \{(4, 2), (4, 1), (2, 1), (2, 4), (1, 4), (1, 2)\}.$$

2.2. Tìm phương án cực biên ban đầu

Để giải bài toán vận tải (2.1) - (2.4) với điều kiện (2.5) theo phương pháp thế vị, trước hết ta cần biết một phương án cực biên không suy biến của bài toán. Có nhiều cách để tìm một phương án như thế. Sau đây là hai phương pháp thông dụng và có hiệu quả nhất.

1. Phương pháp min cước

Trong bảng vận tải 2.1, ta chọn ô (p, q) sao cho $c_{pq} = \min \{c_{ij} : \forall(i, j)\}$. Nếu cực tiểu đạt tại nhiều ô thì ta chọn một ô bất kỳ trong số các ô đó. Sau đó phân phối hàng nhiều nhất có thể theo tuyến $A_p \to B_q$, nghĩa là đặt $x_{pq} = \min \{a_p, b_q\}$.

Trừ lượng hàng vừa phát vào khả năng thu, phát của hàng p và cột q. Tiếp đó, ta xoá hàng p nếu điểm phát A_p đã phát hết hàng, hoặc cột q nếu điểm thu B_q đã nhận đủ hàng. Khi cả hàng, cột đều hết và đủ hàng thì chỉ xóa hàng hoặc cột, không xoá đồng thời cả hai. Trong bảng còn lại, ta lại tìm ô có cước phí nhỏ nhất và phân phối tối đa lượng hàng còn lại vào ô này (lượng này có thể bằng 0). Phương án x thu được có đúng m + n - 1 ô đã phân hàng, nó là một phương án cực biên vì các ô đã chọn không tạo thành chu trình.

Ví dụ 1. Tìm phương án cực biên của bài toán vận tải cho ở bảng sau (bảng 2.1):

Bảng 2.2. Phương án cực biên xây dựng theo phương pháp min cước

				0	0
		0	0	110	70
	Thu / Phát	130	160	120	140
0 ,10	170	20	18 **160**	22 **10**	25
0 ,70	200	15 **130**	25	30	15 **70**
0,110	180	45	30	40 **110**	35 **70**

Kết quả ta nhận được phương án cực biên cho ở Bảng 2.2. Giá trị hàm mục tiêu tương ứng bằng 12950.

2. Phương pháp Vôghen

Phương pháp Vôghen (1958) cho phương án cực biên khá tốt, theo nghĩa nó khá gần với phương án tối ưu về giá trị mục tiêu và chỉ cần một số ít bước lặp của thuật toán thế vị là có thể tìm được phương án tối ưu. Nó chỉ khác phương pháp min cước ở cách chọn các ô để phân phối hàng. Giả sử $C = (c_{ij})_{m\times n}$ là ma trận cước phí của bài toán vận tải.

a. Đối với mỗi hàng và mỗi cột của C ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất trên hàng (cột) đó.

b. Chọn hàng hay cột có hiệu số này lớn nhất. Nếu có nhiều hàng (cột) như thế thì chọn một hàng (cột) tuỳ ý trong số đó.

c. Phân lượng hàng tối đa có thể vào ô có cước phí nhỏ nhất trên hàng (cột) đã chọn. Giả sử đó là ô (r, s). Giảm lượng cung ở hàng r và lượng cầu ở cột s một số bằng lượng hàng đã phân phối. Sự phân phối này sẽ làm thoả mãn một ràng buộc cung, một ràng buộc cầu, hoặc có thể cả hai. Loại bỏ (không cần xét tiếp) ràng buộc đã thoả mãn bằng cách đánh dấu chéo vào hàng hay cột tương ứng của ma trận cước phí. Nếu cả hai ràng buộc cung và cầu cùng thoả mãn đồng thời thì chỉ loại bỏ một hàng (cột) mà thôi. Trong trường hợp này cả lượng cung và cầu còn lại của hàng (cột) đó đều trở thành bằng 0.

d. Lặp lại các thao tác a, b và c cho tới khi chỉ còn lại một hàng hay cột duy nhất. Lượng hàng phân vào các ô thuộc hàng (cột) này hoàn toàn được xác định bởi các lượng hàng đã phân phối trước đó.

Ví dụ 2. Xét lại ví dụ 1 vừa nêu trên. Tính hiệu số của các hàng và cột của ma trận cước phí và khoanh tròn hiệu số lớn nhất.

Bảng 2.3. Phương án cực biên xây dựng theo phương pháp Vôghen

		0 70	0 160	0 20	0	
	Thu / Phát	130	160	120	140	Hiệu số
0 ,100	170	20 **70**	18	22 **100**	25	2 2 4 x
0 ,60	200	15 **60**	25	30	15 **140**	0 10 x
0 ,20	180	45	30 **160**	40 **20**	35	5 10 10 x
	Hiệu số	5 25 x	7 12 x	8 18 x	10 x	

Kết quả ta nhận được phương án cực biên ghi ở Bảng 2.3. Giá trị hàm mục tiêu tương ứng bằng 12200. Rõ ràng phương án này tốt hơn phương án tìm theo min cước ở trên.

Phương pháp Vôghen còn có thể cải tiến nhờ dùng một thủ tục do Larson R.E. đề xuất năm 1972. Tuy thủ tục này hơi phức tạp đối với tính toán bằng tay, nhưng lại có thể tính toán nhanh chóng trên máy tính. Thay cho các cước phí c_{ij} đã cho, ta dùng các cước phí chuẩn hoá xác định như sau:

$$c'_{ij} = c_{ij} - \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} c_{pj} - \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} c_{iq}\,.$$

Điều này có nghĩa là mỗi phần tử c_{ij} bị trừ đi một lượng bằng trung bình các cước phí trên hàng và cột của nó. Sau đó, ta áp dụng phương pháp Vôghen cho ma trận $C' = [c'_{ij}]$.

Ví dụ 3. Xét bài toán vận tải với dữ liệu cho trong bảng sau:

Phát \ Thu	60	80	100	120
100	8	6	7	3
120	6	3	8	9
140	6	1	2	4

Ma trận cước phí chuẩn hoá có dạng:

$$C' = \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{25}{3} \\ -\frac{43}{6} & -\frac{41}{6} & -\frac{25}{6} & -\frac{17}{6} \\ -\frac{47}{12} & -\frac{67}{12} & -\frac{83}{12} & -\frac{55}{12} \end{bmatrix}.$$

Áp dụng phương pháp Vôghen vào ma trận này ta nhận được phương án cực biên ghi ở Bảng 2.4. Sau này có thể thấy rằng phương án này là tối ưu với cước phí vận chuyển nhỏ nhất bằng $f_{min} = 1140$.

Bảng 2.4. Phương án cực biên xây dựng theo phương pháp Vôghen cải tiến

Phát \ Thu	60	80	100	120
100	8	6	7	3 **100**
120	6 **60**	3 **60**	8	9
140	6	1 **20**	2 **100**	4 **20**

Các biến x_{ij} đã được gán giá trị trong các phương pháp nêu trên gọi là các *biến cơ sở*. các biến x_{ij} còn lại xem như được gán giá trị 0 và gọi là các *biến phi cơ sở*.

Chú ý. Ngoài hai phương pháp trên, để tìm phương án cực biên ban đầu ta còn có thể dùng *phương pháp góc tây bắc* (xem [4]). Tuy nhiên phương pháp này thường ít hiệu quả, nó chỉ tiện cho việc lập trình trên máy tính.

2.3. Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải

Phương pháp thế vị dựa trên các nhận xét sau:

1. Nếu ta thay ma trận cước phí C của bài toán vận tải bởi ma trận C' nhận được từ C bằng cách bớt số u_i (tuỳ ý) từ mỗi phần tử ở hàng i của C và bớt số v_j (tuỳ ý) từ mỗi phần tử ở cột j của C, nghĩa là

$$c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j,\ i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n,$$

   thì lời giải của bài toán vận tải không thay đổi.

2. Cho $x = \{x_{ij}\}$ là một phương án của bài toán vận tải. Nếu $C = \{c_{ij}\}$ không âm ($c_{ij} \geq 0, \forall i, j$) và $x_{ij} > 0$ chỉ với các ô (i, j) mà $c_{ij} = 0$, thì x là phương án tối ưu của bài toán.

Nội dung phương pháp thế vị như sau:

Bước 0. Xây dựng phương án cực biên ban đầu (phương pháp min cước hay phương pháp Vôghen đã nêu ở mục trên). Đặt $T = \{(i, j) : x_{ij}$

là biến cơ sở}. Khi đó T gồm đúng m + n − 1 ô không tạo thành chu trình. Các ô thuộc T gọi là *ô chọn*, các ô khác là *ô loại*.

Bước 1: Qui không cước phí các ô chọn. Tìm các thế vị u_i, v_j và biến đổi ma trận $C = \{c_{ij}\}$ thành ma trận $C' = \{c_{ij} - u_i - v_j\}$ sao cho $c'_{ij} = 0$ (hay $u_i + v_j = c_{ij}$) với mọi $(i,j) \in T$.

Bước 2: Kiểm tra tối ưu. Nếu $c'_{ij} \geq 0$ với mọi $(i, j) \notin T$ thì dừng: phương án hiện có là tối ưu và bài toán đã giải xong. Trái lại, chuyển sang bước điều chỉnh phương án.

Bước 3: Điều chỉnh phương án. Tìm ô (r, s) thoả mãn

$$c'_{rs} = \min \{c'_{ij} : (i, j) \notin T\} < 0.$$

Tìm chu trình U tạo bởi ô (r, s) với các ô thuộc T, chẳng hạn bằng cách loại dần các ô treo trên hàng và cột. Đánh dấu các ô thuộc chu trình U: ô (r, s) mang dấu (+), ô nối tiếp trên U mang dấu (-). Khi đó các ô trên U chia thành hai lớp: U^+ là các ô mang dấu (+) và U^- là các ô mang dấu (-). Tính

$$h \equiv x_{pq} = \min \{x_{ij} : (i, j) \in U^- \} \geq 0.$$

Điều chỉnh phương án:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{nếu } (i, j) \notin U, \\ x_{ij} + h & \text{nếu } (i, j) \in U^+, \\ x_{ij} - h & \text{nếu } (i, j) \in U^-. \end{cases} \qquad (2.8)$$

$$T' = (T \setminus \{(p, q)\}) \cup \{(r, s)\}.$$

Quay trở lại thực hiện bước 1.

Nếu mọi phương án cực biên của bài toán vận tải đều không suy biến thì sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ nhận được phương án tối ưu (lời giải) của bài toán.

Chú ý. Hiện tượng suy biến trong bài toán vận tải cũng giống như trong bài toán qui hoạch tuyến tính, nghĩa là có ít nhất một biến cơ sở nhận giá trị 0. Hiện tượng này xẩy ra theo hai dạng. Một là, có thể là khi tìm phương án cực biên ban đầu cả hai ràng buộc cung và cầu cùng thoả mãn đồng thời. Hai là, có thể có nhiều khả năng lựa chọn biến x_{pq} loại khỏi tập hợp biến cơ sở. Dù trường hợp nào xẩy ra thì cũng sẽ có ít nhất một biến cơ sở nhận giá trị 0. Hiện tượng suy biến không gây ra khó khăn gì lớn. Trên thực tế người ta cũng chưa gặp bài toán vận tải nào xảy ra hiện tượng suy biến. Vì thế, trong quá trình giải bài toán vận tải ta không cần bận tâm tới vấn đề này.

Ví dụ 4. Giải tiếp bài toán vận tải với phương án cực biên ban đầu cho ở Bảng 2.2.

Vòng lặp 1 :

Bước 1. Tập hợp các ô chọn: T = {(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 4)} (xem Bảng 2.2). Ta tìm các thế vị u_i và v_j từ hệ ($m + n - 1 = 6$) phương trình:

(a) $u_1 + v_2 = c_{12} = 18$, (b) $u_1 + v_3 = c_{13} = 22$, (c) $u_2 + v_1 = c_{21} = 15$,

(d) $u_2 + v_4 = c_{24} = 15$, (e) $u_3 + v_3 = c_{33} = 40$, (f) $u_3 + v_4 = c_{34} = 35$.

Để giải hệ này ta đặt $v_1 = 0$. Ta có

từ (c): $u_2 = 15$, từ (d): $v_4 = 0$, từ (f): $u_3 = 35$,

từ (e): $v_3 = 5$, từ (b): $u_1 = 17$, từ (a): $v_2 = 1$,

Bảng 2.5. Tính các thế vị u_i, v_j.

20	18 **160**	22 **10**	25	u_1= 17
15 **130**	25	30	15 **70**	u_2=15
45	30	40 **110**	35 **70**	u_3=35
v_1=0	v_2=1	v_3=5	v_4=0	

Tính $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ với mọi ô $(i, j) \notin T$, ta nhận được ma trận C' ghi ở Bảng 2.6.

Bảng 2.6. Biến đổi ma trận cước phí C → C' = $\{c_{ij} - u_i - v_j\}$

3	0 − **160**	0 + **10**	8
0 **130**	9	10	0 **70**
10	−6 +	0 − **110**	0 **70**

Bước 2. Do còn $c'_{32} = -6 < 0$ nên phương án ở Bảng 2.6 chưa tối ưu.

Bước 3. Ô chọn mới là ô (3, 2) vì $c'_{32} = \min \{c'_{ij}: (i, j) \notin T\} = -6 < 0$.

Chu trình tạo nên bởi ô (3, 2) với các ô thuộc T là U = {(3, 2), (1, 2), (1, 3), (3, 3)}. Từ đó U^+ = {(3, 2), (1, 3)} và U^-= {(1, 2), (3, 3)}.

Lượng hàng nhỏ nhất trong các ô $\in U^-$

bằng $h = x_{33} = \min \{160, 110\} = 110$.

Điều chỉnh phương án ở Bảng 2.6 theo (2. 8) ta được phương án ở Bảng 2.7.

Tập hợp ô chọn mới là T' = {(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 4)}.

Quay trở lại thực hiện Bước 1.

Bảng 2.7. Phương án mới và hệ thống thế vị tương ứng

3	0 **50**	0 **120**	8	$u_1 = 6$
0 **130**	9	10	0 **70**	$u_2 = 0$
10	−6 **110**	0	0 **70**	$u_3 = 0$
$v_1 = 0$	$v_2 = -6$	$v_3 = -6$	$v_4 = 0$	

Vòng lặp 2:

Bước 1. Hệ thống thế vị mới tương ứng với tập hợp ô chọn T' được ghi ở Bảng 2.7.

Biến đổi ma trận C' ta nhận được C" ở Bảng 2.8.

Bảng 2.8. Biến đổi ma trận cước phí $C' \to C'' = \{c'_{ij} - u_i - v_j\}$

–3 +	0 - **50**	0 **120**	2
0 - **130**	15	16	0 + **70**
10	0 + **110**	6	0 - **70**

Bước 2. Do còn $c''_{11} = -3 < 0$ nên phương án ở Bảng 2.8 chưa tối ưu.

Bước 3. Ô chọn mới là ô (1, 1) vì $c''_{11} = \min \{c''_{ij}: (i, j) \notin T\} = -3 < 0$.

Chu trình tạo nên bởi ô (1, 1) với các ô thuộc T' là C = {(1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 4), (2, 4), (2, 1)}. Từ đó U^+ = {(1, 1), (3, 2), (2, 4)} và U^- = {(1, 2), (3, 4), (2, 1)}.

Lượng hàng nhỏ nhất trong các ô $\in U^-$

bằng $h = x_{12} = \min \{50, 70, 130\} = 50$.

Điều chỉnh phương án ở Bảng 2.8 theo (2. 8) ta được phương án ở Bảng 2.9.

Tập hợp ô chọn mới là T" = {(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 4)}.

Quay trở lại thực hiện Bước 1.

Bảng 2.9. Phương án mới và hệ thống thế vị tương ứng

–3 **50**	0	0 **120**	2	$u_1=-3$
0 **80**	15	16	0 **120**	$u_2=0$
10	0 **160**	6	0 **20**	$u_3=0$
$v_1=0$	$v_2=0$	$v_3=3$	$v_4=0$	

Bảng 2.10. Biến đổi ma trận cước phí C" → C'" = {c"$_{ij}$ – u_i – v_j}

0 **50**	3	0 **120**	5
0 **80**	15	13	0 **120**
10	0 **160**	3	0 **20**

Vòng lặp 3 :

Bước 1. Hệ thống thế vị mới tương ứng với tập hợp ô chọn T" được ghi ở Bảng 2.9.

Biến đổi ma trận C" ta nhận được C'" ở Bảng 2.10.

Bước 2. Do mọi c'"$_{ij}$ ≥ 0 nên phương án cho ở Bảng 2.10 là tối ưu. Cước phí vận chuyển nhỏ nhất bằng f_{min} = 12140.

2.4. Một số dạng đặc biệt của bài toán vận tải

1. Trường hợp chỉ có hai trạm phát hoặc hai trạm thu

Bài toán vận tải (2.1) - (2.5) với m = 2 hoặc n = 2 có thể giải rất dễ dàng. Chẳng hạn, khi số trạm phát bằng 2 (m = 2) ta có bảng vận tải:

A_i \ B_j	b_1	b_2	b_3	...	...	b_{n-1}	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	...	...	$c_{1,n-1}$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	...	...	$c_{2,n-1}$	c_{2n}

- Tính các hiệu số $\alpha_j = c_{2j} - c_{1j}$.
- Sắp xếp các điểm thu theo thứ tự các α_j giảm dần: $j_1, j_2, \dots, j_n$.
- Lần lượt phân hàng từ điểm phát 1 cho các điểm thu theo thứ tự trên cho đến khi hết hàng. Sau đó phân hàng từ điểm phát 2 cho các điểm thu còn lại.

Ví dụ 1 : Giải bài toán vận tải với các dữ liệu cho trong bảng sau (m = 2, n = 7).

A_i \ B_j	10	12	15	18	20	25	30
60	3 **10**	5 **12**	4 **15**	6 **18**	1 **5**	3	6
70	8	9	7	8	2 **15**	3 **25**	5 **30**
α_j	5	4	3	2	1	0	-1

Cước phí vận chuyển nhỏ nhất bằng $f_{min} = 518$.

Trường hợp bài toán vận tải chỉ có hai trạm thu (n = 2) ta làm tương tự.

2. Trường hợp không cân bằng thu phát

Trường hợp này có thể qui về trường hợp cân bằng thu phát bằng cách thêm vào một điểm thu hay điểm phát giả như sau.

a) Trường hợp cung lớn hơn cầu: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, ta thêm một cột thu giả với lượng thu

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

và $c_{i,n+1} = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$. Giải bài toán với m điểm phát và n + 1 điểm thu. Tuy nhiên khi tìm phương án cực biên ban đầu ta phân phối các cột chính trước, còn thừa mới đến cột thu phụ. Nếu trong phương án tối ưu có $x_{i,n+1} > 0$ thì có nghĩa là điểm phát A_i để lại lượng hàng $x_{i,n+1}$.

b) Trường hợp cung nhỏ hơn cầu: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, ta thêm một hàng phát giả với

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

và $c_{m+1\,j} = 0$, $\forall j = 1, 2, ..., n$. Giải bài toán với m + 1 điểm phát và n điểm thu. Nếu trong phương án tối ưu có $x_{m+1\,j} > 0$ thì có nghĩa là điểm thu B_j bị thiếu lượng hàng $x_{m+1\,j}$.

Ví dụ 2 : Xét bài toán vận tải với dữ liệu cho trong Bảng 2.11 a). Tổng cung bằng 180, tổng cầu bằng 100. Cung vượt cầu 180 - 100 = 80. Ta thêm vào điểm thu 4 (điểm thu giả) với lượng cầu = 80 và lập bảng vận tải như ở Bảng 2.11 b). Dùng phương pháp min cước ta nhận được phương án tối ưu cho ở bảng 2.11 c) với $f_{min} = 330$. Do $x_{14} = 30$, $x_{34} = 50$ nên điểm phát A_1 để lại lượng hàng 30, điểm phát A_3 để lại lượng hàng 50.

Bảng 2.11. Bài toán vận tải với "cung" vượt "cầu".

A_i \ B_j	30	40	30
70	6	4	5
40	8	3	2
50	7	5	6
20	5	1	2

a)

A_i \ B_j	30	40	30	80
70	6	4	5	0
40	8	3	2	0
50	7	5	6	0
20	5	1	2	0

b)

A_i \ B_j	30	40	30	80
70	6 **30**	4 **10**	5	0 **30**
40	8	3 **10**	2 **30**	0
50	7	5	6	0 **50**
20	5	1 **20**	2	0

c)

3. Bài toán tìm cực đại

Trong một số tình huống thực tiễn ta cần giải bài toán tìm cực đại:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \max,$$

với các điều kiện (2.2) - (2.5) của bài toán vận tải đã xét ở trên. Bài toán này có thể đưa về bài toán cực tiểu hoá hàm - f với cùng các ràng buộc (2.2) - (2.5). Tuy nhiên ta cũng có thể dùng phương pháp thế vị để giải mà không cần đưa về bài toán tìm min. Chỉ cần thực hiện một số sửa đổi như sau:

- Khi xây dựng phương án cực biên ban đầu, ta ưu tiên phân "hàng" vào các ô có c_{ij} lớn nhất.
- Sau khi qui không "cước phí" các ô chọn, phương án là tối ưu nếu tất cả các ô loại đều có cước phí ≤ 0.
- Khi cần tìm ô chọn mới (ở bước điều chỉnh phương án) thì ta chọn ô loại có "cước phí" dương lớn nhất.

Ví dụ 3 : Trong một xưởng chế biến có 3 công nhân A, B, C và 3 công việc I, II, III. Năng suất làm việc (tính ra tiền hoặc sản phẩm) của mỗi công nhân đối với mỗi công việc được cho ở bảng 2.12. Bài toán đặt ra là : Tìm cách giao mỗi công nhân đúng một việc sao cho tổng năng suất đạt được là cao nhất.

Bảng 2.12. Bài toán tìm cực đại

Công việc / Năng suất / Công nhân	I (1)	II (1)	III (1)
A (1)	6	5	4
B (1)	4	5	4
C (1)	4	5	3

Bài toán này có dạng bài toán vận tải, trong đó các nơi phát là các loại công nhân và các nơi thu là các công việc; lượng hàng là công nhân. Phương án cực biên ban đầu cho ở bảng 2.13. và là phương án tối ưu. Trong phương án này :

- Công nhân A làm việc I,
- Công nhân B làm việc III,
- Công nhân C làm việc II.

Bảng 2.13. Phương án tối ưu

Công việc / Năng suất / Công nhân	I (1)	II (1)	III (1)	
A (1)	6 / **1**	5	4 / **0**	$r_1 = 0$
B (1)	4	5 / **0**	4 / **1**	$r_2 = 0$
C (1)	4	5 / **1**	3	$r_3 = 0$
	s1 = -6	s2 = -5	s3 = -4	

Chú ý : bài toán dạng này suy biến.

4. Bài toán vận tải có hạn chế khả năng thông qua

Bài toán này có dạng như sau:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \qquad (2.9)$$

với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \qquad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, \dots, n, \tag{2.11}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij},\ i = 1,\dots, m,\ j = 1,\dots, n. \tag{2.12}$$

Các ký hiệu có cùng ý nghĩa như trong bài toán (2.1) - (2.4). ở đây d_{ij} là khả năng thông qua, biểu thị lượng hàng tối đa có thể vận chuyển từ điểm phát A_i tới điểm thu B_j.

Chú ý là điều kiện cân bằng thu phát (2.5) chỉ là điều kiện cần (nhưng không đủ) để bài toán (2.9) - (2.12) là giải được.

Bài toán vận tải có hạn chế khả năng thông qua là một trường hợp riêng của bài toán qui hoạch tuyến tính với biến bị chặn trên. Tuy nhiên, do bài toán có cấu trúc đặc biệt nên có thể giải nó theo các phương pháp riêng, hiệu quả hơn. Đáng chú ý là thuật toán Ford - Fulkerson.

Ý đại thể của phương pháp này như sau. Xuất phát từ phương án không (chưa vận chuyển hàng), ta sẽ lần lượt phân phối hàng từ các điểm phát tới các điểm thu, theo nguyên tắc ưu tiên đường gần. Trong quá trình phân phối hàng, điểm phát nào chưa phát hết hàng sẽ được gọi là *điểm phát thừa*, điểm thu nào chưa nhận đủ hàng sẽ gọi là *điểm thu thiếu*.

Ở mỗi bước lặp, ta tìm đường đi có chi phí nhỏ nhất từ một điểm phát thừa tới một điểm thu thiếu. Đường đi này bao gồm một dãy các điểm phát, điểm thu kế tiếp nhau sao cho trên các điểm phát - thu lượng hàng vận chuyển chưa đạt tới khả năng thông qua (độ dài của đoạn xem như bằng cước phí vận chuyển một đơn vị hàng trên đoạn đó), còn trên các đoạn thu - phát thì lượng hàng vận chuyển phải dương (độ dài của đoạn là số đối của cước phí vận chuyển một đơn vị hàng trên đoạn này).

Tiếp đó, ta xác định khả năng thông qua của đường đi ngắn nhất vừa tìm được, đó là số nhỏ nhất trong số các khả năng thông qua còn lại trên các đoạn phát - thu (độ dài dương) và lượng hàng vận chuyển trên các đoạn thu - phát (độ dài âm). Thêm khả năng thông qua này vào các đoạn phát - thu và bớt đi ở các đoạn thu - phát. Rồi chuyển qua bước lặp sau.

Quá trình này được lặp lại cho tới khi mọi điểm phát đều phát hết hàng và mọi điểm thu đều nhận đủ hàng, hoặc tới khi phát hiện mạng không đủ khả năng vận chuyển toàn bộ lượng hàng có ở các điểm phát tới các điểm thu (do khả năng thông qua của các đoạn nhỏ hơn so với nhu cầu vận chuyển). Trong trường hợp thứ nhất ta thu được lời giải của bài toán (2.9) - (2.12): phương án vận chuyển đạt chi phí nhỏ nhất.

Bạn đọc muốn tìm hiểu kỹ về thuật toán Ford - Fulkerson có thể xem [8], [10].

§3. PHƯƠNG PHÁP SƠ ĐỒ MẠNG PERT

3.1. Nội dung vấn đề

Trong công nghiệp, xây dựng và trong nhiều lĩnh vực hoạt động khác, các dự án hay công trình muốn hoàn thành đòi hỏi phải tiến hành một khối lượng lớn các công việc, kế tiếp và song song xen kẽ nhau theo một trình tự phức tạp : mỗi việc chỉ có thể bắt đầu sau khi một số việc nào đó đã hoàn thành. Vì vậy, kế hoạch tiến hành dự án phải được soạn thảo một cách kỹ lưỡng, tính toán thật tỉ mỉ thì mới có thể hoàn thành toàn bộ dự án đúng thời hạn và với chất lượng cao.

Để giúp giải quyết vấn đề này có các công cụ ra đời từ cuối những năm 1950, dựa trên việc sử dụng lý thuyết đồ thị và lý thuyết mạng. Đáng chú ý hơn cả là kỹ thuật đánh giá và kiểm tra dự án PERT (viết tắt của Program Evaluation and Review Technique) và phương pháp đường găng CPM (Critical Path Method). Về sau cả hai kỹ thuật này được kết hợp lại với tên gọi chung là *phương pháp sơ đồ mạng PERT*. Đó là một công cụ hữu ích giúp lập kế hoạch và quản lý các dự án lớn, phức tạp một cách có hiệu quả.

Mục tiêu chính của phương pháp này là đánh giá khả năng hoàn thành dự án trong thời hạn định trước. Nó giúp phát hiện những việc trọng điểm (còn gọi là việc "găng"), cần tập trung chỉ đạo để đảm bảo thực hiện đúng tiến độ đề ra. Phương pháp này còn giúp đánh giá ảnh hưởng của những thay đổi trong quá trình thực thi dự án. Chẳng hạn, ảnh hưởng của việc chuyển một phần vật tư, phương tiện từ những công việc tạm thời chưa găng sang các việc găng hoặc ảnh hưởng của những sai lệch so với tiến độ chung ...

Cụ thể hơn, giả sử ta cần thực hiện một dự án nào đó. Dự án gồm nhiều công việc khác nhau. Cho biết:

- Trình tự thực hiện các công việc: công việc nào có thể làm ngay, công việc nào phải làm sau khi đã hoàn thành mọt số công việc khác, ...
- Thời gian cần thiết để hoàn thành mỗi công việc.

Vấn đề đặt ra là tính toán các chỉ tiêu thời gian sau đây:

a) Thời hạn sớm nhất để hoàn thành toàn bộ dự án?

b) Thời điểm bắt đầu sớm nhất và muộn nhất của mỗi công việc sao cho toàn bộ dự án được thực hiện trong thời hạn đã tính ở thời điểm trên?

c) Thời điểm kết thúc sớm nhất và muộn nhất của mỗi công việc?

d) Thời gian dự trữ của mỗi công việc, nghĩa là khoảng thời gian tối đa mà công việc có thể chậm trễ hoặc kéo dài nhưng vẫn không ảnh hưởng gì tới thời gian hoàn thành toàn bộ dự án?

Sử dụng phương pháp PERT ta có thể dễ dàng giải quyết các vấn đề nêu trên.

3.2. Cơ cấu của sơ đồ mạng

1. Định nghĩa sơ đồ mạng

Tập hợp các điểm (gọi là các *đỉnh*) và các mũi tên (gọi là các *cung*) được gọi là một sơ đồ mạng nếu chúng thoả mãn các điều kiện sau:

a) Giữa 2 đỉnh có không quá 1 cung nối liền, ngược lại mỗi cung phải liên kết với 2 đỉnh nào đó. Cung nối đỉnh i với đỉnh j, ký hiệu là (i, j), trong đó i gọi là *điểm gốc* và j gọi là *điểm ngọn*.

b) Điểm gốc và điểm ngọn của mỗi cung không trùng nhau.

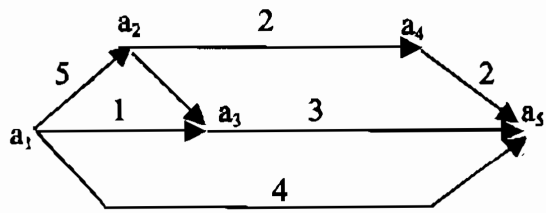
c) Một dãy các cung nối tiếp nhau thì không bao giờ điểm ngọn của cung cuối cùng lại trùng với điểm gốc của cung đầu tiên. Một dãy như vậy gọi là *đường đi*.

d) Giữa 2 đỉnh bao giờ cũng có một dãy các cung nối liền.

e) Có 1 đỉnh chỉ toàn cung đi ra (gọi là *đỉnh khởi công*) và có 1 đỉnh chỉ toàn cung đi tới (gọi là *đỉnh kết thúc*), các đỉnh còn lại thì có cả cung đi ra và cung đí tới.

f) Mỗi cung (i,j) đều có tương ứng 1 số t_{ij}, gọi là *độ dài* của cung đó.

Ví dụ 1 :



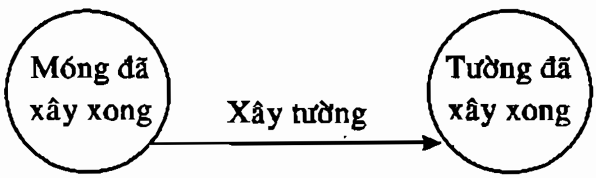
Hình 3.1. Một sơ đồ mạng.

Độ dài của đường đi μ trong sơ đồ mạng là tổng độ dài của các cung thuộc đường đi đó, ký hiệu là L(μ).

$$L(\mu) = \sum_{(i,j)\in\mu} t_{ij} .$$

2. Ý nghĩa thực tế của sơ đồ mạng : .

Sơ đồ mạng dùng để biểu thị một quá trình thực hiện một dự án (project) nào đó, chẳng hạn thực hiện việc xây dựng một nhà máy, một chiếc cầu ... Trong sơ đồ mạng, đỉnh biểu thị sự kiện, cung biểu thị công việc. Chẳng hạn, trong xây dựng : móng đã xây xong là sự kiện, nó là sự kiện biểu thị sự bắt đầu của công việc xây tường; tường đã xây xong là sự kiện kết thúc việc xây tường và là điều kiện để bắt đầu công việc khác.



Hình 3.2.

Một sự kiện được gọi là hoàn thành khi mọi công việc dẫn tới nó hoàn thành.

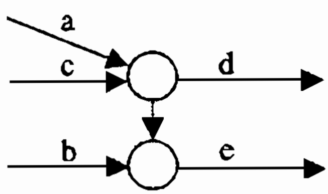
Ghi chú : Trong sơ đồ mạng có 2 yếu tố logic là công việc và sự kiện. Công việc có thể hiểu :

- Một việc làm thật sự (có thể gồm nhiều việc nhỏ hoặc một bộ phận của một việc lớn nào đó), tức là tương ứng với nó cả chi phí về thời gian và tài nguyên; được biểu thị bằng cung liền nét.

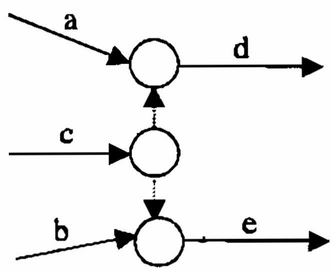
- Một sự chờ đợi nào đó (chờ sơn khô, chờ bê tông đủ cường độ ...), có chi phí về thời gian nhưng không có chi phí về tài nguyên; cũng biểu thị bằng cung liền nét.
- Dùng để phản ảnh trình tự logic của các công việc, không có chi phí về thời gian lẫn tài nguyên (công việc giả); biểu thị bằng cung rời nét.

Ví dụ 2:

- Nếu có công việc d chỉ chờ đợi các công việc a và c, còn công việc e thì chờ đợi cả a, b, c thì ta biểu diễn như Hình 3.3-a.
- Nếu công việc d chờ đợi a và c, còn e thì chờ đợi a và b thì ta biểu diễn như Hình 3.3-b.



Hình 3.3-a

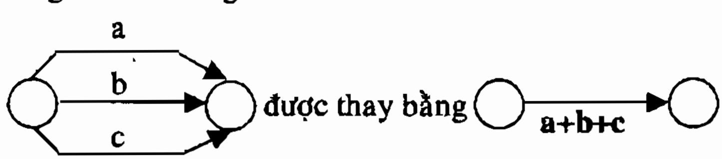


Hình 3.3 -b

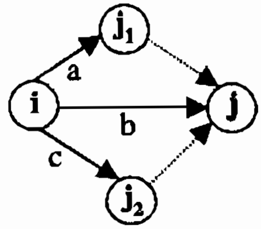
3. Vài quy tắc thực hành để lập sơ đồ mạng :

Quy tắc 1 : Nếu 2 hay nhiều công việc cùng làm song song (cùng sự kiện khởi công và kết thúc) thì ta xử lý như sau :

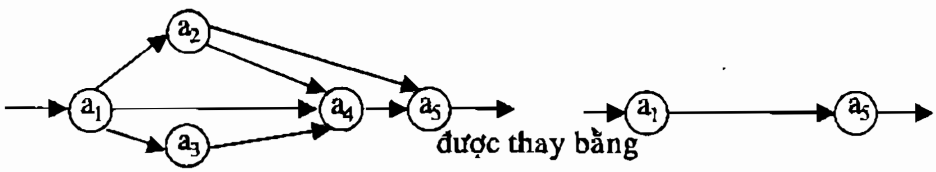
- Nếu tính chất các công việc như nhau hoặc trong thực tế không thể làm tách nhau thì ta gộp chung lại thành một việc duy nhất và biểu thị chúng thành 1 cung.



- Nếu tính chất các công việc khác nhau, không thể gộp chung lại thì ta phải thêm vào đỉnh mới và cung giả.



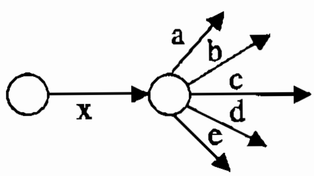
Quy tắc 2 : Nếu một nhóm công việc có liên hệ với nhau mà khi biểu diễn trong sơ đồ mạng nó tạo thành một mạng con (có sự kiện bắt đầu và kết thúc) thì ta có thể biểu diễn gộp lại thành một cung duy nhất, nếu việc gộp lại như vậy không làm cho sơ đồ mạng trở nên quá thô sơ.

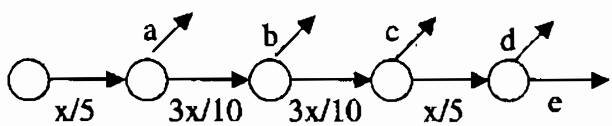


Cung mới tạo thành có độ dài là độ dài của đường đi dài nhất trong mạng con đó.

Quy tắc 3 : Chia nhỏ công việc. Giả sử :

- công việc a có thể bắt đầu khi hoàn thành được 1/5 khối lượng công việc x,
- công việc b có thể bắt đầu khi hoàn thành được 1/2 khối lượng công việc x,
- công việc c có thể bắt đầu khi hoàn thành được 4/5 khối lượng công việc x,
- công việc d, e có thể bắt đầu khi hoàn thành công việc x.





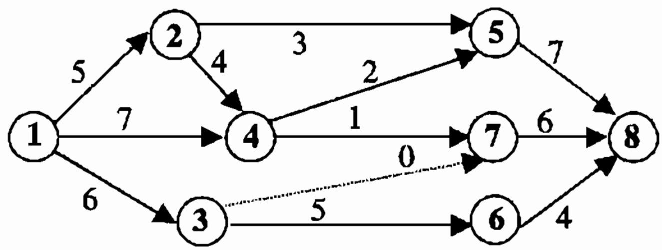
Hình 3.4-a : sai **Hình 3.4-b : Đúng**

Quy tắc 4 : Nếu có một đỉnh nào đó không phải đỉnh khởi công toàn bộ mà lại có toàn cung đi ra ta phải thêm 1 cung giả nối từ đỉnh khởi công toàn bộ đến đỉnh ấy. Nếu có một đỉnh nào đó không phải đỉnh kết thúc toàn bộ mà lại có toàn cung đi tới ta phải thêm một cung giả nối từ đỉnh ấy đến đỉnh kết thúc toàn bộ.

4. Cách đánh số các đỉnh (sự kiện) :

Sau khi đã lập sơ đồ mạng, để tiện tính toán các đỉnh cần phải được đánh số theo quy tắc sau : Đánh số 1 cho sự kiện khởi công toàn bộ; sau đó xoá đỉnh đó và các cạnh đi khỏi nó, trong phần còn lại ta đánh số 2 cho đỉnh nào chỉ gồm toàn cạnh đi ra, nếu có nhiều đỉnh như vậy ta đánh số lần lượt 2, 3,... tuỳ ý. Tiếp tục quá trình đó cho đến khi đánh số được hết mọi đỉnh.

Ví dụ 3 : Sơ đồ mạng ở Hình 3.5. có các đỉnh đã được đánh số.



Hình 3.5

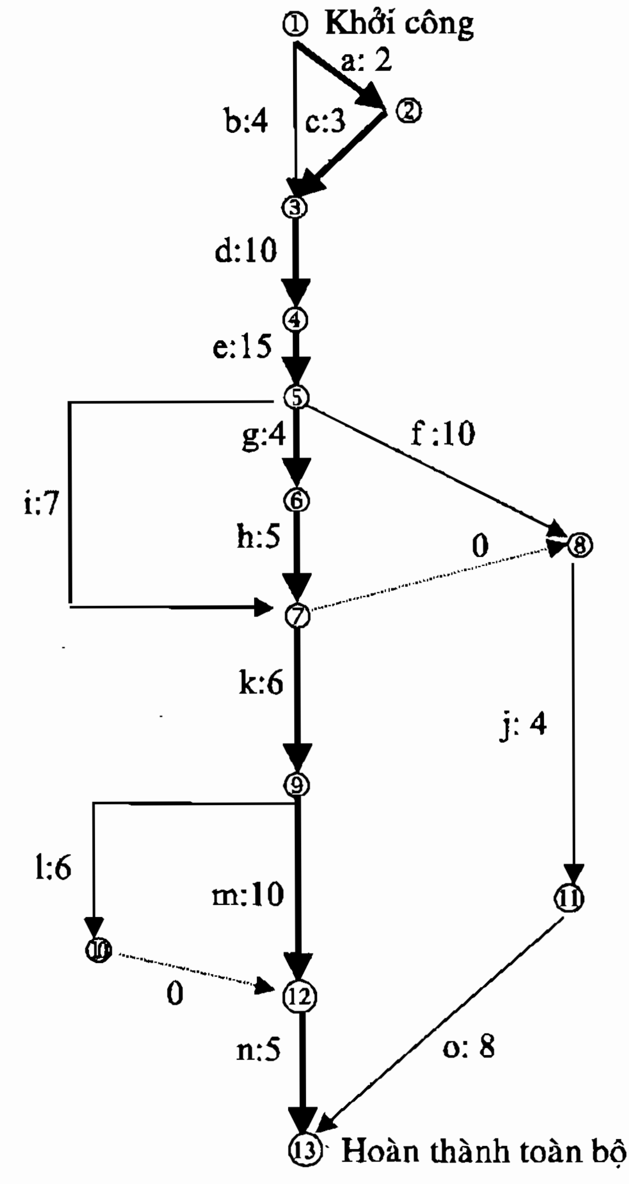
Ví dụ 4 : Giả sử dự án xây dựng một ngôi nhà gồm 15 loại công việc khác nhau. Trình tự và thời gian thực hiện các công việc được ghi trong Bảng 3.1 (các số liệu có tính ước lệ).

Bảng 3.1. Dự án xây dựng một ngôi nhà

Stt	Tên công việc	Trình tự tiến hành	Thời gian hoàn thành (ngày)
1	a : Làm đường tạm	-	2
2	b : Đào đất	-	4
3	c : Chở vật liệu	sau a	3

4	d : Làm móng	sau b, c	10
5	e : Xây tường	sau d	15
6	f : Làm mái, trần, cửa	sau e	10
7	g : Lắp đường ống thải ngoài nhà	sau e	4
8	h : Lắp đường nước trong nhà	sau g	5
9	i : Lắp đường điện trong nhà	sau e	7
10	j : Trát tường, quét vôi ngoài nhà	sau f, h, i	4
11	k: Trát tường, quét vôi trong nhà	sau h, i	6
12	l : Lắp cửa, lát nền	sau k	6
13	m : Trang trí nội thất	sau k	10
14	n : Lắp đặt thiết bị, đồ đạc nhà	sau l, m	5
15	o : Làm hàng rào, cổng, sân vườn	sau j	8

Ta lập một sơ đồ mạng gồm 13 đỉnh, đánh số từ 1 đến 13 (đỉnh 1 là khởi công, đỉnh 13 là hoàn thành). Số cung trong mạng là 15 + 2 = 17 (có 2 việc giả) : xem Hình 3.6. Chẳng hạn, đỉnh 3 chỉ sự kiện hoàn thành việc đào đất và chở vật liệu, đỉnh 8 chỉ sự kiện hoàn thành việc làm mái, trần, cửa và lắp đặt xong các đường điện nước; cung (4, 5) biểu thị việc xây tường, cung (9, 12) biểu thị việc trang trí nội thất, v.v...



Hình 3.6. Sơ đồ miêu tả dự án xây dựng ngôi nhà

3.3. Phân tích sơ đồ mạng theo chỉ tiêu thời gian

1. Chỉ tiêu thời gian của các sự kiện

Trước hết ta tính một số chỉ tiêu thời gian liên quan đến các sự kiện (đỉnh):

a) Thời điểm sớm nhất xuất hiện sự kiện thứ j : t_j^s

Đặt $t_1^s = 0$, khi đã xác định các t_i^s với i < j thì xác định t_j^s bởi công thức:

$$t_j^s = \max\{t_i^s + t_{ij} \text{ với } (i, j) \in U_j^-\}, \qquad (3.1)$$

trong đó t_{ij} là thời gian cần để làm xong việc (i, j) và U_j^- là tập hợp các cung đi tới đỉnh j. Bằng cách đó ta lần lượt xác định được tất cả các t_j^s. Đương nhiên t_n^s là thời hạn sớm nhất hoàn thành toàn bộ dự án.

Có thể thấy rằng : $\mathbf{t_j^s = L(\Delta_j)}$, trong đó Δ_j là đường đi dài nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh j (nghĩa là sự kiện thứ j chỉ xuất hiện khi tất cả mọi công việc trên mọi đường đi trong sơ đồ từ đỉnh 1 đến đỉnh j đều đã hoàn thành).

Xét lại ví dụ 4, ta có:

$$t_1^s = 0,\ \ t_2^s = t_1^s + t_{12} = 0 + 2 = 2\,;$$

$$t_3^s = \max\{t_1^s + t_{13}, t_2^s + t_{23}\} = \max\{0 + 4, 2 + 3\} = 5\,;$$

$$t_4^s = t_3^s + t_{34} = 5 + 10 = 15\text{, v.v...}$$

$$t_n^s = t_{13}^s = \max\{t_{11}^s + t_{11,13}, t_{12}^s + t_{12,13}\} = 60.$$

nghĩa là thời hạn sớm nhất để hoàn thành dự án này là 60 ngày.

b) Thời điểm muộn nhất xuất hiện sự kiện thứ i : t_i^m.

Để bảo đảm hoàn thành dự án trong thời hạn sớm nhất t_n^s ta đặt $t_n^m = t_n^s$. Khi đã xác định các t_j^m với j > i thì xác định t_i^m bởi công thức:

$$t_i^m = \min_{(i,j)\in U_i^+} \{t_j^m - t_{ij}\}, \qquad (3.2)$$

trong đó U_i^+ là tập hợp các cung đi khỏi đỉnh i.

Có thể thấy rằng : $t_j^m = t_n^s - L(\Gamma_j)$, trong đó Γ_j là đường đi dài nhất từ đỉnh j đến đỉnh n.

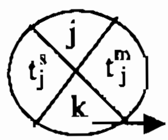
Xét lại ví dụ 4, ta có:

$t_{13}^m = t_{13}^s = 60$, $t_{12}^m = t_{13}^m - t_{12,13} = 60 - 5 = 55$; $t_{11}^m = t_{13}^m - t_{11,13}$
$= 60 - 8 = 52$;

$t_{10}^m = t_{12}^m - t_{10,12} = 55 - 0 = 55$;

$t_{19}^m = \min\{t_{10}^m - t_{9,10}, t_{12}^m - t_{9,12}\} = \min\{55-6, 55-10\} = 45$

Ghi chú : Để cho tiện cho việc khảo sát về sau, mỗi sự kiện trên sơ đồ mạng được biểu thị bằng một vòng tròn chia làm 4 phần như sau:



chỉ số đạt max trong công thức $t_j^s = \max\{t_i^s + t_{ij}, (i,j) \in U_j^-\}$.

c) Thời gian dự trữ của sự kiện i : d_i.

Hiệu số $d_i = t_i^m - t_i^s$ (i = 1, 2,..., n) gọi là *thời gian dự trữ của sự kiện i*, nó cho biết thời gian tối đa mà sự kiện i có thể xuất hiện chậm lại nhưng không ảnh hưởng đến thời điểm xuất hiện các sự kiện sau và không kéo dài thời hạn hoàn thành toàn bộ dự án.

Những sự kiện i có thời gian dự trữ $d_i = 0$ gọi là *sự kiện găng*. Rõ ràng sự kiện 1 (khởi công) và sự kiện n (hoàn thành) bao giờ cũng là sự kiện găng.

2. Chỉ tiêu thời gian của các công việc :

Dựa vào các chỉ tiêu thời gian đã tính ở trên, ta tính một số chỉ tiêu thời gian liên quan đến các công việc.

a) Thời gian dự trữ của mỗi công việc :

Ta gọi hiệu số $d_{ij} = t_j^m - t_i^s - t_{ij}$ là *thời gian dự trữ của công việc* (i, j).

Xét lại ví dụ 4, ta có:

$d_{13} = t_3^m - t_1^s - t_{ij} = 5 - 0 - 4 = 1$; $d_{45} = t_5^m - t_4^s - t_{45} = 30 - 15 - 15 = 0, \ldots$

Có thể thấy rằng $d_{ij} \geq 0$, với mọi công việc (i,j).

Những công việc (i, j) có $d_{ij} = 0$ gọi là *công việc găng*.

Ý nghĩa : $d_{ij} = t_n^s - L(\Gamma_j) - L(\Delta_i) - t_{ij} = t_n^s - [L(\Delta_i) + t_{ij} + L(\Gamma_j)]$: khoảng thời gian chênh lệch giữa t_n^s và thời hạn của đường đi dài nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh n qua công việc (i,j) (Tất cả các công việc trên đường đi dài nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh n qua công việc (i,j) có tổng thời gian dự trữ là d_{ij}).

b) Dự trữ riêng của mỗi công việc :

Ta gọi $d_{ij}^r = \max\{0, t_j^s - t_i^m - t_{ij}\}$ là *thời gian dự trữ riêng* hay *thời gian dự trữ độc lập* của công việc (i, j), đó là khoảng thời gian tối đa mà công việc (i,j) có thể kéo dài nhưng không ảnh hưởng đến thời điểm bắt đầu sớm nhất của các công việc ngay sau công việc đó, bất kể thời điểm kết thúc của các công việc ngay trước đó. Có thể thấy rằng $0 \leq d_{ij}^r \leq d_{ij}$ và $d_{ij}^r = 0$ với công việc (i,j) là găng.

Xét lại ví dụ 4, ta có:

$$d_{13}^r = \max\{0, t_3^s - t_1^m - t_{13}\} = \max\{0, 1\} = 1,$$

$$d_{57}^r = \max\{0, t_7^s - t_5^m - t_{57}\} = \max\{0, 39 - 30 - 71\} = 2, ...$$

c) Dự trữ chung của các công việc :

Ta gọi hiệu số $d_{ij}^c = d_{ij} - d_{ij}^r$ là *thời gian dự trữ chung* của công việc (i,j), đó là khoảng thời gian dự trữ được sử dụng chung cho các công việc trên đường đi dài nhất từ đỉnh 1 đến n qua (i,j).

d) Đường găng :

Một đường đi từ đỉnh 1 (khởi công) đến đỉnh n (hoàn thành) gọi là *đường găng*, nếu mọi sự kiện và mọi công việc trên đường đi ấy đều là găng. Chẳng hạn, trong ví dụ trên thì các sự kiện 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 13 là găng, các mũi tên đậm nét là việc găng. Trong sơ đồ vẽ ở hình 3.6, đường găng được biểu diễn bằng các mũi tên đậm nét.

Nếu xem t_{ij} như độ dài của cung (i, j) trên sơ đồ mạng thì ta có thể dễ dàng chứng minh các tính chất sau đây của đường găng:

- Mỗi sơ đồ mạng có ít nhất một đường găng (nói chung, có thể có nhiều).
- Đường găng là đường đi dài nhất trên só đồ mạng (từ đỉnh 1 đến đỉnh n). Ngược lại, mọi đường đi dài nhất trong sơ đồ mạng (từ đỉnh 1 đến đỉnh n) đều là đường găng.
- Một sự kiện hay công việc găng đều có ít nhất một đường găng đi qua.. Đồng thời một sự kiện hay công việc không găng không thể nằm trên đường găng.

3. Ý nghĩa thực tiễn của phương pháp PERT

Muốn toàn bộ dự án không bị kéo dài thì những công việc găng không được phép hoàn thành chậm trễ, còn các công việc không găng thì có thể chậm trễ hoặc kéo dài đôi chút (trong phạm vi thời gian dự trữ) mà vẫn không ảnh hưởng gì đến thời gian hoàn thành dự án.

Đồng thời muốn rút ngắn thời gian thực hiện dự án thì nhất thiết phải rút ngắn một số công việc găng, các công việc không găng dù có rút ngắn thời gian hoàn thành của chúng cũng không thể rút ngắn thời gian hoàn thành toàn bộ dự án.

Vì thế, trong chỉ đạo thực hiện dự án cần tập trung chú ý vào các công việc găng (số việc găng thường chiếm tỉ lệ không lớn trong tổng số các công việc, đặc biệt đối với các dự án lớn), tìm mọi biện pháp để bảo đảm cho các công việc đó được hoàn thành đúng kỳ hạn. Có như vậy toàn bộ dự án mới được hoàn thành đúng kỳ hạn. Đó chính là ý nghĩa thực tiễn của phương pháp sơ đồ mạng PERT hay phương pháp đường găng được trình bày ở trên.

Dựa vào sơ đồ mạng ta còn có thể tiến hành một số tính toán tối ưu như:

- Với thời hạn hoàn thành dự án đã định trước hãy tổ chức các công việc để đảm bảo chi phí là ít nhất (cực tiểu giá thành công trình), hoặc đảm bảo việc sử dụng nhân lực, vật tư, thiết bị được bình ổn và ở mức thấp nhất.
- Với tổng chi phí có hạn hoặc với nhịp độ cung cấp nhân lực, vật tư, thiết bị đã biết trước hãy bố trí các công việc sao cho hoàn thành toàn bộ dự án trong thời hạn sớm nhất.

Hướng chung để giải quyết cả hai bài toán này là tập trung sự chỉ đạo vào các công việc găng, điều chỉnh một phần nhân lực, vật tư ở các công việc không găng sang cho các công việc găng, nhằm rút ngắn thời hạn chung. Về mặt toán học cả hai vấn đề trên đều có thể giải quyết nhờ dùng lý thuyết qui hoạch tuyến tính.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

1. Dùng phương pháp xử lý biến bị chặn trên nêu ở §1 giải các bài toán qui hoạch tuyến tính sau đây:

a) $$f = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8, \\ x_1 \le 1, \\ x_2 \le 3, \\ x_3 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

b) $$f = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \le 8, \\ 0 \le x_j \le 1 \text{ với } j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

c) $$f = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \le 6, \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 \le 15, \\ 0 \le x_j \le 1 \text{ với } j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

d) $$f = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 15, \\ x_2 + x_3 \ge 10, \\ 0 \le x_1 \le 10,\ 0 \le x_2 \le 5,\ 0 \le x_3 \le 6. \end{cases}$$

2. Chứng minh bài toán vận tải (2.1) – (2.5) bao giờ cũng có phương án tối ưu.

3. Giải bài toán vận tải với dữ liệu cho ở các bảng sau :

a)

A_i \ B_j	3	5	10	14
10	1	3	7	1
15	2	4	2	3
7	6	5	4	1

b)

A_i \ B_j	20	25	30	15
40	4	5	1	2
20	3	4	7	8
30	2	6	9	3

c)

A_i \ B_j	40	30	20	50
30	3	7	4	6
40	4	6	2	5
70	1	5	7	8

d)

A_i \ B_j	30	20	25	35	40
30	13	7	6	2	12
20	5	1	10	5	11
40	10	5	3	7	14
60	6	3	2	11	10

4. Giải các bài toán sau :

a) Một công ty vận tải biển cần 110 người để bố trí 10 máy trưởng, 25 thợ máy 1, 30 thợ máy 2 và 45 thợ máy 3. Phòng tổ chức công ty tìm được 90 người, gồm 25 kỹ sư máy, 20 trung cấp kỹ thuật và 45 công nhân. Phòng tổ chức đánh giá khả năng của cán bộ theo công việc như ở bảng sau:

Công việc / Trình độ cán bộ	Hệ số đánh giá năng lực (q_{ij})			
	máy trưởng	**máy 1**	**máy 2**	**máy 3**
Kỹ sư	5	4	0	0
Trung cấp	3	5	4	0
Công nhân	0	1	5	4

Vậy cần bố trí sao cho sử dụng hết năng lực của mọi người.

Ghi chú : giả thiết đánh giá năng lực cán bộ theo thang điểm 5, tức là q_{ij} = 5: cán bộ i có năng lực hoàn thành xuất sắc công việc j, q_{ij} = 4,3,2,1 tương ứng với các mức độ khác nhau, còn q_{ij} = 0 là cán bộ i hoàn toàn không thể làm công việc j.

b) Một đội làm rau gồm 23 lao động nữ, chia làm 3 loại : loại A và B có 10 người; loại C có 3 người. Đội đó cần bố trí 3 người đi hái rau, 8 người làm cỏ rau và 12 người trồng rau. Năng suất lao động của từng loại được cho trong bảng sau:

việc / năng suất (thước/ngày) / lao động	**hái rau** (3)	**làm cỏ** (8)	**trồng rau** (12)
A (10)	2	10	9
B (10)	1,7	9	9
C (3)	1,6	8	10

Vậy phải phân công như thế nào để năng suất đạt được cao nhất.

c) Theo kế hoạch của một hợp tác xã, trong một vụ Đông xuân sẽ trồng 130 sào hoa màu gồm 62 sào ngô, 30 sào khoai và 38 sào cà chua trên một bãi rộng 130 sào, chia làm 3 loại đất : 38 sào đất thịt, 50 sào đất cát bồi và 42 sào đất pha cát. Năng suất thu hoạch của mỗi loại cây trồng trên mỗi loại đất được cho trong bảng sau :

năng suất (đồng/sào) \ cây / đất	ngô (62)	khoai (30)	cà chua (38)
thịt (38)	22	40	67
pha cát (42)	17	36	52
cát bồi (50)	26	44	0

Hãy đặt kế hoạch phân phối đất trồng để thu hoạch được nhiều nhất ?

Ghi chú : Năng suất trồng cà chua trên loại đất cát bồi bằng 0, nghĩa là trồng cà chua trên loại đất đó thì thu hoạch rất ít không đáng kể.

d) Có hai đội, mỗi đội 5 người thi đấu bóng bàn với nhau. Do kinh nghiệm chơi, người ta dự đoán xác suất thắng cuộc của mỗi đấu thủ đội I với các đấu thủ đội II cho ở bảng sau :

Đội I	**Đội II**				
	đấu thủ 1	đấu thủ 2	đấu thủ 3	đấu thủ 4	đấu thủ 5
đấu thủ 1	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
đấu thủ 2	0	0,3	0,4	0,4	0,7
đấu thủ 3	0,2	0,6	0,4	0,3	0,5
đấu thủ 4	0,6	0,3	0,4	0,7	0,6
đấu thủ 5	0	0,2	0,3	0,4	0,6

Các đấu thủ đội I có quyền chọn đấu với các đấu thủ đội II. Hãy đứng về phía đội I sắp xếp các đấu thủ của đội này sao cho xác suất thắng cuộc của toàn đội là cao nhất.

Ghi chú : A đấu với B trong 5 ván, A thắng 3 ván thì ta bảo xác suất thắng cuộc của A là 3/5 = 0,6.

5. Lập sơ đồ mạng, tính các chỉ tiêu thời gian, xác định đường găng của các dự án gồm các công việc sau :

a)

Công việc	Thời gian (tháng)	Trình tự tiến hành
y_1	4	làm ngay
y_2	8	làm ngay
y_3	5	làm ngay
y_4	6	làm sau y_3
y_5	10	làm sau y_2
y_6	2	làm sau y_2
y_7	5	làm sau y_6, y_1

b)

Công việc	Thời gian (tuần)	Trình tự tiến hành
y_1	1,5	làm ngay
y_2	0,5	làm ngay
y_3	0,5	làm ngay
y_4	2	làm ngay
y_5	0,5	làm sau y_1
y_6	0,5	làm sau y_2, y_5
y_7	1	làm sau y_3, y_6
y_8	1	làm sau y_4, y_7

c)

Công việc	Thời gian (tháng)	Trình tự tiến hành
a	1	làm ngay
b	10	làm sau a
c	1	làm sau b

d	2	làm ngay
e	3	làm sau d
f	2	làm sau e
g	4	làm sau f
h	2	làm sau c, g
i	8	làm ngay
j	1	làm sau i
k	2	làm sau j, h

d)

Công việc	Thời gian (ngày)	Trình tự tiến hành
a	4	làm ngay
b	6	làm ngay
c	2	làm sau a
d	5	làm sau a
e	2	làm sau b, c
f	7	làm sau b, c
g	3	làm sau d, e

e)

Công việc	Thời gian (tuần)	Trình tự tiến hành
y_1	2	làm ngay
y_2	4	làm ngay
y_3	3	làm ngay
y_4	5	làm sau y_1
y_5	4	làm sau y_1
y_6	6	làm sau y_1
y_7	3	làm sau y_2, y_4

y_8	11	làm sau y_3
y_9	4	làm sau y_6, y_7
y_{10}	5	làm sau y_5

f)

Công việc	Thời gian (tuần)	Trình tự tiến hành
y_1	4	làm ngay
y_2	4	làm ngay
y_3	3	làm ngay
y_4	6	làm sau y_1
y_5	3	làm sau y_3
y_6	5	làm sau y_3
y_7	2	làm sau y_2, y_5
y_8	6	làm sau y_2, y_5
y_9	7	làm sau y_2, y_5
y_{10}	5	làm sau y_4, y_7
y_{11}	2	làm sau y_4, y_7
y_{12}	4	làm sau y_4, y_7
y_{13}	3	làm sau y_6, y_8, y_{10}
y_{14}	5	làm sau y_6, y_8, y_{10}
y_{15}	1	làm sau y_9, y_{11}, y_{13}

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hoàng Tụy. Lý thuyết qui hoạch. Tập 1. NXB Khoa học. Hà nội 1968, 202 trang.

[2] Đặng Hấn. Quy hoạch tuyến tính (Lý thuyết & Bài tập có lời giải). Trường đại học kinh tế Tp. HCM 1995, 184 trang.

[3] Nguyễn Đức Nghĩa. Tối ưu hoá: Quy hoạch tuyến tính và rời rạc. NXB Giáo dục. Hà nội 1997, 192 trang.

[4] Bùi Thế Tâm, Trần Vũ Thiệu. Các phương pháp tối ưu hoá. NXB Giao thông vận tải. Hà nội 1998, 408 trang.

[5] Trần Túc. Bài tập quy hoạch tuyến tính. NXB Khoa học và kỹ thuật. Hà nội 2001, 300 trang.

[6] Iuđin D.B., Golstein E.G. Quy hoạch tuyến tính. Mátxcơva 1963, 756 trang (tiếng Nga).

[7] Karmanov V. Progammation Mathématique. Edition Mir. Moscou 1977, 221 pp.

[8] Gass. S.I. Linear Programming. Fifth Edition. New York 1985, 532 pp.

[9] Hillier F.S., Lieberman G.J. Introduction to Mathematical Programming. Second Edition. McGraw-Hill, Inc. New York-London-Tokyo 1995, 718 pp.

[10] Kolman B., Beck R.E. Elementary Linear Programming with Applications. Second Edition. Academic Press. New York-London-Tokyo 1995, 450 pp.

[11] Hoàng Tụy. Convex Analyis and Global Optimization. Springer Verlag 2000, 333 pp.

GIÁO TRÌNH
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN THỐNG KÊ

Chịu trách nhiệm xuất bản: TRẦN HỮU THỰC

Biên soạn: VÕ VĂN TUẤN DŨNG

Biên tập: THANH DUY

Sửa bản in: NXB THỐNG KÊ

Trình bày bìa: HỮU NGHĨA

Thực hiện liên doanh: Công ty TNHH Minh Khai S.G
E-mail: mk.book@minhkhai.com.vn – Website: www.minhkhai.com.vn

Tổng phát hành

- Nhà sách Minh Khai: 249 Nguyễn Thị Minh Khai - Quận 1 - TP.HCM
  ĐT: (08) 9.250.590 ~ 9.250.591 – Fax: (08) 9.257.837
- Nhà sách Minh Châu: Nhà 30 - Ngõ 22 - Tạ Quang Bửu - Bách Khoa - Hà Nội
  ĐT: (04) 8.692.785 – Fax: (04) 8.683.995

Đại lý các khu vực

- Nhà sách Huy Hoàng: 95 Núi Trúc - Kim Mã - Ba Đình - Hà Nội
  ĐT: (04) 7.365.859
- Cty cổ phần sách thiết bị trường học Đà Nẵng: 78 Bạch Đằng - Đà Nẵng
  ĐT: 0511.837100
- Nhà sách Chánh Trí: 116A Nguyễn Chí Thanh - Đà Nẵng
  ĐT: 0511.820129
- Cty phát hành sách Khánh Hòa:
  - Nhà sách Ponagar: 73 Thống Nhất - Nha Trang - Khánh Hòa
    ĐT: 058.822636
  - Siêu thị sách Tân Tiến - 11 Lê Thành Phương - Nha Trang - Khánh Hòa
    ĐT: 058.827303
- Nhà sách Năm Hiền: 79/6 Xô Viết Nghệ Tĩnh - TP.Cần Thơ
  ĐT: 071. 821668

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại Xí nghiệp in Machinco
Số 21 Bùi Thị Xuân, Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh
Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 07-2007/CXB/185.1-75/TK
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2007.

GIÁO TRÌNH

QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

MK.PUB

MinhKhai

NHÀ SÁCH MINH KHAI MK.PUB

Giá: 19.500 đ

8 935087 500759