BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

4 (238)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- ĐÔI ĐIỀU VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH
- ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG ĐỂ GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC
- BÀN VỀ HAI TẬP NGHIỆM
- ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A ĐHQG HÀ NỘI 1996
- LƯỢNG GIÁC HÓA CÁC PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH
- NGÔ ĐẮC TUẤN - GƯƠNG MẶT TRẺ VIỆT NAM TIÊU BIỂU 1996

Học sinh giỏi toán 9&12 trường chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trang

- **Dành cho các bạn Trung học cơ sở**
  For Lower Secondary School Level Friends.
  Trịnh Vinh Ngọc – Đôi điều về một phương pháp giải phương trình ở bậc Trung học cơ sở. 1
- **Giải bài kì trước**
  Solutions of Problems in Previous Issue 2
- **Đề ra kì này**
  Problems in This Issue 10
  Trần Tuấn Diệp – Đỗ Mạnh Môn – Ứng dụng tích vô hướng để giải một số dạng toán về bất đẳng thức trong tam giác 12
- *Lê Thống Nhất* – Bàn về hai tập nghiệm 13
- *Trần Huy Hổ* – Đề thi tuyển sinh môn toán khối A năm 1996 trường Đại học quốc gia Hà Nội 14
- **Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học**
  For College and University Entrance Exam Preparers
  Mai Thắng – Lượng giác hóa các phương trình, bất phương trình vô tỉ. 16
- *Ngô Đắc Tuấn* – Gương mặt trẻ Việt Nam tiêu biểu nhất trong năm 1996 Bìa 4
- **Giải trí toán học**
  Fun with Mathematics
  Lê Ngọc – Anh đầy tớ và ông chủ
  Bình Phương – Giải đáp bài Cắt ghép. Bìa 4

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 8213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : QUỐC HỒNG

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

Đôi điều về một phương pháp GIẢI PHƯƠNG TRÌNH Ở BẬC TRUNG HỌC CƠ SỞ

TRỊNH VINH NGỌC
(Hà Tĩnh)

Trong các kì thi học sinh giỏi THCS, học sinh thường gặp các bài toán giải phương trình và hệ phương trình mà cách giải không bình thường. Để giúp các bạn tìm hiểu vấn đề đó, bài viết này xin bàn đôi điều về cách giải loại phương trình trên.

Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định là Df, Gf. Xét phương trình $f(x) = g(x)$ (1) với tập xác định $D = Df \cap Dg$. Nếu $\begin{cases} f(x) \geqslant m \\ g(x) \leqslant m \end{cases}$ $\forall x \in D$

thì phương trình (1) tương đương với hệ $\begin{cases} f(x) = m \\ g(x) = m \end{cases}$ (2)

Nếu tồn tại $x_o \in D$ thỏa mãn (2) thì x_o là nghiệm của (1)

Vậy để giải một phương trình cho trước, vấn đề mấu chốt là phải đưa được phương trình đó về dạng (1) mà việc tìm max (min) $f(x)$ và min (max) $g(x)$ không gặp khó khăn lắm. Sau đây là một số bài toán.

Bài toán 1 : *Giải phương trình*

$$6x - x^2 - 2 = |x-1| + |x-2| + |2x+3| + |4x-13| \qquad (A)$$

Giải : * Ta có thể giải (A) bằng cách lập bảng xét dấu vế phải của (A), từ đó suy ra nghiệm. Song cách này tương đối dài, mất nhiều thời gian.

* Ta giải như sau :

$$|x-1| + |x-2| + |2x-3| + |4x-3| \geqslant$$
$$\geqslant |x - 1 + x - 2 + 2x - 3 + 13 - 4x| = 7$$

dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x - 2 \geqslant 0 \\ 2x - 3 \geqslant 0 \\ 13 - 4x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant \dfrac{13}{4}$.

Xét vế trái của (A) : $6x - x^2 - 2 = 7 - x^2 + 6x - 9 = 7 - (x-3)^2 \leqslant 7$

$\Rightarrow \max(6x - x^2 - 2) = 7$ đạt được khi $x = 3$.

Do $x = 3 \in \left[2, \dfrac{13}{4}\right]$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Bài toán 2 : *Giải phương trình*

$$(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1) \text{ (B)}$$

Giải * Nếu khai triển vế trái của (B) thì ta được phương trình bậc 4 đủ, nên khó tìm nghiệm bằng kiến thức ở THCS.

* Ta giải như sau :

a) $x = -1$ không phải là nghiệm của (B)

b) $x \neq 1$ (B) $\Leftrightarrow \dfrac{8x - 4x^2 - 1}{4} = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ $(\forall x \neq -1)$. Dễ dàng tìm được $\min y = \dfrac{3}{4}$ đạt được khi $x = 1$

Lại có : $\dfrac{8x - 4x^2 - 1}{4} = -x^2 + 2x - 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4} - (x-1)^2 \leqslant \dfrac{3}{4} \Rightarrow max\left(\dfrac{8x - 4x^2 - 1}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$ đạt được với $x = 1$

Từ đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 3 : *Tìm x thỏa mãn phương trình*

$$-16x^4 + 72x^3 - 81x^2 + 28 - 16(x - \sqrt{x+2}) = 0 \qquad (C)$$

Giải : Nếu đặt $\sqrt{x-2} = t \geqslant 0$, $x = t^2 + 2$ vào (C) thì ta được một phương trình bậc 8. Để giải phương trình này phải có kĩ năng phân tích đa thức thành nhân tử hay tìm nghiệm đa thức.

Cũng vậy đặt $\sqrt{x-2} = t \geqslant 0$. Khi đó

$x - \sqrt{x-2} = x - 2 - \sqrt{x-2} + 2$

Xét $f(t) = t^2 - t + 2$; $t \in [0, +\infty)$ thì $\min f(t) = \dfrac{7}{4}$ đạt được khi $t = \dfrac{1}{2}$ hay

$\min\limits_{x \in +\infty} (x - \sqrt{x-2}) = \dfrac{7}{4}$ khi $x = \dfrac{9}{4}$

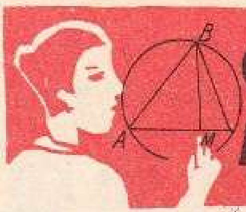
Lại có : $\dfrac{-16x^4 + 72x^3 - 81x^2 + 28}{16} = \dfrac{7}{4} - \left(x - \dfrac{9}{4}\right)^2 x^2 \leqslant \dfrac{7}{4}$ dấu bằng xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{4} \\ x = 0 \end{array}\right.$

Từ đó ta có $x = \dfrac{9}{4}$ là nghiệm của phương trình.

Bài toán 4 : *Tìm nghiệm nguyên của phương trình :*

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$$

(xem tiếp trang 11)



GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/234. *Tìm tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ trong hệ đếm thập phân sao cho*

$$\begin{cases}\overline{abc} = n^2 - 1 \\ \overline{cba} = (n-2)^2\end{cases}$$

với n là số nguyên lớn hơn 2.

Lời giải : (Dựa trên lời giải của bạn Nguyễn Thị Thanh Nha 9T Lê Quý Đôn, Khánh Hòa và bạn Trần Quốc Hùng 9T, Phan Bội Châu Nghệ An)

Ta có $\overline{abc} = 100a + 10b + c = n^2 - 1 \quad (1)$

$\overline{cba} = 100c + 10b + a = n^2 - 4n + 4 \quad (2)$

Lấy (1) trừ (2) ta được

$$99(a - c) = 4n - 5$$

suy ra $4n - 5 \vdots 9$.

Ta có $100 \leq n^2 - 1 \leq 999 \rightarrow 101 \leq n^2 \leq 1000$ $\rightarrow 11 \leq n \leq 31 \rightarrow 39 \leq 4n - 5 \leq 119$.

Vì $4n - 5 \vdots 99$ nên $4n - 5 = 99 \rightarrow n = 26 \rightarrow$ $\overline{abc} = 675$.

Thử lại thấy đúng.

Nhận xét : Đây là một bài toán dễ nên có rất nhiều bạn giải được bài toán này và gửi lời giải của mình tới tòa soạn. Tất cả các lời giải đều đúng. Xin kể ra đây một số bạn như : *Trần Vĩnh Trung*, 9T Lý Tử Trọng, **Trà Vinh**, *Nguyễn Phi Hùng* 8T **Hải Hưng**, *Đào Thị Bích Giang* 9T, Nga Sơn, **Thanh Hóa**, *Ngô Quốc Anh* 8T Nguyễn Du, **Buôn Mê Thuột**, *Tạ Văn Nghiêm*, 9T Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**, *Phạm Ngọc Hưng*, 9A Phong Châu, **Vĩnh Phú**, *Lê Hải Bằng*, 7A Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**, *Trần Đình Khiêm* 8T Nguyễn Tri Phương, **Thừa Thiên - Huế**, *Cao Xuân Quế* 9A Quỳnh Lưu, **Nghệ An**, *Nguyễn Hải Bằng* 8A$_1$ Phong Châu, **Phú Thọ**, *Vũ Việt Tài* 9T Hải Hậu, **Nam Định**, *Trần Tấn Nam*, 9T Tam Đảo **Vĩnh Phúc**, Lê Trung Hiếu, 9T Đồng Hới, **Quảng Bình**, *Phan Thị Hồng Nhung*, 8T Nguyễn Du, **Buôn Mê Thuột** *Bùi Phú Hưng*, 9A Uông Bí, **Quảng Ninh**...

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/234. *Cho 6 số a, b, c, x, y, z thỏa :*

$$\begin{cases}a + b + c = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\end{cases} (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

Chứng minh rằng $a(x + b) + b(y + c) + c(z + a) < 1$.

Lời giải : *Cách 1.* (của *Nguyễn Thanh Nhã*, 9T, Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột, Đăk Lăk).

Vì $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên suy ra $a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c = 1 (1)$

Ta có $A = a(x + b) + b(y + c) + c(z + a)$ $= ax + by + cz + ab + bc + ca$

$$\leq \frac{(a^2+x^2) + (b^2+y^2) + (c^2+z^2)}{2} + ab + bc + ca$$

$$\leq \frac{(a + b + c)z^2 + x^2 + y^2 + z^2}{2} = 1$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = x$, $b = y$, $c = z$ khi đó sẽ xảy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 = a + b + c$$

trái với (1). Vậy sẽ không xảy ra dấu "=" và ta được điều cần chứng minh.

Cách 2. (của *Hà Xuân Giáp*, 7TN2, NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa)

Áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacopski cho 6 số a, b, c, x, y, z ta được

$$ax + by + cz \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ (vì } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{)}.$$

Từ đó ta có :

$$a(x + b) + b(y + c) + c(z + a) = ax + by + cz + ab + bc + ac$$

$$\leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} + ab + bc + ac = \sqrt{a^2+b^2+c^2} + \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \text{ (vì } (a + b + c)^2 = 1 \text{)}$$

$$\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[(a^2+b^2+c^2) - 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} + 1) - 1\right]$$

$$\leq 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - 1\right)^2 < 1$$

(vì $a^2 + b^2 + c^2 < 1$) đpcm.

Nhận xét. 1. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : **Thái Nguyên** : *Đặng Hồng Đăng*, 9A$_3$, Nha Trang, Tp. Thái Nguyên. **Phú Thọ :** *Trần Thị Thu Hà*, 9A, chuyên Phong châu. *Phạm Thị Thu Hiền* 9A$_2$, chuyên Việt Trì. **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Ngọc Quang*, 8B, *Kiều Việt Cường*, 9B, chuyên Yên Lạc ; *Vũ Mạnh Cường*, *Phạm Hồng Phong*, 9T, chuyên Tam Đảo. **Hà Nội :** *Lê Cường*, 9M, Marie Curie. **Nam Định** : *Ngô Quốc Hoàn*, 10A, Lương Thế Vinh, Vụ Bản. **Thanh Hóa :** *Nguyễn Tất Thắng*, 8TN, *Hà Thị Phương Thảo*, 9TN, NK Bỉm Sơn ; *Hoàng Trung Kiên*, 9T, NK Nga Sơn, *Trần Thế Anh* ; 9B, NK Tĩnh Gia ; *Mai Thị Thu*, 8T, NK Hậu Lộc ; *Lê Kim Phượng*, 8CT, NK Thành phố. **Nghệ An :** *Trịnh Quốc Trung*, 9A, NK Quỳnh Lưu ; *Nguyễn Xuân Sáng*, 9A$_1$, NK Yên Thành, *Phan Việt Bắc*, *Phan Thanh Trung*, *Nguyễn Huy Vũ*, *Nguyễn Đình Quân*, 9TA, Phan Bội Châu. **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Đình Dũng*, 8T, NK thị xã, *Nguyễn Viết Cường*, *Nguyễn Công Khanh*, 9T, Năng khiếu tỉnh. **Quảng Bình** : *Nguyễn Văn Bình*, 9T, NK Lệ Thủy, *Hoàng Hồ Quang*, 9T, NK Hải Đình.

Thừa Thiên - Huế ; *Nguyễn Quang Vũ*, 9/1, Nguyễn Tri Phương. **Đà Nẵng** : *Nguyễn Phan Xuân Nguyên*, 9/1, Nguyễn Khuyến ; *Đỗ Trọng Tuấn*, 9/1, Nguyễn Huệ. **Quảng Ngãi :** *Trần Lê Quốc Sơn*, 8T, Chuyên Lê Khiết ; *Nguyễn Hải Âu*, 9t, *Nguyễn Văn Khải*, 9T, chuyên Nghĩa Hành. **Lâm Đồng :** *Phạm Nguyên Thắng*, 9T, chuyên Thăng Long, Đà Lạt. **Đăk Lăk :** *Phạm Thúy Hằng, Tạ Quốc Hưng, Phạm Lan Hương, Lương Thị Thanh Minh*, 8T, chuyên Nguyễn Du, *Lưu Minh Ngọc*, 9T, chuyên Phan Chu Trinh, Buôn Mê Thuột, **TP. Hồ Chí Minh** : *Khúc Ngọc Vinh*, 8/1, Hồng Bàng, Quận 5.

2. Các bạn *Dương thành An, Ngô Quốc Anh, Hoàng Hải Thủy, Tăng Thị Hà Yên*, 8 Toán, Nguyễn Du, **Buôn Mê Thuột, Đăk Lăk** đã phát biểu và chứng minh bài toán cho $2n$ số như sau : *Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và n số $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

Chứng minh rằng

$$a_1(x_1 + a_2) + a_2(x_2 + a_3) + \dots + a_n(x_n + a_1) < 1$$

TỐ NGUYÊN

Bài T3/234. *Giải bất phương trình :*

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(2x+1)} + \dots + \frac{1996x}{(x+1)(2x+1)\dots(1996x+1)} > 1$$

Lời giải : Ta có :

$$\frac{kx}{(x+1)(2x+1)\dots(kx+1)} = \frac{(kx+1)-1}{(x+1)(2x+1)\dots(kx+1)}$$
$$= \frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots[(k-1)x+1]} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(kx+1)} \text{ với } k = \overline{1,1996}.$$

Áp dụng kết quả trên, ước lược các số hạng thì bất phương trình đã cho tương đương với :

$$1 - \frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(1996+1)} > 1.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x+1)\dots(1996x+1) < 0$$

Gọi vế trái là $f(x)$ thì $f(x)$ là một đa thức có 1996 nghiệm là $x = \dfrac{-1}{l}$ với $l = \overline{1,1996}$

Xét dấu của $f(x)$ khi cho x lần lượt đi qua các nghiệm này ta có :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2m-1} < x < \frac{-1}{2m} \text{ với } i = \overline{1,998}$$

Nghiệm của bất phương trình gồm 998 khoảng cho bởi kết quả trên.

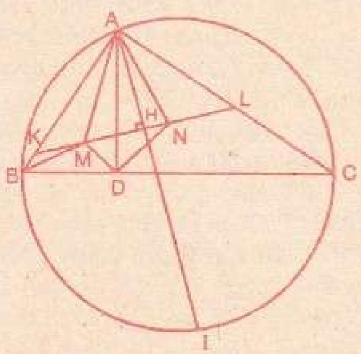
Nhận xét : 1) Tất cả có 166 bạn gửi lời giải về, nhưng có 27 bạn giải sai. Nhiều bạn đã tổng quát hóa bài toán và cho lời giải đúng.

2) Có bạn còn viết sai kí hiệu, chẳng hạn viết x thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ (?). Cần lưu ý khi viết khoảng $(a ; b)$ thì $a < b$.

3) Các bạn có lời giải tốt hơn là : *Tăng Thị Hà Yên, Tạ Quốc Hưng, Ngô Quốc Anh* cùng lớp 8 Toán, chuyên Nguyễn Du (**Đắc Lắc**) ; *Trần Vĩnh Trung*, 98 Lí Tự Trọng (**Trà Vinh**) ; *Bùi Bá Hưng*, 9A, trọng điểm Uông Bí (**Quảng Ninh**) ; *Nguyễn Xuân Hiếu*, 9A, chuyên Mê Linh (**Vĩnh Phúc**) ; *Hà Thị Phương Thảo*, 9TN, năng khiếu Bỉm Sơn (**Thanh Hóa**) ; Ngụy Lê Giang, 8B năng khiếu Nghĩa Đàn ; *Trần Hưng Thái*, 8A Năng khiếu Quỳnh Lưu (**Nghệ An**) ; *Hoàng Nguyệt Ánh*, 8T năng khiếu Hải Dương (**Hải Dương**) ; *Doãn Phương Thảo*, 9 Toán, chuyên Sơn Tây ; *Nguyễn Mạnh Thắng*, 8A, chuyên Thạch Thất (**Hà Tây**) ; *Nguyễn Phong Thiên*, 9A$_1$, Hồng Bàng (**Hải Phòng**) ; *Trần Thăng Long, Bùi Lê Na* cùng lớp 8C, Hà Nội - Amsterdam (**Hà Nội**) ; *Đặng Thị Tố Nhu*, 9 Toán, Năng khiếu Hải Đình, Đồng Hới (**Quảng Bình**) ; *Vũ Việt Tài*, 9 Toán và *Hoàng Tiến*, 9 lí cùng ở Năng khiếu Hải Hậu (**Nam Định**) ; *Dương Hải Châu*, 9, trọng điểm Phù Mĩ (**Bình Định**).

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/234. *Cho nửa đường tròn đường kính BC trên đó có một điểm A di động. Gọi D là chân đường cao AD của tam giác ABC và M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng đường vuông góc với MN kẻ từ A luôn luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải : Kéo dài MN cắt AB, AC lần lượt tại K và L.

Từ giả thiết AN, DN, MD, MB là các đường phân giác của ΔACD và ABD ta suy ra

$\Delta DNA \backsim \Delta\Delta DMB$ (ggg)

$$\Rightarrow \frac{DN}{MD} = \frac{AD}{BD} \left(\text{hay } \frac{ND}{AD} = \frac{MD}{BD}\right)$$

Suy ra $\Delta DMN \backsim \Delta DBA$

Từ đó $\widehat{DMN} = \widehat{DBA}$. Vậy tứ giác $MDBK$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{AKL} = \widehat{MDB} = 45^o$. Suy ra ΔAKL vuông cân. Mà AH là đường cao nên $\widehat{KAH} = \widehat{LAH}$ hay AH là phân giác góc BAC.

Vậy AH đi qua điểm I chính giữa cung BC (không chứa A), tức AH đi qua một điểm cố định.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

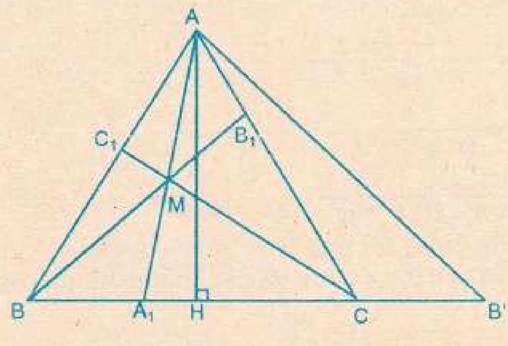
Quảng Ninh : *Nguyễn Thị Thu Hà*, 9A Trọng điểm Cẩm Phả, Bùi Bá Hưng, 9A Trọng điểm Uông Bí, **Thái Nguyên :** *Mai Nguyên Dũng*, 8 Chuyên THCS Năng khiếu, **Hòa Bình** : *Lâm Viết Hoan*, PTTH Hoàng Văn Thụ ; **Phú Thọ** : *Phạm Hà Trung*, 9A supe Lâm Thao, *Bùi Nguyên Thọ*, 9A, chuyên Phong Châu, *Nguyễn Việt Phương*, 9B chuyên Tam Thanh, *Phạm Thị Thu Hiền*, $9A_2$ chuyên Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Văn Nam*, 9T chuyênTam Đảo, *Kiều Việt Cường, Nguyễn Anh Tú*, 9B chuyên Yên Lạc, *Nguyễn Xuân Hiếu*, 9A, chuyên Mê Linh, *Trần Lê Huy*, 9A chuyên Vĩnh Tường ; **Bắc Giang** : *Đào Ngọc Minh*, 9T, NK Yên Dũng ; **Bắc Ninh** : *Trương Thị Thao*, 9, NK, Tiên Sơn, *Nguyễn Như Chuẩn*, 9NK, Thuận Thành ; **Hải Dương** : *Phạm Văn Kiên*, 9TL, NK Hải Dương ; **Hà Tây :** Doãn Phương Thảo, 9T chuyên Sơn Tây, *Nguyễn Mạnh Thắng*, 8A chuyên Thạch Thất, *Đặng Thị Mai*, 9 chuyên Chương Mĩ, *Đỗ Thanh Hiên*, 7A toán Thường Tín, *Nguyễn Hải Hà*, 9B chuyên Ứng Hòa ; **Hải Phòng** : *Nguyễn Văn Tiến*, THCS Vĩnh Quang, Vĩnh Bảo ; **Hà Nội** : *Lê Cường*, 9M Marie Curie, *Nguyễn Đức Tiến*, $9A_1$ Chu Văn An, *Nguyễn Hoàng Minh*, 8C Hà Nội – Amsterdam, *Lê Việt Cường*, 8A1 Nguyễn Trường Tộ ; **Nam Định** : *Nguyễn Văn Trung, Nguyễn Trọng Kiên, Bùi Trọng Kiều* 9T, *Nguyễn Công Tuấn, Đỗ Minh Tiến, Phạm Đình Quốc Hưng, Nguyễn Khánh An*, 8T Trần Đăng Ninh, *Trần Đức Hiệu*, 8T Hàn Thuyên, *Nguyễn Tiến Đạt*, 9CT Nguyễn Hiền, Nam Ninh, *Hà Trung Hậu*, 7A, Yên Tân, *Nguyễn Tuấn Anh*, 8T chuyên Ý Yên, *Vũ Việt Tài*, 9 Toán, *Hoàn Tiến* 9 Lí Hải Hậu, *Bùi Hoàng Hiệp*, 9 Hóa, chuyên Xuân Thủy ; **Nghệ An :** *Trịnh Quốc Chung*, 9A NK Quỳnh Lưu ; **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Văn San*, 9 Lí Năng Khiếu ; **Quảng Bình :** *Đặng Thị Tố Như*, 9T, Hải Đình, Đồng Hới ; **Thừa Thiên – Huế** : *Nguyễn Quang Vũ*, 9/1 Nguyễn Tri Phương ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Phan Xuân Nguyên*, 9/1 Nguyễn Khuyến ; *Đỗ Trọng Tuấn*, 9/2 Nguyễn Huệ ; **Bình Định** : *Phan Thanh Giản*, 8A Hòa Thắng, Tuy Phước ; **Quảng Ngãi** : *Võ Thị Thanh Hường*, 9T Lê Khiết, *Nguyễn Nhật Anh*, 9T chuyên Nguyễn Nghiêm ; Đức Phổ ; **Phú Yên :** *Phan Long Yên Ánh*, 9A Lương Văn Chánh, Tuy Hòa ; Khánh Hòa : *Trần Tuấn Anh*, 9T Lê Quý Đôn ; **Đắc Lắc :** *Mai Anh Tuấn*, 9 Chuyên Nguyễn Du, *Đặng Trung Thành*, 8T chuyên Nguyễn Du ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Trần Nam*, 9T Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa ; **HCM :** *Chung Nhân Phú*, 9T1 Nguyễn An Khương ; **An Giang** : *Hoàng Thanh Lâm*, 9T, chuyên Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên ; **Vĩnh Long :** *Lê Nguyễn Thủy Tiên*, 9T1 chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Trà Vinh :** *Trần Vĩnh Trung*, 98 Lí Tự Trọng ; **Bạc Liêu :** *Lương Thế Nhân*, 8A chuyên Bạc Liêu ; **Cà Mau** : *Nguyễn Ngọc Hà*, 9A1, Đầm Dơi.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/234. *Cho tam giác ABC với điểm M ở bên trong. Chứng minh rằng :*

$$MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB < 2Max\{AB \cdot AC, BC \cdot BA, CA \cdot CB\}.$$

Lời giải : Gọi A_1, B_1, C_1 là các giao điểm tương ứng của các tia AM, BM, CM với các cạnh BC, CA, AB. Vì M ở bên trong ΔABC nên tia AM nằm giữa hai tia AB, AC, suy ra A_1 nằm giữa hai điểm B, C. Hạ đường cao AH, không làm mất tính tổng quát, giả sử $AB \geq AC$, ta có $BH \geq CH$ nên gọi B' là điểm đối xứng với B qua H, ta có đoạn BB' chứa đoạn BC. Mà A_1 nằm giữa B, C nên A_1 nằm giữa B, B', suy ra $A_1H < BH$ hay $AA_1 < AB = \max\{AB, AC\}$. Suy ra $AA_1 \cdot BC < \max\{AB, AC\} \cdot BC = \max\{AB \cdot BC, AC \cdot BC\} < \max\{AB \cdot AC, BC \cdot BA, CA \cdot CB\}$



Đặt $M = \max\{AB.AC, BC.BA, CA.CB\}$, ta có :

$MA \cdot BC = \dfrac{MA}{AA_1} AA_1 \cdot BC < \dfrac{MA}{AA_1} M$. Tương tự, $MB \cdot CA < \dfrac{MB}{BB_1} M$, $MC \cdot AB < \dfrac{MC}{CC_1} M$

Mặt khác, do M ở bên trong ΔABC nên tổng diện tích các tam giác MAB, MBC, MCA bằng diện tích ΔABC, suy ra

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1$$

và

$$\frac{MA}{AA_1}+\frac{MB}{BB_1}+\frac{MC}{CC_1}=1-\frac{MA_1}{AA_1}+1-\frac{MB_1}{BB_1}+$$
$$+1-\frac{MC_1}{CC_1}=3-2=1.$$ Vậy :

$MA.BC + MB.CA + MA.BC < 2 \max \{AB.AC, BC.BA, CA.CB\}$

Nhận xét. Có 50 bạn giải bài này và đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có :

Nam Định : *Hoàng Tiến,* Lí 9 NK Hải Hậu ; *Vũ Viết Tài,* 9Toán NK Hải Hậu ; *Nguyễn Khánh An,* 8 Toán, Trần Đăng Ninh, Tp Nam Định. **Vĩnh Long** : *Nguyễn Hoàng Quân,* $9T_2$, PTTH Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Thanh Hóa** : *Trần Hoàng Thắng,* 9T PTTH Lam Sơn Tp Thanh Hóa. **Tp Hồ Chí Minh** : *Khúc Ngọc Vinh,* $8L_1$, PTCS Hồng Bàng. **Nghệ An** : *Phan Thanh Trung,* $9T_A$ PTCS Phan Bội Châu ; *Phan Huy Hoàng,* 9 Toán, PTCS Phan Bội Châu ; *Hà Văn Đạt* 9 Toán PTCS Phan Bội Châu. **Khánh Hòa** : *Đỗ Thị Di Thiên,* 9 Toán, Lê Quý Đôn, Tp Nha Trang. **Hòa Bình** : *Lâm Viết Hoan,* 10CT Hoàng Văn Thụ. **Đồng Nai** : *Phạm Ngọc Huy,* 9T Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa. **Vĩnh Long** : *Tăng Mỹ Thảo,* $9T_1$, Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Hà Nội** : *Lê Việt Cường,* $8A_1$, Nguyễn Trường Tộ, Q. Đống Đa ; *Bùi Duy Hiển,* 8C, PTTH Hà Nội – Amsterdam.

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/234. *Xét các số a, b, x, y thỏa mãn điều kiện*

$$0<b\le a\le 4$$
$$a+b\le 7$$
$$2\le x\le 3\le y$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{2x+\frac{1}{x}+y+\frac{2}{y}}{a^2+b^2}$$

Lời giải : (của bạn Nguyễn Thanh Sơn, 9b Ứng Hòa, Hà Tây).

Ta có $a(a-b)\le 4(a-b)$

$b(a+b)\le 7b$

$\Rightarrow a^2+b^2\le 4a+3b=a+3(a+b)\le 4+3.7=25$

Dấu bằng khi : $a=4, b=3$

Lại có $2x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+\frac{x}{4}+\frac{7x}{4}\ge 2\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{x}{4}}+$ $+\frac{7.2}{4}=1+\frac{7}{2}=\frac{9}{2}$. Dấu bằng khi $x=2$

và

$\frac{2}{y}+y=\frac{2}{9}y+\frac{2}{y}+\frac{7}{9}y\ge 2\sqrt{\frac{2}{9}y.\frac{2}{y}}+\frac{7.3}{9}=$ $=\frac{4}{3}+\frac{7}{3}=\frac{11}{3}$. Dấu bằng khi $y=3$

Vậy $P\ge\dfrac{\frac{9}{2}+\frac{11}{3}}{25}=\frac{49}{150}$

Dấu bằng đạt được khi $x=2, y=3, a=4, b=3$.

Vậy $\min P=\frac{49}{150}$.

Nhận xét : Các bạn giải tốt bài này là : *Lê Xuân Lâm* 12A Hoằng Hóa – **Thanh Hóa,** *Nguyễn Đăng Triển* 12T Cao Lãnh, **Đồng Tháp,** *Nguyễn Mai Tú Trung,* 10A Quốc Học. **Quy Nhơn,** *Ngô Tuấn Anh* 11 ĐHTH **Hà Nội,** *Nguyễn Tùng Lâm,* 11A PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng,** *Nguyễn Kiên,* $10A_2$ Yên Bái, *Trương Vĩnh Lân* 11CT Trung học NK **Quảng Bình,** *Đỗ Quang Dương,* 10T Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình,** *Nguyễn Kim Thắng,* 9L Trần Phú, **Hải Phòng,** *Trần Đại Nghĩa,* 10 PTNK **Hải Dương,** *Bùi Mạnh Hùng,* 10A ĐHTH Hà Nội, *Vũ Mạnh Hùng* 11T Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Võ Sỹ Nam,* $10A_1$ Minh Khai ; **Hà Tĩnh,** *Nguyễn Thế Duy,* $10A_1$ Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/234. *Cho các số thực a, b, c và số nguyên n > 0 thỏa mãn hệ thức*

$$c=\frac{-6(a+b)}{5(n+2)} \qquad (1)$$

Chứng minh rằng phương trình

$$a\sin^n x+b\cos^n x+c\sin x+c=0 \qquad (2)$$

có nghiệm trong khoảng $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải : (của đa số các bạn).

Từ giả thiết (1), suy ra

$$\frac{2a+2b}{n+2}+\frac{5c}{3}=0 \qquad (3)$$

Xét hàm số

$$f(x)=\frac{2a}{n+2}\sin^{n+2}x-\frac{-b}{n+2}\cos^{n+2}x+$$
$$+\frac{2c}{3}\sin^3x-c\cos^2x$$

Nhận xét rằng $f(x)$ là hàm số xác định, liên tục và có đạo hàm trên $(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=2a\sin^{n+1}x\cos x+2b\cos^{n+1}x\sin x+$$
$$+2c\sin^2x\cos x+2c\cos x\sin x$$
$$=\sin 2x(a\sin^n x+b\cos^n x+c\sin x+c) \qquad (4)$$

Theo Định lí Lagrange, tồn tại $x_o\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)f'(x_o)$$

Suy ra

$$\frac{\pi}{2}f'(x_o)=\frac{2a}{n+2}+\frac{2c}{3}+\frac{2b}{n+2}+c=$$

$= \frac{2a + 2b}{n + 2} + \frac{5c}{3} = 0$ (theo (3)).

Mặt khác $\sin 2x_o \neq 0$ (do $0 < x_o < \frac{\pi}{2}$) nên từ (4) ta nhận được

$f'(x_o) = 0 \leftrightarrow a\sin^n x_o + b\cos^n x_o + c\sin x_o + c = 0$ (đpcm).

Nhận xét. Hầu hết các bạn gửi lời giải đều có cách giải tương tự như trên. Một số ít các bạn còn sử dụng các tính chất cực trị của hàm số lượng giác để giải bài toán này.

Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Đà Nẵng : Bùi Viết Phùng, Nguyễn Duy, Lê Triệu Phong, Ngô Quốc Tuấn, Phan Anh Huy, Ngô Ngọc Phúc, Hồ Lê Viết Trung, Nguyễn Hoàng Minh Tuấn, Hồ Vũ Quốc Vương.

Thanh Hóa : Trương Ngọc Tuyên, Hán Văn Thắng, Lê Xuân Lâm, Trương Cao Dũng, Nguyễn Văn Quang, Lê Đức Thạch.

Đồng Tháp : Nguyễn Đăng Triển, Hồ Lộc Thuận. **Nghệ An** : Nguyễn Trần Phương, Đặng Đức Hạnh, Nguyễn Văn Tăng, Hoàng Minh Hải, Nguyễn Duy Trung, Lê Hồng Hà, Nguyễn Thịnh. **Đăk Lăk** : Trương Xuân Ngưu, Lê Thế Tân, Nguyễn Tuấn Anh. **Phú Yên** : Đặng Thế Mỹ. **Trà Vinh** : Huỳnh Thế Khanh. **Hà Nội** : Ngô Tuấn Anh, Nguyễn Đức Mạnh, Lê Hoài Phương, Nguyễn Doãn Tân, Đinh Cao Thắng. **Quảng Bình** : Trương Vĩnh Lân, Phạm Hồng Thái, Trần Đức Thuận. **Thừa Thiên - Huế** : Phạm Tiến Đạt, Nguyễn Ngọc Phúc, Đinh Trung Hoàng. **Phú Thọ** : Nguyễn Kim Sổ. **Bắc Giang** : Đặng Hoàng Việt Hà, Vũ Duy Tuấn. **Hải Dương** : Trần Đại Nghĩa. **TP HCM** : Nguyễn Lệ Lực, Lê Quang Nẫm. **Quảng Ngãi** : Nguyễn Xuân Hà. **Hà Tây** : Nguyễn Trung Thành. **Hải Phòng** : Đoàn Mạnh Hà

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/234. *Xác định m để giá trị nhỏ nhất của hàm số :*

$f(x, y, z) = (x - y + mz + 1)^2 + [x + (m + 1)y - 2z + 2]^2 + [2x + 2y + (m - 4)z + 1]^2$

là lớn nhất.

Lời giải (của nhiều bạn) : Dễ thấy $f(x, y, z) \geq 0\ \forall x, y, z \in R$ và dấu "=" đạt được khi và chỉ khi (x, y, z) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y + mz + 1 = 0 \\ x + (m + 1)y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + (m - 4)z + 1 = 0 \end{cases} \qquad (I)$$

Xét hệ (I), ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + mz + 1 = 0 \\ x + (m + 1)y - 2z + 2 = 0 & (1) \\ 2x + 2y + (m - 4)z + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Suy ra : Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (1) - (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m(m + 2) \neq 0 \Leftrightarrow m \notin \{0, -2\}$.

Như vậy, nếu $m \notin \{0, -2\}$ thì min $f(x, y, z) = 0$. (1)

• Xét $m = -2$. Khi đó :

$$f(x, y, z) = (x - y - 2z + 1)^2 + (x - y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y - 6z + 1)^2$$
$$= \frac{1}{2}[1^2 + (-1)^2 + 0^2][(x - y - 2z + 1)^2 + (x - y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y - 6z + 1)^2]$$
$$\geq \frac{1}{2}.(-1)^2 = \frac{1}{2}.$$

Hơn nữa, có $f\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}$. Suy ra, nếu $m = -2$ thì min $f(x, y, z) = \frac{1}{2}$. (2)

• Xét $m = 0$. Khi đó :

$$f(x, y, z) = (x - y + 1)^2 + (x + y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y - 4z + 1)^2 = \frac{4}{5}\left[0^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right][(x - y + 1)^2 + (x + y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y - 4z + 1)^2]$$
$$\geq \frac{4}{5}.\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9^2}{5}.$$

Hơn nữa, có $f\left(\frac{1}{10}, \frac{11}{10}, 1\right) = \frac{9}{5}$. Suy ra, nếu $m = 0$ thì min $f(x, y, z) = \frac{9}{5}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : giá trị nhỏ nhất của $f(x, y, z)$ là lớn nhất khi và chỉ khi $m = 0$.

Nhận xét : Có nhiều bạn tham gia giải bài. Trong số các lời giải mà tòa soạn nhận được chỉ có 3 lời giải sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Đăk Lăk : *Trương Xuân Nghiêu* (10 CT - PTTH Nguyễn Du) **Trà Vinh** : *Trần Huỳnh Thế Khanh* ($12A_1$ - PTTH Phạm Thái Bường). **Quảng Nam** : *Nguyễn Phước Hiệp* ($12A_2$ - THCB Nguyễn Duy Hiệu - Điện Bàn). **Đà Nẵng** : *Nguyễn Ngọc Hải, Phan Anh Huy* (PTTH Lê Quí Đôn). **Huế** : *Trần Như Quang* (10CT Quốc học Huế). **Quảng Ngãi** : *Nguyễn Xuân Hà, Nguyễn Ngọc Phúc* (12H, 12I PTTH số 1 Đức Phổ). **Quảng Bình** : *Nguyễn Hoa, Trần Đức Thuận* ($10T_1$, 11CT PTNK Quảng Bình). **Nghệ An** : *Nguyễn Văn Lương, Nguyễn Thịnh, Đặng Đức Hạnh* (10TL, 11T PTTH Phan Bội Châu). **Thanh Hóa** : *Hoàng Trung Tuyến* (PTTH Hà Trung), *Lê Đức Thịnh* (12A PTTH Quảng Xương III), *Trương Ngọc Tuyên* ($11A_1$ PTTH CB Ba Đình - Nga Sơn), *Lê Xuân Lâm* (12A PTTH Lương Đức Bằng, Hoằng Hóa), *Phan Xuân Thành* (10T PTTH Lam Sơn). **Nam Định** : *Nguyễn Trọng Kiên* (9T – THCS Trần Đăng Ninh). **Hà Nội** : *Nguyễn Đức Mạnh* (11A PTTH Cổ Loa, Đông Anh). **Hòa Bình** : *Đỗ Quang Dương, Hà Khánh Toàn* (10T, 11CT PTNK Hoàng Văn Thụ). **Vĩnh Phú** : *Nguyễn Kim Sổ* (11A PTTH Thanh Ba) ; *Nguyễn Minh Phương, Đỗ Quốc Gia* (11A, 10A PTTH Chuyên Hùng Vương). **Yên Bái** : Đỗ Năng Tùng ($11A_1$ PTTH Chuyên Yên Bái). **Hải Dương** : *Phạm Văn Hải* (11T PTNK tỉnh). **Hải Phòng** : *Đặng Anh Tuấn, Hà Duy Hưng* (11T, 12 Chuyên Tin PTTH Trần Phú). **ĐHSP Vinh** : *Hoàng Minh Hải, Nguyễn Duy Trung, Hồ Sỹ Ngọc, Nguyễn Trần Phương, Nguyễn Văn Tăng* (Khối PTCT). ĐHQG **TP Hồ Chí Minh** : *Nguyễn Lê Lực, Lê Quang Nẫm* (Trường PTNK). ĐHQG **Hà Nội** : *Nguyễn Mạnh Hà, Bùi Mạnh Hùng, Phạm Hải Trung* (Khối PTCT – Tin ĐHKHTN)

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/234. *Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh a, b, c và các bán kính r, R của các đường tròn nội, ngoại tiếp một tam giác thỏa mãn hệ thức sau đây*

$$\frac{a^3}{br+cR}+\frac{b^3}{cr+aR}+\frac{c^3}{ar+bR}=\frac{2(a+b+c)^2}{9R};\quad (*)$$

thì tam giác đó là đều.

Lời giải : (Dựa theo *Bùi Minh Thiện*, 12B, PTTH chuyên **Trà Vinh**)

Đặt : $x = br+cR$, $y = cr+aR$ và $z = ar+bR$, thế thì vế trái của (*) được viết lại dưới dạng :

$$T=\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\qquad (1)$$

Ta được :

$$ax+by+cz=(bc+ca+ab)(R+r);\qquad (2)$$

và :

$$(ax+by+cz)T=a^4+b^4+c^4+ab\left(a^2\frac{y}{x}+b^2\frac{x}{y}\right)+$$
$$+bc\left(b^2\frac{z}{y}+c^2\frac{y}{z}\right)+ca\left(c^2\frac{x}{z}+a^2\frac{z}{x}\right);\qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\geqslant\alpha\beta$ ($\alpha>0,\beta>0$) vào các vế phải của (2) và (3), ta được :

$$T\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(bc+ca+ab)(R+r)}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{R+r}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3(R+r)}\qquad (4)$$

Mặt khác, ta lại có : $R\geqslant 2r$ hay : $r\leqslant\frac{R}{2}$; (5)

Do đó, từ (4) và (5), ta được :

$$T\geqslant\frac{2(a+b+c)^2}{9R}\qquad (6)$$

Dấu đẳng thức ở (6) đạt được, và do đó hệ thức (*) được thỏa mãn khi và chỉ khi các đẳng thức ở các hệ thức (4), (5) và (6) đồng thời xảy ra, nghĩa là :

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\frac{y}{x}=b^2\frac{x}{y}\\ b^2\frac{z}{y}=c^2\frac{y}{z}\\ c^2\frac{x}{z}=a^2\frac{z}{x}\\ ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2\\ R=2r\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow a=b=c\\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} & (7)\\ R=2r & (8)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow a=b=c$ và do đó, tam giác là đều.

Thật vậy, từ (7) ta được :

$$\frac{br+cR}{a}=\frac{cr+aR}{b}=\frac{ar+bR}{c}=R+r$$

hay là :

$$\begin{cases}a(R+r)-(br+cR)=(a-b)r+(a-c)R=0\\ cr+aR-b(R+r)=(c-b)r+(a-b)R=0 & (7')\\ ar+bR-c(R+r)=(a-c)r+(b-c)R=0\end{cases}$$

Do a, b và c có vai trò bình đẳng, nên để được định ý, giả sử $a\geqslant b\geqslant c$. Cộng vế đối vế các đẳng thức (7'), ta được :

$$2(a-b)r+2(a-c)R=0\qquad (7'')$$

Nhưng $a-b\geqslant 0$ và $a-c\geqslant 0$ nên (7'') xảy ra khi và chỉ khi $a-b=0=a-c$, nghĩa là $a=b=c$.

Còn hệ thức (5) được suy ra từ hệ thức {le : $OI^2=R^2-2Rr$. Do đó : (8) $\Leftrightarrow R(R-2r)=0\Leftrightarrow OI=O\Leftrightarrow O\equiv I\Leftrightarrow$ Tam giác là đều.

Nhận xét : 1°) Rất đông các bạn tham gia giải bài toán trên, tòa soạn nhận được tất cả trên 300 bài. Rất đáng tiếc có một bạn đã giải sai và kết luận rằng tam giác thỏa mãn (*) là tam giác không đều (! ! !)

2°) Trong lúc đại đa số các bạn phải sử dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, hoặc huy động cả bất đẳng thức Svácxơ nữa để thu được (4) :

$$T=\frac{a^4}{ax}+\frac{b^4}{by}+\frac{c^4}{cz}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ax+by+cz}=$$
$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(bc+ca+ab)(R+r)}$$

thì lời giải trên của bạn Thiện chỉ sử dụng B.Đ.T. Côsi cho hai số dương cũng đủ để thu được B.Đ.T (7) một cách gọn gàng và nhanh chóng.

3°) Hầu hết các bạn đã giải do vội vàng, chỉ để ý đến dấu đẳng thức ở các hệ thức (5), (6) và hệ thức $a^2+b^2+c^2 \geqslant bc+ca+ab$. Các bạn quên rằng dấu đẳng thức đạt được ở hệ thức (4) (khi sử dụng B.Đ.T. Bunhiacốpski hay B.Đ.T. Svácxơ) khi và chỉ khi có các đẳng thức (7). Chỉ có duy nhất bạn *Ông Quốc Vỹ* (lớp $10A_1$, trường Lê Quý Đôn, Đà Nẵng) đã đưa ra chứng minh chặt chẽ (7) $\Leftrightarrow a = b = c$ như đã chỉ ra ở trên. Trong lời giải của bạn Thiện cũng có nêu ra các điều kiện (7) và (8) là cần và đủ để (*) thỏa mãn nhưng không đưa ra được chứng minh như bạn Vỹ. Các bạn sau đây cũng chỉ ra các điều kiện đó :

Trần Tân Nam, 9T, Tam Đảo, **Vĩnh Phúc**, *Phạm Hoàng Vinh*, $11A_0$ **Trà Vinh** ; *Nguyễn Bảo Điền*, 11 Anh, Mỹ Tho, **Tiền Giang**, *Nguyễn Ngọc Toán*, $12A_1$ thị xã **Cà Mâu**, *Phạm Văn Hải* 11T PTNK **Hải Hưng**, *Nguyễn Vĩnh Trà*, 11A, TH chuyên **Trà Vinh**, *Nguyễn Ngọc Kiên* $10A_1$ PTTH Phù Ninh, **Phú Thọ**, *Lê Quang Tôn*, $10A_1$, Yên Hòa, **Hà Nội**, *Trần Tuấn Anh*, 9T, Lê Quý Đôn Nha Trang **Khánh Hòa**, *Lê Hồng Phương*, 11A, Châu Phong, Mê Linh, **Vĩnh Phú** ; *Nguyễn Mậu Tú*, 10A PTTH Vân Nội, **Hà Nội** ; *Tống Thành Vũ*, 9B PTNK Tĩnh Gia, **Thanh Hóa**.

4°) Ngoài ra, bạn *Bùi Mạnh Hùng*, 10A, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** đã đề xuất và giải bài toán tổng quát hơn : Chứng minh B.Đ.T.

$$\frac{a^k}{b^n r + c^n R} + \frac{b^k}{c^n r + a^n R} + \frac{c^k}{a^n r + b^n R} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2(a+b+c)^{k-n}}{3^{k-n} R}$$

(với k và $n \in N^*$; $k \geqslant n$)

Tuy nhiên, chứng minh của bạn Hùng chưa chặt chẽ phần cuối.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/234. *Cho một góc tam diện với các góc phẳng ở đỉnh (mặt) không phải là góc vuông. Qua đỉnh ta dựng ba đường thẳng, mỗi đường vuông góc với một cạnh và nằm trong mặt phẳng chứa mặt đối diện với cạnh đó. Chứng minh rằng các đường thẳng dựng được cùng nằm trong một mặt phẳng.*

Lời giải 1. (Dựa theo *Nguyễn Trung Kiên*, $11A_2$, PTTH Lệ Thủy, **Quảng Bình**). Giả sử góc tam diện $O(abc)$ có các mặt $\widehat{bOc} = \alpha$, $\widehat{cOa} = \beta$ và $\widehat{aOb} = \gamma$ không phải là góc vuông. Gọi $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ là các véctơ đơn vị trên các cạnh Oa, Ob và Oc và đặt : $\lambda = \overrightarrow{bc}$ ($= \cos\alpha$), $\mu = \overrightarrow{ca}$ ($= \cos\beta$), $\nu = \overrightarrow{ab}$ ($= \cos\gamma$). (Theo giả thiết thì λ, μ và ν đều $\neq 0$).

Trên các mặt phẳng (bOc), (cOa) và (aOb) từ đỉnh O ta dựng các véctơ : $\overrightarrow{a'} = \mu\overrightarrow{b} - \nu\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b'} = \nu\overrightarrow{c} - \lambda\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{c'} = \lambda\overrightarrow{a} - \mu\overrightarrow{b}$ lần lượt nằm trên các đường thẳng mà ta kí hiệu là Oa', Ob' và Oc'. Thế thì ta được :

$$\overrightarrow{a'} + \overrightarrow{b'} + \overrightarrow{c'} = \overrightarrow{O} \qquad \text{(i)}$$
$$\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{cc'} = O \; ; \qquad \text{(ii)}$$

Hệ thức (i) chứng tỏ các đường thẳng Oa', Ob' và Oc' đồng thẳng ; còn các hệ thức (ii) chứng tỏ Oa', Ob' và Oc' theo thứ tự vuông góc với các cạnh Oa, Ob và Oc của góc tam diện. Như vậy, các đường thẳng Oa', Ob' và Oc' (có các véctơ chỉ phương $\overrightarrow{a'}$, $\overrightarrow{b'}$ và $\overrightarrow{c'}$ (theo cách dựng đã chỉ ra ở trên) dựng được thỏa mãn bài toán là ba đường thẳng đồng phẳng.

Sau đây là lời giải khác, cũng sử dụng phương pháp véctơ nhưng có phần tự nhiên hơn.

Lời giải 2. (*Nguyễn Minh Phương*, 11A, PTTH chuyên Hùng Vương **Phú Thọ** và một số bạn khác). Gọi Oa', Ob' và Oc' là ba đường thẳng lần lượt nằm trên các mặt phẳng bOc, cOa và aOb sao cho vuông góc với Oa, Ob và Oc. Trên các đường thẳng Oa', Ob', Oc' lần lượt lấy các véctơ chỉ phương : $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{c} + x\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$. Từ các điều kiện $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{cc'}$, ta được :

$$\cos\gamma + z\cos\beta = \cos\alpha + x\cos\gamma = \cos\beta + y\cos\alpha = 0$$

Từ đó ta thu được hệ thức :

$$\overrightarrow{a'}\cos\beta + \overrightarrow{b'}\cos\gamma = \overrightarrow{c'}\cos\alpha = \overrightarrow{O}$$

Nó chứng tỏ các đường thẳng Oa', Ob' và Oc' đồng phẳng.

Ngoài phương pháp véctơ, có thể giải bài toán trên bằng phương pháp thông thường (phương pháp tổng hợp).

Lời giải 3. (*Nguyễn Phước Hiệp*, $12A_2$, THCB Điện Bàn, **Quảng Nam** và một số bạn khác). Ta cần chứng minh Oa', Ob' và Oc' (dựng được thỏa mãn điều kiện của bài toán) đồng phẳng. Nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng (σ) nào đó, ta hãy cắt góc tam diện $O(abc)$ bằng một mặt phẳng (π) // (σ) ; giả sử (π) cắt Oa, Ob và Oc lần lượt ở A, B và C và ta được : BC // Oa', CA // Ob', AB // Oc'

Từ đó suy ra :

$$\begin{cases} Oa' \ Oa \\ Ob' \ Ob \\ Oc' \ Oc \\ Oa', Ob' \text{ và } Oc' \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} BC' \ OA \\ CA \ OB \\ AB \ OC \\ \pi(ABC) \,//\, \sigma \end{cases} \Leftrightarrow OABC \text{ là một tứ diện trực tâm.}$$

Bài toán quy về dựng một tứ diện trực tâm $OABC$ có các đỉnh $A \in Oa$, $B \in Ob$ và $C \in Oc$. Chẳng hạn, lấy một điểm A trên Oa ($A \neq 0$). Có thể dễ dàng chứng minh rằng tìm được duy nhất một điểm B trên Ob và một điểm C trên

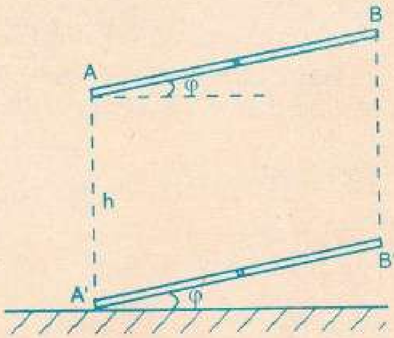
Oc sao cho : $AB \perp OC$ và $AC \perp OB$ (hãy chứng minh điều đó). Thế thì $OABC$ là một tứ diện trực tâm (các đường cao đồng quy) và do đó $BC \perp OA$. (đ pcm).

Nhận xét. 1°) Có nhiều bạn tham gia giải bài toán trên và đa số sử dụng phương pháp véctơ. Điều đó chứng tỏ các bạn đã sử dụng tương đối thành thạo phương pháp véctơ (các phép toán tuyến tính cũng như phép nhân vô hướng) vào việc chứng minh quan hệ đồng phẳng của các đường thẳng. Tuy nhiên, lời giải của nhiều bạn chưa được gọn, thường dài dòng và thiếu sáng sủa.

2°) Số bạn giải bài toán trên bằng phương pháp tổng hợp không nhiều, tuy nhiên chưa chỉ ra được thực chất của bài toán này là một bài toán dựng hình.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/234. *Một thanh đồng chất chiều dài 2l đặt nghiêng so với phương nằm ngang một góc γ rơi không quay từ độ cao nào đó so với mặt bàn nằm ngang và va chạm với mặt bàn. Va chạm được coi là đàn hồi. Tìm vận tốc của khối tâm và vận tốc góc quay ngay sau khi va chạm với bàn.*



Hướng dẫn giải.

Vận tốc khối tâm của thanh khi bắt đầu va chạm với mặt bàn $v_o = \sqrt{2gh}$. Gọi v là vận tốc khối tâm và ω là vận tốc góc quay ngay sau khi va cạm, vì va chạm là đàn hồi, áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và bảo toàn mômen xung lượng đối với điểm A' (điểm chạm của thanh với mặt bàn) ta có

$v_o^2 = v^2 + \frac{I}{m}\omega^2$, trong đó $I = \frac{ml^2}{3}$ (áp dụng định lí Staine)

$$\text{và } mlv_o\omega s\varphi = mlv\cos\varphi + \frac{ml^2}{3}\omega$$

Từ đó suy ra

$$v = v_o\frac{3\omega s^2\varphi - 1}{3\cos^2\varphi + 1} \text{ và } \omega = \frac{2v_o}{l}.\frac{3\omega s\varphi}{3\omega s^2\varphi + 1}$$

Nhận xét. Bạn có lời giải đúng : *Nguyễn Văn Thuần*, 12B PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**.

MAI ANH

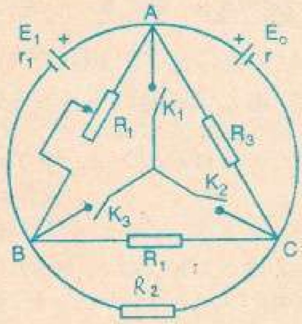
Bài L2/234. *Cho mạch điện như hình vẽ.*

$E_o = 5V$; $r = [0,5\Omega \rightarrow 2\Omega]$

$E_1 = 8V$; $r_1 = 2\Omega$

$R_1 = R_2 = R_3 = 4\Omega$

$R_t = [0,5\Omega \rightarrow 1\Omega]$.



1. Khóa K_1 mở, K_2, K_3 đóng.

Hãy chọn r và điều chỉnh R_t để công suất trên R_t min.

2. K_1, K_2 mở. Tìm cường độ dòng điện qua R_1, R_2 với các giá trị r, R_t ở câu 1.

Hướng dẫn giải

a) Vẽ lại mạch điện, khi đó mạch điện có sơ đồ sau :

$E_o // E_1 // R_3 // R_t$. Ta có

$$U_{AB} = \frac{\frac{E_o}{r} + \frac{E_1}{r_1}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_t}} \qquad (1)$$

và công suất tiêu thụ trên R_t là

$$P_t = \frac{U_{AB}^2}{R_t} \qquad (2).$$

Từ (1) và (3) rút ra : với cùng một giá trị của Rt $_{p}$t nhỏ nhất khi UAB nhỏ nhất, mà UAB nhỏ nhất khi $r = 2\Omega$ (lấy đạo hàm UAB theo r và cho bằng 0). Với $r = 2\Omega$, $P_t = \frac{676R_t}{(5R_t + 4)^2}$. Khảo sát sự biến thiên của P_t cho thấy P_t đạt cực tiểu khi Rt = 0,5Ω. b) Vẽ lại mạch điện, khi đó mạch có sơ đồ :

$[(E_1 // R_t)nt(R_1 // R_2)] // R_3 // E_o$. Áp dụng định luật Ôm cho đoạn mạch sẽ rút ra $I_{R1} = I_{R2} = \frac{13}{56} \simeq 0,23A$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng : *Nguyễn Trung Dũng*, 9 Lí, Trường Trần Đăng Ninh, **Nam Định** ; *Nguyễn Văn Thuần*, 12B, PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** ; *Trần Huỳnh Thế Khanh*, 12A$_1$ PTTH Phạm Thái Bường, **Trà Vinh**.

MAI ANH

hệ thức $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant bc + ca + ab$. Các bạn quên rằng dấu đẳng thức đạt được ở hệ thức (4) (khi sử dụng B.Đ.T. Bunhiacốpski hay B.Đ.T. Svácxơ) khi và chỉ khi có các đẳng thức (7). Chỉ có duy nhất bạn *Ông Quốc Vỹ* (lớp $10A_1$, trường Lê Quý Đôn, Đà Nẵng) đã đưa ra chứng minh chặt chẽ (7) $\Leftrightarrow a = b = c$ như đã chỉ ra ở trên. Trong lời giải của bạn Thiện cũng có nêu ra các điều kiện (7) và (8) là cần và đủ để (*) thỏa mãn nhưng không đưa ra được chứng minh như bạn Vỹ. Các bạn sau đây cũng chỉ ra các điều kiện đó :

Trần Tân Nam, 9T, Tam Đảo, **Vĩnh Phúc**, *Phạm Hoàng Vinh*, $11A_0$ **Trà Vinh** ; *Nguyễn Bảo Điền*, 11 Anh, Mỹ Tho, **Tiền Giang**, *Nguyễn Ngọc Toán*, $12A_1$ thị xã **Cà Mâu**, *Phạm Văn Hải* 11T PTNK **Hải Hưng**, *Nguyễn Vĩnh Trà*, 11A, TH chuyên **Trà Vinh**, *Nguyễn Ngọc Kiên* $10A_1$ PTTH Phù Ninh, **Phú Thọ**, *Lê Quang Tôn*, $10A_1$, Yên Hòa, **Hà Nội**, *Trần Tuấn Anh*, 9T, Lê Quý Đôn Nha Trang **Khánh Hòa**, *Lê Hồng Phương*, 11A, Châu Phong, Mê Linh, **Vĩnh Phú** ; *Nguyễn Mậu Tú*, 10A PTTH Vân Nội, **Hà Nội** ; *Tống Thành Vũ*, 9B PTNK Tĩnh Gia, **Thanh Hóa**.

4°) Ngoài ra, bạn *Bùi Mạnh Hùng*, 10A, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** đã đề xuất và giải bài toán tổng quát hơn : Chứng minh B.Đ.T.

$$\frac{a^k}{b^n r + c^n R} + \frac{b^k}{c^n r + a^n R} + \frac{c^k}{a^n r + b^n R} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2(a+b+c)^{k-n}}{3^{k-n} R}$$

(với k và $n \in N^*$; $k \geqslant n$)

Tuy nhiên, chứng minh của bạn Hùng chưa chặt chẽ phần cuối.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/234. *Cho một góc tam diện với các góc phẳng ở đỉnh (mặt) không phải là góc vuông. Qua đỉnh ta dựng ba đường thẳng, mỗi đường vuông góc với một cạnh và nằm trong mặt phẳng chứa mặt đối diện với cạnh đó. Chứng minh rằng các đường thẳng dựng được cùng nằm trong một mặt phẳng.*

Lời giải 1. (Dựa theo *Nguyễn Trung Kiên*, $11A_2$, PTTH Lệ Thủy, **Quảng Bình**). Giả sử góc tam diện $O(abc)$ có các mặt $\widehat{bOc} = \alpha$, $\widehat{cOa} = \beta$ và $\widehat{aOb} = \gamma$ không phải là góc vuông. Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là các véctơ đơn vị trên các cạnh Oa, Ob và Oc và đặt : $\lambda = \vec{b}\vec{c}$ $(= \cos\alpha)$, $\mu = \vec{c}\vec{a}$ $(= \cos\beta)$, $\nu = \vec{a}\vec{b}$ $(= \cos\gamma)$. (Theo giả thiết thì λ, μ và ν đều $\neq 0$).

Trên các mặt phẳng (bOc), (cOa) và (aOb) từ đỉnh O ta dựng các véctơ : $\vec{a'} = \mu\vec{b} - \nu\vec{c}$, $\vec{b'} = \nu\vec{c} - \lambda\vec{a}$ và $\vec{c'} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{b}$ lần lượt nằm trên các đường thẳng mà ta kí hiệu là Oa', Ob' và Oc'. Thế thì ta được :

$$\vec{a'} + \vec{b'} + \vec{c'} = \vec{O} \qquad \text{(i)}$$
$$\vec{a}\vec{a'} = \vec{b}\vec{b'} = \vec{c}\vec{c'} = O \; ; \qquad \text{(ii)}$$

Hệ thức (i) chứng tỏ các đường thẳng Oa', Ob' và Oc' đồng thẳng ; còn các hệ thức (ii) chứng tỏ Oa', Ob' và Oc' theo thứ tự vuông góc với các cạnh Oa, Ob và Oc của góc tam diện. Như vậy, các đường thẳng Oa', Ob' và Oc' (có các véctơ chỉ phương $\vec{a'}$, $\vec{b'}$ và $\vec{c'}$ (theo cách dựng đã chỉ ra ở trên) dựng được thỏa mãn bài toán là ba đường thẳng đồng phẳng.

Sau đây là lời giải khác, cũng sử dụng phương pháp véctơ nhưng có phần tự nhiên hơn.

Lời giải 2. (*Nguyễn Minh Phương*, 11A, PTTH chuyên Hùng Vương **Phú Thọ** và một số bạn khác). Gọi Oa', Ob' và Oc' là ba đường thẳng lần lượt nằm trên các mặt phẳng bOc, cOa và aOb sao cho vuông góc với Oa, Ob và Oc. Trên các đường thẳng Oa', Ob', Oc' lần lượt lấy các véctơ chỉ phương : $\vec{a'} = \vec{b} + z\vec{c}$, $\vec{b'} = \vec{c} + x\vec{a}$, $\vec{c'} = \vec{a} + y\vec{b}$. Từ các điều kiện $\vec{a}\vec{a'} = \vec{b}\vec{b'} = \vec{c}\vec{c'}$, ta được :

$$\cos\gamma + z\cos\beta = \cos\alpha + x\cos\gamma = \cos\beta + y\cos\alpha = 0$$

Từ đó ta thu được hệ thức :

$$\vec{a'}\cos\beta + \vec{b'}\cos\gamma = \vec{c'}\cos\alpha = \vec{O}$$

Nó chứng tỏ các đường thẳng Oa', Ob' và Oc' đồng phẳng.

Ngoài phương pháp véctơ, có thể giải bài toán trên bằng phương pháp thông thường (phương pháp tổng hợp).

Lời giải 3. (*Nguyễn Phước Hiệp*, $12A_2$, THCB Điện Bàn, **Quảng Nam** và một số bạn khác). Ta cần chứng minh Oa', Ob' và Oc' (dựng được thỏa mãn điều kiện của bài toán) đồng phẳng. Nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng (σ) nào đó, ta hãy cắt góc tam diện $O(abc)$ bằng một mặt phẳng $(\pi) \parallel (\sigma)$; giả sử (π) cắt Oa, Ob và Oc lần lượt ở A, B và C và ta được : $BC \parallel Oa'$, $CA \parallel Ob'$, $AB \parallel Oc'$

Từ đó suy ra :

$$\begin{cases} Oa' \;\; Oa \\ Ob' \;\; Ob \\ Oc' \;\; Oc \\ Oa', Ob' \text{ và } Oc' \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} BC' \;\; OA \\ CA \;\; OB \\ AB \;\; OC \\ \pi(ABC) \parallel \sigma \end{cases} \Leftrightarrow OABC \text{ là một tứ diện trực tâm.}$$

Bài toán quy về dựng một tứ diện trực tâm $OABC$ có các đỉnh $A \in Oa$, $B \in Ob$ và $C \in Oc$. Chẳng hạn, lấy một điểm A trên Oa $(A \neq 0)$. Có thể dễ dàng chứng minh rằng tìm được duy nhất một điểm B trên Ob và một điểm C trên

Problems in this issue

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/238. *Let A and B be two 7-digit numbers, the digits of each number are distinct, from 1 to 7. Suppose that A > B. Can A be divisible by B ? Why is it ?*

T2/238. *Let a, b, c, d be positive integers satisfying $b^2 + 1 = ac$ and $c^2 + 1 = bc$. Prove that $a + c = 3b$ and $b + d = 3c$.*

T3/238. *Solve the equation*

$$x^3 + 2\sqrt{7}x^2 + 7x + \sqrt{7} - 1 = 0.$$

T4/238. *Let be given a quadrilateral ABCD, AB > CD, the diagonals of which are perpendicular. Prove that ABCD is not a circumscribable quadrilateral.*

T5/238. *Take three points A', B', C' respectively on the sides BC, CA, AB of a triangle ABC, and let A'', B'', C'' be respectively the midpoints of AA', BB', CC'. Prove that the ratio of the areas of the triangles A'B'C' and A''B''C'' does not depend on the position of A', B', C'.*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/238. *The sequence of real numbers $\{x_n\}$ satisfies :*

$$x_1 = a \text{ and } x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n} \text{ for every } n \geq 1.$$

Prove that $\frac{1}{5} < x_n < 2$ for all $n \geq 1$.

T7/238. *Determine all triples of real numbers (a, b, c) such that the function $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ satisfies the condition $|f(x)| \leq 1$ for every $x \in [-1, 1]$.*

T8/238. *Determine the angles of a triangle ABC such that*

$$\hat{A} + \hat{C} = 120^o \text{ and } \frac{b + c}{b + a} = 2\cos\hat{C} - 1.$$

T9/238. *Prove that for every triangle ABC,*

$$\sqrt{3}\cos\hat{A} + 2\cos\hat{B} + 2\sqrt{3}\cos\hat{C} \leq 4.$$

When does equality occur ?

T10/238. *Two tetrahedra ABCD and A'B'C'D' are placed in space so that : BC ⊥ D'A', CA ⊥ D'B', AB ⊥ D'C', DA ⊥ B'C', DB ⊥ C'A'. Prove that there exists a point unique O such that OA, OB, OC, OD are perpendicular respectively to the planes (B'C'D'), (C'D'A'), (D'A'B'), (A'B'C').*

ĐÔI ĐIỀU VỀ ...

(tiếp theo trang 1)

Giải : * Nếu trong 3 số x, y, z có đúng 1 số âm hoặc cả 3 số đều âm thì $\frac{xy}{2} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} < 0 \Rightarrow$ không thỏa mãn phương trình

* Cả 3 số đều dương hoặc 2 trong 3 số là âm ta có :

$$A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = \frac{|x||y|}{|z|} + \frac{|y||z|}{|x|} + \frac{|z||x|}{|y|}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{|x|\,|y|\,|z|} = 3\sqrt[3]{|xyz|} \geq 3$$

$\Rightarrow$ min A = 3 đạt được khi $|x| = |y| = |z| = 1$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là :

$(x, y, z) = \{(1, 1, 1); (1, -1, -1); (-1, -1, 1); (-1, 1, -1)\}$

Bài toán 5 : *Tìm m để hệ có nghiệm $x > 0$, $y > 0, z > 0$*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ xy + yz + zx = 9m & (2) \\ xyz = m & (3) \end{cases}$$

Giải : Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương x, y, z ta có :

$1 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{m}$ (do 3) $\Rightarrow$ $m \leq \frac{1}{27}$ (*)

$9m = xy + yz + xz \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3\sqrt[3]{m^2}$ $\Rightarrow m \geq \frac{1}{27}$ (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow m = \frac{1}{27}$

Ngược lại với $m = \frac{1}{27}$, ta thấy ngay hệ đã cho có nghiệm $x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy $m = \frac{1}{27}$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Như vậy : vận dụng phương pháp này ta không chỉ giải được phương trình một cách nhanh gọn mà còn xét được một số hệ phương trình. Phương pháp này các bạn học sinh THCS còn được gặp lại khi giải các loại phương trình, hệ phương trình phong phú và đa dạng hơn ở các lớp THPT.

Ứng dụng tích vô hướng để giải
MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

TRẦN TUẤN DIỆP - DỖ MẠNH MÔN
(Hà Nội)

Trong phạm vi bài này chúng tôi chỉ có thể đơn cử một vài ví dụ tiêu biểu, hy vọng thông qua đó người học hình thành một phương hướng tư duy khi tiếp cận với các loại bài toán mới. Chúng ta hãy bắt đầu bằng một ví dụ đơn giản quen thuộc

Bài toán 1. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC luôn có :*

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Giải. Dễ thấy bất đẳng thức (BĐT) (1) tương đương với

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

và tồn tại nhiều cách chứng minh khác nhau như áp dụng định lý hàm cos ; đưa về dạng tổng bình phương hoặc dựa trên BĐT hàm lồi.

Lời giải sau dựa vào tích vô hướng của các véctơ

Gọi độ dài $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

Từ điểm I tùy ý trong mặt phẳng (ABC) dựng 3 vectơ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ có độ dài đơn vị lần lượt vuông góc với các cạnh BC, AC, AB.

Theo tính chất của tích vô hướng

$$0 \leq (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3})^2 = \overrightarrow{v_1}^2 + \overrightarrow{v_2}^2 + \overrightarrow{v_3}^2 + 2(\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_3})$$

Để ý, theo giả thiết $\overrightarrow{v_1}^2 = \overrightarrow{v_2}^2 = \overrightarrow{v_3}^2 = 1$

$$\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = -\cos C\ ;$$
$$\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_3} = -\cos A\ ;\ \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_3} = -\cos B$$

nên : $0 \leq 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)$

từ đó $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$

Bài toán 2. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC luôn có :*

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Giải. BĐT (2) rõ ràng tương đương với

$$\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{A+C}{2} + \cos\frac{A+B}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Đặt $\dfrac{B+C}{2} = \alpha$, $\dfrac{A+C}{2} = \beta$, $\dfrac{A+B}{2} = \gamma$, thì α, β, γ lại là 3 góc của một tam giác, vậy bài toán (2) được đưa về bài toán (1).

Bài toán 3. *Chứng minh với mọi tam giác ABC và ba số thực x, y, z bất kì, luôn có :*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos C + 2xz\cos B + 2yz\cos A \qquad (3)$$

Giải. Lại chọn các vectơ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ như bài toán 1, áp dụng tích vô hướng cho các vectơ $x\overrightarrow{v_1}, y\overrightarrow{v_2}, z\overrightarrow{v_3}$ ta được :

$$0 \leq (x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3})^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy\cos C + xz\cos B + yz\cos A)$$

Từ đó có ngay đ.p.c.m.

Bài toán 4. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC và ba số dương m, n, p tùy ý, luôn có :*

$$m\sin\frac{A}{2} + n\sin\frac{B}{2} + p\sin\frac{C}{2} \leq \frac{m.n.p}{2}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}\right) \qquad (4)$$

Giải. Trước mắt các bạn, bài toán 4 có vẻ "thách thức" hơn. Thế nhưng sau khi rút gọn vế phải của (4).

$$\frac{mnp}{2}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{np}{m} + \frac{mp}{n} + \frac{mn}{p}\right) = \frac{1}{2mnp}\left(n^2p^2 + m^2p^2 + m^2n^2\right)$$

ta đưa BĐT (4) về BĐT tương đương :

$$m^2n^2 + m^2p^2 + n^2p^2 \geq 2mnp\left(m\sin\frac{A}{2} + n\sin\frac{B}{2} + p\sin\frac{C}{2}\right) \qquad (4')$$

Đặt $mn = x$; $mp = y$; $np = z$, BĐT (4') trở thành :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2\left(xy\cos\frac{B+C}{2} + xz\cos\frac{A+C}{2} + yz\cos\frac{A+B}{2}\right) = 2(xy\cos\alpha + xz\cos\beta + yz\cos\gamma)$$

với $\alpha = \dfrac{B+C}{2}$; $\beta = \dfrac{A+C}{2}$; $\gamma = \dfrac{A+B}{2}$ tạo thành 3 góc một tam giác.

Bài toán 4 đã được đưa về bài toán 3 (!)

Bài toán được xét dưới đây có dạng khác.

Bài toán 5. (Đề số 2 sách Đề thi tuyển sinh - Bộ GD và ĐT)

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC và mọi số thực x, luôn có :

$$1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \cos A + x(\cos B + \cos C) \qquad (5)$$

Giải. Dễ nhận thấy sau việc chuyển vế phải của BĐT (5) sang vế trái ta đưa việc chứng minh (5) về phép chứng minh tam thức bậc hai

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - (\cos B + \cos C)\,x + 1 - \cos A$$

không âm $\forall x \in R$.

Tuy nhiên đó không phải là phương pháp duy nhất hữu hiệu. Thật vậy, lại chọn các véctơ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ như ở bài toán (1) rồi dùng bình phương vô hướng của vectơ $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ ta được :

$$0 \leqslant \overrightarrow{v}^2 = (x\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3})^2 = x^2 + $$
$$+ 2x\,(\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_3}) + 2\,\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_2}^2 + \overrightarrow{v_3}^2$$

hay : $0 \leqslant x^2 - 2x\,(\cos C + \cos B) - 2\cos A + 2$

Từ đó suy ra :

$$x^2 + 2 \geqslant 2\cos A + 2x\,(\cos B + \cos C)$$

Cũng thế :

$$1 + \frac{x^2}{2} \geqslant \cos A + x\,(\cos B + \cos C),\ (\text{đpcm}).$$

Sau cùng chúng ta tiếp tục vận dụng ý tưởng trên vào một bài toán hình học không gian đặc sắc mà việc chứng minh bằng một đường lối khác hẳn sẽ vô cùng gay cấn.

Bài toán 6. *Chứng minh rằng tổng các cosin của 6 nhị diện tạo bởi 4 mặt của một tứ diện bất kỳ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 2.*

Giải. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ là các góc phẳng của 6 nhị diện tạo thàn Từ điểm I tùy ý trong hình tứ diện, ta dựng 4 vectơ đơn vị lần lượt vuông góc với 4 mặt của tứ diện, gọi các vectơ đó là $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}$.

Bình phương vô hướng của vectơ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_4}$ ta được

$$0 \leqslant (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_4})^2 = 4 - 2\,(\cos\alpha_1 + $$
$$+ \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4 + \cos\alpha_5 + \cos\alpha_6)$$

Từ đó có ngay $\sum_{i=1}^{6} \cos\alpha_i \leqslant 2$ (6)

Cũng dễ dàng nghiệm lại khi tứ diện đều có

$$\sum_{i=1}^{6} \cos\alpha_i = 2$$

Vậy là bằng một phương pháp thống nhất, nhiều bài toán phức tạp được giải quyết khá đơn giản, với khối lượng tính toán và biến đổi được rút gọn đến mức tối thiểu đồng thời bảo đảm được tính chính xác và sáng tỏ. Hy vọng qua bài báo bạn đọc cảm nhận được ý tưởng đề xuất cũng như các tác giả chân thành mong đợi các đóng góp mới thú vị từ phía người đọc.

Các vấn đề nêu ra của Tòa soạn cuối bài viết "Đôi khi tưởng là đúng" (số 236, 2/1997) đã được sự hưởng ứng trao đổi sôi nổi của nhiều bạn học sinh và của các thầy giáo.

Ý kiến của bạn *Hà Tiến Dũng*, $12C_1$, THPT Hoàng Quốc Việt, Mạo Khê, Đông Triều, **Quảng Ninh** là xác đáng nhất :

"Xét phương trình

$$A + B + 3\sqrt[3]{AB}\,.\,C = C^3\ (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} - C)[(\sqrt[3]{A} + C)^2 + (\sqrt[3]{B} + C)^2 + $$
$$+ (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = C\ (**) \\ \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{B} = -C\ (***) . \end{array}\right.$$

Từ đó ta có :

1) Nếu (***) vô nghiệm thì $(*) \Leftrightarrow (**)$

2) Nếu (***) có nghiệm $x = \alpha$ thì xảy ra hai khả năng :

• *Khả năng 1* : $x = \alpha$ thỏa mãn $(**) \Leftrightarrow x = \alpha$ là nghiệm của hệ $A = B = C = 0$.

• *Khả năng 2* : $x = \alpha$ không thỏa mãn (**), thì (*) và (**) không tương đương vì $x = \alpha$ là nghiệm của (*) nhưng không là nghiệm của (**)."

Bàn về HAI TẬP NGHIỆM

Như vậy lược đồ xét phương trình (**) như thế nào ?

Bước 1 : Viết (*) về dạng tương đương với tuyển gồm (**) và (***).

Bước 2 : Giải hệ (***)

+ Nếu (***) vô nghiệm thì $(**) \Leftrightarrow (*)$

+ Nếu (***) có nghiệm $x = \alpha$ thỏa mãn $A = B = C = 0$ thì $x = \alpha$ là nghiệm của (**)

+ Nếu (***) có nghiệm $x = \alpha$ không thỏa mãn $A = B = C = 0$ thì $x = \alpha$ không là nghiệm của (**).

Bước 3 : Kết luận nghiệm của (**) gồm :

+ Nghiệm của (*) không thỏa mãn (***)

+ Nghiệm của (***) thỏa mãn $A = B = C = 0$

• Một số bạn cho rằng nếu nghiệm (*) thỏa mãn (***) thì không phải nghiệm của (**) ! Đây là một ý kiến sai lầm.

Trở lại 2 thí dụ trong bài viết của tác giả Nguyễn Doanh Hòa :

Thí dụ 1 : (***) vô nghiệm nên $(*) \Leftrightarrow (**)$.

Thí dụ 2 : (***) có nghiệm $x = 0$ không thỏa mãn $A = B = C = 0$ nên $x = 0$ không là nghiệm của (**).

• Có bạn đã đưa ra giải pháp thử tất cả các nghiệm của (*) vào (**), kể cả nghiệm $x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2 \pm 3\sqrt{3}}$ của thí dụ 1. Đây là việc làm quá phức tạp vì bạn chưa tìm ra giải pháp tối ưu.

• Các bạn Phạm Văn Thành, 11T PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa**, *Lê Cường*, 12D PTTH Hùng Vương, **Phú Thọ** có ý kiến tốt. Xin cảm ơn các thầy giáo và các bạn.

LÊ THỐNG NHẤT

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 1996

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

(Thời gian làm bài 180 phút)

Phần I : *(Cho tất cả các thí sinh)*

Câu I : *1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số*

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

2) Biện luận theo tham số k số nghiệm của phương trình sau :

$$(x+1)^3 - k.(x-1)^2 = 0.$$

Câu II : *1) Giải và biện luận theo tham số m bất phương trình sau :*

$$\sqrt{x^2-4} \geqslant m(x-2)$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Câu III : *1) Cho tam giác ABC có* $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$. *Chứng minh rằng*

$$tgA \,.\, tgB < 1.$$

2) Giải phương trình

$$tg^2x - tgx \,.\, tg3x = 2.$$

Câu IV : *Trong mặt phẳng tọa độ hãy lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng sau :*

$$y = \frac{x}{5} - \frac{2}{5}\,;\, y = x+2\,;\, y = 8-x.$$

Câu V : *Tìm tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình*

$$8^{\sin^2 x} + 8^{\cos^2 x} = 10 + \cos 2y.$$

Phần II :

Câu VI$_a$ *(Dành cho thí sinh không chuyên ban)*

1) Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} < \frac{\pi}{8}$.

2) Chứng minh rằng tồn tại các số thực a, b, c, d sao cho đẳng thức sau đúng với mọi x :

$$x^4 + 2 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d).$$

Câu VI$_b$ *(Dành cho thí sinh chuyên ban)*

1) Tìm nguyên hàm của hàm số :

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(2+\sin 2x).$$

2) Cho số p thỏa mãn $-2 \leqslant p \leqslant 2$. *Chứng minh rằng tồn tại các số thực a, b, c, d sao cho đẳng thức sau đúng với mọi x :*

$$x^4 + px^2 + 1 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d).$$

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu I. (2 điểm : 1) 1,5 ; 2) 0,5)

1. Hàm số $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, $\forall x \neq 1$

$y' = \dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
y'		+	0	+	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	y_{ct}	↗	$+\infty$

$y_{ct} = y(5) = \dfrac{27}{2}$

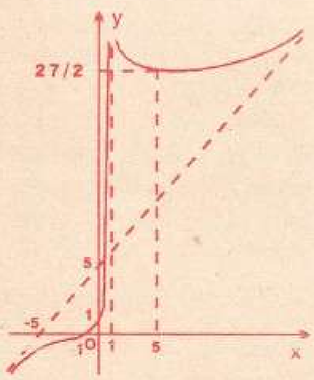
– Tiệm cận đứng x = 1 vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = +\infty$

– Tiệm cận xiên :

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = x + 5 + \frac{12x-4}{(x-1)^2}$$

Đồ thị có tiệm cận xiên là $y = x + 5$ vì

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - (x+5)\right] = 0$$



Đồ thị tiếp xúc trục hoành tại điểm (−1, 0), đồ thị cắt trục tung tại điểm (0, 1).

2. Vì nghiệm của phương trình đang xét là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với đường thẳng $y = k$ nên từ đồ thị ta có :

+) $k > 27/2$: Phương trình có 3 nghiệm.

+) $k < 27/2$: Phương trình có 1 nghiệm.

+) $k = 27/2$: Phương trình có 2 nghiệm (1 nghiệm là nghiệm kép)

Câu II. (2 điểm : 1) 1,5 ; 2) 0,5)

1. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2-4} \geqslant m(x-2) \qquad (1)$$

Điều kiện $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -2 \end{cases}$

a) $m = 0$. Dễ thấy bất phương trình có nghiệm $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -2 \end{cases}$

b) $m > 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ \begin{cases} x^2 - 4 \geqslant m^2(x-2)^2 \\ x \geqslant 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ \begin{cases} x + 2 \geq m^2(x-2) \\ x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ \begin{cases} (m^2-1)x \leq 2(m^2+1) \\ \qquad x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

+ Nếu $0 < m \leq 1$ thì $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

+ Nếu $m > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ 2 \leq x \leq \dfrac{2(m^2+1)}{(m^2-1)} \end{array}\right.$

c) $m < 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ \begin{cases} x \leq -2 \\ x^2 - 4 \geq m^2(x-2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ \begin{cases} x \leq -2 \\ x+2 \leq m^2(x-2) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ \begin{cases} x \leq -2 \\ (m^2-1)x \geq 2(m^2+1) \end{cases} \end{array}\right.$$

+ Nếu $1 < m < 0$ thì $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq \dfrac{2(m^2+1)}{m^2-1} \end{array}\right.$

+ Nếu $m \leq -1$ thì $(1) \Leftrightarrow x \geq 2$

Tóm lại:

* $m \leq -1 x \in [2, +\infty)$

* $-1 < m < 0 x \in \left(-\infty, \dfrac{2(m^2+1)}{m^2-1}\right] \cup [2, +\infty)$

* $0 \leq m \leq 1 x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

* $m > 1 x \in (-\infty, -2] \cup \left[2, \dfrac{2(m^2+1)}{m^2-1}\right]$.

2. Giải hệ $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} \end{cases}$

Điều kiện: $0 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 2$

Nếu $x > y$ thì rõ ràng $\sqrt{x} + \sqrt{2-y} > \sqrt{y} + \sqrt{2-x}$ nên (x, y) không phải là nghiệm.

Nếu $x < y$ thì $\sqrt{x} + \sqrt{2-y} < \sqrt{y} + \sqrt{2-x}$ nên (x, y) cũng không phải là nghiệm.

Khi $x = y$ thì ta được $\sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$ $2\sqrt{x(2-x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm là $(x, y) = (0, 0)$ hoặc $(x, y) = (2, 2)$.

Câu III. (2,5 điểm : 1) 1, 5 ; 2) 1).

1. Ta có $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C =$

$$= \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}[-2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1]$$

$$= 2 + 2\cos C\,[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= 2 + 2\cos C \cos A \cos B.$$

Vậy $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C < 2 \Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C < 0$

a) Nếu $\cos A < 0$ thì $\dfrac{\pi}{2} < A < \pi \Rightarrow tgA < 0, tgB > 0 \Rightarrow tgA\,tgB < 1$

b) Nếu $\cos B < 0$ thì $\dfrac{\pi}{2} < B < \pi \Rightarrow tgB < 0, tgA > 0 \Rightarrow tgA\,tgB < 1$

c) Nếu $\cos C < 0$ thì $\dfrac{\pi}{2} < C < \pi \Rightarrow 0 < A + B < \pi/2 \Rightarrow \cos(A+B) > 0$

$\Rightarrow \cos A \cos B > \sin A \sin B \Rightarrow tgA\,tgB < 1$ (vì $\cos A > 0, \cos B > 0$)

2. Giải phương trình : $tg^2x - tgx\,tg3x = 2$

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases}$ (*)

Cách 1 : Phương trình đã cho tương đương với

$$(1 - tg^2x) + (1 + tgx\,tg3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\cos^2x} + \frac{\cos 2x}{\cos x \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\cos x} \cdot \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos 3x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ 3x = \pm(\pi - x) + 2m\pi \end{array}\right. \quad (m, n \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$$

$x = (2m+1)\pi/4$

$x = (2m-1)\pi/2$ (loại do điều kiện (*))

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbf{Z})$

Cách 2 : Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$\frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos x \cos 3x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2x}{\cos x \cos 3x} = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2x = \cos x \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2x = \cos x\,(3\cos x - 4\cos^3x)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\cos^4x - \cos^2x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Câu IV (1 điểm) : Để ý rằng hai đường thẳng $y = x + 2$ và $y = 8 - x$ vuông góc với nhau. Ta có :

– Giao điểm của đường thẳng $y = x + 2$ và $y = 8 - x$ là A (3, 5). Tức điểm A (3, 5) là đỉnh của tam giác vuông.

– Giao điểm của hai đường thẳng $y = x + 2$ và $y = \dfrac{x}{5} - \dfrac{2}{5}$ là B (–3, –1)

– Giao điểm của hai đường thẳng $y = 8 - x$ và $y = \dfrac{x}{5} - \dfrac{2}{5}$ là C (7, 1)

Tâm O của đường tròn ngoại tiếp là trung điểm BC nên O có tọa độ (2, 0) và bán kính của đường tròn ngoại tiếp là.

(xem tiếp bìa 3)

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học

Lượng giác hóa các phương trình, bất phương trình vô tỉ

MAI THẮNG
(Khánh Hòa)

Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 232 (10/1996) đã giới thiệu phương pháp lượng giác để giải các bài toán về nghiệm của đa thức, hệ hữu tỉ và chứng minh bất đẳng thức (của tác giả Phạm Bảo). Ở bài báo này, chúng tôi muốn nhấn mạnh đến phương pháp lượng giác để giải quyết các phương trình, bất phương trình vô tỉ. Nhờ sử dụng các công thức lượng giác mà việc khử các dấu căn thức đã trở nên rất thuận lợi.

Bài toán 1. *Giải và biện luận phương trình theo tham số a*

$$\sqrt{a+x} = a - \sqrt{a-x} \qquad (1)$$

Bài giải. (1) $\Leftrightarrow \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = a$ (2)

$\Rightarrow$ điều kiện $\begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a \\ a \geqslant 0 \end{cases}$ (3)

1) Khi a = 0 : (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) Khi $a > 0$: (3) $\Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{x}{a} \leqslant 1$, cho $x = a\cos\varphi$ với $\varphi \in [0, \pi]$ (4). Khi đó (2) $\Leftrightarrow \sqrt{a(1+\cos\varphi)} + \sqrt{a(1-\cos\varphi)} = a \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}$ (5). Vì $\varphi \in [0, \pi] \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$; nên (5) có nghiệm khi $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{a}}{2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2 \leqslant a \leqslant 4$. Khi đó, nghiệm của (1) được xác định từ (4) và (5) như sau :

$$x = a\cos\varphi = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) =$$
$$= -2a\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \pm 2a\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} =$$
$$= \pm \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$$

Kết luận : 1) Nếu $a=0$: (1) có nghiệm $x = 0$

2) Nếu $2 \leqslant a \leqslant 4$: (1) có nghiệm

$$x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$$

3) Nếu $a < 0$: (1) vô nghiệm

Bài toán 2. *Giải và biện luận phương trình theo tham số m*

$$2\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x} = \sqrt{m - x + \sqrt{x(m+x)}} \quad (1)$$

Bài giải. Điều kiện $\begin{cases} m+x \geqslant 0 \\ m-x \geqslant 0 \\ x(m+x) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leqslant x \leqslant m \\ x \geqslant 0, m \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant m$ (2)

1) Khi $m = 0$: (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} - \sqrt{-x} = \sqrt{-x + \sqrt{x^2}} \Leftrightarrow x = 0$

2) Khi $m > 0$: (2) $\Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{x}{m} \leqslant 1$ cho $x = m\cos\alpha$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (3)

Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{m(1+\cos\alpha)} - \sqrt{m(1-\cos\alpha)} =$$
$$= \sqrt{m(1-\cos\alpha) + \sqrt{m^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha} =$$
$$= \sqrt{1-\cos\alpha + \sqrt{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}$$
$$\Leftrightarrow 4(1+\cos\alpha) - 4\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} =$$
$$= \sqrt{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}$$
$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha}) = \sqrt{\cos\alpha}$$
$$\Leftrightarrow 32 - \cos\alpha = 32\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$\Leftrightarrow 1025\cos^2\alpha - 64\cos\alpha = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 64/1025 \end{array}\right.$$

Lúc đó (3) cho nghiệm $x = 0$ hoặc $x = \frac{64a}{1025}$

Kết luận : 1) Nếu $m \geqslant 0$ thì (1) có nghiệm $x = 0$ hoặc $x = \frac{64a}{1025}$

2) Nếu $m < 0$ thì (1) vô nghiệm.

Bài toán 3. *Giải bất phương trình*

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leqslant 2 - \frac{x^2}{4} \qquad (1)$$

Bài giải. Điều kiện $-1 \leqslant x \leqslant 1$ cho $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha} \leqslant 2 - \frac{\cos^2\alpha}{4} \Leftrightarrow$$
$$2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 2 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos^4\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) -$$
$$- 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]^2 \left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\right] \geqslant 0 \qquad (2)$$

Chú ý $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2 > 0$, $\forall\alpha \in [0, \pi]$

Vậy bất phương trình (2) luôn đúng với $\forall\alpha \in [0, \pi]$

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình (1) là $-1 \leqslant x \leqslant 1$

Bài toán 4 : *Xác định tham số a để bất phương trình sau có nghiệm*

$$\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} \leqslant 2 \qquad (1)$$

Bài giải : Ta thấy (1) chỉ cần xét khi $a \geqslant 0$.

1) Khi $a = 0 : \sqrt{\sqrt{x}} + \sqrt{-\sqrt{x}} \leq 2 \Leftrightarrow x = 0$

2) Khi $a > 0$, điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq \sqrt{x}/a \leq 1 \end{cases}$ cho $\begin{cases} \sqrt{x} = a\cos\varphi \\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{a(1+\cos\varphi)} + +\sqrt{a(1-\cos\varphi)} \leq 2 \Leftrightarrow$ $\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ (2).

Với $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$. Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 0 < a \leq 2$

Kết luận : Bất phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$

Bài toán 5 : *Giải và biện luận phương trình theo a hệ*

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \\ x + y - \sqrt{xy} = a \end{cases} \quad (1)$$

Bài giải : Điều kiện $x, y \geq 0$ (2). Từ phương trình thứ nhất ta thấy với $a < 0$ thì hệ vô nghiệm. Khi $a \geq 0$ ta có :

1) Khi $a = 0$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0 \\ x + y - \sqrt{xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x = y = 0$

2) Khi $a > 0$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}/a + \sqrt{y}/a = 1 \\ x + y - \sqrt{xy} = a \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = a\sin^2\varphi, \sqrt{y} = a\cos^2\varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ a^2(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi) = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = a\sin^2\varphi, \sqrt{y} = b\cos^2\varphi \\ \cos 4\varphi = (8 - 5a)/3a, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} (3)$$

Với $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -1 \leq \cos 4\varphi \leq 1$. Vậy (3) có nghiệm $\Leftrightarrow$ $-1 \leq (8 - 5a)/3a \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 4$; Khi đó :

$\cos 4\varphi = 2\cos^2 2\varphi - 1 = 2(1 - 2\sin^2\varphi)^2 - 1 = \frac{8 - 5a}{3a} \Leftrightarrow$

$$\sin^2\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{4-a}{3a}}}{2}$$

Nên

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq a \leq 4 \\ \sqrt{x} = a\sin^2\varphi = \left[3a \pm \sqrt{3a(4-a)}\right]/6 \\ \sqrt{y} = a - \sqrt{x} = \left[3a \mp \sqrt{3a(4-a)}\right]/6 \end{cases}$$

Kết luận : 1) Khi $0 \neq a < 1$ hoặc $a > 4$ thì (1) vô nghiệm

2) Khi $a = 0$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = y = 0$

3) Khi $a = 1$ thì (1) có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

a) Khi $a = 4$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = y = 4$

5) Khi $1 < a < 4$ thì (1) có nghiệm

$\begin{cases} x = [3a + \sqrt{3a(4-a)}]^2/36 \\ y = [3a - \sqrt{3a(4-a)}]^2/36 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = [3a - \sqrt{3a(4-a)}]^2/6 \\ y = [3a + \sqrt{3a(4-a)}]^2/36 \end{cases}$

Sau đây là các bài toán để các bạn tự luyện :

1) Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \leq x$

b) $\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$

2) Tìm m để các phương trình, bất phương trình có nghiệm :

a) $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$

b) $3x + \sqrt{9-x^2} + 2x\sqrt{9-x^2} = 3m$

c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} > m$

d) $\sqrt{m-x} + \sqrt{m+x} > m$

3) Giải và biện luận theo tham số b :

a) $\sqrt{1+bx} - \sqrt{1-bx} = x$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ... *(tiếp theo trang 15)*

$$R = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{26}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là :

$$(x-2)^2 + y^2 = 26$$

Câu V. (1 điểm) $8^{\sin^2 x} + 8^{\cos^2 x} = 10 + \cos 2y$

$\Leftrightarrow 8^{\sin^2 x} + 8^{1 - \sin^2 x} - 9 = 1 + \cos 2y$

$\Leftrightarrow t + \frac{8}{t} - 9 = 2\cos^2 y$, trong đó $t = 8^{\sin^2 x}$, $1 \leq t \leq 8$

$\Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-8)}{t} = 2\cos^2 y$.

Để ý rằng vế trái ≤ 0 (do $1 \leq t \leq 8$) còn vế phải ≥ 0 nên phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 8 \end{array}\right. \\ \cos^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 8^{\sin^2 x} = 1 \\ 8^{\sin^2 x} = 8 \end{array}\right. \\ \cos^2 y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Câu VIa. (1, 5 điểm : 1) 0,75 ; 2) 0,75)

1. $\int_0^1 \frac{dx}{2 + x + x^2} < \frac{\pi}{8}$

Với $x \in (0, 1)$ ta có

$\frac{1}{2 + x + x^2} < \frac{1}{2 + x^2 + x^2} < \frac{1}{2(1 + x^2)}$. Do đó

$$\int_0^1 \frac{dx}{2 + x + x^2} < \int_0^1 \frac{dx}{2(1 + x^2)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} arctgx \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

2. Ta có $x^4 + 2 = (x^2 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}x^2 =$

$= (x^2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt[4]{8}x)^2$

$= (x^2 + \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2})$

Vậy $a = \sqrt[4]{8}$, $b = \sqrt{2}$; $c = -\sqrt[4]{8}$; $d = \sqrt{2}$ thỏa mãn bài ra.

Câu VIb. (1,5 điểm : 1) 0,75 ; 2) 0,75)

1. $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(2 + \sin 2x)$

$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x$.

$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

Vậy nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ có dạng

$$F(x) = -2\cos(x - \pi/4) + \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{6}\sin(3x - \pi/4) + C,$$ trong đó C là hằng số tùy ý.

2. Ta có :

$x^4 + px^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (2 - p)x^2 =$

$= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2 - p}x)^2$

$= (x^2 + \sqrt{2 - p}x + 1)(x^2 - \sqrt{2 - p}x + 1)$

Vậy $a = \sqrt{2 - p}$, $b = 1$, $c = -\sqrt{2 - p}$, $d = 1$ thỏa mãn đề bài.

TRẦN HUY HỔ

NGÔ ĐẮC TUẤN - Gương mặt trẻ Việt Nam tiêu biểu nhất trong năm 1996

Ngô Đắc Tuấn sinh ngày 29.8.1979, tại Tương Giang, Tương Sơn, Hà Bắc. Lên 6 tuổi đã mồ côi mẹ. Lớn lên trong sự chăm sóc của bà nội và người cha là PTS Ngô Đắc Tân, cán bộ nghiên cứu ở Viện Toán học, Tuấn đã say mê Toán từ nhỏ. Tuấn học cấp 1 tại trường Cát Linh và trường Kim Đồng (Hà Nội). Suốt 4 năm cấp 2 tại trường PTCS Giảng Võ (Hà Nội), được sự dìu dắt về môn Toán của thầy Khánh. Thi vào khối chuyên Toán trường ĐHTH Hà Nội, Tuấn đỗ thủ khoa với điểm tối đa (25/25). Căn phòng nhỏ 24 m^2 ở nhà A_1 khu TT Giảng Võ (Hà Nội) là nơi Tuấn đã cặm cụi bao đêm với những bài toán khó. Người cha đã chịu khó dịch nhiều bài toán từ tiếng Nga để Tuấn có lúc phải "đau đầu" (!). Hiền lành, ít nói nhưng Tuấn rất có bản lĩnh của một người làm Toán. Thành tích của Tuấn là ước mơ của bao bạn trẻ : Huy chương vàng Toán Quốc tế hai năm liền (1995, 1996) và Huy chương Vàng thi toán Châu Á – Thái Bình Dương (1996). Tuấn có nguyện vọng được học để trở thành nhà nghiên cứu Toán, chuyên ngành Toán rời rạc, một chuyên ngành mà người cha đã dành cả cuộc đời của mình để nghiên cứu.

Nhân dịp Ngô Đắc Tuấn được Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh trao giải thưởng "Gương mặt trẻ Việt Nam tiêu biểu trong năm 1996". Tạp chí THVTT xin chúc mừng bạn.

Chúng ta hi vọng và có quyền tin tưởng rằng Ngô Đắc Tuấn sẽ thực hiện được những ước mơ tốt đẹp của mình !

TH&TT

ANH ĐẦY TỚ VÀ ÔNG CHỦ

Một ông chủ nhận được từ nước ngoài gửi về 32 chai rượu quý. Ông ta bảo anh đầy tớ xếp vào một chiếc thùng gỗ có 9 ô với số lượng chai ở mỗi ô như hình bên. Ông ta nói với anh đầy tớ : "Hãy trông coi cho cẩn thận. Ta sẽ kiểm tra. Mỗi lần kiểm tra ta chỉ cần đếm số chai ở mỗi mép thùng lúc nào cũng đủ 9 chai, và mỗi ô ở mép thùng lúc nào cũng phải có ít nhất là một chai là được !"

1	7	1
7		7
1	7	1

Anh đầy tớ vâng dạ nhận lời. Ngày đầu tiên anh ta giấu đi 4 chai. Ông chủ kiểm tra thấy đảm bảo yêu cầu. Ngày hôm sau anh ta khoái chí giấu đi 4 chai nữa mà ông chủ vẫn không phát hiện ra. Được thể, anh ta lại giấu đi tiếp 4 chai nữa.

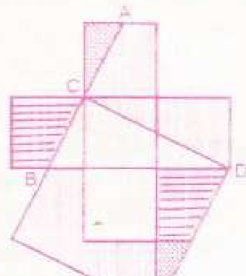
Cuối ngày đó, ông chủ đến kiểm tra và tươi cười nói với anh đầy tớ một câu. Bạn có thể cho biết 3 lần anh đầy tớ đã lấy và xếp lại các chai rượu như thế nào không ? Đặc biệt, bạn hãy đoán câu nói của ông chủ với người đầy tớ.

LÊ NGỌC

(Dựa theo toán dân gian Nga)

Giải đáp bài

CẮT GHÉP



Cắt mảnh gỗ đã cho theo hai nhát cắt *AB* (*A* và *B* là hai trung điểm của các cạnh) và *CD* được 4 mảnh và ghép các mảnh này lại như hình bên ta sẽ được một mảnh hình vuông. (Dựa theo đáp án của các bạn : *Nguyễn Thị Linh Giang*, 6T, chuyên Lạc Sơn, **Hòa Bình**. *Đỗ Thị Tuyết Minh*, 7A Toán, Chuyên Thị xã **Phú Thọ**. *Nguyễn Tiến Dũng*, 7T, Trần Đăng Ninh, **Nam Định**. *Phạm Thị Thanh Thảo*, 8 Lí, *Lâm Ngọc Dương*, 8T, NK Vinh, **Nghệ An**. *Phạm Hải Thanh*, 8H, Trưng Vương, **Hà Nội**. *Nguyễn Quang Thi*, 9/2, Nguyễn Thị Minh Khai, **Đà Nẵng**. *Phạm Trung Kiên*, Đội 5, xã Hải Hòa, h. Tĩnh Gia, **Thanh Hóa**.

BÌNH PHƯƠNG

ISSN : 0866 – 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT31M7

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4/1997

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng