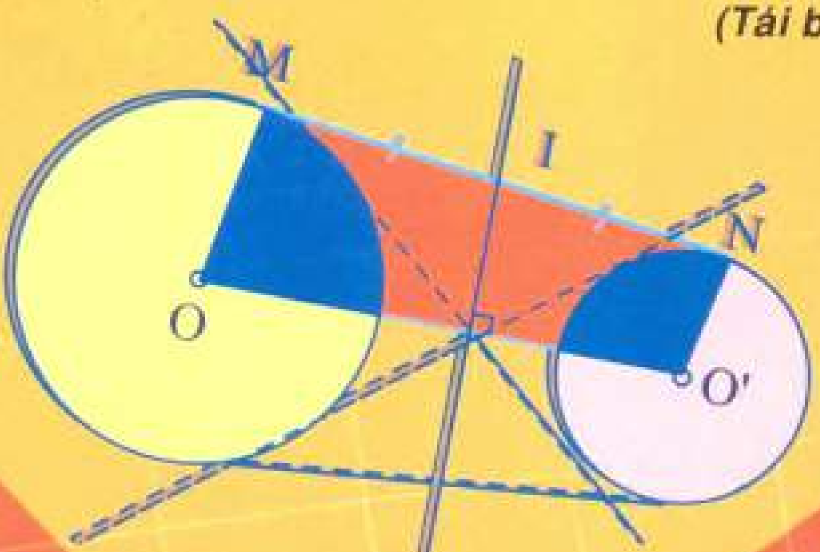
ThS. NGUYỄN VĂN NHO

Phương pháp giải CÁC DẠNG TOÁN HÌNH HỌC 10

NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN VÀ MỞ RỘNG

(Tái bản lần thứ nhất)



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. NGUYỄN VĂN NHO

Phương pháp giải CÁC DẠNG TOÁN HÌNH HỌC 10

NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN VÀ MỞ RỘNG

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Trong cuốn sách *Phương pháp giải các dạng toán Hình học* 10 này, các đề mục của *Kiến thức căn bản* dựa theo sách giáo khoa Toán 10 xuất bản năm 2006. Ngoài ra, chúng tôi đưa vào những vấn đề cùng các bài tập mở rộng tương thích nhằm phục vụ cho các em học sinh khá giỏi. Chúng tôi đã gắng công sưu tầm, biên soạn, chỉ đơn giản nhằm mục đích giúp các bạn học sinh có thêm tư liệu tham khảo trong quá trình học tập.

Cuốn sách gồm ba chương. Mỗi chương gồm ba phần A, B, C như sau:

- *Phần A:* **KIẾN THỨC, VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP CĂN BẢN**

Nội dung phần A bao gồm các kiến thức thu gọn từ sách giáo khoa, với ví dụ minh hoạ và bài tập căn bản. Các ví dụ và bài tập tương tự hoặc có phần khó hơn các bài tập ở SGK, vì mục đích của sách chỉ đơn thuần là *tham khảo bổ trợ*. Ngoài ra, chúng tôi chứng minh một số tính chất mà sách giáo khoa chỉ gợi ý hoặc xem như bài tập. Các tiểu mục có khi được gộp lại, nhưng nội dung kiến thức vẫn tuân thủ chương trình hiện hành.

- *Phần B:* **MỘT SỐ KIẾN THỨC VÀ VÍ DỤ MỞ RỘNG**

Phần này bao gồm các kiến thức mở rộng (có chứng minh) trên cơ sở các kiến thức đã biết. Đây là những kiến thức phổ biến trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi. Bên cạnh các kiến thức được trình bày là những ví dụ minh hoạ. Trong phần này, nhằm mục đích để cho cuốn sách không quá dày, chúng tôi đã không đưa vào các phần bài tập. Tuy nhiên, tự thân các ví dụ cùng những nhận xét kèm theo cũng có thể phần nào bồi dưỡng cho các em thêm một số điều hữu ích, từ đó, có thể tiếp cận để giải quyết những bài tập xa hơn mà các em tìm gặp trong một cuốn sách tham khảo khác.

- *Phần C:* **LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN CÁC BÀI TẬP**

Hướng dẫn giải tất cả các bài tập trong những phần trước.

Chúng tôi hi vọng bạn đọc tìm thấy nơi đây những điều bổ ích và tận tình góp ý để lần in sau cuốn sách sẽ tốt hơn. Xin chân thành cảm ơn.

Tháng 3 năm 2006

Ths. Nguyễn Văn Nho

Chương 1

VECTƠ

Trong chương trình lớp 10, vectơ sẽ được áp dụng để chứng minh các hệ thức lượng trong tam giác và trong đường tròn (*chương 2*). Nó cũng là cơ sở để trình bày phương pháp toạ độ trên mặt phẳng (*chương 3*). Ngoài ra, các kiến thức về vectơ sẽ được áp dụng trong vật lí như: vấn đề tổng hợp lực, phân tích một lực theo hai thành phần, công sinh ra bởi một lực ...

A. *KIẾN THỨC, VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP CĂN BẢN*

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA

1.1. Vectơ là một đoạn thẳng có hướng. Người ta biểu diễn vectơ bằng một mũi tên. Khác với đoạn thẳng thông thường, trong hai điểm mút của một vectơ, ta đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối. Nếu vectơ có điểm đầu là M và điểm cuối là N thì ta kí hiệu vectơ đó là $\overrightarrow{MN}$.

Để thuận tiện, ta cũng kí hiệu một vectơ xác định nào đó bằng một chữ in thường, với mũi tên ở trên. Chẳng hạn, các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... hay $\vec{x}$, $\vec{y}$, ...

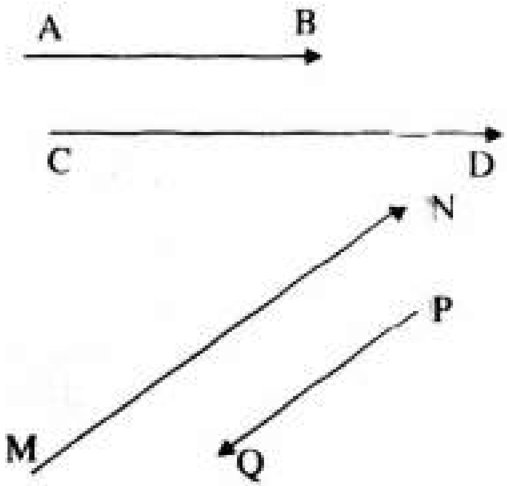
Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là *vectơ-không*, kí hiệu là $\vec{0}$.

Chú ý. Như vậy, trong một bài toán Hình học, khi cần chứng minh hai điểm M, N trùng nhau, ta có thể chứng minh $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$.

1.2. Mỗi vectơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$. Theo kí hiệu đó, rõ ràng $|\vec{0}| = 0$. Với các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$, . . . ta có: $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$; $|\overrightarrow{PQ}| = PQ = QP$.

1.3. Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng nằm trên hai đường thẳng song song, hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Nếu hai vectơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng. Ví dụ, ở hình bên, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng, còn hai vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ ngược hướng. Người ta quy ước: Vectơ-không cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

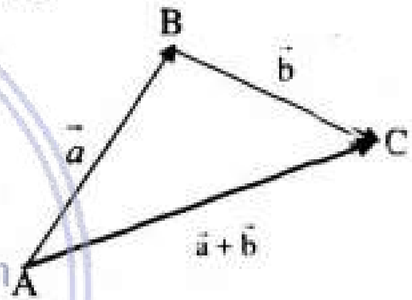


1.4. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

§ 2. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

2.1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A nào đó ta vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, rồi từ điểm B vẽ tiếp $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Kí hiệu:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$



2.2. a) Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

b) Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

c) Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Chú ý một kết quả thường dùng:

Nếu M là trung điểm NP thì $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN} = \vec{0}$.

2.3. ***Quy tắc ba điểm:*** Với bất kì ba điểm M, N, P ta luôn luôn có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Mở rộng ra, với n điểm bất kì $A_1, A_2, ..., A_n$ ta luôn có

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_{n-2}A_{n-1}} + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}.$$

Ta thường sử dụng quy tắc chen một hay nhiều điểm như trên để chứng minh các đẳng thức vectơ.

Ví dụ 1.1.

Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}.$$

Giải

Ta có $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$

$$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD}$$

Suy ra $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

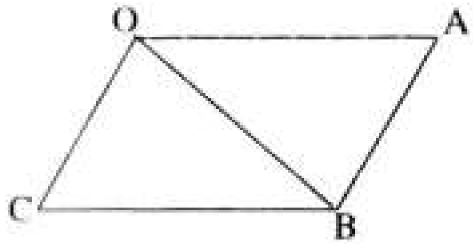
Đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

2.4. ***Quy tắc đường chéo hình bình hành:***

Nếu OABC là hình bình hành thì ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}.$$

Đây chỉ là một hệ quả của *quy tắc ba điểm*, với chú ý rằng $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$.



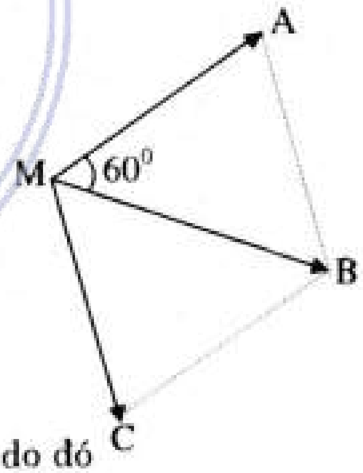
Ví dụ 1.2.

Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có điểm đặt tại M. Tìm cường độ lực tổng hợp của chúng trong các trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có cùng cường độ là 100N, góc hợp bởi $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ bằng 120^0

b) Cường độ của $\overrightarrow{F_1}$ là 40N, của $\overrightarrow{F_2}$ là 30N và góc giữa $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ bằng 90^0.

Giải



a) Vectơ hợp lực là vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MC}$. Theo quy tắc hình bình hành, gọi B là điểm sao cho MABC là hình bình hành, ta có

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.$$

Dễ thấy AMB là tam giác đều (MABC là hình thoi), do đó

$$|\overrightarrow{MB}|=100\text{N}.$$

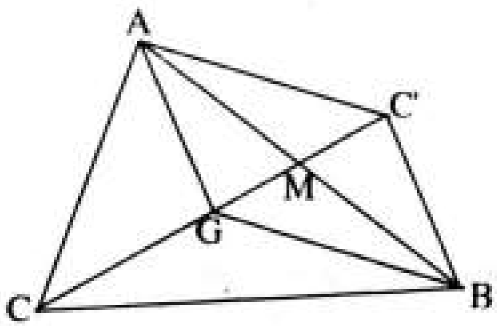
b) Tương tự như trên, để ý MABC là hình chữ nhật, sử dụng Định lí Pi-ta-go. Đáp số: 50N.

Ví dụ sau đây là một kết quả ***cần nhớ***, vì nó thường xuyên được sử dụng.

Ví dụ 1.3.

Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$



Giải

Gọi **M** là trung điểm AB. Theo tính chất trọng tâm ta có GC = 2GM. Để tìm tổng $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}$, ta dựng hình bình hành AGBC'. Muốn vậy ta chỉ cần lấy điểm C' sao cho M là trung điểm CC'.

Khi đó, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{CG}$. Suy ra: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

§ 3. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

Trong hầu hết những tập hợp được trang bị các phép toán, phép trừ trong tập hợp đó được định nghĩa dựa trên phép cộng. Thủ thuật của nó là đưa vào *phần tử đối*. Chẳng hạn, khi khảo sát trên tập các số, người ta đưa vào *số đối* trước khi định nghĩa phép trừ. Đối với các vectơ, ta cũng có điều tương tự.

3.1. *Vectơ đối* của vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$. Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

3.2. Hiệu của hai vectơ là tổng của vectơ thứ nhất với vectơ đối của vectơ thứ hai.

3.3. ***Quy tắc cần nhớ:*** Nếu $\overrightarrow{MN}$ là một vectơ đã cho, thì với điểm O bất kì ta luôn có thể viết: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Quy tắc trên cho phép ta biểu diễn một vectơ bất kì thành hiệu của hai vectơ có chung điểm đầu. Sử dụng điều này, ta có thể giải lại Ví dụ 1.1 như sau.

Giải

Lấy một điểm O nào đó tuỳ ý, phân tích mỗi vectơ thành hiệu hai vectơ có điểm đầu là O, ta được :

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

§ 4. PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ THỰC

4.1. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

a) Nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

b) Độ dài vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|$ lần độ dài vectơ $\vec{a}$:

$$|k\vec{a}| = |k|.|\vec{a}|$$

4.2. ***Tính chất***

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, h, ta có:

i) $k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$

ii) $(k + h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$

iii) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

iv) $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$; $0.\vec{a} = \vec{0}$, $k.\vec{0} = \vec{0}$

* Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$.

* Để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

* Điều kiện cần và đủ để C là trung điểm AB là $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.

4.3. ***Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương***

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nghĩa là: có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Ví dụ 1.4.

Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại hai số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho: $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$.

Giải

Trường hợp một trong hai vectơ bằng vectơ-không thì tầm thường, nên có thể giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ-không.

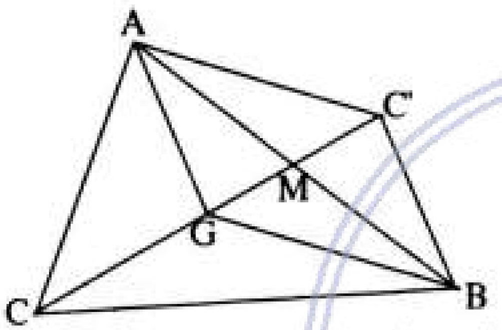
Giả sử $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, khi đó, theo trên, tồn tại số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$, suy ra $-k\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Chọn $m = -k$ và $n = 1$ ta có

$$m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}.$$

Đảo lại, giả sử tồn tại hai số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$. Nếu $m \neq 0$ thì $\vec{a} = -\dfrac{n}{m}\vec{b}$, do đó $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$. Còn nếu $n \neq 0$ thì $\vec{b} = -\dfrac{m}{n}\vec{a}$, do đó $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.5.

Chứng minh rằng G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



Giải.

* Phần thuận đã được chứng minh ở Ví dụ 1.2.

* Đảo lại, giả sử có điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, ta sẽ chứng minh I trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Thật vậy, ta có

$$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CG}, \text{ nên}$$

$$3\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Điều này có nghĩa là I trùng G.

Nhận xét: Từ chứng minh trên suy ra, nếu I là điểm bất kì và G là trọng tâm tam giác ABC thì:

$$3\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}, \text{ hay } 3\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC},$$

đây cũng là kết quả *cần nhớ,* vì thường được sử dụng.

Ví dụ 1.6.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau là

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

b) Cho lục giác ABCDEF. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau.

Giải

a) Giả sử G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và A'B'C'. Vì G' là trọng tâm tam giác A'B'C' nên:

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}$$

$$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

($\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ do G là trọng tâm tam giác ABC). Vậy

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

Từ đó suy ra rằng điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

b) Để chứng minh hai tam giác PRT và QSU có cùng trọng tâm, theo câu trên, ta cần chứng minh: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} = \vec{0}$. Thật vậy, ta có:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}.$$

Ví dụ 1.7.

Cho tứ giác ABCD. Gọi G là điểm sao cho:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng G được xác định một cách duy nhất. Khi đó, G được gọi là trọng tâm của tứ giác ABCD. Hãy dựng điểm G.

Giải.

Lấy một điểm O xác định nào đó, ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG}$$

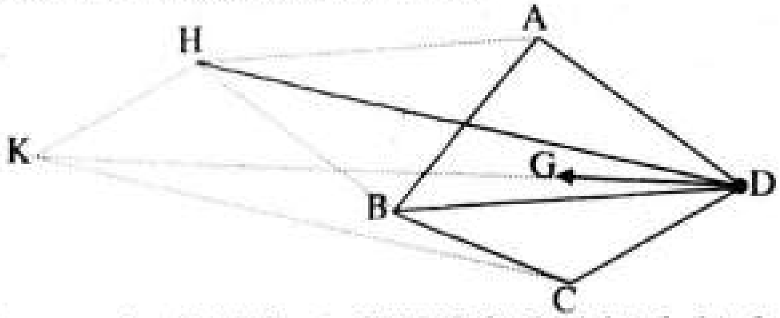
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OG}.$$

Do đó $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Suy ra điểm G được xác định một cách duy nhất.

Để dựng điểm G ta có thể chọn O trùng với D. Khi đó:

$$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}).$$



Suy ra cách dựng như sau:

Gọi H, K là hai điểm sao cho DAHB và DHKC là hai hình bình hành. Từ đó, $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$. Sau cùng, chọn G trên đoạn thẳng DK sao cho DG = 1/4DK. Ta có G là điểm phải dựng.

Từ hai ví dụ 1.5 và 1.7, ta có thể tổng quát hoá để đi đến khái niệm *trọng tâm của một hệ hữu hạn điểm* như ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.8.

Cho hệ hữu hạn các điểm $A_1, A_2, \ldots A_n$. Chứng minh rằng có duy nhất một điểm G sao cho $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. Điểm G được gọi là *trọng tâm của hệ điểm* đã cho. Chứng minh rằng với mọi điểm K ta đều có: $\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2} + \ldots + \overrightarrow{KA_n} = n\overrightarrow{KG}$.

Giải

Lấy một điểm O xác định nào đó, ta có:

$$\vec{0} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG},$$

từ đó suy ra $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})$.

Suy ra điểm G được xác định một cách duy nhất. Phần còn lại hiển nhiên, khi thay O bằng một điểm K tuỳ ý.

Ví dụ 1.9.

Cho hai điểm A, B và hai số thực a, b sao cho $a + b \neq 0$.

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm M thoả mãn

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Giải

Biến đổi tương đương hệ thức ở đề bài, ta có

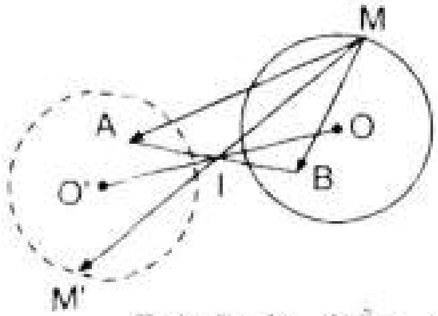
$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{-b}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

(do giả thiết $a + b \neq 0$). Vì A, B cố định và a, b cho trước nên đẳng thức trên chứng tỏ rằng điểm M được xác định một cách duy nhất.

Ví dụ 1.10.

Cho đường tròn (O ; R) và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng khi điểm M chạy trên (O; R) thì điểm M' chạy trên một đường tròn cố định bán kính R.



Giải

Gọi I là trung điểm AB thì I cố định và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Do đó, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$, tức là MM' nhận I làm trung điểm.

Gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì O' cố định và MOM'O' là hình bình hành nên OM = O'M = R. Suy ra M' nằm trên đường tròn cố định tâm O' bán kính R.

BÀI TẬP

1.1. Cho hình bình hành ABCD.

a) Tính độ dài của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}.$$

1.2. Cho tứ giác ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng tỏ rằng: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

1.3. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi I là trung điểm AC.

a) Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IC}$.

b) Tính độ dài của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

1.4. Cho tam giác vuông cân OAB với OA = OB = a. Tính độ dài của:
$\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2,5\overrightarrow{OB}$; $\vec{v} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

1.5. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hãy biểu thị các vectơ sau đây qua các vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

1.6. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O).

a) **Chứng minh rằng** các điểm M, N, P nằm trên đường tròn (O) nếu: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$. Khi đó, có thể nói gì về vị trí của các điểm M, N, P tương ứng so với các điểm C, A, B ?

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$, với các điểm M, N, P như trên.

1.7. Để giải bài toán: *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng* AD *và* BC *trùng nhau*, một học sinh tiến hành như sau:

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABDC *là hình bình hành* $\Leftrightarrow$ *trung điểm hai đường chéo* AD *và* BC *trùng nhau.*

Em có đồng ý với cách giải đó không? Nếu không, hãy cho biết lí do và trình bày cách giải của mình.

1.8. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm thoả mãn điều kiện:

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

a) Chứng minh rằng I là trọng tâm tam giác BCD, trong đó D là trung điểm cạnh AC.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

1.9. Cho tứ giác ABCD. Gọi G là điểm sao cho

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Điểm G như thế tồn tại duy nhất theo Ví dụ 1.7, nó được gọi là *trọng tâm* của tứ giác ABCD. Chứng minh:

a) G là trung điểm của các đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối của tứ giác; G cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo của tứ giác.

b) G nằm trên các đoạn thẳng nối một đỉnh của tứ giác và trọng tâm của tam giác tạo thành bởi ba đỉnh còn lại của tứ giác.

1.10. Cho tứ giác ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ qua các vectơ $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$.

1.11. Cho đường tròn (O, R) và một điểm I khác với O. Một điểm M tuỳ ý nằm trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Giả sử IO = d ($\neq 0$). Chứng minh $\overrightarrow{IN} = \dfrac{d}{d+R}\overrightarrow{IM}$.

1.12. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M, các điểm D, E, F trong các đẳng thức vectơ sau đều là các điểm cố định:

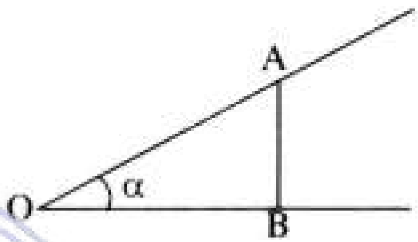
$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}.$$

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

§ 5. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

5.1. ***Mở rộng tỉ số lượng giác***

- Nhắc lại, ở lớp 9, nếu α là góc nhọn $(0 < \alpha < 90^0)$ ta có:



$\sin\alpha = \dfrac{AB}{OB}$; $\cos\alpha = \dfrac{OB}{OA}$;

$\sin\alpha = \dfrac{AB}{OB}$; $\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{OB}{AB}$

Ta có thêm các định nghĩa sau:

- Nếu $\alpha = 0^0$ thì:

  $\sin 0^0 = 0$; $\cos 0^0 = 1$; $\mathrm{tg}0^0 = 0$; $\mathrm{cotg}0^0$ không xác định.

- Nếu $\alpha = 90^0$ thì:

  $\sin 90^0 = 1$; $\cos 90^0 = 0$; $\mathrm{tg}90^0$ không xác định; $\mathrm{cotg}90^0 = 0$.

- Nếu α là góc tù hoặc bẹt $(90^0 < \alpha \le 180^0)$ thì

  $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$;

  $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$;

  $\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}(180^0 - \alpha)$;

  $\mathrm{cotg}\alpha = -\mathrm{cotg}(180^0 - \alpha)$.

Như vậy, ta có quy tắc:

Hai góc bù nhau có sin bằng nhau, còn cosin, tang và cotang của chúng đối nhau.

5.2. *Tỉ số lượng giác của một số góc cần nhớ*

Góc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ

Trong bảng trên, kxđ là viết tắt của nhóm từ *không xác định*.

Ví dụ 1.11.

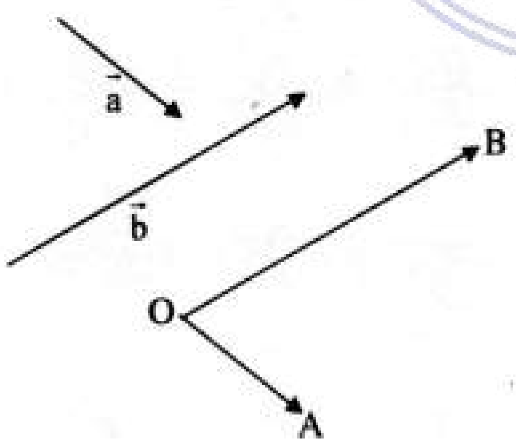
Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = (2\sin 30^0 + \cos 135^0 - 3\text{tg}150^0)(\cos 180^0 - \text{cotg}60^0)$;

b) $B = \sin^2 90^0 + \cos^2 120^0 + \cos^2 0^0 - \text{tg}^2 60^0 + \text{cotg}^2 135^0$.

Đáp số: a) $A = 1 - \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2}$ b) $B = -\frac{1}{4}$.

5.3. *Góc giữa hai vectơ*



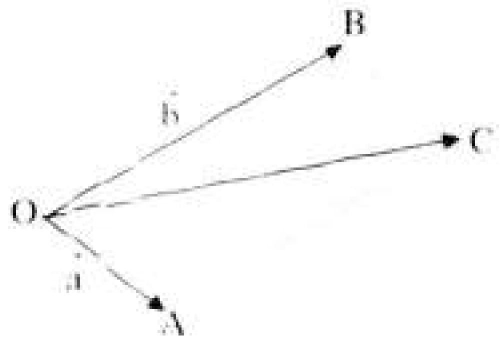
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ-không. Từ một điểm O (tuỳ ý) nào đó ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó: Số đo của góc AOB được gọi là *số đo góc hợp bởi hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, hoặc đơn giản, là *góc giữa hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ-không thì ta có thể xem góc giữa hai vectơ đó là bao nhiêu cũng được. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$ thì ta nói rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *vuông góc* với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ví dụ 1.12.

Chứng minh rằng nếu góc giữa hai vectơ khác vectơ-không $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là nhọn, hoặc nếu $\vec{a} \perp \vec{b}$, thì

$$|\vec{a} + \vec{b}| > \max(|\vec{a}|, |\vec{b}|).$$



Giải

Nếu một tam giác có một góc tù hay vuông, thì cạnh dài nhất của nó chính là cạnh đối diện với góc ấy.

Vì góc OBC là góc tù hoặc vuông nên ta có OC > OB và OC > BC.

Mặt khác, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$ nên suy ra điều phải chứng minh.

5.4. *Tích vô hướng của hai vectơ*

5.4.1. *Tích vô hướng* của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, và được xác định bởi công thức

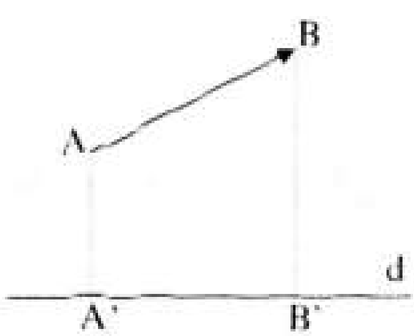
$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

5.4.2. *Bình phương vô hướng*

Với vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý, tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $(\vec{a})^2$ hay đơn giản hơn: $\vec{a}^2$ và gọi là *bình phương vô hướng* của $\vec{a}$.

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|^2$.

5.4.3. *Công thức hình chiếu*



Cho vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và đường thẳng (d). Gọi A' và B' là hình chiếu vuông góc của A và B trên (d). Khi đó vectơ $\vec{a'} = \overrightarrow{A'B'}$ được gọi là hình chiếu của vectơ $\vec{a}$ trên đường thẳng d.

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì ta có *công thức hình chiếu:* $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b'}$, trong đó $\vec{b'}$ là hình chiếu của vectơ $\vec{b}$ trên đường thẳng chứa vectơ $\vec{a}$.

5.4.4. *Kết quả quỹ tích cần nhớ*

Cho vectơ $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ cố định. Khi đó, tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = \mathbf{k}$, trong đó k là một số không đổi, là đường thẳng vuông góc với AB tại H, với H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng OB.

Kết quả này được phát biểu và chứng minh dưới dạng *Bài toán* ở sách giáo khoa (2006).

5.4.5. *Các tính chất của tích vô hướng*

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và mọi số thực k, ta có:

i) Tính chất giao hoán: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

iii) Tính chất kết hợp: $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$

iii) Tính chất phân phối: $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

Dùng các tính chất của tích vô hướng, dễ dàng chứng minh các công thức sau:

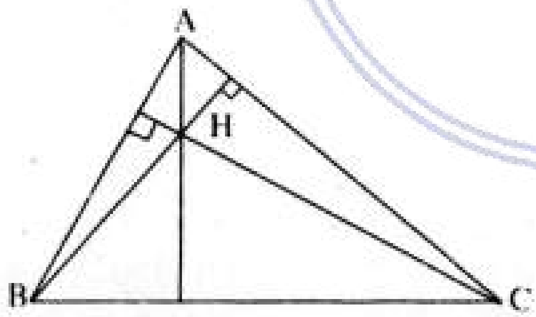
$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2.$$

Ví dụ 1.13.

Chứng minh rằng ba đường cao trong một tam giác giao nhau tại một điểm (trực tâm).



Giải

Trước hết, với bốn điểm A, B, C, H bất kì, ta luôn có

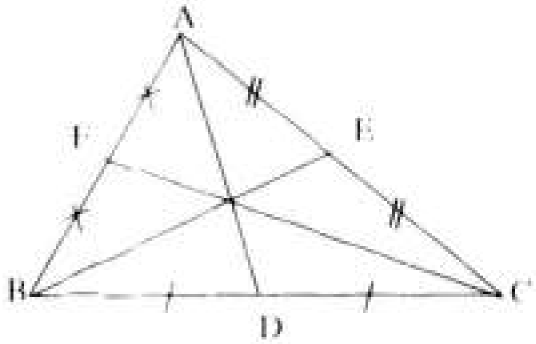
$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

Thật vậy, với điểm O tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} =$$
$$= (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OH})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH})(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).$$

Dùng tính phân phối của tích vô hướng để khai triển rồi rút gọn, ta dễ thấy vế phải bằng 0.

Bây giờ, xét tam giác ABC, giả sử hai đường cao kẻ từ A và B cắt nhau tại H. Khi đó, $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ nên từ đẳng thức trên ta suy ra $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$, nói cách khác, $CH \perp AB$. Suy ra điều phải chứng minh.



Ví dụ 1.14.

Cho tam giác ABC với AD, BE, CF là ba trung tuyến. Chứng minh

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0.$$

Giải

Vì AD, BE, CF là các trung tuyến nên

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2},\ \overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2},\ \overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2},$$

do đó $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} =$

$$= \overrightarrow{BC}.\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} + \overrightarrow{CA}\frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} + \overrightarrow{AB}\frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}) = 0.$$

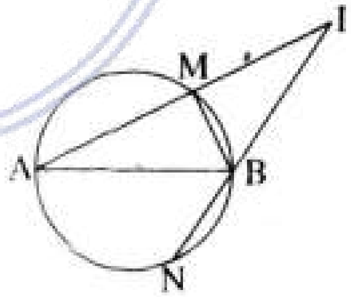
Ví dụ 1.15.

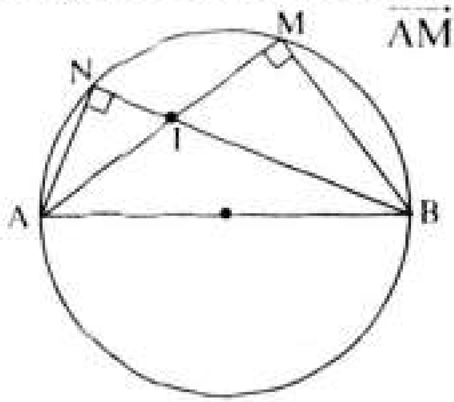
Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

Giải

Để ý, hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng AI là vectơ $\overrightarrow{AM}$, do vậy theo công thức hình chiếu ta có :





$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}.$$

Tương tự,

$$\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}.$$

Từ đó

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$$

$$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = 4R^2.$$

Ví dụ 1.16.

Cho hình bình hành ABCD. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$, với k là một số không đổi.

Giải

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD ta có:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = k^2$

$\Leftrightarrow\ 4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = k^2$

$\Leftrightarrow\ MO^2 = \frac{1}{4}(k^2 - 2OA^2 - 2OB^2)$. Từ đó:

* Nếu $k^2 > 2OA^2 + 2OB^2$, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính $\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2OA^2 - 2OB^2}$.

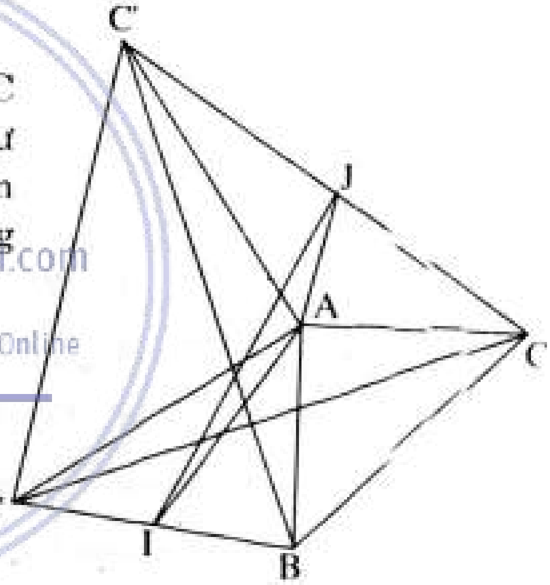
* Nếu $k^2 = 2OA^2 + 2OB^2$, tập hợp các điểm M chỉ gồm duy nhất một điểm O.

* Nếu $k^2 < 2OA^2 + 2OB^2$, tập hợp các điểm M là tập rỗng.

Ví dụ 1.17.

Cho hai tam giác vuông cân ABC và AB'C' cùng cân tại đỉnh chung A như hình bên. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng BB' và CC'. Chứng minh rằng

$AI \perp CC'$, $AJ \perp BB'$ và $BC' \perp B'C$.



Giải.

Ta có

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}(AB.AC'.\cos BAC' - AB'.AC\cos B'AC) = 0.$

(vì $AB = AC$, $AB' = AC'$ và hai góc BAC' và B'AC bằng nhau). Vậy $AI \perp CC'$. Chứng minh tương tự ta có $AJ \perp BB'$. Tiếp theo, ta có

$\overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{B'C} = (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'})$

$= \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}$

$= \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'} = AC'.AC.\cos CAC' - AB.\ AB'.\cos BAB'$

$= 0$ (vì hai góc BAB' và CAC' bù nhau).

Vậy BC' ⊥ B'C.

Nhận xét. Các ví dụ 1.13, 1.16 và 1.17 ở trên cho thấy rằng trong một số bài toán về hình học phẳng, đôi khi vận dụng phép tính vectơ sẽ dẫn đến việc giải quyết được dễ dàng hơn.

BÀI TẬP

1.13. Chứng minh các công thức:

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

b) $\operatorname{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;

c) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

d) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \operatorname{tg}x)} - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \operatorname{cotg}x)} = \sin x - \cos x$;

e) $\left(\operatorname{tg}x + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)\left(\operatorname{cotg}x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}\right) = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

(trong điều kiện tgx và cotgx được xác định cho các câu b, c, d, e).

1.14. Cho tam giác ABC vuông ở A và góc B = 30°. Tính các giá trị của các biểu thức:

a) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \operatorname{tg}\dfrac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2}$;

b) $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

1.15. Cho hai điểm A, B cố định và một số dương k không đổi. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

1.16. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta luôn luôn có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$, với k là một số không đổi.

1.17. a) Cho tứ giác ABCD với hai đường chéo là AC và BD. Chứng minh rằng: $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$. Từ đó hãy suy ra điều kiện để hai đường chéo của tứ giác vuông góc.

b) Sử dụng kết quả này, chứng tỏ rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$ (với a, b, c tương ứng là độ dài ba cạnh đối của các đỉnh A, B, C).

1.18. Cho tam giác cân ABC đỉnh A và đường cao AH. Gọi D là hình chiếu của H trên AC và M là trung điểm HD. Chứng minh rằng $AM \perp BD$.

1.19. Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \text{ hay } \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k.$$

Theo định nghĩa này, M là trung điểm AB khi và chỉ khi M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k = -1$. Nếu M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$, chứng minh rằng với mọi điểm O ta có:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}.$$

1.20. Gọi G là trọng tâm của tứ giác ABCD (xem Ví dụ 1.7) và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác:

BCD, ACD, ABD, ABC.

a) Chứng minh rằng các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy tại G.

b) Tìm các tỉ số mà điểm G tương ứng chia các đoạn thẳng AA', BB', CC'.

c) Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của tứ giác A'B'C'D'.

B MỘT SỐ KIẾN THỨC VÀ VÍ DỤ MỞ RỘNG

1. Ví dụ sau đây là một mở rộng hơn nữa của Ví dụ 1.9.

Ví dụ 1.18.

Cho n bộ (A_i, m_i), với $i = 1, 2, ..., n$, trong đó A_i là các điểm còn m_i là những số thực dương. Ta nói trọng tâm của hệ n bộ (A_i, m_i) là một điểm T sao cho:

$$m_1\overrightarrow{TA_1} + m_2\overrightarrow{TA_2} + ... + m_n\overrightarrow{TA_n} = 0.$$

(Có thể hiểu m_i là các trọng lượng đặt vào vị trí A_i. Khi $n = 3$ và $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, ta gặp lại khái niệm trọng tâm của một tam giác). Chứng minh rằng với mọi n bộ như đã nói trên, trọng tâm luôn luôn tồn tại và duy nhất.

Giải

Chọn O là điểm cố định trong mặt phẳng, dễ thấy:

$$m_1\overrightarrow{IA_1} + m_2\overrightarrow{IA_2} + ... + m_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow m_1(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA_1}) + m_2(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA_2}) + ... + m_n(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2 + ... + m_n)\overrightarrow{IO} + m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + ... + m_n\overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + ... + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

Như thế, I tồn tại và duy nhất.

2. Công thức rút gọn một tổng vectơ

Cho hai điểm A, B và hai số thực a, b sao cho $a + b \neq 0$.

Theo Ví dụ 1.9, điểm M được xác định một cách duy nhất theo hệ thức $\overrightarrow{MA} = \frac{-b}{a+b}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Đặc biệt, khi $a = b = 1$, M là trung điểm AB.

Từ kết quả này, với các giả thiết như trên, suy ra: với mọi điểm N ta đều có $a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} = (a + b)\overrightarrow{NM}$.

Chứng minh.

$$a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} = a\overrightarrow{NM} + a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{NM} + b\overrightarrow{MB}$$
$$= (a + b)\overrightarrow{NM} + a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{NM}.$$

3. Nhận xét

Công thức trên được gọi là *công thức rút gọn cho một tổng hai vectơ*. Một cách tương tự, bạn đọc có thể chứng minh được kết quả mở rộng cho ba vectơ như sau: Cho ba điểm A, B, C và ba số thực a, b, c sao cho $a + b + c \neq 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất một điểm M thoả mãn $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, và nếu gọi N là điểm tuỳ ý, ta luôn có

$$a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} + c\overrightarrow{NC} = (a + b + c)\overrightarrow{NM}.$$

(Điểm M được xác định duy nhất từ hệ thức $\overrightarrow{AM} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$.) Trong trường hợp $a = b = c = 1$, M trùng với G, trọng tâm tam giác ABC, hệ thức trên trở thành $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}$, với mọi điểm M, đây là công thức quen thuộc.

Ví dụ 1.19.

Cho ABCD là hình bình hành. Hãy xác định số thực m và một điểm M cố định sao cho mỗi hệ thức sau đây được thoả mãn với mọi điểm N:

a) $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = m\overrightarrow{NM}$;

b) $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = m\overrightarrow{NM}$.

Giải

a) Gọi M là điểm cố định xác định một cách duy nhất theo hệ thức $\overrightarrow{MA} = \frac{-2}{1+2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Sử dụng công thức rút gọn ta có $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = (1+2)\overrightarrow{NM} = 3\overrightarrow{NM}$. Vậy ta chọn M như đã nói và chọn m = 3.

b) Tương tự, chọn M là điểm cố định thoả mãn

$$2\overrightarrow{MA} + 1.\overrightarrow{MB} + (-1).\overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

và chọn m = 2, vì ta có $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = (2+1-1)\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NM}$.

4. Tâm tỉ cự của một hệ hữu hạn điểm

Trong nhận xét 3 ở trên, điểm M thường được gọi là *tâm tỉ cự* của hệ ba điểm A, B, C ứng với các số a, b, c.

Tổng quát, xét một hệ n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn điều kiện $a_1 + a_2 + ... + a_n \neq 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất một điểm M thoả mãn:

$$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + ... + a_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0},$$

và M được gọi là *tâm tỉ cự* của hệ n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ ứng với các số $a_1, a_2, ..., a_n$.

Nếu gọi N là điểm tuỳ ý, ta luôn có:

$$a_1\overrightarrow{NA_1} + a_2\overrightarrow{NA_2} + ... + a_n\overrightarrow{NA_n} = (a_1 + a_2 + ... + a_n)\overrightarrow{NM}.$$

Chứng minh. Ta có

$$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + ... + a_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -a_1\overrightarrow{A_1M} + a_2(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1M}) + ... + a_n(\overrightarrow{A_1A_n} - \overrightarrow{A_1M}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1M} = \frac{a_2\overrightarrow{A_1A_2} + a_3\overrightarrow{A_1A_3} + ... + a_n\overrightarrow{A_1A_n}}{(a_1 + a_2 + ... + a_n)}.$$

Như vậy, M được xác định một cách duy nhất.

Gọi N là điểm tuỳ ý, ta có

$$a_1\overrightarrow{NA_1} + a_2\overrightarrow{NA_2} + ... + a_n\overrightarrow{NA_n}$$

$$= a_1(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA_1}) + a_2(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA_2}) + ... + a_n(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA_n})$$

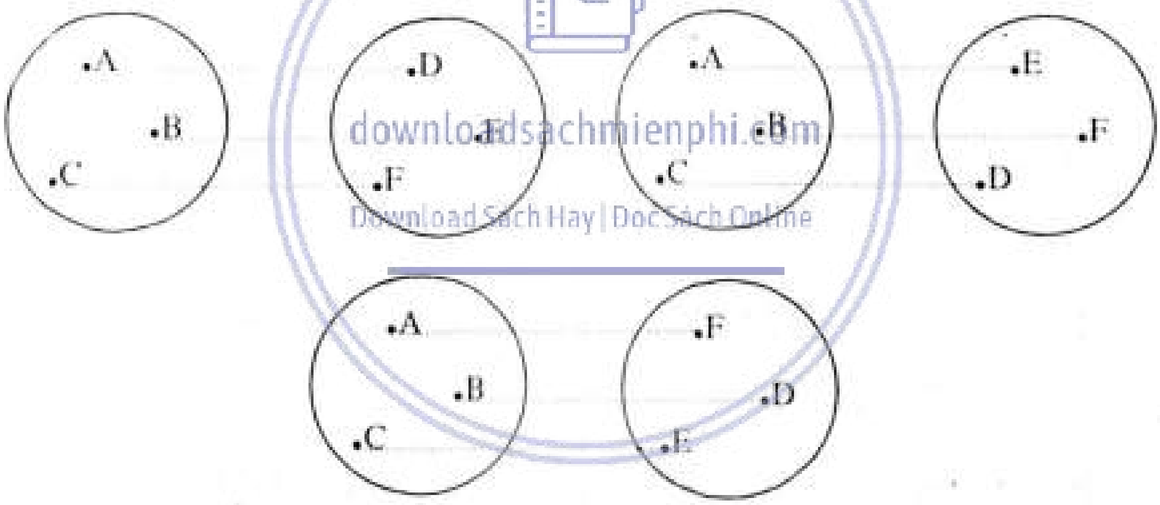
$$= (a_1 + a_2 + ... + a_n)\overrightarrow{NM}.$$

5. Nhận xét

Đây chính là khái niệm *trọng tâm của n bộ* như đã nói ở Ví dụ 1.18. Trong trường hợp $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$, tâm tỉ cự chính là trọng tâm của một hệ hữu hạn n điểm như đã nói ở Ví dụ 1.8. Trong chứng minh ở Ví dụ 1.18, ta đã chọn một điểm O cố định tuỳ ý làm điểm gốc để từ đó xác định được T, còn trong chứng minh ở 1.4, ta đã chọn điểm cố định đó chính là điểm có sẵn A_1, nhằm xác định được điểm M. Thực chất, hai chứng minh chỉ khác nhau về hình thức. Ngoài ra, *trọng tâm của n bộ* và *tâm tỉ cự* chỉ là hai cách định danh khác nhau của cùng một khái niệm.

6. Mở rộng Ví dụ 1.1.

Cho hai tập hợp A và B. Ta nói một *ánh xạ* f từ A đến B là một phép cho tương ứng một phần tử của A với duy nhất một phần tử của B. Như vậy, một *hàm số* chính là một ánh xạ, nhưng A và B là các tập hợp số. Trong trường hợp mọi phần tử của B đều có tương ứng và chỉ có tương ứng với duy nhất một phần tử của B, ta nói đó là một *song ánh*. Có thể hình dung ba song ánh như sau:



Dễ thấy rằng đối với hai tập hợp {A, B, C} và {D, E, F}, chỉ có ba song ánh như trên. Bây giờ, xem lại Ví dụ 1.1 (trang 7 - và cách giải khác ở đầu trang 9).

Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F (Ví dụ 1.1). Ta có:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}.$$

Lẽ tự nhiên; cho 8 điểm A, B, C, D, E, F, G, H, ta có thể nghĩ đến các hệ thức sau (và việc chứng minh cũng tương tự):

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DE}$$

$$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DG}.$$

Đến đây, bạn có thể thực hiện tương tự cho 10, 12, ... điểm. Từ nhận xét đó, ta đi đến trường hợp tổng quát sau đây.

Ví dụ 1.20.

Cho tập A gồm n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$, một tập B cũng gồm n điểm $B_1, B_2, ..., B_n$. Với song ánh f từ A đến B, ta đặt

$$B_i = f(A_i),\ i = 1, 2, ...\ n.$$

Chứng minh rằng tổng vectơ $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n}$ không phụ thuộc vào song ánh f.

Giải

Chọn điểm O cố định nào đó, ta có:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n}$$

$$= (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + ... + \overrightarrow{OB_n}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

7. Nhận xét

Chú ý rằng nếu tập A trùng với tập B, nói cách khác, n điểm $B_1, B_2, ..., B_n$ là một hoán vị (thay đổi thứ tự) của n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$, thì từ Ví dụ 1.20 ta có kết quả:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}.$$

Thật vậy, Ví dụ 1.20 nói rằng $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n}$ không phụ thuộc vào song ánh f, nên nếu ta chọn song ánh f là song ánh đặc biệt, đó là song ánh đồng nhất, biến B_i thành chính A_i, thì

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_2A_2} + ... + \overrightarrow{A_nA_n} = \vec{0}.$$

Nhận xét này giúp ta hiểu thêm bản chất của các hệ thức sau đây, mà ta thường kiểm tra trực tiếp một cách dễ dàng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DE} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FD} = \vec{0}, ...$$

8. Một số hệ thức vectơ liên hệ đến các điểm đặc biệt trong tam giác

Các điểm đặc biệt thường gặp trong một tam giác là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn nội, ngoại tiếp. Trong phần trước, chúng ta có hai hệ thức đáng nhớ liên quan đến trọng tâm của một tam giác ABC, đó là

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}, \quad (1)$$

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \quad (2)$$

Cho G là trọng tâm, H là trực tâm, I và O là tâm đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC. Kí hiệu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp: a, b, c lần lượt là độ dài ba cạnh đối của các đỉnh A, B, C; m_a, m_b, m_c là độ dài ba trung tuyến tương ứng.

Khi ấy ta có:

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \qquad (3)$$

$$(a+b+c)\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \qquad (4)$$

$$(a+b+c)\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC} \qquad (5)$$

$$m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC \ge \frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \qquad (6)$$

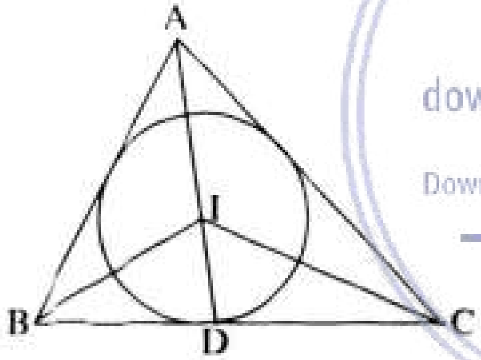
$$2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2,\ 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - b^2,\ 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2. \quad (7)$$

Chứng minh.

Chứng minh (3). Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \text{ hay } \overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}.$$

Suy ra $\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC} = -\frac{c}{b}(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID})$ hay $b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = (b+c)\overrightarrow{ID}$. (8)



Do $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$ nên $\frac{DB}{DC+DB} = \frac{c}{b+c}$ hay $DB = \frac{ac}{b+c}$. Vì BI là phân giác của góc B nên lại áp dụng tính chất đường phân giác cho tam giác ADB ta có

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{c} = \frac{a}{b+c}. \text{ Vậy}$$

$$\overrightarrow{ID} = -\frac{a}{b+c}\overrightarrow{IA}. \qquad (9)$$

Thay (9) vào (8) ta đi đến $b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = (b+c)\overrightarrow{ID} = -a\overrightarrow{IA}$, hay

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Chứng minh (4). Theo (3) ta có

$$(a+b+c)\overrightarrow{OI} = a(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{IA}) + b(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{IB}) + c(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{IC})$$

$$= a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} - (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}) = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}.$$

Chứng minh (5). Theo (3) ta có

$$(a+b+c)\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{HA} - a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{HB} - b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{HC} - c\overrightarrow{IC}$$

$$= a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC} - (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}) = a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC}.$$

Chứng minh (6). Vì với mọi góc x, ta có $-1 \le \cos x \le 1$ nên

$$GA.MA \ge \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{GA}\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG} + GA^2$$

$$\Rightarrow GA.MA \ge \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG} + GA^2.$$

Tương tự $GB.MB \ge \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{MG} + GB^2$, $GC.MC \ge \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{MG} + GC^2$, suy ra

$$GA.MA + GB.MB + GC.MC \ge \overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Để ý $GA = \frac{2}{3}m_a$, $GB = \frac{2}{3}m_b$, $GC = \frac{2}{3}m_c$, kết hợp với (), bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{2}{3}(m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC) \ge \overrightarrow{MG}.\vec{0} + \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

$$\Leftrightarrow m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC \ge \frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

Chứng minh (7). Ta có

$$2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2 = 2R^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 2R^2 - c^2$$

Tương tự,

$$2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})^2 = 2R^2 - \overrightarrow{AC}^2 = 2R^2 - b^2$$

$$2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^2 = 2R^2 - \overrightarrow{BC}^2 = 2R^2 - a^2$$

Ví dụ 1.21.

Với các kí hiệu như trên, chứng minh: $OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$.

Giải.

Từ (4) ta có: $(a+b+c)\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$. Bình phương vô hướng hai vế đẳng thức này và sử dụng (7) ta được

$$(a+b+c)^2OI^2 =$$
$$= (a^2+b^2+c^2)R^2 + ab(2R^2 - c^2) + ac(2R^2 - b^2) + bc(2R^2 - a^2)$$
$$= (a+b+c)^2R^2 - abc(a+b+c).$$

Suy ra $OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$.

9. Một số ví dụ khác

Trong ví dụ 1.22 sau đây, ta xét cách giải (1) bằng vectơ và cách giải (2) bằng hình học:

Ví dụ 1.22. (Balkan, Senior, 1987)

Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là trung điểm AB, E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh rằng OE vuông góc CD nếu và chỉ nếu AB = AC.

Giải

Cách 1. Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Suy ra

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),\ \overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b},$$

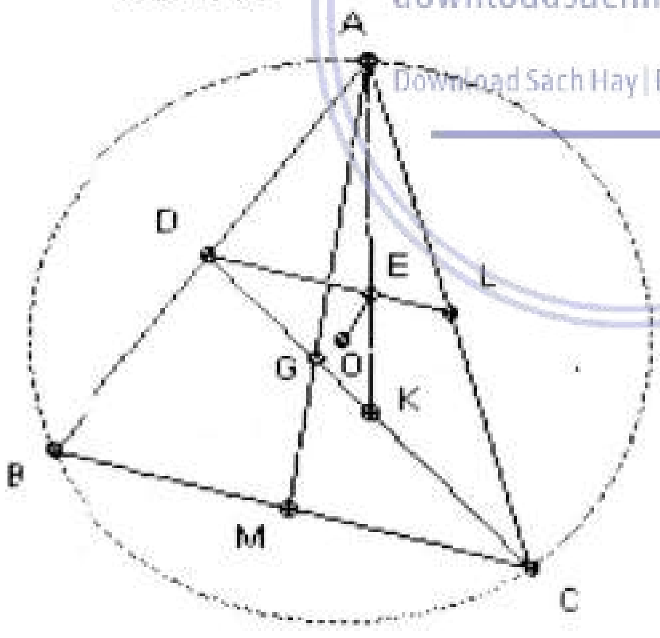
với P là trung điểm AD. Từ đó,

$$\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

Ta lại có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$. Do đó, OE ⊥ CD nếu và chỉ nếu $(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}).(3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) = 0$.

Khai triển và để ý $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$ ta được $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = 0$, đẳng thức này xảy ra nếu và chỉ nếu OA ⊥ BC. Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2.



Gọi K, L, M lần lượt là trung điểm CD, AC và BC. Giả sử AM cắt CD tại G. G là trọng tâm nên GD = CD/3. K là trung điểm CD nên KG = CD/6 và KG/DG = 1/2. Vì E là trọng tâm tam giác ACD nên KE/AE = 1/2. Từ đó, GE // AD. Mà OD ⊥ AD, do đó OD ⊥ GE. Nói cách khác, G nằm trên đường cao kẻ từ E của tam giác ODE.

* Nếu AB = AC thì O phải thuộc AM. Do đó GO ⊥ BC, hay GO ⊥ DE. Nói cách khác, G nằm trên đường cao kẻ từ O của tam giác ODE. Vậy G là trực tâm tam giác ODE, suy ra OE ⊥ CD.

* Đảo lại, giả sử OE ⊥ CD (hay OE ⊥ DG), thì G nằm trên đường cao kẻ từ D của tam giác ODE. Suy ra G là trực tâm của tam giác

ODE, do đó OG ⊥ DE (hay DL) và như vậy OG ⊥ BC. Mà OM cũng vuông góc BC (do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC), nên G nằm trên OM. Nói cách khác, O, G, M thẳng hàng. Ta lại có A, G, M thẳng hàng, nên A nằm trên OM. Điều này có nghĩa A nằm trên trung trực của BC, tức là AB = AC.

Ví dụ 1.23.

Cho điểm M tuỳ ý nằm bên trong tam giác ABC. Đặt

$$S_1 = dt(MBC), S_2 = dt(MCA), S_3 = dt(MAB).$$

Chứng minh rằng $S_1.\overrightarrow{MA} + S_2.\overrightarrow{MB} + S_3.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Giải

Gọi $A_1 = (AM) \cap (BC)$, suy ra $\overrightarrow{MA_1} = \dfrac{A_1C}{BC}.\overrightarrow{MB} + \dfrac{A_1B}{BC}.\overrightarrow{MC}$.

Ta có: $\dfrac{A_1C}{A_1B} = \dfrac{dt(MA_1C)}{dt(MA_1B)} = \dfrac{dt(MAC)}{dt(MAB)} = \dfrac{S_2}{S_3}$, suy ra $\dfrac{A_1C}{BC} = \dfrac{S_2}{S_2 + S_3}$.

Tương tự ta có: $\dfrac{A_1B}{BC} = \dfrac{S_3}{S_2 + S_3}$, do đó

$$\overrightarrow{MA_1} = \frac{S_2}{S_2 + S_3}.\overrightarrow{MB} + \frac{S_3}{S_2 + S_3}.\overrightarrow{MC}. \qquad (1)$$

Mặt khác: $\dfrac{MA_1}{MA} = \dfrac{dt(MA_1B)}{dt(MAB)} = \dfrac{dt(MA_1C)}{dt(MAC)} =$

$$= \frac{dt(MA_1B) + dt(MA_1C)}{dt(MAB) + dt(MAC)} = \frac{S_1}{S_2 + S_3}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA_1} = -\frac{S_1}{S_2 + S_3}.\overrightarrow{MA}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $-S_1.\overrightarrow{MA} = S_2.\overrightarrow{MB} + S_3.\overrightarrow{MC}$

$$\Leftrightarrow S_1.\overrightarrow{MA} + S_2.\overrightarrow{MB} + S_3.\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Ví dụ 1.24.

Cho ba số thực $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Chứng minh rằng với mọi điểm J thỏa mãn $\alpha.\overrightarrow{JA} + \beta.\overrightarrow{JB} + \gamma.\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ ta luôn có

$$MJ^2 = \frac{\alpha.MA^2 + \beta.MB^2 + \gamma.MC^2}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{\alpha\beta.AB^2 + \beta\gamma.BC^2 + \gamma\alpha.CA^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

Giải

Ta có $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MJ} + \alpha.\overrightarrow{JA} + \beta.\overrightarrow{JB} + \gamma.\overrightarrow{JC}}{\alpha+\beta+\gamma}$,

$$\overrightarrow{MJ} = \frac{\alpha\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}\right)}{\alpha+\beta+\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha.\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}}{\alpha+\beta+\gamma} = x.\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC},$$

với $x = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, y = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, z = \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$ và $x + y + z = 1$.

Từ đó, $\overrightarrow{MJ}^2 = \left(x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}\right)^2 = x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 +$

$$+ 2xy.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2yz.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 2xz.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$

Ta lại có: $2.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)^2 = MA^2 + MB^2 - AB^2$

$2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MB^2 + MC^2 - BC^2$,

$2.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = MA^2 + MC^2 - AC^2$.

Do vậy,

$$MJ^2 = x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 + xy\left(MA^2 + MB^2 - AB^2\right) +$$

$$+ yz\left(MB^2 + MC^2 - BC^2\right) + xz\left(MA^2 + MC^2 - AC^2\right)$$

$$= x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 - \left[xy.AB^2 + yz.BC^2 + xz.AC^2\right]$$

$$= \frac{\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2}{\alpha+\beta+\gamma} - \frac{\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \alpha\gamma CA^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$

Ví dụ 1.25. (Balkan, Sennior, 1996 - cải biên)

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và G là trọng tâm của một tam giác ABC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó, đặt a = BC, b = CA, c = AB. Chứng minh rằng

$$R^2 - OG^2 \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Giải

Gọi các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ lần lượt là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

Suy ra $9OG^2 = \vec a^2 + \vec b^2 + \vec c^2 + 2(\vec a\vec b + \vec b\vec c + \vec c\vec a)$.

Ta có: $\vec a^2 = \vec b^2 = \vec c^2 = R^2$,

$$2\vec a\vec b = 2R^2\cos 2C = 2R^2 - AB^2 = 2R^2 - c^2$$

và các hệ thức tương tự: $2\vec b\vec c = 2R^2 - a^2$, $2\vec c\vec a = 2R^2 - b^2$. Từ đó,

$$9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Ta lại có $(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (bất đẳng thức Cauchy cho ba số). Do đó $R^2 - OG^2 \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

C LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1. **a)** $\vec u = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec 0$.

Vậy độ dài của vectơ $\vec u$ bằng 0.

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec 0.$$

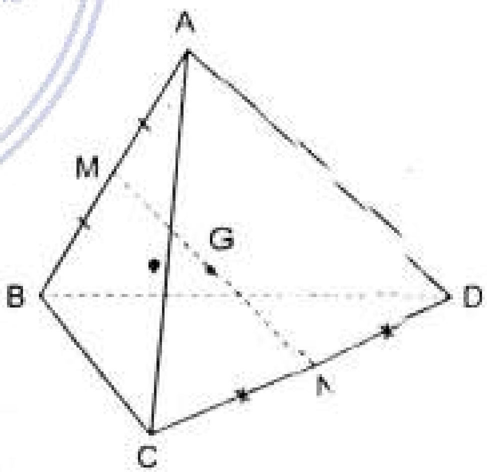
Do đó: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}$.

1.2. Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

Do $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec 0$ và $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec 0$, nên

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$



Tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

1.3. **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MC}$.

Vậy M là đỉnh của hình bình hành ABCM.

b) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec u = \overrightarrow{BM}$.

Vậy $|\vec u| = BM = 2BI = a\sqrt{3}$.

1.4. HD: Dùng định lí Py-ta-go. Đáp số:

$$|\vec u| = \left|\frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2{,}5\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{541}}{4}a,$$

$$|\vec{v}| = \left|\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{6063}}{28}a.$$

1.5. HD: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$;

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.

1.6. **a)** Ta có $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ nên OAMB là hình thoi. Suy ra AOM là tam giác cân tại A, ngoài ra, AB là trung trực của OM. Từ đó, AOM là tam giác đều, suy ra OM = OA. Vậy M phải nằm trên đường tròn (O). Tương tự như thế cho N và P.

Do tam giác ABC đều nên CO là trung trực AB. Suy ra M là điểm đối tâm của C. Tương tự, N, P tương ứng là điểm đối tâm của A và B.

b) Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$. Suy ra

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}.$$

1.7. Cách giải của học sinh đó không đúng, lí do: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ không tương đương với ABDC là hình bình hành. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ và bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng thì lập luận trên không áp dụng được. Ta có thể giải bài toán như sau:

Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của AD và BC, tức là: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ và $\overrightarrow{CI'} = \overrightarrow{I'B}$. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'B} = \overrightarrow{CI'} + \overrightarrow{I'I} + \overrightarrow{ID}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{I'I} \Leftrightarrow \text{I trùng với I'}.$$

1.8. **a)** Ta có:

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) = \vec{0}.$$

Vậy I là trọng tâm tam giác BCD.

b) $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Vậy: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1.9. **a)** Gọi M, N là trung điểm hai cạnh đối nào đó (AB và CD chẳng hạn) và G là trọng tâm tứ giác ABCD, ta có:

$$\vec{0} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}),$$

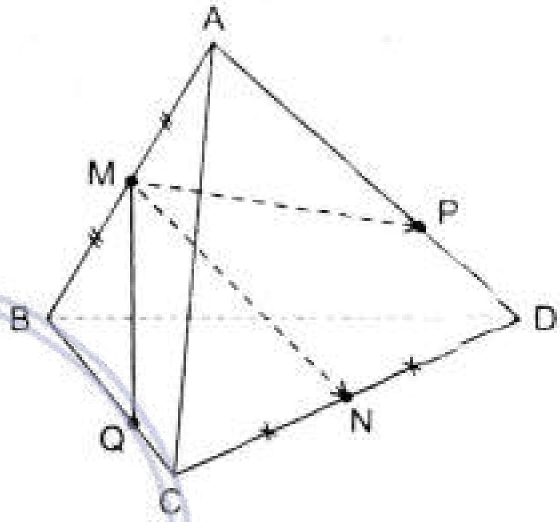
suy ra G là trung điểm của MN. Chứng minh tương tự ta có G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối AC và BD; hoặc của đoạn thẳng nối hai đường chéo AD và BC.

b) Ta chọn một đỉnh nào đó của tứ giác ABCD, A chẳng hạn, và gọi G_A là trọng tâm tam giác BCD tạo thành bởi ba đỉnh còn lại của tứ giác. Ta phải chứng minh rằng trọng tâm G của tứ giác nằm trên đoạn thẳng AG_A. Thật vậy, vì G là trọng tâm tứ giác ABCD nên:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}. \qquad (*)$$

Do G_A là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GG_A}$. Như vậy từ (*) suy ra $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_A}=\vec{0}$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GG_A}$ cùng phương, do đó G nằm trên đoạn thẳng AG_A.

1.10. Ta có



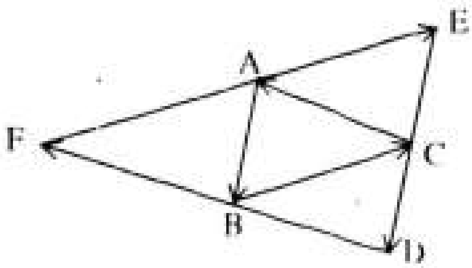
$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ})$$
$$=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MQ})$$
$$=\frac{3}{4}(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}).$$

1.11. Theo tính chất đường phân giác của tam giác MOI ta có

$$\frac{IN}{NM}=\frac{IO}{OM}=\frac{d}{R}.$$

Suy ra $\dfrac{IN}{IN+NM}=\dfrac{d}{d+R}\Leftrightarrow\dfrac{IN}{IM}=\dfrac{d}{d+R}$. Vì hai vectơ $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng nên đẳng thức trên có nghĩa là: $\overrightarrow{IN}=\dfrac{d}{d+R}\overrightarrow{IM}$.

1.12. **a)** Từ $\vec{MD}=\vec{MC}+\vec{AB}$ ta có $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$. Như vậy, D không phụ thuộc vào vị trí của điểm M và là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABDC. Tương tự, $\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ nên E là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCE. Sau cùng, $\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CA}$ nên F là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACBF.



Vì A, B, C cố định nên D, E, F cố định.

b) Theo giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$
$$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

1.13. **a)** Nếu x là góc nhọn AOB (tam giác AOB vuông tại O) thì

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{AB^2}{OA^2} + \frac{OB^2}{OA^2} = \frac{AB^2 + OB^2}{OA^2} = \frac{OA^2}{OA^2} = 1.$$

Nếu $x = 0^0$ hoặc $x = 90^0$ thì theo định nghĩa ta có
$\sin^2 0^0 + \cos^2 0^0 = 0 + 1 = 1$, $\sin^2 90^0 + \cos^2 90^0 = 1 + 0 = 1$.
Nếu x là góc từ 90^0 đến 180^0 thì đặt $y = 180^0 - x$ ta có:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y + (-\cos y)^2 = \sin^2 y + \cos^2 y = 1.$$

b) và **c)**. Chứng minh tương tự như trên.

d) $$\frac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \operatorname{tg}x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \operatorname{cotg}x)} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x\left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x + \sin x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} =$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x.$$

e) $$\left(\operatorname{tg}x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)\left(\operatorname{cotg}x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}\right) =$$

$$= \left[\frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}\right] \cdot \left[\frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)}\right] =$$

$$= \frac{(1 + \sin x)(1 + \cos x)}{\sin x \cos x(1 + \sin x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

1.14. Đáp số: **a)** $\dfrac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$; **b)** $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

1.15. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) =$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2.$$

Vì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ không đổi ($k > 0$) nên $\overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = k$ hay $MI = \sqrt{IA^2 + k}$.
Vậy quỹ tích M là đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{IA^2 + k}$.

1.16. **a)** Ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2).$$

Từ đó:

* Nếu $k^2 > GA^2 + GB^2 + GC^2$ thì tập hợp M là đường tròn tâm G bán kính $\sqrt{\dfrac{k^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2}{3}}$

* Nếu $k^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$ thì tập hợp các điểm M gồm chỉ một điểm G.

* Nếu $k^2 < GA^2 + GB^2 + GC^2$, tập hợp các điểm M là tập rỗng.

1.17. **a)** Ta có

$$AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{AD}^2 =$$

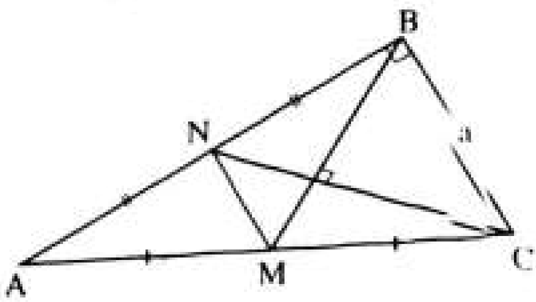
$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD})\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BD}) = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}.$$

Từ đó suy ra rằng tứ giác có hai đường chéo vuông góc khi và chỉ khi tổng bình phương các cặp cạnh đối bằng nhau.

b) Gọi BM và CN là hai trung tuyến của ΔABC. Vì MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN = \frac{a}{2}$.



Theo kết quả câu trên, điều kiện cần và đủ để tứ giác BCMN có hai đường chéo vuông góc là:

$$MN^2 + BC^2 = MC^2 + BN^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2.$$

1.18. Theo giả thiết, ta có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$. Từ đó:

$2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$ (vì $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$)

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}.2\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}.2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$ (công thức hình chiếu)

$= 2\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) = 0.$

Vậy $AM \perp BD$.

1.19. Từ $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, suy ra

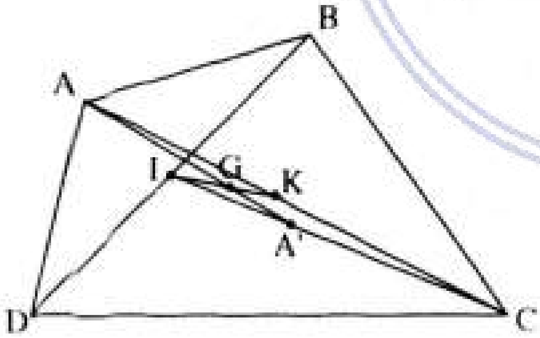
$$\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}.$$

1.20. **a)** Vì G là trọng tâm của tứ giác ABCD nên:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Mặt khác A' là trọng tâm của tam giác BCD nên

$$\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \text{ hay } \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GA'}.$$



Thay vào (1) ta có: $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ hay

$$\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'} \qquad (2)$$

nghĩa là A, A', G thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta cũng có B, B', G thẳng hàng ; C, C', G thẳng hàng; D, D', G thẳng hàng. Vậy G là điểm chung của bốn đoạn AA', BB', CC', DD'.

b) Từ (2) ta có điểm G chia các đoạn AA', BB', CC', DD' theo tỉ số $k = -3$.

c) Mặt khác, từ (2) ta có:

$$-3(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'}) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\text{hay } \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}.$$

Vậy G cũng là trọng tâm của tứ giác A'B'C'D'.

Chương 2

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

Về mặt căn bản, chương này trình bày những hệ thức quan trọng trong tam giác và trong đường tròn. Những kiến thức sau đây được chứng minh chủ yếu dựa vào các kiến thức đã có về vectơ:

– Định lí cosin, định lí sin.

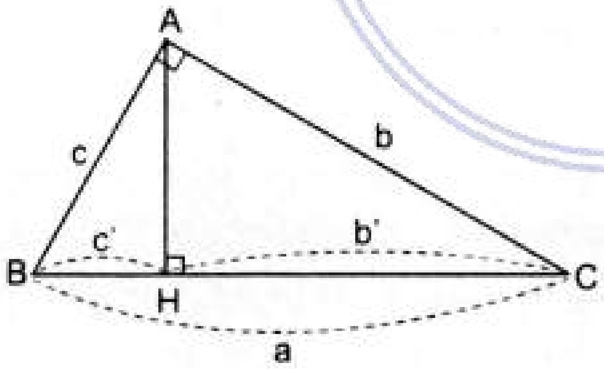
– Công thức trung tuyến, các công thức tính diện tích tam giác.

– Phương tích của một điểm đối với một đường tròn, trục đẳng phương của hai đường tròn.

A. *KIẾN THỨC, VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP CĂN BẢN*

§ 1. ĐỊNH LÍ SIN VÀ ĐỊNH LÍ COSIN TRONG TAM GIÁC

1.1. *Nhắc lại các hệ thức trong tam giác vuông*



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = \sqrt{a.b'}\ ;\ c = \sqrt{a.c'}$$

$$h^2 = c'.b'$$

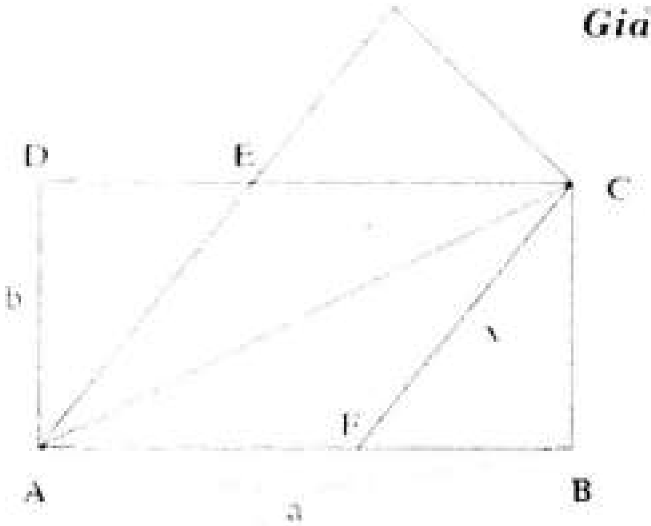
$$h.a = b.c$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Ví dụ 2.1.

Gấp tờ giấy hình chữ nhật lại dọc theo một đường chéo của nó. Cắt bỏ đi hai phần (tam giác) thò ra rồi mở tờ giấy ra. Bây giờ, ta được một hình thoi. Ta lại gấp hình thoi dọc theo đường nối trung điểm hai cạnh đối. Tiếp theo, lại cắt bỏ hai phần (tam giác) nhô ra. Sau tiến trình như thế, giả sử rằng khi mở tờ giấy ra ta có được một lục giác đều, thế thì hình chữ nhật ban đầu phải có kích thước tỉ lệ ra sao?

Giải



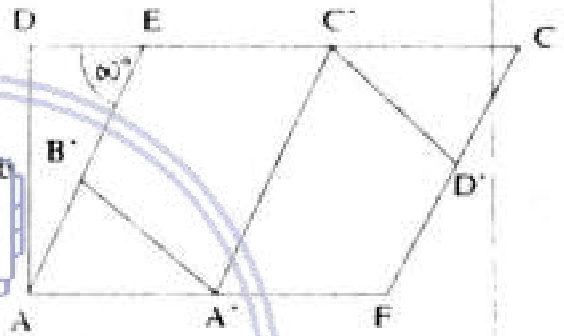
Xét hình chữ nhật ABCD, AB = a, AD = b, gọi x là cạnh hình thoi. Từ tam giác vuông ADE, ta có

$$x^2 = b^2 + (a - x)^2,$$

suy ra

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2a}. \qquad (1)$$

Giả sử khi gấp hình thoi dọc theo đường nối trung điểm hai cạnh đối và cắt bỏ như đề bài, ta nhận được lục giác đều



$$A'B'EC'D'F.$$

Ta có $\widehat{C'EB'} = 120^0$, do đó, từ tam giác vuông ADE, ta có

$\widehat{AED} = 60^0$, suy ra

$$\frac{b}{x} = \sin 60^0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}b. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\frac{2\sqrt{3}}{3}b = \frac{a^2 + b^2}{2a}$. Từ phương trình này ta có

$$a = \sqrt{3}b.$$

Ngược lại, giả sử kích thước hình chữ nhật ban đầu thỏa mãn $a = \sqrt{3}b$, dễ dàng chứng minh được lục giác nhận được sau cùng là lục giác đều.

Ví dụ 2.2.

Xét một tam giác cân mà độ dài ba đường cao của nó là ba cạnh của một tam giác. Góc ở đỉnh của tam giác cân này biến thiên trong khoảng nào?

Giải

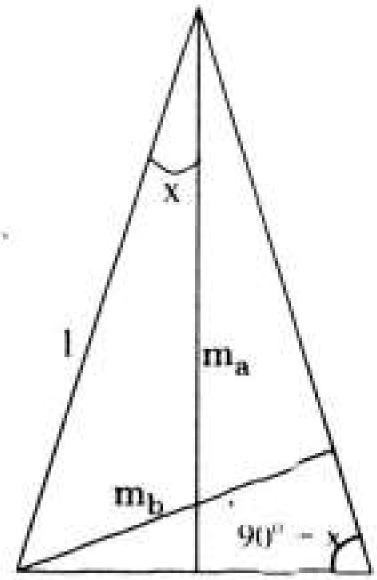
Giả sử tam giác cân có cạnh bên b = 1, gọi góc ở đỉnh là 2x (với $0^0 < 2x < 180^0$). Suy ra góc đáy là $90^0 - x$, chiều dài cạnh đáy là

$$a = 2\sin x.$$

Đường cao ứng cạnh đáy là: $m_a = b\cos x = \cos x$, mỗi đường cao ứng cạnh bên bằng

$m_b = a\sin(90^0 - x) = 2\sin x\cos x$.

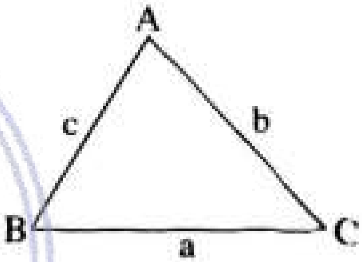
Ba độ dài m_a, m_b, m_b là độ dài ba cạnh của một tam giác nếu và chỉ nếu $m_a < 2m_b$, hay $\cos x < 4\sin x\cos x$, hay $\sin x > \frac{1}{4}$ (do $\cos x > 0$).



Tra bảng ta có góc có sin bằng 1/4 là $24{,}96^0$. Như vậy, góc ở đỉnh thay đổi trong khoảng giữa $49{,}92^0$ và 180^0.

1.2. ***Định lí cosin trong tam giác và hệ quả***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\ ;\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Ví dụ 2.3.

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$.

b) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$.

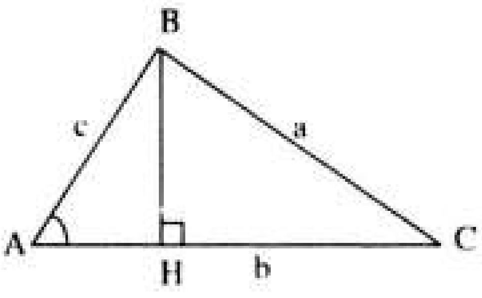
c) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.

Giải

Ta chứng minh a). Tiến hành tương tự cho b) và c). Trong tam giác ABC, góc A nhọn khi và chỉ khi $\cos A > 0$. Ta có:

$$\cos A > 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

Ví dụ 2.4.



Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$;

b) $b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B)$;

c) $(b^2 - c^2)\cos A = a(c.\cos C - b.\cos B)$.

Giải

a) Trong tam giác ABC, theo định lí hàm số cosin ta có:

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \\ b\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được:

$$c.\cos B + b.\cos C = \frac{a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a.$$

b) Áp dụng định lí hàm số cosin có:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Trừ vế với vế ta được:

$$b^2 - c^2 = c^2 - b^2 + 2ab.\cos C - 2ac.\cos B$$
$$2(b^2 - c^2) = 2a(b.\cos C - c.\cos B)$$
$$b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B).$$

c) Ta có: AH = c.cosA ; HC = a.cosC. Vì b = AH + HC nên

$b = c.\cos A + a.\cos C \Rightarrow c.\cos A = b - a\cos C$

$$\Rightarrow c^2\cos A = bc - ac.\cos C. \quad (1)$$

Tương tự,

$c = a.\cos B + b.\cos A \Rightarrow b.\cos A = c - a.\cos B$

$$\Rightarrow b^2\cos A = bc - ab.\cos B. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $b^2\cos A - c^2\cos A = bc - ab.\cos B - bc + ac.\cos C$, suy ra $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$.

1.3. *Định lí sin trong tam giác và hệ quả*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a = 2R.\sin A,\ b = 2R.\sin B,\ c = 2R.\sin C.$$

Ví dụ 2.5.

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$;

b) $h_a = 2R\sin B\sin C$ (h_a là đường cao kẻ từ A).

Giải

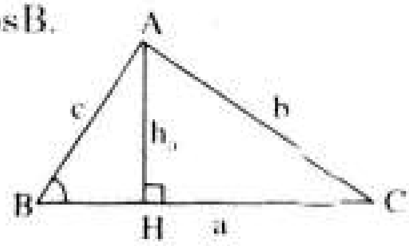
a) Theo định lí hàm số sin ta có:

$$a = 2R\sin A;\ b = 2R\sin B;\ c = 2R\sin C. \quad (*)$$

Mặt khác, từ Ví dụ 2.4 ta có $a = b.\cos C + c.\cos B$. Thay vào (*):

$$2R\sin C\cos B + 2R\sin B\cos C = 2R\sin A$$

$$\Leftrightarrow \sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B.$$



b) Trong ΔABH ta có: $h_a = c\sin B$,

vì $c = 2R\sin C$ nên:

$$h_a = 2R\sin B\sin C.$$

Ví dụ 2.6. (Balkan, Junior, 1997)

Một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp R và ba cạnh a, b, c thoả mãn $R(b + c) = a\sqrt{bc}$.

Tính các góc của tam giác đó.

Giải

Ta có $a = 2R.\sin A$, do đó, $R(b + c) = a\sqrt{bc}$ trở thành

$$\frac{1}{2}(b + c) = \sin A.\sqrt{bc}. \qquad (1)$$

Mặt khác,

$$\frac{1}{2}(b + c) \geq \sqrt{bc}, \qquad (2)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$; đồng thời, cũng có

$$\sin A.\sqrt{bc} \leq \sqrt{bc}, \qquad (3)$$

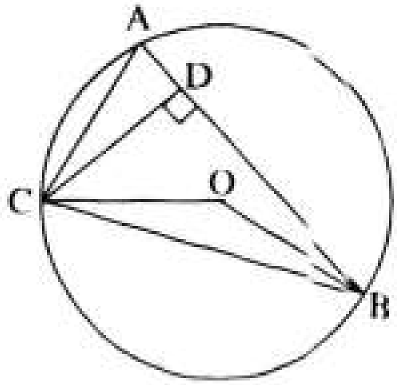
đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = 90^0$. Do đó, để (1) xảy ra thì đẳng thức ở (2) và (3) phải đồng thời xảy ra, nghĩa là phải có

$$b = c \text{ và } A = 90^0,\ B = 45^0,\ C = 45^0.$$

Ví dụ 2.7. (Eötvös, 1895, cải biên)

Tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Cho biết bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác, biết cạnh a và cho $t = b/c$. Hãy tính sinA, tgB theo R, a và t.

Giải



Vẽ đường cao CD.

Ta có $\sin A = a/(2R)$. Suy ra

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}.$$

Mặt khác, $CD = b.\sin A$, $AD = b.\cos A$,

$$DB = c - b.\cos A,$$

do đó

$$tgB = (b.\sin A)/(c - b.\cos A) = t.\sin A/(1 - t\cos A),$$

$$tgB = \frac{ta}{2R\left(1 - t\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}\right)}.$$

BÀI TẬP

2.1. Cho tứ giác lồi ABCD, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD. Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức:

$$S = \frac{1}{2}AC.BD\sin\alpha.$$

2.2. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH và BK. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}.$$

2.3. Cho tam giác ABC có b = 7, c = 5, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính h_a (đường cao kẻ từ A) và bán kính đường tròn ngoại tiếp R.

2.4. Cho tam giác ABC. Với các kí hiệu thông thường, hãy chứng minh:

a) $h_c = \dfrac{c}{\cot gA + \cot gB}$.

b) Nếu b + c = 2a thì $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

c) Nếu $bc = a^2$ thì $\sin B\sin C = \sin^2 A$ và $h_b h_c = h_a^2$.

2.5. Cho tam giác ABC có AB = 8, AC = 9, BC = 10. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho BM = 7. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

2.6. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn ABC. Chứng minh rằng asinA, bsinB, csinC là ba cạnh của một tam giác nào đó.

§ 2. CÔNG THỨC TRUNG TUYẾN, DIỆN TÍCH TAM GIÁC

2.1. *Công thức trung tuyến*

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4};\quad m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4};\quad m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4},$$

trong đó, m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài ba trung tuyến xuất phát từ A, B, C và a, b, c là độ dài ba cạnh đối tương ứng của ba đỉnh A, B, C trong tam giác ABC.

Ví dụ 2.8.

Cho tam giác ABC không cân tại A. Chứng minh rằng

$$\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow 2a^2 = b^2 + c^2.$$

Giải

Ta có $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow c^2m_c^2 = b^2m_b^2$.

Thay công thức trung tuyến vào, đẳng thức trên tương đương với:

$$c^2\left(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = b^2\left(\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4$$

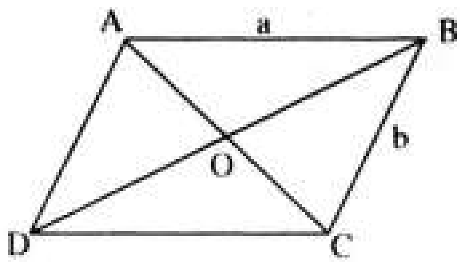
$$\Leftrightarrow 2a^2(c^2 - b^2) = (c^2 - b^2)(c^2 + b^2). \qquad (1)$$

Nhưng vì tam giác ABC không cân tại A nên $b \neq c$, do đó (1) tương đương với $2a^2 = b^2 + c^2$.

Ví dụ 2.9.

a) Giả sử hình bình hành ABCD có các cạnh là AB = a, AD = b. Chứng minh rằng $BD^2 + AC^2 = 2(a^2 + b^2)$ (tổng bình phương hai đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương bốn cạnh của nó).

b) Cho a = 4, b = 5, BD = 7. Tính AO.



Giải

a) Trong tam giác ABC, trung tuyến BO được tính theo công thức:

$$BO^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

Suy ra $4BO^2 = 2(a^2 + b^2) - AC^2$ hay $BD^2 = 2(a^2 + b^2) - AC^2$.

Vì vậy $BD^2 + AC^2 = 2(a^2 + b^2)$.

b) $AO^2 = \dfrac{AB^2 + AD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4} = \dfrac{4^2 + 5^2}{2} - \dfrac{7^2}{4} = 8{,}25.$

Suy ra $AO \approx 2{,}9$ và $AC = 2.AO \approx 5{,}8$.

Ví dụ 2.10.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Giải

Vì G là trọng tâm tam giác nên $GA = \dfrac{2}{3}m_a$. Từ công thức đường trung tuyến suy ra: $GA^2 = \dfrac{4}{9}m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{9}$.

Tương tự, $GB^2 = \dfrac{4}{9}m_b^2 = \dfrac{2(a^2 + c^2) - b^2}{9}$,

$$GC^2 = \frac{4}{9}m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{9}.$$

Cộng các đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh.

2.2. *Công thức tính diện tích tam giác*

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}bc.\sin A$$

$$S = \frac{abc}{4R}; \quad S = p.r$$

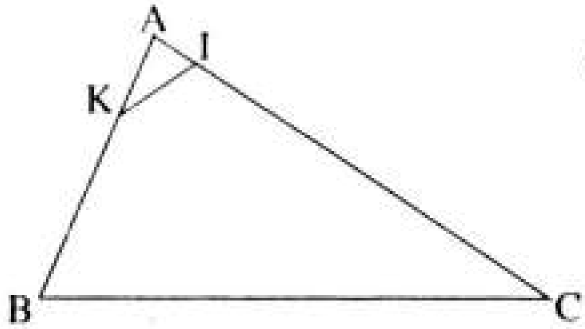
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(p là nửa chu vi, h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C; công thức sau cùng thường được gọi là công thức Hêrông.)

Ví dụ 2.11.

Cho hai tam giác AKI và ABC có góc A chung và A là góc nhọn, với K nằm trên cạnh AB, I nằm trên AC. Chứng minh rằng

$$\frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{AK.AI}{AB.AC}.$$



Giải

Ta có

$$\frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{AK.AI.\sin A}{AB.AC.\sin A} = \frac{AK}{AB}.\frac{AI}{AC}.$$

Ví dụ 2.12.

Cho tam giác ABC có a = 7, b = 8, c = 6. Tính h_a và m_a.

Giải

Ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$= \sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-7\right)\left(\frac{21}{2}-8\right)\left(\frac{21}{2}-6\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{21.7.5.9} = \frac{21\sqrt{15}}{4}.$$

Vì $S = \frac{1}{2}ah_a$, ta có $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$. Từ đó,

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{8^2+6^2}{2} - \frac{7^2}{4} = \frac{151}{4}.$$

Vậy $m_a = \frac{\sqrt{151}}{2}$.

Ví dụ 2.13. (Eotvos[1], 1902)

Cho tam giác ABC có cạnh BC bé nhất đến mức có thể được, miễn là nó phải có diện tích bằng k không đổi và góc $A = \theta$ cho trước. Tính các cạnh AB và AC.

Giải

Đặt AB = c, AC = b, ta có

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\theta = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\theta).$$

Mặt khác, $k = \frac{1}{2}bc.\sin\theta$, do đó: $BC^2 = (b-c)^2 + 4k(1-\cos\theta)/\sin\theta$.

Vì $4k(1-\cos\theta)/\sin\theta$ không đổi nên BC bé nhất khi b = c. Vậy

$$b = c = \sqrt{\frac{2k}{\sin\theta}} \quad (\text{do } k = \frac{1}{2}bc.\sin\theta).$$

Ví dụ 2.14. *(Công thức diện tích theo cạnh và phân giác)*

Tính diện tích một tam giác, biết hai cạnh a, b và độ dài *l* của phân giác góc giữa hai cạnh đó.

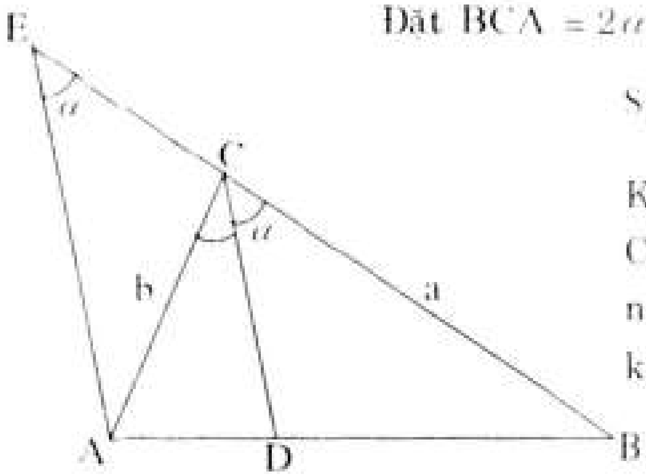
---

[1] *Tên một cuộc thi toán tại Hungary, tính đến nay, đã tồn tại hơn 110 năm.*

Giải

Gọi tam giác đã cho là ABC, cho phân giác CD = l.

Đặt $\widehat{BCA} = 2\alpha$. Ta có



$$S_{ABC} = S_{BCD} + S_{DCA} = \frac{1}{2}(a+b)l.\sin\alpha.$$

Kẻ đường thẳng qua A và song song CD, cắt BC tại E. Tam giác ACE cân nên CE = b và AE = $2b\cos\alpha$. Mặt khác,

$$\frac{CD}{AE} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow AE = \frac{a+b}{a}l.$$

Do đó $\cos\alpha = \dfrac{a+b}{2ab}l$, suy ra $\sin\alpha = \dfrac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2-(a+b)^2l^2}$.

Cuối cùng ta được:

$$S_{ABC} = \frac{(a+b)l}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-(a+b)^2l^2}.$$

Ví dụ 2.15. (Cải biên từ Olympic Châu Á Thái Bình Dương, 1990)

Xét tất cả các tam giác ABC có đáy AB cố định, góc C không tù và độ dài tất cả các đường cao kẻ từ C đều bằng hằng số h. Trong các tam giác này thì tam giác nào có tích độ dài ba đường cao lớn nhất?

Giải

Kí hiệu như thường lệ, ta có c và h_c cho trước, do vậy

$$S = \frac{1}{2}ch_c$$

là hằng số. Suy ra $8S^3 = (ah_a)(bh_b)(ch_c)$ không đổi. Như thế, để tích $h_ah_bh_c$ đạt giá trị lớn nhất, ta cần có tích abc đạt giá trị nhỏ nhất, nghĩa là ab đạt giá trị nhỏ nhất, vì c được cho trước.

Vì S không đổi nên ta có 2S = ab.sinC không đổi. Do đó, ab đạt giá trị nhỏ nhất khi sinC đạt giá trị lớn nhất. Theo giả thiết, góc C không tù (tức là nhọn hoặc vuông), mà trong những góc này thì sin lớn nhất là bằng 1, ứng với góc C vuông.

Vậy tam giác ABC thoả mãn đề bài là tam giácvuông tại C.

BÀI TẬP

2.7. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: Điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$.

2.8. Chứng minh $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

2.9. Cho tam giác ABC. Chứng minh

$$S = \frac{r^3}{4R}\left(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right)\left(\cot g\frac{C}{2} + \cot g\frac{A}{2}\right)\left(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2}\right).$$

2.10. Chứng minh $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

2.11. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có:

$$4S^2 = \overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2.$$

§ 3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG

Giải tam giác là tìm cách xác định các yếu tố còn lại của tam giác (các góc và các cạnh còn lại) theo ba yếu tố đã biết. Trong các yếu tố đã biết, có ít nhất một yếu tố về cạnh.

Ta thường vận dụng định lí cosin, định lí sin để giải tam giác. Các bài toán thường gặp trong chương trình là: Tính được các cạnh, các góc chưa biết của tam giác khi đã biết ba cạnh, hoặc hai cạnh và góc xen giữa, hoặc một cạnh và hai góc kề.

3.1. *Giải tam giác khi đã biết ba cạnh*

Khi biết ba cạnh a, b, c, ta sử dụng định lí sin để tính các góc. Chẳng hạn, để tính góc A, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Góc B cũng được suy ra bằng cách tương tự, hoặc sau khi đã tính được góc A, có thể dùng công thức nhận được từ định lí sin:

$$a\sin B = b\sin A \Rightarrow \sin B = \frac{b\sin A}{a}.$$

Ví dụ 2.16.

Giải tam giác ABC biết: a = 14, b = 18, c = 20.

Giải

Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2.18.20} \approx 0,7$

Suy ra góc $A \approx 46^0$. Tương tự ta tính được góc $B \approx 61^0$.
Từ đó, góc $C \approx 180^0 - 46^0 - 61^0 = 70^0$.
Hoặc có thể tính góc B như sau:

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} \approx \frac{18\sin 46^0}{14} \approx 0{,}9. \text{ Suy ra } B \approx 61^0.$$

3.2. *Giải tam giác khi đã biết hai cạnh (b, c) và góc (A) xen giữa chúng*

Dùng định lí cosin để tính cạnh a: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$.
Để tính góc B, có thể sử dụng:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ hoặc } \sin B = \frac{b\sin A}{a}.$$

Ví dụ 2.17.
Giải tam giác ABC biết: $c = 15$, $b = 11$, góc $A = 45^0$.

Giải

Ta có $BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 11^2 + 15^2 - 2.11.15.\cos 45^0$.
Suy ra $a^2 \approx 112{,}7$. Vậy $a \approx 10{,}6$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ suy ra } \sin B = \frac{b.\sin A}{a} = \frac{11.\sin 45}{10{,}6} \approx 0{,}7337.$$

Vậy $B \approx 47^0 12'$, $C \approx 180^0 - (45^0 + 47^0 12') = 87^0 48'$.

3.3. *Giải tam giác khi đã biết một cạnh và hai góc*

Khi biết một cạnh và hai góc, ta dùng định lí sin để tính hai cạnh còn lại.

Ví dụ 2.18.
Giải tam giác ABC biết góc $A = 60^0$, góc $B = 45^0$ và $b = 4$.

Giải

Ta có góc $C = 75^0$ và $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, suy ra

$$a = \frac{b.\sin A}{\sin B} = \frac{4.\sin 60^0}{\sin 45^0} \approx 4{,}9.$$

$$c = \frac{b.\sin C}{\sin B} = \frac{4.\sin 105^0}{\sin 45^0} \approx 5{,}5.$$

3.4. *Giải tam giác khi đã biết hai cạnh (b, c) và góc (B) không xen giữa*

Khi biết hai cạnh và một góc không xen giữa, ta dùng định lí sin để tính một trong hai góc kia, và cũng dùng định lí sin để tính cạnh còn lại (hoặc dùng định lí cosin sau khi đã tính góc).

Ví dụ 2.19.

Giải tam giác ABC biết góc B = 60^0, c = $\sqrt{2}$, b = $\sqrt{3}$.

Giải

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{\sqrt{2}\sin 60^0}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc C = 45^0. Suy ra góc A = 75^0. Ta lại có

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}\sin 75^0}{\sin 60^0} = 2\sin 75^0 \approx 1,93.$$

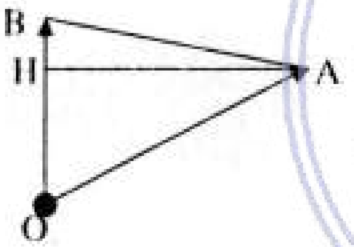
3.5. *Giải tam giác trong một số bài toán thực tế*

Ví dụ 2.20.

Giả sử một chiếc đồng hồ có kim giờ dài 4cm và kim phút dài 6cm. Hỏi vào lúc 2 giờ đúng, khoảng cách giữa hai đầu kim là bao nhiêu ?

Giải

Vào lúc 2 giờ đúng, góc giữa hai đầu kim là 60^0. Kí hiệu kim giờ là OB, kim phút là OA, hạ AH $\perp$ OB.



Như thế, OAH là nửa tam giác đều và ta có OH = 3cm,

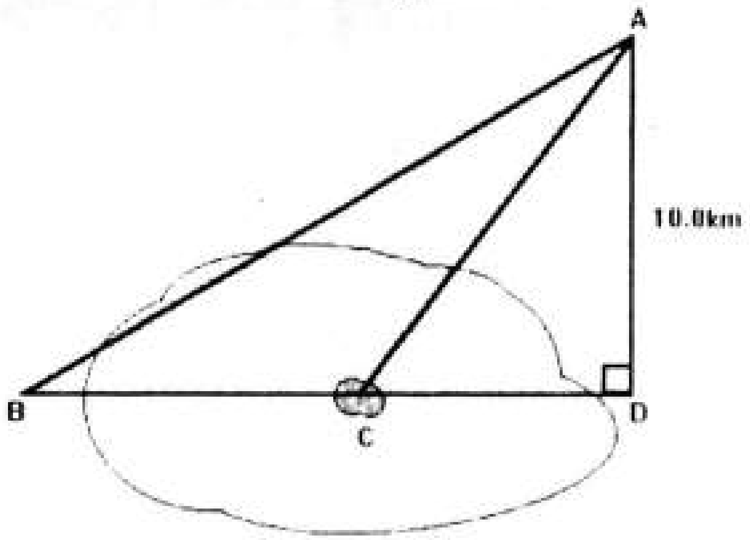
AH = $3\sqrt{3}$ cm, BH = 1cm.

Vậy suy ra

AB = $\sqrt{27+1} = 2\sqrt{7}$ (cm).

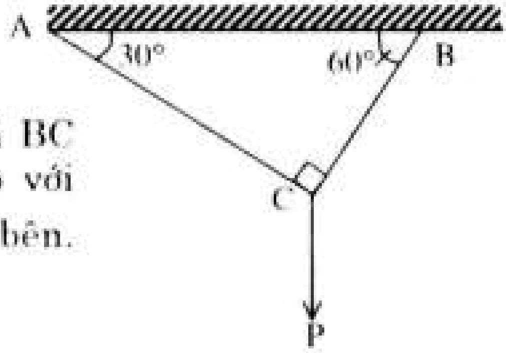
Ví dụ 2.21.

Ở hình sau, một căn nhà nằm tại vị trí điểm C của một hòn đảo. Một căn nhà khác nằm tại điểm B. Giả sử khoảng cách từ A đến D là 10 km và $\widehat{ABC} = \widehat{CAB} = 28^0$. Tìm khoảng cách BC.



Hướng dẫn: BC = 12,06 km. Để ý, tam giác BCA cân tại C với $\widehat{BCA} = 124°$. Từ đó, $\widehat{ACD} = 56°$.

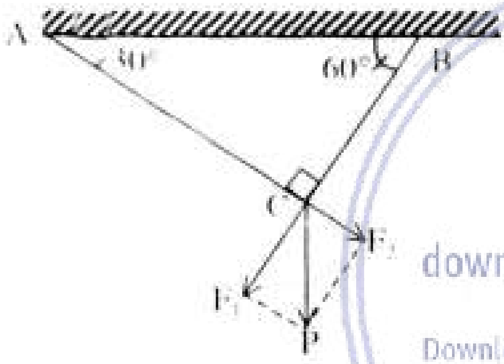
Ví dụ 2.22.



Một vật có trọng lượng P = 100N được treo bằng hai thanh AC và BC vuông góc nhau tại C, hai thanh này tạo với trần nhà các góc 30° và 60° như hình bên. Tính lực tác dụng lên mỗi thanh này.

Giải

Trọng lực $\vec{P}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ tác dụng dọc theo các thanh BC và AC.



Vì $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, nên $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra:

$$\widehat{PCF_2} = \hat{B} = 60^\circ \text{ và } \widehat{PCF_1} = 30^\circ$$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Vậy

$$|\vec{F_1}| = |\vec{P}|\cos 30^\circ = 100.\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \quad (N),$$

$$|\vec{F_2}| = |\vec{P}|\cos 60^\circ = 100.\frac{1}{2} = 50 \quad (N).$$

BÀI TẬP

2.12. Giải tam giác ABC biết:

a) a = 6, b = 7,3, c = 4,8 b) a = 4, b = 5, c = 7.

2.13. Giải tam giác ABC biết:

a) b = 32, c = 45, $A = 87^\circ$ b) a = 7, b = 23, $C = 130^\circ$.

2.14. Tính đường cao kẻ từ C của tam giác ABC, biết

$$\widehat{BCA} = 110^\circ,\ \widehat{CAB} = 35^\circ,\ BC = 4 \text{ cm}.$$

2.15. Giải tam giác ABC biết:

a) b = 4,5 $A = 30^\circ$ $C = 75^\circ$

b) a = 137,5 $B = 83^\circ$ $C = 57^\circ$

2.16. Từ đỉnh C của một ngọn đồi, người ta dựng một cái tháp thẳng đứng có đỉnh B, cao 100m. Một người quan sát đứng ở mặt đất, nhìn thấy BC dưới một góc nhìn là 30°. Cho biết góc nhọn mà AB hợp với mặt đất là 60°. Xác định chiều cao h của ngọn đồi.

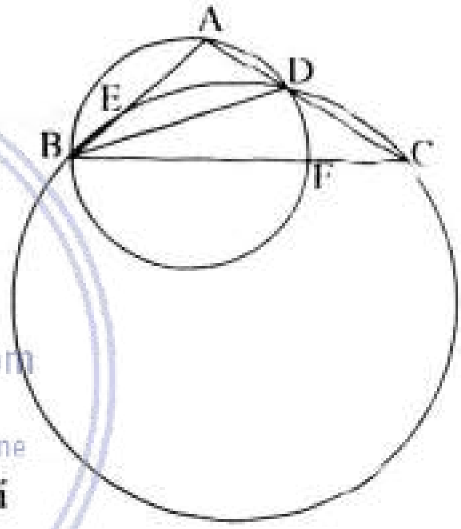
§ 4. PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

4.1. *Nhắc lại kết quả đã biết ở lớp 9*

Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm M cố định. Một đường thẳng (d) đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Một đường thẳng (d') đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm C và D. Ta có: MA.MB = MC.MD. Đẳng thức này chứng tỏ tích hai đoạn MA.MB không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng (d), chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Ví dụ 2.23. *(Olympic Toán học thành phố St. Petersburg, 1996)*

Gọi BD là phân giác góc B trong tam giác ABC, D nằm trên AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDC cắt AB tại E, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt BC tại F. Chứng minh rằng AE = CF.



Giải

Ta có AE × AB = AD × AC

và CF × CB = CD × CA, suy ra

AE / CF = (AD / CD)(BC / AB).

Ngoài ra, AB / CB = AD / CD theo định lí về đường phân giác. Vậy AE = CF.

4.2. *Phương tích của một điểm đối với một đường tròn*

Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm M cố định, MO = d. Một đường thẳng di động (m) đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Khi đó, tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ là một số không đổi, và $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$.

Chứng minh. Gọi N là trung điểm AB, khi đó:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB})$$
$$= (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA})(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NA})$$
$$= MN^2 - NA^2 = (MO^2 - ON^2) - (R^2 - ON^2) = d^2 - R^2.$$

Tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ được gọi là *phương tích của điểm M đối với đường tròn* (O), kí hiệu $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$.

* Như vậy, để tính phương tích $\mathscr{P}_{M/(O)}$, ta cần nhớ:

a) Nếu có cát tuyến MAB thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

b) Nếu biết MO = d và bán kính đường tròn là R thì

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = d^2 - R^2.$$

c) Nếu M ở ngoài đường tròn, biết độ dài tiếp tuyến MT thì

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2.$$

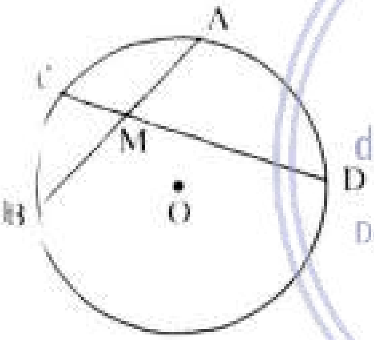
d) Ta quy ước: $\mathscr{P}_{M/(O)} = 0$ khi và chỉ khi M nằm trên (O).

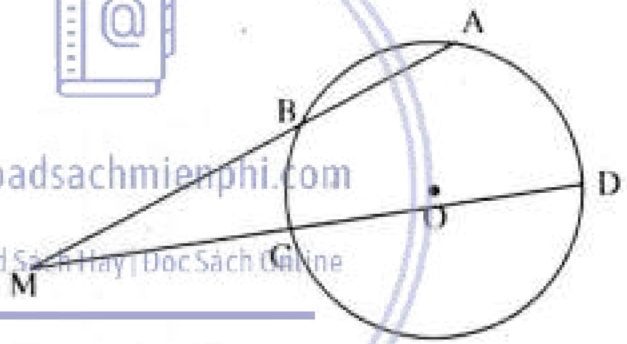
e) Nếu M ở ngoài đường tròn (d > R), phương tích là một số dương: $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB$.

e) Nếu M ở trong đường tròn (d < R), phương tích là một số âm: $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB$.

4.3. *Điều kiện bốn điểm cùng thuộc một đường tròn*

Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại một điểm M. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.





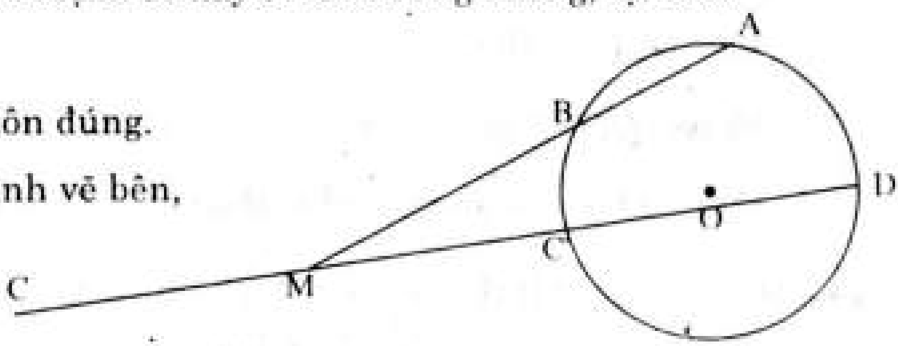
Ví dụ 2.24.

Xét mệnh đề sau: Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại một điểm M. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn nếu và chỉ nếu MA.MB = MC.MD. Mệnh đề này có luôn đúng không, tại sao?

Giải

Không luôn luôn đúng.

Ví dụ: Trên hình vẽ bên, giả sử MC = MC'.



Rõ ràng hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M và ta có:

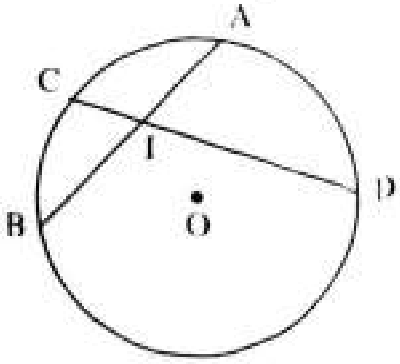
$$MA.MB = MC'.MD = MC.MD.$$

Nhưng A, B, C, D không cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 2.25.

Trong đường tròn (O) cho hai dây cung AB và CD cắt nhau ở I sao cho AI = 12, IB = 16, CD = 32. Tính CI và ID.

Giải.



Ta có: IA.IB = IC.ID, (1)

CD = CI + ID ⇒ CI = 32 - ID.

Thay vào (1) ta được:

$ID^2 - 32ID + 192 = 0$

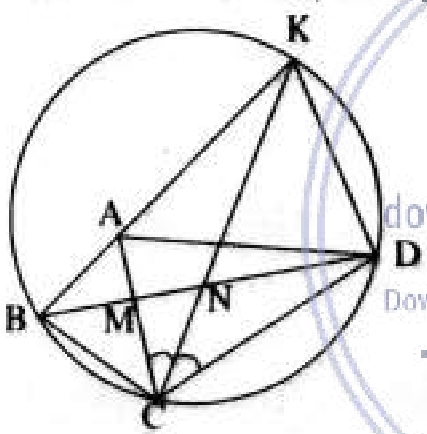
⇒ ID = 24 hoặc ID = 8.

Vậy CI = 8 , ID = 24 hoặc

CI = 24 , ID = 8.

Ví dụ 2.26. (Thi vô địch Quốc gia Belarus, vòng 4, 2000)

Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác lồi ABCD. Đường phân giác của góc ACD cắt tia BA tại K. Giả sử MA.MC + MA.CD = MB.BD, chứng minh rằng $\widehat{BKC} = \widehat{CBD}$.



Giải

Gọi N là giao điểm của CK và BD. Áp dụng định lí về đường phân giác vào tam giác MCD ta có:

$$\frac{CD}{DN} = \frac{MC}{MN} \Leftrightarrow CD = \frac{MC.DN}{MN}.$$

Khi đó, ta được:

$$MB.MD = MA.MC + MA.\frac{MC.DN}{MN} = MA.MC.\frac{MD}{MN},$$

hay MA.MC = MB.MN. Do M nằm bên trong tứ giác lồi ABCN, từ đó suy ra K, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Vậy $\widehat{BKC} = \widehat{CBD}$.

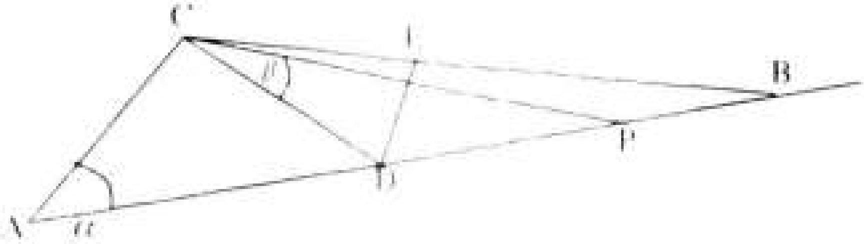
Ví dụ 2.27. (Tạp chí Komal, Hungary, B.3385, 2000)

Các cạnh của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện: $BC = AC + \frac{1}{2}AB$.

Điểm P chia cạnh AB theo tỉ số 3: 1. Chứng minh rằng: $\widehat{PAC} = 2\widehat{CPA}$.

Giải

Kí hiệu *a*, *b*, *c* tương ứng là ba cạnh đối của các đỉnh A, B, C trong tam giác ABC. Gọi (k) là đường tròn tâm C bán kính *b*. Gọi D, E lần lượt là giao điểm của (k) với AB, CB.



Khi đó: $\mathscr{P}_{M/(k)}$ = BE.(BE + 2b) = c/2(c/2 + 2b) = BD.BA = BD.c.

Suy ra BD = b + c/4, do đó PD = BD − c/4 = b và DC = b.

Vậy PD = DC, hay tam giác PDC cân.

Suy ra $\alpha = 2\beta$ (xem hình), hay $\widehat{PAC} = 2\widehat{CPA}$.

Ví dụ 2.28. *(Olympic Toán học Quốc tế, 1985)*

Cho tam giác ABC. Một đường tròn tâm O đi qua các điểm A và C và lại cắt các đoạn AB và BC theo thứ tự tại hai điểm phân biệt K và N. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và KBN cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt B và M.

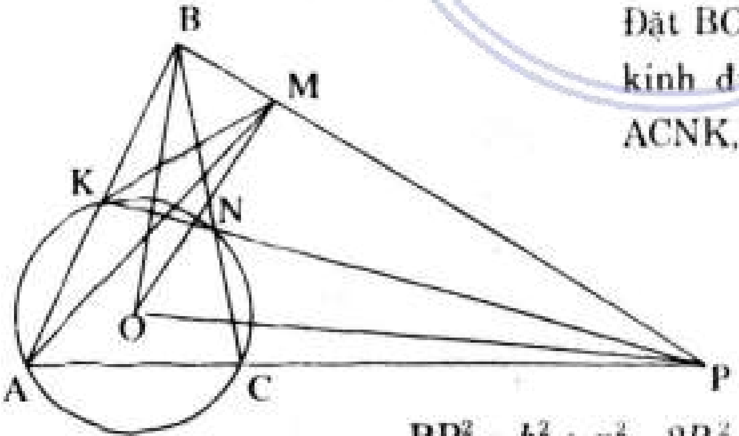
Chứng minh góc OMB vuông.

Giải

Gọi P là giao điểm các đường thẳng AC và KN. Do $\widehat{KMA} = \widehat{BMA} - \widehat{BMK} = \widehat{BCA} - \widehat{BNK} = \widehat{KPA}$, nên bốn điểm M, P, A, K nằm trên một đường tròn. Ngoài ra:

$$\widehat{AMP} = \widehat{AKP} = 180^0 - \widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{AMB}$$

(tứ giác ACNK nội tiếp). Vậy điểm M nằm trên đoạn BP.



Đặt BO = b, PO = p và gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ACNK, ta có:

$BM.BP = BK.BA = b^2 - R^2$;

$PM.PB = PK.PN = p^2 - R^2$.

Cộng từng vế hai đẳng thức này ta được:

$BP^2 = b^2 + p^2 - 2R^2$, khi đó

$$BM^2 - PM^2 = \left(\frac{b^2 - R^2}{BP}\right)^2 - \left(\frac{p^2 - R^2}{BP}\right)^2$$

$$= \frac{(b^2 + p^2 - 2R^2)(b^2 - p^2)}{BP^2} = b^2 - p^2 = BO^2 - PO^2.$$

Từ đó OM ⊥ BP.

Chú ý: *OM ⊥ BP do kết quả sau*: Cho tam giác ABC, H là điểm nằm trên cạnh BC. Khi đó, AH là đường cao nếu và chỉ nếu

$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2.$$

Chứng minh. Nếu AH là đường cao, từ định lí Pythagore:

$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2. \qquad (*)$$

Ngược lại, nếu có (*), ta gọi M là điểm trên BC sao cho AM là đường cao. Khi đó, theo chứng minh trên,

$$AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2.$$

Từ đó ta được $HB^2 - HC^2 = MB^2 - MC^2$, hay

$$(HB + HC)(HB - HC) = (MB + MC)(MB - MC)$$
$$\Leftrightarrow BC(HB - HC) = BC(MB - MC)$$
$$\Leftrightarrow (HB - HC) = (MB - MC).$$

Vậy M trùng H, suy ra điều phải chứng minh.

BÀI TẬP

2.17. Cho đường tròn tâm O bán kính R và k là một số thực. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\mathscr{P}_{M/(O)} = k$.

2.18. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm A cố định không nằm trên đường tròn. Gọi BC là một đường kính thay đổi của (O ; R). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định khác điểm A.

2.19. Cho hai tứ giác nội tiếp ABCD và CDEF. Nếu ba đường thẳng AB, CD, FE đồng quy thì tứ giác ABFE cũng nội tiếp.

2.20. Cho tam giác ABC có AB = 13, BC = 14, CA = 15 và có đường cao AH.

a) Tính diện tích S của tam giác ABC.

b) Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Tính AH.

d) Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

e) Tính $\mathscr{P}_{H/(M)}$, trong đó (M) là đường tròn đường kính BC.

2.21. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Đặt AB = c, AC = b. Gọi (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn có đường kính lần lượt là AB, AC, và BC.

Tính $\mathscr{P}_{H/(O_1)}$, $\mathscr{P}_{H/(O_2)}$ và $\mathscr{P}_{H/(O_3)}$ theo b và c.

2.22. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm P nằm bên trong đường tròn. Cho hai dây cung thay đổi AB và CD luôn luôn đi qua P và vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = 4(R^2 - \mathscr{P}_{P/(O)})$.

b) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của các điểm P, A, B, C, D (miễn là AB và CD luôn luôn đi qua P và vuông góc với nhau).

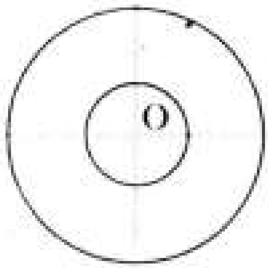
2.23. Cho (d) là đường trung trực của đoạn AB và điểm M di động trên (d). Lấy điểm N trên tia AM sao cho $AM.AN = \frac{1}{2}AB^2$. Tìm quỹ tích điểm N.

§ 5. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

5.1. *Trục đẳng phương của hai đường tròn*

Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm, ta gọi đường thẳng này là *trục đẳng phương* của hai đường tròn đó.

5.2. *Cách dựng trục đẳng phương*

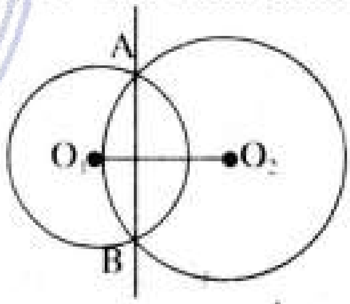


* Nếu hai đường tròn đồng tâm, có bán kính khác nhau thì với mọi điểm M,

$$OM^2 - R^2 \neq OM^2 - r^2,$$

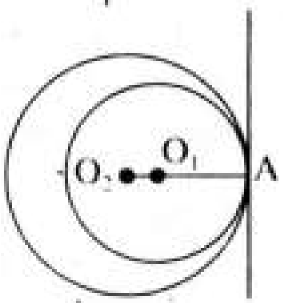
do đó tập hợp các điểm M có cùng phương tích với hai đường tròn là tập rỗng.

Điều này có nghĩa hai đường tròn đồng tâm, có bán kính khác nhau thì không có trục đẳng phương.

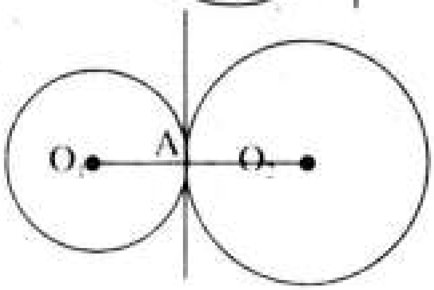


* Nếu hai đường tròn giao nhau tại hai điểm, trục đẳng phương của hai đường tròn này chính là đường thẳng nối hai giao điểm đó, đường này vuông góc với đường thẳng nối hai tâm.

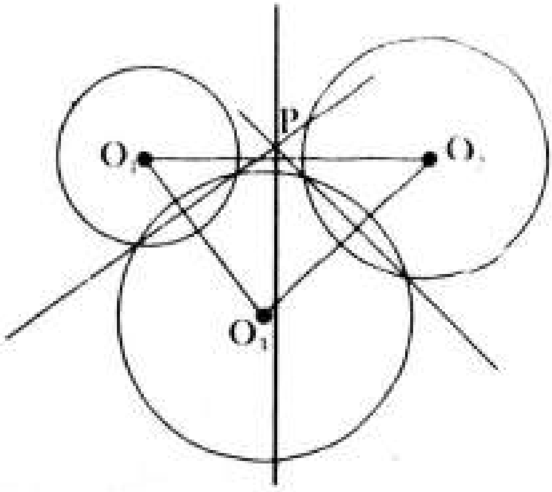
(Do A, B thuộc hai đường tròn nên phương tích của hai điểm A và B đối với hai đường tròn đều bằng 0).



* Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau (tại A), trục đẳng phương của chúng là đường thẳng đi qua tiếp điểm và vuông góc với đường thẳng nối hai tâm, đó chính là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại điểm A. (Do A thuộc hai đường tròn nên phương tích của A đối với hai đường tròn cũng bằng 0).



* Nếu hai đường tròn (O_1) và (O_2) không giao nhau, ta có thể xác định trục đẳng phương của chúng bằng cách vẽ một đường tròn thứ ba là (O_3) giao với cả hai đường tròn đó. Gọi P là giao điểm của trục đẳng phương (O_1) và (O_3) với trục đẳng phương (O_2) và (O_3).



Khi đó, trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) là đường thẳng qua P và vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của (O_1) và (O_2).

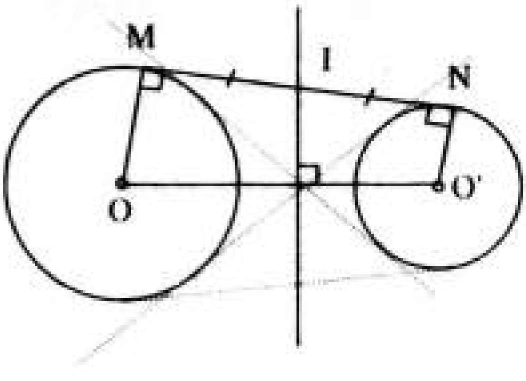
Chứng minh. Rõ ràng $\mathscr{P}_{P/(O_1)} = \mathscr{P}_{P/(O_3)} = \mathscr{P}_{P/(O_2)}$. Suy ra P nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (O_2), do đó trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) là đường thẳng qua P và vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của (O_1) và (O_2).

5.3. *Tâm đẳng phương*

Trong trường hợp có 3 đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) có các tâm tương ứng là O_1, O_2 và O_3 không thẳng hàng, ta cũng dễ thấy 3 trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn đồng quy tại một điểm (như hình trên, đó chính là điểm P). Ta gọi điểm này là *tâm đẳng phương* của 3 đường tròn.

Ví dụ 2.29.

Cho hai đường tròn ngoài nhau. Chứng minh rằng 4 trung điểm của 4 đoạn tiếp tuyến chung (tức là đoạn thẳng nối hai tiếp điểm của cùng một tiếp tuyến) nằm trên cùng một đường thẳng.



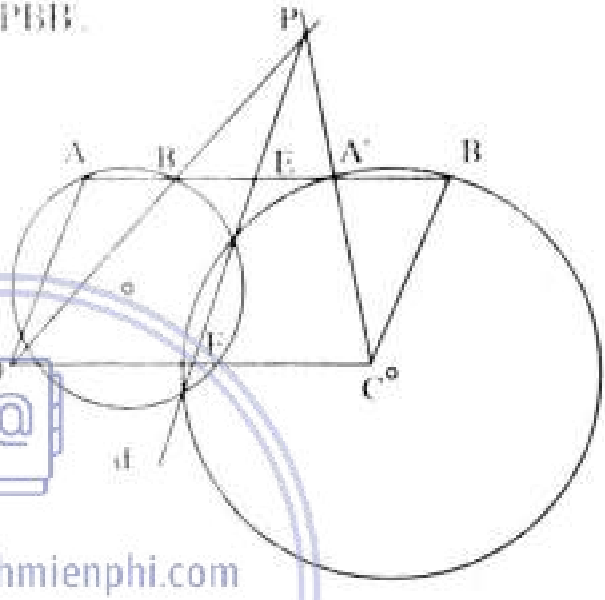
Giải

Gọi I là trung điểm của tiếp tuyến chung ngoài MN. Ta có IM = IN hay $IM^2 = IN^2$, tức là $\mathscr{P}_{I/(O)} = \mathscr{P}_{I/(O')}$. Vậy điểm I nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn.

Chứng minh tương tự cho ba trung điểm còn lại, chúng đều nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn ngoài nhau.

Ví dụ 2.30.

Cho hình bình hành ABCD, lấy hai điểm tùy ý A' và B' trên cạnh AB. Các đường thẳng CA' và DB' cắt nhau ở P. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua P và song song với BC là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác PAA' và tam giác PBB'.

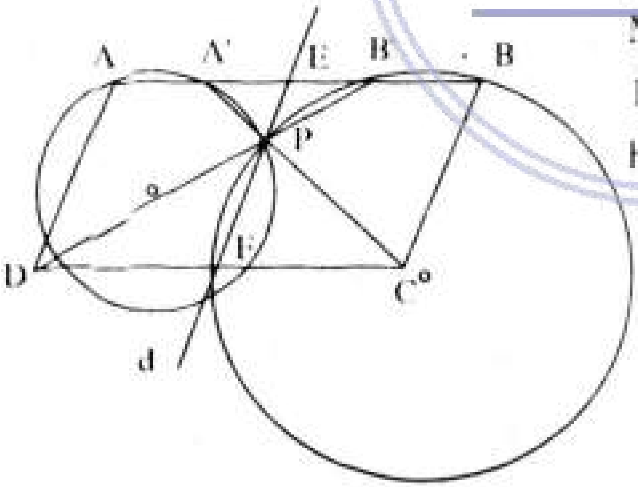


Giải

Ta kí hiệu các đường tròn ngoại tiếp tam giác PAA' và PBB' là (O) và (O'). Đường thẳng qua P song song với BC cắt các đường thẳng AB, CD tại E, F. Theo định lí Ta-let ta có:

$$\frac{EA'}{FC} = \frac{EB'}{FD},$$

suy ra EA'.FD = EB'.FC, hay EA.EA' = EB.EB'.



Mặt khác, ta luôn có $\overline{EA}.\overline{EA'}$ và $\overline{EB}.\overline{EB'}$ cùng dấu dù P nằm trong hay ngoài các đoạn CA', DB'. Từ đó ta có

$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EA'} = \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EB'}$, hay

$\mathscr{P}_{E/(O)} = \mathscr{P}_{E/(O')}$.

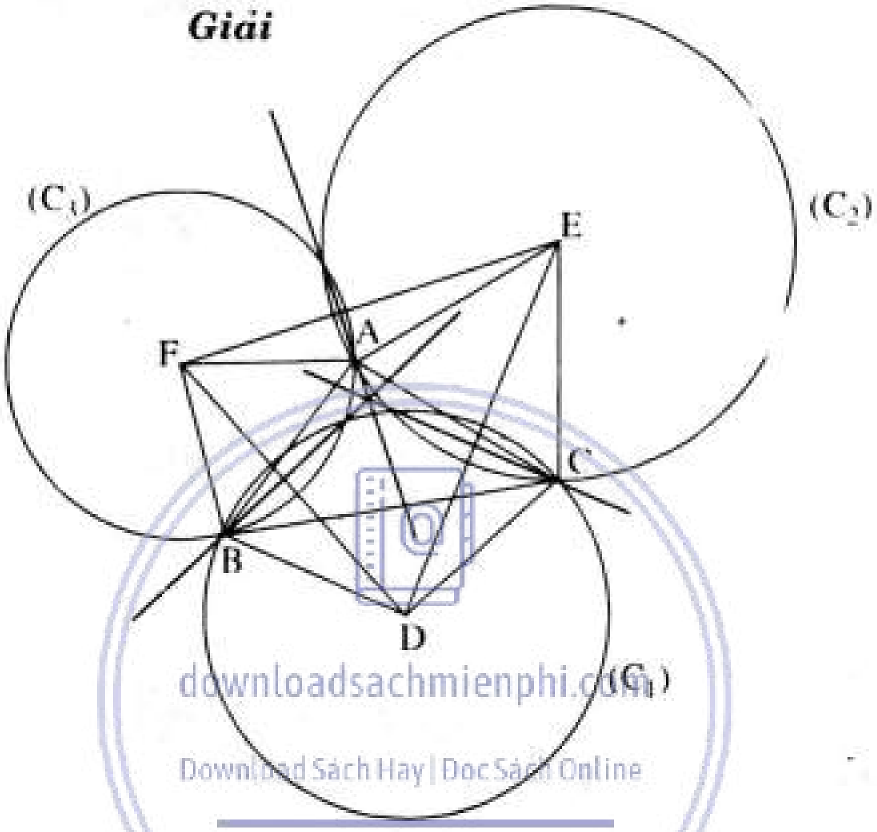
Vậy E thuộc trục đẳng phương của (O) và (O').

Mặt khác: P thuộc hai đường tròn trên, nên P thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O'). Vậy PE là trục đẳng phương của (O) và (O').

Ví dụ 2.31. (Olympic Toaon hoyc Mô, 1997)

Cho tam giác ABC, bên ngoài tam giác này, vẽ các tam giác cân BCD, CAE, ABF có các cạnh đáy tương ứng là BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng vuông góc kẻ từ A, B, C tương ứng xuống EF, FD, DE đồng quy.

Giải



Gọi (C_1) là đường tròn tâm D bán kính BD, (C_2) là đường tròn tâm E bán kính CE và (C_3) là đường tròn tâm F bán kính AF. Đường thẳng qua A vuông góc với EF là trục đẳng phương của (C_2) và (C_3); đường thẳng qua B vuông góc với FD là trục đẳng phương của (C_3) và (C_1); đường thẳng qua C vuông góc với DE là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2). Ba đường thẳng này đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn, suy ra điều phải chứng minh.

BÀI TẬP

2.24. Cho điểm P ngoài đường tròn (O), một đường thẳng thay đổi qua P cắt (O) tại hai điểm A và B. Các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau ở M. Kẻ MH vuông góc với PO.

a) Chứng minh rằng năm điểm O, A, B, M, H nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng H là điểm cố định khi đường thẳng PAB thay đổi, từ đó suy ra quỹ tích của điểm M.

c) Gọi I là trung điểm của AB và N là giao điểm của MH với AB. Chứng minh rằng PA.PB = PI.PN.

d) Chứng minh: IP.IN = IA^2.

2.25. Cho tam giác ABC. Gọi AH là đường cao, kẻ HE $\perp$ AB và HF $\perp$ AC. Cho EF cắt BC tại điểm I.

a) Chứng minh tứ giác BCFE nội tiếp.

b) Gọi đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC và (O') là đường tròn đường kính AH. Chứng minh I là giao điểm hai trục đẳng phương của hai đường tròn này.

c) Giả sử (O) và (O') cắt nhau tại A và D. Chứng minh rằng I, D, A thẳng hàng.

2.26. Cho A, B, C và D là bốn điểm phân biệt trên một đường thẳng và được sắp theo thứ tự đó.

Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại các điểm X và Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại B và N.

a) Xét trường hợp $P \neq X$, $P \neq Y$.

a_1) Xét vị trí của hai đường thẳng XY và AD.

a_2) Chứng minh $\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PN}.\overline{PB}$.

a_3) Giả sử $AM \cap XY = \{K\}$. Chứng minh $\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PK}.\overline{PZ}$.

a_4) Giả sử $DN \cap XY = \{K'\}$. Chứng minh $\overline{PN}.\overline{PB} = \overline{PK'}.\overline{PZ}$.

a_5) Chứng minh rằng các đường thẳng AM, DN và XY đồng quy.

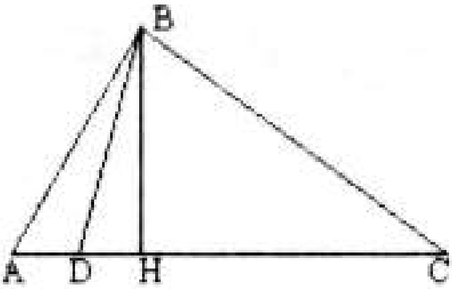
b) Xét trường hợp P trùng X hoặc P trùng Y. Kết luận (a_5) còn đúng hay không?

B MỘT SỐ KIẾN THỨC VÀ VÍ DỤ MỞ RỘNG

1. Định lí Stewart[1] (Sti-oa-tơ) - mở rộng của công thức trung tuyến

Gọi D là điểm nằm trên cạnh AC của tam giác ABC. Khi đó ta có $AB^2.DC + BC^2.AD - BD^2.AC = AC.DC.AD$.

Chứng minh



Để thuận tiện, ta giả sử H (chân đường cao BH) nằm giữa D và C, trường hợp ngược lại được tiến hành tương tự. Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác BCD và ABD ta có:

$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2.DC.DH,$

$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2.AD.DH.$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra

$$BC^2.AD + AB^2.DC = BD^2(AD + DC) + DC^2.AD + AD^2.DC$$
$$= BD^2.AC + AD.DC.AC.$$

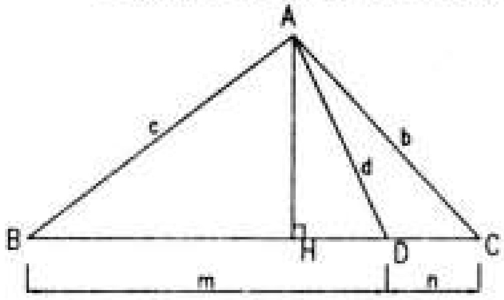
Chú ý. Khi D trùng một trong hai đỉnh, đẳng thức trên vẫn đúng, lúc đó, hoặc $AD = 0$, hoặc $DC = 0$.

Khi D trùng với M, với BM là trung tuyến của tam giác ABC, ta có $MA = MC = AC/2$ và đẳng thức trên trở thành

$$AB^2.MC + BC^2.AM - BM^2.AC = AC.MC.AM$$
$$\Leftrightarrow AB^2.MA + BC^2.AM - AC.MA.AM = BM^2.AC$$
$$\Leftrightarrow \frac{AC}{2}(AB^2 + BC^2 - AC.\frac{AC}{2}) = BM^2.AC$$
$$\Leftrightarrow 2BM^2 = (AB^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}),$$

đây chính là công thức trung tuyến đã biết (2.1, trang 49).

Định lí Stewart, cách phát biểu khác



Nếu đường thẳng $AD = d$ thuộc tam giác ABC chia cạnh BC thành những đoạn $BD = m$ và $CD = n$ thì

$$d^2a = b^2m + c^2n - amn. \qquad (*)$$

[1] *Matthew Stewart (1717 - 1785), nhà toán học Scotland*

Chứng minh

Giống như cách chứng minh trên.

Từ các tam giác BDA và ADC ta có:

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2mDH,\ b^2 = d^2 + n^2 + 2nDH.$$

Nhân đẳng thức thứ nhất với n và đẳng thức thứ hai với m rồi cộng lại, ta được $c^2n + b^2m = d^2(m+n) + mn(m+n)$ hay

$$d^2a = b^2m + c^2n - amn.$$

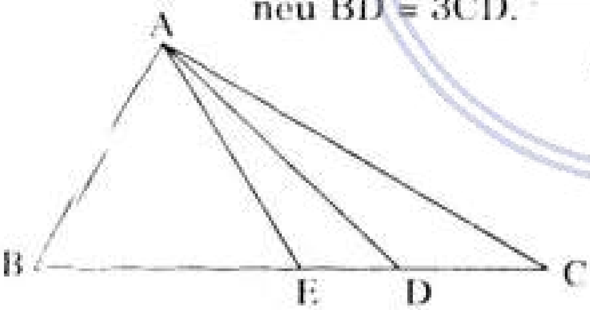
Chú ý. Khi D trùng M, ta có $d = AM = m_a$ là trung tuyến của tam giác ABC, ta có $m = n = a/2$ và đẳng thức trên trở thành công thức đường trung tuyến dưới dạng

$$m_a^2a = \frac{a}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a^3}{4} \Leftrightarrow m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Công thức này đôi khi được gọi là *Định lí Apolonius cho đường trung tuyến.*

Ví dụ 2.32.

Cho tam giác ABC có $BC = 2.AC - 2.AB$ và D là điểm nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng $\widehat{ABD} = 2\widehat{ADB}$ nếu và chỉ nếu $BD = 3CD$.



Giải

* Giả sử $BD = 3CD$. Đặt $AC = 2b$, $AB = 2c$, ta có $BC = 4(b - c)$, $BD = 3(b - c)$ và $CD = b - c$.

Nếu $AD = d$ thì áp dụng định lí Stewart ta nhận được:

$$d^2 = 2c(3b - c).$$

Áp dụng định lí hàm sin cho các tam giác ABC và ABD ta có

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{3b - 5c}{4c} \text{ và } \cos\widehat{ADB} = \frac{3b - c}{2\sqrt{2c(3b - c)}}.$$

Khi đó,

$$\cos 2\widehat{ADB} = \frac{3b - 5c}{4c}.$$

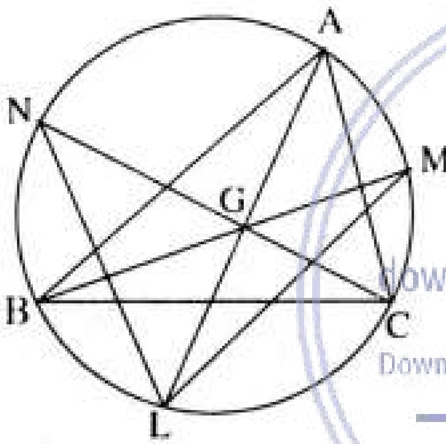
Suy ra, hoặc là $2\widehat{ADB} = \widehat{ABC}$, hoặc là $\widehat{ABC} + 2\widehat{ADB} = 360^0$. Trong trường hợp sau, ta có $\widehat{ABC} + \widehat{ADB} = 360^0 - \widehat{ADB} > 180^0$, điều này không đúng. Vậy $\widehat{ABC} = 2\widehat{ADB}$.

* Đảo lại, giả sử $2\widehat{ADB} = \widehat{ABC}$. Gọi D_1 là điểm nằm trên BC sao cho $BD_1 = 3CD_1$, thế thì $2\widehat{AD_1B} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ADB}$, do đó D trùng D_1. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.33. (Thi vô địch Toán Quốc gia Iran, 1996)

Cho ABC là một tam giác không cân. Các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại các điểm thứ hai L, M, N. Giả sử LM = LN, hãy chứng minh

$$2BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



Giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khi đó, các tam giác NLG và ACG đồng dạng nên $LN/AC = LG/CG$. Tương tự, ta cũng có

$$LM/AB = GL/BG.$$

Do vậy, nếu LM = LN thì $AB/AC = BG/CG$. Sử dụng định lí Stewart để tính độ dài các trung tuyến ta được:

$$AB^2/AC^2 = (2AB^2 + 2BC^2 - AC^2)/(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2),$$

hay, rút gọn thành $(AC^2 - AB^2)(2BC^2 - AB^2 - AC^2) = 0$. Mà tam giác ABC không cân nên ta có $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ví dụ 2.34.

Cho ABC là một tam giác sao cho $\widehat{ACB} = 2\widehat{ABC}$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC sao cho CD = 2BD. Kéo dài đoạn AD và lấy E sao cho AD = DE. Chứng minh rằng $\widehat{ECB} + 180^0 = 2\widehat{EBC}$.

Giải

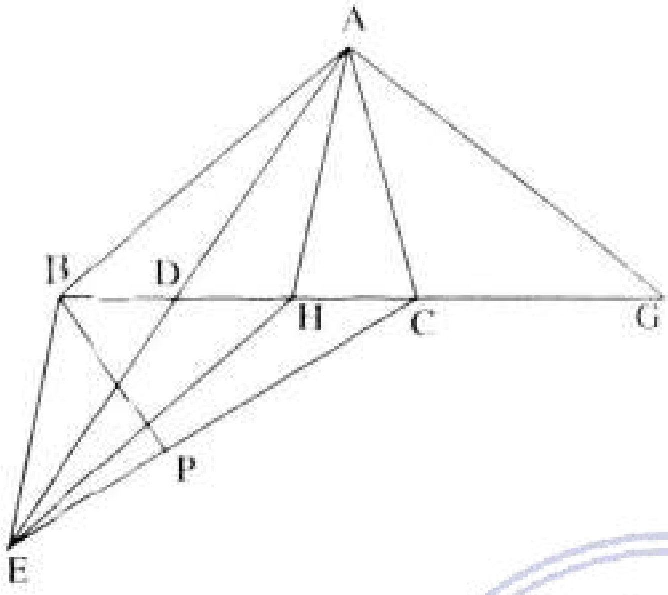
Gọi H là trung điểm của CD, dễ thấy ABEH là hình bình hành. Trên BC kéo dài, lấy điểm G sao cho CG = CA. Đặt

$$BD = DH = HC = a/3,\ CA = b,\ AB = c,$$

$$BE = AH = x,\ AD = DE = y \text{ và } CE = z.$$

Vì $2\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{CAG} + \widehat{CGA} = 2\widehat{CGA}$, ta có các tam giác ABG và CAG đồng dạng. Vậy AB/BG = CA/AG, hay

$$c^2 = b(a + b). \quad (1)$$



Áp dụng công thức trung tuyến vào các tam giác ACD, ABH và CDE, ta được

$$b^2 + y^2 = 2x^2 + \frac{2a^2}{9}, \quad (2)$$

$$x^2 + c^2 = 2y^2 + \frac{2a^2}{9}, \quad (3)$$

$$y^2 + z^2 = 2c^2 + \frac{2a^2}{9}. \quad (4)$$

Khử y từ (2) và (3) ta có $x^2 + c^2 + 2b^2 = 4x^2 + \frac{2a^2}{3}$.

Kết hợp với (1), ta có

$$x^2 = (b + \frac{2a}{3})(b - \frac{a}{3}). \quad (5)$$

Khử y từ (3) và (4) ta nhận được:

$$x^2 + c^2 + 2z^2 = 4c^2 + \frac{2a^2}{3}.$$

Kết hợp kết quả này với (1) và (5), ta có $z = b + 2a/3$. Từ đây và (5), ta suy ra $x^2 = z(z - a)$ hay $BE^2 = CE(CE - BC) = CE.EP$, trong đó P là điểm trên CE sao cho CP = BC. Như thế, BE/CE = EP/BE. Vậy các tam giác BEP và CEB đồng dạng, vì $\widehat{BEP} = \widehat{CEB}$. Suy ra

$$\widehat{ECB} = \widehat{EBP} = \widehat{EBC} - \frac{1}{2}(180^0 - \widehat{ECB}).$$

Cuối cùng, ta được $\widehat{ECB} + 180^0 = 2\widehat{EBC}$.

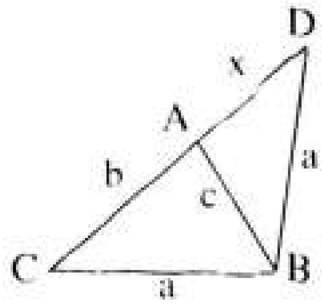
Ví dụ 2.35. (Thi vế ẩồch Toaon Quéuc gia Thuỷy aiêún, 2001)

Trong tam giác ABC, kí hiệu A, B, C là số đo ba góc và a, b, c là các cạnh đối tương ứng, giả sử $b = \frac{1}{2}(a + c)$, chứng minh

$$\cos(A - C) + 4\cos B = 3.$$

Giải

Nếu $a = c$ thì $a = b = c$, do đó $\cos(A - C) = 1$, $\cos B = \dfrac{1}{2}$ và kết quả cần chứng minh là hiển nhiên. Ta giả sử $a \neq c$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a > c$. Kéo dài CA và lấy điểm D sao cho BD = BC. Đặt AD = x. Theo định lí Stewart ta có



$$c^2(b + x) + (b + x)bx = a^2b + a^2x,$$

suy ra

$$bx^2 + (c^2 + b^2 - a^2)x - b(a^2 - c^2) = 0.$$

Thay $b = \dfrac{1}{2}(a + c)$, ta được

$$x^2 + \frac{1}{2}(5c - 3a).x - (a + c)(a - c) = 0,$$

hay $(x + 2(c - a))(x + \dfrac{1}{2}(a + c)) = 0$. Từ đó, $x = 2(a - c)$.

Bây giờ, do $\widehat{ABD} = \hat{A} - \hat{C}$ nên áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác ABD ta có

$$\cos(A - C) = \frac{1}{2ac}(a^2 + c^2 - x^2) = \frac{1}{2ac}(8ac - 3a^2 - 3c^2).$$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác ABC ta được

$$4\cos B = 4\frac{1}{2ac}(a^2 + c^2 - b^2) = \frac{1}{2ac}(3a^2 + 3c^2 - 2ac).$$

Từ đó suy ra $\cos(A - C) + 4\cos B = 3$.

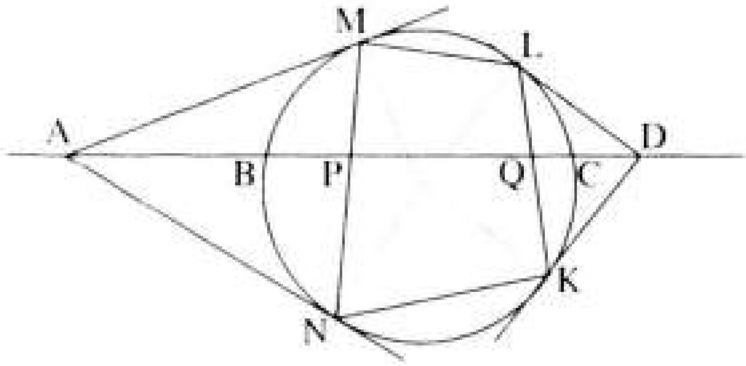
Ví dụ 2.36. (Cuộc thi Toán Mùa Xuân, Bulgaria, 1995)

Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng. Một đường tròn (k) đi qua hai điểm B, C sao cho AM, AN, DK và DL là các tiếp tuyến của (k).

a) Chứng minh rằng các điểm $P = MN \cap BC$ và $Q = KL \cap BC$ không phụ thuộc vào đường tròn (k).

b) Giả sử AD = a, BC = b (a > b) và đoạn thẳng BC di chuyển trên đoạn AD, tìm độ dài bé nhất của đoạn thẳng PQ.

Giải



a) Áp dụng định lí Stewart cho tam giác AMN và đoạn AP ta có:

$$AP^2.MN = AM^2.NP + AN^2.MP - MN.MP.NP$$
$$= (AM^2 - MP.NP).MN$$

(ở đây, AM = AN theo tính chất tiếp tuyến). Suy ra

$$AP^2 = AM^2 - MP.NP = AB.AC - BP.CP$$
$$= AB.AC - (AC - AP)(AP - AB)$$
$$= 2.AB.AC - AP(AB + AC) + AP^2,$$

hay $AP = \dfrac{2AB.AC}{AB + AC}$. Tương tự, $DQ = \dfrac{2DB.DC}{DB + DC}$.

Các đẳng thức trên chứng tỏ rằng vị trí của các điểm P và Q không phụ thuộc vào đường tròn (k).

b) Đặt AB = x, BC = y và CD = z. Từ câu (a) suy ra

$$PQ = AD - AP - DQ =$$
$$= x + y + z - \frac{2x(x+y)}{y+2x} - \frac{2z(y+z)}{y+2z} =$$
$$= (x+y)\left(1 - \frac{2x}{y+2x}\right) + z\left(\frac{2(y+z)}{y+2z}\right) = \frac{y^2(x+y+z)}{(y+2x)(y+2z)}.$$

Ta lại có y = b, x + y + z = a, do đó

$$PQ = \frac{b^2a}{(a+x-z)(a+z-x)} = \frac{b^2a}{a^2-(x-z)^2} \geq \frac{b^2}{a}.$$

Vậy độ dài bé nhất của PQ là $\dfrac{b^2}{a}$, đạt được khi và chỉ khi

$$AB = CD = x = z = \frac{1}{2}(a - b).$$

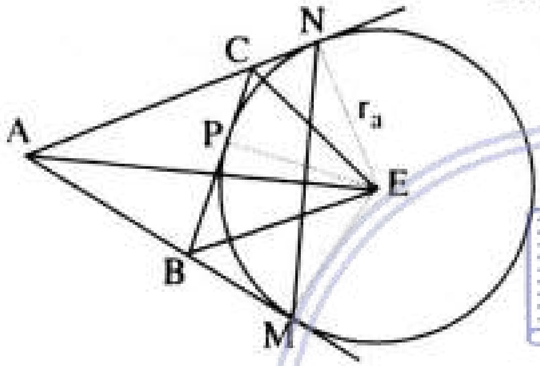
2. Một số công thức tính diện tích khác

Ngoài những công thức tính diện tích đã nói, ta còn có một số công thức không thông dụng khác. Chẳng hạn, ta gặp ở ví dụ 2.11 (công thức diện tích theo cạnh và phân giác) và các bài tập 2.9, 2.11. Sau đây, chúng tôi nêu thêm một số kết quả khác.

2.1. Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các góc ABC của tam giác ABC. Lúc đó

$$S_{ABC} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c.$$

Chứng minh



Gọi E là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC ứng với cạnh BC = a; gọi P, M, N là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp này với cạnh BC, AB, AC tương ứng. Khi ấy ta có:

$$S_{ABC} = S_{EBA} + S_{ECA} - S_{EBC}$$

$$= \frac{AB.EM}{2} + \frac{AC.EN}{2} - \frac{BC.EP}{2} = (p-a)r_a.$$

Tương tự, ta có: $S_{ABC} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$.

2.2. $S = \sqrt{rr_ar_br_c} = \dfrac{ar_br_c}{r_b + r_c}$.

Chứng minh

* Theo công thức tính diện tích 2.1, ta có

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c.$$

Suy ra $S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)rr_ar_br_c$ hay $S^2 = rr_ar_br_c$, tức là

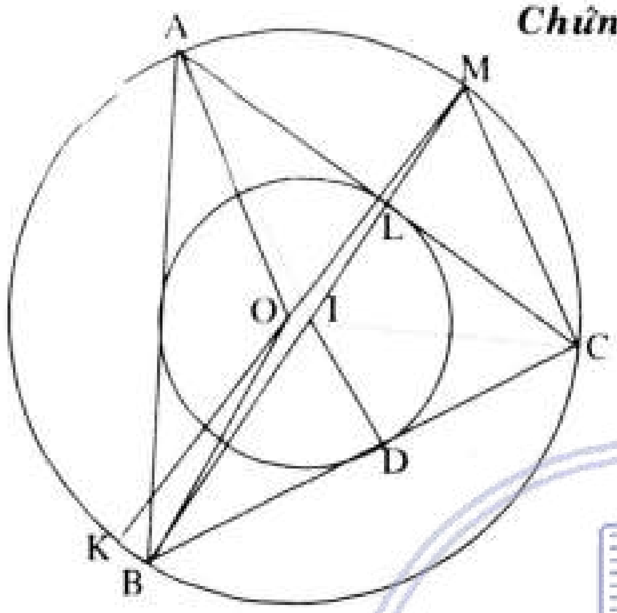
$$S = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$

* Ta có

$$\frac{ar_br_c}{r_b + r_c} = \frac{a.\dfrac{S}{p-b}\dfrac{S}{p-c}}{\dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c}} = \frac{aS}{(p-c)+(p-b)} = \frac{aS}{2p-(b+c)} = \frac{aS}{a} = S$$

3. Định lí Euler

Cho R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của một tam giác. Khi đó, khoảng cách d giữa hai tâm của hai đường tròn này là $\sqrt{R(R-2r)}$. Nói cách khác, ta có: $d^2 = R^2 - 2Rr$.



Chứng minh

Cách 1.

Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC, M là giao của phân giác góc B với (O).

Ta có:

$BI.IM = R^2 - OI^2 = R^2 - d^2$.

Tam giác ICM cân tại M (vì $\widehat{CIM} = \widehat{ICM} = \dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$).

Kẻ đường kính MK của đường tròn (O) và kẻ $ID \perp BC$, suy ra hai tam giác MKC và IBD đồng dạng nhau, từ đó:

$$\frac{MK}{MC} = \frac{IB}{ID}$$

Nhưng MK = 2R, ID = r, MC = MI nên:

$$2Rr = IB.MC = IB.IM = R^2 - d^2.$$

Cách 2.

Gọi L là giao của phân giác góc B với AC. Theo tính chất đường phân giác trong các tam giác ABC và BCL ta có:

$$\frac{LC}{AL} = \frac{a}{c} \Rightarrow LC = \frac{ab}{a+c}$$

$$\frac{BI}{IL} = \frac{a}{LC} = \frac{a+c}{b}.$$

Từ đó ta được:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{b.\overrightarrow{OB} + (a+c)\overrightarrow{OL}}{a+b+c} \text{ và } \overrightarrow{OL} = \frac{a\overrightarrow{OA} + c\overrightarrow{OC}}{a+c}, \text{ suy ra:}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \Rightarrow d^2 = \left(\frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}\right)^2.$$

Do đó ta đi đến:

$$d^2 = \frac{1}{4p^2}\times\{(a^2+b^2+c^2)R^2 + ab(2R^2-c^2)+$$

$$+bc(2R^2-a^2)+ca(2R^2-b^2)\} = R^2 - \frac{abc}{2p}.$$

Mặt khác, $S = pr = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 2Rr = \frac{abc}{2p}$ nên ta được: $d^2 = R^2 - 2Rr$.

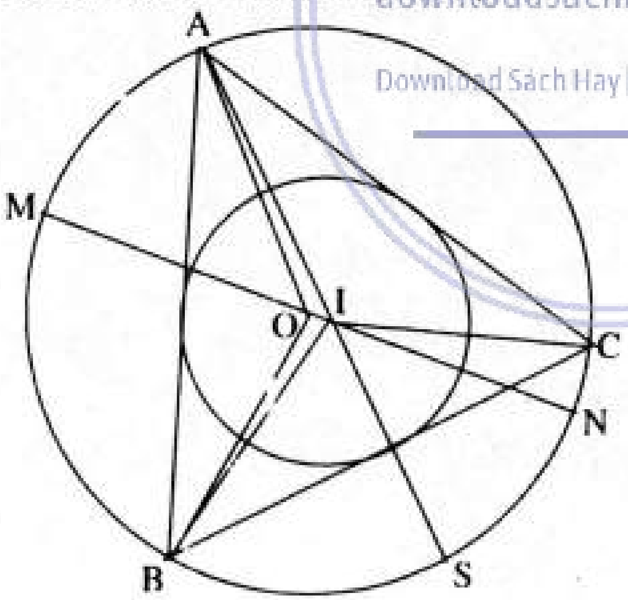
Cách 3.

Định lí Euler nói trên là hệ quả của bổ đề sau:

Bổ đề: Cho đường tròn tâm I bán kính r nằm bên trong đường tròn tâm O bán kính R. Giả sử A là điểm tuỳ ý trên đường tròn lớn, AB và AC là hai dây cung của đường tròn này, chúng tiếp xúc với đường tròn nhỏ. Lúc đó, BC là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ nếu và chỉ nếu $IO = \sqrt{R(R-2r)}$.

Chứng minh

Gọi S là điểm trên đường tròn lớn sao cho AS là phân giác góc BAC. Nối CI và CS. Lúc đó, BC là tiếp tuyến của



đường tròn nhỏ nếu và chỉ nếu $\widehat{BCI} = \widehat{ICA}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{SCI} = \widehat{CIS}$, bởi vì $\widehat{CIS} = \widehat{ICA} + \widehat{IAC}$

$= \widehat{ICA} + \widehat{SCB}$.

Hơn nữa, $\widehat{SCI} = \widehat{CIS}$ khi và chỉ khi SC = SI. Gọi MN là đường kính đi qua I và O của đường tròn lớn. Lúc đó, SC = SI nếu và chỉ nếu

$$SI.IA = SC.IA = 2R\sin\alpha.\frac{r}{\sin\alpha} = 2rR,$$

với $\alpha = \widehat{CAS}$. Tuy nhiên, dễ thấy

$$SI.IA = MI.IN = (R-d)(R+d),$$

với d = IO. Suy ra, ta có SI.IA = 2rR nếu và chỉ nếu $(R-d)(R+d) = 2rR$, hay $d^2 = R^2 - 2rR$, và bổ đề được chứng minh.

Chú ý. *Từ bổ đề trên ta cũng có hệ quả sau đây.*

Xét đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Lấy tuỳ ý một điểm A_1 trên đường tròn ngoại tiếp và dựng các dây cung A_1B_1, B_1C_1 sao cho cả hai đều là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp. Lúc đó, C_1A_1 cũng là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp.

4. Một số ví dụ khác về định lí sin, cosin và công thức diện tích

Ví dụ 2.37. (Balkan, Sennior, 1987)

Cho tam giác ABC có cạnh BC = 1. Đặt

$sA = \sin(A/2)$, $cA = \cos(A/2)$, $sB = \sin(B/2)$, $cB = \cos(B/2)$.

Giả sử ta có $sA^{23}cB^{18} = sB^{23}cA^{18}$. Tính độ dài cạnh AC.

Giải

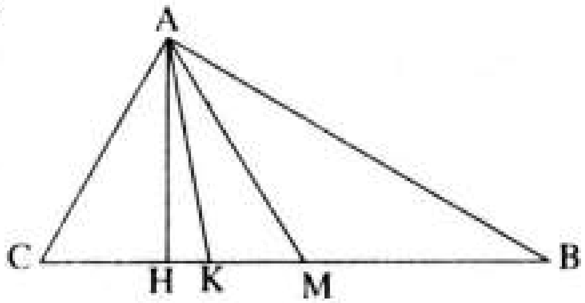
Ta phải có hai góc A/2 và B/2 thuộc khoảng $(0, \pi/2)$. Trong khoảng này, hàm sinx tăng thực sự và hàm cosx giảm thực sự, do đó, nếu $A/2 > B/2$ thì $\sin(A/2) > \sin(B/2)$ và $\dfrac{1}{\cos(A/2)} > \dfrac{1}{\cos(B/2)}$.

Điều tương tự như thế cũng xảy ra khi $A/2 < B/2$. Từ đó, suy ra đẳng thức ở đề bài chỉ xảy ra khi $A/2 = B/2$ và tam giác đã cho là cân. Vậy AC = 1.

Ví dụ 2.38. (Balkan, Sennior, 1988)

Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1. Gọi AH là đường cao, M là trung điểm BC và K là giao điểm của phân giác góc A với đoạn thẳng BC. Giả sử $[AHM] = 1/4$, $[AKM] = 1 - \sqrt{3}/2$. Tính các góc của tam giác (ở đây, [.] là kí hiệu diện tích).

Giải



Giả sử AB ≥ AC. Ta có $BK/KC = AB/AC \geq 1$, nên K nằm giữa M và C. Đặt MH = x. Khi đó, vì $[AHM] = \dfrac{1}{4}[ABC]$,

nên BC = 4x, suy ra BM = 2x, HC = x.

Vì $[AKM] = 1 - \sqrt{3}/2$ nên $MK = (4 - 2\sqrt{3})x$. Suy ra

$$AB/AC = (BM + MK)/(MC - MK)$$
$$= (6 - 2\sqrt{3})/(2\sqrt{3} - 2) = \sqrt{3}.$$

Ta lại có $AB^2 - BH^2 = AH^2 = AC^2 - CH^2$, do đó: $AB^2 - AC^2 = (3x)^2 - x^2$.

Suy ra $AC^2 = 4x^2$. Từ đó, $AC : AB : BC = 1 : \sqrt{3} : 2$.

Vậy $\widehat{A} = 90^0$, $\widehat{B} = 30^0$, $\widehat{C} = 60^0$.

Ví dụ 2.39.

Chứng minh đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$, với a, b, c, r, R, p lần lượt là độ dài 3 cạnh, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp và nửa chu vi của một tam giác.

Giải

Từ các công thức

$$r = \frac{S}{p},\ R = \frac{abc}{4r},\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ ta có:}$$

$$2p^2 - 2r^2 - 8Rr = 2p^2 - 2\frac{S^2}{p^2} - 2\frac{abc}{p}$$

$$= 2p^2 - \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{p} - \frac{2abc}{p}$$

$$= \frac{2p^2(a+b+c) - 2p(ab+bc+ca)}{p}$$

$$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ví dụ 2.40.

Chứng minh rằng trong một tam giác bất kì, bình phương khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến trọng tâm của tam giác đó luôn luôn bằng $\frac{1}{9}\left(p^2 + 5r^2 - 16Rr\right)$.

Giải

Cho ΔABC có trọng tâm G và một điểm M bất kì. Ta có kết quả sau (xem chứng minh ở bài tập 1.17, câu a).

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Áp dụng kết quả trên, khi $M \equiv I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có : $3IG^2 = IA^2 + IB^2 + IC^2 - \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$.

Kẻ $IK \perp AB$ thì $AK = p - a$. Tam giác AKI vuông ở K nên :

$$IA^2 = IK^2 + KA^2 = (p-a)^2 + r^2.$$

Tương tự ta có: $IB^2 = (p-b)^2 + r^2, IC^2 = (p-c)^2 + r^2$. Do đó:

$$3IG^2 = (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + 3r^2 - \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$= 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Theo kết quả ở Ví dụ 2.39 ta có:

$$3IG^2 = 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}\left(2p^2 - 2r^2 - 8Rr\right) = \frac{1}{3}\left(p^2 + 5r^2 - 16Rr\right).$$

Vậy $IG^2 = \frac{1}{9}\left(p^2 + 5r^2 - 16Rr\right)$ (đpcm).

Ví dụ 2.41.

Cho điểm M tuỳ ý nằm bên trong tam giác ABC. Đặt

$$\alpha = \widehat{BMC},\ \beta = \widehat{CMA},\ \gamma = \widehat{AMB}.$$

Chứng minh rằng với mọi điểm N ta luôn có

$$NA.\sin\alpha + NB.\sin\beta + NC.\sin\gamma \geq MA.\sin\alpha + MB.\sin\beta + MC.\sin\gamma.$$

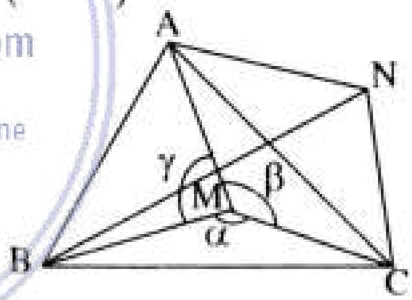
Giải

Đặt $S_1 = dt(MBC), S_2 = dt(MCA), S_3 = dt(MAB)$.

Khi đó, $S_1.\overrightarrow{MA} + S_2.\overrightarrow{MB} + S_3.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Đây chính là kết quả ở Ví dụ 1.23, trang 32.

Trong biến đổi sau đây, ta sử dụng kết quả này.



$$NA.\sin\alpha + NB.\sin\beta + NC.\sin\gamma$$

$$= \frac{NA.MA}{MA}.\sin\alpha + \frac{NB.MB}{MB}.\sin\beta + \frac{NC.MC}{MC}.\sin\gamma$$

$$\geq \frac{\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MA}}{MA}.\sin\alpha + \frac{\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{MB}}{MB}.\sin\beta + \frac{\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{MC}}{MC}.\sin\gamma$$

$$= \frac{\left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}\right).\overrightarrow{MA}}{MA}.\sin\alpha + \frac{\left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MB}}{MB}.\sin\beta +$$

$$+ \frac{\left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MC}}{MC}.\sin\gamma$$

$$= \overrightarrow{NM}\left[\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}.\sin\alpha + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB}.\sin\beta + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}.\sin\gamma\right] +$$

$$+ \left(MA.\sin\alpha + MB\sin\beta + MC.\sin\gamma\right). \qquad (*)$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}.\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA.MB.MC}.MB.MC\sin\alpha = S_1.\overrightarrow{MA}$$

và các hệ thức tương tự khác, do đó vế trái của bất đẳng thức (*) trở thành

$$\frac{2\overrightarrow{NM}}{MA.MB.MC}\left(S_1.\overrightarrow{MA}+S_2.\overrightarrow{MB}+S_3.\overrightarrow{MC}\right)+$$

$$+\left(MA.\sin\alpha+.MB\sin\beta+MC.\sin\gamma\right)$$

$$= MA.\sin\alpha+.MB\sin\beta+MC.\sin\gamma.$$

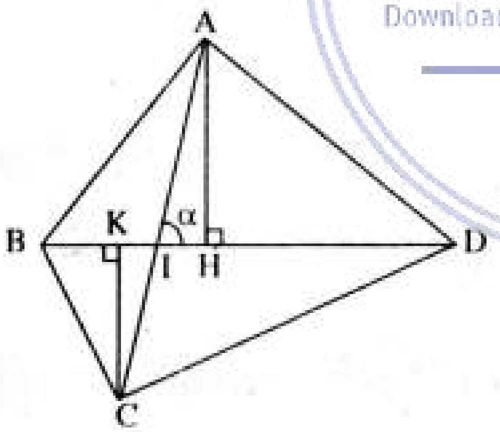
Vậy ta có

$$NA.\sin\alpha+NB.\sin\beta+NC.\sin\gamma \geq MA.\sin\alpha+MB.\sin\beta+MC.\sin\gamma.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv M$.

C LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1.



$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD}$. Kẻ AH và CK vuông góc với BD.Xét hai tam giác vuông AHI và CKI ta có AH = AIsinα và CK = CIsinα. Vậy:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH.BD + \frac{1}{2}CK.BD$$

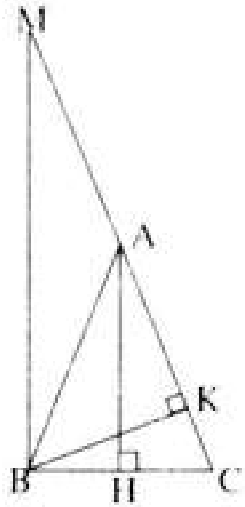
$$= \frac{1}{2}BD.(AH + CK)$$

$$= \frac{1}{2}BD.(AI + IC)\sin\alpha = \frac{1}{2}BD.AC.\sin\alpha.$$

Trong trường hợp $BD \perp AC$ thì $\sin\alpha = 1$, do đó $S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD.AC$.

Nhận xét: Diện tích của tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích của hai đường chéo.

2.2. Kẻ BM // AH. M nằm trên AC kéo dài.



BK là đường cao của tam giác vuông BCM và BM = 2AH nên:

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}.$$

2.3. Theo định lí cosin trong tam giác ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{3}{5} = 32.$$

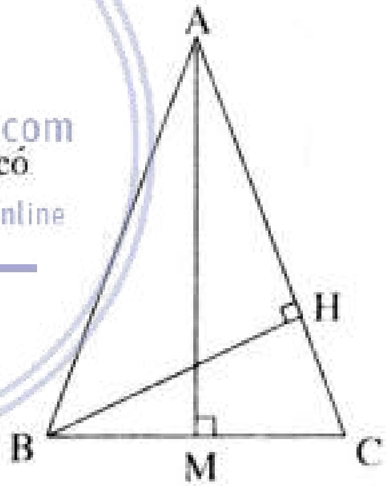
Suy ra $a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Vì $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.c.\sin A$ nên

$$h_a = \frac{b.c}{a}.\sin A. \qquad (1)$$

Mà $\cos A = \frac{3}{5}$ nên ta có $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, suy ra $\sin A = \frac{4}{5}$ (vì $0° < A < 180°$). Thay vào (1) ta được: $h_a = \frac{7.5}{4\sqrt{2}}.\frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $2R = \frac{a}{\sin A}$, nên $R = \frac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2.4. **a)** Gọi H là chân đường cao kẻ từ C. Ta có



$AH = h.\cot gA$, $BH = h.\cot gB$.

Mà $c = AB = AH + HB$ nên

$c = h.\cot gA + h.\cot gB$, suy ra

$$h = \frac{c}{\cot gA + \cot gB}.$$

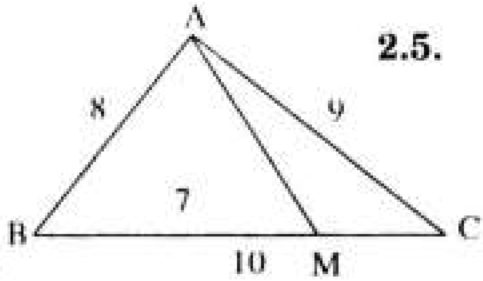
b) Ta có $a = \frac{2S}{h_a}$; $b = \frac{2S}{h_b}$; $c = \frac{2S}{h_c}$ (S là diện tích của tam giác).

Từ giả thiết $2a = b + c$, suy ra $\frac{4S}{h_a} = \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c}$ hay $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

c) Ta có: $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$.
Từ giả thiết $bc = a^2$ suy ra: $2R\sin B.2R\sin C = (2R\sin A)^2$.
Vậy $\sin B.\sin C = \sin^2 A$.

Mặt khác, vì $bc = a^2$ nên $\frac{2S}{h_b}.\frac{2S}{h_c} = \left(\frac{2S}{h_a}\right)^2$ hay

$$\frac{1}{h_b.h_c} = \frac{1}{h_a^2} \Leftrightarrow h_b.h_c = h_a^2.$$



2.5. Theo định lí hàm số cosin trong ΔABC ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos B$

Suy ra: $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} =$

$$= \frac{8^2 + 10^2 - 9^2}{2.8.10} = \frac{83}{160}.$$

Lại dùng định lí hàm số cosin trong ΔABM:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM\cos B = 8^2 + 7^2 - 2.8.7.\frac{83}{160} = \frac{549}{10}.$$

Vậy $AM = \sqrt{\dfrac{549}{10}} = \dfrac{3}{10}\sqrt{610}$.

2.6. Từ $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos C$ và $\cos C > 0$, suy ra $a^2 + b^2 > c^2$, áp dụng định lí sin ta có:

$$a.a + b.b > c.c$$
$$\Rightarrow a.2R\sin A + b.2R\sin B > c.2R\sin C$$
$$\Rightarrow a\sin A + b\sin B > c\sin C.$$

Tương tự, ta cũng có

$$a\sin A + c\sin C > b\sin B,\ b\sin B + c\sin C > a\sin A.$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

2.7. Áp dụng công thức tính trung tuyến trong tam giác ta được:

$$m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 5\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right).$$

Biến đổi và rút gọn được $a^2 = b^2 + c^2$, đó chính là điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông ở A.

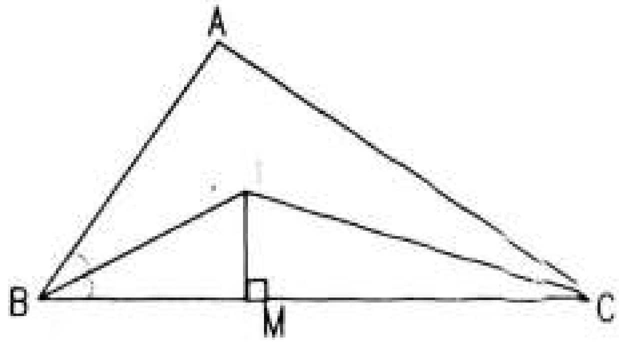
2.8. Ta có $m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$, $m_b^2 = \dfrac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$ và

$$m_c^2 = \frac{2(b^2 + a^2) - c^2}{4}.$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh.

2.9. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp (giao điểm của hai phân giác), ta có:

$$a = CM + BM = r(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}).$$



Suy ra các biểu thức tương tự như thế cho các cạnh bc. Sau cùng, thay vào công thức $S = \dfrac{abc}{4R}$ ta suy ra điều phải chứng minh.

2.10. Từ công thức tính diện tích $S = pr = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ ta suy ra

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S};\ \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S};\ \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}.$$

Vậy $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{a+b+c}{2S} = \dfrac{p}{pr} = \dfrac{1}{r}$. Do đó ta có

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

2.11. Từ công thức $S = \dfrac{1}{2}bc.\sin A$, suy ra

$4S^2 = b^2.c^2.\sin^2 A = AC^2.AB^2(1 - \cos^2 A)$

$= AC^2.AB^2 - AC^2.AB^2\cos^2 A = AC^2.AB^2 - (AC.AB.\cos A)^2$

$= \overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2.$

2.12. a) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{7{,}3^2 + 4{,}8^2 - 6^2}{2.7{,}3.4{,}8} \approx 0{,}58.$

Suy ra $A \approx 55^0$.

$\sin B = \dfrac{b.\sin A}{a} \approx \dfrac{7{,}3.\sin 55^0}{6} \approx 0{,}996$. Suy ra $B \approx 85^0\,30'$.

$C \approx 180^0 - 55^0 - 90^0 = 35^0$.

b) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2.5.7} \approx 0{,}8.$

Suy ra $A \approx 37^0$.

$\sin B = \dfrac{b.\sin A}{a} \approx \dfrac{5.\sin 37^0}{4} \approx 0{,}8$. Suy ra $B \approx 53^0$.

$C \approx 180^0 - 37^0 - 53^0 = 90^0$.

2.13. a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A =$

$= 32^2 + 45^2 - 2.32.45.\cos 87^0 \approx 2899{,}2$. Suy ra $a \approx 53{,}8$.

$\sin B = \dfrac{b.\sin A}{a} \approx \dfrac{32.\sin 87^0}{53{,}8} \approx 0{,}594$. Suy ra $B \approx 36^0$.

$C = 180^0 - (A + B) \approx 57^0$.

b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C = 7^2 + 23^2 - 2.7.23.\cos 57^0 \approx 785$. Suy ra $c \approx 29$.

$$\sin A = \frac{a\sin C}{c} \approx \frac{7\sin 130^0}{29} \approx 0{,}2.$$ Suy ra $A \approx 12^0$.

2.14. Trước tiên, ta có $\widehat{ABC} = 35^0$. Kẻ đường cao BH (H nằm ngoài đoạn AC). Đặt BH = h. Ta có:

b = AC = BC vì ABC là tam giác cân và $\widehat{BCH} = 70^0$.

$$h = BC.\sin 70^0 \Rightarrow h = 3{,}759.$$

2.15. **a)** $\hat{B} = 180^0 - (\hat{A} + \hat{C}) = 75^0$ nên ΔABC cân đỉnh A, suy ra

AB = AC = 4,5.

Theo định lí hàm số sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{b\sin A}{\sin B} \approx \frac{4{,}5.0{,}5}{0{,}97} \approx 2{,}3.$$

b) $\hat{A} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - (83^0 + 57^0) = 40^0$;

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} \approx \frac{137{,}5.0{,}9925}{0{,}6427} \approx 212{,}3\ ;$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} \approx \frac{137{,}5.0{,}8387}{0{,}6427} \approx 179{,}4\ .$$

2.16. *Hướng dẫn*.: Hạ AH ⊥ BC (kéo dài). Ta cần tính CH.
ΔABC là tam giác cân, do đó AC = CB = 100m.
Xét tam giác vuông AHC:

$$CH = AC\sin 30^0 = 100.\frac{1}{2} = 50 \text{ (m)}.$$

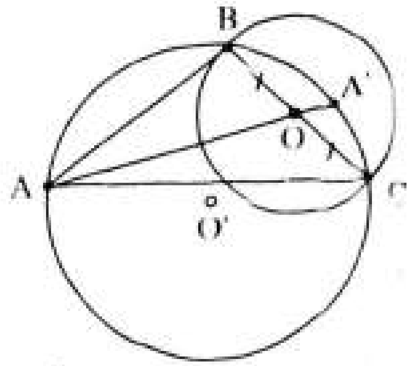
2.17. $\mathscr{P}_{M/(O)} = k \Leftrightarrow MO^2 - R^2 = k \Leftrightarrow MO^2 = R^2 + k$.

Nếu $R^2 + k > 0$ thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính bằng $\sqrt{R^2 + k}$.

Nếu $R^2 + k = 0$ thì tập hợp điểm M là một điểm O.

Nếu $R^2 + k < 0$ thì tập hợp điểm M là tập rỗng.

2.18. Xét đường tròn (O') ngoại tiếp ΔABC. Vì O là điểm giữa của đoạn BC nên O phải nằm trong đường tròn (O'). Gọi A' là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO và đường tròn (O'), hiển nhiên O là điểm nằm bên trong đoạn AA'. Ta có:



$$\mathscr{P}_{O/(O')} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = -R^2.$$

Suy ra: $OA' = \dfrac{R^2}{OA}$ không đổi. Vì OA và OA' là hai tia đối nhau, O và A cố định nên từ đây suy ra A' cố định.

Vậy mọi đường tròn ngoại tiếp ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài luôn đi qua một điểm cố định khác điểm A.

2.19. Gọi Q là giao điểm của ba đường thẳng AB, CD, FE. Ta có

$$QA.QB = QC.QD = QE.QF.$$

Vì QA.QB = QE.QF nên suy ra tứ giác ABFE cũng nội tiếp.

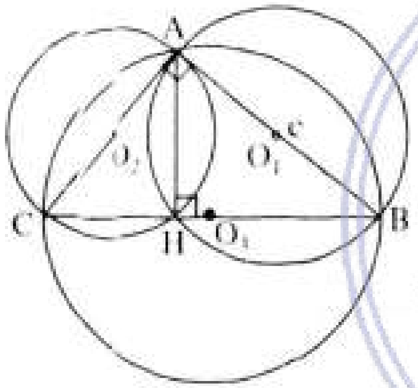
2.20. *Hướng dẫn.:*

a) S = 84 (Hê-rông). **b)** R = abc/ 4S = 65/ 8 = 8,125.

c) $h_a = 2S/a = 12$. **d)** r = S/ p = 4.

e) Gọi M là trung điểm BC, ta có

$$\mathscr{P}_{H/(M)} = HM^2 - MC^2 = AM^2 - AH^2 - MC^2 = -45.$$



2.21. Vì H nằm trên (O_1) và (O_2) nên

$$\mathscr{P}_{H/(O_1)} = \mathscr{P}_{H/(O_2)} = 0.$$

Ta có

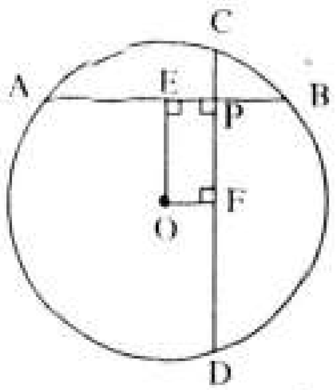
$$\mathscr{P}_{H/(O_3)} = HB.HC = HA^2.$$

Vì $2S_{ABC} = a.AH = b.c$ nên

$$AH = \frac{bc}{a} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Vậy $\mathscr{P}_{H/(O_3)} = -HA^2 = -\dfrac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$.

2.22. a) Gọi E, F là trung điểm AB, CD. Ta có:



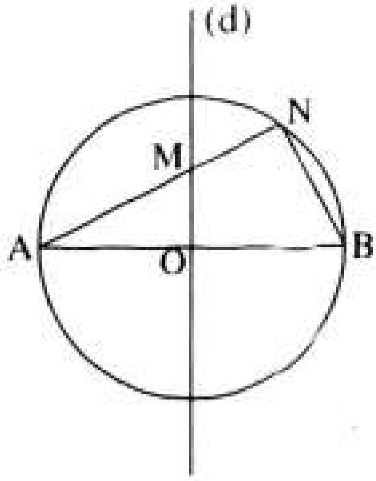
$$AB^2 + CD^2 = (2AE)^2 + (2CF)^2$$
$$= 4(AO^2 - OE^2 + CO^2 - OF^2)$$
$$= 4(2R^2 - (OE^2 + OF^2))$$
$$= 4(2R^2 - OP^2) = 8R^2 - 4.OP^2$$
$$= 4R^2 - 4(OP^2 - R^2) = 4(R^2 - \mathscr{P}_{P/(O)}).$$

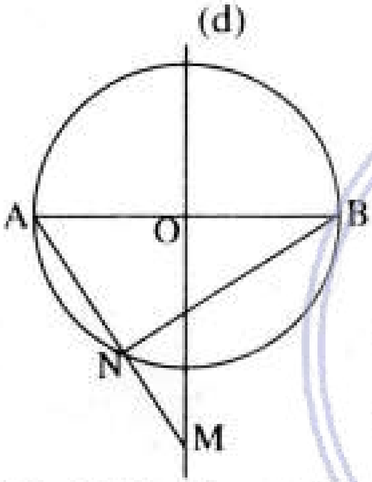
b) $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 =$

$$= (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 - 2PA.PB - 2PC.PD$$
$$= (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 + 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}$$
$$= AB^2 + CD^2 + 4\mathscr{P}_{P/(O)}$$
$$= 8R^2 - 4PO^2 + 4(PO^2 - R^2) = 4R^2 \text{ (không đổi)}.$$

Vậy $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của các điểm P, A, B, C, D (miễn là AB và CD luôn luôn đi qua P và vuông góc với nhau).

2.23. Gọi O là trung điểm AB. Từ giả thiết ta suy ra AM:AN = AO.AB. Vậy M, N, B, O cùng thuộc một đường tròn. Mà góc MOB vuông, nên góc MNB cũng vuông. Suy ra N thuộc đường tròn đường kính AB cố định. Khi M trùng O thì N trùng B, khi M chạy xa vô tận trên đường trung trực (d), N tiến tới gần A, nhưng không trùng với điểm A.



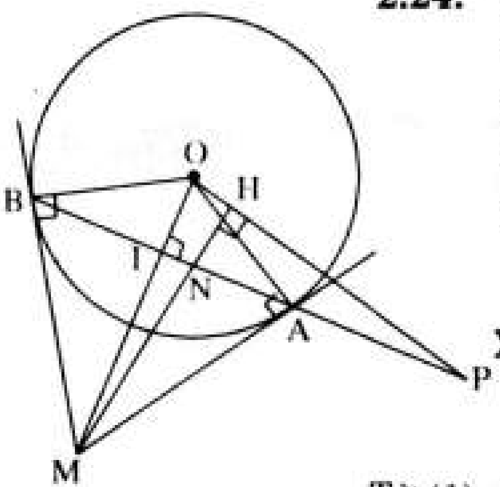


Đảo lại, lấy N tuỳ ý trên đường tròn đường kính AB, nhưng khác với điểm A. Gọi M là giao điểm của đường thẳng AN với (d). Ta có $BN \perp AM$ và $MO \perp AB$ nên suy ra NMBO là tứ giác nội tiếp. Từ đó,

$$AM.AN = AO.AB = \frac{1}{2}AB^2.$$

Vậy N là điểm thoả mãn điều kiện đề bài.

Tóm lại, quỹ tích các điểm N là đường tròn tâm O, đường kính AB, ngoại trừ điểm A.



2.24. **a)** Vì A, H, B đều nhìn đoạn thẳng MO dưới một góc vuông nên năm điểm A, H, B, M, O cùng nằm trên đường tròn (C) đường kính MO.

b) Xét đường tròn tâm O bán kính R ta có:

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = OP^2 - R^2. \quad (1)$$

Xét đường tròn đường kính OM ta có:

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PH}.\overrightarrow{PO}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{PO} = OP^2 - R^2$. Mặt khác:

$$\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{PO} = |\overrightarrow{PH}|.|\overrightarrow{PO}|\cos 0^\circ = PH.PO \Rightarrow PH = \frac{OP^2 - R^2}{PO} \text{ không đổi.}$$

Vì A và B ở cùng phía với P nên O, H cũng ở cùng phía với P, do đó H là điểm cố định. Vậy quỹ tích các điểm M là đường thẳng Δ vuông góc với OP tại H sao cho

$$PH = \frac{OP^2 - R^2}{PO}.$$

c) Vì $OI \perp AB$, $NH \perp OH$ nên tứ giác OHNI nội tiếp đường tròn đường kính ON. Ta có: $PI.PN = PO.PH$. Theo câu b) ta có

$$PH.PO = PA.PB \text{ nên } PI.PN = PA.PB.$$

d) Từ $PA.PB = PI.PN$, thay $PA = PI - IA$ và $PB = PI + IB = PI + IA$ ta có: $PA.PB = (PI - IA)(PI + IA) = PI.PN$ hay $PI^2 - IA^2 = PI.PN$, tức là $PI^2 - PI.PN = IA^2$. Suy ra $PI(PI - PN) = IA^2$.

Vậy $PI.NI = IA^2$.

2.25. *Hướng dẫn.:*

a) $AB.AE = AC.AF$ (cùng bằng AH^2), suy ra tứ giác BCFE nội tiếp.

b) $\mathscr{P}_{I/(O)} = IB.IC = IE.IF = \mathscr{P}_{I/(O')}$.

c) I, D, A cùng thuộc trục đẳng phương của (O) và (O').

2.26. **a)** Xét trường hợp $P \neq X$, $P \neq Y$.

a_1) $XY \perp AD$ vì XY là trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AC và BD.

a_2) Do XY là trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AC và BD nên P có cùng phương tích với hai đường tròn này, nghĩa là

$$\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PN}.\overrightarrow{PB}. \qquad (1)$$

Đồng thời, $XY \perp AD$ kéo theo góc $PZD = 90^0$.

a_3) Vì M nằm trên đường tròn đường kính AC nên các góc AMC và KMC vuông.

Vậy $\widehat{KMC} = \widehat{KZC} = 90^0$. Suy ra bốn điểm K, M, C, Z cùng thuộc một đường tròn mà ta gọi đường tròn đó là (v).

Xét phương tích của điểm P đối với đường tròn (v) ta có :

$$\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PK}.\overrightarrow{PZ}. \qquad (2)$$

a_4) Tương tự, nếu $DN \cap XY = \{K'\}$ thì

$$\overrightarrow{PN}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PK'}.\overrightarrow{PZ}. \qquad (3)$$

a_5) Từ (1), (2) và (3) ta có $\overrightarrow{PK}.\overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{PK'}.\overrightarrow{PZ}$.

Do $P \neq Z$ nên $K' \equiv K$. Vậy AM, DN, XY đồng quy.

b) Trường hợp $P \equiv X$. Khi đó $M \equiv X$ và $N \equiv X$. Do vậy AM, DN và XY đồng quy. Trường hợp $P \equiv Y$ được xét tương tự.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

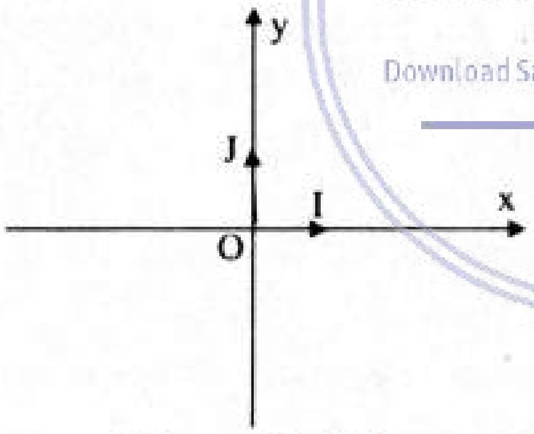
Chương này nhằm giới thiệu những kiến thức cơ bản đầu tiên về phương pháp toạ độ. Nhờ phương pháp đó, chúng ta có thể chuyển nhiều bài toán hình học sang bài toán đại số và ngược lại, từ kết quả của đại số, ta có thể suy ra được các tính chất và mối quan hệ giữa các hình.

A KIẾN THỨC, VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP CĂN BẢN

§ 1. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

1.1. *Hệ trục toạ độ*

Một *hệ trục toạ độ* Oxy (hay $(O; \vec{i}, \vec{j})$) bao gồm:



- Điểm O gọi là *gốc toạ độ*.
- Hai đường thẳng Ox và Oy vuông góc với nhau.
- Một điểm I trên tia Ox, một điểm J trên Oy sao cho:

$$OI = OJ = 1 \text{ đơn vị dài.}$$

Ta kí hiệu $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ và $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Theo tính chất vectơ ta luôn có: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = 0$. Đường thẳng Ox và Oy lần lượt được gọi là *trục hoành* và *trục tung*.

1.2. *Toạ độ của vectơ*

Đối với hệ toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, nếu vectơ $\vec{a}$ có thể viết dưới dạng: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số (x; y) được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ và kí hiệu $\vec{a} = (x; y)$ hay $\vec{a}(x; y)$. Số thứ nhất x được gọi là *hoành độ*, số thứ hai y được gọi là tung độ của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 3.1.

a) Viết vectơ $\vec{u}$ dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết tọa độ của $\vec{u}$ là: $\vec{u} = (2; -3)$; $\vec{u} = (-1; 4)$; $\vec{u} = (2; 0)$; $\vec{u} = (0; -1)$; $\vec{u} = (0; 0)$.

b) Tìm tọa độ của các vectơ sau:

$$\vec{p} = -\vec{i},\ \vec{q} = 5\vec{j},\ \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j};\ \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j},\ \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j},$$

$$\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i}),\ \vec{e} = 0{,}15\vec{i} + 1{,}3\vec{j},\ \vec{f} = \pi\vec{i} - \vec{j}\cos 24^0.$$

Giải

a) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{u} = 2\vec{i}$; $\vec{u} = -\vec{j}$; $\vec{u} = \vec{0}$.

b) $\vec{p} = (-1; 0)$, $\vec{q} = (0; 5)$, $\vec{a} = (2; 3)$; $\vec{b} = (\frac{1}{3}; -5)$,

$\vec{c} = (3; -4)$, $\vec{d} = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $\vec{e} = (0{,}15; 1{,}3)$, $\vec{f} = (\pi; -\cos 24^0)$.

1.3. *Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ*

Cho $\vec{a} = (x;y)$ và $\vec{b} = (x';y')$, ta có:

1) $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$;

2) $k\vec{a} = (kx; ky)$;

3) $\vec{a}\vec{b} = xx' + yy'$;

4) Với $x' \neq 0$, $y' \neq 0$, $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'};$$

5) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{x.x' + y.y'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

Đặc biệt, ta có: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Ví dụ 3.2.

Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$.

a) Tìm toạ độ vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

b) Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

c) Tìm các số k, h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

Giải

a) $\vec{u} = (2; -8)$.

b) Ta có: $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Suy ra $\vec{x} = (-6; 1)$.

c) Ta có $k.\vec{a} + h.\vec{b} = (2k + 3h; k + 4h)$, do đó $\begin{cases} 2k + 3h = 7 \\ k + 4h = 2 \end{cases}$.

Giải hệ trên ta được: $k = 4{,}4$; $h = -0{,}6$.

Ví dụ 3.3.

Cho hai vectơ $\vec{e} = (4; 1)$ và $\vec{f} = (1; 4)$.

a) Tính góc $(\vec{e}, \vec{f})$.

b) Xác định tất cả các số m để vectơ $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f}$ vuông góc với trục hoành.

c) Xác định tất cả các số n để vectơ $\vec{b} = n\vec{e} + \vec{f}$ tạo với vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ một góc bằng 45^0.

Giải

a) $\cos(\vec{e}, \vec{f}) = \dfrac{4.1 + 1.4}{\sqrt{16 + 1}.\sqrt{1 + 16}} = \dfrac{8}{17}$, suy ra $(\vec{e}, \vec{f}) \approx 61^0 55'$.

b) Ta có $\vec{a} = (4 + m ; 1 + 4m)$. Do đó $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành khi và chỉ khi $\vec{a}.\vec{i} = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

c) Ta có $\vec{b} = (4n + 1;\ n + 4)$, $\vec{i} + \vec{j} = (1; 1)$. Vì vectơ $\vec{b} = m\vec{e} + \vec{f}$ tạo với vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ một góc bằng 45^0 nên ta có

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0 = \frac{(4n + 1) + (n + 4)}{\sqrt{2}.\sqrt{(4n + 1)^2 + (n + 4)^2}} = \frac{5(n + 1)}{\sqrt{2}\sqrt{17n^2 + 16n + 17}}$$

$$\Leftrightarrow 5(n + 1) = \sqrt{17n^2 + 16n + 17}$$

$$\Leftrightarrow 25n^2 + 30n + 25 = 17n^2 + 16n + 17$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 7n + 4 = 0,$$

phương trình này vô nghiệm.

Vậy không tồn tại n thoả mãn đề bài.

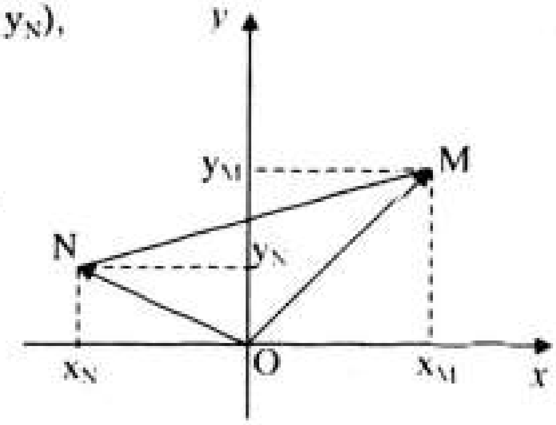
1.4. *Toạ độ của điểm*

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ cũng được gọi là toạ độ của điểm M.

Cho hai điểm $M(x_M ; y_M)$ và $N(x_N ; y_N)$, khi đó:

i) $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M ; y_N - y_M)$;

ii) $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.



1.5. Toạ độ của trung điểm một đoạn thẳng và toạ độ của trọng tâm tam giác

M là trung điểm AB khi và chỉ khi toạ độ của M là trung bình cộng các toạ độ tương ứng của hai điểm A, B.

G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi toạ độ của G là trung bình cộng các toạ độ tương ứng của ba đỉnh A, B, C.

Ví dụ 3.4.

Cho ba điểm M(–1; –2), N(3; 2), P(4; –1).

a) Chứng minh rằng ba điểm đó là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm chu vi tam giác MNP.

c) Tính độ dài đoạn trung tuyến của tam giác kẻ từ M.

d) Tìm điểm E trên Ox sao cho $|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{MN} = (4\ ;\ 4)$, $\overrightarrow{MP} = (5\ ;\ 1)$. Vì $\frac{4}{5} \neq \frac{4}{1}$ nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ không cùng phương, suy ra ba điểm M, N, P không thẳng hàng, do đó chúng là ba đỉnh của một tam giác.

b) $MN = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, $MP = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$,

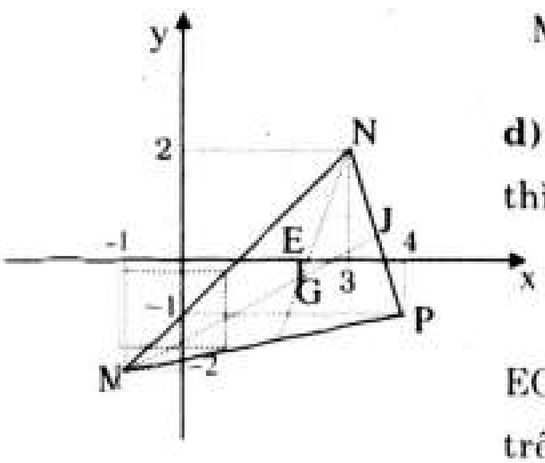
$$NP = \sqrt{(4-3)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{10}.$$

Chu vi tam giác MNP bằng $4\sqrt{2}+\sqrt{26}+\sqrt{10}$.

c) Trung điểm J của cạnh NP có tọa độ là: $J\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Suy ra độ dài trung tuyến MJ là

$$MJ = \sqrt{\left(\frac{7}{2}+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}+2\right)^2} = \frac{\sqrt{106}}{2}.$$



d) Gọi G là trọng tâm của tam giác MNP thì:

$$|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}| = 3|\overrightarrow{EG}|.$$

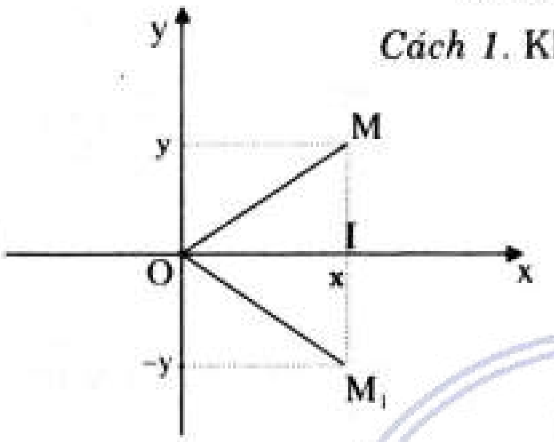
Khi E chạy trên Ox, độ dài của đoạn EG sẽ nhỏ nhất khi E là hình chiếu của G trên Ox, do đó hoành độ của điểm E bằng hoành độ của điểm G. Vậy điểm E cần xác định là E(2; 0).

Ví dụ 3.5.

Cho điểm M(x; y), tìm toạ độ của điểm M_1 đối xứng với M qua trục Ox.

Giải

Bằng hình vẽ, có thể thấy tọa độ của M_1 là (x; −y).



Để chứng minh chặt chẽ, ta tiến hình như sau:

Cách 1. Khi M ∈ Ox thì M_1 và M trùng nhau.

Khi M(x; y) không thuộc Ox, không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc góc phần tư thứ nhất, khi đó $M_1(x_1; y_1)$ thuộc góc phần tư thứ tư như hình vẽ. Ta có Ox là trung trực của MM_1 nên suy ra $x = x_1$ và $y = -y$.

Cách 2. $M_1(x_1; y_1)$ đối xứng với M qua trục Ox khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}; \overrightarrow{OM_1}) & (1) \\ \left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i}.\overrightarrow{OM} = \vec{i}.\overrightarrow{OM_1} \\ \left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \end{cases}.$$

Từ đó, vì O nằm giữa M_1 và M nên $x = x_1$, $y_1 = -y$.

Đặc biệt, khi M ∈ Ox thì M_1 và M trùng nhau.

Ví dụ 3.6.

Cho ba điểm A(−4; 1), B(2; 4), C(2; −2).

a) Ba điểm A, B, C có lập thành tam giác không?.

b) Tìm toạ độ của trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra ba điểm đó thẳng hàng.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -6)$, hai vectơ này không cùng phương nên ba điểm A, B, C lập thành một tam giác.

b) Trọng tâm của ΔABC là

$$G\left(\frac{-4+2+2}{3}; \frac{1+4-2}{3}\right) \text{ hay } G(0; 1).$$

Điểm H(x; y) là trực tâm ΔABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 & (2) \end{cases}.$$

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (x + 4; y - 1)$, $\overrightarrow{BC} = (0 ; -6)$, $\overrightarrow{BH} = (x - 2 ; y - 4)$, $\overrightarrow{AC} = (3 ; -3)$. Khi đó: (1) $\Leftrightarrow -6(y - 1) = 0$, $y = 1$ và

$$(2) \Leftrightarrow 6(x - 2) - 3(y - 4) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2) - y + 4 = 0.$$

Thay $y = 1$ ta được $x = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$. Vậy $H(\frac{1}{2} ; 1)$.

Điểm $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} IA = IB & (3) \\ IB = IC & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 & (3') \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 & (4') \end{cases}$$

Từ (4') suy ra $y - 4 = -y - 2$, $y = 1$. Thay $y = 1$ vào (3') được

$$(x + 4)^2 = (x - 2)^2 + 9,$$

giải ra ta được: $x = -\frac{1}{4}$. Vậy $I\ (-\frac{1}{4} ; 1)$. Từ đó ta có $\overrightarrow{GH} = (\frac{1}{2} ; 0)$,

$\overrightarrow{GI} = \left(-\frac{1}{4} ; 0\right)$, suy ra $-2\overrightarrow{GI} = \left(\frac{1}{2} ; 0\right) = \overrightarrow{GH}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GI}$ cùng phương nên G, I, H thẳng hàng.

BÀI TẬP

3.1. Cho $\vec{a} = (1 ; -2)$ và $\vec{b} = (0 ; 3)$. Tìm tọa độ các vectơ

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} ; \ \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} ; \ \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b}.$$

3.2. Cho $\vec{a} = (x; y)$. Chứng minh rằng các tích vô hướng $\vec{a}\vec{i}$ và $\vec{a}\vec{j}$ lần lượt bằng hoành độ và tung độ của vectơ $\vec{a}$ trong mặt phẳng toạ độ.

3.3. Cho tam giác ABC với $A = (x_1 ; y_1)$, $B = (x_2 ; y_2)$, $C = (x_3; y_3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

3.4. Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$.

a) Tìm những giá trị của k để hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

b) Tìm những giá trị của k để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

c) Tìm những giá trị của k để $|\vec{v}| = |\vec{u}|$.

3.5. Cho các vectơ $\vec{a} = (3 ; 2), \vec{b} = (-1 ; 5) ; \vec{c} = (-2 ; -5)$.

a) Tìm tọa độ các vectơ

$$\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}, \ \vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}, \ \vec{w} = 2(\vec{a} + \vec{b}) + 4\vec{c}.$$

b) Tìm các số p, q sao cho $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$.

3.6. Cho điểm M(x;y), tìm toạ độ của điểm:

a) M_1 đối xứng với M qua trục Oy.

b) M_2 đối xứng với M qua tâm O.

c) M_3 đối xứng với M qua đường phân giác trong của góc xOy

3.7. Cho ba điểm A = (–1 ; 1), B = (1 ; 3), C = (–2 ; 0).

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn thẳng BC, điểm B chia đoạn thẳng AC và điểm C chia đoạn thẳng AB.

Chú ý: Xem bài tập 1.20 về điểm chia đoạn thẳng.

3.8. Cho $\vec{a} = (3\ ;\ 7)$ và $\vec{b} = (-3\ ;\ -1)$.

Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$, $\cos(\vec{a}+\vec{b}; \vec{a}-\vec{b})$ và $\cos(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b})$.

3.9. Cho ba điểm A(–4; 1), B(2; 4), C(2; –2).

a) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm I sao $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

3.10. Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm

A(–1; 4); B(–1; 8); C(3; 8).

a) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

b) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông ở B.

c) Tìm toạ độ trong tâm G của tam giác ABC và góc AGC.

3.11. Cho bốn điểm A, B, C, D. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi P, Q là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD; M và N là trung điểm các đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có chung trung điểm.

Chú ý: Có thể chỉ ra các hình bình hành rồi dùng tính chất hai đường chéo để chứng minh, cách làm này các bạn thường làm ở các lớp 8, 9. Ở đây, các bạn nên dùng phương pháp tọa độ.

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

2.1. *Phương trình tổng quát của đường thẳng*

2.1.1. Véctơ $\vec{n}$ khác vectơ $\vec{0}$ và vuông góc với đường thẳng Δ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ.

Như vậy, mỗi đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến, những vectơ pháp tuyến này song song nhau.

2.1.2. Cho một điểm $M(x_0;\ y_0)$ và một vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$. Có duy nhất một đường thẳng đi qua M và nhận $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến.

2.1.3. Điều kiện cần và đủ để điểm $N(x; y)$ nằm trên đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

2.1.4. Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng là tập hợp những điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn phương trình bậc nhất đối với hai ẩn số $Ax + By + C = 0$, với A, B không đồng thời bằng không. Phương trình $Ax + By + C = 0$ được gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng, đường thẳng này có $\vec{n}(A, B)$ là vectơ pháp tuyến.

2.1.5. *Các dạng đặc biệt của phương trình đường thẳng*

Đường thẳng $Ax + C = 0$ vuông góc với trục Ox (đường thẳng này nhận $\vec{n}(A, 0)$ làm vectơ pháp tuyến).

Đường thẳng $By + C = 0$ vuông góc với trục Oy (đường thẳng này nhận $\vec{n}(0, B)$ làm vectơ pháp tuyến).

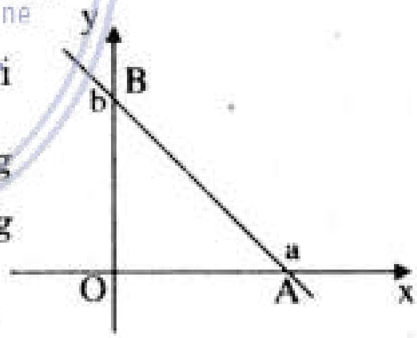
Đường thẳng $Ax + By = 0$ đi qua gốc toạ độ (đường thẳng này nhận $\vec{n}(A, B)$ làm vectơ pháp tuyến).

2.1.6. Nếu $B \neq 0$ thì phương trình của Δ có dạng:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}.$$

Khi đó, số $k = -\frac{A}{B}$ gọi là hệ số góc của đường thẳng Δ.

2.1.7. Đường thẳng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\ (a \neq 0, b \neq 0)$ đi qua hai điểm $(a; 0)$ và $(0; b)$. Phương trình dạng như thế gọi là phương trình của đường thẳng theo đoạn chắn.



Chú ý: Ở lớp dưới, ta đã biết rằng phương trình đường thẳng có dạng $y = ax + b$, phương trình này tương đương với

$$ax - y + b = 0,$$

tức là ta đã viết nó dưới dạng $Ax + By + C = 0$, trong đó,

$$A = a,\ B = -1 \text{ và } C = b.$$

Đảo lại, cho phương trình $Ax + By + C = 0$. Nếu một trong hai số A và B bằng 0, chẳng hạn, $A = 0$ thì $y = -\frac{C}{B}$, là đường thẳng song song hoành (trường hợp kia thì song song trục tung). Nếu $A \neq 0$ và $B \neq 0$

thì ta biến đổi thành $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, như vậy đây cũng là phương trình đường thẳng với dạng:

$$y = ax + b, \text{ với } a = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}.$$

Ví dụ 3.7.

Viết phương trình tổng quát của:

a) Đường thẳng Ox.

b) Đường thẳng Oy.

c) Đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và song song với Ox, $y_0 \neq 0$.

d) Đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và vuông góc với Ox.

e) Đường thẳng OM, với $M(x_0; y_0)$ khác điểm O.

Giải

Theo trên, đường thẳng Δ đi qua $M(x_0, y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B)$ là $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

a) Vì đường thẳng Ox đi qua O(0; 0) và vuông góc với $\vec{j} = (0; 1)$, tức là có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(0; 1)$ nên nó có phương trình $0.(x - 0) + 1.(y - 0) = 0$, hay $y = 0$.

b) Đường thẳng Oy có phương trình $x = 0$ (do Oy qua điểm O(0; 0) và vuông góc với $\vec{i} = (1; 0)$).

c) Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và song song với Ox, với $y_0 \neq 0$, là $y - y_0 = 0$.

d) Đường thẳng đi qua $M(x_0, y_0)$ và vuông góc với Ox sẽ nhận $\vec{i} = (1; 0)$ là vectơ pháp tuyến nên nó có phương trình:

$$1.(x - x_0) + 0.(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0.$$

e) Gọi vectơ pháp tuyến của đường thẳng OM là $\vec{n}(A; B)$, do $\overrightarrow{OM} = (x_0; y_0)$ và $\overrightarrow{OM} \perp \vec{n}$ nên $x_0A + y_0B = 0$. Để có được một vectơ pháp tuyến (trong vô số các vectơ pháp tuyến của đường thẳng), ta chỉ cần chọn $A = y_0$ và $B = -x_0$, và ta được $\vec{n}(y_0; -x_0)$. Rõ ràng là $\vec{n} \neq \vec{0}$ (do $M(x_0, y_0) \neq O(0; 0)$ và vuông góc với đường thẳng OM. Do đó phương trình đường thẳng OM là:

$$y_0(x - 0) - x_0(y - 0) = 0 \text{ hay } y_0x - x_0y = 0.$$

Chú ý: Cũng có thể giải theo cách ta đã từng thực hiện như ở lớp dưới: Nếu $x_0 = 0$ (hay $M \in Oy$) thì OM chính là trục hoành, ta có phương trình $x = 0$. Nếu $x_0 \neq 0$, vì đường thẳng OM đi qua gốc toạ độ nên nó có phương trình $y = kx$. Do M thuộc đường thẳng nên $y_0 = kx_0$. Suy ra $k = \frac{y_0}{x_0}$, từ đó dẫn đến phương trình:

$$y = \frac{y_0}{x_0}x \text{ hay } y_0x - x_0y = 0.$$

Ví dụ 3.8.

Cho hai điểm P(4; 0), Q(0; −2).

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(3; 2) và song song với đường thẳng PQ.

b) Viết phương trình đường trung trực của đoạn PQ.

Giải

a) Ta có thể viết phương trình của đường thẳng PQ theo đoạn chắn (2.1.7). Đường thẳng PQ có phương trình

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0.$$

Đường thẳng Δ song song với PQ nên nó có cùng vectơ pháp tuyến với PQ, do đó nó có phương trình dạng $x - 2y + C = 0$ với $C \neq -4$ (vì nếu $C = -4$ thì hai đường thẳng trùng nhau). Do $A \in \Delta$ nên

$$3 - 2.2 + C = 0 \Rightarrow C = 1.$$

Đường thẳng cần tìm có phương trình $x - 2y + 1 = 0$.

b) Đường trung trực của đoạn PQ đi qua trung điểm J của PQ và vuông góc với $\overrightarrow{PQ}$. Dễ dàng tính được J(2; −1) và một vectơ pháp tuyến của đường trung trực này là $\overrightarrow{PQ} = (-4; -2)$. Phương trình của đường thẳng đó có dạng $-4x - 2y + C = 0$. Vì nó đi qua J nên $-4.2 - 2(-1) + C = 0$ $\Rightarrow C = 6$. Đường thẳng cần tìm có phương trình $-4x - 2y + 6 = 0$, hay $2x + y - 3 = 0$.

Chú ý. Với câu (b), ta có bài toán tổng quát:

Cho $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$, hãy viết phương trình đường trung trực của M_1M_2.

Giải. Đường trung trực của M_1M_2 đi qua trung điểm M_0 của M_1M_2 và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{M_1M_2}$. Nó có phương trình là:

$$(x_2 - x_1)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_2 - y_1)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_2^2 - x_1^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0.$$

Ví dụ 3.9.

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(–2 ; –4), cắt trục Ox tại A và Oy tại B sao cho tam giác OAB vuông cân.

Giải

Giả sử đường thẳng cần tìm cắt trục Ox và Oy tại A(a ; 0) và B(0 ; b). Vì ΔOAB vuông cân nên $|a| = |b|$ hay $a = \pm b$. Phương trình đường thẳng AB (theo đoạn chắn) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Mặt khác, nó phải đi qua điểm M(–2 ; –4) nên: $\frac{-2}{a} - \frac{4}{b} = 1$.

• Nếu a = b thì: $\frac{-2}{a} - \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow \frac{-2}{a} - \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = -6 ; b = -6$.

Ta được phương trình $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$ hay $x + y + 6 = 0$.

• Nếu a = –b thì: $\frac{-2}{a} - \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow \frac{-2}{a} + \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = 2 ; b = -2$.

Ta được phương trình: $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$ hay $x - y - 2 = 0$.

Ví dụ 3.10.

Cho A(4 ; 5), B (–6 ; –1), C (1 ; 1). Viết phương trình các đường cao và các đường trung tuyến của tam giác ABC.

Giải

• Đường cao đi qua A nhận $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến. Ta có B (–6 ; –1) ; C (1 ; 1) nên $\overrightarrow{BC} = (7 ; 2)$. Đường cao này có phương trình: $7(x - 4) + 2(y - 5) = 0$ hay $7x + 2y - 38 = 0$.

• Tương tự, $\overrightarrow{AC} = (-3 ; -4)$ là vectơ pháp tuyến của đường cao đi qua B nên đường cao này phương trình:

$$-3(x + 6) - 4(y + 1) = 0 \text{ hay } 3x + 4y + 22 = 0.$$

• Đường cao đi qua C có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (-10 ; -6)$ nên ta có phương trình:

$$-10(x - 1) - 6(y - 1) = 0 \text{ hay } 5x + 3y - 8 = 0.$$

• Đường trung tuyến qua A(4 ; 5), với vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a ; b)$, có phương trình tổng quát:

$$a(x - 4) + b(y - 5) = 0. \quad (1)$$

Đường trung tuyến này đi qua trung điểm A' của BC, với:

$$A' = \left(\frac{-6+1}{2} ; \frac{-1+1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2} ; 0\right).$$

Toạ độ A' phải nghiệm đúng phương trình (1) nên ta có:

$$a\left(-\frac{5}{2} - 4\right) + b(0 - 5) = 0 \text{ hay } 13a + 10b = 0.$$

Chọn a = 10 và b = −13, phương trình (1) trở thành:

$$10x - 13y + 25 = 0.$$

• Tương tự, toạ độ trung điểm của AC là $\left(\frac{5}{2} ; 3\right)$, toạ độ này nghiệm đúng phương trình đường trung tuyến qua B:

$$a(x + 6) + b(y + 1) = 0,$$

do đó, $a\left(\frac{5}{2} + 6\right) + b(3 + 1) = 0$, hay $17a + 8b = 0$. Chọn a = 8 và b = −17 ta được phương trình $8x - 17y + 31 = 0$.

• Toạ độ trung điểm của AB là (−1 ; 2), toạ độ này nghiệm đúng phương trình đường trung tuyến qua C:

$$a(x - 1) + b(y - 1) = 0,$$

suy ra $a(-1-1) + b(2 - 1) = 0$ hay $-2a + b = 0$. Chọn a = 1 và b = 2 ta được phương trình $x + 2y - 3 = 0$.

2.2. *Vị trí tương đối của hai đường thẳng*

Trong mặt phẳng toạ độ cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình :

$$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (1)$$

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (2)$$

Số điểm chung của hai đường thẳng (nếu có) bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và (2), ta có:

a) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

b) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ đồng thời } \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ hoặc } \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

c) Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Đặc biệt khi A_2, B_2, C_2 khác 0, ta có:

- Δ_1, Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$.
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Ví dụ 3.11.

Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau và tìm giao điểm của chúng (nếu có):

a) $2x - 5y + 3 = 0$ và $5x + 2y - 3 = 0$.

b) $x - 3y + 4 = 0$ và $0{,}5x - 1{,}5y + 4 = 0$.

c) $10x + 2y - 3 = 0$ và $5x + y - 1{,}5 = 0$.

Giải

a) Ta có $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{2}{5} \neq \dfrac{-5}{2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ nên hai đường thẳng cắt nhau giải hệ phương trình, ta được giao điểm $\left(\dfrac{9}{29}; \dfrac{21}{29}\right)$.

b) Ta có $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{1}{0{,}5} = \dfrac{-3}{-1{,}5} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{4}{4} = \dfrac{C_1}{C_2}$ nên hai đường thẳng song song nhau.

c) Ta có $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{10}{5} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{-3}{-1{,}5} = \dfrac{C_1}{C_2}$ nên hai đường thẳng trùng nhau.

Ví dụ 3.12.

Xét xem ba đường thẳng sau có đồng quy hay không:

(1) $x - y + \sqrt{29} = 0$; (2) $\sqrt{3}x - y = -\sqrt{29}$;

(3) $x - y + \sqrt{32} - 17 = 0$.

Hướng dẫn: Hai đường thẳng (1) và (2) cắt nhau, trong khi đó, hai đường thẳng (1) và (3) song song nhau. Do đó, ba đường thẳng đã cho không đồng quy.

Ví dụ 3.13.

Cho tam giác ABC có phương trình các cạnh:

AB : $2x - 3y - 1 = 0$

BC : $x + 3y + 7 = 0$

CA : $5x - 2y + 1 = 0$

Viết phương trình đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh B.

Giải

Toạ độ của điểm B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Suy ra $B\left(-2;\ -\dfrac{5}{3}\right)$. Lấy hai điểm $M\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{1}{5};\ 0\right)$ thuộc AC thì vectơ $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{1}{2}\right)$ là vectơ pháp tuyến của đường cao BB' của tam giác ABC. Phương trình BB' là:

$$-\frac{1}{5}(x+2) - \frac{1}{2}\left(y + \frac{5}{3}\right) = 0 \quad \text{hay} \quad 2x + 5y + \frac{37}{3} = 0.$$

BÀI TẬP

3.12. Các đường thẳng sau đây có đồng quy hay không:

$$2x - y + 1 = 0;\ x + 2y - 17 = 0;\ x + 2y - 3 = 0\ ?$$

3.13. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(5 ; –3), cắt trục Ox tại A và Oy tại B sao cho M là trung điểm của AB.

3.14. Cho đường thẳng d: $x - y = 0$ và điểm M(2; 1).

a) Tìm phương trình đường thẳng đối xứng với d qua M.

b) Tìm hình chiếu của M xuống đường thẳng d.

3.15. Cho ba đường thẳng có phương trình

$$x + 2y - 2 = 0;\ 2x + y - 13 = 0;\ x - 2y + 6 = 0.$$

Chứng minh rằng ba đường thẳng trên tạo thành một tam giác vuông.

3.16. Trong mặt phẳng hệ trục vuông góc Oxy, cho điểm A(1; 2), B(–1; 2) và đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 1 = 0$.

Tìm toạ độ điểm C trên d sao cho ΔABC có CA = CB.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

3.1. *Vectơ chỉ phương của đường thẳng*

Mỗi vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ nằm trên đường thẳng Δ hoặc trên đường thẳng song song với đường thẳng Δ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Như vậy, một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương, mỗi vectơ này vuông góc với mọi vectơ pháp tuyến. Nếu $\vec{n}(A;B)$ là một vectơ pháp tuyến thì $\vec{u}(-B;A)$ là một vectơ chỉ phương.

3.2. *Phương trình tham số của đường thẳng*

Hệ phương trình (1) sau đây được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ, với tham số t:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0). \qquad (1)$$

Ứng với mỗi giá trị của tham số t, ta tính được x và y từ công thức (1), và có được điểm M(x; y) nằm trên Δ. Ngược lại, nếu điểm M nằm trên Δ thì phải có một số t sao cho toạ độ của điểm M thoả mãn hệ phương trình (1).

Phương trình (1) chính là phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(x_0; y_0)$, biết vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b)$.

Ví dụ 3.14.

Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm trong mỗi thường hợp sau:

a) A = (–3; 0), B = (0; 5) ; b) A = (4; 1), B = (4; 2).

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;5)$, đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB. Vì đường thẳng AB đi qua A = (–3; 0) nên phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5t \end{cases}$.

b) Tương tự, $\overrightarrow{AB} = (0;1)$, phương trình tham số của đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 + t \end{cases}$.

Ví dụ 3.15.

Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 + 3t \end{cases}$.

a) Tìm giao điểm của d với trục hoành và với trục tung.

b) Các điểm A(1 ; 1), B(5 ; 1), C(3 ; 1), D(3 ; −2), có nằm trên đường thẳng d hay không?

Giải

a) Với y = 0 thì $0 = -5 + 3t$ hay $t = \frac{5}{3}$, nên $x = 1 + \frac{5}{3}.2 = \frac{13}{3}$.

Vậy đường thẳng cắt trục hoành tại điểm A($\frac{13}{3}$; 0).

Với x = 0 thì $0 = 1 + 2t$, suy ra $t = -\frac{1}{2}$. Khi đó:

$$y = -5 + 3t = -5 - \frac{3}{2} = -\frac{13}{2}.$$

Vậy đường thẳng cắt trục tung tại điểm B(0 ; $-\frac{13}{2}$).

b) Thử trực tiếp toạ độ của các điểm đã cho vào phương trình tham số, ta thấy các điểm B, D, nằm trên đường thẳng, các điểm A và C không nằm trên đường thẳng.

3.3. *Phương trình chính tắc của đường thẳng*

Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$.

Nếu a ≠ 0 và b ≠ 0, bằng cách khử tham số t từ hai phương trình trên , ta đi đến phương trình (2) sau đây, được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng Δ:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \qquad (2)$$

Nếu a = 0, thì phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bt \end{cases}$.

Khi đó Δ có phương trình tổng quát: $x - x_0 = 0$ và không có phương trình chính tắc. Tương tự, nếu b = 0 thì Δ có phương trình tổng quát: $y - y_0 = 0$ và không có phương trình chính tắc.

Ví dụ 3.16.

Viết phương trình chính tắc và phương trình tổng quát cho các đường thẳng ứng với mỗi trường hợp trong Ví dụ 3.14.

Giải.

a) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y}{5}$, phương trình tổng quát: $5x - 3y + 15 = 0$.

b) Không có phương trình chính tắc vì $a = 0$.

Phương trình tổng quát: $x - 4 = 0$.

Chú ý. 1) Nếu bài toán không đòi hỏi dạng của phương trình đường thẳng, thì tùy từng trường hợp cụ thể, ta nên chọn dạng phương trình đường thẳng mà có thể viết được nhanh nhất.

2) Trong trường hợp cần xác định phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$, mà bài toán không đòi hỏi dạng của phương trình đường thẳng, ta có thể áp dụng ngay công thức:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (*)$$

Công thức (*) có được bằng cách tiến hành tương tự như ở Ví dụ 3.14. Thật vậy, vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

Vì đường thẳng AB đi qua điểm $A(x_1; x_2)$ nên nó có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$. Khử t, dễ dàng có (*).

Ví dụ 3.17.

Cho điểm A(–5; 2) và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2}$. Hãy viết phương trình đường thẳng:

a) Δ_1 đi qua A và song song với Δ.

b) Δ_2 đi qua A và vuông góc với Δ.

Giải

a) Δ_1 có vectơ chỉ phương (1; –2) và đi qua A nên nó có phương trình $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y-2}{-2}$.

b) Đường thẳng Δ_2 qua A, nhận vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; -2)$ của Δ làm vectơ pháp tuyến nên Δ_2 có phương trình :

$$1(x + 5) - 2(y - 2) = 0 \text{ hay } x - 2y + 9 = 0.$$

Ví dụ 3.18.

Xét vị trí tương đối của cặp đường thẳng sau đây:

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 5 + t \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 8 + 6t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$$

Giải

Rõ ràng hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng là (–2; 1) và (6; –3) cùng phương, nên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau. Để xét xem chúng có trùng nhau hay không, ta lấy một điểm tuỳ ý thuộc đường thẳng thứ nhất rồi xem thử điểm này có thuộc đường thẳng thứ hai hay không.

Ta có điểm M(4; 5) của đường thẳng thứ nhất không thuộc đường thẳng thứ hai. Vậy hai đường thẳng song song.

Ví dụ 3.19.

Hãy xác định tọa độ điểm P trên đường thẳng Δ có phương trình $x - y + 2 = 0$ sao cho P cách đều hai điểm A(0; 4) và B(4; –9).

Giải

Phương trình dạng tham số của Δ là $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$. Vì $P \in \Delta$ nên $P(t, 2 + t)$. Từ điều kiện PA = PB, ta có phương trình :

$$t^2 + (t - 2)^2 = (t - 4)^2 + (11 + t)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t^2 - 4t + 4 = t^2 - 8t + 16 + 121 + 22t + t^2$$

$$\Leftrightarrow 18t + 133 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{133}{18}$$

Suy ra toạ độ của điểm P là $\left(-\frac{133}{18}; -\frac{97}{18}\right)$.

Ví dụ 3.20.

Cho điểm A(0 ; 1) và hai đường thẳng d, d' lần lượt có phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$, $x + y + 1 = 0$.

a) Hãy tìm trên d các điểm M sao cho AM = 5.

b) Tìm tọa độ giao điểm của d và d'.

Giải

a) Vì M thuộc đường thẳng d nên M(2 + 2t ; 3 + t). Theo đề bài, AM = 5 nên: $AM = \sqrt{(2 + 2t - 0)^2 + (3 + t - 1)^2} = 5$, hay

$$(2 + 2t)^2 + (t + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0,$$

suy ra $t = 1$ hoặc $t = -\frac{17}{5}$.

Với t = 1 ta được điểm M = (2 + 2 ; 3 + 1) = (4 ; 4).

Với $t = -\frac{17}{5}$ ta có điểm $M' = (2 - \frac{34}{5} ; 3 - \frac{17}{5}) = (-\frac{24}{5} ; -\frac{2}{5})$.

b) Để tìm giao điểm của d và d' ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \\ x + y + 1 = 0 \end{cases},$$

từ đó, t = –2 ; x = –2 ; y = 1. Vậy toạ độ giao điểm là N = (–2 ; 1).

Ví dụ 3.21.

Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M(3; –2) xuống đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$ b) d : $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-4}$ c) d : $5x - 12y + 10 = 0$.

Giải

a) Gọi H là hình chiếu của M trên d thì H(t; 1), suy ra $\overrightarrow{MH} = (t-3; 3)$. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0)$. Ta có MH ⊥ d $\Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{i} \Leftrightarrow t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Từ đó được H(3; 1).

Cách khác: Gọi H là hình chiếu của M trên d thì H là giao điểm d và d', trong đó d' là đường thẳng qua M và d' ⊥ d. Ta cần xác định phương trình của d', sau đó, tìm giao điểm d và d'.

Phương trình của d' là 1.(x – 3) + 0.(y + 2) = 0 ⇔ x – 3 = 0. Đường thẳng d có phương trình tổng quát là y – 1 = 0. Từ đó suy ra H(3; 1).

b) Phương trình dạng tham số của d:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -4t \end{cases}. \qquad (1)$$

Đường thẳng Δ' đi qua M và vuông góc với d có phương trình:

$$3.(x - 3) - 4.(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 17 = 0. \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: 3(1 + 3t) – 4(–4t) – 17 = 0 ⇔ 25t – 14 = 0 do đó $t = \dfrac{14}{25}$. Thay $t = \dfrac{14}{25}$ vào (1), toạ độ hình chiếu của M là

$$\left(\frac{67}{25}; -\frac{56}{25}\right).$$

c) Gọi d' là đường thẳng qua M, vuông góc với d. Khi đó d' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; -12)$. Phương trình tham số của d' là

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -2 - 12t \end{cases}.$$

Thay vào phương trình của d ta được:

$$5(3 + 5t) - 12(-2 - 12t) + 10 = 0 \Leftrightarrow 169t + 49 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{49}{169}.$$

Từ đó ta có toạ độ hình chiếu (x ; y) của M lên d cho bởi:

$$\begin{cases} x = 3 - 5.\dfrac{49}{169} = \dfrac{262}{169} \\ y = -2 + 12.\dfrac{49}{169} = \dfrac{250}{169} \end{cases}$$

Ví dụ 3.22.

Cho hình bình hành có một đỉnh là C(4; −1) và biết phương trình hai cạnh là: x − 3y = 0 và 2x + 5y + 6 = 0. Tìm ba đỉnh còn lại của hình bình hành đó.

Giải

Dễ thấy rằng đỉnh C không thuộc hai cạnh đã cho của hình bình hành nên hai cạnh còn lại phải đi qua C và song song với hai cạnh đã cho (x − 3y = 0 và 2x + 5y + 6 = 0). Gọi A là đỉnh đối diện với C, gọi B và D là hai đỉnh còn lại. A chính là giao điểm của hai đường thẳng x − 3y = 0 và 2x + 5y + 6 = 0. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + 5y + 6 = 0 \end{cases}$$

ta được $y = -\frac{6}{11}$, $x = -\frac{18}{11}$. Vậy toạ độ đỉnh A là $\left(-\frac{18}{11}; -\frac{6}{11}\right)$.

Phương trình đường thẳng qua C(4 ; −1) và song song với đường thẳng x − 3y = 0 là: 1(x − 4) − 3(y + 1) = 0 hay x − 3y − 7 = 0.

Phương trình đường thẳng qua C(4 ; −1) và song song với đường thẳng 2x + 5y + 6 = 0 là: 2(x − 4) + 5(y + 1) = 0 hay

$$2x + 5y - 3 = 0.$$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

ta được $11y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{11}$, $x = \frac{9}{11}$.

Vậy toạ độ của B là $\left(\frac{9}{11}; \frac{3}{11}\right)$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 5y + 6 = 0 \\ x - 3y - 7 = 0 \end{cases}$

ta được $11y + 20 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{20}{11}$, $x = 3y + 7 = \frac{17}{11}$.

Vậy D có toạ độ là $\left(\frac{17}{11}; -\frac{20}{11}\right)$.

BÀI TẬP

3.17. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm

a) $M(-4\,;3)$ và $N(1\,;-2)$; b) $A = (-4; 1)$, $B = (1; 4)$.

3.18. Tìm phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ trong mỗi trường hợp sau đây:

a) $M(1\,;-4)$ và $\vec{u}(2\,;3)$; b) $M \equiv O(0\,;0)$ và $\vec{u}(1\,;-2)$.

3.19. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau đây và tìm toạ độ giao điểm (nếu có) của chúng:

a) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 4t \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \end{cases}$ và $x + y - 5 = 0$;

c) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 3t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 - t \end{cases}$ và $x + y - 4 = 0$;

e) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 - 6t. \end{cases}$

3.20. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có phương trình là:

a) $\Delta_1: 2x + 3y + 1 = 0$ và $\Delta_2: 4x + 5y - 6 = 0$;

b) $\Delta_1: 3x - 2y + 1 = 0$ và $\Delta_2: 2x + 3y - 5 = 0$;

c) $\Delta_1: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$;

d) $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$ và $\Delta_2: 5x + 4y - 7 = 0$.

3.21. Cho đường thẳng $3x - 4y + 2 = 0$.

a) Viết phương trình của đường thẳng dưới dạng tham số, dạng chính tắc.

b) Viết phương trình của đường thẳng dưới dạng phương trình theo đoạn chắn.

3.22. Tìm phương trình tham số và phương trình chính tắc của:

a) Đường thẳng đi qua I(0 ; 3) và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x - 5y + 4 = 0$.

b) Đường thẳng đi qua hai điểm A(1 ; 5) và B(–2 ; 9).

3.23. Cho ba điểm A(3; 5), B(–1; 1), C(4; 2).

a) Chứng minh A, B, C là ba điểm không thẳng hàng.

b) Viết phương trình đường cao BB' của tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ điểm A', chân đường cao kẻ từ A.

3.24. Lập phương trình các cạnh của ΔABC, nếu B(–4; 5) và hai đường cao hạ từ hai đỉnh còn lại lần lượt có phương trình:

$$5x + 3y - 4 = 0 \text{ và } 3x + 8y + 13 = 0.$$

3.25. Cho ba điểm A(2 ; 5), B(–1 ; 2) và C(5 ; 4). Tìm phương trình đường thẳng d đi qua A sao cho hai khoảng cách từ B và C đến d bằng nhau.

§ 4. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

4.1. *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*

Trong mặt phẳng toạ độ cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $Ax + By + C = 0$. Khi đó, khoảng cách $d(M ; \Delta)$ từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến Δ là:

$$d(M; \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Nếu gọi M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên Δ, ta có: $\overrightarrow{M'M} = t.\vec{n}$. Trong quá trình chứng minh công thức khoảng cách trên (SGK), ta tính được $t = \dfrac{Ax_M + By_M + C}{A^2 + B^2}$.

Tương tự nếu có điểm $N(x_N ; y_N)$ với N' là hình chiếu của N trên Δ thì ta cũng có: $\overrightarrow{N'N} = t'.\vec{n}$, trong đó $t' = \dfrac{Ax_N + By_N + C}{A^2 + B^2}$.

Ví dụ 3.23.

Tìm tập hợp những điểm M(x; y) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $Ax + By + C = 0$ bằng h không đổi.

Giải

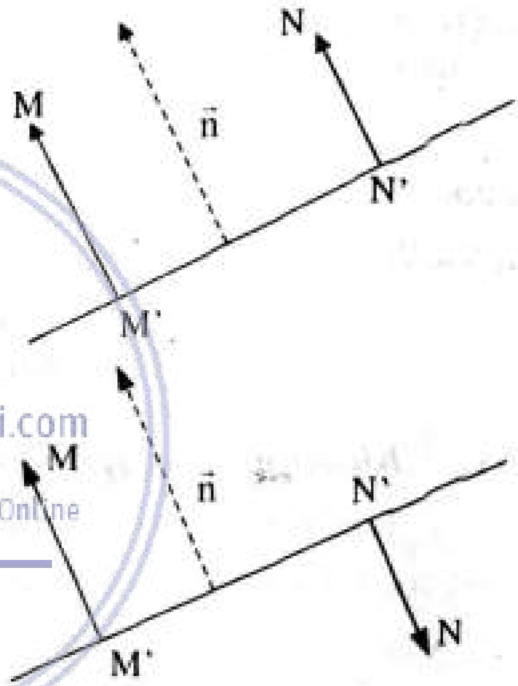
Ta có:

$$d(M;\Delta)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=h\Leftrightarrow |Ax+By+C|=h\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}Ax+By+C+h\sqrt{A^2+B^2}=0 & (1)\\ Ax+By+C-h\sqrt{A^2+B^2}=0 & (2)\end{array}\right.$$

Tập các điểm M là hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho, có phương trình tương ứng (1) và (2).

4.1.1. *Nhận xét.*



– t, t' cùng dấu khi và chỉ khi $\overrightarrow{M'M}$ và $\overrightarrow{N'N}$ cùng hướng, nghĩa là M, N ở về một phía của Δ.

– t, t' khác dấu khi và chỉ khi $\overrightarrow{M'M}$ và $\overrightarrow{N'N}$ ngược hướng, nghĩa là M, N ở về hai phía của Δ.

Như vậy:

Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với Δ khi và chỉ khi: $(Ax_M+By_M+C)(Ax_N+By_N+C)>0$.

Hai điểm M, N nằm khác phía đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(Ax_M+By_M+C)(Ax_N+By_N+C)<0.$$

Ví dụ 3.24.

a) Hai điểm (7; 6) và (–1; 2) nằm về hai phía của đường thẳng y = x – 2. Thật vậy, $y=x-2\Leftrightarrow x-y+2=0$ và ta có

$$(7-6+2)(-1-2+2)<0.$$

b) Hai điểm O(0; 0) và A(2; 0) cùng nằm về một phía của đường thẳng x – y + 2 = 0. Thật vậy, lần lượt thay toạ độ điểm O và điểm A vào vế trái của phương trình này, ta được hai số dương.

Ví dụ 3.25.

Cho ba điểm A(3; 0), B(–5; 4) và P(10; 2). Viết phương trình đường thẳng đi qua P và cách đều A, B.

Giải

Cách 1: Gọi Δ là đường thẳng qua P và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$. Khi đó ta có Δ: $a(x - 10) + b(y - 2) = 0$.

Theo đề bài, Δ cách đều A, B nên

$$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|-7a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-15a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |7a + 2b| = |15a - 2b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7a + 2b = 15a - 2b \\ 7a + 2b = -15a + 2b \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2a - b = 0 & (1) \\ a = 0 & (2) \end{array}\right.$$

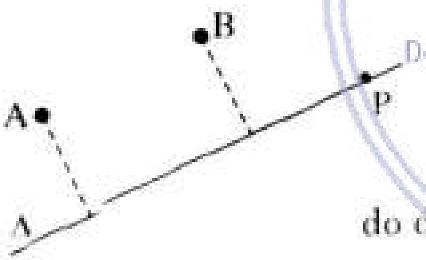
Với (1), ta lấy a = 1 thì b = 2. Khi đó phương trình Δ là:

$$x + 2y - 14 = 0.$$

Với (2), ta lấy b = 1. Khi đó phương trình Δ là: $y - 2 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn đề bài là $x + 2y - 14 = 0$ và $y - 2 = 0$.

Cách 2: Tiến hành như bài tập 3.25. Xét hai trường hợp:



Nếu A, B ở về một phía của Δ thì

$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \Delta \parallel AB$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-8; 4) = 4(-2; 1),$$

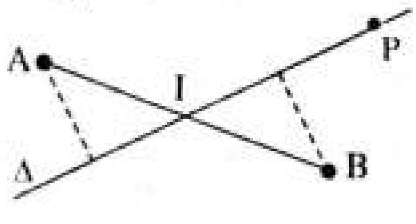
do đó phương trình của Δ là:

$$\frac{x - 10}{-2} = \frac{y - 2}{1} \text{ hay } x + 2y - 14 = 0.$$

Nếu A, B ở về hai phía của Δ thì

$d(A, \Delta) = d(B, \Delta)$

$\Leftrightarrow$ Δ đi qua trung điểm I của AB.



ta có $I(-1; 2)$, $\overrightarrow{PI} = (-11; 0)$, suy ra Δ: $y - 2 = 0$.

4.1.2. *Phương trình các đường phân giác*

Cho hai đường thẳng cắt nhau: Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Hai đường phân giác của hai góc tạo bởi hai đường thẳng đó có phương trình là:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \text{ hoặc}$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Ví dụ 3.26.

Cho hai đường thẳng Δ_1: $x + 2y - 3 = 0$ và Δ_2: $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm P(3; 1) và cắt (Δ_1), (Δ_2) lần lượt ở A, B sao cho: đường thẳng Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 một tam giác cân có cạnh đáy là AB.

Giải

Đường thẳng Δ cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt ở A, B. Gọi I là giao điểm của Δ_1, Δ_2 thì tam giác IAB là tam giác cân tại đỉnh I khi Δ vuông góc với phân giác trong của góc AIB.

Để giải bài toán ta viết phương trình các đường phân giác của các góc đỉnh I rồi viết phương trình đường thẳng qua P và vuông góc với một trong hai đường phân giác đó.

Phương trình hai đường phân giác là:

$$\frac{x + 2y - 3}{\sqrt{5}} = \frac{3x - y + 2}{\sqrt{10}} \ (m_1), \quad \frac{x + 2y - 3}{\sqrt{5}} = -\frac{3x - y + 2}{\sqrt{10}} \ (m_2) \text{ hay}$$

$$m_1: \quad (\sqrt{2} - 3)x + (2\sqrt{2} + 1)y - 3\sqrt{2} - 2 = 0$$

$$m_2: \quad (\sqrt{2} + 3)x + (2\sqrt{2} - 1)y - 3\sqrt{2} + 2 = 0.$$

Từ đó, ta viết được phương trình hai đường thẳng qua P và vuông góc với một trong hai đường phân giác đó.

Có hai đường thẳng cần tìm:

$$\frac{x - 3}{\sqrt{2} - 3} = \frac{y - 1}{2\sqrt{2} + 1} \text{ và } \frac{x - 3}{\sqrt{2} + 3} = \frac{y - 1}{2\sqrt{2} - 1}.$$

4.1.3. *Cách chọn đường phân giác trong (hoặc ngoài)*

Khi lập phương trình đường phân giác (chẳng hạn, AD của tam giác ABC), dùng 4.1.2, ta được hai phương trình, một phương trình biểu diễn phân giác trong và một phương trình biểu diễn phân giác ngoài. Để xét xem đâu là phân giác trong hoặc ngoài, ta thực hiện như sau: Chọn ra công thức ứng với dấu cộng (+) và kí hiệu biểu thức là f(x; y) = 0. Tính toạ độ của hai đỉnh còn lại, $B(x_1 ; y_1)$ và $C(x_2 ; y_2)$. Tiếp theo, thay toạ độ vào biểu thức phân giác, ta được $f(x_1 ; y_1)$ và $f(x_2 ; y_2)$. Khi đó:

Nếu $f(x_1 ; y_1).f(x_2 ; y_2) < 0$ thì $f(x ; y) = 0$ là phân giác trong.

Nếu $f(x_1 ; y_1).f(x_2 ; y_2) > 0$ thì $f(x ; y) = 0$ là phân giác ngoài.

Thực chất của việc làm trên là việc áp dụng nhận xét 4.1.1.

Ví dụ 3.27.

Cho ΔABC trong mặt phẳng hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, biết A(3 ; −7), B(9 ; −5), C(−5 ; 9). Viết phương trình đường phân giác trong của góc lớn nhất của ΔABC.

Giải

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-14; 14)$, $\overrightarrow{AC} = (-8; 16)$ và $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$.

Dễ thấy BC > AC > AB, vậy BC là cạnh lớn nhất, nên góc BAC là góc lớn nhất, ta phải lập phương trình đường phân giác trong của góc A.

Cạnh AB đi qua hai điểm A(3; −7) và B(9; −5) nên AB có phương trình: $\frac{x-3}{9-3} = \frac{y+7}{-5+7}$, hay $x - 3y - 24 = 0$.

Cạnh AC đi qua hai điểm A(3; −7) và C(−5; 9) nên AC có phương trình: $\frac{x-3}{-5-3} = \frac{y+7}{9+7}$, hay $2x + y + 1 = 0$.

Phân giác góc A: $\frac{x-3y-24}{\sqrt{10}} = \pm\frac{2x+y+1}{\sqrt{5}}$, suy ra

$$(1+2\sqrt{2})x - (3-\sqrt{2})y + (\sqrt{2}-24) = 0,$$

hoặc $(1-2\sqrt{2})x - (3+\sqrt{2})y - (\sqrt{2}+24) = 0$.

Để xét xem một trong hai đường thẳng trên đường nào là phân giác trong của góc A, ta đặt

$$f(x, y) = (1+2\sqrt{2})x - (3-\sqrt{2})y + (\sqrt{2}-24) = 0.$$

Khi đó, $f(x_B; y_B).f(x_C; y_C) = f(9; -5).f(-5; 9) < 0$, suy ra đường phân giác vừa chọn là phân giác trong, đường thẳng còn lại là phân giác ngoài. Vậy phân giác trong của góc lớn nhất của ΔABC là:

$$(1+2\sqrt{2})x - (3-\sqrt{2})y + (\sqrt{2}-24) = 0.$$

4.2. *Góc giữa hai đường thẳng*

Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc, góc nhỏ nhất trong bốn góc đó được gọi là *góc giữa hai đường thẳng a và b*, kí hiệu là (a, b). Khi a song song hoặc trùng với b, ta quy ước rằng góc giữa chúng bằng 0^0. Ta luôn có $(a, b) \le 90^0$.

Gọi $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a, b, ta có

$$(a, b) = (\vec{u}; \vec{v}) \text{ nếu } (\vec{u}; \vec{v}) \le 90^0;$$

$$(a, b) = 180^0 - (\vec{u}; \vec{v}) \text{ nếu } (\vec{u}; \vec{v}) > 90^0.$$

Ví dụ 3.28.

Mệnh đề sau đây đúng hay sai: Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh AB, AC của tam giác ABC, ta có

$$\cos\varphi = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}\ ?$$

Giải

Mệnh đề trên chỉ đúng trong trường hợp góc A của tam giác ABC là góc nhọn (suy từ định lí cosin). Khi góc A tù, ta có $\varphi = 180^0 - \hat{A}$, nên phải có

$$\cos\varphi = -\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}.$$

4.2.1. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt cho bởi các phương trình: $\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và $\Delta_2: A_2x + By_2 + C = 0$. Ta có

$$\cos(\Delta_1;\Delta_2) = \left|\cos(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2})\right| = \left|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

trong đó, $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của Δ_1, Δ_2 và $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ tương ứng là các vectơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2.

Ví dụ 3.29.

a) Cho hai đường thẳng Δ: $px + y + 3 = 0$, Δ': $x + py - 5 = 0$. Tính $\cos(\Delta, \Delta')$.

b) Cho ba điểm A(4; −1), B(−3; 2), C(1; 6). Tính góc BAC và góc giữa hai đường thẳng AB, AC.

Giải

a) $\cos(\Delta,\Delta') = \dfrac{2|p|}{p^2+1}$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-7; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 7)$,

$$\cos\widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{21}{29} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 43^0 36'.$$

Các đường thẳng AB, AC lần lượt có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, mà $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < 90^0$ nên $(AB, AC) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 43^0 36'$.

Ví dụ 3.30.

Ta tìm lại kết quả ở Ví dụ 3.26 bằng cách dùng công thức góc giữa hai đường thẳng. Gọi $\vec{n} = (A, B)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ cần tìm. Khi đó

$$(\Delta, \Delta_1) = (\Delta, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|A+2B|}{\sqrt{5(A^2+B^2)}} = \frac{|3A-B|}{\sqrt{10(A^2+B^2)}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|A+2B| = |3A-B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = (1+\sqrt{2})B \\ A = (1-\sqrt{2})B \end{array}\right.$$

Cho B = 1 thì $A = 1 \pm \sqrt{2}$. Vậy có hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu của đề bài là:

$$\Delta: (1+\sqrt{2})(x-3) + (y-1) = 0,\ \Delta': (1-\sqrt{2})(x-3) + (y-1) = 0$$

hay $\quad \Delta: (1+\sqrt{2})x + y - 4 - 3\sqrt{2} = 0,\ \Delta': (1-\sqrt{2})x + y - 4 + 3\sqrt{2} = 0.$

Chú ý. Hai phương trình hai đường thẳng tìm được này chính là hai phương trình tìm được ở Ví dụ 3.26. Thật vậy, ta có:

$$\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-3} = \frac{(2\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+3)}{-7} = \frac{7+7\sqrt{2}}{-7} = \frac{-(1+\sqrt{2})}{1},$$

$$\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+3} = \frac{(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-3)}{-7} = \frac{7-7\sqrt{2}}{-7} = \frac{-(1-\sqrt{2})}{1}.$$

Ví dụ 3.31.

Cho điểm M(2; 3). Viết phương trình đường thẳng cắt hai trục toạ độ ở A, B sao cho ABM là tam giác vuông cân tại M.

Giải

Bài toán trở thành: tìm hai điểm A(a; 0) và B(0; b) sao cho

$$\begin{cases} MA = MB & (1) \\ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 90^0 & (2) \end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a; b)$, $\overrightarrow{MA} = (a-2; -3)$, $\overrightarrow{MB} = (-2; b-3)$.

$(1) \Leftrightarrow (a-2)^2 + 9 = 4 + (b-3)^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a = b^2 - 6b,$

$(2) \Leftrightarrow 2(a-2) + 3(b-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + 3b - 13 = 0.$

Nhưng hệ $\begin{cases} 2a + 3b - 13 = 0 \\ a^2 - 4a = b^2 - 6b \end{cases}$ vô nghiệm, nên suy ra không tồn tại đường thẳng thoả mãn đề bài.

4.2.2. Giả sử hai đường thẳng cho bởi phương trình $y = k_1x + b_1$ và $y = k_2x + b_2$. Gọi φ là góc giữa chúng, ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{(1+k_1^2)(1+k_2^2)}}.$$

Suy ra các sự kiện quen thuộc trong đại số sau đây:

Điều kiện vuông góc của hai đường thẳng là $k_1k_2 = -1$.

Điều kiện song song của hai đường thẳng là $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$.

* Ngoài ra ta còn có công thức sau khi $k_1k_2 \neq -1$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Chứng minh. Từ công thức $\operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} - 1$ ta suy ra

$\operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{(1+k_1^2)(1+k_2^2)}{(k_1k_2+1)^2} - \dfrac{(k_1k_2+1)^2}{(k_1k_2+1)^2} = \dfrac{(k_2-k_1)^2}{(k_1k_2+1)^2}$, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.32.

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(0; 1) và tạo với đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$ một góc bằng 45^0.

Giải

Cách 1. Nhận thấy đường thẳng qua A có dạng $y = k_1x + 1$, với $k_1 \neq 0$, vì đường thẳng $x = 1$ không tạo với đường thẳng đã cho một góc 45^0. Ta có $x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$ nên đường thẳng đã cho có hệ số góc $k_2 = -\dfrac{1}{2}$. Sử dụng công thức trên với $\varphi = 45^0$, k_1 và k_2, ta có

$$1 = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2} - k_1}{1 - \frac{1}{2}k_1}\right|, \text{ hay } \frac{\frac{1}{2} + k_1}{1 - \frac{1}{2}k_1} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{3} \\ k_1 = -3 \end{array}\right..$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình

(Δ_1): $x - 3y + 3 = 0$ hoặc (Δ_2): $3x + y - 1 = 0$.

Cách 2. Đường thẳng qua (0; 1) có dạng

$$A(x - 0) + B(y - 1) = 0 \text{ hay } Ax + By - B = 0,$$

đường thẳng này có vectơ chỉ phương $\vec{u}(A; B)$. Đường thẳng đã cho $x + 2y + 3 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; 2)$. Ta có

$$\left|\cos(\vec{n};\vec{n}')\right| = \frac{|A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{5}} = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|A + 2B| = \sqrt{5}\sqrt{A^2 + B^2}$$

hay $2(A + 2B)^2 = 5(A^2 + B^2) \Leftrightarrow 8AB = 3A^2 - 3B^2$. Cho $A = 1$, ta tính được $B = -3$ hoặc $B = 1/3$ và suy ra kết quả như trên.

BÀI TẬP

3.26. Tính khoảng cách từ điểm $M(1 ; -2)$ đến các đường thẳng:

a) $3x - 4y + 8 = 0$ b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$

3.27. Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho ΔABC biết $A(1 ; 2)$; $B(3 ; 4)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua A và song song với Oy. Tính góc giữa (d) và AB.

3.28. a) Tìm điểm M' đối xứng với điểm $M(2 ; 5)$ qua đường thẳng

$$\Delta: x + 2y - 2 = 0.$$

b) Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua M.

3.29. Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho điểm $A(1 ; 1)$ và đường thẳng (d): $4x + 3y = 12$. Gọi B và C lần lượt là giao của (d) với trục Ox, Oy. Tính tọa độ trực tâm H của ΔABC.

3.30. Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho hình bình hành ABCD có số đo diện tích bằng 4. Biết đỉnh $A(1 ; 0)$; $B(2 ; 0)$ và giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên đường thẳng $y = x$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh C và D.

3.31. a) Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho ba điểm $A(3 ; 1)$, $B(2 ; 0)$, $C(0 ; 4)$. Chứng minh ΔABC vuông.

b) Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $I(-2 ; 3)$ và cách đều các điểm $A(5 ; -1)$ và $B(3 ; 7)$.

3.32. Cho hai điểm $O(0; 0)$ và $A(2; 0)$ và đường thẳng Δ có phương trình: $x + 2y - 2 = 0$

a) Tìm điểm đối xứng của O qua Δ.

b) Tìm điểm M trên Δ sao cho $OM + MA$ ngắn nhất.

3.33. Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1 ; 1)$, phương trình đường cao BH là:

$$-2x + y - 8 = 0$$

và phương trình đường cao CK là: $2x + 3y - 6 = 0$. Lập phương trình đường cao AE và tính tọa độ hai đỉnh B, C.

3.34. Cho một hình bình hành có tâm là điểm $I(3 ; 5)$ và hai cạnh của nó nằm trên hai đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ và $2x - 5y - 1 = 0$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của hình bình hành.

§ 5. ĐƯỜNG TRÒN

5.1. *Phương trình đường tròn*

Trên mặt phẳng toạ độ, cho đường tròn (C) tâm I(a; b) có bán kính R. Điểm M(x; y) thuộc đường tròn khi và chỉ khi IM = R, hay là: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (*). Ta gọi phương trình (*) là phương trình của đường tròn (C).

5.2. *Nhận dạng phương trình đường tròn*

Phương trình (*) tương đương với:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0,$$

như vậy, mỗi đường tròn trong mặt phẳng toạ độ đều có phương trình dạng: $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ (**).

Ngược lại, phương trình: $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$, với điều kiện $A^2+B^2>C$, là phương trình của đường tròn có tâm I(–A; –B) và có bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2-C}$.

Chú ý. (**) chỉ là phương trình đường tròn khi $A^2+B^2>C$. Khi $A^2+B^2<C$ hay $A^2+B^2-C<0$, tập hợp các điểm M thoả mãn (**) là tập rỗng. Khi $A^2+B^2=C$ hay $A^2+B^2-C=0$, tập hợp các điểm M chỉ có một điểm có toạ độ (–A; –B).

Ví dụ 3.33.

Phương trình $x^2+y^2+px+(p-1)y=0$ có phải là phương trình của một đường tròn không?

Giải

Ta có $R=\sqrt{A^2+B^2-C}=\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{(p-1)^2}{4}-0}>0$, đó chính là phương trình của một đường tròn có tâm $J\left(-\frac{p}{2};-\frac{p-1}{2}\right)$ và bán kính $R=\frac{1}{2}\sqrt{2p^2-2p+1}$.

Ví dụ 3.34.

Tìm tâm và bán kính của các đường tròn (nếu có) qua các phương trình sau:

a) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ b) $2x^2+2y^2-5x-4y+1-m^2=0$

Giải

a) $x^2+y^2-2x-2y-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=4$. Tâm đường tròn là I(1;1), bán kính R = 2.

Cách khác: *Không làm như trên mà áp dụng lí thuyết.*

Trong phương trình tổng quát của đường tròn

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0,$$

ta có $A = -1$, $B = -1$, $C = -2$. Vậy toạ độ tâm của đường tròn là $(1 ; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$.

b) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 - m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - 2y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{25}{16} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{33}{16} - \frac{8}{16}m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{16}(8m^2 + 33).$$

Tâm đường tròn là $I\left(\frac{5}{4} ; 1\right)$, $R = \frac{1}{4}\sqrt{8m^2 + 33}$.

Cách khác: Đưa phương trình đường tròn về dạng tổng quát

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - 2y + \frac{1 - m^2}{2} = 0,$$

ta có $A = -\frac{5}{4}$, $B = -1$, $C = \frac{1 - m^2}{2}$. Vậy đường tròn có tâm $I(-A ; -B) = I\left(\frac{5}{4} ; 1\right)$ và có bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 - C} = \frac{1}{4}\sqrt{8m^2 + 33}$.

Ví dụ 3.35.

Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $2MA^2 - 3MB^2 = k^2$, trong đó, $A(1 ; 1)$ và $B(9 ; 7)$.

Giải

Gọi toạ độ của M là $(x ; y)$, với $A(1 ; 1)$, $B(9 ; 7)$, ta có:

$$2MA^2 - 3MB^2 = k^2 \Leftrightarrow 2(x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 - 3(x - 9)^2 - 3(y - 7)^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - y^2 + 50x + 38y - 386 - k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 50x - 38y + 386 + k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 25)^2 + (y - 19)^2 = 600 - k^2. \ (*)$$

Vậy: • Nếu $k^2 < 600$, quỹ tích M là đường tròn có phương trình (*), với tâm $I = (25 ; 19)$, và bán kính $R = \sqrt{600 - k^2}$.

• Nếu $k^2 = 600$, quỹ tích M là một điểm $I = (25 ; 19)$.

• Nếu $k^2 > 600$, không tìm được điểm M nào thoả mãn điều kiện của đề bài.

5.3. *Tiếp tuyến của đường tròn*

Cho đường tròn (C) có tâm I(a; b), bán kính R và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên (C). Phương trình đường thẳng tiếp xúc với (C) tại M là $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$.

Ví dụ 3.36.

Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$.

a) Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn.

b) Viết phương trình tiếp tuyến đi qua A(–1; 0).

Giải

a) Tâm I(2 ; –4), bán kính $R = \sqrt{2^2 + 4^2 + 5} = 5$.

b) Bằng cách thử trực tiếp, toạ độ điểm A(–1 ; 0) thoả mãn phương trình của đường tròn đã cho, do đó, ta cần viết phương trình đường thẳng đi qua A, có vectơ pháp tuyến là $\vec{IA} = (-3 ; 4)$. Phương trình đường thẳng này là

$$-3(x + 1) + 4(y - 0) = 0 \Leftrightarrow -3x + 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 3 = 0.$$

Cách khác: Sử dụng công thức ở phần lí thuyết:

$$(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0,$$

ta có $(2 + 1)(x + 1) + (-4 - 0)(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 3 = 0$.

Ví dụ 3.37.

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x - y + 17 = 0$.

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$.

c) Tiếp tuyến đi qua điểm (2; –2).

Giải

Đường tròn có tâm O(0; 0), bán kính R = 2.

a) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình $3x - y + C = 0$, với $C \neq 17$, sử dụng điều kiện về tiếp tuyến (khoảng cách từ tâm O đến tiếp tuyến bằng R) ta có:

$$\frac{|C|}{\sqrt{10}} = 2 \Rightarrow C = \pm 2\sqrt{10}.$$

Ta được hai phương trình tiếp tuyến là $3x - y + 2\sqrt{10} = 0$ và $3x - y - 2\sqrt{10} = 0$.

b) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình $2x - y + C = 0$. Từ đó ta có: $\frac{|C|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow C = \pm 2\sqrt{5}$. Ta được hai phương trình tiếp tuyến là: $2x - 2y + 2\sqrt{5} = 0$ và $2x - 2y - 2\sqrt{5} = 0$.

c) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $A(x-2) + B(y+2) = 0$ $(A^2 + B^2) \neq 0$. Từ điều kiện tiếp xúc ta có:

$$\frac{|-2A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \text{, suy ra } A.B = 0.$$

Nếu $A = 0$ thì $B \neq 0$, ta được tiếp tuyến $y + 2 = 0$.

Nếu $B = 0$ thì $A \neq 0$, ta được tiếp tuyến $x - 2 = 0$.

5.4. *Bài toán tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác*

Cần chú ý vận dụng tính chất quen thuộc: *Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm ba đường phân giác, tâm này cách đều ba cạnh. Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm ba đường trung trực, tâm này cách đều ba đỉnh.* Đối với bài toán về đường tròn ngoại tiếp, nếu biết ba đỉnh, có thể thay toạ độ ba đỉnh vào phương trình tổng quát của đường tròn rồi xác định các thông số cần thiết (xem Ví dụ, cách 1).

Ví dụ 3.38.

Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho ba điểm $A(2; -4)$, $B(4/3; 2/3)$, $C(6; 0)$. Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

Giải

Dễ dàng tính được $AB = BC = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$ nên ΔABC cân tại B. Do đó, nếu kẻ $BH \perp AC$ thì H là trung điểm của AC, suy ra toạ độ $H(4; -2)$, ngoài ra BH là phân giác của góc ABC. Kẻ phân giác góc BAC, gọi I là giao điểm phân giác này với BH thì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Theo định lí đường phân giác, vì AI là phân giác góc BAH nên: $\dfrac{IB}{IH} = \dfrac{AB}{AH}$.

Ta lại có: $AB = BC = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$, $AH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$

nên $\dfrac{IB}{IH} = \dfrac{5}{3}$. Suy ra $-3\overrightarrow{IB} = 5\overrightarrow{IH}$, hay

$$-3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) = 5(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OI}) \Leftrightarrow 8\overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OH}.$$

Từ đó, suy ra tọa độ tâm đường tròn nội tiếp là $I(3; -1)$ và bán kính là $r = IH = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Ví dụ 3.39.

Cho ΔABC trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho biết $A(-1; 2)$; $B(2; 0)$; $C(-3; 1)$.

Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải

Cách 1. Giả sử phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Vì (C) đi qua A(−1; 2), B(2; 0) và C(− 3; 1) nên ta nhận được ba phương trình tương ứng:

$$5 + 2a - 4b + c = 0. \quad (1)$$

$$4 - 4a + c = 0. \quad (2)$$

$$10 + 6a - 2b + c = 0. \quad (3)$$

Giải hệ gồm ba phương trình trên ta được

$$a = -\frac{11}{14}, b = -\frac{13}{14}, c = -\frac{50}{7}.$$

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là I(−11/14; −13/14).

Cách 2. Trung điểm AB có tọa độ là M(1/2; 1). Đường trung trực của AB qua M có vectơ pháp tuyến (3; −2) nên phương trình đường trung trực AB là: $3x - 2y - \frac{1}{2} = 0$. Gọi N là trung điểm BC, đường trung trực BC có phương trình là: $-5x + y - 3 = 0$.

Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - 2y + \dfrac{1}{2} = 0 \\ -5x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11/14 \\ y = -13/14 \end{cases}$$

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là I(− 11/14; −13/14).

Ví dụ 3.40.

Viết phương trình của đường tròn đi qua ba điểm

M(1; −2), N(1; 2), P(5; 2).

Giải

Cách 1. Từ toạ độ của ba điểm, suy ra MN = 4, NP = 4 và MP = $\sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, suy ra tam giác MNP là tam giác vuông cân đỉnh N. Như vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác có bán kính bằng $\frac{1}{2}MP = 2\sqrt{2}$, có tâm là O(3; 0), trung điểm của MP. Phương trình đường tròn là $(x - 3)^2 + y^2 = 8$.

Cách 2. Gọi I(a; b) và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn cần tìm. Phương trình đường tròn có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Do đường tròn qua M, N, P nên ta có hệ:

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (-2-b)^2 = R^2 & (1') \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 & (2') \\ (5-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 & (3') \end{cases}$$

Dễ dàng giải được hệ bằng cách trừ theo vế (1') và (2'); (2') và (3') để tìm a, b. Sau đó thay a, b vừa tìm được vào một trong các phương trình đó để tìm R. *Chú ý:* Tránh khai triển 3 phương trình trên, làm cho việc giải thành phức tạp.

Cách 3. Viết phương trình hai đường trung trực, chẳng hạn của MN và NP, rồi giải hệ phương trình để tìm toạ độ tâm.

Ví dụ 3.41.

Viết phương trình của đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ và đi qua điểm (2; 1).

Giải

Để ý rằng điểm (2; 1) nằm ở góc phần tư thứ nhất nên đường tròn qua điểm (2; 1) chỉ có thể tiếp xúc với hai trục lần lượt tại các điểm thuộc các nửa trục Ox, Oy. Từ đó, nếu đặt tâm I(a, b) và bán kính R thì phương trình của đường tròn là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, với $a > 0$, $b > 0$.

Đường tròn tiếp xúc với Ox $\Leftrightarrow |b| = R$.

Đường tròn tiếp xúc với Oy $\Leftrightarrow |a| = R$.

Kết hợp với điều kiện đường tròn đi qua điểm (2; 1) ta có phương trình: $(2-a)^2 + (1-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 1$; $a = 5$.

* Với a = 1 ta có phương trình đường tròn: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

* Với a = 5 ta có phương trình đường tròn: $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Chú ý. Nếu không có nhận xét ban đầu, ta phải giải hệ:

$$\begin{cases}(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2 \\ |a| = |b|\end{cases}$$

Khi $a = b$, ta được kết quả trên. Khi $a = -b$, hệ vô nghiệm.

BÀI TẬP

3.35. Viết phương trình đường tròn (C) trong mỗi trường hợp:

a) (C) có tâm I(1; 3) và đi qua điểm A(3; 1).

b) (C) có tâm I(–2; 0) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $2x + y - 1 = 0$.

3.36. Tìm tâm và bán kính các đường tròn:

a) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0$;

b) $7x^2 + 7y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$.

3.37. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm (–1; 1), (2; 5) và tiếp xúc với trục Ox.

3.38. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = 90$, trong đó, A(1 ; 1) và B(9 ; 7).

3.39. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy cho ΔABC, với A(3; –7), B(9; –5), C(–5; 9). Hãy viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3.40. Tìm phương trình đường tròn qua ba điểm: $A(1; 2)$, $B(5; 2)$, $C(1; -3)$.

3.41. Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn (C) có phương trình: Δ: $3x + y + 1 = 0$, (C): $x^2 + y^2 - 4x + y + 1 = 0$.

3.42. Tìm phương trình đường tròn đi qua $M(2 ; 1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy.

3.43. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $B(3; -11)$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x + 2y = 0$.

c) Định m để đường thẳng $x + (m - 1)y + m = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn.

3.44. Cho hai đường tròn:

(C): $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$, (C'): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.

Tìm toạ độ các giao điểm của hai đường tròn đó.

3.45. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn: (C) có phương trình $x^2 + y - 1 = 0$ và (C') có phương trình

$$(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 16.$$

3.46. Trong mặt phẳng toạ độ cho điểm $A(3; 5)$ và đường thẳng

$$\Delta: 2x - y + 3 = 0.$$

a) Viết phương trình đường tròn tâm A tiếp xúc với Δ.

b) Tìm toạ độ của điểm A' đối xứng với A qua Δ.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua A sao cho $(\Delta; \Delta') = 60^0$.

3.47. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$. Tìm phương tích của điểm $M(x_0; y_0)$ đối với đường tròn (C).

3.48. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$ và điểm $A(-2; 3)$.

a) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

b) Tính độ dài các đoạn tiếp tuyến và khoảng cách giữa hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến nói trên.

§ 6. ĐƯỜNG ELIP

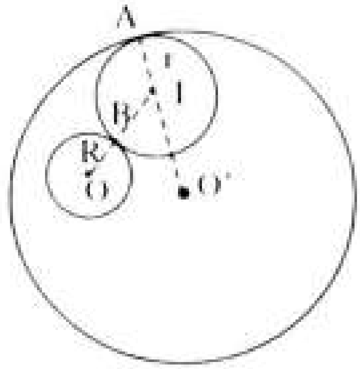
6.1. *Định nghĩa đường elip*

Cho hai điểm cố định F_1 và F_2, với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$. Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ trong đó $a > c$ là số không đổi.

Ta nói F_1 và F_2 là các *tiêu điểm* của elip. Khoảng cách 2c được gọi là *tiêu cự* của elip. Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M (với M nằm trên elip).

Ví dụ 3.42.

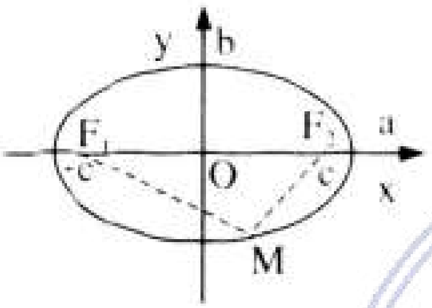
Cho đường tròn tâm O nằm trong đường tròn tâm O', với O khác O'. Chứng minh rằng quỹ tích tâm I của đường tròn tiếp xúc với (O) và (O') là một elip.



Giải

Giả sử đường tròn (I ; r) tiếp xúc trong với (O' ; R') tại A và tiếp xúc ngoài với (O ; R) tại B (R' < R). Khi đó IO' = R' – r và IO = R + r. Do đó, IO + IO' = R + R'. Rõ ràng R + R' > OO'. Vậy quỹ tích tâm I là đường elip nhận O và O' là hai tiêu điểm, có 2a = R + R', 2c = OO' (ở đây, a và c kí hiệu như định nghĩa trên).

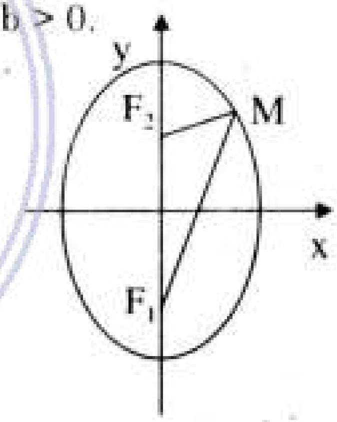
6.2. ***Phương trình chính tắc của đường elip***



* Chọn hệ trục toạ độ sao cho trục hoành Ox đi qua hai tiêu điểm F_1 và F_2, còn trục Oy là đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2. Khi đó, phương trình elip có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó, $a^2 - c^2 = b^2$, $a > b > 0$.



* Tương tự, nếu chọn hệ trục toạ độ sao cho Oy là đường thẳng đi qua hai tiêu điểm F_1 và F_2, còn Ox là trung trực đoạn F_1F_2 thì ta được phương trình elip có dạng:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

trong đó, $a^2 - c^2 = b^2$, $a > b > 0$.

Ngược lại: Nếu điểm M có toạ độ (x; y) thoả mãn một trong hai phương trình trên thì $MF_1 + MF_2 = 2a$, do đó M thuộc một elip.

Các phương trình trên được gọi là *phương trình chính tắc* của elip đã cho.

* *Công thức tính độ dài các bán kính qua tiêu điểm M*:

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx}{a}.$$

6.3. ***Chú ý khi làm toán***

6.3.1. Khi nhìn vào phương trình chính tắc của elip cần phải *so sánh hai mẫu số ở vế trái* để xác định xem hai tiêu điểm của elip nằm trên trục nào, từ đó xác định các yếu tố còn lại.

Ví dụ 3.43.

Cho hai elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ và (E'): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Xác định hai tiêu điểm và các đỉnh của (E), (E').

Giải

Elip (E) có phương trình chính tắc với tiêu điểm (0; −4) và (0; 4), các đỉnh (−3; 0); (3; 0) và (0; −5); (0; 5).

Elip (E') có phương trình chính tắc với tiêu điểm (−4; 0) và (4; 0), các đỉnh (0; −3); (0; 3) và (−5; 0); (5; 0).

6.3.2. Có hai loại bài toán thường gặp khi tìm phương trình chính tắc của elip (6.3.2.a và 6.3.2.b).

6.3.2.a. *Loại biết tiêu điểm của elip nằm trên trục nào.* Đối với loại toán này chúng ta chỉ cần dùng phương trình tương ứng.

Ví dụ 3.44.

Viết phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp:

a) Một tiêu điểm $F_1(-2\ ;0)$, tiêu điểm kia đối xứng qua O, độ dài trục lớn bằng 10.

b) Một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}\ ;0)$, tiêu điểm kia đối xứng qua O, điểm $M(1\ ;\frac{\sqrt{3}}{2})$ nằm trên elip.

Giải

a) Một tiêu điểm $F_1(-2\ ;0)$ suy ra c = 2. Độ dài trục lớn bằng 10, suy ra a = 5. Ta có: $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 4 = 21$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

b) Một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}\ ;0)$, suy ra $c=\sqrt{3}$. Giả sử elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Vì điểm $M(1\ ;\frac{\sqrt{3}}{2})$ nằm trên elip nên: $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$ hay $4b^2+3a^2=4a^2b^2$. Vì $a^2=b^2+c^2$ nên $a^2=b^2+3$ suy ra $4b^2+3(b^2+3)=4(b^2+3)b^2$ hay $4b^4+5b^2-9=0$.

Giải phương trình này ta được $b^2=1$ (loại nghiệm $b^2=-\frac{9}{4}$). Như vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

6.3.2.b. *Loại chưa xác định được vị trí của hai tiêu điểm* (chẳng hạn biết độ dài một trục và tâm sai). Với loại này ta phải xét cả hai trường hợp của vị trí tiêu điểm (trên trục tung hoặc hoành). Chú ý rằng trong chương trình 12 cũ, ta không cần xét hai trường hợp, bởi vì chương trình cũ quy định rằng *chỉ có một dạng* phương trình chính tắc, ứng với vị trí hai tiêu điểm nằm trên trục hoành.

Ví dụ 3.45.

Hai phát biểu sau đây có đúng không?

a) Elip có tiêu cự bằng 2c, trục lớn bằng 2a thì có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 - c^2 = b^2$.

b) Elip có phương trình $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ $(p \neq 0, q \neq 0)$ thì nó có tiêu cự $2c = \sqrt{p^2 - q^2}$.

Giải

a) Sai, vì elip có thể có dạng $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

c) Sai, vì có thể $p^2 - q^2 < 0$.

Ví dụ 3.46.

Viết phương trình chính tắc của đường elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) (E) có độ dài trục bé bằng 8 và tiêu cự bằng 4.

Giải

a) Trục lớn $2a = 8 \Rightarrow a = 4$. Từ $e = \frac{c}{a}$ suy ra $c = ae = 2\sqrt{3}$,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 12 = 4.$$

Nếu hai tiêu điểm thuộc Ox thì phương trình chính tắc của (E) là:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Nếu hai tiêu điểm thuộc Oy thì phương trình chính tắc của (E) là:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) ĐS: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ hoặc $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Ví dụ 3.47.

Tìm phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm M(1 ; 0) và $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ và xác định toạ độ hai tiêu điểm đó.

Giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng: $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$.

Elip đi qua M nên $\frac{1}{p^2} = 1$, $p^2 = 1$. Elip đi qua N nên $\frac{3}{4p^2} + \frac{1}{q^2} = 1$

Suy ra $q^2 = 4$. Vậy elip có phương trình: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$. Vì 4 > 1 nên trục tung đi qua hai tiêu điểm. Ta có $c^2 = 4 - 1 = 3$. Vậy toạ độ hai tiêu điểm là $F_1 = (0; -\sqrt{3})$ và $F_2 = (0; \sqrt{3})$.

Chú ý. Trong chương trình cũ, *chỉ thừa nhận một dạng phương trình chính tắc* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với a > b (HH12). Do đó, đối với chương trình cũ, cách giải như sau:

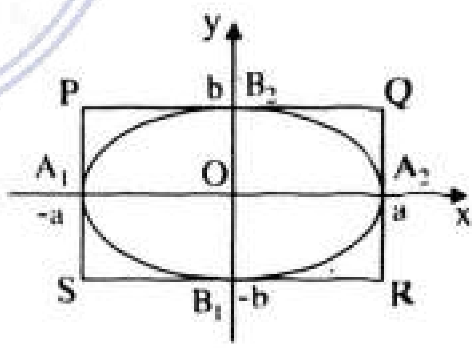
Giả sử elip có phương trình chính tắc dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vì elip đi qua hai điểm M(1 ; 0) và $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ nên: $\frac{1}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$ và $\frac{3}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$.

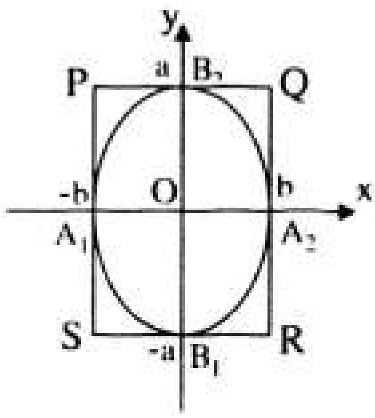
Suy ra $a^2 = 1$ và $b^2 = 4$. Ta không nhận được phương trình chính tắc của elip theo dạng trên, vì $a^2 < b^2$.

Các bạn lưu ý điều này để tránh nhầm lẫn.

6.4. *Hình dạng và tâm sai của elip*

6.4.1. *Hình chữ nhật cơ sở*





Elip có phương trình chính tắc sẽ nhận các trục toạ độ làm trục đối xứng và gốc toạ độ là tâm đối xứng. Nó cắt trục Ox tại hai điểm A_1 và A_2, cắt trục Oy tại hai điểm B_1 và B_2. Bốn điểm đó gọi là *đỉnh* của elip. Qua A_1 và A_2, vẽ hai đường thẳng song song với trục tung, qua B_1 và B_2, vẽ hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật PQRS. Ta gọi đó là *hình chữ nhật cơ sở* của elip. Chiều dài 2a và chiều rộng 2b của hình chữ nhật cơ sở lần lượt được gọi là *độ dài trục lớn* và *độ dài trục bé* của elip. Bốn đỉnh của elip nằm trên hình chữ nhật cơ sở. Bất kì điểm nào của elip mà không phải là đỉnh cũng đều nằm bên trong hình chữ nhật cơ sở của nó.

6.4.2. *Tâm sai của elip*

Ta gọi tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip là ***tâm sai*** của elip đó kí hiệu là e. Như vậy $e = \frac{c}{a}$. Rõ ràng là $0 < e < 1$.

+) Nếu tâm sai e càng bé (tức càng gần 0) thì hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng gần với đường tròn.

+) Nếu tâm sai e càng lớn (tức càng gần 1) thì hình chữ nhật cơ sở của nó càng "dẹt", do đó đường elip cũng càng "dẹt".

Ví dụ 3.48.

Một vệ tinh nhân tạo được phóng lên từ trái đất, nó chuyển động trên bầu trời theo quỹ đạo là một đường elip, elip này nhận tâm của trái đất làm một trong hai tiêu điểm. Theo quỹ đạo này, khoảng cách gần nhất và xa nhất của vệ tinh so với bề mặt trái đất tương ứng bằng 583 dặm và 1342 dặm (1 dặm ≈ 1,6 km). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó.

Giải

Gọi tâm trái đất là F_2 và giả sử quỹ đạo chuyển động của vệ tinh có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó khoảng cách từ vị trí M bất kì của vệ tinh đến tâm trái đất là: $d = MF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

Do $-a \le x \le a$ nên $a - c \le d \le a + c$.

Gọi R là bán kính trái đất. Theo đề bài, ta suy ra khoảng cách gần nhất và xa nhất của vệ tinh so với tâm F_2 của trái đất tương ứng bằng 583 + R dặm và 1342 + R dặm. Do đó:

$$\begin{cases} a - c = 583 + R \\ a + c = 1342 + R \end{cases}$$

Từ đó ta có $2c = 759$; $2a = 1925 + 2R$. Vậy tâm sai của quỹ đạo vệ tinh là

$$e = \frac{759}{1925 + 2R} = \frac{759}{1925 + 80000} \approx 0{,}009265.$$

Ví dụ 3.49.

Cho hai elip (E) và (E') lần lượt có phương trình

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của (E) và (E').

Giải

Toạ độ giao điểm của hai elip đã cho là nghiệm của:

$$\left.\begin{array}{l}2x^2+3y^2=6\\3x^2+2y^2=6\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+6y^2=12\\9x^2+6y^2=18\end{cases}\Rightarrow 5x^2=6\Rightarrow\begin{cases}x^2=6/5\\y^2=6/5\end{cases}.$$

Vậy đường tròn đi qua giao điểm của (E) và (E') có phương trình $x^2+y^2=12/5$.

Ví dụ 3.50.

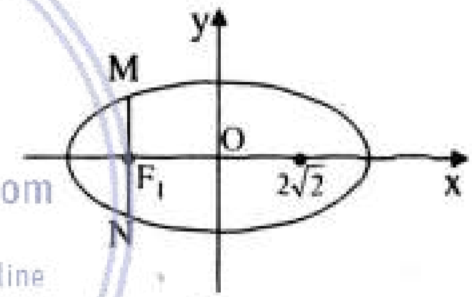
Cho đường elip (E): $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Ta gọi đoạn thẳng nối hai điểm của elip là *dây cung* của elip, trục chứa các tiêu điểm được gọi là *trục tiêu* của elip.

a) Tính độ dài dây cung của (E) đi qua một tiêu điểm và vuông góc với trục tiêu.

b) Tìm trên (E) điểm M sao cho $MF_1 = 2MF_2$ trong đó F_1, F_2 lần các tiêu điểm của (E) nằm bên trái và bên phải trục tung.

Giải

a) ***Cách 1.*** Đường thẳng Δ qua tiêu điểm F_1 và vuông góc với Ox có phương trình $x=-2\sqrt{2}$. Gọi M, N là giao điểm của Δ với elip, khi đó M và N có hoành độ bằng $-2\sqrt{2}$. Tung độ của M và N là $\pm\dfrac{1}{3}$. Vậy $MN=|y_M-y_N|$.



Cách 2. Do tính đối xứng ta có $MN = 2MF_1$; dùng công thức tính MF_1 với $x_M = -2\sqrt{3}$, ta cũng được $MN=\dfrac{2}{3}$.

b) Giả sử M(x; y), từ công thức tính bán kính qua tiêu điểm, ta có: $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow 3ex = a \Leftrightarrow x=\dfrac{a}{3e}=\dfrac{a^2}{3c}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Do đó, $y^2 = 1-\dfrac{x^2}{9}=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}\Rightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Vậy có hai điểm thoả mãn đề bài là: $M_1\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4};\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right)$ và $M_2\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4};-\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Ví dụ 3.51.

Cho elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Qua một tiêu điểm của elip này, ta kẻ đường vuông góc với trục hoành, đường thẳng này cắt elip tại A và B. Tính độ dài AB.

Chú ý. Đề bài nói: *cho elip có phương trình* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, thì a và b ở đây là các số tuỳ ý chứ *không có nghĩa* là a > b như đã nói trong 5.2. Chú thích này rất quan trọng, vì nếu không để ý như thế, ta dễ chỉ xét một trường hợp a > b mà thôi.

Giải

* Xét trường hợp a < b, ta thấy ngay độ dài của AB là 2b.

* Xét trường hợp elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với a > b. Đường thẳng vuông góc với Ox tại tiêu điểm này hoặc tiêu điểm kia đều cho ta độ dài AB bằng nhau. Do đó, có thể giả sử đường thẳng đó đi qua tiêu điểm $F_1 = (-c; 0)$, đường thẳng này có phương trình x = –c. Thay vào phương trình của elip ta được $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hay $y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{b^2}{a}$.

Như vậy toạ độ hai giao điểm là: $A = \left(-c; -\frac{b^2}{a}\right)$ và $B = \left(-c; \frac{b^2}{a}\right)$.

Suy ra ta có $AB = \frac{2b^2}{a}$.

BÀI TẬP

3.49. Cho đường elip có độ dài trục lớn là 20m, tâm sai của đường elip này là $e \approx 0,15$. Hãy tìm độ dài trục bé.

3.50. Tìm tâm sai của một elip có độ dài trục lớn bằng k lần độ dài trục bé (k > 1).

3.51. Viết phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp:

a) Độ dài trục lớn bằng 6, tiêu cự bằng 4.

b) Một tiêu điểm $F_1(-2 ; 0)$, tiêu điểm kia đối xứng qua O, độ dài trục lớn bằng 10.

c) Một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3} ; 0)$, tiêu điểm kia đối xứng qua O, điểm $M(1 ; \frac{\sqrt{3}}{2})$ nằm trên elip.

3.52. Cho $F_1(-\sqrt{5} ; 0)$, $F_2(\sqrt{5} ; 0)$ và I(0; 3).

a) Hãy viết phương trình chính tắc của đường elip có tiêu điểm là F_1, F_2 và đi qua I.

b) Khi M chạy trên elip đó, khoảng cách MF_1 có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất bằng bao nhiêu?

3.53. Cho đường thẳng Δ: $x - 2y + m = 0$ và elip: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.

a) Với giá trị nào của m đường thẳng Δ cắt elip?

b) Khi đường thẳng và elip chỉ có một điểm chung thì Δ được gọi là *tiếp tuyến* của elip. Định m để Δ là tiếp tuyến của elip.

3.54. Cho elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với a > b. Tìm điểm M nằm trên elip sao cho $MF_1 = 2MF_2$, với F_1 và F_2 là hai tiêu điểm tương ứng nằm bên trái và bên phải của gốc toạ độ.

§ 7. ĐƯỜNG HYPEBOL

7.1. *Định nghĩa đường hypebol*

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$. Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ trong đó a là số dương không đổi, a < c.

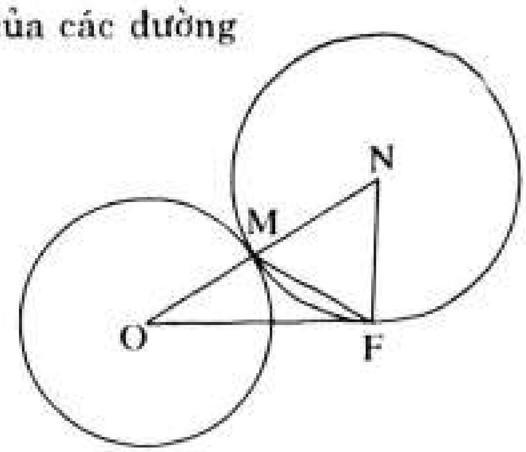
Ta gọi F_1, F_2 là các *tiêu điểm* của hypebol.

Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ được gọi là *tiêu cự* của hypebol.

Nếu M là một điểm nằm trên Hypebol thì các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M.

Ví dụ 3.52.

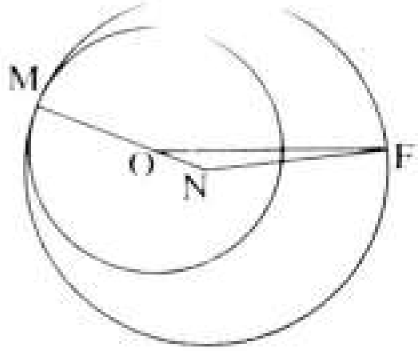
Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm F nằm ngoài (O). Hãy tìm tập hợp các tâm của các đường tròn đi qua F và tiếp xúc với (O).



Giải

Gọi N là tâm của đường tròn đi qua F và tiếp xúc với (O).

Hai đường tròn (N) và (O) tiếp xúc ngoài ở M khi và chỉ khi:



$$ON = R + NM = R + NF$$

$$\Leftrightarrow NO - NF = R.$$

Nếu chúng tiếp xúc trong ở M thì ta có điều kiện tương đương là:

$$ON = NM - R = NF - R$$

$$\Leftrightarrow NF - NO = R.$$

Tóm lại, N là tâm đường tròn qua F và tiếp xúc với (O) ở M khi và chỉ khi $|NO - NF| = R$ không đổi. Vậy tập hợp các điểm N là hypebol nhận O, F làm hai tiêu điểm, độ dài trục thực bằng R.

7.2. *Phương trình chính tắc của đường hypebol*

Ta chọn một hệ trục toạ độ sao cho trục hoành Ox đi qua hai tiêu điểm F_1 và F_2. Trục Oy là đường trung trực của F_1F_2. Khi đó $F_1(-c; 0)$ $F_2(c; 0)$ và phương trình hypebol có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (*)$$

trong đó $b^2 = c^2 - a^2$. Nếu chọn trục tung đi qua hai tiêu điểm của hypebol thì phương trình hypebol có dạng:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad (**)$$

trong đó $b^2 = c^2 - a^2$. Các phương trình (*) và (**) được gọi là các *phương trình chính tắc* của hypebol.

Chú ý. So với chương trình cũ, chỉ có một dạng phương trình chính tắc, đó là (*). Do đó, khi làm bài tập, *nếu chưa xác định được vị trí của hai tiêu điểm* (chẳng hạn, biết a và c như ví dụ dưới đây) thì ta phải xét cả hai trường hợp của vị trí tiêu điểm (trên trục tung hoặc hoành).

Ví dụ 3.53.

Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp sau:

a) Trị tuyệt đối hiệu các bán kính qua tiêu của điểm M bất kì trên hypebol là 8; tiêu cự bằng 10.

b) Có $2c = 10$, $2a = 8$ và tiêu điểm nằm trên Oy.

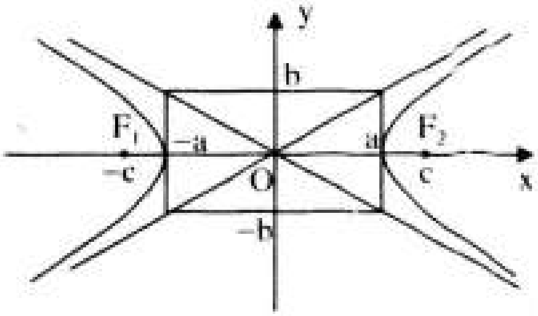
Giải

a) Theo đề bài $a = 4$ và $c = 5$. Ta có: $b^2 = c^2 - a^2 = 9$. Vậy phương trình chính tắc của hypebol là:

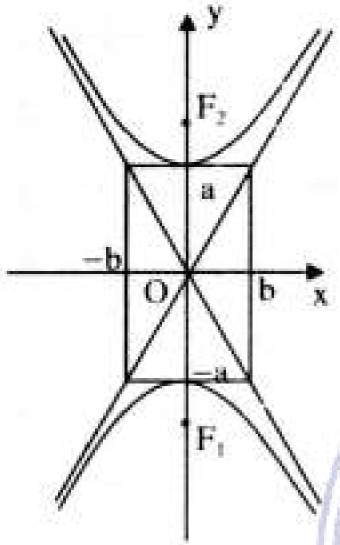
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ hoặc } -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) $c = 5$, $a = 4$ và tiêu điểm nằm trên Oy nên phương trình chính tắc của hypebol là: $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

7.3. *Hình dạng của hypebol*



a) Gốc toạ độ O là tâm đối xứng; Ox, Oy là hai trục đối xứng của hypebol. Trục đối xứng chứa hai tiêu điểm được gọi là *trục thực*, trục kia được gọi là *trục ảo* của hypebol.



b) Hypebol (*) hoặc (**) cắt trục thực ở hai điểm, ta gọi là các *đỉnh* của hypebol. Khoảng cách 2a giữa hai đỉnh được gọi là *độ dài trục thực*, 2b được gọi là *độ dài trục ảo*.

c) Ta gọi tỉ số $\frac{c}{a} = e$ giữa tiêu cự và độ dài trục thực là *tâm sai* của đường hypebol. Chú ý rằng ta luôn có $e > 1$ (khác với trường hợp elip: $0 < e < 1$).

d) *Đường tiệm cận*: Hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai đường tiệm cận là hai đường thẳng có phương trình $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ và $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Hypebol: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai đường tiệm cận là hai đường thẳng có phương trình $-\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 0$ và $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 0$.

Chú ý: Hypebol (với phương trình như trên) có hai đường tiệm cận vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 3.54.

Xét hypebol (H_1): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Ta có:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$; $c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$.

(H_1) có tiêu điểm: $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$, độ dài trục thực: $2a = 8$, độ dài trục ảo: $2b = 6$, có phương trình các tiệm cận là: $y = \pm\frac{3}{5}x$. Xét hypebol (H_2): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$. Ta có $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$; $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$.
(H_2) có tiêu điểm: $F_1(0; -5)$, $F_2(0; 5)$, độ dài trục thực: $2a = 6$, độ dài trục ảo: $2b = 8$, có phương trình các tiệm cận là: $y = \pm\frac{3}{5}x$.

Ví dụ 3.55.

Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tuỳ ý trên đường hypebol đến hai đường tiệm cận là một số không đổi.

Giải

Xét hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hai đường tiệm cận của (H) là:

$$\Delta_1:\ y = \frac{b}{a}x \text{ hay } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0;\ \Delta_2:\ y = -\frac{b}{a}x \text{ hay } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Điểm $M(x_0; y_0) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Ta có tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận không đổi, bởi vì:

$$\frac{\left|\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{\left|\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{\left|\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right|}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Với hypebol dạng chính tắc kia, tiến hành tương tự.

Ví dụ 3.56.

Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$, một đường tiệm cận là $y = \frac{2}{3}x$ và tiêu điểm nằm trên Ox.

b) Có tâm sai $e = \sqrt{5}$, đi qua điểm $\left(\sqrt{10}; 6\right)$ và tiêu điểm nằm trên Oy.

Giải

a) Hypebol có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (do tiêu điểm nằm trên Ox). Ta có $2c = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 + b^2 = 3$.

Từ giả thiết ta có $\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{2a}{3}$.

Từ đó $a^2 + \frac{4a^2}{9} = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{27}{13}, b^2 = \frac{12}{13}$.

Vậy phương trình hypebol là: $\dfrac{x^2}{\frac{27}{13}} - \dfrac{y^2}{\frac{12}{13}} = 1$.

b) Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c = \sqrt{5}a \\ \dfrac{10}{b^2} - \dfrac{36}{a^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5a^2 \\ \dfrac{10}{b^2} - \dfrac{36}{a^2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{67}{2} = 33,5 \\ b^2 = 134 \end{cases}.$$

Do tiêu điểm nằm trên Oy nên phương trình của hypebol là

$$\frac{x^2}{33,5} - \frac{y^2}{134} = -1.$$

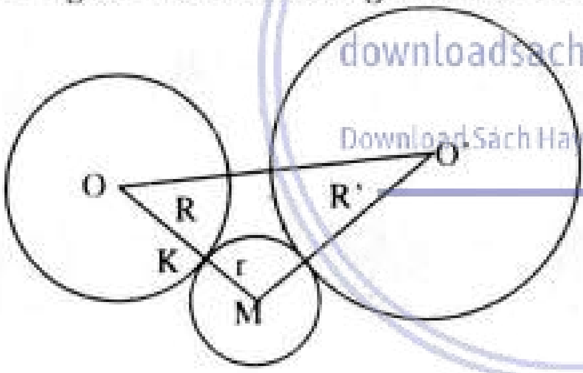
Ví dụ 3.57.

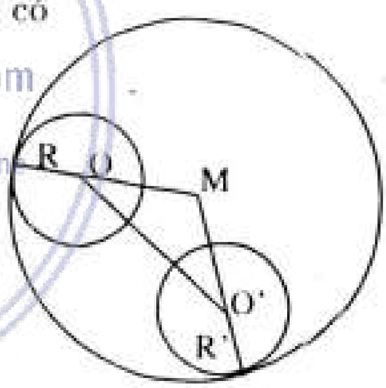
Tìm quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với cả hai đường tròn ngoài nhau cho trước.

Giải

Giả sử đường tròn (M; r) tiếp xúc với cả hai đường tròn (O; R) và (O'; R'). Có thể xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp 1. Đường tròn (M) cùng tiếp xúc trong hay cùng tiếp xúc ngoài với hai đường tròn đã cho. Khi đó ta có

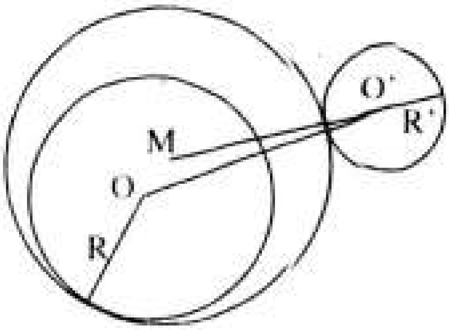




$$\begin{cases} MO = R + r \\ MO' = R' + r \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} MO = -R + r \\ MO' = -R' + r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow MO - MO' = \pm(R - R') \Leftrightarrow |MO - MO'| = |R - R'|. \quad (1)$$

Trường hợp 2. Đường tròn (M) tiếp xúc trong với một đường tròn và tiếp xúc ngoài với đường tròn kia. Khi đó ta có



$$\begin{cases} MO = R + r \\ MO' = r - R' \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} MO = r - R' \\ MO' = r + R \end{cases}, \text{ suy ra}$$

$$MO - MO' = \pm(R + R') \Leftrightarrow |MO - MO'| = R + R'. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta kết luận:

+ Nếu $R \neq R'$, tâm các đường tròn (M) thuộc một trong hai hypebol có cùng tiêu điểm O, O' và độ dài trục thực tương ứng bằng $|R - R'|$, $R + R'$.

+ Nếu $R = R'$, tâm các đường tròn (M) thuộc đường trung trực của đoạn OO' hoặc thuộc hypebol có tiêu điểm O, O' và độ dài trục thực bằng 2R.

BÀI TẬP

3.55. Tìm quỹ tích các điểm M(x; y) với $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b\operatorname{tg}t$, trong đó t là tham số thực thoả điều kiện $t \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$.

3.56. Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tiêu cự bằng $2\sqrt{13}$, một tiệm cận là $y = \frac{2}{3}x$, tiêu điểm nằm trên Oy.

b) Có tiêu điểm nằm trên Ox, tâm sai $e = \sqrt{5}$, hypebol đi qua điểm $(10; 6)$.

3.57. Cho elip (E): $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hypebol (H): $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Tìm toạ độ các tiêu điểm của (E) và (H).

b) Tìm toạ độ các giao điểm của hai đường đó.

3.58. Cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

a) Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) nhận các tiêu điểm của (E) làm đỉnh và có hai tiêu điểm là hai đỉnh của elip (E).

b) Viết phương trình của đường tròn đi qua các giao điểm của hai đường elip (E) và hypebol (H)

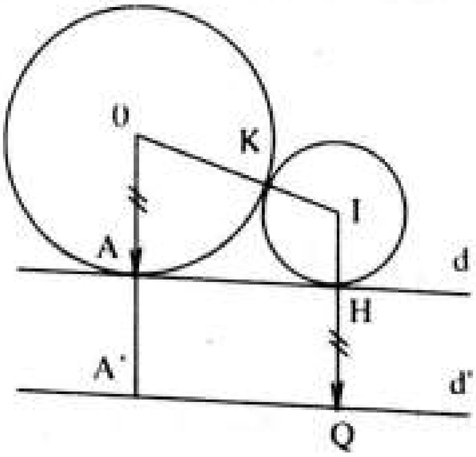
§ 8. ĐƯỜNG PARABOL

8.1. *Định nghĩa đường parabol*

Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp những điểm M có khoảng cách đến F bằng khoảng cách từ nó đến Δ được gọi là *đường parabol* (hay parabol). Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là *đường chuẩn* của parabol. Khoảng cách $d(F,\Delta) = p$ từ F đến Δ được gọi là *tham số tiêu* của parabol.

Ví dụ 3.58.

Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm quỹ tích tâm các đường tròn thay đổi nhưng tiếp xúc với (O) và (d) tại hai điểm phân biệt.



Giải

Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm A. Gọi (I ; r) là đường tròn thay đổi, tiếp xúc với Δ tại H và tiếp xúc với (O) tại K. Trên tia OA lấy điểm A' sao cho AA' = OA, và gọi (d) là đường thẳng đi qua A' và song song với Δ. Ta có:

$$IO = IK + KO = r + OA,\ IQ = IH + HQ = r + OA.$$

Do đó, điểm I cách đều đường thẳng (d) và điểm O. Vậy quỹ tích tâm I là parabol với O là tiêu điểm và (d) là đường chuẩn.

8.2. *Phương trình chính tắc của parabol*

Cho parabol với tiêu điểm F và đường chuẩn Δ.

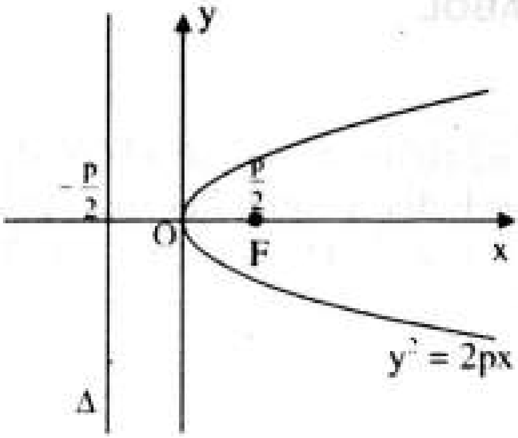
Chọn hệ trục toạ độ theo những cách khác nhau như hình bên dưới, ta sẽ có các dạng *phương trình chính tắc* của parabol như sau (với $p > 0$):

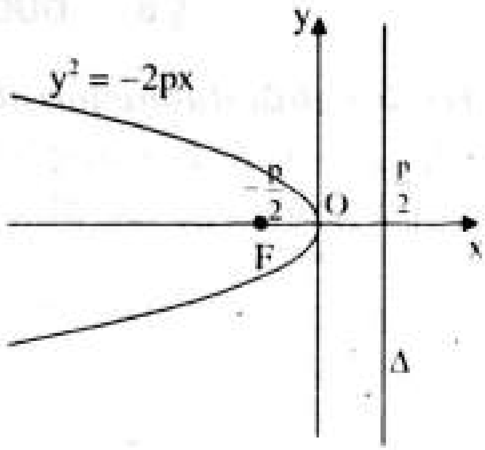
a) $y^2 = 2px$. Tiêu điểm: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, đường chuẩn: $x + \frac{p}{2} = 0$.

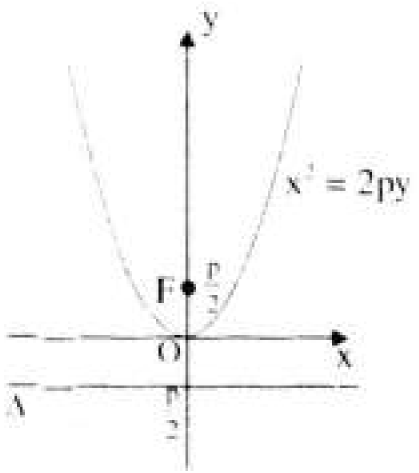
b) $y^2 = -2px$. Tiêu điểm: $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, đường chuẩn: $x - \frac{p}{2} = 0$.

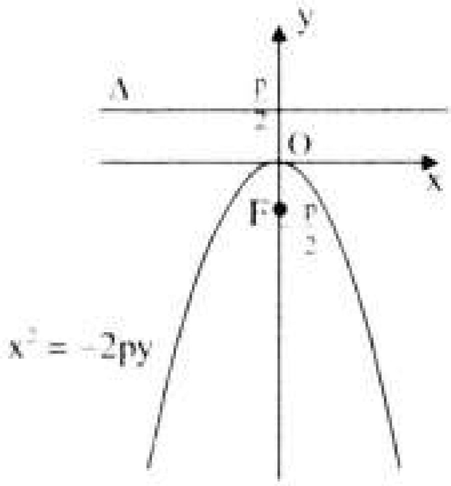
c) $x^2 = 2py$. Tiêu điểm: $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, đường chuẩn: $y + \frac{p}{2} = 0$.

d) $x^2 = -2py$. Tiêu điểm: $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, đường chuẩn: $y - \frac{p}{2} = 0$.









Các parabol trên có:

• Ox (hoặc Oy) là trục đối xứng của parabol.

• Parabol cắt trục Ox (hoặc Oy) ở một điểm O và đó cũng là điểm duy nhất trên Oy (hoặc Ox) thuộc parabol. Gốc toạ độ O được gọi là *đỉnh* của parabol.

Ví dụ 3.59.

Viết phương trình chính tắc của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) có Ox là trục đối xứng và đi qua điểm M(–2; 5).

b) (P) có tiêu điểm F(3; 0).

c) (P) có tiêu điểm F(–4; 0).

d) (P) có tham số tiêu là $p = \frac{1}{3}$ và trục đối xứng là Oy.

Giải

a) Vì hoành độ của M là $x = -2 < 0$ và trục đối xứng của parabol là trục Ox nên phương trình chính tắc của parabol đó có dạng $y^2 = -2px$. Thay toạ độ của M vào phương trình ta được:$25 = -2p.(-2)$, suy ra $p = \frac{25}{4}$. Từ đó ta được phương trình chính tắc của parabol là: $y^2 = -\frac{25}{2}x$.

b) Vì tiêu điểm F(3; 0) (nằm trên trục hoành, bên phải O) nên $p = 6$ và parabol có phương trình $y^2 = 12x$.

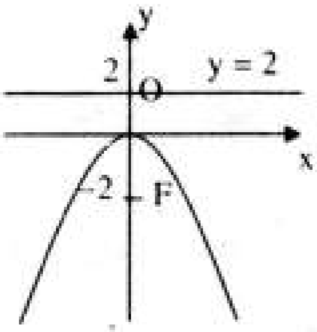
c) Vì tiêu điểm F(–4; 0) (nằm trên trục hoành, bên trái O) nên $p = 8$ và parabol có phương trình $y^2 = -16x$.

d) (P) trục đối xứng là Oy nên có phương trình $x^2 = 2px$ (khi tiêu điểm nằm trên O) hoặc $x^2 = 2px$ (khi tiêu điểm nằm dưới O). Vậy phương trình parabol đã cho là $x^2 = \frac{2}{3}y$ hoặc $x^2 = -\frac{2}{3}y$.

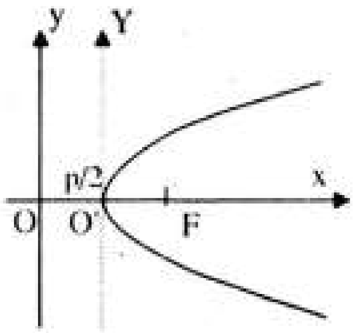
Ví dụ 3.60.

Vẽ các đường $x^2 = -8y$, $y^2 = 2p(x - \frac{p}{2})$, với $p > 0$.

Giải



$x^2 = -8y$



$y^2 = 2p(x - \frac{p}{2})$

Nếu đặt $Y = y$ và $X = x - \frac{p}{2}$ thì

$$Y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 2pX.$$

Xét hệ trục mới xO'Y (như hình vẽ), với toạ độ O' trong hệ xOy là $O'\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và trục tung O'Y có phương trình $x = \frac{p}{2}$, trục hoành O'X trùng với trục Ox. Khi đó, trong hệ mới XO'Y, đường đã cho có dạng $Y^2 = 2pX$, đây là phương trình chính tắc của parabol và dễ dàng vẽ được như lí thuyết.

Chú ý. Phương pháp thực hiện như trên được gọi là phương pháp đổi trục, với công thức đổi trục

$$\begin{cases} X = x - \frac{p}{2}. \\ Y = y \end{cases}$$

Trong chương trình SGK không nói điều này, nhưng chúng tôi nêu ra ví dụ đơn giản như trên nhằm nhận dạng và vẽ được một số đường cong.

Ví dụ 3.62.

Đường cong $y = -\frac{1}{2}(x^2 - 3)$ có phải là parabol không? Xác định tiêu điểm nếu nó là parabol.

Giải

Ta có: $y = -\frac{1}{2}(x^2 - 3) \Leftrightarrow x^2 = -2(y - \frac{3}{2})$.

Đặt $X = x$ và $Y = y - \frac{3}{2}$ ta có phương trình : $X^2 = -2Y$. Như vậy, đường cong đã cho là parabol trong hệ toạ độ mới XO'Y, với tham số tiêu bằng -1. Vậy tiêu điểm trong hệ toạ độ mới có toạ độ là X = 0 và

$Y = \frac{1}{2}$. Suy ra toạ độ tiêu điểm trong hệ trục ban đầu là F(x; y), với: $x = 0$, $y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$.

Vậy đường cong $y = -\frac{1}{2}(x^2 - 3)$ là parabol có toạ độ tiêu điểm là F (0 ; 1).

Ví dụ 3.63.

Cho parabol $y^2 = 2px$. Với mỗi điểm M trên parabol, gọi M' là hình chiếu của M trên Oy và I là trung điểm đoạn OM'. Chứng minh rằng đường thẳng IM cắt parabol tại một điểm duy nhất.

Giải

Ta có $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0^2 = 2px_0$. Dễ thấy $I\left(0; \frac{y_0}{2}\right)$ và phương trình đường thẳng IM là: $\frac{x}{x_0} = \frac{2y}{y_0} - 1$. Xét hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 2px & (1) \\ \frac{x}{x_0} = \frac{2y}{y_0} - 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $x = \frac{2x_0}{y_0}y - x_0$. Thay vào (1) ta được:

$$y^2 = 2p\left(\frac{2x_0}{y_0}y - x_0\right).$$

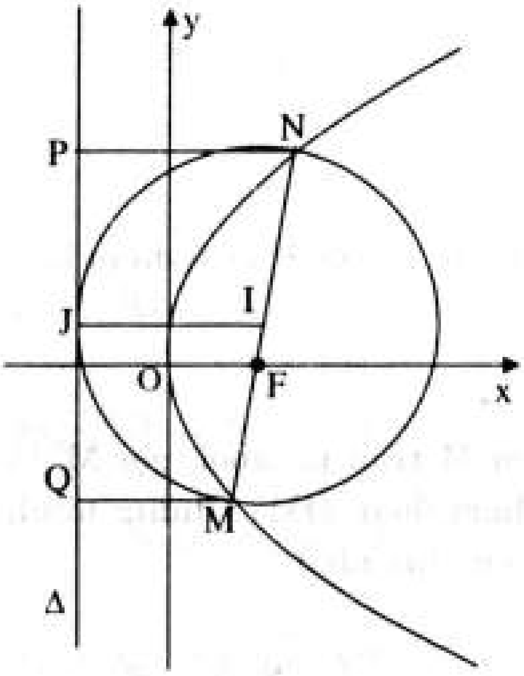
Mặt khác, lại có $x_0 = \frac{y_0^2}{2p}$; vì vậy $y^2 = 2p\left(\frac{y_0 y}{p} - \frac{y_0^2}{2p}\right)$ hay

$$y^2 - 2y_0 y + y_0^2 = 0.$$

Phương trình trên có nghiệm kép $y = y_0$, suy ra IM chỉ có chung với (P) một điểm M duy nhất.

Ví dụ 3.64.

Cho parabol có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Gọi MN là dây cung của parabol đi qua tiêu điểm F (*dây cung* của parabol là đoạn thẳng nối hai điểm của parabol). Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN tiếp xúc với đường chuẩn của parabol.



Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử parabol có dạng như hình vẽ. Hình thang vuông MNPQ có IJ là đường trung bình nên $d(I, \Delta) = IJ = \frac{1}{2}(MQ + NP)$. Ta có MN đi qua tiêu điểm F của parabol và M, N thuộc parabol, nên MQ + NP = MN. Vậy $d(I, \Delta) = \frac{1}{2}MN$, do đó đường tròn đường kính MN tiếp xúc với đường chuẩn Δ.

BÀI TẬP

3.59. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) có Ox là trục đối xứng và có tiêu điểm F(4 ; 0).

b) (P) có Ox là trục đối xứng và có tiêu điểm F(–2 ; 0).

c) (P) có tiêu điểm F(0 ; 1), đường chuẩn y = –1.

3.60. Cho parabol $y^2 = 2px$. Tìm độ dài dây cung của parabol vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm của parabol.

3.61. Cho parabol có tiêu điểm F(1; 2) và đường chuẩn Δ có phương trình $3x - 4y - 5 = 0$. Xác định tham số tiêu.

3.62. Cho đường parabol: $(P_1)\ y^2 = 2x$ và đường

$$(P_2)\ y = x^2 - 4x + m.$$

a) (P_2) có phải là một parabol không?

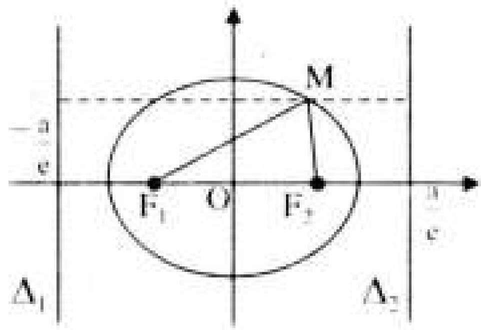
b) Chứng minh rằng nếu P_1, P_2 cắt nhau ở bốn điểm phân biệt thì các giao điểm đó cùng thuộc một đường tròn.

§ 9. BA ĐƯỜNG CÔNIC

9.1. *Đường chuẩn của elip*

Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

Khi đó, đường thẳng Δ_1: $x + \frac{a}{e} = 0$ được gọi là *đường chuẩn của elip*, ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, đường thẳng Δ_2: $x - \frac{a}{e} = 0$ được gọi là *đường chuẩn của elip*, ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$.



Tính chất: Với mọi điểm M của elip ta luôn luôn có

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e \ (e < 1).$$

Ví dụ 3.65.

Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các elip sau:

a) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{7} = 1$; b) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Giải

a) Tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{3}\,; 0)$ và $F_2(\sqrt{3}\,; 0)$.

Hai đường chuẩn tương ứng là

$$\Delta_1:\ x + \frac{10}{\sqrt{3}} = 0 \text{ và } \Delta_2:\ x - \frac{10}{\sqrt{3}} = 0.$$

b) Tiêu điểm: $F_1(0; -\sqrt{7})$ và $F_2(0; \sqrt{7})$. Hai đường chuẩn tương ứng là Δ_1: $y + \frac{12}{\sqrt{7}} = 0$ và Δ_2: $y - \frac{12}{\sqrt{7}} = 0$.

9.2. *Đường chuẩn của hypebol*

Cho hypebol (H) có phương trình: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, các đường thẳng Δ_1: $x + \frac{a}{e} = 0$ và Δ_2: $x - \frac{a}{e} = 0$ được gọi là *đường chuẩn* của (H) ứng với các tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

Tính chất: Với mọi điểm M của (H) ta luôn luôn có:

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e > 1.$$

Ví dụ 3.66.

Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các hypebol sau:

a) $\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{1} = 1$; b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$.

Giải

a) Tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{15}; 0)$ và $F_2(\sqrt{15}; 0)$. Hai đường chuẩn tương ứng là Δ_1: $x + \frac{14}{\sqrt{15}} = 0$ và Δ_2: $x - \frac{14}{\sqrt{15}} = 0$.

b) Tiêu điểm: $F_1(0; -3)$ và $F_2(0; 3)$. Hai đường chuẩn tương ứng là Δ_1: $y + \frac{4}{3} = 0$ và Δ_2: $y - \frac{4}{3} = 0$.

Ví dụ 3.67.

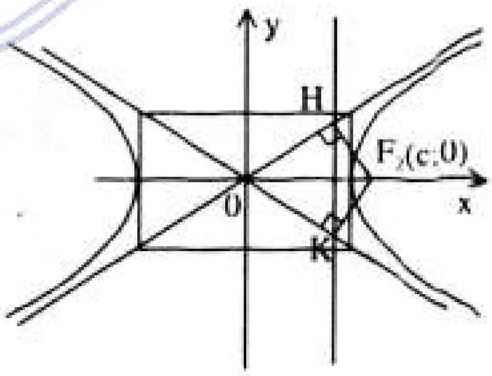
Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm của hypebol xuống hai đường tiệm cận. Chứng minh rằng đường thẳng HK chính là đường chuẩn tương ứng của tiêu điểm đó.

Giải

Không mất tính tổng quát, ta xét nhánh hypebol nằm bên phải như hình vẽ. Đường chuẩn Δ: $x = \frac{a^2}{c}$ cắt đường tiệm cận $y = \frac{b}{a}x$ tại điểm H_1 có toạ độ $\left(\frac{a^2}{c}; \frac{ba}{c}\right)$. Gọi toạ độ của F_2 là $(c; 0)$, ta có:

$\overrightarrow{F_2H_1} = \left(\frac{a^2}{c} - c; \frac{ba}{c}\right) = \left(\frac{a^2 - c^2}{c}; \frac{ba}{c}\right)$. Vì $a^2 - c^2 = -b^2$ nên

$\overrightarrow{F_2H_1} = \left(\frac{-b^2}{c}; \frac{ba}{c}\right) = \frac{b}{c}(-b; a)$.



Đường tiệm cận $y = \frac{b}{a}x$ hay $bx - ay = 0$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$.

Ta có: $\overrightarrow{F_2H_1}.\vec{u} = \frac{b}{c}(-b.a + ab) = 0$,

suy ra $\overrightarrow{F_2H_1} \perp \vec{u}$ hay H_2 trùng H, là chân đường vuông góc kẻ từ tiêu điểm F_2 đến đường tiệm cận.

Nói cách khác, đường chuẩn Δ đi qua H, chân đường vuông góc kẻ từ tiêu điểm F đến đường tiệm cận. Tương tự như thế, ta cũng có đường chuẩn Δ đi qua K. Suy ra điều phải chứng minh.

9.3. *Định nghĩa đường cônic*

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\dfrac{MF}{d(M;\Delta)} = e$, với $e > 0$ là số không đổi, được gọi là một *đường cônic*.

Ta gọi F là *tiêu điểm*, Δ là *đường chuẩn*, và e là *tâm sai* của cônic đó. Từ định nghĩa trên, kết hợp với tính chất của elip, parabol, hypebol, ta có kết luận: *Elip là đường cônic có tâm sai e < 1. Parabol là đường cônic có tâm sai e = 1. Hypebol là đường cônic có tâm sai e > 1.*

Ví dụ 3.68.

Cho đường thẳng $\Delta: x - y - 1 = 0$ và điểm F(1; 1).

Viết phương trình các đường cônic nhận F là tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Tâm sai e = 1; b) Tâm sai $e = \sqrt{2}$; c) Tâm sai $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải

Gọi M(x; y) là điểm thuộc đường cônic, ta có:

a) $\dfrac{MF}{d(M,\Delta)} = e = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \dfrac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y.$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 6y + 3 = 0.$

Vậy phương trình đường cônic là: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 6y + 3 = 0.$

b) $MF = \sqrt{2}.d(M, \Delta) \Leftrightarrow MF^2 = 2d^2(M, \Delta)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2\dfrac{(x-y-1)^2}{2} \Leftrightarrow 2xy - 4y + 1 = 0.$

Vậy phương trình đường cônic là: $2xy - 4y + 1 = 0.$

c) $\sqrt{2}\,MF = d(M, \Delta) \Leftrightarrow 2MF^2 = d^2(M, \Delta)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 10y + 7 = 0.$

Vậy phương trình đường cônic là:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 10y + 7 = 0.$$

Ví dụ 3.69.

Viết phương trình chính tắc của các đường cônic khi nó có tiêu điểm F(5; 0), đường chuẩn tương ứng là y = 6.

Giải

Đường chuẩn của các cônic dạng chính tắc phải song song với trục tung. Vậy không có phương trình chính tắc.

Ví dụ 3.70.

Viết phương trình các đường cônic trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Tiêu điểm F(2; 3), đường chuẩn y = 0, tâm sai e = 1.

b) Tiêu điểm F(0; 3), đường chuẩn y = 0, tâm sai $e = \frac{1}{2}$.

Giải

a) Giả sử có điểm M = (x ; y) thuộc cônic đã cho thì

$$MF = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}.$$

Khoảng cách d từ M đến đường chuẩn y = 0 là: d = |y|. Theo định nghĩa của đường cônic ta có $\frac{MF}{d} = e$ hay $\frac{MF}{|y|} = 1$. Từ đó ta có $MF^2 = y^2$ hay $(x-2)^2 + (y-3)^2 = y^2$ hay $x^2 - 4x - 6y + 13 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, cônic này là đường parabol vì e = 1.

b) Giả sử có điểm M = (x ; y) thuộc cônic đã cho thì

$$MF = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}.$$

Khoảng cách d từ M đến đường chuẩn y = 0 là d = | y |. Theo định nghĩa của cônic ta có: $\frac{MF}{d} = e$ hay $\frac{MF}{|y|} = \frac{1}{2}$ hay 2MF = |y|. Từ đó ta có $4[x^2 + (y-3)^2] = y^2$ hay $4x^2 + 3y^2 - 24y + 36 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, nó là elip vì e < 1.

BÀI TẬP

3.63. Tìm phương trình đường chuẩn của:

a) Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;

b) Hypebol $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; c) Parabol $y^2 = 8x$.

3.64. Viết phương trình chính tắc của các đường cônic trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Tiêu điểm F(3; 0), đường chuẩn tương ứng là x = 2.

b) Tiêu điểm F(–6; 0), tâm sai e = 3.

3.65. Viết phương trình các đường cônic trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Tiêu điểm F(0; 3), đường chuẩn y = 0, tâm sai e = 2.

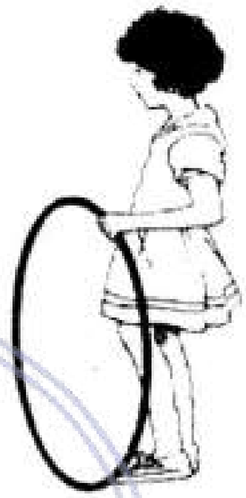
b) Tiêu điểm F(1; 1), đường chuẩn x + y – 1 = 0 và tâm sai là $e = \sqrt{2}$.

B MỘT SỐ KIẾN THỨC VÀ VÍ DỤ MỞ RỘNG

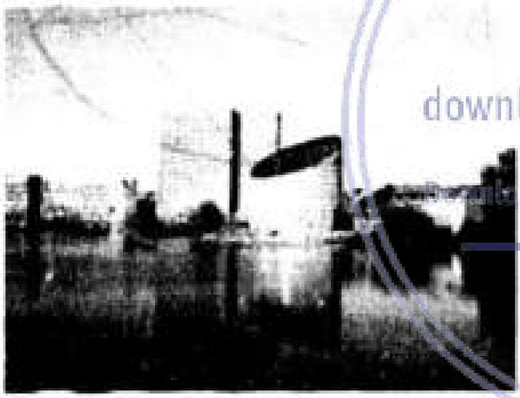
1. Những ứng dụng phổ biến của elip trong khoa học và đời sống

Các cônic có nhiều ứng dụng tương tự nhau, sau đây, chúng tôi giới thiệu một số ứng dụng của đường elip.

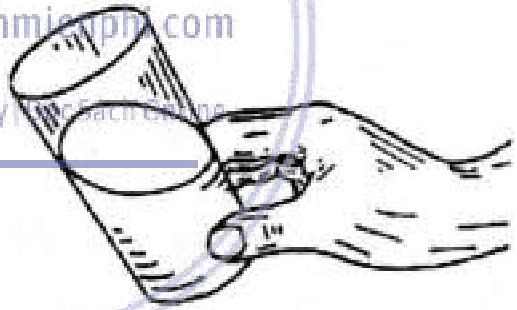
Rõ ràng là một elip không đơn giản như một đường tròn, tuy nhiên, ta vẫn thường gặp các elip rất nhiều trong đời sống. Chẳng hạn, khi nhìn nghiêng, một đường tròn sẽ có hình elip, và tất nhiên, khi tiếp cận một đồ vật hình tròn, đa số các trường hợp, ta đã nhìn nghiêng như thế.



Chiếc vòng của em bé được nhìn



Mặt cắt là hình ellipse: Nhà Thiên văn (Planetarum) Tycho Brahe ở Copenhagen.



Mặt chất lỏng là hình ellipse khi ta làm nghiêng li chứa nó.

Nếu cắt hình trụ bằng một mặt phẳng nghiêng so với đáy, ta được mặt cắt là hình elip. Cũng vậy, nếu ta cho nghiêng một li thuỷ tinh chứa nước, bề mặt nước sẽ tạo thành hình elip. Khi cắt xúc xích, người ta cũng thường cắt nghiêng, và càng nghiêng, ta càng có elip càng lớn hơn.

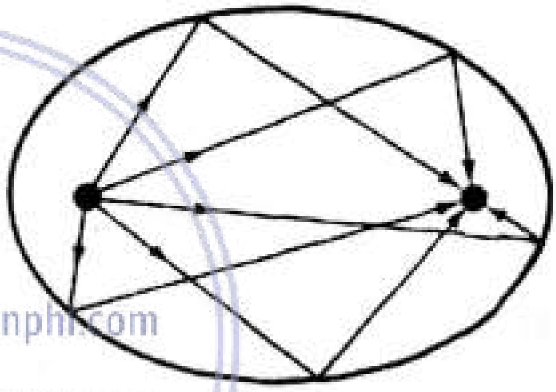
Thời cổ xưa, các nhà Thiên văn Hi Lạp quan niệm rằng các hành tinh chuyển động xung quanh trái đất đứng yên theo một quỹ đạo là đường tròn. Mãi đến thế kỉ thứ 17, Johannes Kepler mới khám phá được rằng mỗi hành tinh đều chuyển động xung quanh mặt trời theo một quỹ đạo là đường elip, và elip này nhận mặt trời làm một trong hai tiêu điểm của nó.

Quỹ đạo của mặt trăng cũng như quỹ đạo chuyển động của các vệ tinh nhân tạo quanh trái đất cũng có hình elip.

Sao chổi Halley (*Halley's Comet*) phải mất chừng 76 năm mới kết thúc chuyến viễn hành hình elip quanh mặt trời của chúng ta. Edmund Halley đã nhìn thấy sao chổi này vào năm 1682 và ông dự báo rằng nó sẽ trở về vào năm 1759. Cho dầu ông không còn sống được để vui mừng nhìn thấy dự báo của mình là chính xác, người ta vẫn mang ơn, và dùng tên ông để đặt tên cho sao chổi đó.

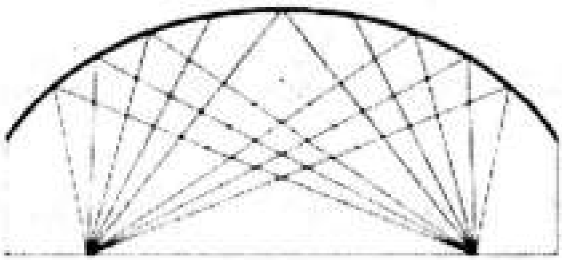
Ở tầm vi mô, người ta cũng thấy rằng các electron của một nguyên tử chuyển động xấp xỉ như một hình elip mà hạt nhân là một trong hai tiêu điểm của elip này.

Elip có ứng dụng quan trọng trong quang học và âm học: *Mọi nguồn sáng hoặc mọi nguồn âm thanh khởi phát từ một tiêu điểm của elip, sẽ phản xạ đến tiêu điểm kia*. Nguyên lí này được ứng dụng trong việc điều trị bệnh sỏi thận. Bệnh nhân được đặt trong một bể nước hình elip,



Sơ đồ điều trị sỏi thận.

sao cho sỏi thận đã phát hiện của người này nằm đúng vị trí tiêu điểm của elip đó. Tiếp theo, người ta cho phát một dạng sóng nén (shock waves) có năng lượng cao, sau khi phản xạ, nó sẽ tập trung vào vị trí quả thận ở tiêu điểm và phá huỷ viên sỏi thận.



Sơ đồ sảnh đường "thì thầm" tại St. Paul's Cathedral.

Nguyên lí trên cũng được sử dụng trong việc xây dựng những căn phòng "nói thầm" như ở nhà thờ St. Paul (St. Paul's Cathedral) tại London.

Trong sảnh đường nhà thờ này, nếu có một người đứng gần một tiêu điểm và nói thầm, thì người đứng ở tiêu điểm kia sẽ nghe được, và anh ta không thể nghe được lời thì thầm đó khi đứng ở giữa hai tiêu điểm.

2. Phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn

Trong chương 2, ta đã biết rằng *trục đẳng phương* của hai đường tròn không đồng tâm là tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đó.

Cho hai đường tròn không đồng tâm

$$(C): x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0 \text{ và}$$
$$(C'): x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0.$$

Xét điểm M(x; y). Tâm và bán kính của (C) lần lượt là $O(-A_1; -B_1)$, $R = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - C_1}$. Do đó, dễ dàng tính được

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = OM^2 - R^2 = x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1.$$

Tương tự, $\mathscr{P}_{M/(C')} = OM^2 - R^2 = x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2$.

Như vậy, M có cùng phương tích đối với hai đường tròn khi và chỉ khi $x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2$, hay $2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$. Do hai đường tròn cắt nhau nên chúng không đồng tâm, suy ra $A_1 - A_2$ và $B_1 - B_2$ không thể cùng bằng không. Vậy

$$2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$$

là phương trình của đường thẳng. Đường thẳng đó chính là phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn đã cho.

Ví dụ 3.71.

Cho hai đường tròn có phương trình tương ứng là

$$(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 1)y - 1 = 0 \text{ và}$$
$$(C'_m): x^2 + y^2 - x + (m - 1)y + 3 = 0.$$

Tìm phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn. Khi m thay đổi, hãy chứng minh rằng các trục đẳng phương đó luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Phương trình của trục đẳng phương của hai đường tròn (C_m) và (C'_m) là

$$x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 1)y - 1 = x^2 + y^2 - x + (m - 1)y + 3, \text{ hay}$$
$$(2m - 1)x - (3 + m)y + 4 = 0. \qquad (1)$$

Các trục đẳng phương đó luôn đi qua điểm cố định $P = \left(\frac{4}{7}; \frac{8}{7}\right)$. Thật vậy, giả sử các trục đẳng phương đó luôn đi qua điểm P(x; y), ta biến đổi phương trình (1) thành: $(2x - y)m - x - 3y + 4 = 0$. Do m tuỳ ý nên ta có hệ: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$ Suy ra toạ độ của P là $\left(\frac{4}{7}; \frac{8}{7}\right)$.

Ví dụ 3.72.

Cho họ đường cong (C_m):

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0.$$

a) Chứng minh rằng họ (C_m) gồm những đường tròn luôn tiếp xúc với 2 đường thẳng cố định. Xác định phương trình hai đường thẳng cố định này.

b) Tìm m để (C_m) cắt (C): $x^2 + y^2 = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó, hãy chứng minh AB có phương không đổi khi m thay đổi trên những giá trị vừa tìm được.

Giải

a) Ta có (C_m): $(x-m)^2 + (y+2m)^2 = 1$. Vậy (C_m) là đường tròn có tâm I(m; -2m), có bán kính R = 1. Ta nhận thấy tâm I có toạ độ thoả mãn $x_I = m$; $y_I = -2m \Leftrightarrow y_I = -2x_I$, do đó tập hợp các tâm I là đường thẳng $y = -2x$, $\forall m$. Vì tâm của các (C_m) luôn nằm trên một đường thẳng cố định và các (C_m) luôn có bán kính bằng 1 nên chúng luôn tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song nhau, cách đường thẳng $\Delta : y = -2x$ một đoạn R = 1.

Từ đó, (d_1) và (d_2) có phương trình dạng $y = -2x + c$, hay $2x + y - c = 0$. Mặt khác, ta có:

$$d(I,\ \Delta) = \frac{|2x_I + y_I - c|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2m - 2m - c|}{\sqrt{4+1}} = 1,$$

suy ra $c = \pm\sqrt{5}$. Vậy phương trình hai tiếp tuyến cố định của (C_m) là: $2x + y + \sqrt{5} = 0$ và $2x + y - \sqrt{5} = 0$.

b) Ta có (C): $x^2 + y^2 = 1$ có tâm O(0; 0); R' = 1.

Đoạn nối tâm OI là $\sqrt{m^2 + 4m^2} = \sqrt{5m^2}$. Ta giả sử $m \neq 0$ để (C_m) không trùng với (C). Điều kiện để hai đường tròn giao nhau là R - R' < OI < R + R' hay:

$$0 < \sqrt{5m^2} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2} < \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |m| < \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{5}} < m < \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy khi $m \in \left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $(m \neq 0)$ thì hai đường tròn giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Đường thẳng AB là trục đẳng phương của hai đường tròn, tất cả các điểm (a, b) nằm trên AB đều phải thoả mãn phương trình của hai đường tròn, do đó:

$$(x-m)^2 + (y+2m)^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1 \Leftrightarrow 2x - 4y - 5m = 0.$$

Như vậy đường thẳng AB có phương trình $2x - 4y - 5m = 0$, nó có vectơ chỉ phương (2; 1) không đổi, suy ra đpcm.

3. Thêm một số ví dụ về bài toán quỹ tích trong mặt phẳng toạ độ

Để tìm quỹ tích một điểm M(x; y), ta thường dựa vào các tính chất đã cho để tính được x và y, phụ thuộc vào một tham số m nào đó. Sau đó, khử m, ta được phương trình biểu diễn đường chứa điểm M, đó chính là phương trình của quỹ tích. Tuy nhiên, cũng có khi tìm được ngay phương trình quỹ tích mà không cần khử tham số.

Ví dụ 3.73.

Tìm quỹ tích các điểm cách đường thẳng $-2x + 5y - 1 = 0$ một khoảng cách bằng 3.

Giải

Điểm M(x ; y) cách đường thẳng $-2x + 5y - 1 = 0$ một khoảng cách bằng 3 khi và chỉ khi

$$\frac{|-2x+5y-1|}{\sqrt{29}} = 3 \Leftrightarrow |-2x+5y-1| = 3\sqrt{29}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+5y-1 = 3\sqrt{29} \\ -2x+5y-1 = -3\sqrt{29} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -2x+5y-1-3\sqrt{29} = 0 & (1) \\ -2x+5y-1+3\sqrt{29} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Vậy quỹ tích những điểm M là hai đường thẳng có phương trình (1) và (2).

Ví dụ 3.74.

Cho phương trình $x^2 + y^2 + mx - 2(m+1)y + 1 = 0(*)$.

a) Với giá trị nào của m thì (*) là phương trình đường tròn?

b) Tìm tập hợp tâm của các đường tròn nói trên.

Giải

a) (*) là phương trình đường tròn khi

$$\frac{m^2}{4} + (m+1)^2 - 1 > 0.$$

b) Tâm đường tròn có toạ độ $\begin{cases} x = -\dfrac{m}{2} \\ y = m+1 \end{cases}$.

Khử m từ hệ trên ta được $2x + y - 1 = 0$.

$$m < \frac{8}{5} \Rightarrow -2x < -\frac{8}{5} \Rightarrow x > \frac{4}{5}.$$

$$m > 0 \Rightarrow -2x > 0 \Rightarrow x < 0.$$

Vậy tập hợp tâm của các đường tròn là hai phần của đường thẳng có phương trình $2x + y - 1 = 0$ ứng với $x < 0$ hoặc $x > \frac{4}{5}$.

Ví dụ 3.75.

Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình:

$$(d_1): (a-b)x + y - 1 = 0 \text{ và } (d_2): (a^2 - b^2)x + ay - b = 0,$$

trong đó $b^2 = 4a^2 + 1$.

a) Xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

b) Tìm quỹ tích các giao điểm M của (d_1), (d_2) khi a thay đổi.

Giải

a) Để ý rằng do điều kiện $b^2 = 4a^2 + 1$, không thể xảy ra trường hợp b = 0 hoặc b = a. Toạ độ giao điểm (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(a-b)x + y = 1\\(a^2 - b^2)x + ay = b\end{cases}$$

Giải hệ này ta được toạ độ giao điểm M là $M\left(-\frac{1}{b}; \frac{a}{b}\right)$.

b) Vì $b^2 = 4a^2 + 1$ nên ta có

$$\begin{cases}x^2 = \dfrac{1}{b^2}\\ y^2 = \dfrac{a^2}{b^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = \dfrac{1}{4a^2+1}\\ y^2 = \dfrac{a^2}{4a^2+1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = \dfrac{1}{4a^2+1}\\ 4y^2 = \dfrac{4a^2}{4a^2+1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = \frac{4a^2+1}{4a^2+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/4} = 1$$

Vậy tập hợp điểm M là elip có phương trình chính tắc như trên.

Ví dụ 3.76.

Cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm A(−2; 0). Giả sử M là điểm bất kì trên (E) nhưng không nằm trên hai trục. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục Oy. Giả sử AH cắt OM tại P. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên (E) thì P luôn chạy trên đường cong (C) cố định.

Giải

Giả sử $M(x_0; y_0)$, với $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, khi đó ta có $H(0; y_0)$, phương trình đường thẳng AH là: $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{y_0} \Leftrightarrow y = \frac{y_0}{2}(x+2)$.

Phương trình đường thẳng OM là: $y = \frac{y_0}{x_0}x$.

Mà $M(x_0; y_0) \in (E)$ nên $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, do đó phương trình đường thẳng OM là $y = \frac{\sqrt{4 - x_0}}{2x_0}x$ (để ý $-2 \le x_0 \le 2$). Giao điểm của AH và OM là P nên toạ độ điểm P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = \frac{y_0}{2}(x+2) \\ y = \frac{\sqrt{4 - x_0}}{2x_0}x \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x_P^2 = \left(\frac{4}{x_0} - 2\right)^2$, $y_P^2 = \frac{y_0^2}{x_0^2}\left(\frac{4}{x_0} - 2\right)^2$. Khử x_0, y_0 (dựa theo công thức (E)) ta được $y_P^2 = x_P + 1$.

Vậy khi M thay đổi trên (E) thì P luôn chạy trên đường cong (C) cố định có phương trình $y^2 = x + 1$.

4. Giải một số bài toán hình học phẳng bằng phương pháp tọa độ

Trong nhiều trường hợp, việc *đưa vào mặt phẳng một hệ trục thích hợp rồi sử dụng phương pháp toạ độ* có thể giải được một số bài toán khó trong hình học phẳng. Ngoài ra, như sẽ thấy ở Ví dụ 3.77 dưới đây, phương pháp này cũng có thể được sử dụng để giải một bài toán đơn thuần đại số.

Ví dụ 3.77.

Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn các hệ thức

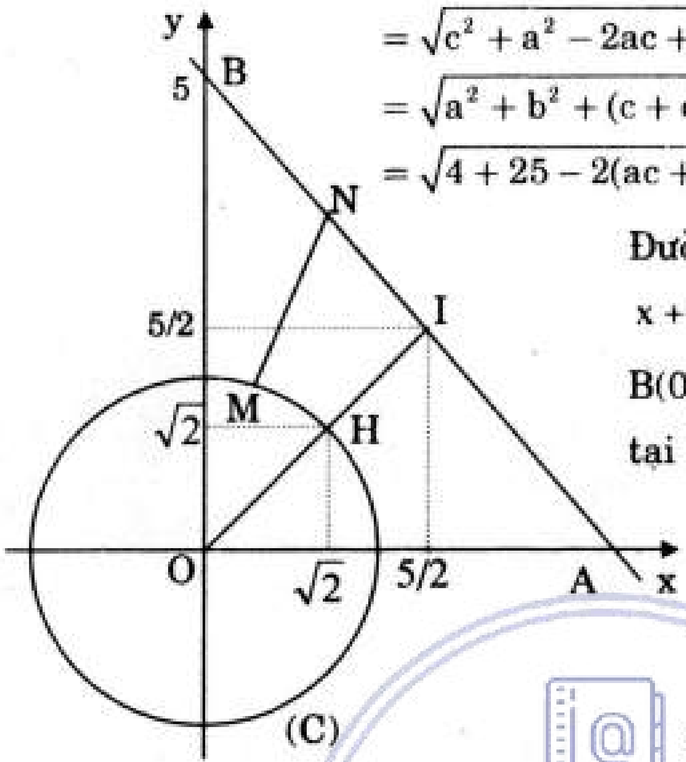
$$a^2 + b^2 = 4 \text{ và } c + d = 5.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = ac + bd + cd$.

Giải

Trong mặt phẳng Oxy, ta xét điểm M(a,b) thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = 4$, thế thì M thuộc đường tròn (C) có tâm O, bán kính R = 2. Xét điểm N(c,d) thỏa mãn điều kiện $c + d = 5$, N nằm trên đường thẳng có phương trình $x + y = 5$, ta có:

$$MN = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$
$$= \sqrt{c^2 + a^2 - 2ac + d^2 + b^2 - 2bd}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 + (c+d)^2 - 2cd - 2ac - 2bd}$$
$$= \sqrt{4 + 25 - 2(ac + bd + cd)} = \sqrt{29 - 2(ac + bd + cd)}.$$



Đường thẳng (D) có phương trình $x + y = 5$ cắt $x'x$, $y'y$ tại $A(5; 0)$ và $B(0; 5)$. Từ O vẽ $OI \perp AB$ và cắt (C) tại H. Ta có:

$$OI = \frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$OH = R = 2,$$

suy ra $HI = OI - OH = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 2$.

Ta có $MN \geq HI$, $\forall M \in (C)$, $\forall N \in (D)$, nghĩa là:

$$\sqrt{29 - 2(ac + bd + cd)} \geq \frac{5\sqrt{2}}{2} - 2$$

$$\Leftrightarrow 29 - 2(ac + bd + cd) \geq \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)^2 = \frac{25}{2} + 4 - 10\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(ac + bd + cd) \leq \frac{25 + 20\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (ac + bd + cd) \leq \frac{25 + 20\sqrt{2}}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} M \equiv H \\ N \equiv I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \sqrt{2} \\ c = d = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức T là $\frac{25 + 20\sqrt{2}}{4}$.

Ví dụ 3.78. (Balkan, Sennior, 1987)

Cho hai đường tròn có bán kính bằng 1 và $\sqrt{2}$, khoảng cách giữa hai tâm bằng 2. Gọi X là một trong hai giao điểm của hai đường ròn. M là điểm nằm trên đường tròn nhỏ, Y là điểm nằm trên đường tòn lớn sao cho M là trung điểm XY. Tính khoảng cách XY.

Hướng dẫn

Chọn hệ thống trục với tâm đường tròn nhỏ làm gốc, trục hoành là đường nối tâm. Từ đó, tính được toạ độ X là:

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

Giả sử toạ độ M có dạng (cosk, sink). Suy ra toạ độ điểm Y là:

$$\left(2\cos k - \frac{3}{4},\ 2\sin k - \frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

Vì Y nằm trên đường tròn có tâm là (2, 0), bán kính $\sqrt{2}$, nên:

$$\left(2\cos k - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(2\sin k - \frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 2.$$

Suy ra 11cosk + $\sqrt{7}$ sink = 10. Ta có

$$XY^2 = \left(2\cos k - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2\sin k - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 8 - 6\cos k - 2\sqrt{7}\sin k$$

$$= 8 - 6\cos k - 2(10 - 11\cos k) = 16\cos k - 12.$$

Như vậy ta cần tìm cosk. Ta có $(10 - 11\cos k)^2 = 7(1 - \cos^2 k)$, suy ra $128\cos^2 k - 220\cos k + 93 = 0 \Leftrightarrow (32\cos k - 31)(4\cos k - 3) = 0$. Từ đó, $\cos k = \frac{3}{4}$, tương ứng với điểm X, nghiệm còn lại là $\cos k = \frac{31}{32}$. Suy ra $XY^2 = \frac{31}{2} - 12 = \frac{7}{2}$, $XY = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Ví dụ 3.79. (Kürschák, 1955)

Cho một tam giác với ba đỉnh là ba điểm nguyên (tức là chúng có thành phần toạ độ nguyên). Biết rằng trên ba cạnh của tam giác không có điểm nguyên nào khác và bên trong tam giác có đúng một điểm nguyên.

Chứng minh rằng điểm đó phải là trọng tâm.

Hướng dẫn

Chọn một gốc bất kì rồi kí hiệu ba vectơ biểu diễn ba điểm A, B, C lần lượt là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Khi đó, điểm D nằm bên trong tam giác sẽ được biểu diễn bởi vectơ $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$, với λ, μ, ν là ba số thực dương có tổng bằng 1. Giả sử $\lambda > \frac{1}{2}$. Ta xét điểm được biểu diễn bởi vectơ $2\vec{d} - \vec{a}$. Vì $\vec{d}$ và $\vec{a}$ có toạ độ nguyên nên điểm này cũng nguyên. Mặt khác,

$$2\vec{d} - \vec{a} = (2\lambda - 1)\vec{a} + 2\mu\vec{b} + 2\nu\vec{c},$$

tức là nó cũng nằm bên trong tam giác (do các thành phần đứng trước dương và có tổng bằng $(2\lambda - 1) + 2\mu + 2\nu = 1$. Theo giả thiết, điểm này phải trùng với D. Vậy $2\vec{d} - \vec{a} = \vec{d}$. Điều này mâu thuẫn. Tương tự, nếu $\lambda = \frac{1}{2}$ thì $2\vec{d} - \vec{a} = 2\mu\vec{b} + 2\nu\vec{c}$, nên suy ra D nằm trên đoạn thẳng BC (trừ B và C). Điều này mâu thuẫn.

Từ đó, ta có $\lambda < \frac{1}{2}$. Cũng tương tự như trên, ta được $\mu < \frac{1}{2}$ và $\nu < \frac{1}{2}$. Bây giờ, ta xét điểm được biểu diễn bởi:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{d} = (1 - 2\lambda)\vec{a} + (1 - 2\mu)\vec{b} + (1 - 2\nu)\vec{c}.$$

Các thành phần biểu diễn trên là dương và có tổng bằng 1, đằng khác, nó cũng là điểm nguyên. Vậy nó phải trùng D. Suy ra:

$$\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})/3,$$

nói cách khác, D chính là trọng tâm tam giác ABC.

Ví dụ 3.80. (IMO, 1977)

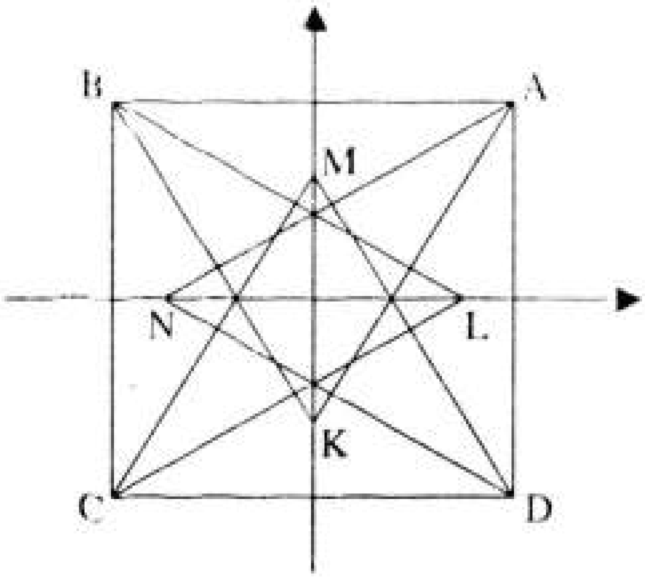
Về phía bên trong hình vuông ABCD, ta dựng các tam giác đều ABK, BCL, CDM, DAN. Chứng minh rằng các trung điểm của KL, LM, MN, NK và các trung điểm của AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN tạo thành một đa giác đều 12 cạnh.

Hướng dẫn

Gọi O là tâm hình vuông, lập hệ trục xOy sao cho các điểm A, B, C, D lần lượt có toạ độ là $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$. Khi đó, dễ dàng tính được toạ độ các điểm K, L, M, N lần lượt là:

$$(0,-2k),\ (2k,0),\ (0,2k),\ (-2k,0),\ \text{với } k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Từ đó, dùng công thức tính toạ độ trung điểm, ta tính được toạ độ các trung điểm E, F, G, H tương ứng của KL, LM, MN, NK là:



$(k,-k),(k,k),(-k,k),(-k,-k)$.

Suy ra rằng các khoảng cách từ E, F, G, H đến O đều bằng nhau và bằng:

$$\sqrt{k^2+k^2}=k\sqrt{2},$$

đồng thời các vectơ gốc O, điểm mút tương ứng là E, F, G, H hợp với trục hoành các góc lần lượt là $315^0, 45^0, 135^0, 225^0$.

Tiếp đến, từ toạ độ đã xác định được của các điểm trên, ta dễ dàng tính được toạ độ tương ứng của các trung điểm P, Q, R, S, T, U, V, X của các cạnh AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN lần lượt là:

$$(h,j),(-h,j),(-j,h),(-j,-h),(-h,-j),(h,-j),(j,-h),(j,h),$$

ở đây: $h=\frac{1}{2},\ j=1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Suy ra những điểm P, Q, R, S, T, U, V, X cách đều O một đoạn bằng

$$\sqrt{h^2+j^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=k\sqrt{2}.$$

Các điểm này cũng là đầu mút của những vectơ gốc O lần lượt hợp với trục hoành các góc tương ứng $15^0, 165^0, 105^0, 255^0, 195^0, 345^0, 285^0, 75^0$.

Tiếp đến, ta cần xét các góc của tam giác vuông có ba cạnh là k, h, j. Góc x giữa h và k có:

$$\sin x=\frac{j}{k},\ \cos x=\frac{h}{k}.$$

Do đó $\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2hj}{k^2}=\frac{1}{2}$. Suy ra $x=15^0$.

Như vậy, 12 điểm nói trên cách đều gốc O và là đầu mút của những vectơ gốc O hợp với trục hoành các góc 15^0+30n, với

$$n=0,1,2,\ldots,11.$$

Từ đó, suy ra rằng chúng lập thành một đa giác đều 12 cạnh (điều phải chứng minh).

C LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} = (1 ; 1)$; $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} = (1 ; -5)$; $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (2 ; -13)$.

3.2. Ta có: $\vec{a}(x ; y)$, $\vec{i}(1; 0)$, $\vec{j}(0; 1)$. Do đó

$$\vec{a}.\vec{i} = x.1 + y.0 = x,\quad \vec{a}.\vec{j} = x.0 + y.1 = y.$$

3.3. Vì G là trọng tâm tam giác nên $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} ; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Suy ra $G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} ; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

3.4. Ta có $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $\vec{v} = (k ; -4)$.

a) $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ khi và chỉ khi $2k = \frac{4}{5}$ hay $k = \frac{2}{5}$.

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.k + (-5).(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$.

c) $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{101}$, $|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + 16}$. Từ đó:

$$|\vec{v}| = |\vec{u}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{101} \Leftrightarrow k^2 + 16 = \frac{101}{4}$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}.$$

3.5. a) $2\vec{a} = (6 ; 4)$; $-4\vec{c} = (8 ; 20)$. Ta có:

$$\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c} = (6 - 1 + 8 ; 4 + 5 + 20) = (13 ; 29);$$

$$\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c} = (-15 ; -17);$$

$$\vec{w} = 2(\vec{a} + \vec{b}) + 4\vec{c} = (-4 ; -6).$$

b) $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 3p - q \\ -5 = 2p + 5q \end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên ta được $p = -\frac{15}{17}$, $q = -\frac{11}{17}$.

3.6. *Hướng dẫn*: Tương tự ví dụ 3.5.

ĐS: $M_1(-x; y)$, $M_2(-x; -y)$, $M_3(y; x)$.

3.7. **a)** $\overrightarrow{AB} = (2 ; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-3 ; -3)$, hay $\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương, nghĩa là A, B, C thẳng hàng.

b) $\overrightarrow{AC} = (-1 ; -1)$ hay $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ nghĩa là A chia đoạn thẳng BC theo tỉ số -2.

$\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, nghĩa là B chia đoạn thẳng AC theo tỉ số $\frac{2}{3}$.

$\overrightarrow{CA} = (1 ; 1)$; $\overrightarrow{CB} = (3 ; 3)$ hay $\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, nghĩa là C chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{1}{3}$.

3.8. Từ công thức: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ ta được $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{-16}{\sqrt{580}}$.

Vì $\vec{a} + \vec{b} = (0 ; 6)$ và $\vec{a} - \vec{b} = (6 ; 8)$ nên

$$\cos(\vec{a} + \vec{b}; \vec{a} - \vec{b}) = \frac{0.6 + 48}{\sqrt{36}.\sqrt{100}} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5};$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) = \frac{\vec{a}.(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a}|.|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{58}}.$$

3.9. **a)** Theo ví dụ 3.6, ba điểm A, B, C lập thành tam giác.

$$AB = \sqrt{(2+4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

$$AC = \sqrt{(2+4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Do AB = AC nên tam giác ABC cân tại A. Chu vi tam giác ABC là

$$6 + 6\sqrt{5} = 6(1 + \sqrt{5}).$$

Gọi H là trung điểm của BC thì $AH \perp BC$ và $H = (2; 1)$. Do đó $AH = \sqrt{(2+4)^2 + (1-1)^2} = 6$. Vậy diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.6.6 = 18.$$

Cách khác. Trong bài tập 2.11, ta đã chứng minh

$$4S^2 = \overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2, \text{ suy ra}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2} \qquad (*)$$

Có thể áp dụng kết quả (*) trên để tính diện tích.

b) Giả sử I(x; y), ta có $\overrightarrow{IA} = (-4 - x ; 1 - y)$, $\overrightarrow{IB} = (2 - x; 4 - y)$, $\overrightarrow{IC} = (2 - x; -2 - y)$, do đó $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = (2 - 4x; 7 - 4y)$. Vậy

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4x = 0 \\ 7 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 7/4 \end{cases}.$$

Tóm lại, ta được $I\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

3.10. **a)** $\overrightarrow{BA} = (0; -4)$; $\overrightarrow{BC} = (4; 0)$ là hai vectơ không cùng phương $\Rightarrow$ A, B, C không thẳng hàng.

b) *Cách 1:* $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0$.

Cách 2: $AB^2 = (-1 + 1)^2 + (8 - 4)^2 = 16$,

$BC^2 = (3 + 1)^2 + (8 - 8)^2 = 16$,

$AC^2 = (3 + 1)^2 + (8 - 4)^2 = 32$.

Vì $AB^2 + BC^2 = 16 + 16 = 32 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông ở B.

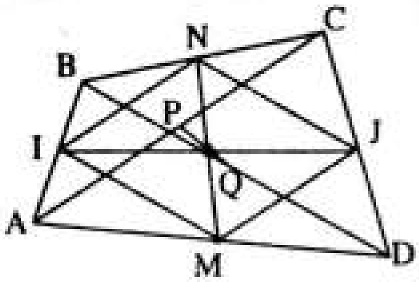
b) $G = \left(\frac{-1 - 1 + 3}{3}; \frac{4 + 8 + 8}{3}\right)$, $G = \left(\frac{1}{3}; \frac{20}{3}\right)$,

$$\overrightarrow{GA} = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}\right), \quad \overrightarrow{GC} = \left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right),$$

$\cos(\widehat{AGC}) = \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}) = 0{,}8$. Tra bảng, góc $AGC = 36{,}8^0$.

Có thể dùng định lý cosin: $\cos(\widehat{AGC}) = \dfrac{GA^2 + GC^2 - AC^2}{2.GA.GC}$.

3.11. Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm, Ta có :



$x_P = \dfrac{x_A + x_C}{2}$; $x_Q = \dfrac{x_B + x_D}{2}$;

$x_M = \dfrac{x_A + x_D}{2}$; $x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2}$;

$y_P = \dfrac{y_A + y_C}{2}$; $y_Q = \dfrac{y_B + y_D}{2}$;

$y_M = \dfrac{y_A + y_D}{2}$; $y_N = \dfrac{y_B + y_C}{2}$.

Từ đó tính ra toạ độ trung điểm của các đoạn thẳng IJ, PQ, MN đều bằng $\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{2} ; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{2}\right)$. Do vậy các trung điểm của ba đoạn thẳng đó trùng nhau.

3.12. *Hướng dẫn.* Không đồng quy (tương tự Ví dụ 3.12).

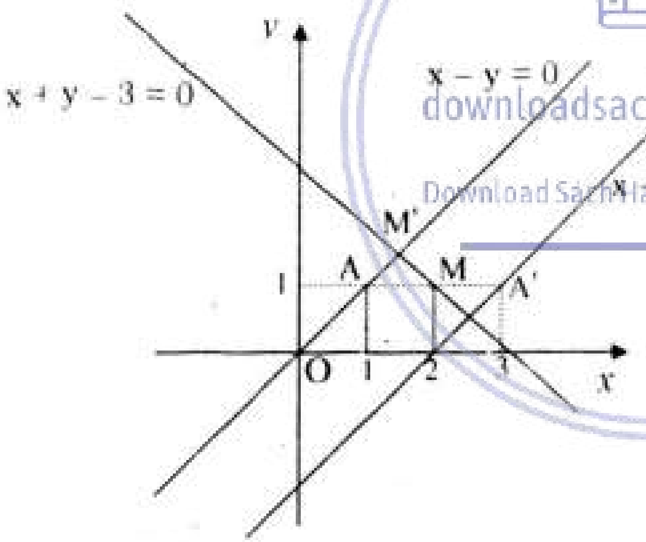
3.13. Giả sử đường thẳng cần tìm cắt trục Ox và Oy tại các điểm A(a ; 0) và B(0 ; b). Vì M(5 ; –3) là trung điểm của AB nên

$$5 = \frac{a+0}{2} \text{ và } -3 = \frac{0+b}{2}, \Rightarrow a = 10 \text{ và } b = -6.$$

Do vậy phương trình đường thẳng AB là:

$$\frac{x}{10} - \frac{y}{6} = 1 \text{ hay } 3x - 5y - 30 = 0.$$

3.14. a) ***Cách 1.*** Để ý rằng $M \notin d$ nên đường thẳng d' đối xứng với d qua M sẽ song song với d. Lấy điểm $A \in d$, gọi A' là điểm đối xứng với A qua M thì $A' \in d'$. Bài toán đưa về:



Viết phương trình đường thẳng qua A' và song song với d.

Lấy $A(1; 1) \in d$, giả sử $A'(x'; y')$ đối xứng với A qua M, ta có:

$$\begin{cases} x' + 1 = 4 \\ y' + 1 = 2 \end{cases}.$$

Suy ra A'(3; 1). Phương trình đường thẳng d' có dạng:

$$1(x-3) - 1(y-1) = 0 \text{ hay } x - y - 2 = 0.$$

Cách 2. Xét tập hợp những điểm A' đối xứng với A qua M khi A chạy trên d. Đặt $A(x_0; y_0)$ chạy trên d và A'(x; y) là điểm đối xứng với A qua M. Ta có

$$\begin{cases} x + x_0 = 4 \\ y + y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 - x \\ y_0 = 2 - y \end{cases}.$$

Do $A \in d$ nên $x_0 - y_0 = 0$. Vậy $(4 - x) - (2 - y) = 0 \Leftrightarrow -x + y + 2 = 0$.

Đây chính là phương trình của d'.

b) Gọi M' là hình chiếu của M xuống đường thẳng d. Xét đường thẳng $\Delta \perp d$ tại M. Như thế, M' chính là giao điểm của d và Δ. Đường thẳng Δ có phương trình: $x + y + m = 0$. Ta có

$$M \in \Delta \Leftrightarrow 2 + 1 + m = 0 \Rightarrow m = -3.$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $x + y - 3 = 0$. Toạ độ M' là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Vậy $M'\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

3.15. ***Cách 1.*** Ba vectơ pháp tuyến của ba đường thẳng đã cho lần lượt là $\overrightarrow{n_1} = (1; 2)$, $\overrightarrow{n_2} = (2; 1)$ và $\overrightarrow{n_3} = (1; -2)$. Rõ ràng không có một cặp vectơ pháp tuyến nào song song nhau, suy ra không có cặp đường thẳng nào song song nhau, điều này có nghĩa ba đường thẳng trên tạo thành một tam giác. Mặt khác, dễ thấy $\cos(\overrightarrow{n_2}; \overrightarrow{n_3}) = 0$ nên hai đường thẳng tương ứng vuông góc nhau. Vậy ba đường thẳng trên tạo thành một tam giác vuông.

Cách 2. Sử dụng tỉ lệ các hệ số như ở 2.2 (phần tóm lược lí thuyết) để chứng tỏ ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một.

Cách 3. Viết lại ba phương trình đường thẳng

$$y = -\frac{1}{2}x + 1;\ \ y = -2x + 13;\ \ y = \frac{1}{2}x + 3.$$

Hệ số góc của ba đường thẳng này khác nhau nên chúng cắt nhau từng đôi một. Ngoài ra, rõ ràng hai đường thẳng

$$y = -2x + 13;\ \ y = \frac{1}{2}x + 3$$

có tích hai hệ số góc bằng -1 nên chúng vuông góc nhau.

3.16. Thông thường, cách giải như sau cho kiểu bài toán này: lập phương trình đường thẳng Δ, trung trực của AB. Giải hệ phương trình để xác định giao điểm (d) và (Δ), ta được tọa độ của C.

Tuy nhiên, trong trường hợp này, rõ ràng hai điểm A(1; 2), B(-1; 2) đối xứng nhau qua trục tung, do đó đường thẳng Δ chính là trục tung. Giao điểm của trục tung và d có hoành độ bằng 0. Thay $x = 0$ vào $x - 2y + 1 = 0$ ta được $y = \dfrac{1}{2}$. Vậy C(0 ; 1/2).

3.17. a) Đường thẳng MN có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (5; -5)$ ta lấy vectơ $\vec{u} = \frac{1}{5}\overrightarrow{MN}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng MN. Khi đó $\vec{u} = (1; -1)$, đường thẳng MN có phương trình tham số $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$ và phương trình chính tắc $\frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{-1}$.

Từ phương trình tham số (hoặc chính tắc) của đường thẳng, ta suy ra được phương trình tổng quát của đường thẳng là:

$$x + y + 1 = 0.$$

b) Tiến hành tương tự, ta có

$$\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} ; \quad \frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{3} ; \quad 3x - 5y + 17 = 0.$$

3.18. a) Phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$.

Phương trình chính tắc: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3}$.

b) Phương trình tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases}$

Phương trình chính tắc: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2}$

3.19. a) Đường thẳng $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2)$.

Đường thẳng $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 4t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (2 ; 4) = 2\vec{u}$. Suy ra hai đường thẳng cùng phương. Đường thẳng thứ nhất qua điểm (5 ; –3), thay vào phương trình đường thứ hai ta được hệ $\begin{cases} 2t = 1 \\ 4t = 4 \end{cases}$. Hệ này vô nghiệm nên điểm (5 ; –3) không nằm trên đường thẳng thứ hai. Vậy hai đường thẳng song song.

b) Đường thẳng $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1 ; 0)$. Đường thẳng $x + y - 5 = 0$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (1 ; -1)$.

Vì $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1}$ nên hai đường thẳng này cắt nhau. Thay x, y từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai ta được: t = 1. Suy ra toạ độ giao điểm là (6 ; –1).

c) Vectơ chỉ phương của đường thẳng thứ nhất và thứ hai lần lượt là $\vec{u} = (1 ; 2)$ và $\vec{u}' = (2 ; 3)$. Vì 1: 2 ≠ 2: 3 nên hai đường thẳng cắt nhau. Để tìm toạ độ giao điểm của chúng nên đưa phương trình thứ hai về dạng 3x – 2y – 26 = 0. Thay x, y từ phương trình thứ nhất vào phương trình vừa có ta được:

$$15 + 3t + 6 - 4t - 26 = 0 \Rightarrow t = -5.$$

Từ đó có x = 0, y = –13. Vậy giao điểm có tọa độ (0; –13).

d) Hai vectơ chỉ phương lần lượt là (1 ; –1) và (–1 ; 1). Suy ra hai đường thẳng cùng phương. Rõ ràng điểm M(5 ; –1) thuộc cả hai đường thẳng. Vậy hai đường thẳng trùng nhau.

e) Đường thẳng $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ đi qua điểm M(1 ; –2) (ứng với t = 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1 ; 2)$. Đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 - 6t \end{cases}$ cũng đi qua điểm M(1 ; –2) (ứng với t = –1/3) và có vectơ chỉ phương $\vec{w} = (3 ; -6)$. Ta có $\vec{v} = -3\vec{u}$. Vậy hai đường thẳng trùng nhau.

Có thể lí giải cách khác như sau: Ta có $\vec{v} = -3\vec{u}$. Cho t = 0, suy ra hai đường thẳng lần lượt đi qua hai điểm $M_1(1 ; -2)$ và $M_2(2 ; -4)$. Ta lại có $\overrightarrow{M_1M_2} = (1 ; -2) = -\vec{u}$ nên suy ra hai đường thẳng trùng nhau.

3.20. *Hướng dẫn:*

a) Vì $\frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$ nên hai đường thẳng đã cho cắt nhau.

b) Δ_1, Δ_2 cắt nhau   **c)** $\Delta_1 // \Delta_2$ **d)** $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

3.21. **a)** Vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u}(4; 3)$. Tìm một điểm của đường thẳng, chẳng hạn (– 2; –1), khi đó phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đó là

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases} ; \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{3}.$$

b) Từ phương trình chính tắc, suy ra tọa độ giao điểm của đường thẳng đó với hai trục là $A(0; \frac{1}{2})$ và $B(-\frac{2}{3}; 0)$. Vậy phương trình theo đoạn chắn của đường thẳng đó là $\dfrac{x}{-\frac{2}{3}} + \dfrac{y}{\frac{1}{2}} = 1$.

3.22. **a)** Vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $2x - 5y + 4 = 0$, suy ra vectơ chỉ phương của nó là $\vec{u} = (2 ; -5)$. Vì đường thẳng đi qua $I(0 ; 3)$ nên phương trình tham số và phương trình chính tắc của nó lần lượt là

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases} \text{ và } \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-5}.$$

b) Vì $\overrightarrow{AB} = (-3 ; 4)$ nên phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng AB lần lượt là:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5 + 4t \end{cases} \text{ và } \frac{x-1}{-3} = \frac{y-5}{4}.$$

3.23. **a)** Ta có $\overrightarrow{BA} = (4; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (5; 1)$. Do $\frac{4}{5} \neq \frac{4}{1}$ nên $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C không thẳng hàng.

b) Đường cao BB' đi qua B, nhận $\overrightarrow{AC}$ làm vectơ pháp tuyến. Ta có $\overrightarrow{AC} = (1; -3) \Rightarrow (BB'): 1(x + 1) - 3(y - 1) = 0$ hay

$$x - 3y + 4 = 0.$$

c) $\overrightarrow{BC} = (5; 1)$. Phương trình tham số của BC là:

$$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 1 + t \end{cases}.$$

Suy ra $A'(-1 + 5t; 1 + t)$. $\overrightarrow{AA'} = (5t - 4; t - 4)$. Ta có:

$$AA' \perp BC \Leftrightarrow 5(5t - 4) + t - 4 = 0 \Leftrightarrow 26t = 24 \Leftrightarrow t = \frac{12}{13}.$$

Thay t vào phương trình tham số của BC được: $A'\left(\frac{47}{13}; \frac{25}{13}\right)$.

Có thể tiến hành cách khác như sau: Viết phương trình đường cao AA' (đó là đường qua A và vuông góc BC). Sau đó, giải hệ phương trình để tìm giao điểm của hai đường thẳng AA' và BC.

3.24. *Hướng dẫn:* Nhận thấy điểm B không thuộc hai đường cao đã cho. Lập phương trình cạnh BA biết điểm B và vectơ chỉ phương chính là vectơ pháp tuyến của đường cao CC'. Tương tự, lập phương trình cạnh BC biết B và vectơ chỉ phương. Tìm toạ độ đỉnh A và C bằng cách giải hai hệ phương trình (BA) và đường cao (AA'); hệ phương trình (BC) và đường cao (CC'). Lập phương trình cạnh AC khi biết A và C. Kết quả:

(AB): $8x - 3y + 47 = 0$

(BC): $3x - 5y + 37 = 0$

(CA): $2535x - 3016y + 29033 = 0$.

3.25. Gọi I là trung điểm của BC thì I (2 ; 3). Xét đường thẳng qua A(2 ; 5) và trung điểm I(2 ; 3) của BC, đường thẳng này có phương trình x = 2. Ta dễ thấy hai khoảng cách từ B và C đến đường thẳng này bằng nhau.

Vậy đường thẳng x = 2 thoả mãn đề bài.

Mặt khác, xét đường thẳng đi qua A(2 ; 5) và song song với BC. Rõ ràng hai khoảng cách từ B và C đến đường thẳng này cũng bằng nhau. Ta có $\overrightarrow{BC} = 2(3 ; 1)$. Phương trình của đường thẳng này là:
$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$ hay $x - 3y + 13 = 0$.

Tóm lại, ta có hai đường thẳng $x = 2$ và $x - 3y + 13 = 0$ thoả mãn đề bài.

3.26. **a)** Khoảng cách từ điểm M(4 ; –5) đến đường thẳng:

$$3x - 4y + 8 = 0 \text{ là: } \frac{|3.4 - 4.(-5) + 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{40}{5} = 8.$$

b) Phương trình tổng quát của đường thẳng: $3x - 2y + 4 = 0$ do đó

: $$d = \frac{|3.4 + 2.5 + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

3.27. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$. Vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{j} = (0; 1)$,

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{j}) = \frac{2.0 + 2.1}{\sqrt{2^2 + 2^2}.\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

do đó, $(\overrightarrow{AB}, \vec{j}) = 45^0$, suy ra góc giữa (d) và AB là 45^0.

3.28. **a)** Giả sử điểm M'(x ; y) đối xứng với điểm M(2 ; 5) qua đường thẳng Δ: $x + 2y - 2 = 0$, điều này xảy ra khi và chỉ khi $MM' \perp \Delta$, đồng thời M và M' cách đều Δ. Ta có $\overrightarrow{MM'} = (x-2\,;\,y-5)$, đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (-2\,;\,1)$.

- $MM' \perp \Delta \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow -2(x-2) + (y-5) = 0$

$$\Leftrightarrow -2x + y - 1 = 0. \qquad (1)$$

- M, M' cách đều $\Delta \Leftrightarrow \dfrac{|x+2y-2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|2+10-2|}{\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow |x + 2y - 2| = 10. \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra $y = 2x + 1$, thay vào (2) ta được:

$$|5x| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Với $x = 2$, $y = 5$ ta có toạ độ của chính điểm M nên loại, với $x = -2$, ta được $y = -3$. Vậy điểm cần tìm là $M'(-2\,;\,-3)$.

b) Đường thẳng Δ' phải song song với Δ nên Δ' có phương trình $x + 2y + C = 0$, với $C \neq -2$. Khoảng cách từ M tới Δ và Δ' phải bằng nhau, nghĩa là:

$$\frac{|2 + 2.5 - 2|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{|2 + 2.5 + C|}{\sqrt{1+2^2}},$$

do đó, $|12 + C| = 10 \Rightarrow 12 + C = \pm 10 \Rightarrow C = -2$ (loại) hoặc $C = -22$.

Vậy Δ' có phương trình $x + 2y - 22 = 0$.

3.29. Đường thẳng $4x + 3y = 12$ cắt trục hoành tại $B(3\,;\,0)$ và cắt trục tung tại $C(0\,;\,4)$. Giả sử $H(x\,;\,y)$ là trực tâm của ΔABC. Từ $\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 0$, $\cos(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AC}) = 0$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3(x-1) + 4(y-1) = 0 \\ -x + 3(y-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4y - 1 = 0 \\ -x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{33}{5} \\ y = \dfrac{26}{5} \end{cases}$$

Vậy toạ độ trực tâm H là $H\left(\dfrac{33}{5}, \dfrac{26}{5}\right)$.

3.30. *Hướng dẫn:* Từ $I(x\,;\,x)$, kẻ $IE \perp Ox$ và $IF \perp Oy$. Suy ra OEIF là hình vuông có diện tích là x^2 và bằng diện tích hình bình hành ABCD. Từ đó, $|x| = 2$, suy ra toạ độ C, D. Đáp số: $C(3;\,4)$ và $D(2;\,4)$ hoặc $C(-5;\,-4)$ và $D(-6;\,-4)$.

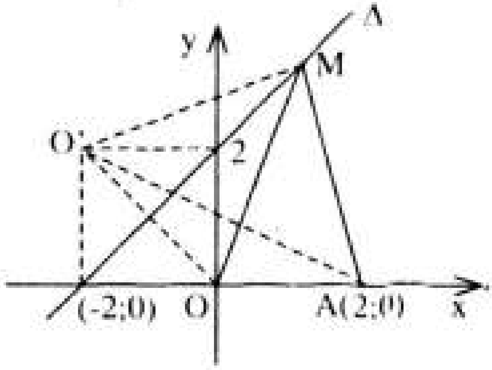
3.31. *Hướng dẫn:*

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-1\,;\,-1)$ và $\overrightarrow{AC}(-3\,;\,3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, do đó ΔABC vuông ở A.

b) Trường hợp 1: (d) // AB. Biết điểm I(–2 ; 3) và vectơ chỉ phương (–1; 4), ta lập được phương trình $4x + y + 5 = 0$.

Trường hợp 2: (d) qua trung điểm M của AB. Biết hai điểm I(–2 ; 3) và M(4; 3), ta suy ra phương trình $y = 3$.

3.32. **a)** Gọi O' là điểm đối xứng của O qua Δ, dễ thấy toạ độ của O' là (–2; 2).



b) Với điểm M bất kì trên Δ ta có

$$OM + MA = O'M + MA.$$

Vậy để O'M + MA ngắn nhất thì M phải là giao điểm của Δ và đường thẳng O'A. Phương trình đường thẳng O'A là:

$$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-2}{0-2} \text{ hay } x + 2y - 2 = 0.$$

Giao điểm của Δ và đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$ là điểm M $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

3.33. Gọi I là trực tâm tam giác ABC. I chính là giao điểm của BH và CK. Giải hệ gồm $-2x + y - 8 = 0$ và $2x + 3y - 6 = 0$ ta được toạ độ I là: $I\left(-\frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right)$.

Đường cao AE qua hai điểm A và I nên có phương trình:

$$\frac{x-1}{-\frac{9}{4}-1} = \frac{y-1}{\frac{7}{2}-1}, \text{ hay } 10x + 13y - 23 = 0.$$

Đường thẳng AB có đỉnh A(1 ; 1) và vectơ chỉ phương chính là vectơ pháp tuyến (2; 3) của đường cao CK. Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x - 2y - 1 = 0$.

Tương tự, ta lập phương trình cạnh AC biết A(1 ; 1) và vectơ chỉ phương (–2; 1): $x + 2y - 3 = 0$.

Giải hệ tạo bởi giao hai đường thẳng BH ($-2x + y - 8 = 0$) và AB ($3x - 2y - 1 = 0$) ta có: B(–17; –26).

Giải hệ tạo bởi giao hai đường thẳng AC ($x + 2y - 3 = 0$) và CK ($2x + 3y - 6 = 0$) ta được: C(3; 0).

3.34. Dễ thấy hai đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ và $2x - 5y - 1 = 0$ cắt nhau, do đó, hai cạnh còn lại của hình bình hành là hai đường thẳng lần lượt đối xứng với hai đường thẳng trên qua điểm I(3 ; 5).

Gọi đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ là Δ, đường thẳng đối xứng với Δ qua $I(3 ; 5)$ là Δ'. Vì Δ' phải song song với Δ nên phương trình của Δ' có dạng: $x + 3y + C = 0$ với $C \neq -6$.

Khoảng cách từ I tới Δ và Δ' phải bằng nhau, tức là:

$$\frac{|3+15-6|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|3+15+C|}{\sqrt{1^2+3^2}},$$

suy ra $12 = |18 + C| \Rightarrow 18 + C = \pm 12 \Rightarrow C = -6$ (loại) hay $C = -30$.

Vậy phương trình của Δ' là: $x + 3y - 30 = 0$.

Bằng cách tương tự, đường thẳng đối xứng với đường thẳng $2x - 5y - 1 = 0$ qua điểm $I(3 ; 5)$ có phương trình $2x - 5y + 39 = 0$.

3.35. **a)** Bán kính đường tròn là $IA = \sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2} = 2\sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn là: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$.

b) Bán kính đường tròn là: $R = d(I; \Delta) = \dfrac{|2.(-2)-1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x + 2)^2 + y^2 = 5$.

3.36. **a)** Đưa phương trình đường tròn về dạng tổng quát

$$x^2 + y^2 + x - \frac{1}{2}y - \frac{11}{16} = 0$$

và áp lụng công thức, được tâm đường tròn là $(-\frac{1}{2};\frac{1}{4})$, bán kính đường tròn $R = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{11}{16}} = 1$.

b) Đường tròn đã cho có tâm $(\frac{2}{7};-\frac{3}{7})$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{20}}{7}$.

3.37. Phương trình đường tròn có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$. Từ điều kiện dường tròn qua hai điểm đã cho ta có hệ:

$$\begin{cases}(1+a)^2+(1-b)^2 = b^2 & (1)\\(2-a)^2+(5-b)^2 = b^2 & (2)\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình được $6a + 8b = 27$ (3) $\Rightarrow a = \frac{9}{2} - \frac{4b}{3}$.

Thay $a = \frac{9}{2} - \frac{4b}{3}$ vào (1) dẫn đến: $\frac{16}{9}b^2 - \frac{50}{3}b + \frac{125}{4} = 0$. Phương trình có hai nghiệm $b_1 = \frac{75+45\sqrt{5}}{16}$; $b_2 = \frac{75-45\sqrt{5}}{16}$. Từ đó tìm được a_1, a_2 tương ứng là: $a_1 = \frac{-7-15\sqrt{5}}{4}$; $a_2 = \frac{-7+15\sqrt{5}}{4}$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$\left(x - \frac{-7-15\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{75+45\sqrt{5}}{16}\right)^2 = \left(\frac{75+45\sqrt{5}}{16}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{-7+15\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{75-45\sqrt{5}}{16}\right)^2 = \left(\frac{75-45\sqrt{5}}{16}\right)^2.$$

3.38. Gọi toạ độ của M là (x ; y), với A(1 ; 1), B(9 ; 7), ta có:

$MA^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$, $MB^2 = (x-9)^2 + (y-7)^2$.

$MA^2 + MB^2 = 90 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-9)^2 + (y-7)^2 = 90$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 8y + 21 = 0.$

Vậy quỹ tích M là đường tròn, với tâm là I = (5 ; 4), và có bán kính $R = \sqrt{5^2 + 4^2 - 21} = \sqrt{20}$.

3.39. Phương trình đường tròn (C) qua A, B, C có dạng

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Vì (C) đi qua A(3; –7), B(9; –5), C(–5; 9) nên ta nhận được ba phương trình tương ứng:

$$9 + 49 - 6a + 14b + c = 0. \quad (1)$$

$$81 + 25 - 18a + 10b + c = 0. \quad (2)$$

$$25 + 81 + 10a - 18b + c = 0. \quad (3)$$

Lấy (2) – (3) ⇒ a = b, thay vào (1) và (2) ⇒ – 48 + 16b = 0 ⇒ a = b = 3 và c = –82. Phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC là $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 82 = 0$ hay $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 100$.

3.40. Đường tròn (C) cần tìm có phương trình dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Vì A, B, C thuộc (C) nên ta có:

$$(1-a)^2 + (2-b)^2 = R^2, \quad (1)$$

$$(5-a)^2 + (2-b)^2 = R^2, \quad (2)$$

$$(1-a)^2 + (-3-b)^2 = R^2. \quad (3)$$

Lấy (1) – (2) suy ra: a = 3. Lấy (1) – (3) suy ra: $b = -\frac{1}{2}$. Thay giá trị a và b vừa tìm được vào (1) ta có: $R^2 = \frac{41}{4}$. Vậy phương trình của (C) là: $(x-3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{41}{4}$.

3.41. (C) có tâm $J\left(2; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Ta có

$$d(J, \Delta) = \frac{\left|6 - \frac{1}{2} + 1\right|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{2\sqrt{10}}.$$

Dễ thấy $d(J, \Delta) > R$ nên d và (C) không có điểm chung.

3.42. Đường tròn tâm I(a ; b) bán kính R có dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Đường tròn này tiếp xúc với cả hai trục Ox, Oy nghĩa là khoảng cách từ I đến hai trục Ox, Oy đều bằng R, hay $|a| = |b| = R$, suy ra $a = \pm R$, $b = \pm R$. Mặt khác, đường tròn này đi qua M(2 ; 1) nên IM = R hay $\sqrt{(a - 2)^2 + (b - 1)^2} = R$. Bình phương hai vế ta được:

$$(a - 2)^2 + (b - 1)^2 = R^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4a - 2b + 5 = R^2.$$

Vì $a^2 = b^2 = R^2$ nên

$$R^2 - 4a - 2b + 5 = 0. \quad (1)$$

• Nếu $a = b = R$, (1) trở thành $R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow R = 1$ hoặc $R = 5$.

Với R = 1 ta có: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Với R = 5 ta có:

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

• Nếu $a = R$; $b = -R$, (1) trở thành: $R^2 - 2R + 5 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

• Nếu $a = -R$; $b = R$, (1) trở thành: $R^2 + 2R + 5 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

• Nếu $a = -R$; $b = -R$, (1) trở thành: $R^2 + 6R + 5 = 0$, suy ra $R = -1$ hoặc $R = -5$, loại.

3.43. Dễ thấy tâm là I(2 ; –4), bán kính $R = \sqrt{2^2 + 4^2 + 5} = 5$.

a) Bằng cách thay toạ độ của B(3 ; –11) vào phương trình, ta thấy không thoả mãn. Đường thẳng qua B(3 ; 11) có phương trình dạng $a(x - 3) + b(y + 11) = 0$, trong đó $a^2 + b^2 \neq 0$. Để đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn đã cho thì khoảng cách từ I(2 ;–4) đến nó phải bằng bán kính của đường tròn, từ đó ta có:

$$\frac{|a(2 - 3) + b(-4 + 11)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5 \Rightarrow (-a + 7b)^2 = 25(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow 12a^2 - 12b^2 + 7ab = 0. \quad (1)$$

Vì a và b không thể đồng thời bằng 0 nên ta giả sử b ≠ 0, ta có thể chia hai vế của (1) cho b^2 và được: $12(\frac{a}{b})^2 + 7(\frac{a}{b}) - 12 = 0$. Giải phương trình bậc 2 này đối với $\frac{a}{b}$ ta được $\frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$ hoặc $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

• Nếu $\frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$, ta chọn a = 4 ; b = −3 và được phương trình tiếp tuyến $4(x - 3) - 3(y + 11) = 0$ hay $4x - 3y - 45 = 0$.

• Nếu $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, ta chọn a = 3 ; b = 4 và được phương trình tiếp tuyến $3(x - 3) + 4(y + 11) = 0$ hay $3x + 4y + 35 = 0$.

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y = 0$ có phương trình $2x - y + C = 0$. Khoảng cách từ tâm I(2 ; −4) của đường tròn tới tiếp tuyến đó phải bằng 5, tức là:

$$\frac{|4+4+C|}{\sqrt{4+1}} = 5 \Leftrightarrow |8+C| = 5\sqrt{5} \text{ hay } C = \pm 5\sqrt{5} - 8.$$

Vậy ta có hai tiếp tuyến: $2x - y \pm 5\sqrt{5} - 8 = 0$.

c) Khoảng cách từ tâm I(2 ; −4) của đường tròn tới đường thẳng $x + (m - 1)y + m = 0$ phải bằng bán kính. Vậy

$$\frac{|2-(m-1)4+m|}{\sqrt{1+(m-1)^2}} = 5 \Leftrightarrow (6 - 3m)^2 = 25(m^2 - 2m + 2)$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 7m + 7 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy không có đường thẳng nào có dạng $x + (m - 1)y + m = 0$ mà tiếp xúc với đường tròn đã cho.

3.44. Toạ độ giao điểm của hai đường tròn là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế của hai phương trình trên ta được:

$$4x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Thay $x = -\frac{3}{2}$ vào phương trình đầu: $y^2 + 2y - \frac{7}{4} = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là: $\frac{-2 \pm \sqrt{11}}{2}$. Vậy có hai giao điểm có toạ độ là: $\left(-\frac{3}{2}; \frac{-2+\sqrt{11}}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2+\sqrt{11}}{2}\right)$.

3.45. Đường tròn (C) có tâm O = (0 ; 0) và bán kính R = 1. Đường tròn (C') với phương trình $(x-8)^2+(y-6)^2=16$ có tâm O'(8 ; 6) và bán kính R' = 4.

Để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đã cho thì khoảng cách từ O và O' tới đường thẳng này lần lượt phải bằng 1 và 4. Ta có

$$\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1 \text{ và } \frac{|8A+6B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 4.$$

Từ đó suy ra $|8A+6B+C| = 4|C|$ hay $8A + 6B + C = \pm 4C$.

• Nếu $8A + 6B + C = 4C \Leftrightarrow 3C = 8A + 6B$ thì

$$9C^2 = 64A^2 + 96AB + 36B^2.$$

Vì $\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1$ nên $C^2 = A^2 + B^2$. Vậy

$$64A^2 + 96AB + 36B^2 = 9A^2 + 9B^2 \text{ hay } 55A^2 + 96AB + 27B^2 = 0.$$

Giải phương trình trên với ẩn là A ta được: $A = \frac{-48B \pm 3B\sqrt{91}}{55}$.

Chọn B = 55 thì $A = -48 \pm 3\sqrt{91}$ và $C = -18 \pm 8\sqrt{91}$.

Vậy có hai tiếp tuyến chung là:

$$(-48+3\sqrt{91})x + 55y - 18 + 8\sqrt{91} = 0 \text{ và}$$

$$(-48-3\sqrt{91})x + 55y - 18 - 8\sqrt{91} = 0.$$

• Nếu $8A + 6B + C = -4C$, hay $5C = -8A - 6B$ thì

$$25C^2 = 64A^2 + 96AB + 36B^2 = 25A^2 + 25B^2$$

hay $39A^2 + 96AB + 11B^2 = 9$.

Giải phương trình trên đối với ẩn là A ta có $A = \frac{(-48 \pm 25\sqrt{3})B}{39}$.

Chọn B = 39 thì $A = -48 \pm 25\sqrt{3}$ và $C = 30 \mp 40\sqrt{3}$.

Vậy còn hai tiếp tuyến chung khác là:

$$(-48+25\sqrt{3})x + 39y + 30 - 40\sqrt{3} = 0,$$

$$(-48-25\sqrt{3})x + 39y + 30 + 40\sqrt{3} = 0.$$

3.46. **a)** Bán kính đường tròn cần tìm là: $R = \frac{|6-5+3|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Phương trình đường tròn: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = \frac{16}{5}$.

b) Đặt A'(x'; y'), do A' đối xứng với A qua Δ nên

$$AA' \perp \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 + 2t \\ y' = 5 - t \end{cases}$$

và khoảng cách từ A, A' đến Δ bằng nhau, tức là

$$2x' - y' + 3 = -(6 - 5 + 3) = -4 \Leftrightarrow 2(3 + 2t) - (5 - t) = -7$$

$$\Leftrightarrow 7t = -8 \Leftrightarrow t = -\frac{8}{7}.$$

Từ đó ta được $A'\left(\frac{5}{7}; \frac{43}{7}\right)$.

c) Giả sử vectơ pháp tuyến của Δ' là (α, β). Khi đó

$$(\Delta, \Delta') = 60^0 \Leftrightarrow \cos(\Delta, \Delta') = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|2\alpha - \beta|}{\sqrt{5(\alpha^2 + \beta^2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |4\alpha - 2\beta| = \sqrt{5(\alpha^2 + \beta^2)} \Leftrightarrow 11\alpha^2 - 16\alpha\beta - \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11}\beta.$$

Chọn β = 11, ta có $\alpha = 8 \pm 5\sqrt{3}$. Ta [illegible] hai phương trình đường thẳng Δ' tương ứng là $(8 + 5\sqrt{3})$[illegible]$11(y - 5) = 0$ và

$(8 - 5\sqrt{}$ [illegible] $(y - 5) = 0$.

Chú ý. *Có thể tiến hàn*[illegible] hiếu H của A trên Δ. Tìm B, C ∈ Δ sao cho $HB = HC = \frac{1}{\sqrt{3}}AA'$ [illegible] ng trình AB, AC, đây chính là hai phương trình đường thẳng Δ' tương ứng.

3.47. Ta có $d^2 - R^2 = (x_0 + A)^2 + (y_0 + B)^2 - (A^2 + B^2 - C)$

$$= x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C.$$

Ở đó d là khoảng cách từ M tới tâm đường tròn (C) và R là bán kính đường tròn (C). Vậy phương tích của điểm $M(x_0; y_0)$ đối với đường tròn (C) là $x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C$.

3.48. a) Đường thẳng Δ qua A có phương trình

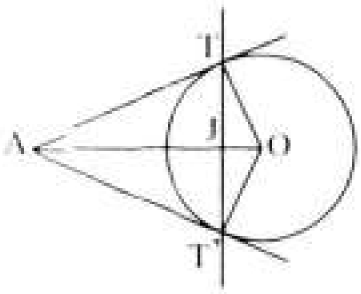
$$a(x + 2) + b(y - 3) = 0 \ (a^2 + b^2 \neq 0).$$

Đường tròn (C) có tâm O(0; 0), bán kính R = 2.

Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi

$$\frac{|2a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow |2a - 3b| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow b(12a - 5b) = 0.$$

Với b = 0 thì a ≠ 0. Suy ra ta được một tiếp tuyến có phương trình x + 2 = 0.



Với $12a - 5b = 0$, lấy $a = 5$ thì $b = 12$ và ta được tiếp tuyến thứ hai có phương trình $5x + 12y - 26 = 0$.

b) Gọi T, T' là các tiếp điểm, ta có:

$$AT^2 = AT'^2 = \mathscr{P}_{A/(C)} = 9,$$

$$TT' = 2TJ = 2\frac{AT.OT}{\sqrt{AT^2 + OT^2}} = 2.\frac{3.2}{\sqrt{9+4}} = \frac{12}{\sqrt{13}}.$$

3.49. Giả sử độ dài nửa trục bé là b. Nửa trục lớn của elip là a = 10m. Elip có nửa tiêu cự là c = a.e = 1,5m. Suy ra

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 2,25} \approx 9,88\,\text{m},$$

độ dài trục bé $\approx 19,76\,\text{m}$.

3.50. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử phương trình elip có dạng chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, với $a > b$. Theo đề bài, $b = \frac{a}{k}$. Ta có:

$$c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - \frac{a^2}{k^2} = a^2\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right).$$

Vậy $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}$.

3.51. **a)** Độ dài trục lớn bằng 6, suy ra a = 3. Tiêu cự bằng 4, suy ra c = 2. Ta có: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$. Vậy nếu hai tiêu điểm thuộc Ox thì phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Nếu hai tiêu điểm thuộc Oy thì phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Một tiêu điểm $F_1(-2\,;\,0)$, suy ra c = 2. Độ dài trục lớn bằng 10, suy ra a = 5. Ta có: $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 4 = 21$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$.

c) Một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}\,;\,0)$, suy ra $c = \sqrt{3}$. Giả sử elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo đề bài, điểm $M(1\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2})$ nằm trên elip nên:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \text{ hay } 4b^2 + 3a^2 = 4a^2b^2.$$

Vì $a^2 = b^2 + c^2$ nên $a^2 = b^2 + 3$ suy ra $4b^2 + 3(b^2 + 3) = 4(b^2 + 3)b^2$ hay $4b^4 + 5b^2 - 9 = 0$. Giải phương trình đó ta được $b^2 = 1$ (loại nghiệm $b^2 = -\frac{9}{4}$). Như vậy phương trình chính tắc của elip là:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

3.52. **a)** Giả sử elip có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, điểm I(0; 3) nằm trên elip nên: $\frac{0}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$, hay $b^2 = 9$. Theo giả thiết, tiêu cự của elip là $2c = F_1F_2 = 2\sqrt{5}$. Vậy $c = \sqrt{5}$. Do đó, $b^2 = a^2 - c^2$ hay $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 5 = 14$. Tóm lại, elip đã cho có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Ta có công thức về độ dài bán kính qua tiêu:

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a}.$$

Hiển nhiên $-a \le x \le a$ nên MF_1 nhỏ nhất khi $x = -a$ và lớn nhất là $x = a$. Vậy MF_1 có giá trị nhỏ nhất là $a - c = \sqrt{14} - \sqrt{5}$ và lớn nhất là $a + c = \sqrt{14} + \sqrt{5}$.

3.53. **a)** Δ cắt (E) khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x - 2y + m = 0 \\ 5x^2 + 4y^2 - 20 = 0 \end{cases}$$

Thay $x = 2y - m$ vào phương trình thứ hai, ta có

$$5(2y - m)^2 + 4y^2 - 20 = 0$$

$$20y^2 - 20ym + 5m^2 + 4y^2 - 20 = 0$$

$$24y^2 - 20my + 5(m^2 - 4) = 0$$

$$\Delta' = 100m^2 - 120m^2 + 480 = -20(m^2 - 24) = -20(m + \sqrt{24})(m - \sqrt{24})$$

Vậy đường thẳng Δ cắt elip khi $-\sqrt{24} \le m \le \sqrt{24}$.

b) Δ và (E) có một điểm chung khi hệ phương trình chỉ có 1 nghiệm, tức là khi $m = \pm\sqrt{24}$.

3.54. Nếu điểm M(x ; y) nằm trên elip thì ta có các bán kính qua tiêu của điểm M là: $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$, $MF_2 = a - \frac{cx}{a}$, với $F_1 = (-c ; 0)$, $F_2 = (c ; 0)$.

Vì $MF_1 = 2MF_2$ nên

$$a + \frac{cx}{a} = 2\left(a - \frac{cx}{a}\right) \text{ hay } x = \frac{a^2}{3c}.$$

Thay vào phương trình elip ta được $\frac{a^4}{a^2.9c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, hay

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2}{9c^2}\right) = \frac{b^2(9c^2 - a^2)}{9c^2} = \frac{b^2(8a^2 - 9b^2)}{9c^2}.$$

Vậy: Nếu $8a^2 < 9b^2$, bài toán vô nghiệm.

Nếu $8a^2 > 9b^2$, có hai điểm thoả mãn là

$$M_1 = \left(\frac{a^2}{3c}; \frac{b\sqrt{8a^2 - 9b^2}}{3c}\right) \text{ và } M_2 = \left(\frac{a^2}{3c}; -\frac{b\sqrt{8a^2 - 9b^2}}{3c}\right)$$

Nếu $8a^2 = 9b^2$, chỉ có một điểm $M(a ; 0)$.

3.55. Ta có $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b\text{tg}t$ nên $\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos t}$, $\frac{y}{b} = \text{tg}t$. Từ đó

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \text{tg}^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (*)$$

Quỹ tích các điểm M là hypebol có phương trình (*).

3.56. **a)** Theo đề bài, $2c = 2\sqrt{13}$; $\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow b^2 + a^2 = 13$ và $b = \frac{2}{3}a$, do đó $\frac{4}{9}a^2 + a^2 = 13 \Rightarrow a = 3$; $b = 2$. Vì tiêu điểm nằm trên Oy nên phương trình chính tắc của hypebol $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Theo đề bài:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{5} \Rightarrow c^2 = 5a^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5a^2 \Rightarrow b^2 = 4a^2 \qquad (1)$$

Điểm M(10; 6) thuộc hypebol và tiêu điểm nằm trên Ox nên

$$\frac{10}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Giải hệ gồm (1) và (2) được $a^2 = 1$, $b^2 = 4$. Hypebol có phương trình

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

3.57. *Hướng dẫn:*

a) Elip (E) có hai tiêu điểm (–1; 0) và (1; 0).

Hypebol (H) có hai tiêu điểm (–3; 0) và (3; 0).

b) $(-\sqrt{5}; 0)$ và $(\sqrt{5}; 0)$.

3.58. **a)** Elip có tiêu điểm (0; −4), (0; 4), các đỉnh (−3; 0); (3; 0) và (0; −5); (0; 5). Hypebol (H) có đỉnh (0; −4); (0; 4) thuộc trục tung nên có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ với $c^2 = a^2 + b^2$. Suy ra lai tiêu điểm của (H) cũng nằm trên Oy, chúng là đỉnh của (E), nên hai tiêu điểm của (H) là các điểm (0; −5), (0; 5). Từ đó,

$$a = 4;\ c = 5 \Rightarrow b = 3.$$

Vậy phương trình hypebol là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

b) Từ hệ phương trình toạ độ giao điểm

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = -1 \end{cases}$$

dễ dàng tính được $y^2 = \dfrac{2}{\dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{16}} = \dfrac{2.25.26}{41}$; $x^2 = 9\left(1 - \dfrac{2.16}{41}\right) = \dfrac{81}{41}$.

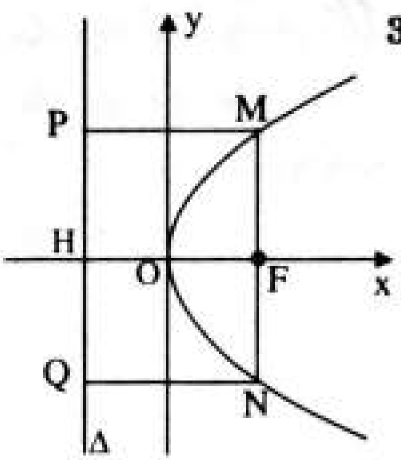
Từ đó ta có: $x^2 + y^2 = \dfrac{881}{41}$. Vậy phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (E) và (H) là: $x^2 + y^2 = \dfrac{881}{41}$.

3.59. **a)** Vì parabol Ox là trục đối xứng nên đỉnh của nó nằm trên Ox. Tiêu điểm F(4 ; 0) nên $\frac{p}{2} = 4 \Rightarrow p = 8$; 2p = 16.

Phương trình của parabol là $y^2 = 16x$.

b) Tương tự, ta có phương trình của parabol là $y^2 = -8x$.

c) Parabol có tiêu điểm F(0; 1), đường chuẩn y = −1, suy ra p = 2 và phương trình là $x^2 = 4y$.



3.60. *Cách 1*: Theo định nghĩa của parabol ta có MN = MF + FN = MP + NQ = 2HF = 2p.

Cách 2: Giả sử MN là dây cung vuông góc với trục đối xứng (trục hoành) tại tiêu điểm F. Ta có MN = 2MF, MF = y_M và

$$y_M^2 = 2px_M = 2p.\frac{p}{2} = p^2 \Leftrightarrow y_M = p.$$

Vậy MN = 2p.

3.61. Theo định nghĩa, tham số tiêu p của parabol là khoảng cách từ tiêu điểm F(1 ; 2) đến đường chuẩn $\Delta : 3x - 4y - 5 = 0$.

Từ đó, $p = \dfrac{|3-8-5|}{5} = 2$.

3.62. **a)** $(P_2)\ y = x^2 - 4x + m = (x-2)^2 + m - 4$. Dùng công thức chuyển về hệ trục XIY, với I(2; m − 4) và $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - m + 4 \end{cases}$, (P_2) sẽ có phương trình trong hệ XIY là $X^2 = Y$, như vậy nó là một parabol.

b) Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (P_1) và (P_2). Khi đó ta có:

$$\begin{cases} y_M^2 - 2x_M = 0 \\ x_M^2 - 4x_M + m - y_M = 0 \end{cases}$$

suy ra $x_M^2 + y_M^2 - 6x_M - y_M + m = 0$, do đó M thuộc đường tròn:

$$x^2 + y^2 - 6x - y + m = 0,$$

có tâm $I\left(3; \dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{37 - m}$ (m <37). Từ đó, suy ra rằng nếu (P_1), (P_2) cắt nhau ở bốn điểm phân biệt thì các giao điểm đó cùng thuộc một đường tròn.

3.63. **a)** Elip $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ có $a = 5$, $c = \sqrt{25-16} = 3$. Đường chuẩn của elip có phương trình $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$ hay $x = \pm\dfrac{25}{9}$.

b) Hypebol $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ có $a = 3$, $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Phương trình đường chuẩn của hypebol là $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$ hay $x = \pm\dfrac{9\sqrt{13}}{13}$.

c) Parabol $y^2 = 8x$ có $p = 4$ nên phương trình đường chuẩn là $x = -\dfrac{p}{2}$ hay $x = -2$.

3.64. **a)** Từ toạ độ tiêu điểm F(3; 0) suy ra c = 3. Nếu cônic này là parabol dạng chính tắc thì phương trình đường chuẩn phải là $x = -3$ (loại). Vậy ta dùng công thức định nghĩa đường chuẩn của elip và hypebol dạng chính tắc $x = \dfrac{a}{c} = 2$ hay $\dfrac{a^2}{c} = 2$.

Như vậy $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{6}} > 1$. Vì $e > 1$ nên cônic này là hypebol. Ta có $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 6 = 3$. Phương trình chính tắc của hypebol đó là : $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$.

b) Vì $e = 3 > 1$ nên cônic này là hypebol. Từ toạ độ tiêu điểm $F(-6 ; 0)$, suy ra $c = 6$ và $e = \frac{c}{a} = 3$, do đó $a = 2$.

Như vậy $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 4 = 32$. Phương trình chính tắc của hypebol đó là : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$.

3.65. **a)** Giả sử $M = (x ; y)$ thuộc cônic đã cho thì:

$$MF = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}.$$

Khoảng cách d từ M đến đường chuẩn $y = 0$ là $d = |y|$. Theo định nghĩa của cônic ta có: $\frac{MF}{d} = e$ hay $\frac{MF}{|y|} = 2$ hay $MF = 2|y|$. Từ đó ta có $x^2 + (y-3)^2 = 4y^2$ hay $x^2 - 3y^2 - 6y + 9 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, nó là hypebol vì $e > 1$.

b) Giả sử $M = (x ; y)$ thuộc cônic đã cho thì:

$$MF = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

Khoảng cách từ M đến đường chuẩn $x + y - 1 = 0$ là $d = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}$.

Theo định nghĩa của cônic ta có $\frac{MF}{d} = e$ hay $\frac{MF}{d} = \sqrt{2}$ hay $MF = d\sqrt{2}$. Từ đó ta có : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+y-1)^2$ hay $2xy - 1 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, nó là hypebol vì $e > 1$.

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PGS.TS. PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: THU HIỀN
Sửa bài: THÁI VĂN
Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

Thực hiện liên kết: **Nhà sách HỒNG ÂN**

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN HÌNH HỌC 10
Mã số: 1L - 270ĐH2009
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 930 - 2009/CXB/09 - 176/ĐHQGHN, ngày 08/10/2009
Quyết định xuất bản số: 270LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2009.