LỤC TRÍ TUYÊN

ĐỘT PHÁ

TƯ DUY GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- Ôn luyện thi THPT Quốc gia
- Tài liệu tham khảo cho giáo viên

LỤC TRÍ TUYÊN

ĐỘT PHÁ TƯ DUY GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

NHÀ XUẤT BẢN DÂN TRÍ

XUẤT BẢN BỞI NHÀ XUẤT BẢN ABC

GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP CÓ TẠI HTTPS://ESTUDY.EDU.VN/DISCUSSION

Xuất bản lần đầu, Tháng 10 năm 2018

Mục lục

Chương 1
KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1.1 Đại cương về khối đa diện

1.1.1 Khối đa diện

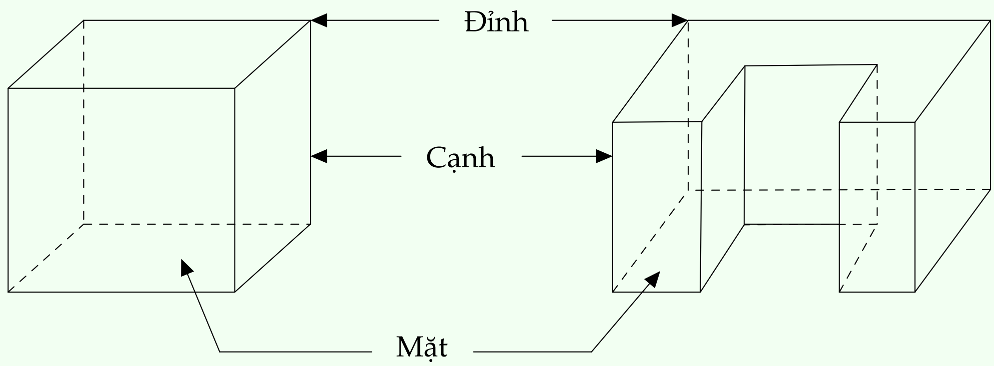
Mục này giới thiệu các kiến thức đại cương về khối đa diện nên các khái niệm được tổng hợp lại trong Sách giáo khoa Cơ bản Hình học 12 [3] nhằm thống nhất các khái niệm trong chương trình.

Định nghĩa 1.1.1: Hình đa diện

Hình đa diện $(\mathscr{H})$ (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn đồng thời ba điều kiện:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không giao nhau, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.
- Với hai mặt S, S' bất kỳ luôn tồn tại một dãy các mặt $S_0, S_1, ..., S_n$ sao cho $S_0 \equiv S$, $S_n \equiv S'$ và bất kỳ hai mặt liên tiếp nào trong dãy này đều có một cạnh chung.

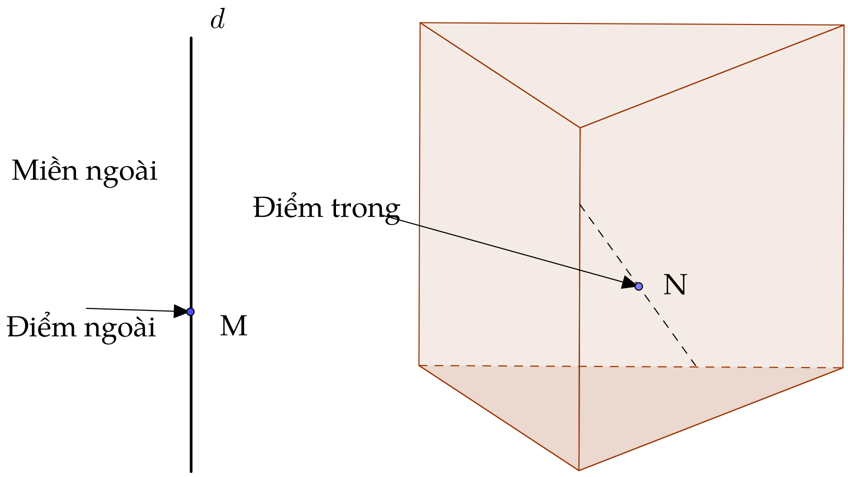
Mỗi đa giác như thế được gọi là một mặt của hình đa diện $(\mathscr{H})$. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện $(\mathscr{H})$.



Định nghĩa 1.1.2: Khối đa diện

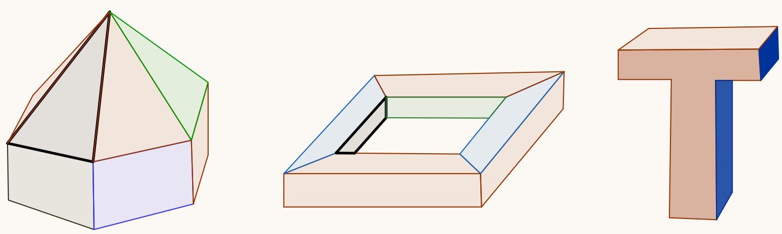
Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Mỗi đa diện $(\mathscr{H})$ chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau: miền trong và miền ngoài của $(\mathscr{H})$. Trong đó chỉ có duy nhất miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đấy.
Các điểm thuộc miền trong được gọi là các điểm trong, các điểm thuộc miền ngoài được gọi là các điểm ngoài của $(\mathscr{H})$.
Khối đa diện $(\mathscr{H})$ (lấy cùng tên với hình đa diện) là hợp của hình đa diện $(\mathscr{H})$ và miền trong của nó.



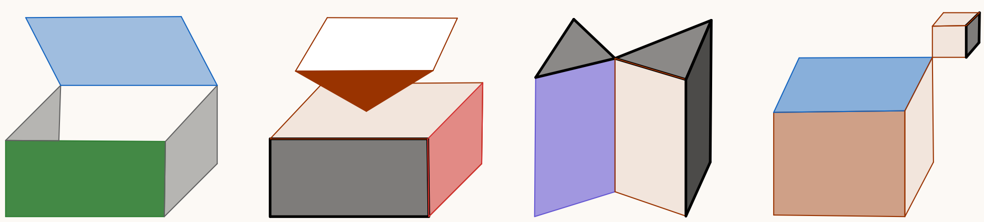
Ví dụ 1.1.1

Các hình dưới đây là các khối đa diện:



Ví dụ 1.1.2

Các hình dưới đây không phải là các khối đa diện:



a) b) c) d)

Hình a) không là khối đa diện do có một cạnh (trên cùng) không là cạnh chung của hai mặt. Điều này vi phạm điều kiện thứ hai trong Định nghĩa 1.1.1.

Hình b) không là khối đa diện do có một mặt phẳng chứa một đỉnh của các mặt khác. Khi đó, mặt phẳng này giao với mặt phẳng khác nhưng lại không có đỉnh chung cũng không có cạnh chung. Điều này vi phạm điều kiện một trong Định nghĩa 1.1.1.

Hình c) không là khối đa diện do có một cạnh là cạnh chung của bốn mặt. Điều này vi phạm điều kiện hai trong Định nghĩa 1.1.1.

Hình d) không là khối đa diện do vi phạm điều kiện thứ ba trong Định nghĩa 1.1.1.

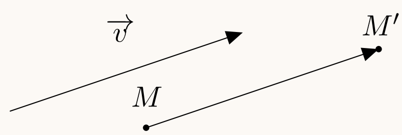
1.1.2 *Cơ bản về phép biến hình trong không gian*

Định nghĩa 1.1.3: Phép biến hình

Phép biến hình trong không gian là một quy tắc F mà với mỗi điểm M trong không gian, thực hiện theo quy tắc F, dựng được một và chỉ một điểm M'. Điểm M' được gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F, ký hiệu là $M' = F(M)$.

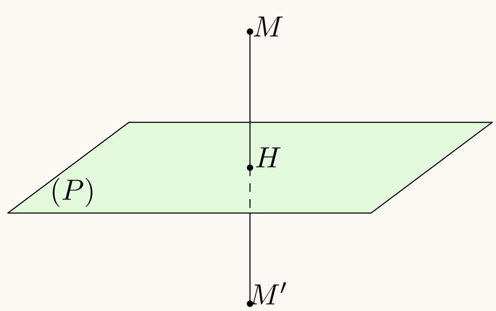
Ví dụ 1.1.3: Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

Là quy tắc: "Mỗi điểm M biến thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$".
Ký hiệu, $T_{\vec{v}}$: $M \to M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.



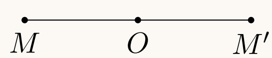
Ví dụ 1.1.4: Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)

Là quy tắc: "Mỗi điểm M biến thành chính nó nếu $M \in (P)$ và biến thành M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' nếu M không thuộc (P)".
Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của $\mathscr{H}$.



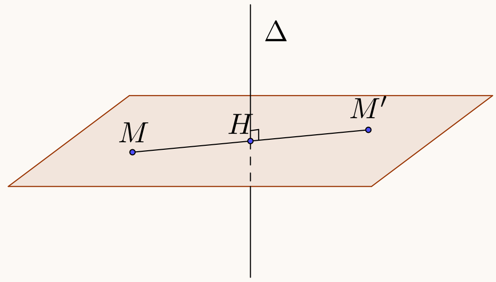
Ví dụ 1.1.5: Phép đối xứng tâm O

Là quy tắc: "Biến O thành chính nó, biến mỗi điểm $M \neq O$ thành M' sao cho O là trung điểm của MM'".
Nếu phép đối xứng tâm O biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của $\mathscr{H}$.



Ví dụ 1.1.6: Phép đối xứng qua đường thẳng Δ

Là quy tắc: "Biến mỗi điểm thuộc Δ thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành M' sao cho Δ là trung trực của MM'".
Nếu phép đối xứng trục Δ biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của hình $\mathscr{H}$.

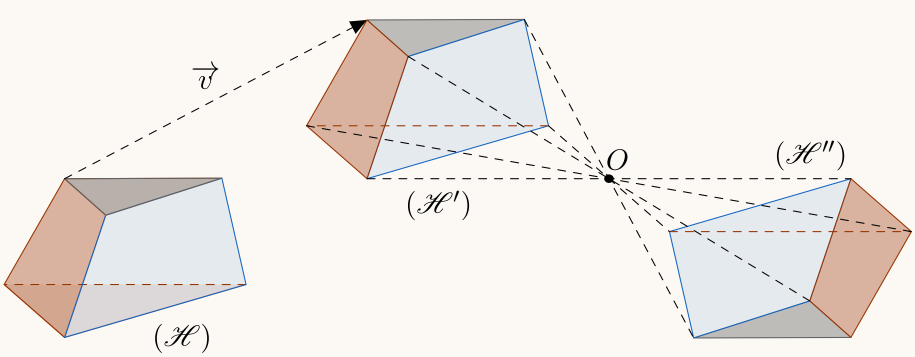


Định nghĩa 1.1.4: Phép dời hình và hai hình bằng nhau

- Phép biến hình F được gọi là một phép dời hình nếu với hai điểm M, N bất kỳ, gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép biến hình F, ta có $M'N' = MN$.
  Ví dụ: Các phép tịnh tiến, đối xứng qua mặt phẳng, đối xứng tâm, đối xứng qua đường thẳng là các phép dời hình.
  Chú ý: Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình. Hơn nữa, phép dời hình biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$ thì biến mọi đỉnh, cạnh, mặt của $\mathscr{H}$ tương ứng thành đỉnh, cạnh, mặt của $\mathscr{H}'$.
- Hai hình đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình đa diện này thành hình đa diện kia.

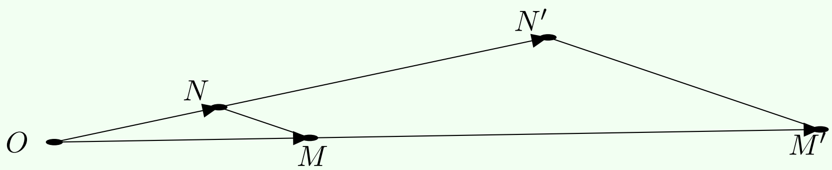
Ví dụ 1.1.7

Phép tính tiến vectơ $\vec{v}$ biến đa diện $(\mathscr{H})$ thành đa diện $\mathscr{H}'$, phép đối xứng tâm O biến đa diện $(\mathscr{H}')$ thành đa diện $(\mathscr{H}'')$. Khi đó, phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tính tiến vectơ $\vec{v}$ và phép đối xứng tâm O biến đa diện $(\mathscr{H})$ thành đa diện $(\mathscr{H}'')$. Do đó, các đa diện $(\mathscr{H})$, $(\mathscr{H}')$ và $(\mathscr{H}'')$ bằng nhau.



Định nghĩa 1.1.5: Phép vị tự và phép đồng dạng

- Phép vị tự tâm O tỉ số $k \neq 0$ là quy tắc biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$



- Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số $k > 0$ nếu F biến hai điểm M, N bất kỳ thành hai điểm M', N' sao cho $M'N' = k.MN$.
  Ví dụ: Phép vị tự tâm O tỷ số $k \neq 0$ là phép đồng dạng tỷ số $|k|$.

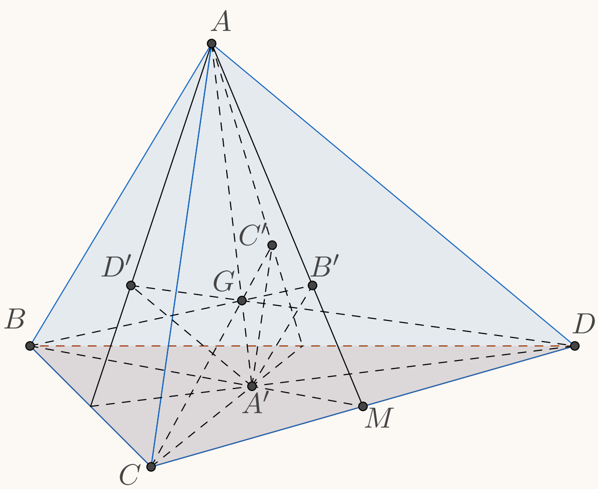
CHÚ Ý: Phép đồng dạng tỷ số $k > 0$ biến khối đa diện $(\mathscr{H})$ thành khối đa diện $(\mathscr{H}')$ thì tỉ số thể tích của $(\mathscr{H}')$ và $(\mathscr{H})$ bằng k^3 (lập phương tỉ số đồng dạng). Chú ý này rất hữu ích cho các bài toán về tỉ lệ thể tích ở các phần sau.

Ví dụ 1.1.8

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Các đường thẳng qua A' lần lượt song song với AB, AC, AD lần lượt cắt các mặt phẳng $(ACD), (ABD), (ABC)$ tại B', C', D'. Chứng minh rằng tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ đồng dạng.

Hướng dẫn

Gọi M là trung điểm của CD. Do A' là trọng tâm tam giác BCD nên $\dfrac{BA'}{BM} = \dfrac{2}{3}$.
Do $A'B' \parallel AB$ nên $\dfrac{BA'}{BM} = \dfrac{AB'}{AM}$ (Ta-let)
$\Rightarrow \dfrac{AB'}{AM} = \dfrac{2}{3}$. Vậy B' cũng là trọng tâm của tam giác ACD.
Tương tự, C', D' cũng là trọng tâm của tam giác ABD và tam giác ABC.
Trong tam giác ABM, gọi $G = AA' \cap BB'$
$\Rightarrow \dfrac{AG}{GA'} = \dfrac{BG}{GB'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ (Ta-let).



Mặt khác, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AM}{B'M} = 3$. Vậy $\dfrac{AG}{GA'} = \dfrac{BG}{GB'} = 3$. Tương tự $\dfrac{CG}{GC'} = \dfrac{BG}{GB'} = 3$.

Do các cặp vectơ $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GA'})$, $(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GB'})$, $(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GC'})$ ngược hướng nên ta có

$$\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'},\ \overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GB'},\ \overrightarrow{GC} = -3\overrightarrow{GC'}.$$

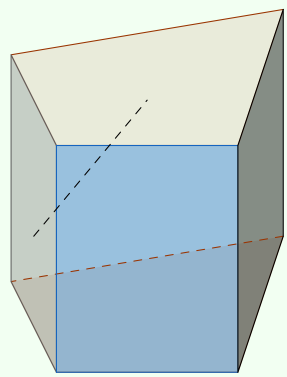
Vậy phép vị tự tâm G tỉ số $k = -3$ biến tứ diện $A'B'C'D'$ thành tứ diện $ABCD$. Do đó hai tứ diện $ABCD$ đồng dạng với tứ diện $A'B'C'D'$ theo tỉ số 3.

1.1.3 Khối đa diện lồi, đa diện đều

Trong chương trình THPT, đối tượng chủ yếu của hình không gian là các khối đa diện lồi và đi tính các yếu tố liên quan của nó như thể tích, góc hay khoảng cách. Nhưng trước khi đi vào các khối hình cụ thể, ta cần phân biệt được khối đa diện lồi với các khối không lồi và nắm được cơ bản các đặc điểm của các khối đa diện đều.

Định nghĩa 1.1.6: Khối đa diện lồi

Khối đa diện $(\mathscr{H})$ được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của $(\mathscr{H})$ luôn thuộc $(\mathscr{H})$. Khi đó hình đa diện tương ứng được gọi là đa diện lồi.
Ví dụ: Các khối chóp tam giác (tứ diện), khối chóp đa giác lồi, khối hộp là những khối đa diện lồi.
Chú ý: Khối da diện là lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một nửa không gian chia bởi một mặt bất kỳ của nó.

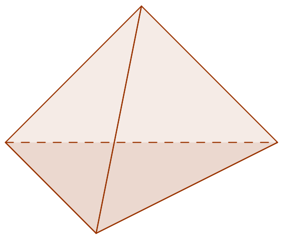
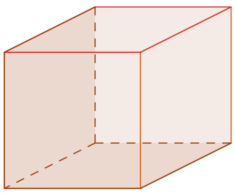
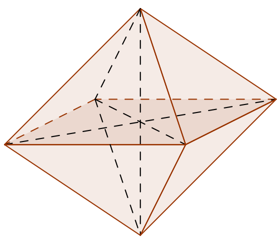
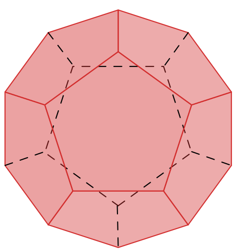
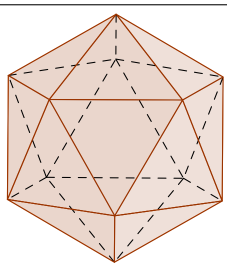


Định nghĩa 1.1.7: Khối đa diện đều loại $\{p; q\}$

Khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ là khối đa diện lồi thỏa mãn đồng thời hai tính chất:

- Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh (cũng là p đỉnh).
- Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của q mặt (cũng là q cạnh).

Người ta chứng minh được chỉ có năm khối đa diện đều gồm các loại $\{3; 3\}$, $\{4; 3\}$, $\{3; 4\}$, $\{5; 3\}$ và $\{3; 5\}$. Cụ thể được tóm tắt ở bảng sau.

Tên (n =số mặt)	Loại	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt phẳng đối xứng
 Tứ diện đều ($n = 4$)	$\{3; 3\}$	4	6	6
 Khối lập phương ($n = 6$)	$\{4; 3\}$	8	12	9
 Bát diện đều ($n = 8$)	$\{3; 4\}$	6	12	9
 Thập nhị diện đều ($n = 12$)	$\{5; 3\}$	20	30	15
 Nhị thập diện đều ($n = 20$)	$\{3; 5\}$	12	30	15

LƯU Ý, ta có thể tính số đỉnh và số cạnh của khối đa diện đều n mặt loại $\{p; q\}$ như sau

$$\boxed{\textbf{Số cạnh} = \frac{n \times p}{2}; \quad \textbf{Số đỉnh} = \frac{n \times p}{q}}$$

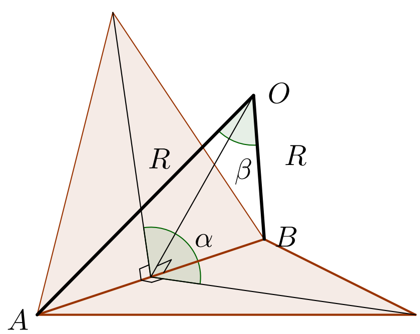
NGOÀI RA, một số đặc điểm khác của khối đa diện đều cũng được quan tâm như số trục đối xứng, góc nhị diện giữa hai mặt kề, góc ở tâm mặt cầu ngoại tiếp chắn bởi một cạnh, thể tích, bán kính khối cầu ngoại tiếp. Chẳng hạn, khối tứ diện đều có 3 trục đối xứng là các đường đi qua trung điểm của hai cạnh đối diện; khối lập phương có 9 trục đối xứng bao gồm: 3 đường đi qua tâm hai mặt đối diện, 6 đường đi qua trung điểm của hai cạnh đối diện; khối bát diện đều cũng có 9 trục đối xứng bao gồm: 3 đường đi qua hai đỉnh đối diện, 6 đường đi qua trung điểm của hai cạnh đối diện. Việc đếm số trục đối xứng của khối mười hai (thập nhị) mặt đều và hai mươi (nhị thập) mặt đều phức tạp và khó hình dung hơn nhiều nên cuốn sách này không đề cập ở đây.

Định nghĩa 1.1.8: Nhị diện và góc nhị diện

Nhị diện là hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng có chung bờ là gia tuyến của chúng.
Cho nhị diện (P) và (Q) có giao tuyến d. Từ $I \in (P)$ và $J \in (Q)$ với $I, J \notin d$ hạ $IH \perp d$; $JK \perp d$ thì góc $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{KJ})$ gọi là góc nhị diện $[(P), d, (Q)]$.

Như vậy, số đo góc nhị diện có thể tù và bằng hoặc bù với số đo góc giữa (P) và (Q).

Gọi α là góc phẳng nhị diện tạo bởi một cạnh bất kỳ của khối đa diện đều và hai mặt bên kề với cạnh đó, β là góc ở tâm khối cầu ngoại tiếp của đa diện (có bán kính R) chắn bởi một cạnh bất kỳ (xem Hình 1.1). Nếu nắm được số đo các góc này thì ta có thể dễ dàng tính toán được các yếu tố khác của khối đa diện. Bảng dưới đây chỉ ra một số đặc điểm cơ bản khác của các khối đa diện đều bao gồm số đo các góc α và β. Chi tiết xem thêm tại [4].



Hình 1.1: Góc nhị diện và góc ở tâm của đa diện đều

Khối đa diện đều cạnh 1	Diện tích một mặt	Thể tích	Góc nhị diện một cạnh: α	Góc ở tâm cầu chắn 1 cạnh: β
Tứ diện đều	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\cos\alpha = \frac{1}{3}$	$\cos\beta = -\frac{1}{3}$
Lập phương	1	1	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\cos\beta = -\frac{1}{3}$
Bát diện đều	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$	$\beta = \frac{\pi}{2}$
Mười hai mặt đều	$\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})$	$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$
Hai mươi mặt đều	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})$	$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

1.1.4 Bài tập áp dụng

1.2 Thể tích khối đa diện

Mục này cuốn sách giới thiệu với độc giả phương pháp tiếp cận mới trong việc tính thể tích khối chóp và khối lăng trụ mà đối với những học sinh hạn chế về tưởng tượng hình không gian vẫn có thể dễ dàng vận dụng được. Để làm được điều này, học sinh trước hết phải "biết vẽ hình" (làm chủ hình vẽ) và xác định được các yếu tố cơ bản của hình.

Ở đây ta ký hiệu $R_{đ}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy của các khối chóp hoặc lăng trụ, $S(ABC)$ là diện tích tam giác ABC và các quy ước về độ dài cạnh, đường cao đường trung tuyến, nửa chu vi lần lượt là a, b, c, h_a, m_a, p như thông lệ.

Đặc biệt, đối với hình thức thi và làm bài trắc nghiệm thì ngoài yếu tố nắm rõ phương pháp giải toán học sinh cần phải tính toán nhanh ra đáp số. Chính vì vậy, những yếu tố có tính chất quen thuộc, lặp lại nhiều lần trong quá trình giải bài nên được học thuộc một cách hệ thống.

1.2.1 *Làm chủ hình vẽ khối chóp và lăng trụ*

LÀM CHỦ ĐÁY

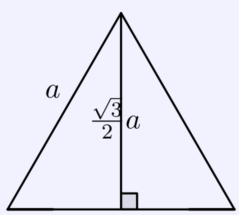
Đáy là tam giác đặc biệt: Tóm tắt đặc điểm cơ bản

Tam giác đều cạnh bằng a

Đường cao: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Diện tích: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R_{đ} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.



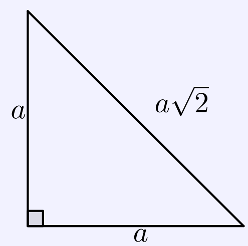
Tâm ngoại tiếp cũng là trọng tâm.

Tam giác vuông cân cạnh bên bằng a

Cạnh huyền: $\sqrt{2}a$.

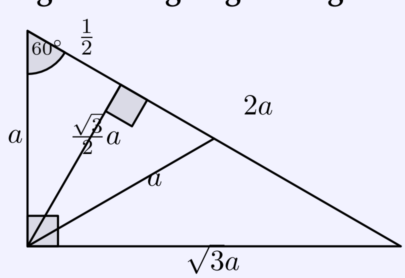
Diện tích: $\dfrac{1}{2}a^2$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R_{đ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.



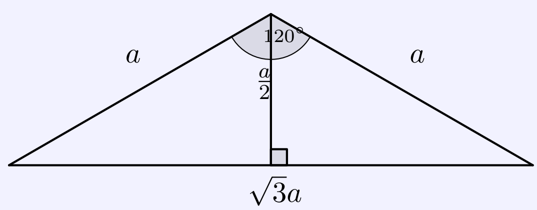
Tâm ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền (chung cho mọi tam giác vuông).

Tam giác vuông có góc bằng 60°



Diện tích $= \dfrac{1}{2}\sqrt{3}a^2$; $R_{đ} = a$.

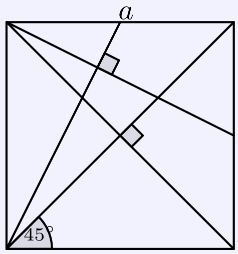
Tam giác cân góc 120° ở đỉnh



$R_{đ} = a$; đường cao $= \dfrac{a}{2}$; diện tích: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

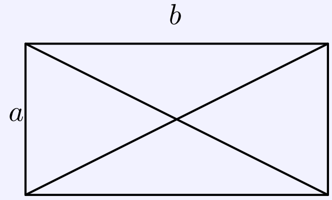
Đáy là tứ giác đặc biệt: Tóm tắt đặc điểm cơ bản

Đáy là hình vuông



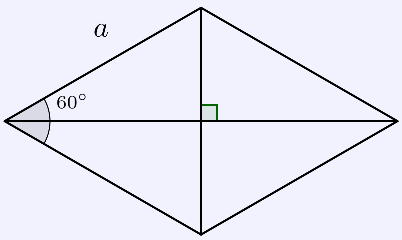
Diện tích $= a^2$; $R_{đ} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Đáy là hình chữ nhật



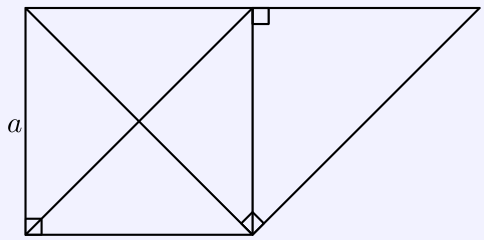
Diện tích $= ab$; $R_{đ} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.
Tâm đường tròn ngoại tiếp là tâm đáy.

Đáy là hình thoi có góc $60°$



Đường chéo ngắn $= a$.
Đường chéo dài $= \sqrt{3}a$.
Diện tích $= \frac{1}{2}$tích hai đường chéo $= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.
Không có đường tròn ngoại tiếp.

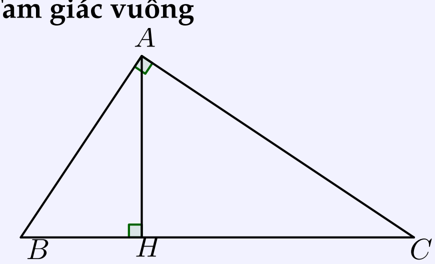
Đáy là hình thang vuông có đáy lớn gấp 2 đáy nhỏ và đường cao



Diện tích $= \frac{3}{2}a^2$. Hình ghép bởi hình vuông và tam giác vuông cân. Không có đường tròn ngoại tiếp.

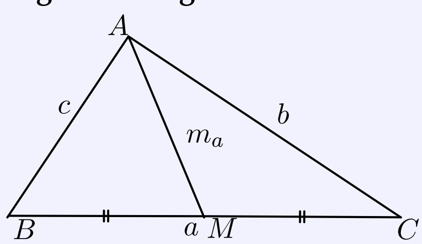
Hệ thức lượng trong tam giác

Tam giác vuông



$BH.BC = BA^2 \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BA^2}{BC^2}$.
$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.
$AH.BC = AB.AC = 2S(ABC)$.
$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{BH}$. $\cos B = \frac{AB}{BC}$, v.v...

Tam giác thường

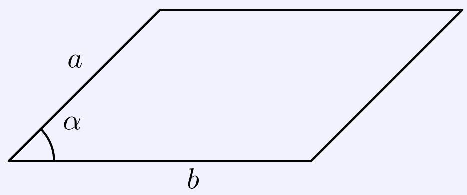


$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R_{đ}$.
$S(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}a.h_a$
$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$.

NGOÀI RA, trong một số ít trường hợp ta gặp phải đáy là hình bình hành hoặc nửa lục giác đều. Khi đó, một số đặc điểm quan trọng của các hình này cũng cần được ghi nhớ.

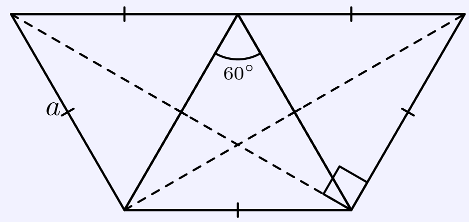
Đáy là hình bình hành hoặc nửa lục giác đều

Hình bình hành biết góc-cạnh-góc



Diện tích $= ab\sin\alpha$, ở đây $\alpha \neq 90°$.
Không có đường tròn ngoại tiếp.
Đường chéo ngắn $= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$.
Đường chéo dài $= \sqrt{a^2+b^2+2bc\cos\alpha}$.

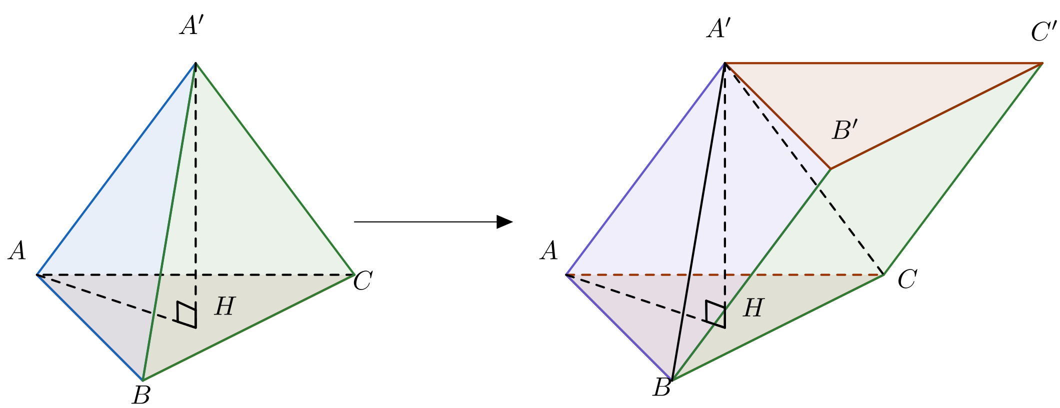
Nửa lục giác đều hay hình thang cân



Diện tích $= \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$; $R_{\text{đ}} = a$.
Hình được ghép bởi 3 tam giác đều và đường tròn ngoại tiếp nhận đáy lớn là đường kính.

LÀM CHỦ ĐƯỜNG CAO

KHỐI CHÓP VÀ LĂNG TRỤ bản chất như nhau trong quá trình vẽ hình cũng như tính toán. Chẳng hạn, cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là H (tại vị trí nào đó trên đáy mà bài toán cho biết trước). Khi đó, ta chỉ cần làm việc với hình chóp $A'.ABC$ là đủ để tính toán mọi thông số của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Do đó, học sinh chỉ cần nắm chắc các trường hợp xác định đường cao đối với hình chóp (xem Hình 1.2).



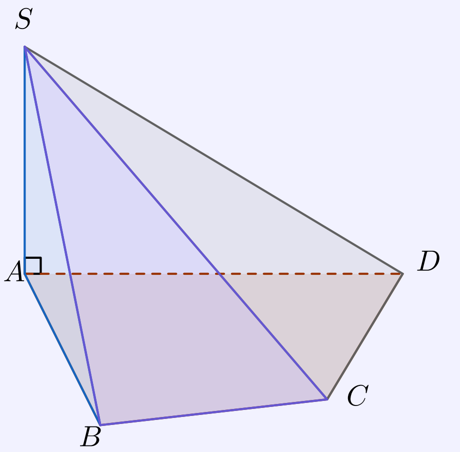
Hình 1.2: Quy hình lăng trụ về hình chóp

MỘT SỐ ÍT TRƯỜNG HỢP, bài toán không cho chính xác vị trí chân đường cao H ngay từ đầu, ta chỉ cần gọi H là một vị trí nào đó dưới đáy để từ đó khai thác các thông tin về H dựa vào các giả thiết. Những bài toán dạng này được xếp vào bài toán mức độ vận dụng trở lên.

Đa số trường hợp bài toán cho thông tin về đường cao của khối chóp (lăng trụ) mà đều có thể rơi vào một trong bốn trường hợp dưới đây.

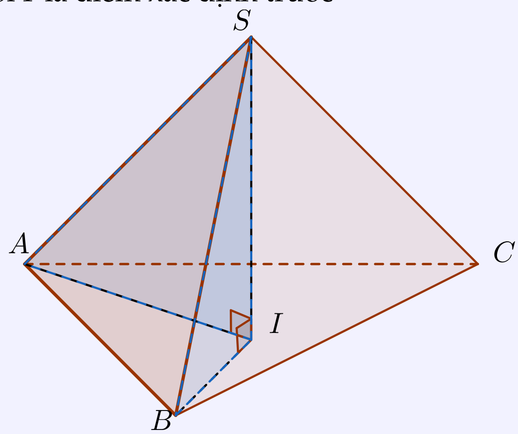
Bốn trường hợp cơ bản xác định

Cạnh bên vuông góc với đáy
Chẳng hạn: $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$



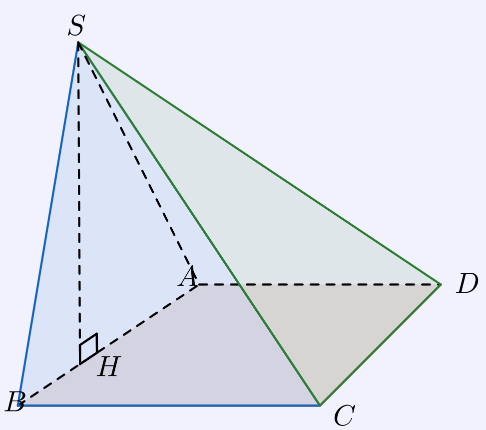
Đường cao chính là cạnh bên.
Đặc biệt: ***Khối lăng trụ đều*** là lăng trụ đứng và đáy là đa giác đều.

Hai mặt cùng vuông góc với đáy
Chẳng hạn: $S.ABC$ có $(SIA), (SIB) \perp (ABC)$ với I là điểm xác định trước



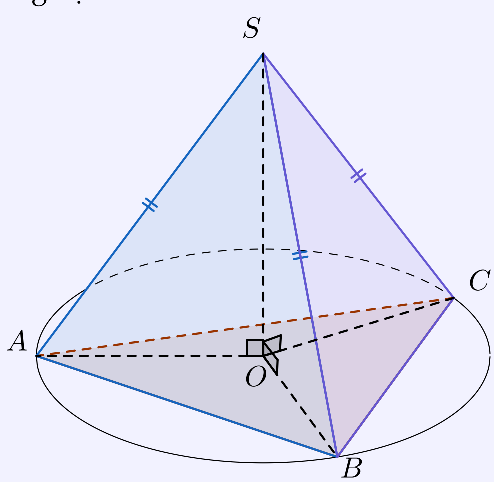
Đường cao là giao tuyến SI của hai mặt này.

Một mặt vuông với đáy
Chẳng hạn: $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$



Đường cao chóp chính là đường cao từ S đến AB của tam giác SAB.
Đặc biệt: Nếu ΔSAB cân tại S thì H là trung điểm AB.

Cạnh bên bằng nhau
Chẳng hạn: $S.ABC$ có $SA = SB = SC$.



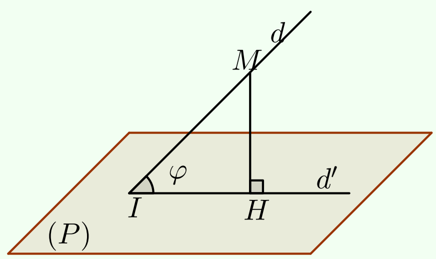
Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp O của đáy.
Đặc biệt: Nếu thêm điều kiện đáy là đa giác đều ta có ***khối chóp đều***.

XÁC ĐỊNH GÓC CƠ BẢN VÀ KHOẢNG CÁCH CƠ BẢN

Góc và khoảng cách trong không gian sẽ được trình bày sâu hơn trong mục 1.3. Tuy nhiên, để hỗ trợ các tính toán liên quan trong các bài toán tính thể tích khối đa diện, mục này sẽ trình bày những khái niệm cơ bản và cách xác định góc cũng như khoảng cách trong trường hợp đơn giản nhất.

Định nghĩa 1.2.1: Định nghĩa góc giữa đường với mặt phẳng và góc giữa hai mặt phẳng

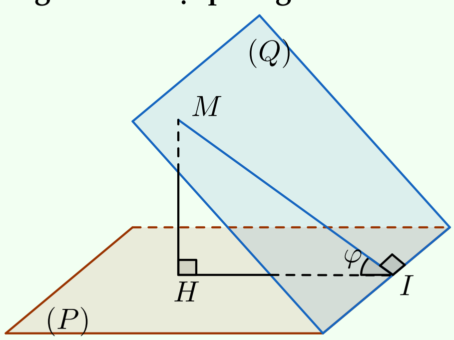
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), ký hiệu là $\varphi = (d, (P))$ là góc (d, d') (góc giữa hai đường d và d') với d' là hình chiếu của d lên (P).

Cách tính phổ biến: $\boxed{\sin\varphi = \dfrac{d(M,(P))}{MI}}$, với M là điểm bất kỳ trên (P) và $d(M,(P))$ ký hiệu cho khoảng cách từ M đến (P). I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P).

Góc giữa hai mặt phẳng



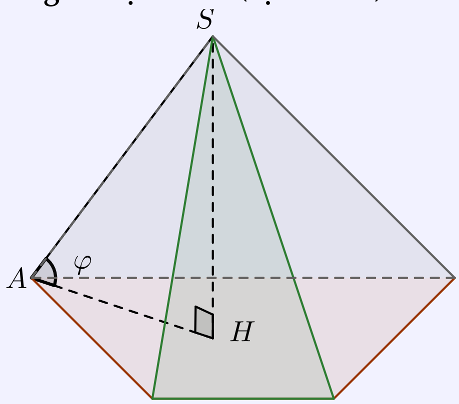
Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ký hiệu là $\varphi = ((P),(Q))$, là góc giữa d và d' với d, d' lần lượt là hai đường thẳng vuông góc với (P) và (Q). Tuy nhiên, thường dựng góc giữa hai mặt phẳng như hình bên thay cho định nghĩa.
Cách tính phổ biến: Lấy điểm M bất kỳ trên (Q). Chiếu vuông góc MI lên giao tuyến của hai mặt phẳng. Chiếu vuông góc MH lên (P). Khi đó $\boxed{\sin\varphi = \dfrac{d(M,(P))}{MI}}$.

Để giúp học sinh dễ thực hiện hơn trong các bài toán tính thể tích, trước hết học sinh cần nắm vững hai loại góc cơ bản: ***góc giữa cạnh bên và đáy*** và ***góc giữa mặt bên và đáy***. Ở mục trên, học sinh đã làm chủ được bốn trường hợp cơ bản xảy ra của đường cao trong một hình chóp (tương tự đối với hình lăng trụ). Điều đó có nghĩa rằng chúng ta đã làm chủ được vị trí chân đường cao H nằm trên mặt phẳng đáy. Vì vậy, áp dụng Định nghĩa 1.2.1 ta dễ dàng xác định được hai loại góc cơ bản này.

Đôi khi ta cũng gặp phải một số bài toán liên quan đến khoảng cách ở mức độ cơ bản. Khi đó, để chủ động trong tính toán học sinh cần nắm được cách xác định khoảng cách cơ bản nhất.

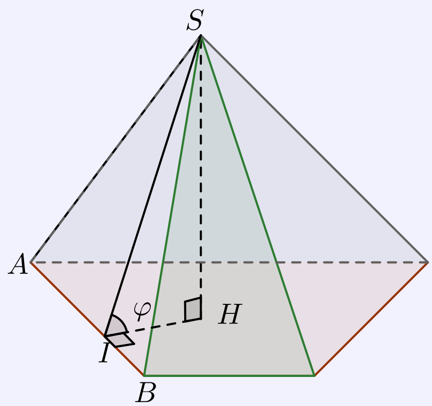
Hai loại góc cơ bản

Góc giữa cạnh bên (cạnh xiên) và đáy



Từ chân đường cao H nối với giao của cạnh bên (cạnh xiên) với đáy.
Chẳng hạn, góc $(SA, (\text{đáy})) = \widehat{SAH}$.

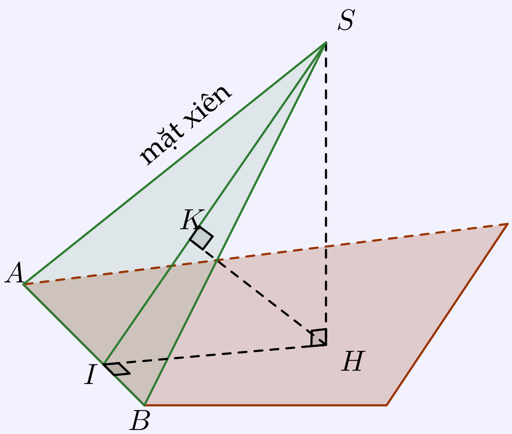
Góc giữa mặt bên (mặt xiên) và đáy



Từ chân đường cao H kẻ HI vuông góc với giao tuyến của mặt bên (mặt xiên) với đáy.
Chẳng hạn, góc $((SAB), (\text{đáy})) = \widehat{SIH}$.

Xác định khoảng cách cơ bản

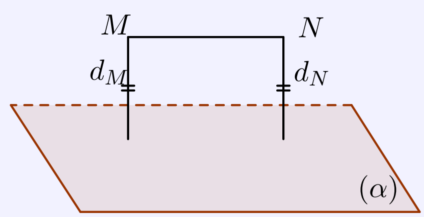
Khoảng cách từ chân đường cao đến mặt xiên



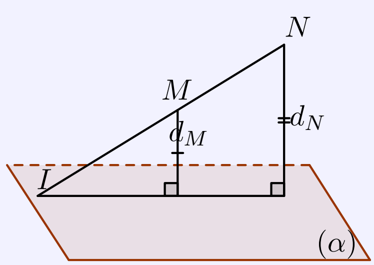
Từ H kẻ HI vuông góc với giao tuyến.
Từ H kẻ HK vuông góc với SI.
Khi đó, $d(H, (SAB)) = HK$.
Cách tính: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{HS^2}$.

Dịch chuyển khoảng cách

Muốn chuyển khoảng cách $d_M = d(M, (\alpha))$ sang $d_N = d(N, (\alpha)) \to$ nối MN:
Nếu $MN \parallel (\alpha) \Rightarrow d_M = d_N$ (1.1).



Nếu $MN \cap (\alpha) = I \Rightarrow \dfrac{d_M}{d_N} = \dfrac{IM}{IN}$ (1.2).



Sau khi làm chủ *đáy* và *đường cao* của một khối chóp hay lăng trụ thì việc tính thể tích của khối chóp hay lăng trụ đó trở nên hết sức đơn giản. Đối với bài toán cho biết góc giữa cạnh bên và đáy hoặc mặt bên và đáy lần lượt là $\varphi = \widehat{SAH}$ hoặc $\varphi = \widehat{SIH}$ thì chiều cao h của khối chóp (hoặc lăng trụ) thường được tính theo các giá trị lượng giác của φ. Chẳng hạn

$$\boxed{h = HA.\tan\varphi \textbf{ hoặc } h = HI.\tan\varphi}$$

Dưới đây, cuốn sách sẽ minh họa chi tiết cho các dạng toán thường gặp trong các kỳ thi THPT Quốc gia.

1.2.2 *Tính thể tích khối chóp*

Thể tích của một khối đa diện là đại lượng dùng để đo phần không gian bên trong khối đa diện đó, thường ký hiệu là V. Ở chương trình THCS học sinh đã được làm quen với thể tích một số khối da diện đặc biệt như:

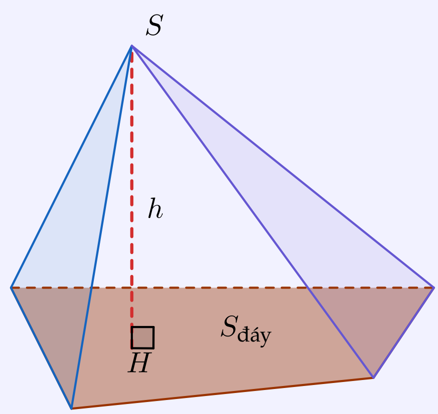
- $V_{\text{khối lập phương cạnh } a} = a^3$.
- $V_{\text{khối hộp chữ nhật kích thước } a,\, b,\, c} = abc$.

Trong chương trình THPT, chúng ta tiếp tục được học về thể tích của các khối chóp, khối lăng trụ và một số khối đa diện khác.

Thể tích khối chóp

Thể tích khối chóp được tính bằng $\frac{1}{3}$ tích của diện tích đáy và chiều cao khối chóp đó.
Ta ký hiệu $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy của khối chóp, h là độ dài đường cao của khối chóp. Ta có:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S_{\textbf{đáy}}.h \quad \textbf{(1.3)}}$$



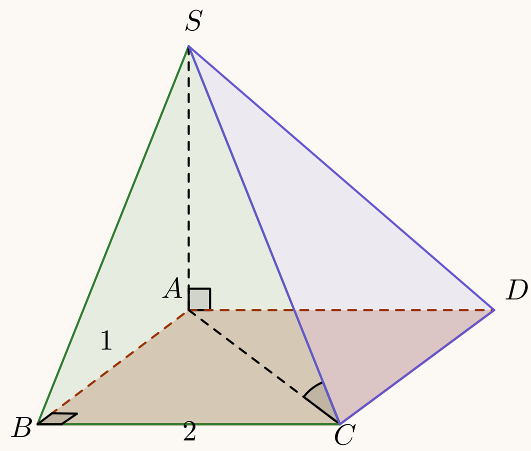
Ví dụ 1.2.1: Cạnh bên vuông đáy biết góc của cạnh bên với đáy

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Biết góc giữa SC và đáy là $60°$, tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn

Coi a là đơn vị độ dài, do đó ta chỉ tính toán với các hệ số của độ dài các đoạn thẳng.
Ta có A là chân đường cao của hình chóp nên góc giữa SC và đáy bằng $\widehat{SCA} = 60°$.
Vậy $h = SA = AC \tan 60° = AC.\sqrt{3} = \sqrt{15}$ (do $AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$).
Có $S_{\text{đáy}} = AB.BC = 2$.
Do đó

$$V = \frac{1}{3}.S_{\text{đáy}}.h = \frac{2\sqrt{15}}{3}a^3.$$



Ví dụ 1.2.2: Cạnh bên vuông đáy biết góc của mặt bên với đáy

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh a và $SA \perp (ABC)$. Biết góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy là $60°$, tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

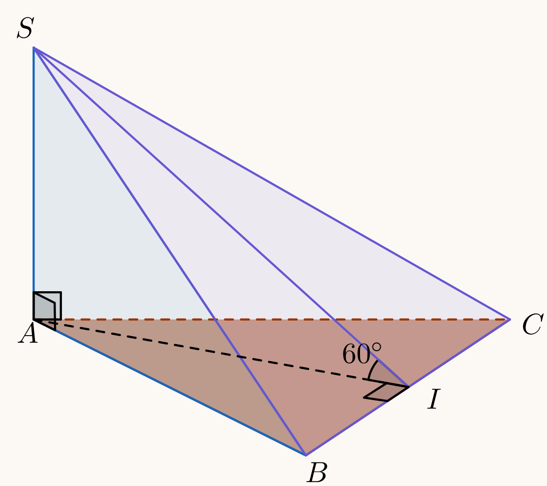
Hướng dẫn

Do A là chân đường cao của hình chóp nên kẻ $AI \perp BC$ thì $\widehat{SIA}$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC). Vậy $\widehat{SIA} = 60°$.
Tam giác ABC đều cạnh a nên I là trung điểm của BC, do đó $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.
Tam giác SAI vuông tại A nên

$$SA = AI.\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}a.\sqrt{3} = \frac{3}{2}a$$

Vậy

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{\text{đáy}}.SA = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{3}{2}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{8}a^3.$$



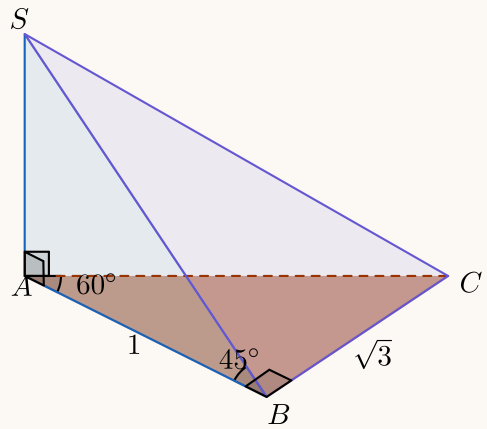
Ví dụ 1.2.3: Hai mặt bên cùng vuông với đáy

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa (SBC) và đáy bằng 45°, tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

Hướng dẫn

Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SA\perp(ABCD)$.
Từ A kẻ vuông góc với BC rơi vào B nên $\widehat{SBA}$ là góc giữa (SBC) và đáy.
Vậy $\widehat{SBA} = 45^\circ$.
Tính được $SA = BA\tan 45^\circ = a$.
Đáy ABC có $S_{\text{đáy}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.
Vậy

$$V = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.1a^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$$



Ví dụ 1.2.4: Hai mặt chéo cùng vuông với đáy

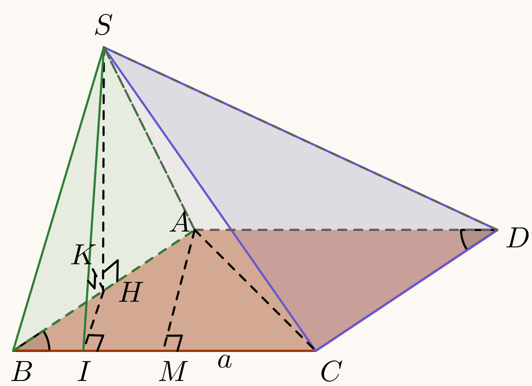
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi H là trung điểm của AB, hai mặt phẳng (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $\dfrac{3}{4}a$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn

Đáy là hình thoi 60° nên $S_{\text{đáy}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.
Theo quy tắc chuyển khoảng cách: $d(A,(SBC)) = 2d(H,(SBC))$ (do H là trung điểm AB). Vậy $d(H,(SBC)) = \dfrac{3}{8}a$.
H là chân đường cao nên
$d(H,(SBC)) = HK = \dfrac{3}{8}a$.
Mặt khác $HI = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
Áp dụng $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{HS^2}$

$$\Rightarrow HS = \frac{3a}{4}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3}{4}a^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^3$.



Ví dụ 1.2.5: Mặt bên vuông với đáy

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2AB = 2BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

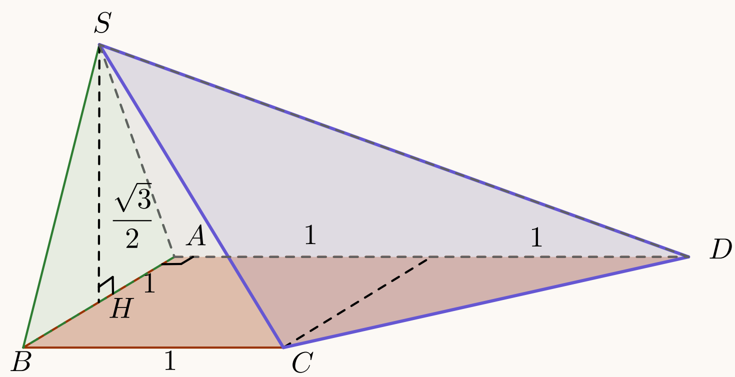
Hướng dẫn

Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy nên chân đường cao H của hình chóp là trung điểm AB.

Vậy $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Theo mục 1.2.1 ta có

$$S_{\text{đáy}} = \frac{3}{2}a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3.$$



Ví dụ 1.2.6: Mặt chéo vuông với đáy

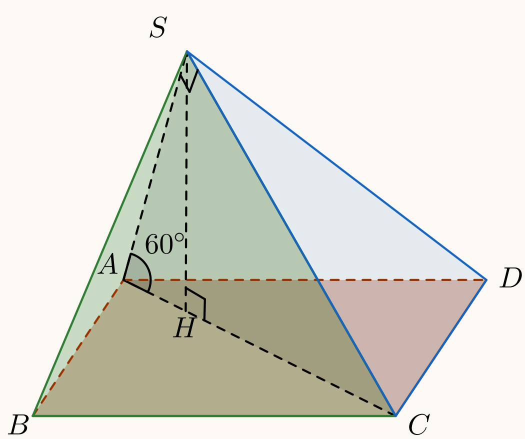
Cho hình chóp $S.ABCD$ và đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa SA và đáy bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Hướng dẫn

Mặt phẳng (SAC) vuông với đáy nên chân đường cao H của hình chóp thuộc AC.
Theo mục 1.2.1, góc giữa SA và đáy là góc $\widehat{SAH} = 60^\circ$.
Cũng theo mục 1.2.1, tam giác vuông SAC có $AH = \frac{1}{4}AC = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Vậy $SH = AH \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4}a$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}}.SH = \frac{\sqrt{6}}{12}a^3$.



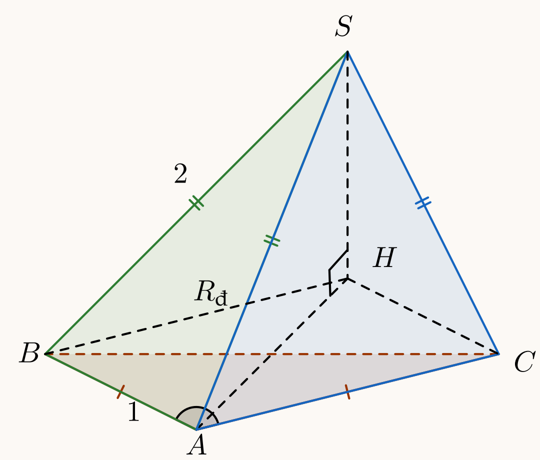
Ví dụ 1.2.7: Cạnh bên bằng nhau

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 2a$. Tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

Hướng dẫn

Do cạnh bên bằng nhau nên chân đường cao H của hình chóp là tâm ngoại tiếp tam giác ABC.
Tam giác ABC cân có góc ở đỉnh bằng 120° nên $R_đ = a$ và $S_{\text{đáy}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
Theo Pi-ta-go ta có
$SH = \sqrt{SA^2 - R_đ^2} = \sqrt{3}a$.
Vậy

$$V = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3}a^3 = \frac{1}{4}a^3.$$

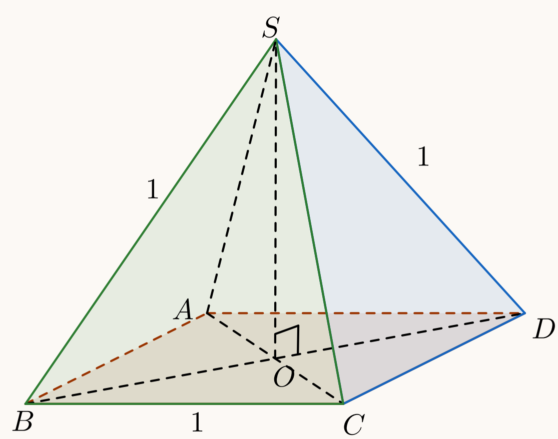


Ví dụ 1.2.8: Khối chóp đều

Tính theo a thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a.

Hướng dẫn

Hình chóp đều có SO là đường cao, trong đó O là tâm đáy.
Do tất cả các cạnh đều bằng a nên tam giác SAC vuông cận tại S do có $AC = \sqrt{2}a$ và $SA = SC = a$.
Vậy $SO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.
Hiển nhiên $S_{\text{đáy}} = 1a^2$.
Do đó $V = \dfrac{1}{3}.1.\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$.



Ví dụ 1.2.9: Biết vị trí chân đường cao cho trước

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD = 2AD = 2a$, $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi O là trung điểm của AB, hình chiếu vuông góc của S trên mp$(ABCD)$ là trung điểm của DO. Biết góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn

Từ giả thiết thấy đáy $ABCD$ là hình thang cân nửa lục giác đều như trong mục 1.2.1.

Do đó $S_{\text{đáy}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, $AC = \sqrt{3}a$ và $AC \perp BC$.

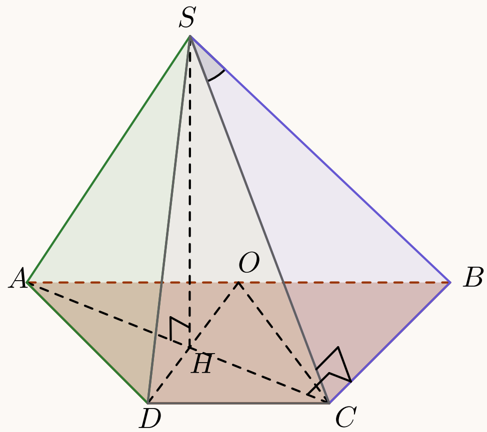
Gọi H là trung điểm của DO thì H cũng là trung điểm của AC. Theo giả thiết $SH \perp (ABCD)$.

Có $BC \perp AC$ mà $BC \perp SH$ (do $SH \perp (ABCD)$) nên $BC \perp (SAC)$. Vậy C là hình chiếu của B lên (SAC), do đó góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{BSC}$. Suy ra $\widehat{BSC} = 30°$.

Có $SC = BC.\cot\widehat{BSC} = 1.\sqrt{3}a = \sqrt{3}a$.

Có $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \dfrac{3}{2}a$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3}{2}a^3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.



Ví dụ 1.2.10: Chân đường cao là tâm đường tròn nội tiếp đáy

Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 6$. Các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết chân đường cao hạ từ đỉnh S nằm ở miền trong của tam giác ABC.

Hướng dẫn

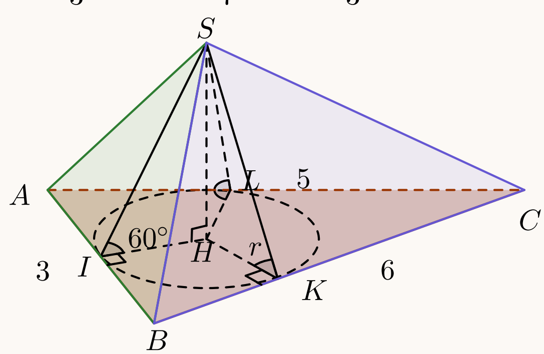
Gọi H là chân đường cao của hình chóp trên đáy và I, K, L lần lượt là hình chiếu của H lên AB, BC, CA. Khi đó, theo mục 1.2.1 có $\widehat{SIH} = \widehat{SKH} = \widehat{SLH} = 60°$.

Dễ thấy các tam giác vuông SIH, SIK, SIL bằng nhau nên $HI = HK = HL = r$, với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đặt $p = (3+5+6)/2$

$\Rightarrow S_{\text{đáy}} = \sqrt{p(p-3)(p-5)(p-6)} = 2\sqrt{14}$.

Có $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2\sqrt{14}}{7} \Rightarrow SH = 2\sqrt{3}.\sqrt{14}/7$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.2\sqrt{14}.\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{14}}{7} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

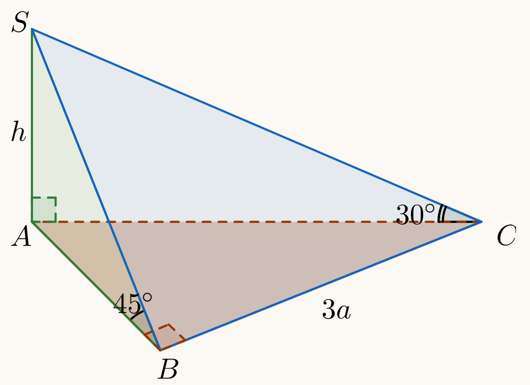


Ví dụ 1.2.11: Tính độ dài đường cao bằng lập phương trình

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC = 3a$, cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Biết SB và SC tạo với đáy các góc có số đo lần lượt là $45°$ và $30°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

Hướng dẫn

Do $SA \perp (ABC)$ nên $\widehat{SBA}$, $\widehat{SCA}$ lần lượt là góc giữa SB và SC với đáy.
Đặt $SA = h$, suy ra $AB = h.\cot 45° = h$; $AC = h.\cot 30° = h\sqrt{3}$.
Do tam giác ABC vuông tại B nên có $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow h^2 + 9a^2 = 3h^2$
$\Leftrightarrow h = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$.
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}SA.AB.BC = \dfrac{9}{4}a^2$.



Ví dụ 1.2.12: Tính kích thước đáy bằng lập phương trình

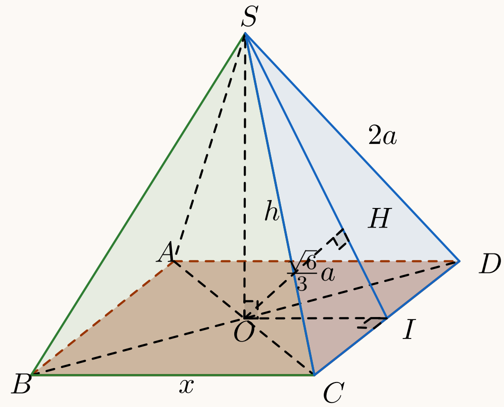
Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy lớn hơn cạnh bên. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Hướng dẫn

Gọi x và h là độ dài cạnh đáy và đường cao của hình chóp, coi a là đơn vị của phép đo.
Theo tỉ lệ khoảng cách trong mục 1.2.1, $d(A,(SCD)) = 2d(O,(SDC))$
$\Rightarrow d(O,(SCD)) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ hay $OH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{h^2}$.
Trong tam giác SOD có $OS^2 + OD^2 = 4$
$\Rightarrow h^2 + \dfrac{x^2}{2} = 4$.

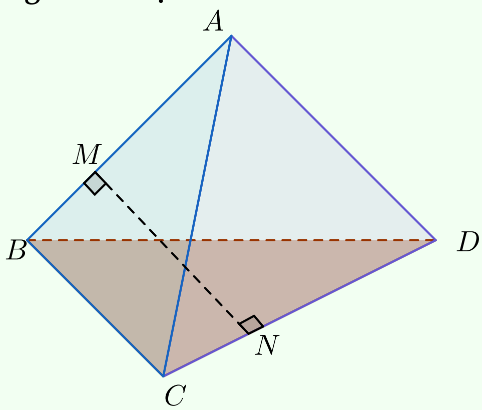
Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x^2}{2} + h^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; $h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (do $x > 2$).
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.x^2.h = \dfrac{32\sqrt{3}}{27}a^3$.



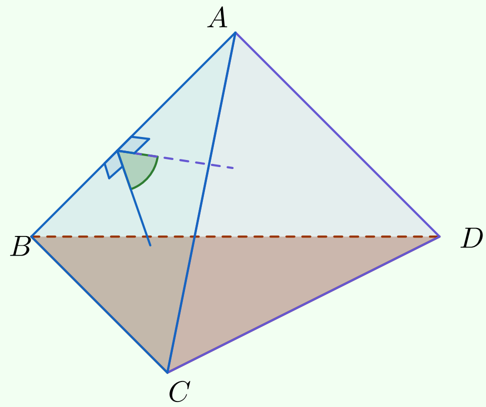
Định lý 1.2.1: Một số công thức khác tính thể tích tứ diện

1. Tính thể tích biết độ dài, góc, khoảng cách giữa hai cạnh đối



$$V = \frac{1}{6}AB.CD.MN.\sin(AB, CD) \quad \textbf{(1.4)}$$

2. Tính thể tích biết diện tích hai mặt bên, góc nhị diện và độ dài giao tuyến của chúng



$$V = \frac{2}{3}\frac{S_{ABC}.S_{ABD}.\sin((ABC),(ABD))}{AB}$$

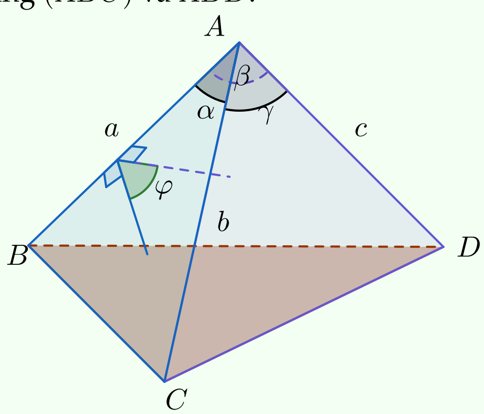
(1.5)

---

3. Tính góc nhị diện từ góc tam diện

Góc tam diện $A.BCD$ có $\widehat{BAC} = \alpha$; $\widehat{BAD} = \beta$; $\widehat{CAD} = \gamma$.

Gọi φ là góc nhị diện cạnh AB của hai mặt phẳng (ABC) và ABD.



Ta có:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha.\cos\beta}{\sin\alpha.\sin\beta} \quad \textbf{(1.6)}$$

Tính thể tích biết số đo góc tam diện và độ dài ba cạnh

Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \alpha$; $\widehat{BAD} = \beta$; $\widehat{CAD} = \gamma$.

Gọi φ là góc nhị diện cạnh AB của hai mặt phẳng (ABC) và ABD thì φ được tính bởi công thức (1.6).

Áp dụng công thức (1.5) ta được công thức thể tích của khối tứ diện:

$$V = \frac{1}{6}abc.\sin\alpha.\sin\beta.\sin\varphi \quad \textbf{(1.7)}$$

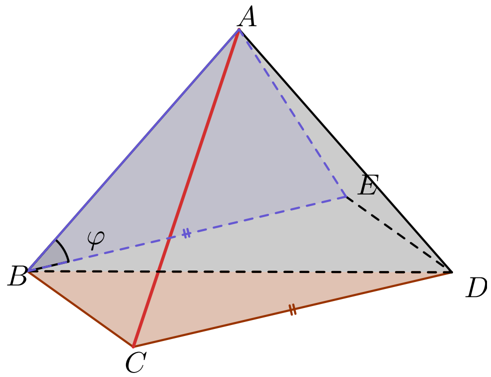
hoặc

$$V = \frac{abc}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \quad \textbf{(1.8)}$$

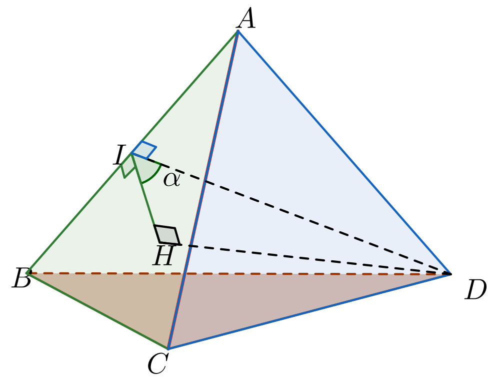
Đặc biệt, nếu góc tam diện vuông (tức $\alpha = \beta = \gamma = 90°$) thì $\boxed{V = \frac{1}{6}abc.}$ (1.9)

CHỨNG MINH CÔNG THỨC (1.4):

Dựng E sao cho $BCDE$ là hình bình hành, ta có $V_{ABCD} = V_{ABDE}$ và $d(AB, CD) = d(D, (ABE))$.
Có $V_{ABDE} = \frac{1}{3}S_{ABE}.d(D,(ABE))$ theo (1.3).
Mặt khác, $S_{ABE} = \frac{1}{2}AB.BE.\sin\widehat{ABE}$
$= \frac{1}{2}AB.CD.\sin(AB, CD)$.
Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD)$



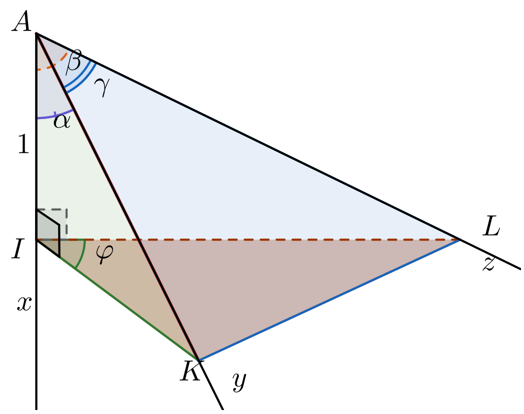
CHỨNG MINH CÔNG THỨC (1.5):



Gọi H là hình chiếu của D lên mặt phẳng (ABC) và I là hình chiếu của H lên AB thì $\widehat{DIH} = ((ABC),(ABD)) = \alpha$.
Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}.DH = \frac{1}{3}S_{ABC}.DI.\sin\alpha$.
Mà $DI = \dfrac{2S_{ABD}}{AB}$. Vậy $V = \dfrac{2S_{ABC}.S_{ABD}.\sin\alpha}{3AB}$.

CHỨNG MINH CÔNG THỨC (1.6):

Xét góc tam diện $Axyz$ với các số đo α, β, γ khác 90° như hình vẽ.
Trên tia Ax lấy điểm I sao cho $AI = 1$. Từ I kẻ IK, IL cùng vuông góc với Ax tại I (xem hình bên).
Khi đó $\varphi = \widehat{LIK}$ là góc nhị diện cạnh Ax của góc tam diện.
Ta có $IK = \tan\alpha$; $IL = \tan\beta$;
$AK = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $AL = \dfrac{1}{\cos\beta}$.
Theo định lý hàm số Cosin cho tam giác AKL ta có:



$KL^2 = AK^2 + AL^2 - 2AK.AL.\cos\gamma$.
$= \dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\beta} - \dfrac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 + \tan^2\alpha + 1 + \tan^2\beta - \dfrac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$ (1).
Theo định lý hàm số Cosin cho tam giác IKL ta có:
$KL^2 = IK^2 + IL^2 - 2IK.IL.\cos\varphi = \tan^2\alpha + \tan^2\beta - 2\tan\alpha.\tan\beta.\cos\varphi$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $1 - \dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} = -\dfrac{\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi}{\cos\alpha\cos\beta}$.
Do đó $\cos\varphi = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$. Công thức vẫn đúng khi α hoặc β bằng 90°.
Công thức (1.8) được suy ra từ công thức (1.6) và (1.7) bằng cách thay $\sin x$ bởi $\sqrt{1-\cos^2 x}$.

Ví dụ 1.2.13: Tứ diện có độ dài hai cạnh đối, khoảng cách và góc giữa chúng

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a, CD = 5a$. Biết góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 60° và khoảng cách giữa chúng bằng $3a$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$ theo a.

Hướng dẫn

Áp dụng công thức (1.4) ta có

$$V = \frac{1}{6}.2.5.3.\sin 60^\circ a^3 = \frac{5\sqrt{3}}{2}a^3.$$

Ví dụ 1.2.14

Cho tứ diện $ABCD$ có các tam giác ABC và ABD đều cạnh a và hợp với nhau một góc 45°. Tính theo a thể tích tứ diện trên.

Hướng dẫn

Áp dụng công thức (1.5) ta có

$$V = \frac{2.S_{ABC}.S_{ABD}.\sin 45^\circ}{3.AB} = \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}}{3.1}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{16}a^3.$$

Ví dụ 1.2.15

Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{BAD} = 45^\circ$, $\widehat{CAD} = 60^\circ$ và $AB = a$, $AC = 2a$, $AD = 3a$. Tính thể tích tứ diện trên theo a.

Hướng dẫn

Cách 1: Áp dụng công thức (1.8),

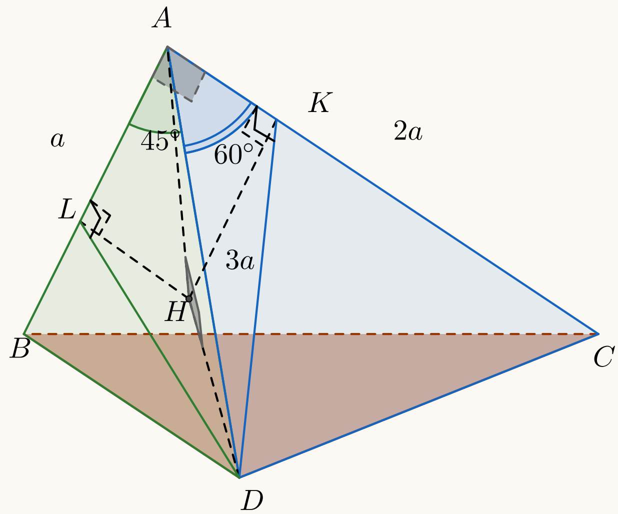
$$V = \frac{1}{6}1.2.3.\sqrt{1 - \cos^2 90^\circ - \cos^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ + 2\cos 90^\circ \cos 45^\circ \cos 60^\circ}a^3 = \frac{1}{2}a^3.$$

Cách 2: Gọi φ là góc nhị diện cạnh AD của tứ diện $ABCD$, theo (1.6) có

$$\cos\varphi = \frac{\cos 90^\circ - \cos 45^\circ \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ \sin 60^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Áp dụng công thức (1.7) có $V = \frac{1}{6}1.2.3.\sin 45^\circ \sin 60^\circ \sin\varphi a^3 = \frac{1}{2}a^3$.

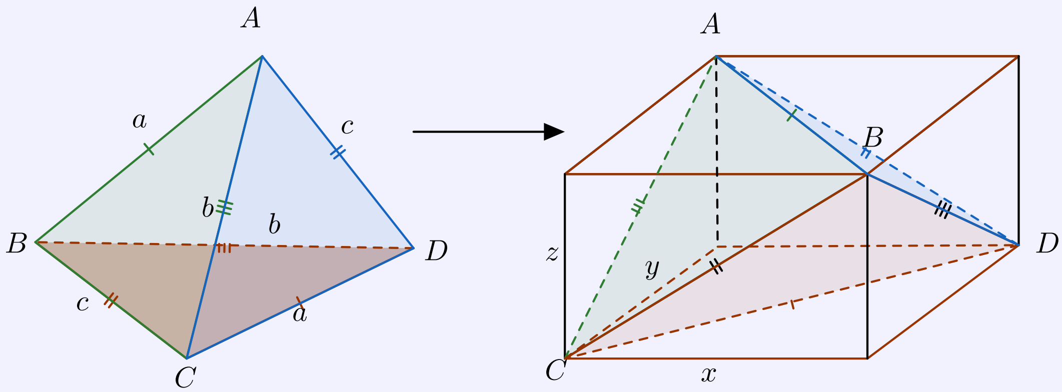
Cách 3: Gọi H là hình chiếu của D lên (ABC), K, L lần lượt là hình chiếu của H lên AC, AB.
Ta có $DH^2 = DK^2 - HK^2$ (1);
$DH^2 = DL^2 - HL^2$ (2);
$DH^2 = DA^2 - HA^2$ (3).
Cộng (1) với (2) và trừ (3) được
$DH^2 = DK^2 + DL^2 - DA^2$
(chú ý $HA^2 = HK^2 + HL^2$).
Mà $DK = DA \sin 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$;
$DL = DA \sin 45^\circ = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$.



$$\Rightarrow DH^2 = \left(\frac{27}{4} + \frac{18}{4} - 9\right)a^2 = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow DH = \frac{3}{2}a. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.DH = \frac{1}{2}a^3.$$

Thể tích của tứ diện gần đều

Tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau được gọi là *tứ diện gần đều*. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ với $AB = CD = c$; $AC = BD = b$; $AD = BC = a$ thì luôn dựng được một hình hộp chữ nhật sao ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ như hình sau.



Gọi x, y, z lần lượt là các kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = b^2 \\ z^2 + x^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \\ y^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ z^2 = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } \boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{\text{hộp}} = \frac{1}{3}xyz}. \quad (1.10)$$

Ví dụ 1.2.16

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4$, $AC = BD = 5$, $AD = BC = 6$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (DCB).

Hướng dẫn

Gọi x, y, z là kích thước hình hộp chữ nhật ngoại tiếp tứ diện gần đều $ABCD$, ta có:

$$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y^2+z^2=25 \\ z^2+x^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{6}}{2};\ y=\frac{\sqrt{10}}{2};\ z=\frac{3\sqrt{10}}{2} \Rightarrow V_{ABCD}=\frac{15\sqrt{6}}{4}.$$

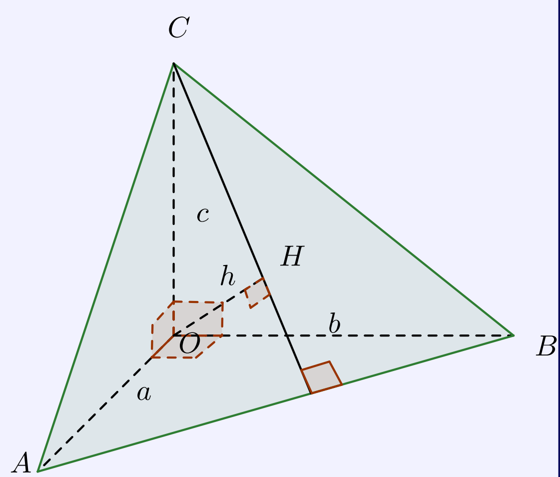
Lại có $S_{BCD}=\sqrt{p(p-4)(p-5)(p-6)}$ với $p=\dfrac{4+5+6}{2}$, suy ra $S_{BCD}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.
Vậy $d(A,(BCD))=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}=\dfrac{3\sqrt{42}}{7}$.

Một tứ diện đặc biệt khác ta thường gặp trong các bài toán liên quan đến thể tích của khối chóp, đó là tứ diện vuông hay *góc tam diện vuông*. Việc nắm được các tính chất của nó sẽ giúp ta tìm ra lời giải nhanh hơn rất nhiều so với việc dựng lại các tính chất từ đầu. Các tính chất của nó được chỉ ra dưới đây.

Góc tam diện vuông và tính chất

Hình chóp $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc thì $OABC$ được gọi là *góc tam diện vuông*.
Đặt $OA = a; OB = b; OC = c$, ta lưu ý các tính chất sau của khối tứ diện này.

- $V_{OABC} = \dfrac{1}{6}abc$.
- $S^2_{ABC} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCA}$.
- $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$ với $h = d(O,(ABC))$.
- H là hình chiếu của O lên $mp(ABC)$ khi và chỉ khi H là trực tâm tam giác ABC.



Ví dụ 1.2.17

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $AB = a$, $AD = 2a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn

Gọi $h = SA$, $d = d(A, (SBD))$. Coi a là đơn vị đo của hình.
Áp dụng công thức tính chất của góc tam diện vuông $A.SBD$ ta có

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{h^2} + 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

Vậy $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.2.\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\ a^3$.

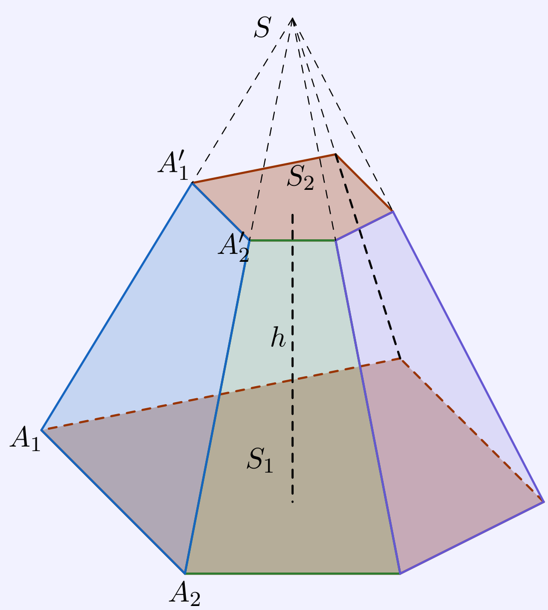
Thể tích khối chóp cụt cũng được trình bày dưới đây.

Thể tích khối chóp cụt

Cho khối chóp cụt $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$ (xem định nghĩa trong [2]).
Gọi h là đường cao của khối chóp cụt (khoảng cách hai đáy).
S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai đáy. Ta có

$$\boxed{V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) \quad \textbf{(1.11)}.}$$

Chú ý: Gọi S là đỉnh hình chóp sinh bởi chóp cụt. Khi đó $A_1A_2...A_n$ là ảnh của $A'_1A'_2...A'_n$ qua phép vị tự tâm S tỉ số $k = \frac{SA_i}{SA'_i}$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Vậy $V_{S.A'_1A'_2...A'_n} = \frac{1}{k^3}V_{S.A_1A_2...A_n}$ Do đó $V = V_{S.A_1A_2...A_n} - V_{S.A'_1A'_2...A'_n}$, hay



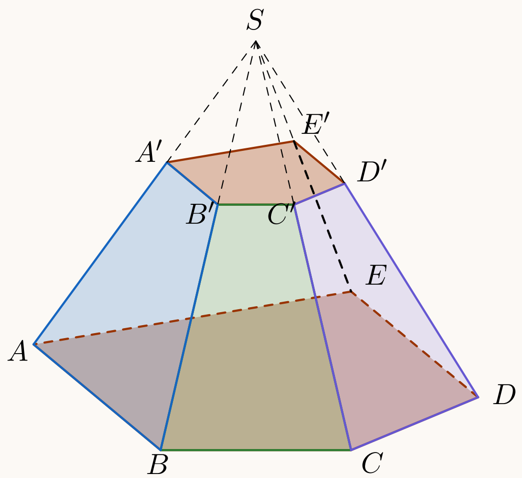
$$\boxed{V = (k^3 - 1)V_{S.A'_1A'_2...A'_n} = \left(1 - \frac{1}{k^3}\right)V_{S.A_1A_2...A_n} \quad \textbf{(1.12)}}$$

Ví dụ 1.2.18

Cho hình chóp $S.ABCDE$ có thể tích bằng 12. Gọi A' là điểm thuộc SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với mặt phẳng $(ABCDE)$ cắt SB, SC, SD, SE lần lượt tại B', C', D', E'. Tính thể tích khối chóp cụt $A'B'C'D'E'.ABCDE$.

Hướng dẫn

Do $A'B'C'D'E'$ là ảnh của $ABCDE$ qua phép vị tự tâm S tỉ số $k = \frac{1}{3}$ nên áp dụng công thức (1.12) ta có:
$V = \left(1 - \frac{1}{k^3}\right) V_{S.ABCDE} = \frac{26}{27}.12 = \frac{104}{9}$.



Ví dụ 1.2.19

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) cắt $B'C'$ tại P. Tính thể tích khối đa diện $ABNMB'P$ theo a.

Hướng dẫn

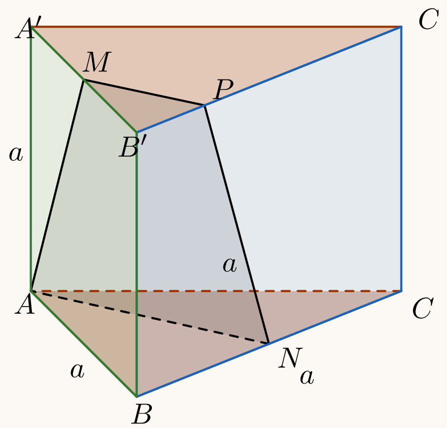
Ta thấy AN, BB', NP đồng quy theo định lý về 3 giao tuyến của 3 mặt phẳng (hoặc đồng quy, hoặc song song). Do đó $ABN.MB'P$ là một hình chóp cụt.

Có $S_{ABN} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$.

Có $\frac{MB'}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{MB'P} = \frac{1}{4}S_{ABN} = \frac{\sqrt{3}}{32}a^2$.

Theo công thức (1.11) ta có:

$V = \frac{1}{3}.1.\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{32} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{32}}\right)a^3 = \frac{7\sqrt{3}}{96}a^3$.



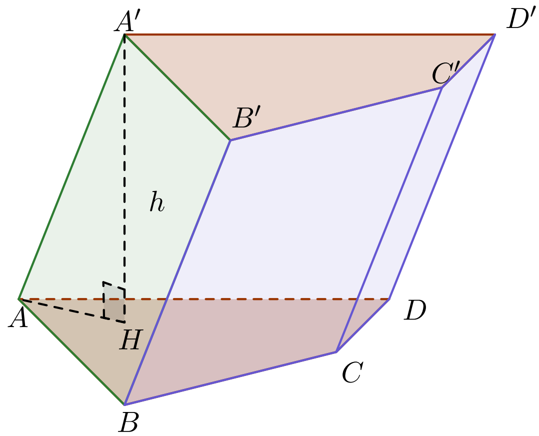
1.2.3 Bài tập áp dụng

1.2.4 *Thể tích khối lăng trụ*

TRONG MỤC 1.2.1 trong Hình 1.2 đã chỉ ra rằng làm việc với khối lăng trụ tương đương với giải bài toán hình chóp, trong đó đáy chóp là một đáy $ABCD...$ của lăng trụ còn đỉnh chóp là một trong các đỉnh A', B' hoặc C' v.v... . Việc chọn đỉnh này phụ thuộc vào thông tin về đường cao của khối lăng trụ. Chẳng hạn, nếu bài cho hình chiếu của A' thì ta làm việc với khối chóp $A'.ABCD....$ Một khi xác định được đáy và đường cao của khối lăng trụ, thể tích của nó được tính bởi công thức

$$\boxed{V = S_{\text{đáy}}.h \quad \textbf{(1.13)}}$$

Trong đó $S_{\text{đáy}}$ là diện tích một đáy của khối lăng trụ, h là độ dài đường cao của lăng trụ.

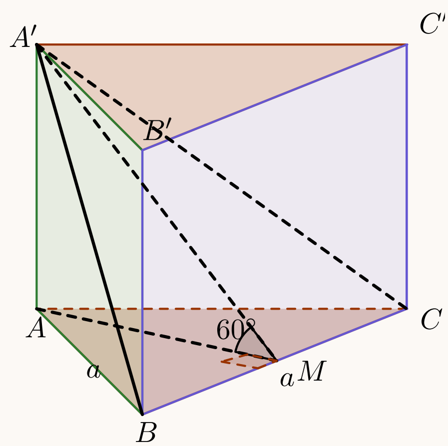


Ví dụ 1.2.20

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và đáy bằng $60°$. Tính thể tích của lăng trụ.

Hướng dẫn

Để bài cho góc giữa $(A'BC)$ và đáy nên ta chỉ cần tính toán trên hình chóp $A'.ABC$.
Kẻ $AM \perp BC$ (M là trung điểm BC) thì $\widehat{A'MA}$ là góc giữa $(A'BC)$ và đáy, suy ra $\widehat{A'MA} = 60°$.
Có $AA' = AM \tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}a = \dfrac{3}{2}a$, vậy $h = \dfrac{3}{2}a$.
Áp dụng công thức (1.13) thể tích có
$V = S_{ACB}.h = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3}{2}a^3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.



Ví dụ 1.2.21

Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABD. Biết góc giữa AA' và đáy bằng $45°$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

Hướng dẫn

Đề bài cho hình chiếu của A' nên ta chỉ cần xét hình chóp $A'.ABCD$.

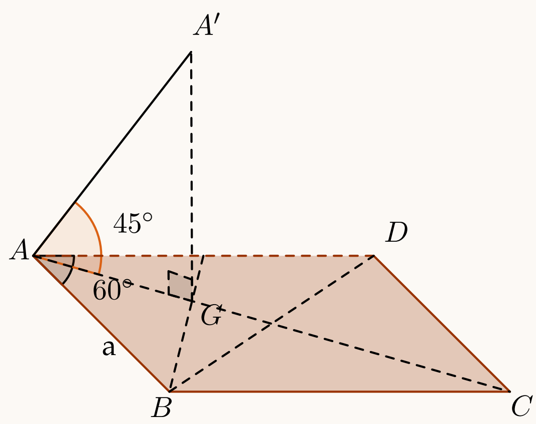
Có $ABCD$ là hình thoi đặc biệt, theo mục 1.2.1 có $S_{\text{đáy}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AG = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

Góc giữa AA' với đáy bằng $\widehat{A'AG}$,
do đó $\Rightarrow \widehat{A'AG} = 45°$.

Vậy $A'G = AG \tan 45° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

Áp dụng công thức (1.13) ta có
$V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{3}a = \dfrac{1}{2}a^3$.



Ví dụ 1.2.22

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2, BC = 5$. Biết $AA' = 3$ và góc giữa hai mặt phẳng $(AA'B'B)$, $AA'D'D$ với đáy lần lượt là $45°$ và $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Hướng dẫn

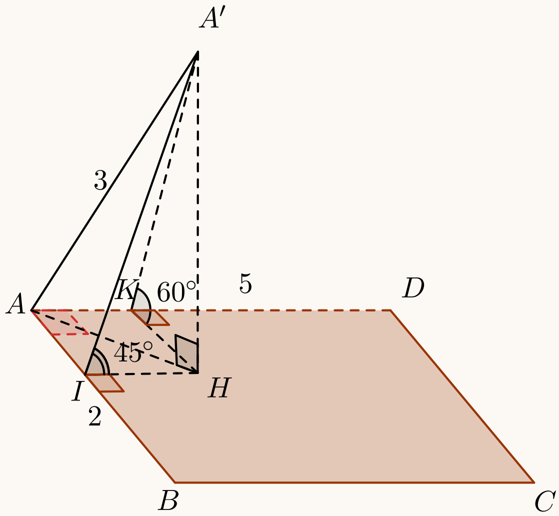
Gọi H là hình chiếu của A' lên $(ABCD)$. Từ H kẻ HI, HK lần lượt vuông góc với AB và AD. Thì góc góc giữa hai mặt phẳng $(AA'B'B)$, $AA'D'D$ với đáy lần lượt là $\widehat{A'IH}$ và $\widehat{A'KH}$. Do đó $\widehat{A'IH} = 45°$ và $\widehat{A'KH} = 60°$.

Đặt $A'H = h$, ta có: $HI = h\cot 45° = h$; $HK = h\cot 60° = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

Do $AKHI$ là hình chữ nhật nên
$AH^2 = HK^2 + HI^2 = \dfrac{4}{3}h^2$.

Lại có $AA'^2 = A'H^2 + HA^2 \Rightarrow 9 = \dfrac{4}{3}h^2 + h^2$
$\Rightarrow h^2 = \dfrac{27}{7}$. Vậy $h = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

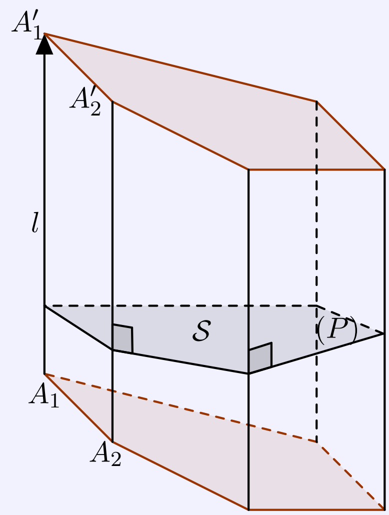
Vậy, thể tích khối lăng trụ bằng
$V = 2.5.\dfrac{3\sqrt{21}}{7} = \dfrac{30\sqrt{21}}{7}$.



Đặc biệt: Tính thể tích lăng trụ xiên theo thiết diện vuông

Cho khối lăng trụ $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$ có độ dài cạnh bên bằng l. Một mặt phẳng (P) vuông góc với các cạnh bên của lăng trụ cắt khối lăng trụ theo thiết diện có diện tích bằng $\mathcal{S}$. Khi đó, thể tích của khối lăng trụ được tính theo công thức

$$\boxed{V = \mathcal{S}.l \quad \textbf{(1.14)}}$$



CHỨNG MINH:

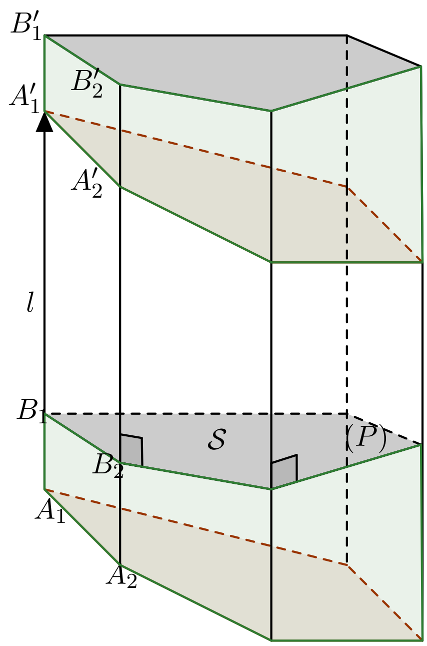
Giả sử mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên của hình lăng trụ tại $B_1, B_2, ..., B_n$.

Xét phép tính tiến theo vectơ $\overrightarrow{A_1A'_1}$ biến khối đa diện $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$ thành khối đa diện $A'_1A'_2...A'_n.B'_1B'_2...B'_n$ và hơn nữa các điểm $B'_1, B'_2, ..., B'_n$ nằm ngoài các cạnh $A_1A'_1, A_2A'_2, ..., A_nA'_n$.

Theo tính chất phép dời hình, thể tích khối đa diện $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$ bằng thể tích khối đa diện $A'_1A'_2...A'_n.B'_1B'_2...B'_n$. Do đó, thể tích khối đa diện $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$ bằng thể tích khối đa diện $B_1B_2...B_n.B'_1B'_2...B'_n$.

Mà khối đa diện $B_1B_2...B_n.B'_1B'_2...B'_n$ là lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng $\mathcal{S}$ và đường cao bằng l, do đó thể tích được tính bởi

$$V = \mathcal{S}.l.$$

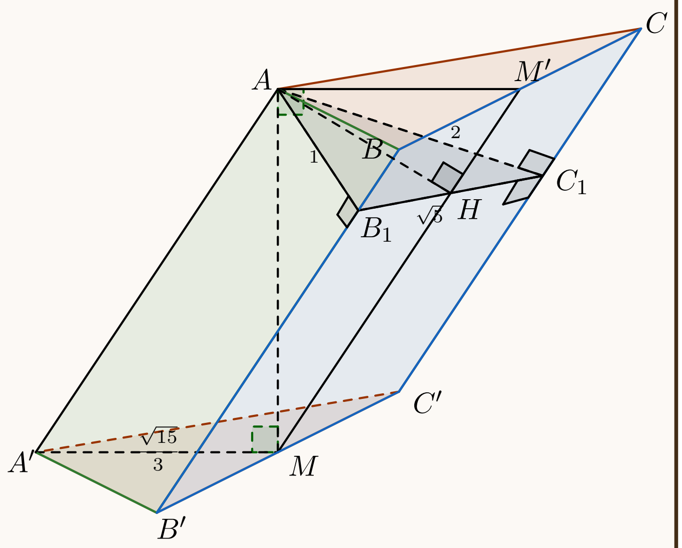


Ví dụ 1.2.23: Đề thi THPTQG 2018

Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt là 1 và 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Hướng dẫn

Kẻ AB_1, AC_1 lần lượt vuông góc với BB', CC' thì có ngay $AA', BB', CC' \perp (AB_1C_1)$, và do đó $MM' \perp (AB_1C_1)$ tại H, trong đó M', H là trung điểm của BC và B_1C_1.
Ta thấy tam giác AB_1C_1 vuông tại A theo Pi-ta-go nên
$AH = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MAM' có
$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AM'^2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$
$\Rightarrow AM = \sqrt{5}$.



Do đó $AA' = \sqrt{A'M^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{5}{3} + 5} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$.

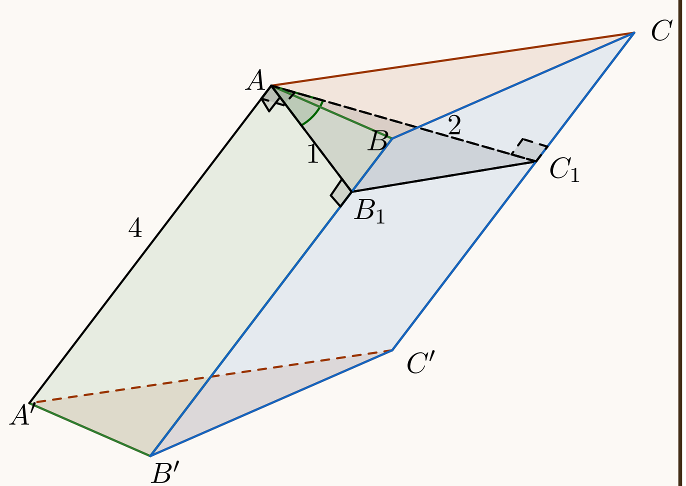
Áp dụng công thức (1.14) ta có $V_{l.tru} = S_{AB_1C_1}.AA' = 1.\frac{2\sqrt{15}}{3} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Ví dụ 1.2.24

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 4$. Hai mặt bên $AA'B'B$ và $AA'C'C$ tạo với nhau một góc $60°$ có diện tích lần lượt là 4 và 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Hướng dẫn

Kẻ AB_1, AC_1 lần lượt vuông góc với BB', CC' thì mặt phẳng $(AB_1C_1) \perp AA'$. Khi đó góc $(AB_1, AC_1) = 60°$.
Diện tích $S_{AA'B'B} = 4 \Rightarrow AB_1 = 1$.
Diện tích $S_{AA'C'C} = 8 \Rightarrow AB_1 = 2$.
Vậy
$S_{AB_1C_1} = \frac{1}{2}AB_1.AC_1 \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Áp dụng công thức (1.14):
$V = \frac{\sqrt{3}}{2}.4 = 2\sqrt{3}$.



1.2.5 Bài tập áp dụng

1.2.6 Phương pháp tỉ số thể tích

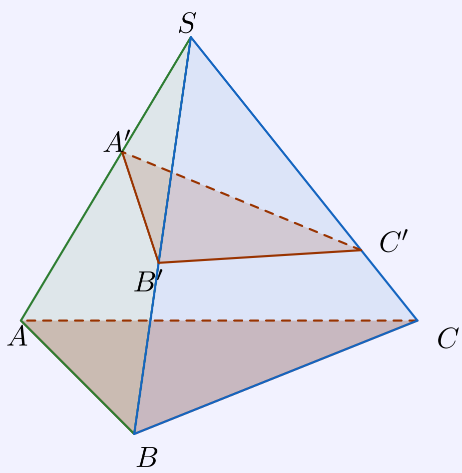
Khi tính thể tích của một khối đa diện mà nó chỉ là một phần của khối đa diện ban đầu, rõ ràng ta không thể áp dụng trực tiếp công thức tính thể tích của chúng do rất khó khăn trong việc xác định đáy và đường cao của nó. Tuy nhiên, khối đa diện ban đầu thì lại rất dễ dàng thực hiện được điều đó. Chính vì vậy, chúng ta cần tìm mối quan hệ (tìm tỉ lệ) của thể tích cần tính (không tính trực tiếp được) với thể tích của khối đa diện ban đầu (dễ tính được ngay). Muốn vậy, học sinh cần ghi nhớ ba dạng chuyển đổi thể tích sẽ được trình bày dưới đây.

Dạng 1: Công thức Simson và mở rộng cho chóp tứ giác

Công thức Simson

Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Ba điểm A', B', C' khác A bất kỳ lần lượt ***thuộc các đường*** SA, SB, SC. Khi đó ta có

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC} \quad \textbf{(1.15)}$$



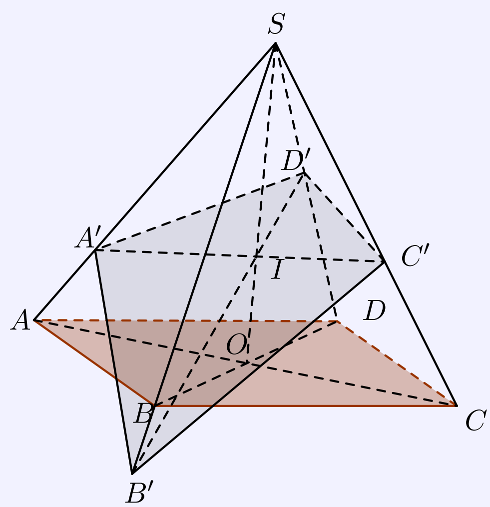
Mở rộng cho chóp có đáy là hình bình hành

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm bất kỳ ***thuộc các tia*** SA, SB, SC. Mặt phẳng $(A'B'C')$ cắt SD tại D'.

Đặt $a = \dfrac{SA}{SA'}; b = \dfrac{SB}{SB'}; c = \dfrac{SC}{SC'}; d = \dfrac{SD}{SD'}$.

Khi đó ta có

- $a + c = b + d$
- $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{a+b+c+d}{4abcd}$ (1.16)



Hình 1.3: Tỉ số thể tích chóp tứ giác

CHỨNG MINH CÔNG THỨC (1.15):
Có $V_{SA'B'C'D'} = \frac{1}{3}S_{SA'B'}.d(C',(SA'B')) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.SA'.SB'.\sin\widehat{A'SB'}.d(C',(SA'B'))$.
Mà $\sin\widehat{A'SB'} = \sin\widehat{ASB}$, $d(C',(SA'B')) = d(C',(SAB))$ do A', B' cùng nằm trong tam giác SAB.
Theo tiểu mục tỉ số khoảng cách trong mục 1.2.1,
$\frac{d(C',(SAB))}{d(C,(SAB))} = \frac{SC'}{SC}$.
Mặt khác $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{SAB}.d(C,(SAB)) = \frac{1}{6}SA.SB.\sin\widehat{ASB}.d(C,(SAB))$.
Vậy $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'.SB'}{SA.SB}.\frac{d(C',(SAB))}{d(C,(SAB))} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$.

CHỨNG MINH CÔNG THỨC (1.16):
Với cách đặt a, b, c, d như bài toán ta có $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'}$; $\overrightarrow{SB} = a\overrightarrow{SB'}$;
$\overrightarrow{SC} = a\overrightarrow{SC'}$;$\overrightarrow{SD} = a\overrightarrow{SD'}$. Hơn nữa, đặt $\overrightarrow{SO} = k\overrightarrow{SI}$.
Do O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{SA'} + c\overrightarrow{SC'} = 2\overrightarrow{SO} = 2k\overrightarrow{SI}$ (xem Hình 1.3).
Vậy $\overrightarrow{SI} = \frac{a}{2k}\overrightarrow{SA'} + \frac{c}{2k}\overrightarrow{SC'}$.
Vì A', I, C' thẳng hàng nên $\frac{a}{2k} + \frac{c}{2k} = 1 \Rightarrow a + c = 2k$.
Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $b + d = 2k$.
Vậy $a + c = b + d$.
Áp dụng công thức (1.15) cho khối chóp $S.ABC$ ta có
$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{abc}$ (1.17).
Tương tự cho khối chóp $S.ADC$ ta có $\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{1}{adc}$ (1.18).
Mà $V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$ (1.19).
Từ (1.17), (1.18) và (1.19) ta có $V_{S.A'B'C'D'} = \left(\frac{1}{abc} + \frac{1}{adc}\right)\frac{V_{S.ABCD}}{2}$
$\Rightarrow V_{S.A'B'C'D'} = \frac{b+d}{2abcd}V_{S.ABCD}$.
Lại có $b + d = a + c$ nên $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$.

THEO CÁCH CHỨNG MINH TRÊN, ta hoàn toàn có thể tổng quát bài toán này trong trường hợp đáy là tứ giác thường thay vì hình bình hành với điều kiện biết được tỉ số $\frac{OA}{OC}$ và $\frac{OB}{OD}$.
Cụ thể, nếu cho $a'\overrightarrow{OA} + c'\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ và $b'\overrightarrow{OB} + d'\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$ thì

$$\frac{aa'+cc'}{a'+c'} = \frac{bb'+dd'}{b'+d'} \textbf{ và } \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{aa'+bb'+cc'+dd'}{(a'+b'+c'+d')abcd}.$$

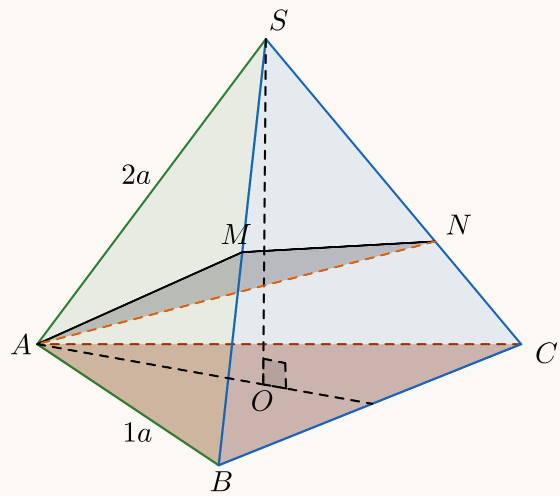
(Chứng minh dành cho bạn đọc.)

Ví dụ 1.2.25

Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS = 2NC$. Tính thể tích khối chóp $A.BCNM$.

Hướng dẫn

Tam giác ABC đều cạnh a nên $OA = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$,
suy ra $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{33}}{3}a$.
Đặt $V = V_{S.ABCD}$
$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\dfrac{\sqrt{33}}{3}a^3 = \dfrac{\sqrt{11}}{12}a^3$.
Áp dụng (1.15) có
$\dfrac{V_{S.AMN}}{V} = \dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3}$.
Do đó $V_{A.BCNM} = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)V = \dfrac{2}{3}V$.
Vậy $V_{A.BCNM} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{11}}{12}a^3 = \dfrac{\sqrt{11}}{18}a^3$.

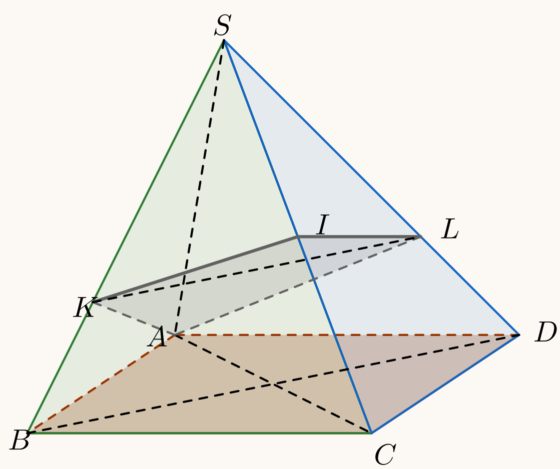


Ví dụ 1.2.26

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và I là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AI song song với BD cắt SB, SD tại K, L. Tính $\dfrac{V_{S.AKIL}}{V_{S.ABCD}}$.

Hướng dẫn

Giả sử mặt phẳng qua AI song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại K, L thì theo quan hệ song song trong không gian có $KL \parallel DB$. Do đó $\dfrac{SB}{SK} = \dfrac{SD}{SL}$.
Như vậy ta không phải dựng thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng.
Đặt $a = \dfrac{SA}{SA}; c = \dfrac{SC}{SI}; b = \dfrac{SB}{SK}; d = \dfrac{SD}{SL}$ thì $a = 1; c = 2; b = d$.
Do $a + c = b + d$ nên $b = d = \dfrac{3}{2}$.
Áp dụng công thức (1.16) ta có
$\dfrac{V_{S.AKIL}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{4.1.2.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$.



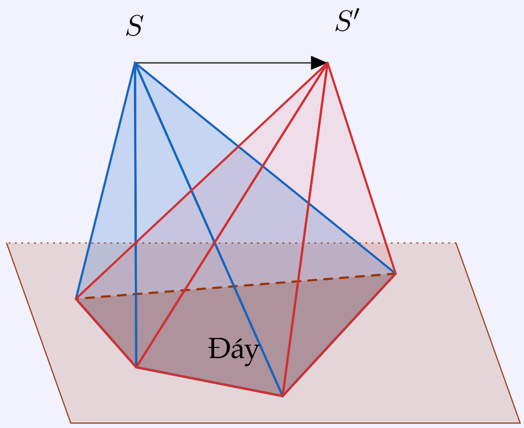
Dạng 2: Dịch chuyển đỉnh hoặc đáy của hình chóp

Chuyển thể tích khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ sang khối chóp $S'.A_1A_2...A_n$ mà có $SS' \parallel (A_1A_2...A_n)$ (hình bên) thì ta có

$$\boxed{V = V',\quad \textbf{(1.20)}}$$

với $V = V_{S.A_1A_2...A_n}$ và $V' = V_{S'.A_1A_2...A_n}$.

CHỨNG MINH:
Vì $SS' \parallel$ Đáy nên
$d(S, (\text{Đáy})) = d(S', (\text{Đáy}))$.
Hai khối chóp chung đáy và chiều cao bằng nhau nên thể tích bằng nhau.

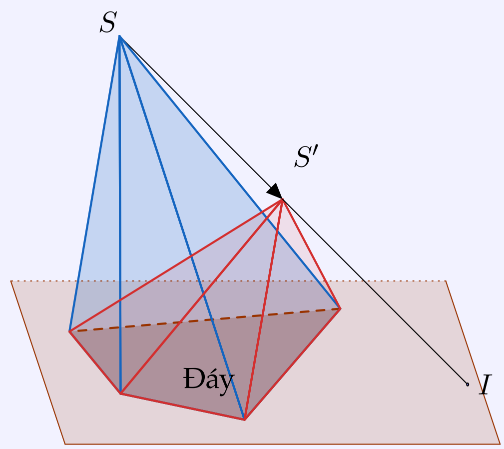


Chuyển thể tích khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ sang khối chóp $S'.A_1A_2...A_n$ mà có $SS' \cap (A_1A_2...A_n) = I$ (hình bên) thì ta có

$$\boxed{\frac{V}{V'} = \frac{SI}{S'I},\quad \textbf{(1.21)}}$$

với $V = V_{S.A_1A_2...A_n}$ và $V' = V_{S'.A_1A_2...A_n}$.

CHỨNG MINH:
Vì $SS' \cap \text{Đáy} = I$ nên $\dfrac{d(S, (\text{Đáy}))}{d(S', (\text{Đáy}))} = \dfrac{SI}{S'I}$.
Hai khối chóp chung đáy nên tỉ số thể tích bằng tỉ số đường cao.

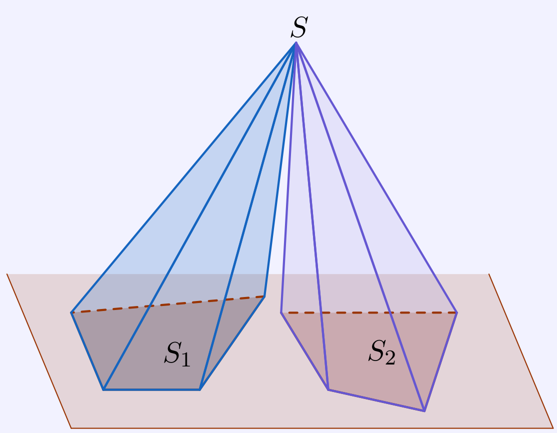


Di chuyển đáy trên cùng một mặt phẳng thì tỉ số thể tích bằng tỉ số diện tích.
Chẳng hạn, khối chóp đỉnh S có đáy thuộc mặt phẳng (P) có diện tích S_1. Trên (P) có một đa giác khác có diện tích S_2. Khi đó

$$\boxed{\frac{V}{V'} = \frac{S_1}{S_2}\quad \textbf{(1.22)}}$$

CHỨNG MINH:
Do hai đáy cùng nằm trong một mặt phẳng nên chiều cao của hai hình chó bằng nhau.

Vậy tỉ số thể tích bằng tỉ số diện tích hai đáy.

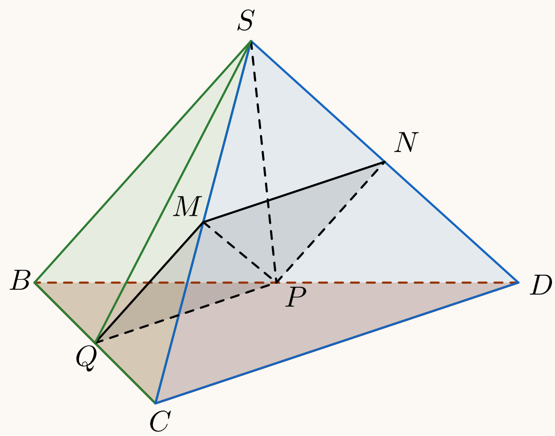


Ví dụ 1.2.27

Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AC, AD, BD, BC. Tính thể tích khối chóp $AMNPQ$.

Hướng dẫn

Dễ thấy $MNPQ$ là hình bình hành nên $V_{A.MNPQ} = 2V_{A.MNP} = 2V_{P.AMN}$.
Trong (ACD) có $S_{ANM} = \frac{1}{4}S_{ACD}$ nên theo (1.22) ta có $V_{P.AMN} = \frac{1}{4}V_{P.ACD}$.
Có $PB \cap (ACD) = D$ nên theo (1.21) có $V_{P.ACD} = \frac{PD}{BD}V_{B.ACD} = \frac{1}{2}V_{B.ACD}$.
Vậy $V_{A.MNPQ} = 2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}V_{B.ACD} = \frac{1}{4}V$.

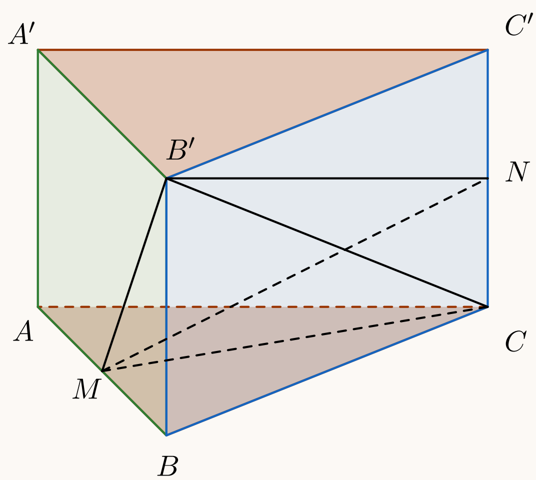


Ví dụ 1.2.28

Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CC'. Tính thể tích khối tứ diện $B'MCN$.

Hướng dẫn

Trong hình bình hành $BCC'B'$ có $S_{B'NC} = \frac{1}{2}S_{B'BC}$ nên theo (1.22) ta có $V_{M.B'NC} = \frac{1}{2}V_{M.B'BC} = \frac{1}{2}V_{B'.MBC}$.
Trong tam giác ABC có $S_{MBC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ nên theo (1.22) ta có $V_{B'.MBC} = \frac{1}{2}V_{B'.ABC}$.
Mà $V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\text{đáy}}.h = \frac{1}{3}V$.
Vậy $V_{B'MNC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\frac{1}{3}V = \frac{1}{12}V = \frac{1}{2}$.



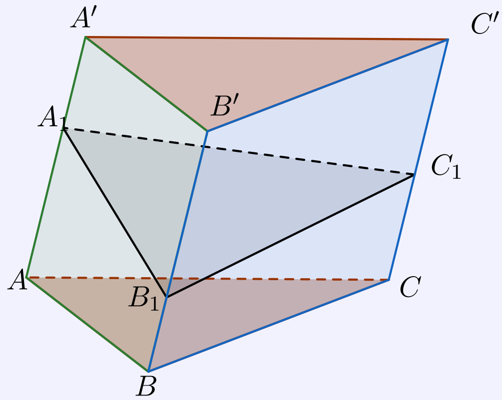
Dạng 3: Tỉ số thể tích cho lăng trụ

Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi A_1, B_1, C_1 là ba điểm bất kỳ ***trên các cạnh*** AA', BB', CC'.

Đặt $a = \dfrac{A'A_1}{A'A}$; $b = \dfrac{B'B_1}{B'B}$; $c = \dfrac{C'C_1}{C'C}$.

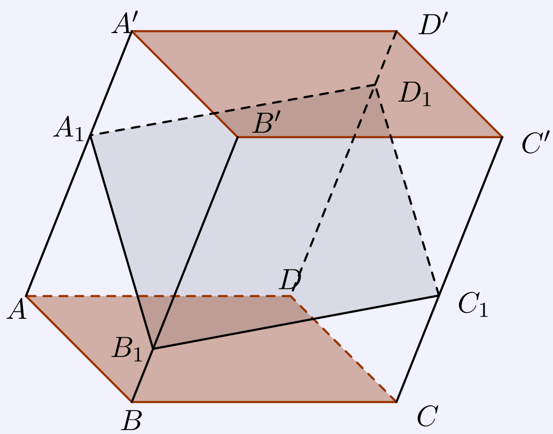
Khi đó ta có

$$\boxed{\frac{V_{A'B'C'.A_1B_1C_1}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a+b+c}{3} \quad \textbf{(1.23)}}$$



Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) bất kỳ ***cắt các cạnh*** AA', BB', CC', DD' lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1. Đặt $a = \dfrac{A'A_1}{AA'}$; $b = \dfrac{B'B_1}{BB'}$; $c = \dfrac{C'C_1}{CC'}$; $d = \dfrac{D'D_1}{DD'}$. Khi đó ta có

$$\boxed{\frac{V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}} \tag{1.24}$$



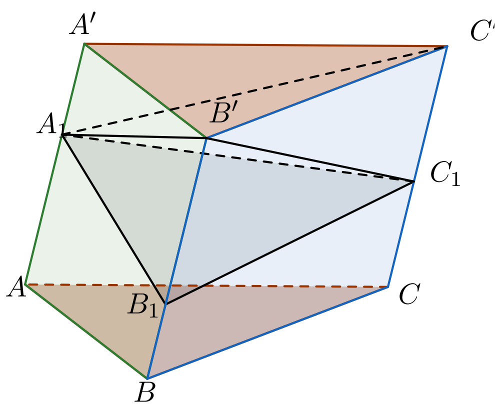
CHỨNG MINH CÔNG THỨC 1.23:

Gọi V là thể tích lăng trụ.

Có $V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = V_{A_1.A'B'C'} + V_{A_1.B'C'C_1}$
$+V_{A_1.B_1B'C_1}$. (1.25).

Theo (1.21), $V_{A_1.A'B'C'} = \dfrac{A_1A'}{AA'} V_{A.A'B'C'}$
$= \dfrac{a}{3}V$. (1.26).

Có $A'A_1 \parallel (B'C'C_1)$ nên theo (1.20), $V_{A_1.B'C'C_1} = V_{A'.B'C'C_1} = V_{C_1.A'B'C'}$.



Theo (1.21), $V_{C_1.A'B'C'} = \dfrac{C_1C'}{CC'} V_{C.A'B'C'} = \dfrac{c}{3}V$. (1.27).

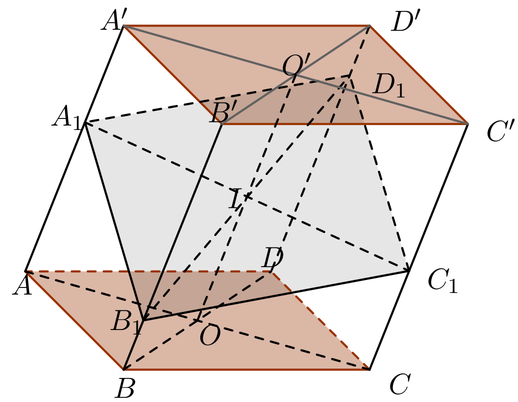
Có $A'A_1 \parallel (B'B_1C_1)$ nên theo (1.20), $V_{A_1.B'B_1C_1} = V_{A'.B'B_1C_1} = V_{C_1.A'B'B_1}$.

Có $C'C_1 \parallel (A'B'C_1)$ nên theo (1.20), $V_{C_1.A'B'B_1} = V_{C'.A'B'B_1} = V_{B_1.A'B'C'}$.

Theo (1.21), $V_{B_1.A'B'C'} = \dfrac{B_1B'}{BB'} V_{B.A'B'C'} = \dfrac{b}{3} V.$ (1.28).

Từ (1.25), (1.26), (1.27) và (1.28) ta có $V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = \dfrac{a+b+c}{3} V.$

CHỨNG MINH CÔNG THỨC 1.24:



Gọi V là thể tích lăng trụ, O, O' lần lượt là tâm các đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$.
Theo tính chất về quan hệ song song trong không gian, $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành và gọi I là tâm của nó. Hiển nhiên $I \in OO'$.
Theo tính chất đường trung bình của hình thang ta có $A'A_1 + C'C_1 = 2O'I$; $B'B_1 + D'D_1 = 2O'I$.
Vậy $A'A_1 + C'C_1 = B'B_1 + D'D_1$, do đó $a + c = b + d$.
Có $V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} + V_{A_1D_1C_1.A'D'C'}$.

Áp dụng công thức (1.23) cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ ta có $\dfrac{V_{A_1B_1C_1.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{a+b+c}{3}$.

Áp dụng công thức (1.23) cho lăng trụ $ADC.A'D'C'$ ta có $\dfrac{V_{A_1D_1C_1.A'D'C'}}{V_{ADC.A'D'C'}} = \dfrac{a+d+c}{3}$.

Mà $V_{ABC.A'B'C'} = V_{ADC.A'D'C'} = \dfrac{1}{2}V$ và $a + c = b + d$. Vậy ta có

$$V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'} = \frac{a+b+c}{6}V + \frac{a+d+c}{6}V = \frac{2(a+c)+(b+d)}{6}V = \frac{a+c}{2}V = \frac{b+d}{2}V.$$

Ví dụ 1.2.29

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q biết $AM = \dfrac{1}{3}a$, $CP = \dfrac{2}{5}a$. Tính thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$.

Hướng dẫn

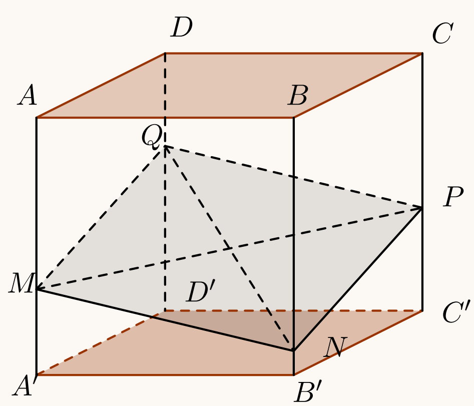
Đặt $a = \dfrac{AM}{AA'}$; $c = \dfrac{CP}{CC'}$, ta có

$$a = \frac{1}{3} \text{ và } c = \frac{2}{5}.$$

Áp dụng công thức (1.24), ta có

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{a+c}{2} = \frac{11}{30}.$$

Vậy $V_{ABCD.MNPQ} = \dfrac{11}{30}a^3$.



1.2.7 Bài tập áp dụng

1.2.8 Bài toán cực trị và bài toán thực tế

Bài tập nâng cao về thể tích của khối chóp hay khối lăng trụ thường tập trung vào các bài toán tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của nó hoặc các bài toán tìm phương án tối ưu trong thực tế. Để học sinh hình dung rõ hơn các bài toán dạng này, cuốn sách đưa ra ba dạng toán thường gặp dưới đây.

Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của diện tích hay thể tích mà quy về hàm một ẩn

Quy tắc chung:

- Tính đại lượng cần đánh giá (thể tích hoặc diện tích) theo các biến trong công thức của nó (có thể 2 hoặc 3 ẩn).
- Tìm miền xác định và mối ràng buộc giữa các ẩn trong công thức đó.
- Tính các ẩn theo một ẩn thành một hàm số một ẩn.
- Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số một ẩn trên miền xác định.

Ví dụ 1.2.30

Ông Kiệm muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dai gấp 2 chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng/m^2. Hãy giúp ông Kiệm xây bể với chi phí thấp nhất và chi phí đó bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn

Gọi $x; 2x$ là các kích thước đáy và h là chiều cao của hình hộp.
Ta có $S_{\text{xây}} = S_{\text{đáy}} + S_{xq} = 2x^2 + 6xh$.
Do thể tích bằng 288 nên $2x^2.h = 288 \Rightarrow h = \dfrac{144}{x^2}$.
Vậy $S_{\text{xây}} = 2x^2 + \dfrac{6.144}{x} = f(x)$, $x > 0$.
Khảo sát hàm $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ hoặc dùng máy tính cầm tay chức năng TABLE hoặc đánh giá bất đẳng thức Cô-Si ta tìm được giá trị nhỏ nhất của $f(x)$.
Chẳng hạn, áp dụng BĐT Cô-Si cho 3 số dương, ta có:

$$2x^2 + \frac{6.144}{x} = 2x^2 + \frac{3.144}{x} + \frac{3.144}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2.\frac{3.144}{x}.\frac{3.144}{x}} = 3\sqrt[3]{2.3^2.144^2}.$$

Vậy chi phí thấp nhất để xây bể là: $3\sqrt[3]{2.3^2.144^2} \times 0,5 = 108$ triệu đồng.

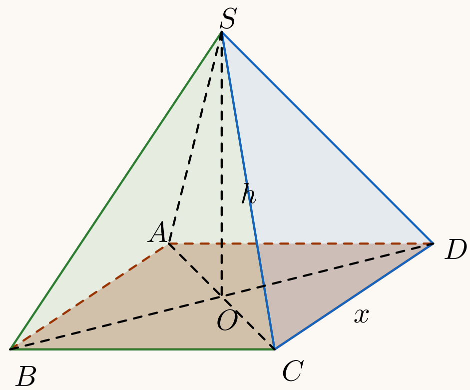
Ví dụ 1.2.31

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng 4. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích V của khối chóp.

Hướng dẫn

Gọi x là cạnh đáy và h là chiều cao, ta có $V = \dfrac{1}{3}x^2h$.
Theo (1.2) có $d(A,(SCD)) = 2d(O,(SCD))$ $\Rightarrow d(O,(SCD)) = 2$.
Áp dụng tính chất khoảng cách trong góc tam diện vuông $O.SCD$, ta có
$\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OS^2}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{h^2}, (OC = OD = \dfrac{x}{\sqrt{2}})$
$\Rightarrow x^2 = \dfrac{16h^2}{h^2-4}$.
Vậy $V = f(h) = \dfrac{16}{3}\dfrac{h^3}{h^2-4}$ với $h > 2$.

Khảo sát hàm số $f(h)$ trên $(0;+\infty)$ ta được $V_{\max} = f(2\sqrt{3}) = 16\sqrt{3}$.

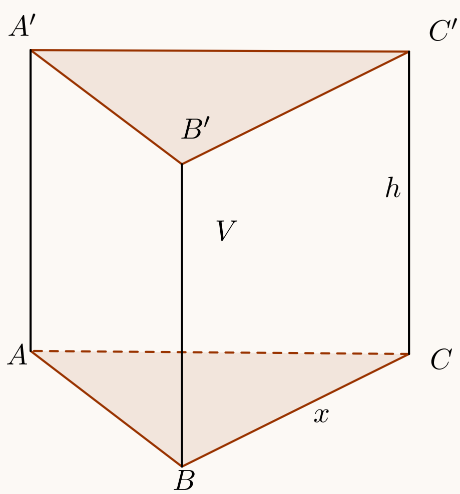


Ví dụ 1.2.32

Cho một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Thể tích của hình lăng trụ là V. Để diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì cạnh đáy của lăng trụ là bao nhiêu?

Hướng dẫn

Gọi x là độ dài cạnh đáy của lăng trụ và h là chiều cao thì $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2h \Rightarrow h = \dfrac{4V}{\sqrt{3}x^2}$.
Diện tích toàn phần của lăng trụ
$S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3xh = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \dfrac{4\sqrt{3}V}{x}$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \dfrac{2\sqrt{3}V}{x} + \dfrac{2\sqrt{3}V}{x}$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si cho 3 số dương ta có
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \dfrac{2\sqrt{3}V}{x} + \dfrac{2\sqrt{3}V}{x} \geqslant 3\sqrt[3]{6\sqrt{3}V^2}$.
Dấu "=" $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \dfrac{2\sqrt{3}V}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4V}$.
Vậy diện tích toàn phần của lăng trụ nhỏ nhất khi cạnh đáy $x = \sqrt[3]{4V}$.

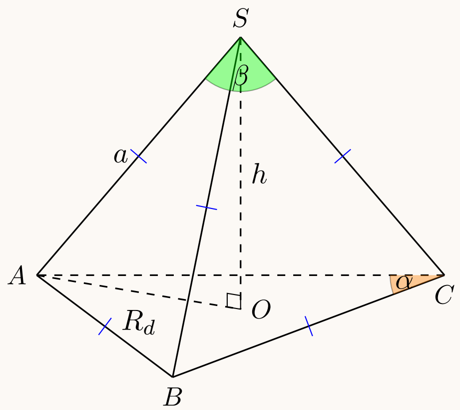


Ví dụ 1.2.33: Tứ diện có 5 cạnh bằng nhau và một cạnh thay đổi

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = BC = a$ và AC có độ dài thay đổi. Tính thể tích lớn nhất của khối chóp.

Hướng dẫn

Cách 1:



Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên bằng nhau nên chân đường cao trùng với tâm ngoại tiếp O của đáy. Đặt $\widehat{BCA} = \alpha, (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ thì theo định lý hàm số sin có $R_d = \frac{a}{2\sin\alpha}$. Vậy

$h = \sqrt{SA^2 - R_d^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2\alpha}}.a.$

Có $\widehat{ABC} = 180° - 2\alpha \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha.$

Vậy $V = \frac{1}{6}\sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2\alpha}}\sin 2\alpha.a^3$

$= \frac{1}{6}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\cos\alpha.a^3 = \frac{1}{6}\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}.\cos\alpha.a^3.$

Đặt $\cos\alpha = t, (0 < t < 1) \Rightarrow V = \frac{1}{6}\sqrt{3t^2 - 4t^4}.a^3$. Xét $f(t) = 3t^2 - 4t^4$.

Có $f'(t) = 6t - 16t^3 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{3}{8}} \in (0; 1)$. Khi đó $\max\limits_{(0;1)} f(t) = \frac{9}{16}$.

Vậy GTLN của V bằng $\frac{1}{6}.\frac{3}{4}.a^3 = \frac{1}{8}a^3$.

Cách 2:

Đặt $\widehat{ASC} = \beta,\ 0 < \beta < \pi$. Áp dụng công thức tính thể tích (1.8) ta có

$$V = \frac{1}{6}.a.a.a.\sqrt{1 - \cos^2 60° - \cos^2 60° - \cos^2\beta + 2\cos 60°.\cos 60°.\cos\beta}$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{2} - \cos^2\beta + \frac{1}{2}\cos\beta}.a^3$$

Đặt $t = \cos\beta,\ (-1 < t < 1)$ thì dễ thấy GTLN của $f(t) = -t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ bằng $\frac{9}{16}$ đạt được tại $t = \frac{1}{4}$. Khi đó GTLN của V là $V = \frac{1}{6}.\frac{3}{4}.a^3 = \frac{a^3}{8}$.

Cách 3: Đánh giá

Áp dụng công thức (1.5) ta có

$$V = \frac{2.S_{SAB}.S_{SBC}.\sin((SAB),(SBC))}{3SB}$$

Mà $\sin((SAB),(SBC)) \leq 1$, đẳng thức đạt được khi $(SAB)\perp(SBC)$.

Vậy GTLN của V bằng $\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4}.a^3 = \frac{a^3}{8}$.

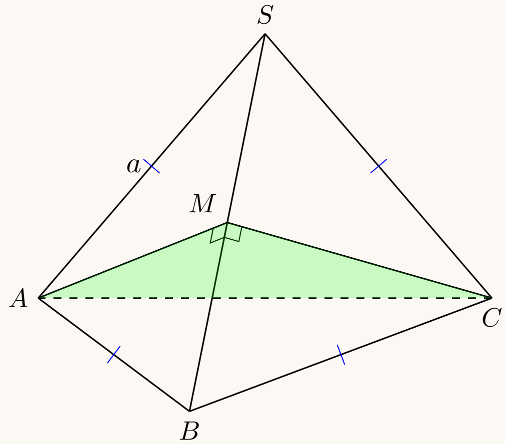
Cách 4: Đánh giá

Gọi M là trung điểm của SB. Do các tam giác SAB, SBC đều nên $AM, CM \perp SB$ hay $SB \perp (AMC)$. Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3} S_{AMC}.SB$.

Mà $AM = CM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow S_{AMC} = \dfrac{3}{8}a^2.\sin\widehat{AMC}$.

Do đó $V_{SABC} = \dfrac{1}{8}a^3.\sin\widehat{AMC} \leq \dfrac{1}{8}a^3$.

Đẳng thức đạt tại $\widehat{AMC} = 90^\circ$ nên GTLN của V là $V = \dfrac{a^3}{8}$. Khi đó $AC = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.



Cách 5: Đánh giá

Ta có $V = \dfrac{1}{3}.S_{SAB}.d(C,(SAB)) = \dfrac{\sqrt{3}}{12}.a^2.d(C,(SAB))$ với $d(C,(SAB))$ là khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB). Vậy V lớn nhất khi $d(C,(SAB))$ lớn nhất.

Mà $d(C,(SAB)) \leq d(C,SB)$, đẳng thức xảy ra khi $(SBC) \perp (SAB)$, khi đó $d(C,(SAB)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (do tam giác SBC đều).

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp là $V = \dfrac{\sqrt{3}}{12}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.a^3 = \dfrac{a^3}{8}$.

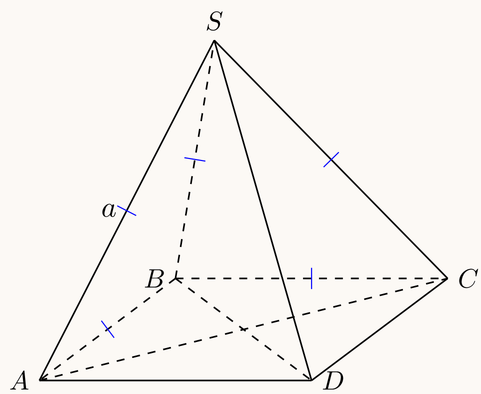
Ví dụ 1.2.34

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, các cạnh bên $SA = SB = SC = a$ và cạnh SD thay đổi. Tính thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn

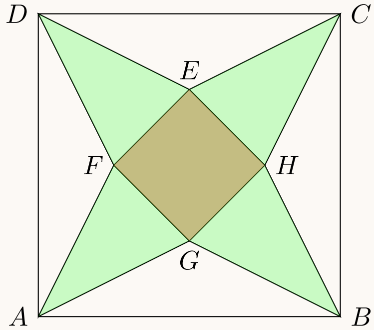
Xét tứ diện $SABC$ có 5 cạnh bằng nhau và chỉ có AC thay đổi. Áp dụng kết quả của Ví dụ 1.2.33 ta có GTLN của V_{SABC} là $\dfrac{a^3}{8}$.

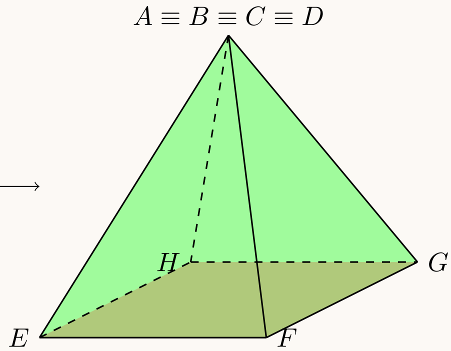
Vậy GTLN của $V_{S.ABCD}$ là $2V_{SABC} = \dfrac{a^3}{4}$.



Ví dụ 1.2.35

Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 2 người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau (như hình vẽ) rồi gấp lại để được một hình chóp tứ giác đều. Tính thể tích lớn nhất của khối chóp đó.



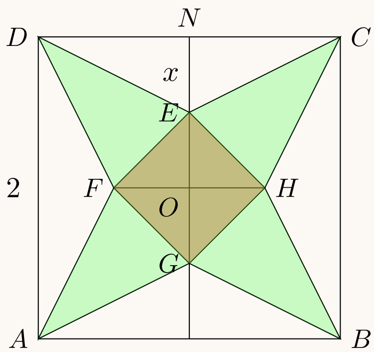


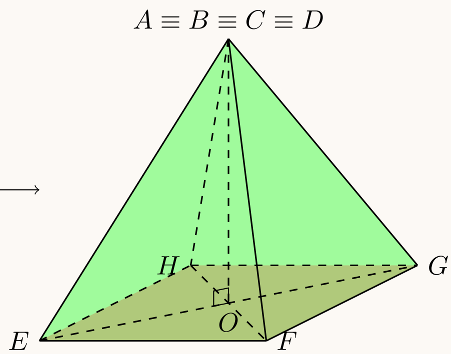
Hướng dẫn

Gọi N là trung điểm của CD, đặt $x = EN$, $(0 < x < 1) \Rightarrow CE = \sqrt{x^2+1}$ và $EG = 2-2x$.
Hình vuông $EFGH$ có $EG = 2-2x \Rightarrow S_{EFGH} = \dfrac{1}{2}EG^2 = 2(1-x)^2$.
Hình chóp có $S \equiv A \equiv B \equiv C \equiv D$ là đỉnh nên chiều cao

$$CO = \sqrt{CE^2 - EO^2} = \sqrt{x^2+1-(1-x)^2} = \sqrt{2x}.$$

Vậy $V_{S.EFGH} = \dfrac{1}{3}.2(1-x)^2.\sqrt{2x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.(1-x)^2.\sqrt{x}$.





Xét hàm $f(x) = (1-x)^2.\sqrt{x}$, $(0 < x < 1)$.
Đặt $t = \sqrt{x}$, $(0 < t < 1)$ thì $f(x) = g(t) = (1-t^2)^2.t = t^5 - 2t^3 + t$.
Ta có $g'(t) = 5t^4 - 6t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \in (0;1)$. Dễ dàng kiểm tra được

$$\max_{(0;1)} g(t) = g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{16\sqrt{5}}{125}.$$

Khi đó, GTLN của $V_{S.ABCD}$ bằng $\dfrac{32\sqrt{10}}{375}$.

Dạng 2: Áp dụng bất đẳng thức nhiều biến để tìm GTLN hay GTNN

Quy tắc chung:

- Tính đại lượng cần đánh giá theo các biến trong công thức của nó.
- Áp dụng các bất đẳng thức thường gặp như

  $a+b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a,b>0;\ a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \forall a,b,c>0;\ (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2),\ \forall a,b \in \mathbb{R}$

  Đẳng thức đặt tại $a=b=c$.

  $$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2} \geq \sqrt{(x+y)^2+(a+b)^2}, \forall a,b,x,y \in \mathbb{R} \qquad (1.29)$$

  Đẳng thức đặt tại $(x;a)=k(y;b),\ k>0$.

  $$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}, \forall x,y,z \in \mathbb{R}, a,b>0. \qquad (1.30)$$

  Đẳng thức đặt tại $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.
- Sau khi áp dụng bất đẳng thức có thể đưa về hàm một biến như Dạng 1.

Ví dụ 1.2.36

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=x, BC=y, AB=AC=SB=SC=1$. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất thì tổng $x+y$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn

Dễ chứng minh được $SA\perp(MBC)$ và ΔMBC cân tại M.

Ta có $MN^2=MB^2-\dfrac{BC^2}{4}$

$=AB^2-\dfrac{SA^2}{4}-\dfrac{BC^2}{4}=1-\dfrac{x^2+y^2}{4}$.

Do đó $V=V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}xy\sqrt{1-\dfrac{x^2+y^2}{4}}$.

Vì $x^2+y^2\geqslant 2xy$ nên

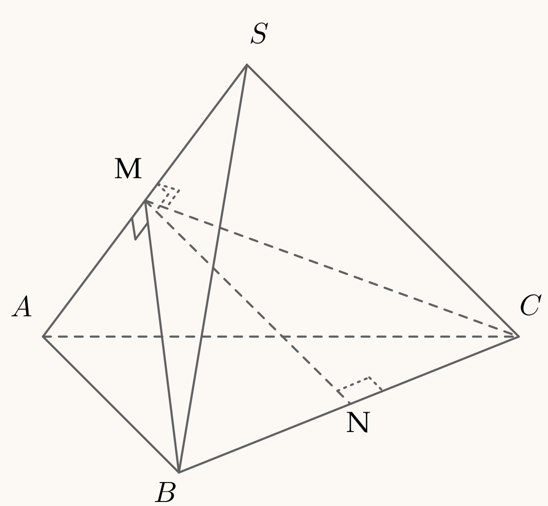
$V\leqslant\dfrac{1}{6}xy\sqrt{1-\dfrac{xy}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(xy)^2.(2-xy)}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$..

Đặt $t=xy$ và xét $f(t)=t^2(2-t)$,

$f(t)$ đạt GTLN trên $(0;2)$ khi $t=\dfrac{4}{3}$,

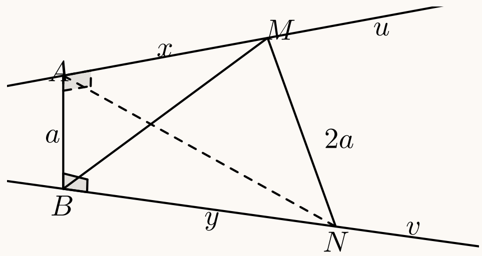
suy ra $x=y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow x+y=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.



Ví dụ 1.2.37

Cho hai đường thẳng Au, Bv chéo nhau và vuông góc với nhau có $AB = a$ là đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt chuyển động trên Au, Bv sao cho $MN = 2a$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABMN$ theo a.

Hướng dẫn

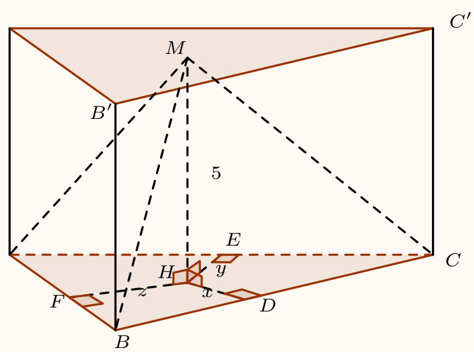


Đặt $AM = x, BN = y$ $(x, y > 0)$, áp dụng (1.4) có
$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AM.BN.AB.\sin 90^\circ = \frac{1}{6}axy$.
Lại có $4a^2 = MN^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right)^2$
$= x^2 + y^2 + a^2 + 2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{BN}\overrightarrow{MA}$,
Do MA, AB, BN đôi một vuông góc nên
$4a^2 = x^2 + y^2 + a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3a^2$.
Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si ta có $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, do đó $V_{ABCD} \leq \frac{1}{4}a^3$.
Đẳng thức đặt tại $x = y = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Vậy GTLN của thể tích tứ diện là $\frac{1}{4}a^3$.

Ví dụ 1.2.38

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 6, AC = 8, BC = 10$, thể tích khối chóp $C'.ABB'A$ bằng 80. Gọi M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác $A'BC'$. Tìm vị trí của điểm M sao cho tổng diện tích tất cả các mặt của hình chóp $M.ABC$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn



Tam giác ABC vuông tại A nên $S_{ABC} = 24$.
Có $V_{C'.ABB'A} = 2V_{C'.ABB'} = 2V_{C.ABB'}$
$= \frac{2}{3}V_{\text{lăng trụ}} \Rightarrow V_{\text{lăng trụ}} = 120$.
Vậy chiều cao của lăng trụ $MH = 5$.
Đặt $x = HD, y = HE, z = HF$ với D, E, F là hình chiếu của H lên BC, CA, AB.
Xét $T = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA}$
$= \frac{1}{2}(MD.BC + ME.CA + MF.AB)$
$= 5\sqrt{25+x^2} + 4\sqrt{25+y^2} + 3\sqrt{25+z^2} = \sqrt{625+25x^2} + \sqrt{400+16y^2} + \sqrt{225+9z^2}$.
Lại có $S_{ABC} = S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB} \Rightarrow 5x + 4y + 3z = 24$.
Áp dụng (1.29) cho bộ 3 số, ta có $T \geq \sqrt{(15+20+25)^2 + (5x+4y+3z)^2} = 12\sqrt{41}$.
Dấu "=" khi $\frac{5x}{25} = \frac{4y}{20} = \frac{3z}{15} \Leftrightarrow x = y = z$, hay M là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A'B'C'$.

Dạng 3: Kỹ thuật trải hình tìm phương án tối ưu

Bài toán: Tìm quãng đường đi ngắn nhất trong không gian.
Quy tắc chung:

- Trải các mặt phẳng chứa các đoạn đường ra trên cùng một mặt phẳng.
- Quãng đường đi trong không gian sau đó là một đường gấp khúc mà mỗi đoạn là các đoạn tương ứng trong các mặt phẳng khác nhau trong không gian.
- Tìm đường đi ngắn nhất của đường gấp khúc này trong mặt phẳng (thường là đoạn thẳng khi các đường gấp khúc thẳng hàng).

Ví dụ 1.2.39

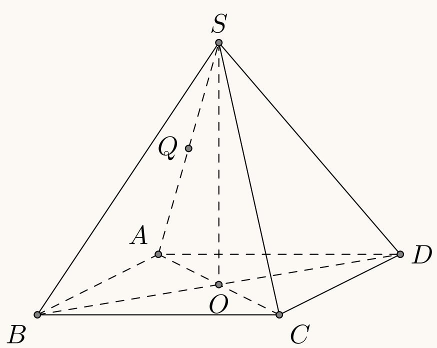
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a$ và $\widehat{SAB} = \dfrac{11\pi}{24}$. Gọi Q là trung điểm cạnh SA. Trên các cạnh SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm M, N, P không trùng với các đỉnh hình chóp. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $AM + MN + NP + PQ$ theo a.

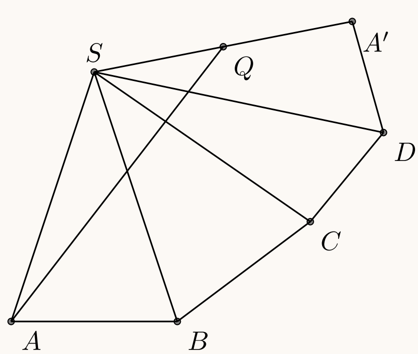
Hướng dẫn

Ta trải các mặt bên của hình chóp ra mặt phẳng:
Suy ra $AM + MN + NP + PQ$ ngắn nhất khi $A; M; N; Q$ thẳng hàng.

Xét ΔASQ có $\begin{cases} SA = 1 \\ SQ = \dfrac{a}{2} \\ \widehat{ASQ} = \dfrac{\pi}{12} \cdot 4 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

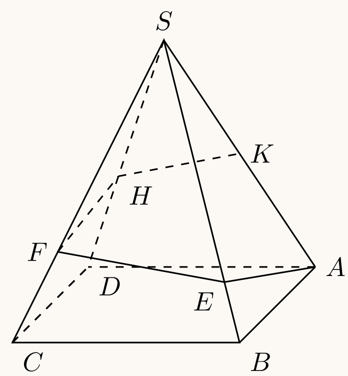
Suy ra $AQ = \sqrt{AS^2 + SQ^2 - 2SA \cdot SQ \cos \widehat{ASQ}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.





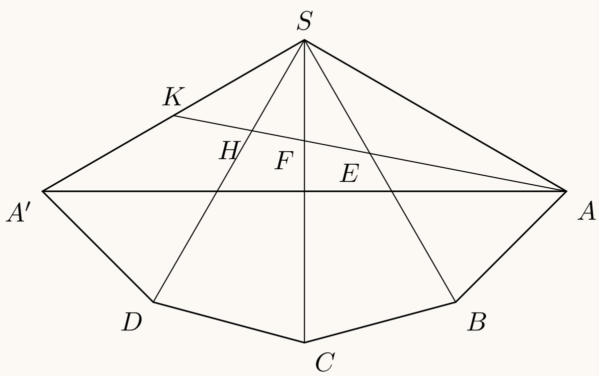
Ví dụ 1.2.40

Thị xã Từ Sơn xây dựng một ngọn tháp đèn lộng lẫy hình chóp tứ giác đều $A.ABCD$ có cạnh bên $SA = 12$ m và $\widehat{ASB} = 30°$. Người ta cần mắc một đường dây điện từ điểm A đến trung điểm K của SA gồm 4 đoạn thẳng AE, EF, FH, HK như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí người ta cần thiết kế được chiều dài con đường từ A đến K là ngắn nhất. Tính tỉ số $k = \dfrac{HF + HK}{EA + EF}$.



Hướng dẫn

Giả sử trải hình chóp trên một đường tròn tâm S, bán kính SA như hình vẽ bên.
Để nối từ A đến K là ngắn nhất thì AK là một đường thẳng.
Xét tam giác cân $\Delta SAA'$, thấy rằng F là trọng tâm tam giác.
Nên $\dfrac{AF}{FK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{HF + HK}{EA + EF} = \dfrac{1}{2}$.



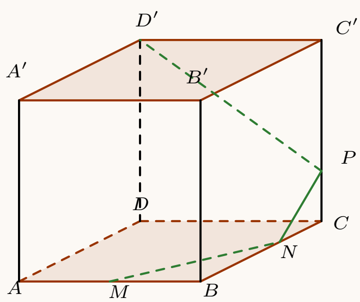
Ví dụ 1.2.41

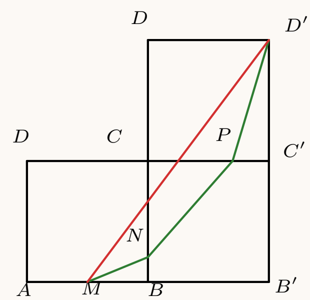
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Một con kiến bò từ trung điểm M của cạnh AB đến một điểm N bất kỳ trên cạnh BC, sau đó đi tiếp đến một điểm P trên cạnh CC' rồi về D'. Tính quãng đường ngắn nhất của con kiến.

Hướng dẫn

Trải hình như hình bên.
Ta thấy ngay quãng đường ngắn nhất của con kiến là

$$MD' = \sqrt{(1,5a)^2 + (2a)^2} = \frac{5}{2}a.$$





1.2.9 Bài tập áp dụng

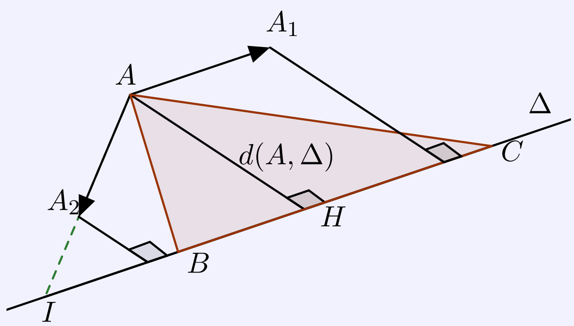
1.3 Khoảng cách và góc

1.3.1 Khoảng cách

Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Giả sử cần tính khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ, lưu ý các cách sau

- Lấy $B, C \in \Delta$ và giải tam giác ABC.
- Chuyển điểm $A \to A_1$ với $AA_1 \parallel \Delta$: $d(A, \Delta) = d(A_1, \Delta)$
- Chuyển điểm $A \to A_2$ với $AA_2 \cap \Delta = I$: $d(A, \Delta) = \dfrac{IA}{IA_2} d(A_2, \Delta)$



Ví dụ 1.3.1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của SC và AB. Tính khoảng cách từ I đến CM.

Hướng dẫn

Coi a là đơn vị đo độ dài. Có $d(I, MC) = \dfrac{IC}{SC} d(S, MC) = \dfrac{1}{2} d(S, MC)$.

Có $MC = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3}$.

Có

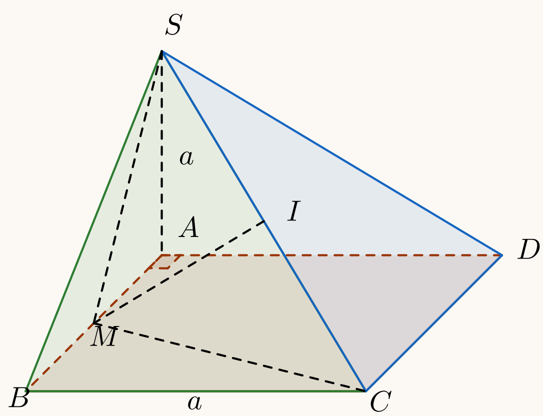
$$S_{SMC} = \sqrt{p\left(p - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 (p - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

với $p = \dfrac{SM + MC + SC}{2} = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(S, MC) = \dfrac{2S_{SMC}}{MC} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$

$\Rightarrow d(I, MC) = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Vậy $d(I, MC) = \dfrac{\sqrt{30}}{10} a$.



Dạng 2: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong Mục 1.2.1, cuốn sách đã giới thiệu phương pháp xác định khoảng cách cơ bản từ một điểm đến một mặt phẳng:

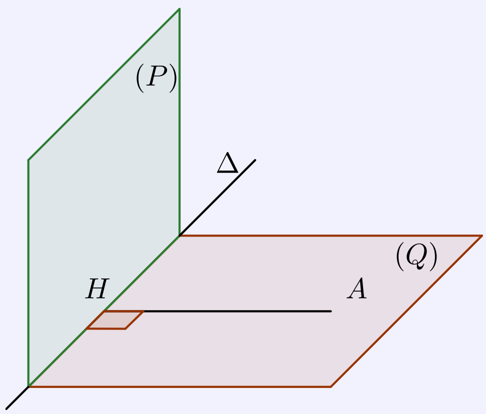
- Từ chân đường cao đến mặt xiên.
- Dịch chuyển khoảng cách đến một điểm khác thuận lợi hơn.

Ngoài ra, ta cần lưu ý thêm một số phương pháp sau:

Khoảng cách $d(A,(P))$ mà $A \in (Q)$ với $(Q)\perp(P)$:

- Xác định giao tuyến $\Delta = (P)\cap(Q)$.

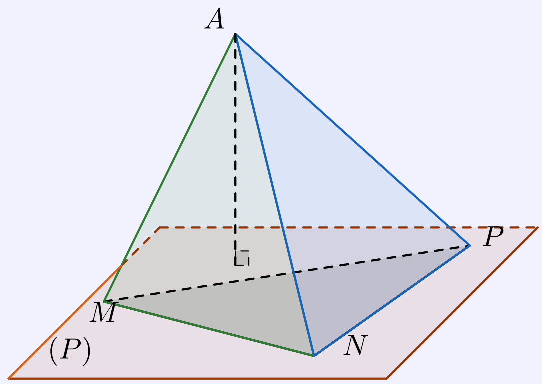
- Kẻ $AH\perp\Delta \Rightarrow d(A,(P)) = AH$.



Dùng thể tích của tứ diện:

- Chuyển $d(A,(P)) = d(A,(MNP))$, với $M,N,P \in (P)$ không thẳng hàng.

- Khi đó $d(A,(P)) = \dfrac{3V_{AMNP}}{S_{MNP}}$ (1.31)



Ví dụ 1.3.2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAD đến mặt phẳng (SAC).

Hướng dẫn

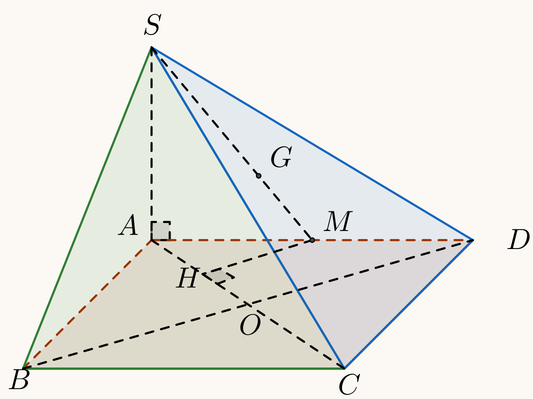
Áp dụng công thức (1.2) có $\dfrac{d(G,(SAC))}{d(M,(SAC))} = \dfrac{GS}{MS} = \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow d(G,(SAC)) = \dfrac{2}{3}d(M,(SAC))$.

Do $M \in (ABCD)$ và $(ABCD)\perp(SAC)$ nên $d(M,(SAC)) = d(M,AC) = HM$.

Mà $HM = \dfrac{1}{2}DO = \dfrac{\sqrt{2}}{4}a$.

Vậy $d(G,(SAC)) = \dfrac{2}{3}MH = \dfrac{\sqrt{2}}{6}a$.



Ví dụ 1.3.3: Đề thi THPTQG 2018

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

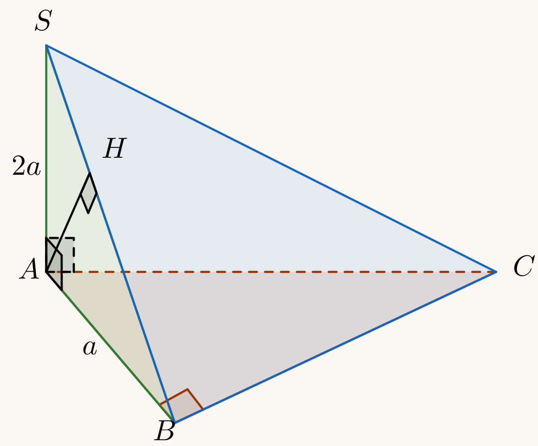
Hướng dẫn

Có A là chân đường cao, $(SBC) \cap (ABC) = BC$ và $AB \perp BC$. Kẻ $AH \perp SB$ thì $d(A, (SBC)) = AH$.
Có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$\Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a.$

Vậy $d(A, (SBC)) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a.$



Ví dụ 1.3.4

Cho hình chóp $SABC$ có các mặt phẳng(ABC) và (SBC) là những tam giác đều cạnh a và góc giữa chúng bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) nằm trong tam giác ABC. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Hướng dẫn

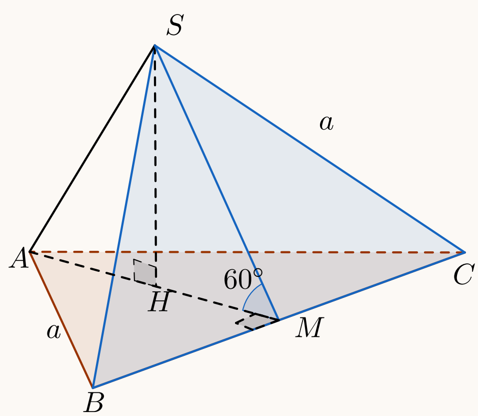
Gọi M là trung điểm của BC và H là chân đường cao hạ từ S thì $H \in AM$ và $\widehat{HMS} = 60°$.

Có $SM = HM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ và $\widehat{HMS} = 60°$ nên H là trung điểm của $AM \Rightarrow HM = HA = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a.$

$SH = HM \tan 60° = \dfrac{3}{4}a \Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}a^3.$

$SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\Rightarrow p = \dfrac{SA + AC + CS}{2} = \dfrac{4 + \sqrt{3}}{4}a.$



$S_{SAC} = \sqrt{p(p-a)^2\left(p - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{39}}{16}a^2$. Vậy $d(B, (SAC)) = \dfrac{3V_{SABC}}{S_{SAC}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}a.$

Ví dụ 1.3.5

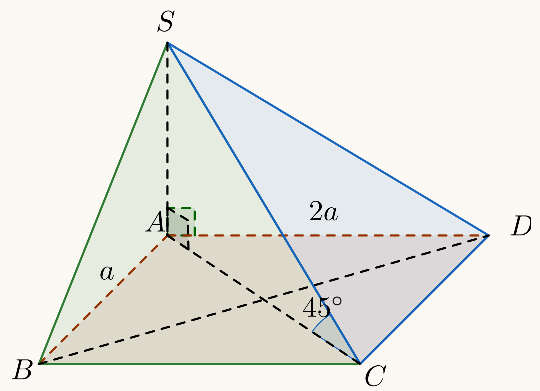
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC và đáy bằng $45°$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Hướng dẫn

Có $(SC,(ABCD)) = 45° \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$
$\Rightarrow SA = AC.\tan 45° = \sqrt{5}a$.
Có $A.SBD$ là góc tam diện vuông tại A nên ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{d^2(A,(SBD))} &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AS^2}\\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{a^2}\\ &= \frac{29}{20a^2}\end{aligned}$$

Vậy $d(A,(SBD)) = \dfrac{2\sqrt{145}}{29}a$.



Ví dụ 1.3.6

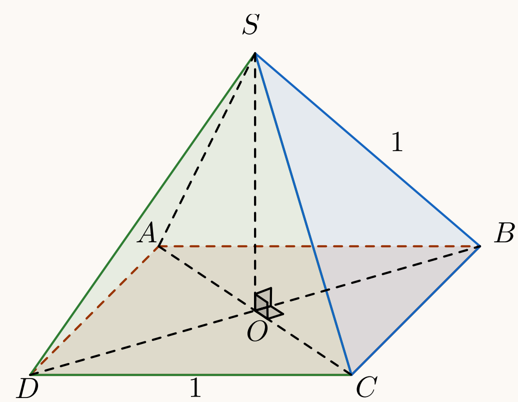
Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $ABCD$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

Hướng dẫn

$ABCD$ là hình vuông cạnh 1 nên
$OB = OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
ΔSAC cân tại S có cạnh bên bằng 1 và $AC = \sqrt{2}$ nên ΔSAC vuông tại S và
$OS = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$O.SBC$ là góc tam diện vuông tại O nên

$$\begin{aligned}\frac{1}{d^2(O,(SBC))} &= \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OS^2}\\ &= 2 + 2 + 2 = 6\end{aligned}$$

Vậy $d(O,(SBC)) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.



Ví dụ 1.3.7

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với $AB = a, BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Góc giữa AA' và (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách từ G đến $(A'BC)$.

Hướng dẫn

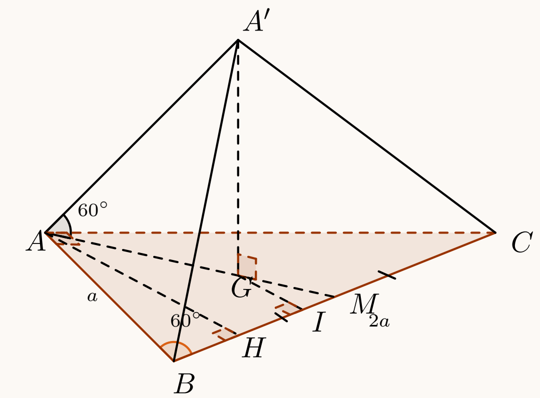
ΔABC có $AB = a, BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60°$ nên vuông tại A. Góc $(AA', (ABC))$ $= \widehat{A'AG} \Rightarrow \widehat{A'AG} = 60°$. Có $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2}BC = \dfrac{2}{3}a \Rightarrow A'G = AG\tan 60° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (theo mục 1.2.1).

Kẻ $GI \perp BC \Rightarrow GI = \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.

Có $\dfrac{1}{d^2(G,(A'BC))} = \dfrac{1}{GA'^2} + \dfrac{1}{GI^2}$
$= \dfrac{3}{4a^2} + \dfrac{12}{a^2} = \dfrac{51}{4a^2}$.

Vậy $d(G,(A'BC)) = \dfrac{2a}{\sqrt{51}} = \dfrac{2\sqrt{51}}{51}a$.

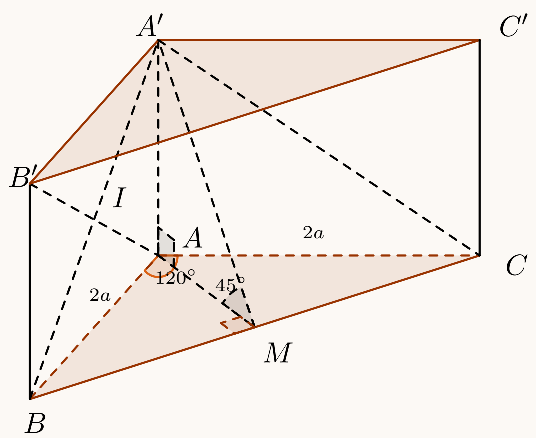


Ví dụ 1.3.8

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = 2a$, $\widehat{CAB} = 120°$. Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$. Tính $d(B', (A'BC))$.

Hướng dẫn

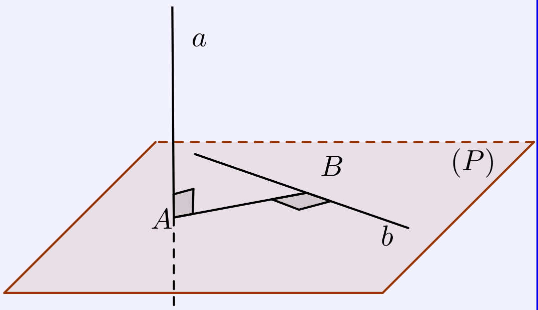
Gọi M là trung điểm của BC thì
$AM = \dfrac{1}{2}AB = a$ và $\widehat{A'MA} = 45°$
$\Rightarrow AA' = AM\tan 45° = a$.
Có $B'A \cap (A'BC) = I$ và $IB' = IA$
$\Rightarrow d(B', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$.
Mà $\dfrac{1}{d^2(A,(A'BC))} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{2}{a^2}$
$\Rightarrow d(A, (A'BC)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.
Vậy $d(B', (A'BC)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.



Dạng 3: Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau

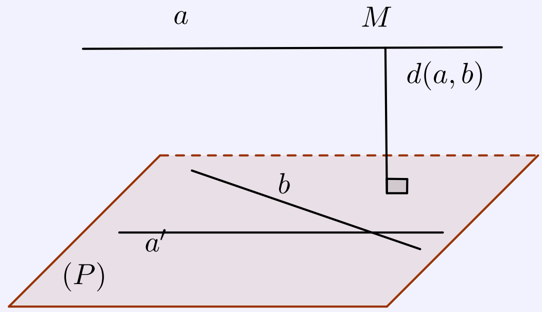
Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau a, b, ký hiệu là $d(a, b)$ được thực hiện theo trình tự sau:

Kiểm tra trường hợp đặc biệt:
$a \perp (P)$ mà $(P) \supset b$



• Gọi $A = a \cap (P)$.
• Kẻ $AB \perp b$ $(B \in b) \Rightarrow d(a, b) = AB$.

Phương pháp tổng quát:



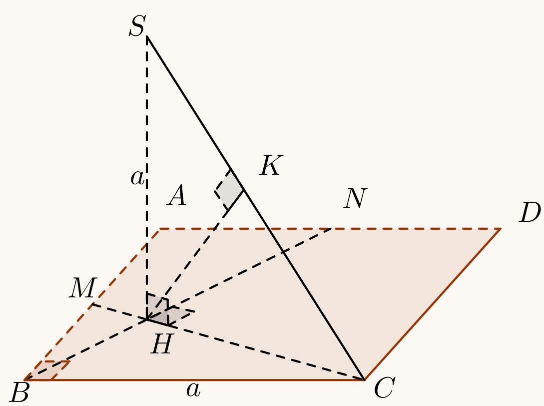
• Dựng mp$(P) \supset b$ và $(P) \parallel a$ (bằng cách từ 1 điểm thuộc b kẻ song song với a).
• $d(a, b) = d(M, (P))$ với $M \in a$ bất kỳ.

Ví dụ 1.3.9

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm H của CM, BN và $SH = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC, BN.

Hướng dẫn

Có $CM \perp BN$ theo mục 1.2.1,
mà $BN \perp SH$ do $SH \perp (ABCD)$,
vậy $BN \perp (HCS)$ với $(SHC) \supset SC$.
Kẻ $HK \perp SC \Rightarrow d(BN, SC) = HK$
(trường hợp đặc biệt xảy ra).
ΔMBC có $CH.CM = CB^2$ trong đó $CM = \sqrt{CB^2 + BM^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$,
do đó $CH = \dfrac{2}{\sqrt{5}}a$.
Có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{9}{4a^2}$,
$\Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}a$, hay $d(SC, BN) = \dfrac{2}{3}a$.



Ví dụ 1.3.10

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = a$, SB hợp với đáy góc $30°$. Tính khoảng cách giữa AB, SC.

Hướng dẫn

Có góc $(SB, (ABC)) = \widehat{SBA}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 30° \Rightarrow SA = AB \tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a.$

Kẻ $CE \parallel BA$ và $CE = AB$ thì

$(SCE) \supset SC$ và $(SCE) \parallel AB$

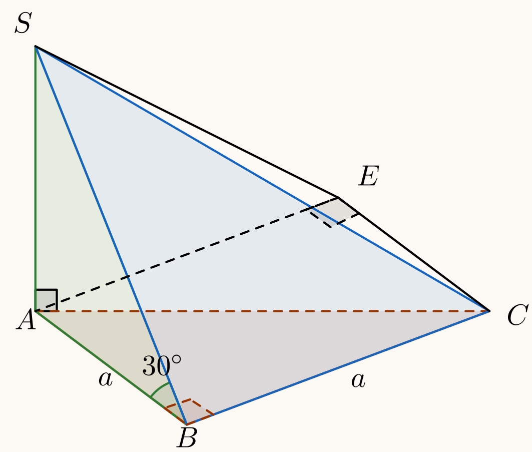
$\Rightarrow d(AB, SC) = d(A, (SCE)).$

Có $AE \perp CE$ (do $ABCE$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow \dfrac{1}{d^2(A,(SCE))} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{4}{a^2}.$

$\Rightarrow d(A, (SCE)) = \dfrac{a}{2}.$

Vậy $d(AB, SC) = \dfrac{a}{2}.$



Ví dụ 1.3.11: Đề thi THPTQG 2018

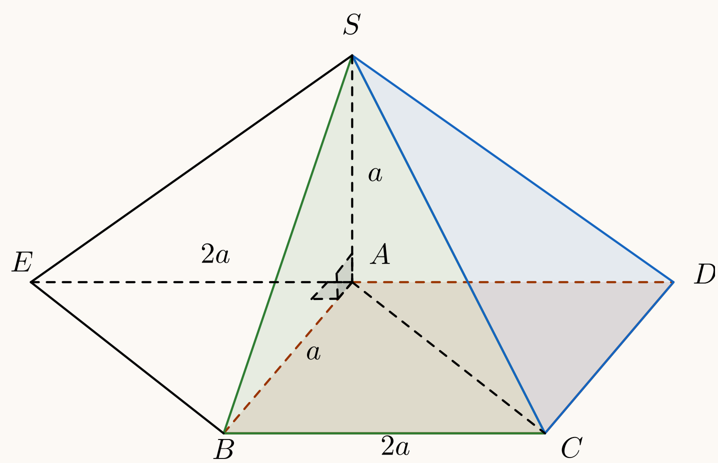
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

Hướng dẫn

Kẻ $BE \parallel AC$ cắt đường AD tại E thì $(SBE) \supset SB$ và song song với AC. Vậy $d(SB, AC) = d(A, (SBE))$.

Vì $A.SBE$ là góc tam diện vuông nên $\dfrac{1}{d^2(A,(SBE))} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{9}{4a^2}.$

(lưu ý $AE = BC = 2a$ vì $ACBE$ là hình bình hành).



Vậy $d(A, (SBE)) = \dfrac{2}{3}a$, hay $d(SB, AC) = \dfrac{2}{3}a$.

Ví dụ 1.3.12: Đề thi THPTQG 2018

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

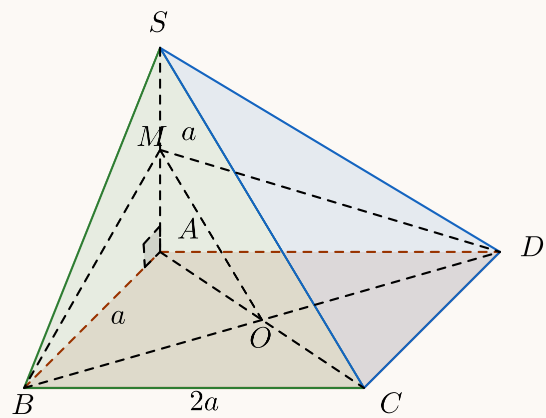
Hướng dẫn

Gọi $O = AC \cap BD$ và kẻ $OM \parallel SC$ (M là trung điểm SA) thì $(MBD) \supset BD$ và song song với SC.
Vậy $d(SC, BD) = d(C, (MBD))$.
Mà O là trung điểm AC, $O \in (MSB)$ nên $d(C, (MBD)) = d(A, (MBD))$.
Có $A.MBD$ là góc tam diện vuông và $AM = \frac{a}{2}$ nên ta có

$$\frac{1}{d^2(A, (MBD))} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{21}{4a^2}$$

$\Rightarrow d(A, (MBD)) = \frac{2\sqrt{21}}{21}a$.

Vậy $d(SC, DB) = \frac{2\sqrt{21}}{21}a$.



Ví dụ 1.3.13: Đề thi THPTQG 2018

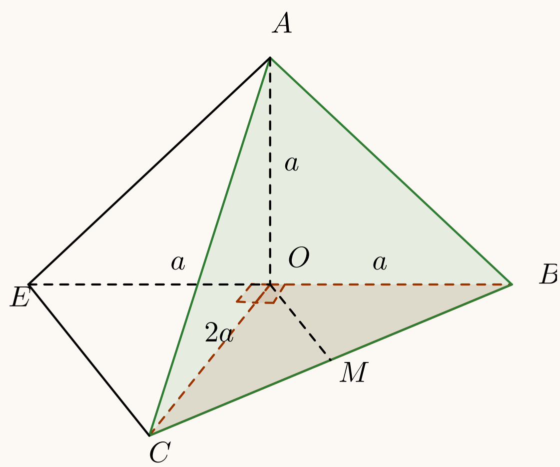
Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $AO = OB = a$ và $OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC.

Hướng dẫn

Từ C kẻ đường song song với OM cắt đường OB tại E thì $d(AC, OM) = d(O, (ACE))$ do $(ACE) \parallel OM$ và $(ACE) \supset AC$.
Có $MB = MC \Rightarrow OE = OB \Rightarrow OE = a$.
Có $O.ACE$ là góc tam diện vuông nên

$$\frac{1}{d^2(O, (ACE))} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{9}{4a^2}$$

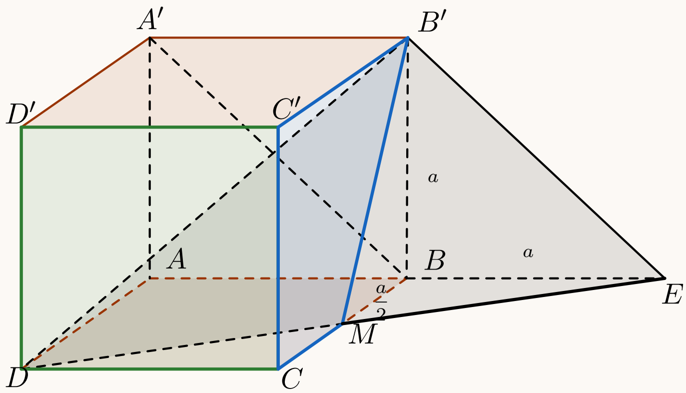
$\Rightarrow d(O, (ACE)) = \frac{2}{3}a$.
Vậy $d(AC, OM) = \frac{2}{3}a$.



Ví dụ 1.3.14

Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$.

Hướng dẫn



Từ B' kẻ đường song song với $A'B$ cắt đường AB tại E thì $BE = a$ (do $A'B'EB$ là hình bình hành). Gọi $M = DE \cap BC$ thì M là trung điểm của BC (do B là trung điểm AE), vậy $BM = \dfrac{a}{2}$.

Vì $(B'DE) \parallel A'B$ và $(B'DE) \supset B'D$ nên $d(A'B, B'D) = d(B, (B'DE)) = d(B, (B'ME))$.

Có $B.B'ME$ là tứ diện vuông nên

$$\frac{1}{d^2(B,(B'ME))} = \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow d(B,(B'ME)) = \frac{\sqrt{6}}{6}a = d(A'B, B'D).$$

Ví dụ 1.3.15

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A và $AB = AC = a\sqrt{2}$. Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng $60°$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng AM và $B'C$.

Hướng dẫn

Có $AM \perp BC$ (Δ cân), mà $AM \perp BB'$ nên $AM \perp (BB'C'C)$. Kẻ $MN \perp B'C$, vì $(BB'C'C) \supset B'C$ nên $d(AM, B'C) = MN = \dfrac{1}{2}BH$ với $BH \perp B'C$.

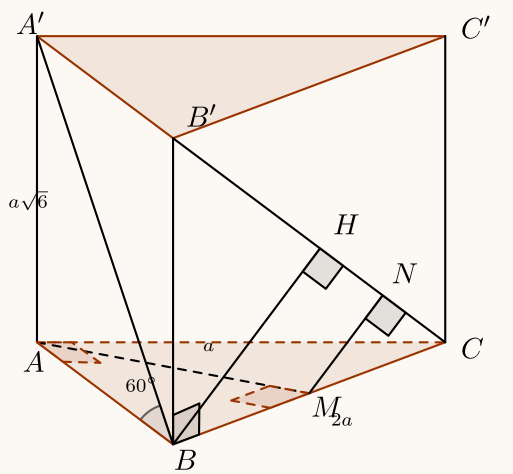
Góc $(A'B, (A'B'C')) = 60° \Rightarrow \widehat{A'BA} = 60°$

$\Rightarrow BB' = AA' = AB \tan 60° = a\sqrt{6}$.

$\Delta B'BC$ có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BB'^2} = \dfrac{5}{12a^2}$

$\Rightarrow BH = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}a \Rightarrow MN = \dfrac{\sqrt{15}}{5}a$.

Vậy $d(AM, B'C) = \dfrac{\sqrt{15}}{5}a$.



1.3.2 Bài tập áp dụng

1.3.3 Góc

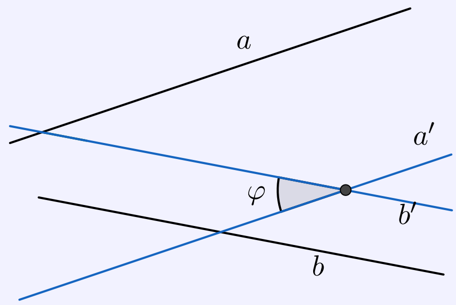
Trong mục 1.2.1 cuốn sách đã giới định nghĩa và cách tính cơ bản về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng cũng như góc giữa hai mặt phẳng. Mục này sẽ trình bày sâu hơn và các phương pháp đa dạng hơn để tích các góc trong không gian.

Dạng 1: Góc giữa hai đường thẳng

Theo định nghĩa trong SGK Hình học 11 [2], góc giữa hai đường phân biệt a và b, ký hiệu là (a, b) là góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a' và b' lần lượt cùng phương với a và b.

Nghĩa là:
$(a, b) = (a, b') = (a', b) = (a', b') = \varphi$.
Có hai cách tính:

• $\cos\varphi = \left|\cos(\vec{a}, \vec{b})\right| = \dfrac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{|\vec{a}|\,.\,\left|\vec{b}\right|}$ với $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ chỉ phương của a, b.
• Khi hai đường cắt nhau, gắn φ trong tam giác để giải tam giác.



Ví dụ 1.3.16

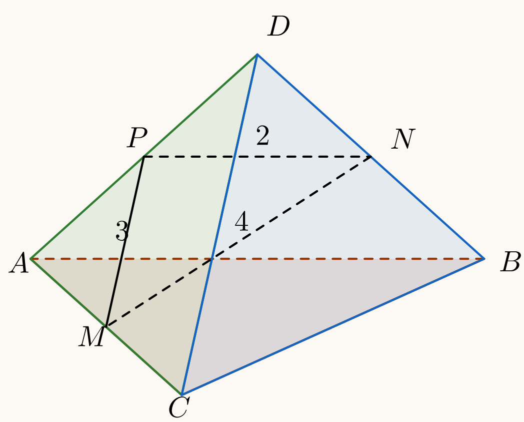
Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4, CD = 6$, M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD và $MN = 4$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Hướng dẫn

Cách 1: Dùng định nghĩa.
Gọi P là trung điểm của AD thì $NP \parallel AB$, $PM \parallel CD$. Vậy $d(AB, CD) = d(PN, PM)$.
Có $PN = \frac{1}{2}AB = 2$, $PM = \frac{1}{2}CD = 3$ (tính chất đường trung bình trong tam giác).
Áp dụng định lý hàm số cos trong ΔMNP, ta có

$$\cos\widehat{MPN} = \frac{PN^2 + PM^2 - MN^2}{2PN.PM} = -\frac{1}{4}.$$

Vậy $\cos(AB, CD) = \frac{1}{4}$.



Cách 2: Dùng vectơ.
Ta có M là trung điểm AC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$, $\forall O$.

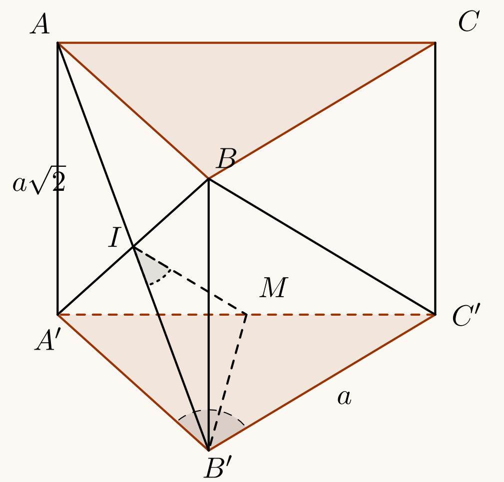
Lại có N là trung điểm BD nên $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}$, $\forall O$.
Trừ vế-vế của hai đẳng thức trên ta được $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$
$\Rightarrow 4MN^2=AB^2+CD^2+2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD} \Rightarrow 64=16+36+2.4.6.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$
$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\dfrac{1}{4}$.
Vậy $\cos(AB,CD)=\dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 1.3.17

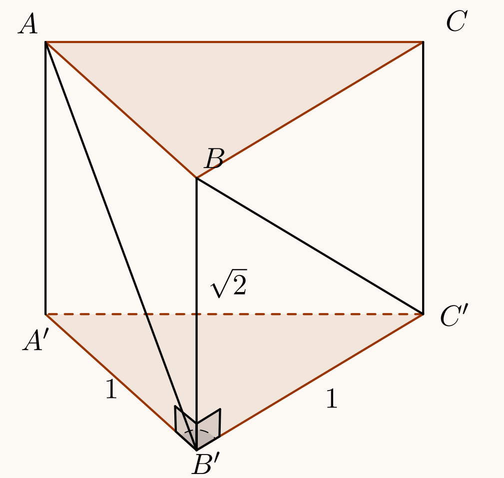
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$ và $AA'=\sqrt{2}a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC'.

Hướng dẫn

Cách 1: Dùng định nghĩa.
Gọi $I=AB'\cap A'B \Rightarrow IB=IA'; IA=IB'$.
Gọi M là trung điểm $A'C' \Rightarrow IM \parallel BC'$.
Vậy $(AB',BC')=(IB',IM)$.
Có $AB'=\sqrt{AA'^2+A'B'^2}=\sqrt{3}a$ và
$BC'=\sqrt{BB'^2+B'C'^2}=\sqrt{3}a$
do đó $IM=IB'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.
Mà $B'M=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (do $\Delta A'B'C'$ đều có cạnh bằng a) nên $\Delta IMB'$ đều cạnh $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.
Vậy $\widehat{MIB'}=60^\circ$, hay $(AB',BC')=60^\circ$.



Cách 2: Dùng vectơ.
Coi a là đơn vị đo của hình vẽ, ta chỉ làm việc với hệ số độ dài.
Có $\overrightarrow{B'A}=\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{B'C'}-\overrightarrow{B'B}$.
Nhân vế-vế của hai đẳng thức trên với lưu ý $\overrightarrow{B'A'}.\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{B'C'}.\overrightarrow{B'B}=0$, $\overrightarrow{B'A'}.\overrightarrow{B'C'}=\dfrac{1}{2}$
ta được $\overrightarrow{B'A}.\overrightarrow{BC'}=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$.
Mà $AB'=BC'=\sqrt{3}$ nên
$\cos\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{BC'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{B'A}.\overrightarrow{BC'}}{AB'.BC'}=-\dfrac{1}{2}$.
Vậy $\cos(AB',BC')=\dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow (AB',BC')=60^\circ$.

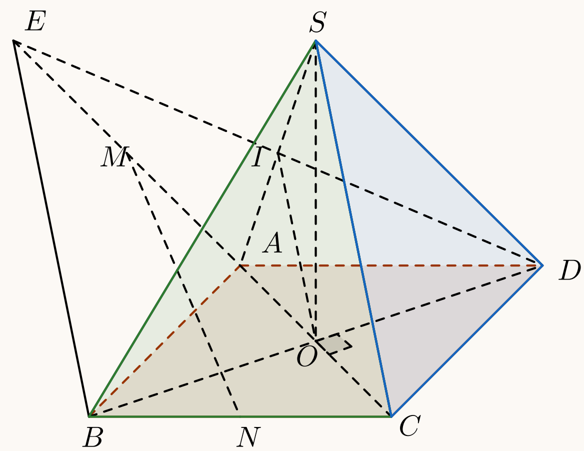


Ví dụ 1.3.18

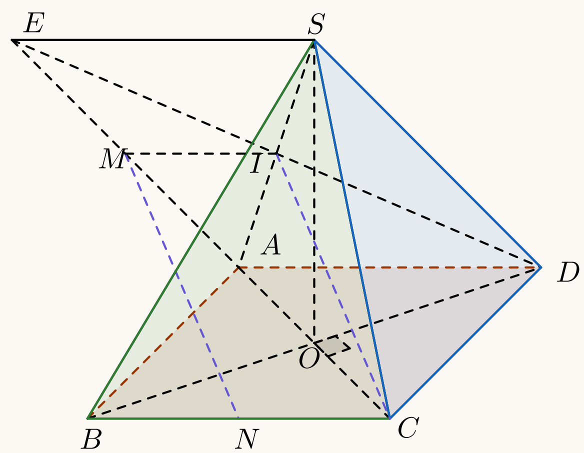
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng với D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BD.

Hướng dẫn

Cách 1: Dùng vectơ.
Gọi I là trung điểm của SA và O là tâm đáy, ta có OI là đường trung bình tam giác $DBE \Rightarrow \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{IO}$.
Có M, N là trung điểm AE, CB nên tương tự Ví dụ 1.3.16 ta có
$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{AC}$.
Vậy $\overrightarrow{BD}.2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD}.2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$.
Mặt khác, theo tính chất chóp tứ giác đều có $BD \perp (SAC) \Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{IO} = 0$.
Vậy $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{MN} = 0 \Rightarrow (MN, BD) = 90°$.



Cách 2: Dùng định nghĩa.
Gọi I là trung điểm của SA thì I cũng là trung điểm của DE nên $ADSE$ là hình bình hành, suy ra $BCSE$ cũng là hình bình hành.
Có MI là đường trung bình của tam giác $ASE \Rightarrow MI \parallel SE$ và $MI = \frac{1}{2}SE$.
Có $NC \subset BC$ và $NC = \frac{1}{2}BC$. Do đó, $MNCI$ là hình bình hành, suy ra $MN \parallel IC$. Vậy $(MN, BD) = (IC, BD)$.
Mặt khác, $BD \perp (SAC)$ và $IC \subset (SAC)$ nên $BD \perp IC$.
Vậy $(MN, BD) = 90°$.



Ta thấy rằng, cách tính góc giữa hai đường thẳng sử dụng định nghĩa luôn đi tìm những đường thẳng song song với ít nhất một trong hai đường thẳng đã cho dựa vào nguồn gốc sinh ra của nó để đưa về hai đường cắt nhau hoặc ở vị trí "thuận tiện hơn" để tính toán. Còn đối với phương pháp dùng vectơ, ưu điểm là không cần vẽ thêm đường phụ và tính toán ngắn gọn. Tuy nhiên, cách này đòi hỏi học sinh nắm chắc các biến đổi vectơ.

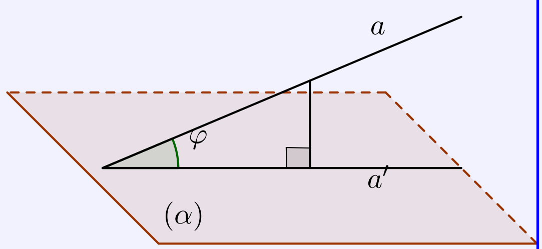
Dạng 2: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Theo định nghĩa, góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α), ký hiệu là $(a, (\alpha))$ là góc $\varphi = (a, a')$ với a' là hình chiếu của a lên (α).

LƯU Ý 4 CÁCH TÍNH SAU:

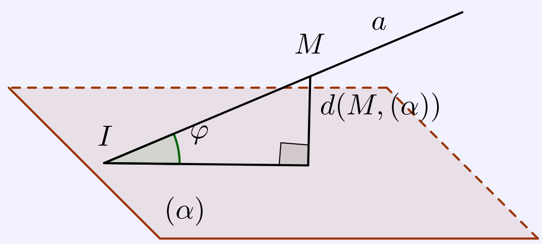
Cách1: Dựng góc theo định nghĩa

- Dựng hình chiếu a' của a lên (α).
- Tính góc giữa a và a'.



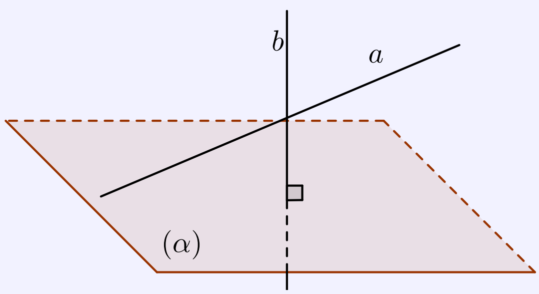
Cách 2: Chuyển thành khoảng cách

- Xác định giao điểm $I = a \cap (\alpha)$.
- Chọn điểm $M \in a$ bất kỳ.
- Khi đó $\sin\varphi = \dfrac{d(M, (\alpha))}{MI}$.



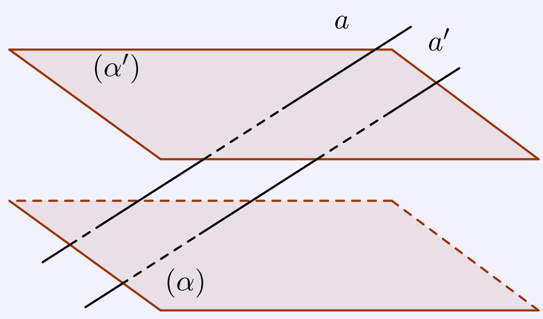
Cách 3: Tính theo phương pháp tuyến

- Xác định đường thẳng $b \perp (\alpha)$.
- Khi đó $\sin\varphi = \cos(a, b)$.



Cách 4: Dịch chuyển song song

- Xác định $(\alpha' \parallel (\alpha))$.
- Hoặc xác định $a' \parallel a$.
- Khi đó $(a, (\alpha)) = (a', (\alpha)) = (a, (\alpha')) = (a', (\alpha'))$.



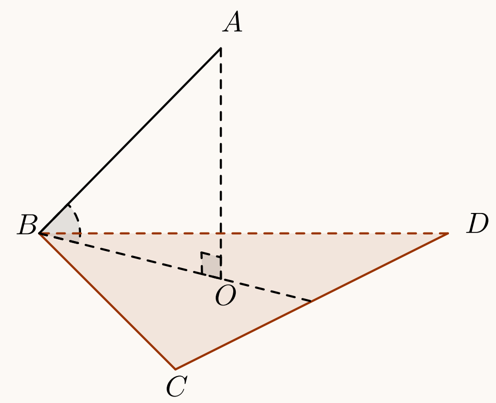
TRONG 4 CÁCH TRÊN, cách 1 sử dụng trong những trường hợp đơn giản, dễ dàng dựng được hình chiếu a' của a lên (α). Nếu dễ dàng xác định được một đường thẳng vuông góc với mp(α) thì cách 3 nên được sử dụng. Các trường hợp khó xác định hình chiếu hoặc phương vuông góc của (α), ta nên kết hợp cách 4 và cách 2 để giảm thiểu việc phải kẻ thêm các đường phụ, đồng thời dịch chuyển chúng đến các vị trí dễ tính toán hơn.

Ví dụ 1.3.19

Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD). Tính $\cos\varphi$.

Hướng dẫn

Coi cạnh tứ diện đều bằng 1. Gọi O là hình chiếu của A lên (BCD) thì O là trọng tâm của ΔBCD. Vậy $\varphi = \widehat{ABO}$.
Có $\cos\varphi = \dfrac{BO}{AB}$.
Mà theo Mục 1.2.1 có $BO = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ trong khi $AB = 1$.
Vậy $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



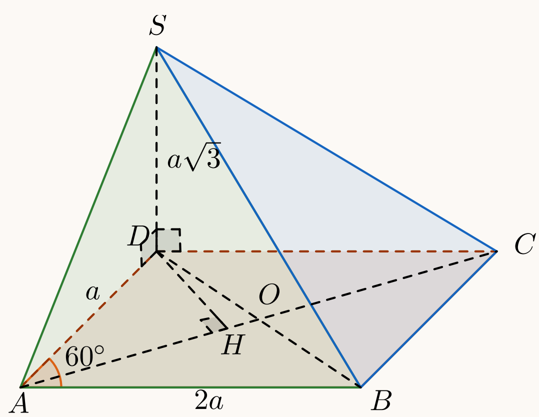
Ví dụ 1.3.20

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 2a, BC = a, \widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC).

Hướng dẫn

Có $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60^\circ$ $= a\sqrt{3} \Rightarrow SB = a\sqrt{6}$.
Kẻ $DH \perp AC$, có $AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB.AD.\cos 60^\circ = a\sqrt{7}$. Mà $2S_{ACD} = S_{ABCD} = AB.AD.\sin 60^\circ = \sqrt{3}a^2$. Do đó $DH = \dfrac{2S_{ADC}}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a$.
Gọi φ là góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) ta có $\sin\varphi = \dfrac{d(B,(SAC))}{SB}$.
Do O là trung điểm BD nên $d(B,(SAC)) = d(D,(SAC))$.
Mặt khác, $\dfrac{1}{d^2(D,(SAC))} = \dfrac{1}{DS^2} + \dfrac{1}{DH^2}$
$\Rightarrow d(D,(SAC)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{d(D,(SAC))}{SB} = \dfrac{1}{4}$.



Ví dụ 1.3.21

Cho hình chóp $S.ABCS$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

Hướng dẫn

Gọi $\varphi = (SB, (SAC))$, theo Cách 2 dạng 2 có

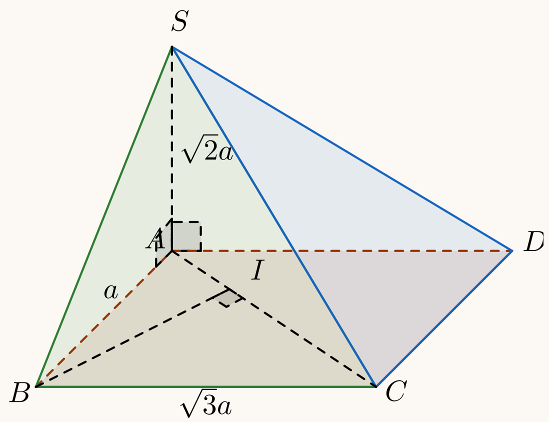
$$\sin\varphi = \frac{d(B,(SAC))}{SB}.$$

Kẻ $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp (SAC)$ (vì $(SAC) \perp (ABCD)$), vậy

$d(B,(SAC)) = BI = \dfrac{BA.BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a.$

Dễ thấy $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{3}a.$

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{BI}{SB} = \dfrac{1}{2}$, hay $\varphi = 30°$.



Ví dụ 1.3.22

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'D', C'D'$. Tính góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN).

Hướng dẫn

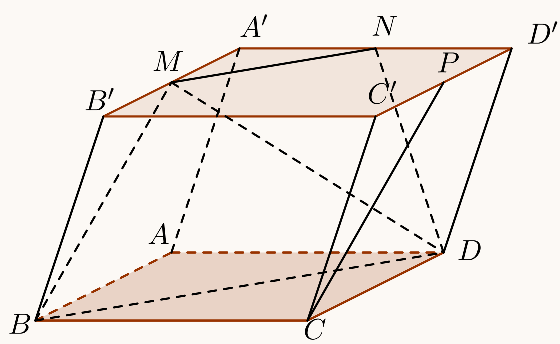
Có $MP \parallel B'C'$ và $MP = B'C'$ nên $MP \parallel BC$ và $MP = BC$. Do đó $BCPM$ là hình bình hành $\Rightarrow CP \parallel BM$.

Mà $MN \parallel BD$ nên $BM \subset (MND)$.

Vậy

$$CP \parallel (MND) \Rightarrow (CP, (MND)) = 0°.$$

Chú ý: Bài này ta đã chuyển CP về đường thẳng song song với nó mà ban đầu có một điểm chung với mặt phẳng (MND).



Ví dụ 1.3.23

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SAC) biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

Hướng dẫn

Cách 1:

Từ giả thiết có $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a. Vì vậy $DC \perp AC$ do đó $DC \perp (SAC)$.

Gọi $\varphi = (MN, (SAC))$

$\Rightarrow \sin\varphi = \cos(MN, CD)$.

Gọi P là trung điểm AB, theo Ví dụ 1.3.16 có $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{SD}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{PN}\right)$.

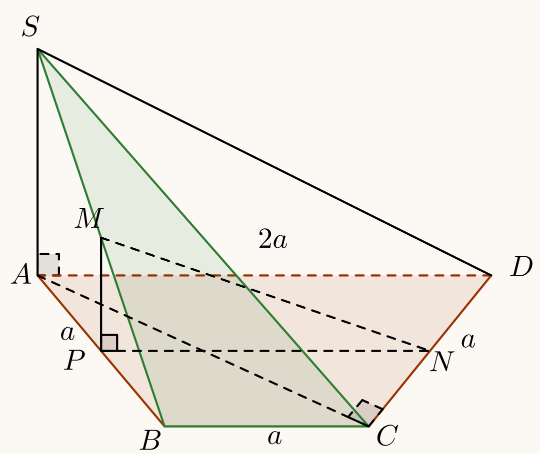
Do $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{SA} = 0$ nên $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{PN} = a.\dfrac{3}{2}a.\cos 60^\circ = \dfrac{3}{4}a^2$.

Vì $V_{SABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3 \Rightarrow SA = \dfrac{3V}{S_{ABCD}} = a$.

Có $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$.

Vậy $\cos(CD, MN) = \dfrac{\left|\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MN}\right|}{CD.MN} = \dfrac{3\sqrt{10}}{20}$

$\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{3\sqrt{10}}{20}$. Do đó $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{310}}{20}$.



Cách 2:

Tương tự cách 1 tính được $MN = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$.

Gọi Q là trung điểm của BC thì $(MPQ) \parallel (SAC)$ do đó

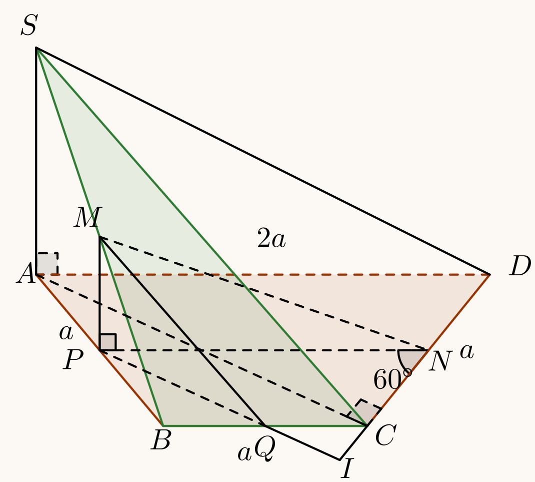
$(MN, (SAC)) = (MN, (MPQ)) = \varphi$.

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{d(N, (MPQ))}{MN}$.

Gọi $I = PQ \cap CD$ ta có

$d(N, (MPQ)) = NI = NP\cos 60^\circ = \dfrac{3}{4}a$.

Do đó $\sin\varphi = \dfrac{3\sqrt{10}}{20}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{310}}{20}$.



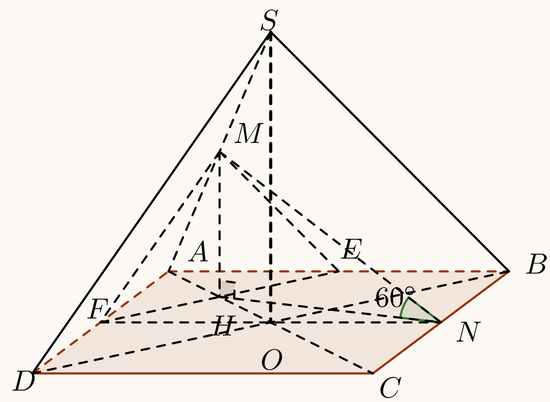
Ví dụ 1.3.24

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).

Hướng dẫn

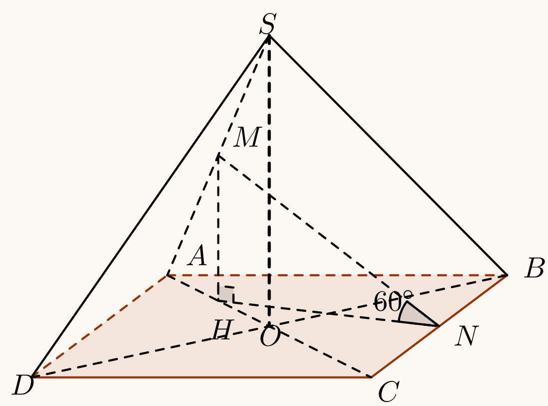
Cách 1:
Hạ $MH \perp (ABCD)$ thì H là trung điểm của AO. Khi đó $\widehat{MNH} = 60°$ là góc giữa MN và $(ABCD)$. Gọi F là trung điểm của AD $\Rightarrow (MHF) \parallel (SBD)$ nên
$(MN, (SBD)) = (MN, (MHF)) = \varphi$.
Do đó $\sin\varphi = \dfrac{d(N,(MHF))}{MN}$.
Trong ΔCNH có: $HN^2 = CN^2 + CH^2 - 2CN.CH.\cos 45° = \dfrac{10}{16}a \Rightarrow HN = \dfrac{\sqrt{10}}{4}a$
$\Rightarrow MN = HN/\cos 60° = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$.
Có $d(N,(MHF)) = 2d(O,(MHF)) = 2OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{d(N,(MHF))}{MN} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Suy ra $\cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



Cách 2:
Gọi H là hình chiếu của M lên $(ABCD)$ thì H là trung điểm của AO. Tương tự cách 1, tính được $MN = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$.
Có $AC \perp (SBD)$ nên $\sin\varphi = \cos(MN, AC)$.
Có M, N là trung điểm SA, BC nên tương tự Ví dụ 1.3.16 ta có $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{SB}\right)$.
Vậy $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}AC^2 + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{SB} = a^2$ (do $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{SB} = 0$ vì $AC \perp SB$).
Do đó $\cos(AC, MN) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MN}\right|}{AC.MN}$
$$= \frac{a^2}{a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{10}}{2}a} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $\cos(AC, MN) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

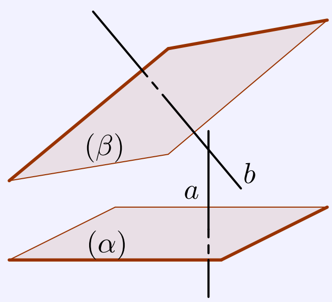


Dạng 3: Góc giữa hai mặt phẳng

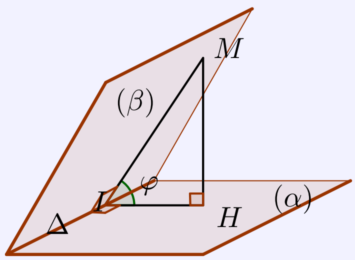
Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β), ký hiệu là $\varphi = ((\alpha), (\beta))$.

Cách 1: Theo định nghĩa
Nếu có $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\beta)$ thì

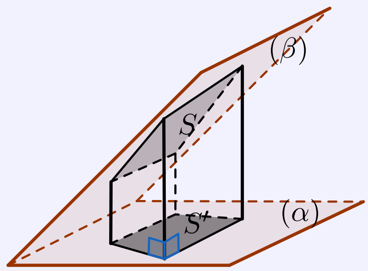
$$\varphi = (a, b).$$



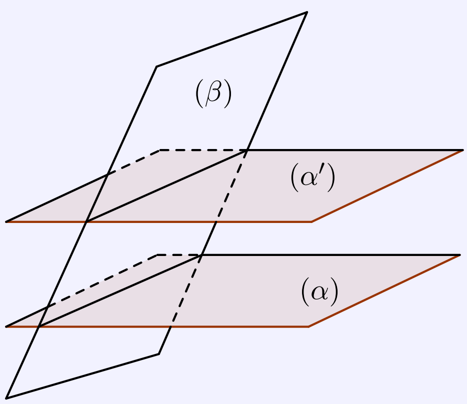
Cách 2: Quy về khoảng cách
• Goi $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.
• Lấy $M \in (\beta)$ bất kỳ.
• Khi đó $\sin\varphi = \dfrac{d(M, (\alpha))}{d(M, \Delta)}$.



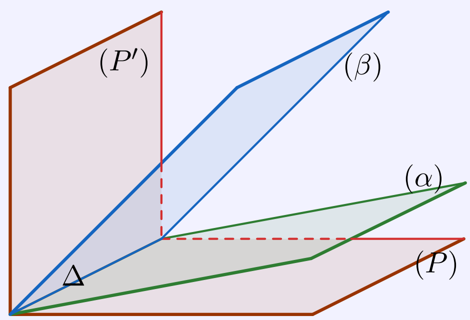
Cách 3: Diện tích hình chiếu.
• Lấy một đa giác trên (β) có diện tích S.
• Chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α) được đa giác có diện tích S'.
• Khi đó $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S}$.



Cách 4: Dịch chuyển song song
• Xác định mặt phẳng $(\alpha') \parallel (\alpha)$.
• Khi đó $((\alpha), (\beta)) = ((\alpha'), (\beta))$.



Cách 5: Sử dụng mặt phẳng thứ 3
• Nếu có mặt phẳng (P) qua giao tuyến Δ của (α) và (β). Xét mp(P') qua Δ và vuông góc với (P) chia không gian thành 4 phần.



Gọi $\varphi_1 = ((\alpha), (P))$, $\varphi_2 = ((\beta), (P))$. Khi đó:

$$\cos\varphi = \begin{cases} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & \text{nếu } (\alpha), (\beta) \text{ nằm cùng góc phần tư không gian tạo bởi } (P).(P'). \\ |\cos(\varphi_1 + \varphi_2)| & \text{nếu } (\alpha), (\beta) \text{ nằm khác góc phần tư không gian tạo bởi } (P).(P'). \end{cases}$$

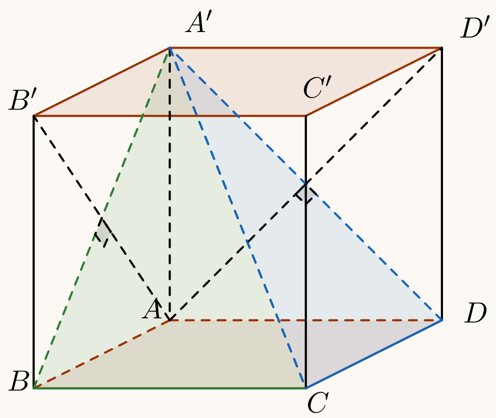
• Nếu $(P), (\alpha), (\beta)$ đôi một cắt nhau theo 3 giao tuyến đồng quy tại S, ta có thể sử dụng **công thức góc nhị diện** trong (1.6).

Ví dụ 1.3.25

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính số đo của góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và (DAC).

Hướng dẫn

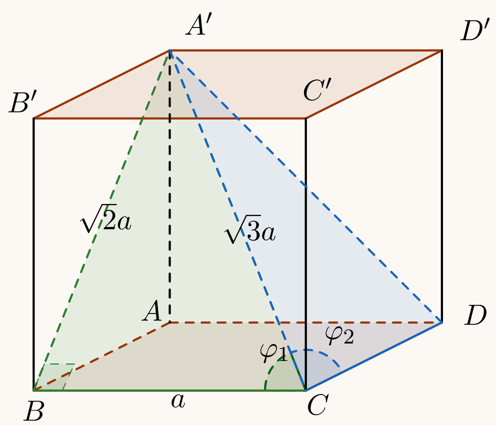
Cách 1:Theo định nghĩa.
Ta thấy $AB' \perp (BA'C)$ (do $AB' \perp A'B$ và $AB' \perp BC$). Lưu ý, $CB \perp (AA'B'B)$.
Tương tự $AD' \perp (DA'C)$. Do đó $((BA'C),(DA'C)) = (AB', AD')$.
Mà $\Delta AB'D'$ đều (do 3 cạnh bằng $\sqrt{2}a$) nên $(AB', AD') = 60^\circ$.
Vậy $((BA'C),(DA'C)) = 60^\circ$.



Cách 2: Dùng góc nhị diện.
Tham khảo hình vẽ có

$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Xét góc tam diện $C.BDA'$ có φ_1, φ_2 và có thêm $\widehat{BCD} = 90^\circ$.
Áp dụng công thức (1.6) có góc nhị diện $\cos[B, A'C, D] = \dfrac{\cos 90^\circ - \cos\varphi_1 . \cos\varphi_2}{\sin\varphi_1 . \sin\varphi_2}$
$= -\dfrac{1}{2} \Rightarrow [B, A'C, D] = 120^\circ$.
Vậy $((BA'C),(DA'C)) = 60^\circ$.



Cách 3 (Dùng khoảng cách): Gọi $\varphi = ((BA'C),(DA'C)) \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{d(B,(A'DC))}{d(B,A'C)}$.

Tam giác $A'BC$ vuông tại B nên $d(B, A'C) = \dfrac{BC.BA'}{A'C} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Do $AB \parallel (A'CD)$ nên $d(B,(A'CD)) = d(A,(A'CD))$.
Có A là chân đường cao hạ từ A' của chóp $A'.ACD$ lên đáy (ACD) và $AD \perp CD$ nên

$$\frac{1}{d^2A,(A'CD)} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow d(A,(A'CD)) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{d(A,(A'DC))}{d(B,A'C)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Ví dụ 1.3.26

Cho lăng trụ tam giác đều có đáy ABC cạnh a. Trên các cạnh bên lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt cách đáy một khoảng bằng $\frac{a}{2}, a, \frac{3a}{2}$. Tính $\cos((A_1B_1C_1),(ABC))$.

Hướng dẫn

Xét hình thang vuông AA_1B_1B kẻ đường cao A_1H ta có $A_1B_1 = \sqrt{A_1H^2 + HB_1^2}$ $= \sqrt{AB^2 + (BB_1 - AA_1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Tương tự

$B_1C_1 = \sqrt{BC^2 + (BB_1 - CC_1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

$A_1C_1 = \sqrt{AC^2 + (AA_1 - CC_1)^2} = \sqrt{2}a$.

Đặt $p = \frac{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1}{2}$, ta có

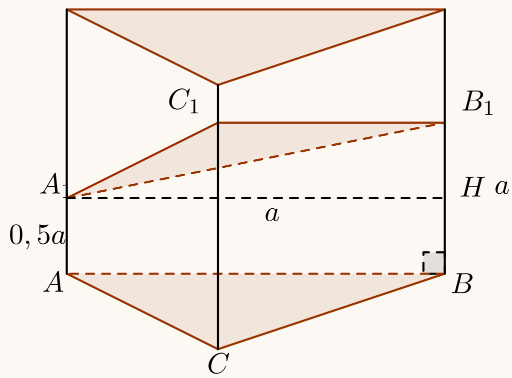
$S_{A_1B_1C_1} = S$

$= \sqrt{p(p - a\sqrt{2})\left(p - \frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a^2$.

Mặt khác, $S_{ABC} = S' = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Mà ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta A_1B_1C_1$ lên mp(ABC).

Vậy $\cos((A_1B_1C_1),(ABC)) = \frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Ví dụ 1.3.27

Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a, SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc $((SAB),(SAD))$.

Hướng dẫn

Có $OA^2 = AB^2 - OB^2 = a^2 - BO^2$.

$SO^2 = SB^2 - BO^2 = a^2 - BO^2$.

Vậy $OA = OS = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

và $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}a$.

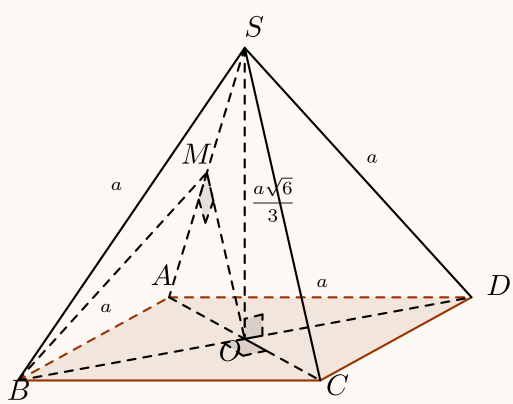
Kẻ $OM \perp SA \Rightarrow OM = \frac{SO}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}a$

(do ΔSOA vuông cân tại O).

Do đó $MO = OB = OD \Rightarrow \widehat{BMD} = 90°$.

Mà $SA \perp (BMD)$ nên

$((SAB),(SAD)) = \widehat{BMD} = 90°$.



Ví dụ 1.3.28

Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = 3$. Hai tam giác ACD, BCD có diện tích lần lượt là 15 và 10. Biết thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 20. Tính cotan của góc giữa hai mặt phẳng(ACD) và (BCD).

Hướng dẫn

Gọi $\varphi = ((ACD), (BCD))$. Áp dụng công thức (1.5) ta có

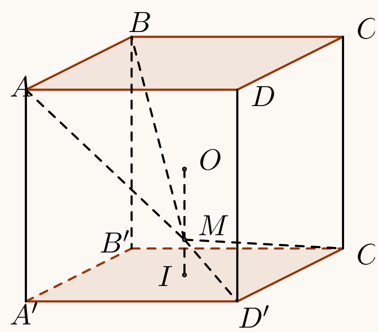
$$\sin\varphi = \frac{3V_{ABCD}.CD}{2S_{ACD}.S_{BCD}} = \frac{3}{5}.$$

Vậy $\cot^2\varphi = \dfrac{1}{\sin^2\varphi} - 1 = \dfrac{16}{9} \Rightarrow \cot\varphi = \dfrac{4}{3}$.

Ví dụ 1.3.29: Đề thi THPTQG 2018

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.



Hướng dẫn

Cách 1: Dùng mặt phẳng thứ 3

Lấy N đối xứng với M qua O thì $(MAB) \parallel (NC'D')$ theo phép đối xứng tâm O. Vậy $((MAB), (MC'D')) = ((NC'D'), (MC'D')) = \varphi$.

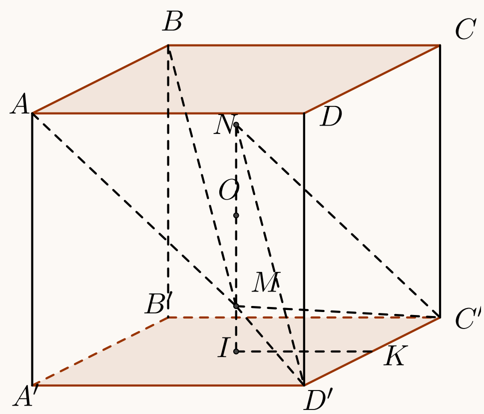
Gọi φ_1, φ_2 lần lượt là góc giữa $(NC'D')$ và $(MC'D')$ với $(A'B'C'D')$ thì $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Gọi K là trung điểm của $C'D'$ ta có

$\tan\varphi_1 = \dfrac{IN}{IK} = \dfrac{5}{3}$; $\tan\varphi_2 = \dfrac{IM}{IK} = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\tan\varphi = \dfrac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{1 + \tan\varphi_1 . \tan\varphi_2} = \dfrac{6}{7}$.

Do đó $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\varphi}} = \dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.



Cách 2: Dựng góc

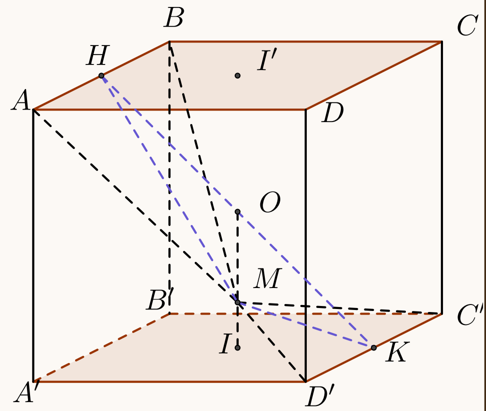
Coi cạnh hình vuông bằng 1. Gọi d là giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ thì d qua M và song song với $AB, C'D'$.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $AB, C'D'$ thì $MH, MK \perp AB, C'D'$ do đó $MH, MK \perp d$ (tham khảo hình bên).

Vậy $((MAB),(MC'D')) = (MH, MK)$.

Có $MH = \sqrt{MI'^2 + I'H^2} = \dfrac{\sqrt{34}}{6}$.

Có $MK = \sqrt{MI^2 + IK^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{6}$.



Dễ thấy $HK = \sqrt{2}$. Áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔMHK có

$\cos\widehat{HMK} = \dfrac{MH^2 + MK^2 - HK^2}{2.MH.MK} = -\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. Vậy $\cos((MAB),(MC'D')) = \dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.

Ví dụ 1.3.30

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn BG (với G là trong tâm tam giác ABC). Tính $\cos\varphi$ với $\varphi = ((ABC),(ABB'A'))$.

Hướng dẫn

Lưu ý mặt phẳng $(ABB'A') \equiv (A'AB)$.

Gọi I, M, H, N lần lượt là trung điểm của AC, AB, BG, BM thì $\varphi = \widehat{SNH}$ theo góc cơ bản giữa mặt bên và đáy mục 1.2.1.

Có $NH = \dfrac{1}{2}GM = \dfrac{1}{6}CM = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a$.

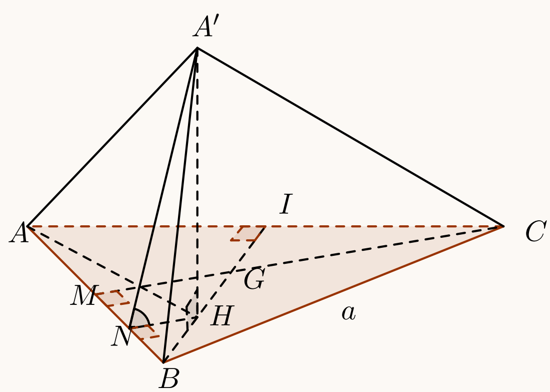
$AH^2 = AI^2 + IH^2 = \dfrac{1}{4}AC^2 + \dfrac{4}{9}BI^2 = \dfrac{7a^2}{12}$.

Vậy $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \dfrac{41}{12}a$.

Suy ra $A'N = \sqrt{SH^2 + HN^2} = \dfrac{\sqrt{55}}{4}$.

Do đó $\cos\varphi = \dfrac{HN}{A'N} = \dfrac{1}{\sqrt{165}}$.

Ở đây chú ý $CM = BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

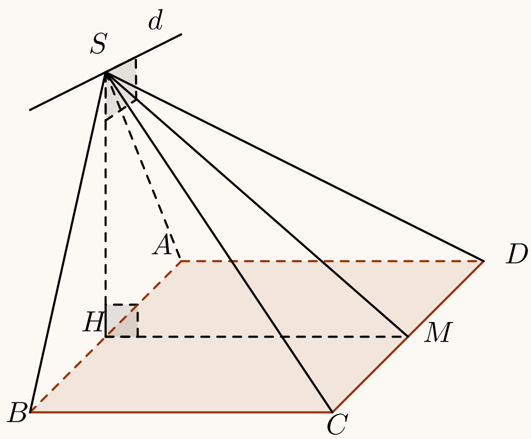


Ví dụ 1.3.31

Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Tính $\tan\varphi$.

Hướng dẫn

Gọi $d = (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow d \parallel AB \parallel CD$ và $S \in d$. Gọi M là trung điểm của CD $\Rightarrow M \in (SCD)$. Do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên kẻ $MH \perp AB$ thì $MH \perp (SAB)$ (khi đó H là trung điểm của AB). Do $d \parallel AB$ và $SH \perp AB \Rightarrow HS \perp d$.
Vậy $\widehat{HSM}$ là góc giữa (SAB) và (SCD).
Có $\tan \widehat{HSD} = \dfrac{HM}{SH} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $\tan \varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

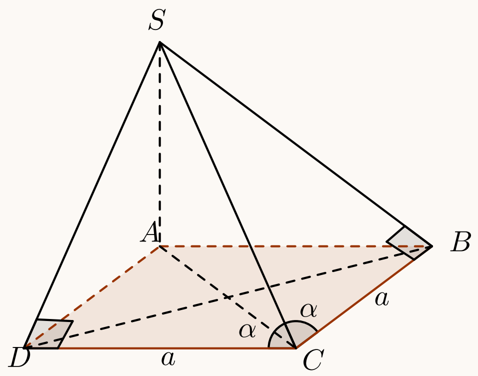


Ví dụ 1.3.32

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông với đáy. Tính độ dài cạnh SA để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) bằng 60°.

Hướng dẫn

Cách 1: Dùng góc nhị diện
Gọi $\alpha = \widehat{SCD} = \widehat{SCB}$ và φ là góc nhị diện $[D, SC, B]$. Áp dụng công thức (1.6) ta có
$\cos \varphi = \dfrac{\cos 90^\circ - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\cot^2 \alpha < 0$.
Vậy $\varphi > 90^\circ$. Do đó
$((SBC), (SCD)) = 60^\circ \Leftrightarrow \varphi = 120^\circ$.
Từ $\cos \varphi = -\cot^2 \alpha \Leftrightarrow \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow SD = \sqrt{2}DC = \sqrt{2}a$.
Vậy $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a$.



Cách 2: Dùng khoảng cách. Đặt $SA = h \Rightarrow SC = \sqrt{h^2 + 2a^2}$ và $SB = SD = \sqrt{h^2 + a^2}$.
Gọi $\varphi = ((SCD), (SCB)) \Rightarrow \sin \varphi = \dfrac{d(D, (SCB))}{d(D, SC)}$. Có ΔSDC vuông tại D nên
$d(D, SC) = \dfrac{DS.DC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{h^2 + a^2}}{\sqrt{h^2 + 2a^2}}$. Lại có $d(D, (SCB)) = d(A, (SCB)) = d(A, SB)$ (do $AD \parallel CB$ và $AB \perp CB$). Do đó $d(D, (SCB)) = \dfrac{AS.AB}{SB} = \dfrac{ah}{\sqrt{h^2 + a^2}}$.
Vậy $\varphi = 60^\circ \Leftrightarrow \dfrac{d(D, (SCB))}{d(D, SC)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2.\dfrac{ah}{\sqrt{h^2 + a^2}} = \sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{h^2 + a^2}}{\sqrt{h^2 + 2a^2}} \Leftrightarrow h = a$.

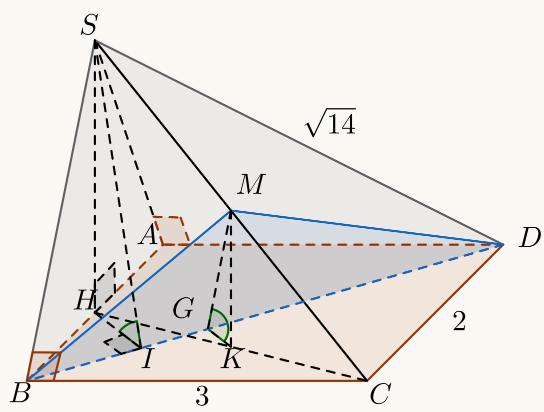
Ví dụ 1.3.33

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Biết $AB = 2$, $AD = 3$, $SD = \sqrt{14}$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với dấy. Gọi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (MBD).

Hướng dẫn

Cách 1: Dùng khoảng cách

Gọi H là trung điểm AB thì $SH \perp (ABCD)$.
Hơn nữa, $SH^2 = SD^2 - DH^2$
$= SD^2 - DA^2 - AH^2 = 4 \Rightarrow SH = 2$.
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (MBD) ta có $\sin\varphi = \dfrac{d(M,(SBD))}{d(M,BD)}$.
Áp dụng quy tắc chuyển khoảng cách có
$d(M,(SBD)) = \dfrac{1}{2}d(C,(SDB))$
$= \dfrac{1}{2}d(A,(SBD)) = d(H,(SBD))$.
Kẻ $HI \perp BD \Rightarrow HI = \dfrac{1}{2}d(A,BD) = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.



Có $\dfrac{1}{d^2(H,(SBD))} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow d(H,(SBD)) = \dfrac{6}{\sqrt{61}}$. Vậy $d(M,(SBD)) = \dfrac{6}{\sqrt{61}}$.

Do $SA = SB \Rightarrow SC = SD$, do đó $SC = \sqrt{14}$. Có ΔSBC vuông nên $BM = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Có $DM^2 = \dfrac{DS^2 + DC^2}{2} - \dfrac{SC^2}{4} = \dfrac{11}{2} \Rightarrow DM = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$ và $BD = \sqrt{CB^2 + CD^2} = \sqrt{13}$.

Trong ΔMBD có $d(M,BD) = \dfrac{2S_{MBD}}{BD} = \dfrac{2\sqrt{p(p-BM)(p-MD)(p-BD)}}{BD} = \dfrac{\sqrt{793}}{26}$,

với $p = \dfrac{BM + MD + DB}{2}$. Vậy $\sin\varphi = \dfrac{d(M,(SBD))}{d(M,BD)} = \dfrac{12\sqrt{13}}{61} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{43}{61}$.

Cách 2: Dùng mặt phẳng thứ 3

Gọi K là hình chiếu của M lên $ABCD$ thì K là trung điểm HC. Gọi $G = HC \cap BD$ thì $GH = 2GK$ (học sinh tự chứng minh). Gọi φ_1, φ_2 lần lượt là góc giữa $(SBD), (MBD)$ với $(ABCD)$ ta có $\tan\varphi_1 = \dfrac{SH}{HI}$, $\tan\varphi_2 = \dfrac{MK}{d(K,BD)}$.

Do $GH = 2GK \Rightarrow HI = 2d(K,BD)$, mà $SH = 2MK$ vì vậy $\tan\varphi_2 = \tan\varphi_1 = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$

(HI, SH được tính như trên). Suy ra $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \dfrac{3}{\sqrt{61}}$.

Theo Cách 5 trong lý thuyết có $\cos\varphi = |\cos(\varphi_1 + \varphi_2)| = |\cos 2\varphi_1| = \left|2\cos^2\varphi_1 - 1\right| = \dfrac{43}{61}$.

Ví dụ 1.3.34

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính $\tan\varphi$ với φ là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC).

Hướng dẫn

Cách 1: Dùng khoảng cách.

Gọi E là điểm sao cho $ACBE$ là hình bình hành.

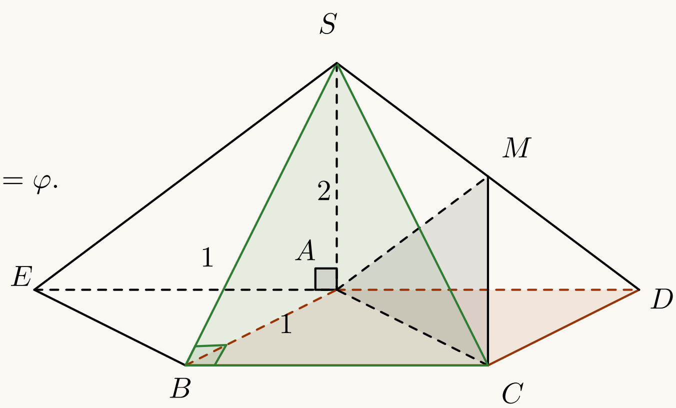
Dễ thấy $(SBE) \parallel (MCA)$, do đó

$$((SBC),(MAC)) = ((SBC),(SBE)) = \varphi.$$

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{d(C,(SBE))}{d(C,SB)}$.

Ta có $CA \parallel (SBE)$ nên $d(C,(SBE)) = d(A,(SBE))$.

Mà $A.SBE$ là góc tam diện vuông nên theo công thức khoảng cách có



$$\frac{1}{d^2(A,(SBE))} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow d(A,(SBE)) = \frac{2}{3}.$$

Mà $CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp SB \Rightarrow d(C,SB) = CB = 1$. Vậy $\sin\varphi = \dfrac{d(C,(SBE))}{d(C,SB)} = \dfrac{2}{3}$.

Lại có $\cot^2\varphi = \dfrac{1}{\sin^2\varphi} - 1 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Cách 2: Dùng góc nhị diện. Gọi O là tâm đáy và I là trung điểm CD thì $(MOI) \parallel (SBC)$ nên $((MAC),(SBC)) = ((MAC),(MOI)) = \varphi$.

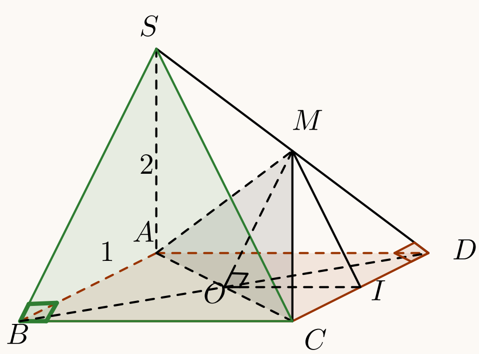
Xét góc tam diện $O.MCI$ có $\widehat{MOI} = 90^\circ$, $\widehat{COI} = 45^\circ$. Ta chỉ còn tính $\widehat{MOC}$.

Có $\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -1$.

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{AC}}{BS.AC} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Mà $BS \parallel OM$ nên $\cos\widehat{MOC} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

và $\sin\widehat{MOC} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.



Áp dụng công thức (1.6): $\cos\varphi = \left|\dfrac{\cos 45^\circ - \cos 90^\circ.\cos\widehat{MOC}}{\sin 90^\circ.\sin\widehat{MOC}}\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

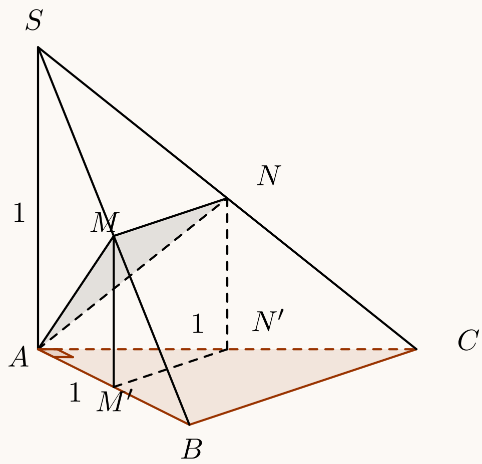
Ví dụ 1.3.35

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân đỉnh A và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính $\cos\varphi$ với φ là góc giữa (AMN) và (ABC).

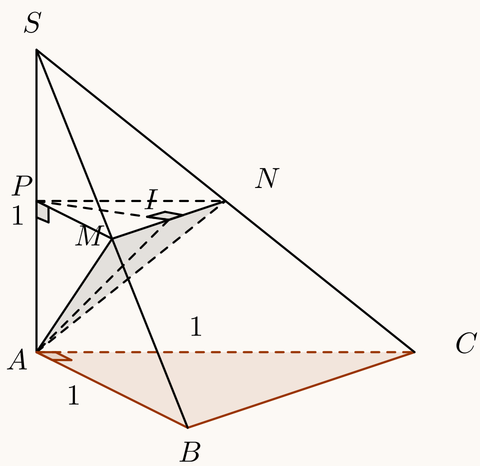
Hướng dẫn

Cách 1: Dùng công thức hình chiếu.
Coi a là đơn vị độ dài. Có $BC = \sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = 1$. Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu của M, N lên ABC thì M', N' là trung điểm của AB, AC.
Vậy $S_{AM'N'} = \dfrac{1}{4} S_{ABC} = \dfrac{1}{8}$.
Dễ thấy ΔAMN là tam giác đều cạnh $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $S_{AMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.
Do $AM'N'$ là hình chiếu của AMN lên (ABC) nên $\cos\varphi = \dfrac{S_{AM'N'}}{S_{AMN}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



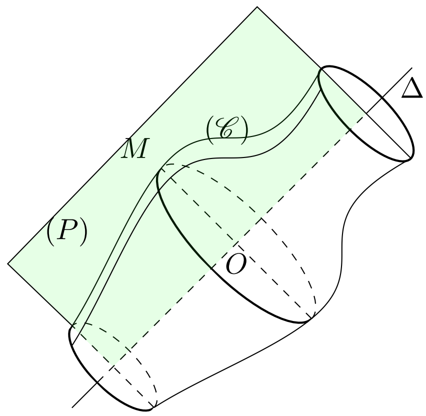
Cách 2: Dựng góc chiếu hai lần.
Gọi P là trung điểm của SA thì $(PMN) \parallel (ABC)$ nên $\varphi = ((PNM), (AMN))$.
Có P là hình chiếu của A lên (PNM). Từ P chiếu $PI \perp MN$ thì I là trung điểm của MN. Khi đó, $\varphi = \widehat{AIP}$.
Có $AP = \dfrac{1}{2}$, tam giác PMN vuông tại P nên $PI = \dfrac{1}{2} MN = \dfrac{1}{4} BC = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Vậy $\tan\varphi = \dfrac{AP}{PI} = \sqrt{2}$.
Do đó $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan^2\varphi}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



1.3.4 Bài tập áp dụng

Chương 2
Khối tròn xoay

Trong không gian cho mặt phẳng (P) chưa đường thẳng Δ và đường cong $(\mathscr{C})$. Khi quay (P) quanh Δ một góc $360°$ thì mỗi điểm $M \in (\mathscr{C})$ tạo thành đường tròn tâm $O \in \Delta$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với Δ. Như vậy, khi đó đường cong $(\mathscr{C})$ sẽ tạo nên một bề mặt được gọi là *mặt tròn xoay*. Phần không gian giới hạn bởi mặt tròn xoay và hai mặt phẳng vuông góc với Δ được gọi là *khối tròn xoay* (Hình 2.1).
Đường cong $(\mathscr{C})$ được gọi là *đường sinh* của mặt tròn xoay đó và Δ được gọi là *trục* của mặt tròn xoay (cũng như khối tròn xoay).



Hình 2.1: Cách hình thành khối tròn xoay

Xung quanh chúng ta luôn có rất nhiều những đồ vật, vật dụng là các khối tròn xoay như cốc uống nước, bình gốm sứ, các chi tiết máy, chiếc nón lá Việt Nam, ... Nhờ vào cách hình thành khối tròn xoay như trên, để tạo ra những vật dụng này, nhà sản xuất phải nhờ vào những bàn xoay hoặc trục quay của máy tiện mới có thể sản xuất ra chúng đảm bảo độ chính xác, cân đối.

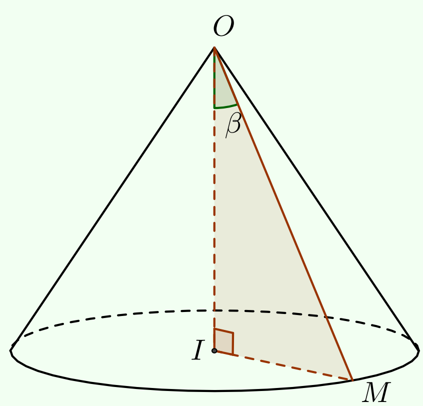
2.1 Khối nón và khối trụ

2.1.1 Định nghĩa và một số thiết diện cơ bản

Định nghĩa 2.1.1: Mặt nón, hình nón và khối nón

• Trong không gian cho mặt phẳng (P) chứa hai đường d và Δ cắt nhau tại O. Quay (P) quanh Δ thì đường sinh d tạo thành một mặt tròn xoay được gọi là *mặt nón đỉnh O*.

• Cho tam giác OIM vuông tại I. Quay tam giác quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình được gọi là *hình nón tròn xoay* (Hình bên).
• Khối tròn xoay tương ứng được gọi là *Khối nón*.
Khi đó, hình tròn (I, IM) gọi là đáy; OI gọi là đường cao; OM là đường sinh. Độ dài OI là chiều cao; độ dài OM là dộ dài đường sinh. O gọi là đỉnh và mặt tròn xoay sinh bởi OM gọi là mặt xung quanh. Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.



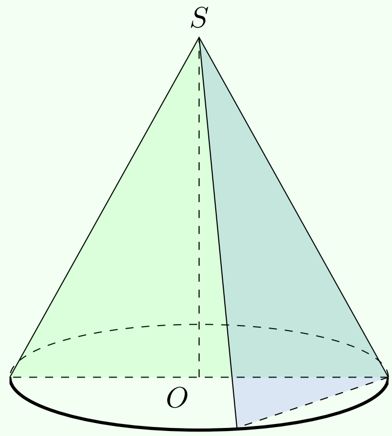
Định lý 2.1.1: Thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng

Xét mặt phẳng (P) cắt hình nón hoặc mặt nón đỉnh S thì các trường hợp sau có thể xảy ra.

Tình huống 1: (P) đi qua đỉnh của hình nón:

• Nếu (P) chứa trục của hình nón thì thiết diện là tam giác cân có đỉnh là đỉnh của hình nón, cạnh đáy là đường kính đáy của hình nón.

• Nếu (P) qua đỉnh nhưng không chứa trục của hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện thì thiết diện là một tam giác cân có đỉnh là đỉnh của hình nón và cạnh đáy là một dây cung của đáy của hình nón. Khi đó, thiết diện này có thể coi như mặt bên của một hình chóp đỉnh S và đường cao SO (O là tâm đáy).



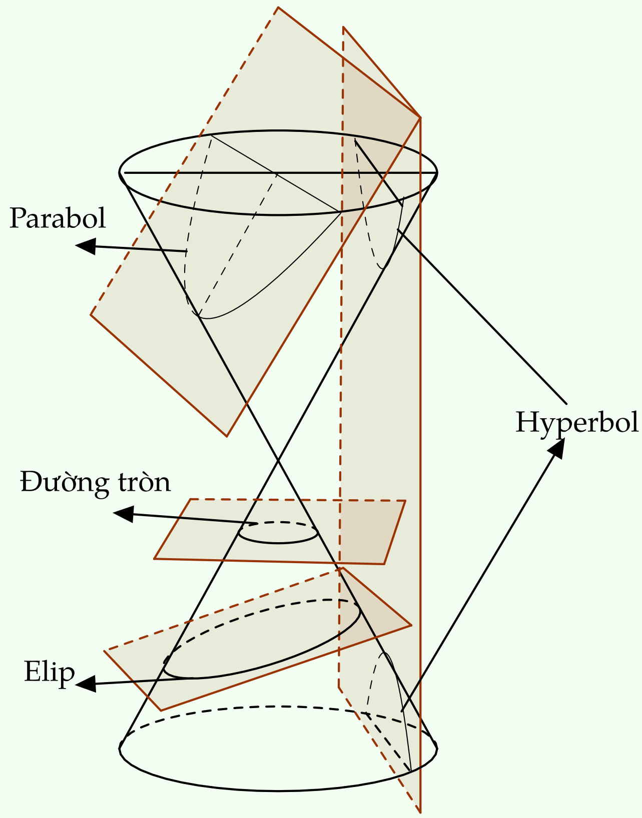
Tình huống 2: (P) không đi qua đỉnh và giao với mặt nón:

• Nếu (P) vuông góc với trục của mặt nón thì thiết diện là đường tròn.

• Nếu (P) không vuông góc với trục và chỉ cắt một phần của mặt nón kép thì thiết diện là Elip hoặc Parabol. Cụ thể, thiết diện là Parabol khi (P) song song với đường sinh và Elip trong trường hợp còn lại.

• Nếu (P) cắt cả hai phần của mặt nón kép thì thiết diện là Hyperbol. Chi tiết xem hình bên.

Chứng minh của định lý tham khảo tại [5]. Tình huống này cung cấp cho học sinh và giáo viên cái nhìn về tính chất rất thú vị của mặt nón cũng như sự tồn tại các đường conic trong tự nhiên.

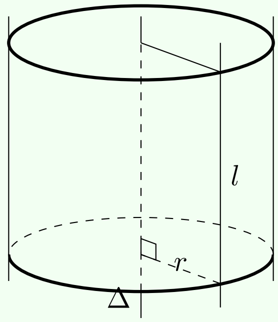


Tương tự với mặt nón và khối nón, mặt trụ tròn xoay cũng như hình trụ (hay khối trụ) được định nghĩa dưới đây cùng với một số thiết diện của nó.

Định nghĩa 2.1.2: Mặt trụ tròn xoay, hình trụ và khối trụ

Mặt trụ tròn xoay:

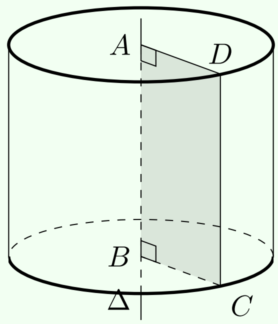
• Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng song song Δ và l cách nhau một khoảng r. Khi quay mặt phẳng (P) quanh Δ thì đường l tạo ra một mặt tròn xoay được gọi là *mặt trụ tròn xoay* hay gọi tắt là mặt trụ. Đường Δ gọi là trục của mặt trụ và l là *đường sinh*.



Hình trụ và khối trụ:

• Xét hình chữ nhật $ABCD$, quay hình chữ nhật quanh một cạnh AB của nó thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành một hình được gọi là *hình trụ tròn xoay* hay gọi tắt là hình trụ. Miền không gian giới hạn bởi hình trụ được gọi là *khối trụ*.

• Khi quanh quanh AB, hai hình tròn được vạch ra bởi AD và BC được gọi là *hai đáy* của hình trụ trong khi CD được gọi là *đường sinh*. Phần mặt tròn xoay sinh bởi CD được gọi là *mặt xung quanh*.



Khoảng cách giữa hai đáy gọi là *chiều cao của hình trụ*. Trong hình trụ, độ dài đường sinh cũng bằng chiều cao.

Định lý 2.1.2: Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng

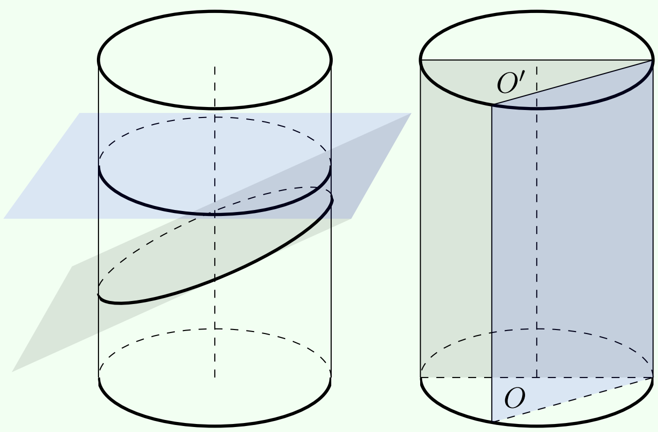
Xét mặt phẳng (P) và hình trụ thì thiết diện của hình trụ cắt bởi (P) có thể xảy ra những trường hợp sau:

• Nếu (P) vuông góc với trục thì thiết diện là đường tròn.

• Nếu (P) nghiêng với trục một góc α, $(0° < \alpha < 90°)$ thì thiết diện là một Elip.

• Nếu (P) chứa trục thì thiết diện là hình chữ nhật có một cạnh là đường kính đáy và một cạnh là đường sinh.

• Nếu (P) song song với trục thì thiết diện là hình chữ nhật có một cạnh là dây cung của đáy và một cạnh là đường sinh.

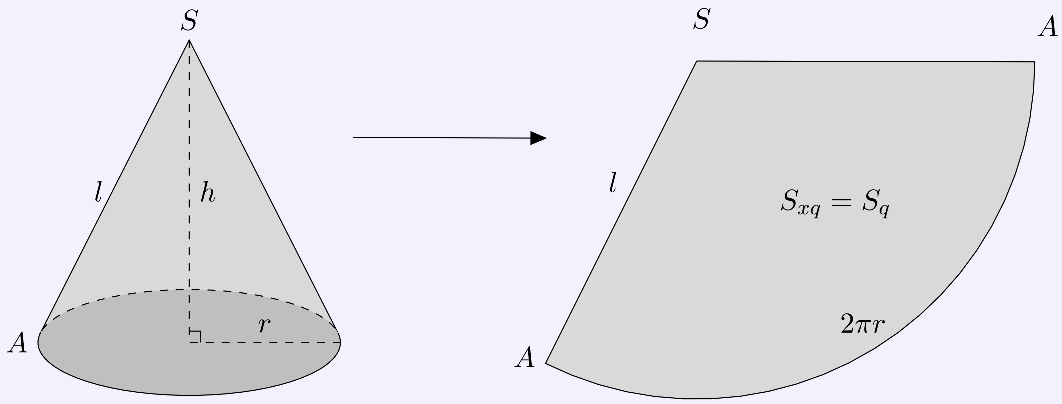


Chứng minh của định lý tham khảo tại [1].

2.1.2 Thể tích và diện tích

Trải hình nón và diện tích xung quanh-diện tích toàn phần

Xét hình nón đỉnh S bán kính đáy r và đường sinh độ dài l. Gọi A là điểm bất kỳ trên đường tròn đáy. Trải hình nón theo đường cắt SA ta được hình quạt tâm S bán kính $R_q = l$ (hình dưới).



Ta có độ dài cung của hình quạt là chu vi đường tròn đáy của hình nón sau khi trải ra. Do đó, độ dài cung của hình quạt bằng $l_q = 2\pi r$.

Mặt khác, áp dụng công thức diện tích hình quạt ta có $S_q = \frac{1}{2} R_q . l_q = \pi r l$.

Vậy ta có công thức tính diện tích xung quanh của hình nón:

$$\boxed{S_{xq} = \pi . r . l}.$$

Từ đây, ta có công thức tính diện tích toàn phần của hình nón:

$$\boxed{S_{tp} = \pi . r . l + \pi r^2}.$$

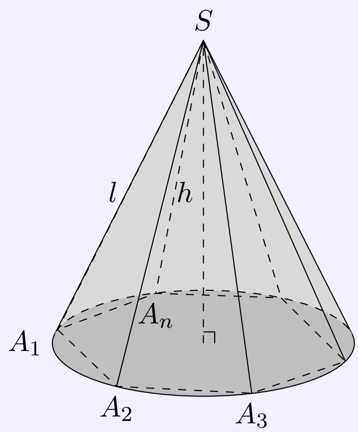
Thể tích của khối nón

Xét đa giác $A_1A_2...A_n$ có tất cả các cạnh bằng 1 nội tiếp đường tròn đáy của hình nón. Ta có

$$V_{S.A_1A_2...A_n} = \frac{1}{3}S_{A_1A_2...A_n}.h.$$

Mặt khác, khi $n \to +\infty$ thì $V_{S.A_1A_2...A_n} \to S_{\text{đ}}$ trong đó $S_{\text{đ}}$ là diện tích hình tròn đáy của khối nón. Khi đó, $V_{S.A_1A_2...A_n} \to V_{\text{chóp}}$. Vậy

$$\boxed{V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3}S_{\text{đ}}.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h}.$$



Ví dụ 2.1.1

Trong không gian cho tam giác vuông OIM vuông tại I, góc $\widehat{IOM} = 30°$ và cạnh $IM = a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay và thể tích của khối nón tạo ra bởi hình nón nói trên.

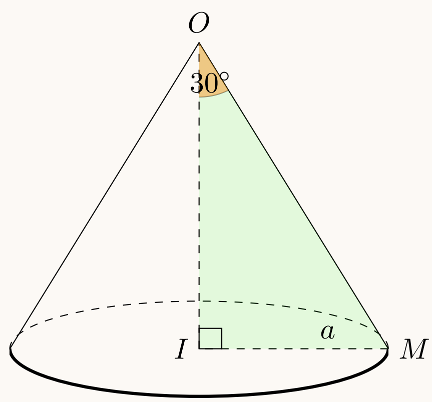
Hướng dẫn

Trong tam giác vuông OIM có chiều cao $h = OI = IM.\cot 30° = \sqrt{3}a$. Đường sinh $l = OM = 2a$ và bán kính đường tròn đáy là $r = a$. Vậy diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi rl = \pi a.2a = 2\pi a^2.$$

Thể tích của khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}.$$

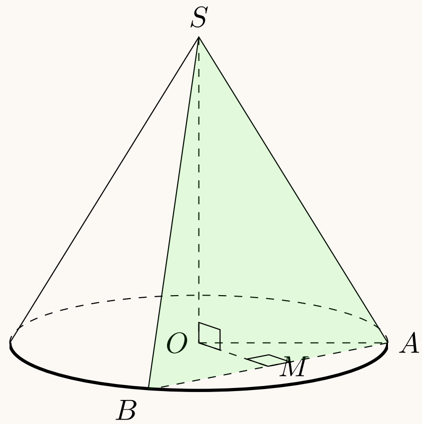


Ví dụ 2.1.2

Cho khối nón có đỉnh S, cắt khối nón bởi một mặt phẳng qua đỉnh của khối nón tạo thành thiết diện là tam giác SAB. Biết khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến thiết diện bằng 2, $AB = 12$, bán kính đường tròn đáy bằng 10. Tính chiều cao h của khối nón.

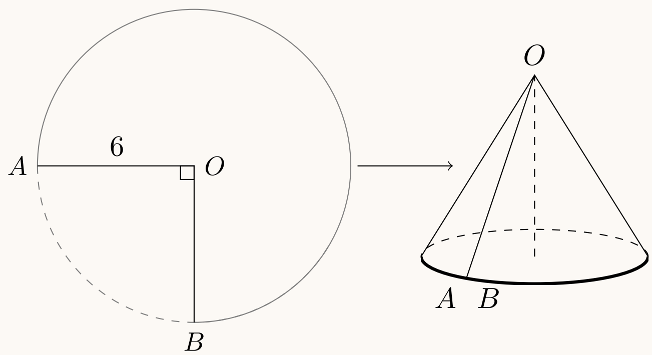
Hướng dẫn

Gọi O là tâm đáy của hình chóp và M là trung điểm của AB thì $OM \perp AB$. Gọi $d = d(O, (SAB))$, theo công thức khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên ta có $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OS^2}$.
Mặt khác, $AB = 12 \Rightarrow AM = 6$. Do đó $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = 8$.
Hơn nữa, theo giả thiết $d = 2$.
Vậy $\dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{84} = \dfrac{15}{64} \Rightarrow OS = \dfrac{8}{\sqrt{15}} = \dfrac{8\sqrt{15}}{15}$.
Vậy $h = \dfrac{8\sqrt{15}}{15}$.



Ví dụ 2.1.3

Cho hình tròn có bán kính là 6. Cắt bỏ $\dfrac{1}{4}$ hình tròn giữa hai bán kính OA, OB, rồi ghép hai bán kính đó lại sao cho thành một hình nón (như hình vẽ). Tính thể tích khối nón tạo thành.



Hướng dẫn

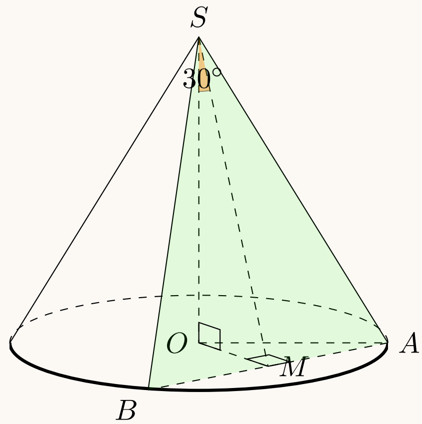
Cung lớn AB bán kính 6 của đường tròn tâm O có độ dài là: $\dfrac{3}{4}.12\pi = 9\pi$.
Khi ghép hai bán kính OA, OB lại thì đáy của hình nón là đường tròn có chu vi bằng cung lớn AB nói trên. Gọi r là bán kính đáy của hình nón thì $2\pi r = 9\pi \Rightarrow r = \dfrac{9}{2}$.
Mặt khác, đường sinh hình nón $l = OA = 6$ nên chiều cao hình nón $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.
Vậy thể tích của khối nón tạo thành là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h = \dfrac{81\sqrt{7}\pi}{8}$.

Ví dụ 2.1.4

Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Tính thể tích của khối nón.

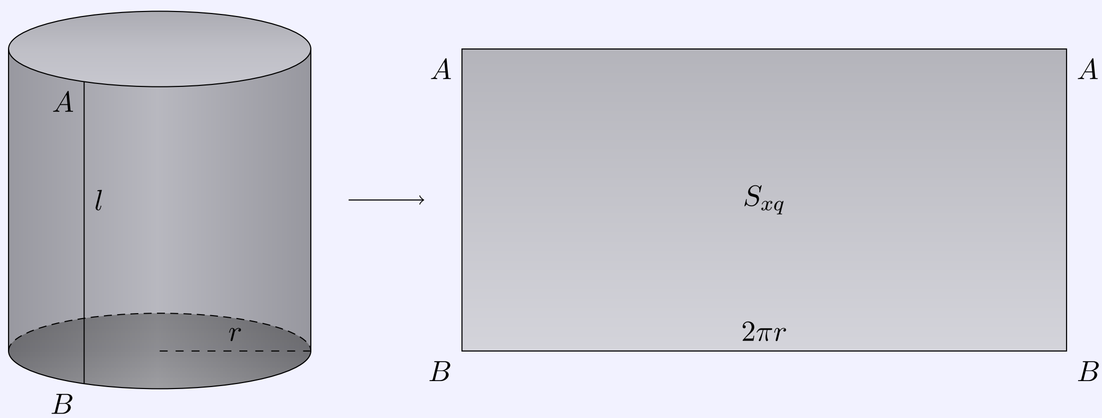
Hướng dẫn

Gọi M là trung điểm AB thì góc giữa SO và (SAB) là $\widehat{OSM} = 30°$.
Có ΔSAB vuông lại cân tại S nên $S_{SAB} = \dfrac{AB^2}{4}$.
Theo giả thiết $S_{SAB} = 4a^2$, do đó $AB = 4a$.
Suy ra $SM = 2a$.
ΔSOM vuông có $\widehat{OSM} = 30° \Rightarrow OM = \dfrac{SM}{2} = a$.
Vậy $r = OA = \sqrt{OM^2 + MA^2} = \sqrt{5}a$.
Có $h = SO = SM.\cos 30° = \sqrt{3}a$.
Vậy thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}a^3$.



Trải hình trụ và diện tích xung quanh- diện tích toàn phần

Xét hình trụ có bán kính đáy là r và độ dài đường sinh (cũng là chiều cao) bằng l. Cắt hình trụ bởi một đường sinh AB bất kỳ rồi trải bề mặt xung quanh hình trụ ra ta được một hình chữ nhật có một chiều bằng l, chiều còn lại bằng chu vi đáy và bằng $2\pi r$.



Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là: $\boxed{S_{xq} = 2\pi rl}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $\boxed{S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + l)}$.

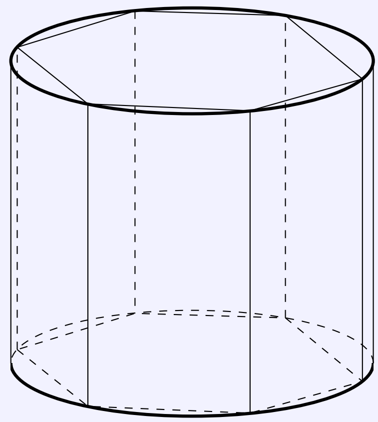
Thể tích khối trụ

Cho khối trụ với chiều cao bằng h và bán kính đáy bằng r. Xét khối lăng trụ đều n cạnh nối tiếp khối trụ. Khi đó

$$V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy lăng trụ}}.h.$$

Mặt khác, khi $n \to +\infty$ thì $V_{\text{lăng trụ}} \to V_{tr}$. Vậy

$$\boxed{V_{\text{trụ}} = S_{\text{đáy}}.h = \pi r^2 h}.$$



Như vậy, công thức tính thể tích của khối nón tương đồng với khối chóp trong khi khối trụ tương đồng với lăng trụ. Để ghi nhớ công thức, học sinh có thể hiểu khối nón có thể coi là một khối chóp suy rộng và khối trụ coi là khối lăng trụ đều suy rộng. Diện tích đáy khi đó tính theo công thức diện tích hình tròn.

Ví dụ 2.1.5

Trong không gian cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH ta được một hình trụ tròn xoay. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó và tính thể tích khối trụ giới hạn bởi hình trụ nói trên.

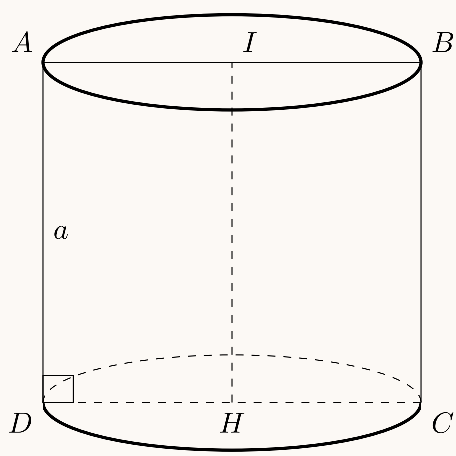
Hướng dẫn

Hình trụ tròn xoay có bán kính đáy $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$ và đường sinh $l = AD = a$. Do đó diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi rl = \pi a^2.$$

Thể tích của khối trụ giới hạn bởi hình trụ là:

$$V = \pi r^2 h = \frac{1}{4}a^3.$$

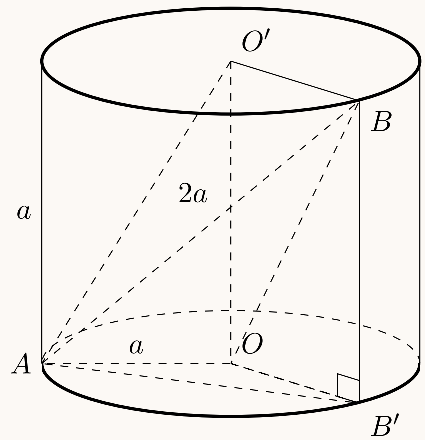


Ví dụ 2.1.6

Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

Hướng dẫn

Gọi B' là hình chiếu của B lên đáy chứa đường tròn tâm O thì $O'BB'O$ là hình chữ nhật. Do đó $S_{OO'B} = S_{OBB'}$, suy ra $V_{A.OO'B} = V_{A.OBB'}$, hay $V_{OO'AB} = V_{B.AOB'}$. Ta có $\Delta ABB'$ vuông tại B' nên $AB' = \sqrt{AB^2 - BB'^2} = \sqrt{3}a$. Khi đó, $\Delta OAB'$ là tam giác cân có cạnh bên bằng a, cạnh đáy bằng $\sqrt{3}a$ nên là tam giác cân đặc biệt (có $\widehat{AOB'} = 120°$).



Vì vậy $S_{OAB'} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy $V_{B.AOB'} = \dfrac{1}{3}S_{OAB'}.BB' = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Điều này có nghĩa $V_{OO'AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Ví dụ 2.1.7

Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng $30°$. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

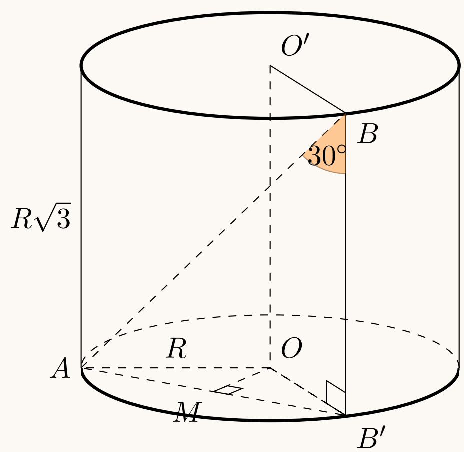
Hướng dẫn

Gọi B' là hình chiếu của B lên đáy chứa đường tròn tâm O thì góc giữa AB và OO' là $\widehat{ABB'} = 30°$ (do $BB' \parallel OO'$).

Tam giác ABB' vuông tại B' có $\widehat{ABB'} = 30°$ nên $AB = BB'.\cot 30° = R$. Vậy tam giác OAB đều.

Có $OO' \parallel (ABB') \Rightarrow d(OO', AB) = d(O, (ABB'))$.

Kẻ $OM \perp AB'$ thì $d(O, (ABB')) = OM$ (do (ABB') vuông góc với mặt đáy).



Mà trong tam giác đều OAB' $OM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

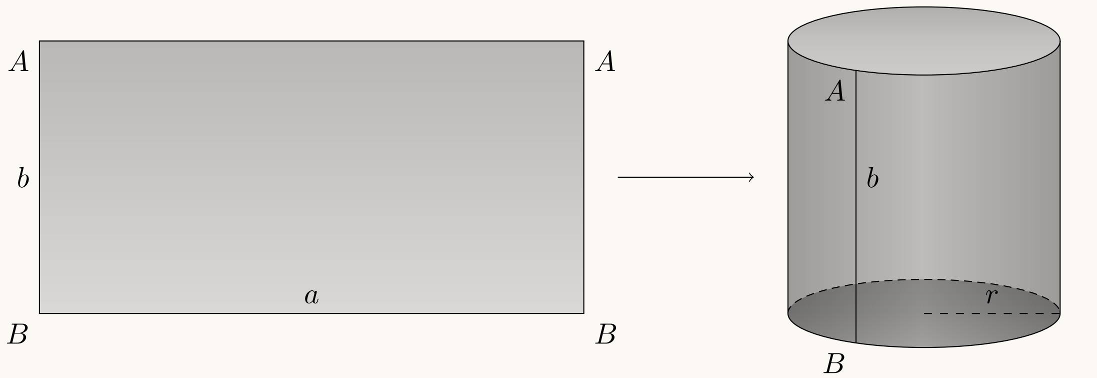
Vậy $d(AB, OO') = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2.1.8

Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và b. Người ta cuốn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu cuốn tấm nhôm theo chiều có độ dài a (khi đó b là đường sinh) thì thể tích của khối trụ tạo thành tính theo a, b bởi công thức nào?

Hướng dẫn

Khi cuốn tấm nhôm theo chiều a thì chu vi đáy của hình trụ bằng a, hay $2\pi r = 1$. Suy ra $r = \dfrac{a}{2\pi}$ với r là bán kính đáy. Vậy thể tích của khối trụ tạo thành là $V = \pi r^2.h = \boxed{\dfrac{a^2b}{4\pi}}$.



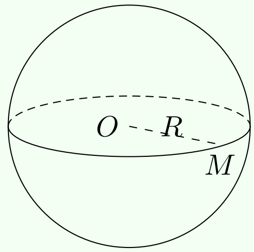
2.1.3 Bài tập áp dụng

2.2 Mặt cầu và khối cầu

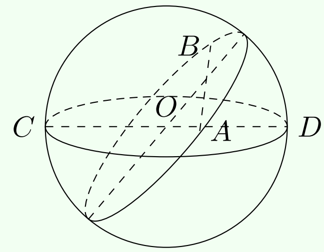
2.2.1 Định nghĩa và các vị trí tương đối

Định nghĩa 2.2.1: Mặt cầu

• Tập hợp những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng không đổi R ($R > 0$) được gọi là mặt cầu tâm O bán kính R. Ký hiệu là $S(O;R)$.



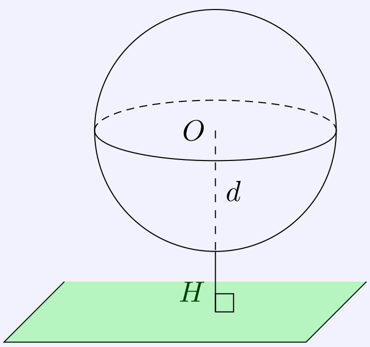
• Hai điểm A, B bất kỳ thuộc mặt cầu $S(O;R)$ thì đoạn thẳng AB được gọi là dây cung của mặt cầu đó.
• Đặc biệt, nếu dây cung CD qua O thì đoạn CD được gọi là đường kính của mặt cầu.



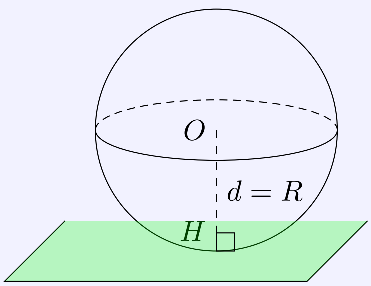
Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi $d = d(O,(P))$. Ta có các trường hợp sau:

• $d > R$: $S(O;R) \cap (P) = \emptyset$

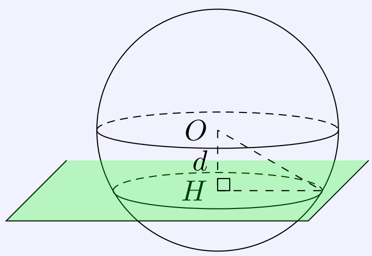


• $d = R$: $S(O;R)$ tiếp xúc với (P)



H gọi là tiếp điểm.
(P) gọi là tiếp diện.

• $d < R$: $S(O;R)$ cắt (P) theo thiết diện là đường tròn.

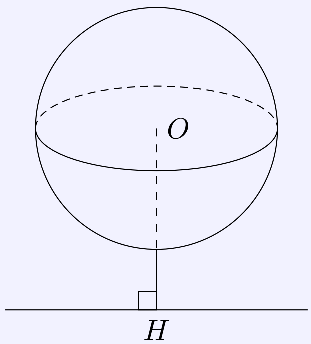


H là tâm đường tròn thiết diện.
Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

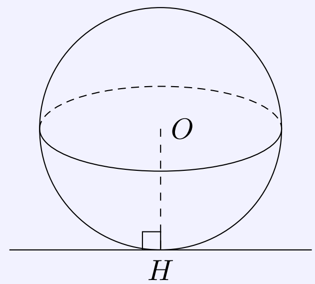
Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d(O, \Delta) = OH$. Ta có các trường hợp

• $d > R$: $S(O; R) \cap \Delta = \emptyset$

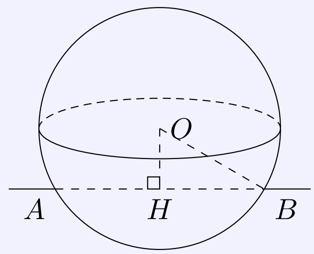


• $d = R$: $S(O; R)$ tiếp xúc với Δ



H gọi là tiếp điểm.
Δ gọi là tiếp tuyến.

• $d < R$: $S(O; R)$ cắt Δ theo dây cung AB.

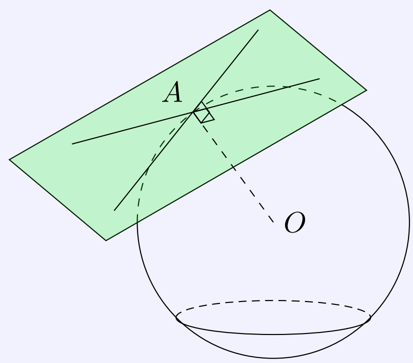


Độ dài dây cung AB tính bởi

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$$

Tiếp tuyến đi qua một điểm của mặt cầu

Qua một điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; R)$ có vô số tiếp tuyến của mặt cầu. Tất cả các tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính OA và nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại A.

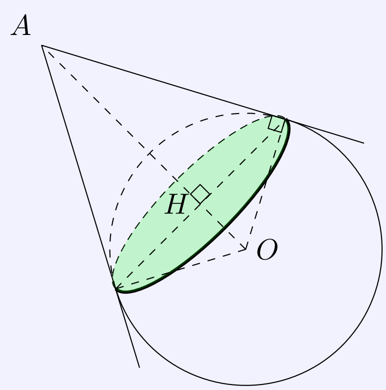


Qua điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Các tiếp tuyến này tạo thành mặt nón đỉnh A.
Khi đó, độ dài đường sinh của hình nón

$$l = \sqrt{OA^2 - R^2}.$$

Đường cao của hình nón

$$h = AH = \frac{OA^2 - R^2}{OA}.$$



Ví dụ 2.2.1

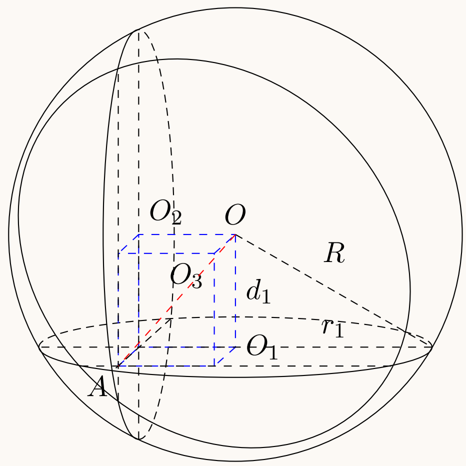
Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A nằm ở miền trong khối cầu. Ba mặt mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau cắt mặt cầu theo ba đường tròn có bán kính lần lượt là r_1, r_2, r_3. Chứng minh rằng $T = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ không đổi.

Hướng dẫn

Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ O đến ba mặt phẳng đã cho. Khi đó, AO là đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước d_1, d_2, d_3 nên $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = OA^2$ (hình bên).
Theo vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu ta có

$$r_1^2 = R^2 - d_1^2; r_2^2 = R^2 - d_2^2; r_3^2 = R^2 - d_3^2.$$

Do đó $T = 3R^2 - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = 3R^2 - OA^2$.
Vậy $T = 3R^2 - OA^2$ không đổi.



Ví dụ 2.2.2

Trong không gian cho mặt cầu tâm O bán kính R và điểm A sao cho $OA = 2R$. Các tiếp tuyến của mặt cầu qua A cùng với tiếp điểm tạo thành hình nón đỉnh A. Tính thể tích của khối nón nói trên.

Hướng dẫn

Gọi K là một tiếp điểm, ta có

$$AK^2 = OA^2 - R^2 = 3R^2.$$

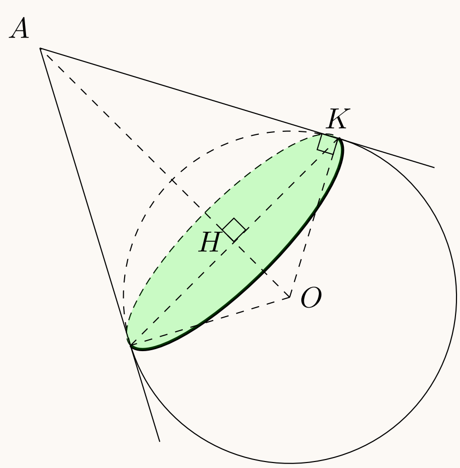
Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAK (hình bên) ta có

$$h = AH = \frac{AK^2}{AO} = \frac{3}{2}R.$$

Bán kính đường tròn đáy của hình nón

$$r = KH = \frac{KO.KA}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{3}{8}R^3$.



2.2.2 *Thể tích khối cầu và diện tích mặt cầu*

Định lý 2.2.1: Thể tích khối cầu và diện tích mặt cầu

- Mặt cầu bán kính R có diện tích là: $\boxed{S = 4\pi R^2}$.
- Khối cầu bán kính R có thể tích là : $\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi R^3}$.

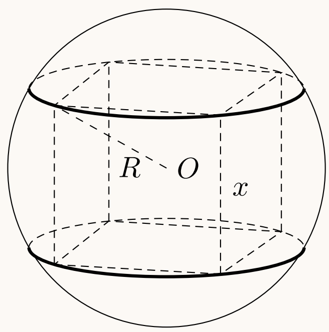
Định lý 2.2.1 được chứng minh bằng kiến thức ở chương trình cao hơn.

Ví dụ 2.2.3

Cho hình lập phương nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước. Tính thể tích của khối lập phương đó.

Hướng dẫn

Gọi x là độ dài cạnh của hình lập phương thì đường chéo của hình lập phương là $x\sqrt{3}$. Do khối lập phương nội tiếp hình cầu nên bán kính khối cầu bằng nửa đường chéo của khối lập phương. Vậy $R = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, do đó $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$. Vậy thể tích khối lập phương là $V = x^3 = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}R^3$.



Ví dụ 2.2.4

Cho tứ diện đều cạnh a. Tính diện tích mặt cầu nội tiếp tứ diện.

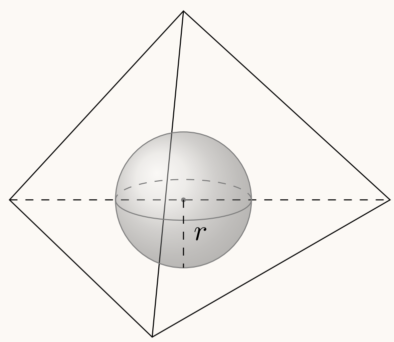
Hướng dẫn

Thể tích tứ diện đều: $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp: $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$.

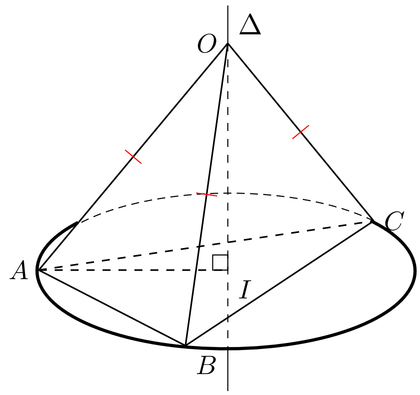
Trong đó $S_{tp} = 4.\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}a^2$ là diện tích toàn phần của tứ diện.

Vậy $r = \dfrac{\sqrt{6}}{12}a \Rightarrow S_{\text{cầu}} = 4\pi r^2 = \dfrac{\pi}{6}a^2$.



2.2.3 Xác định tâm và bán kính khối cầu ngoại tiếp

Mặt cầu $S(O;R)$ gọi là ngoại tiếp một hình không gian (như hình chóp, lăng trụ, hình nón, hình trụ) nếu nó đi qua mọi đỉnh của hình không gian đó.
Đặc biệt, ba điểm $A, B, C \in S(O;R)$ thì $O \in \Delta$ với Δ là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đường Δ còn gọi là trụ của đường tròn ngoại tiếp ΔABC (Hình 2.2).
Dựa vào định nghĩa và tính chất này ta mới dễ dàng xác định được tâm mặt cầu ngoại tiếp của một khối hình không gian.



Hình 2.2: Trục của đường tròn trong không gian

Định lý 2.2.2: Ba công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp

Gọi R là bán kính hình cầu ngoại tiếp các hình khối cần tính, R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy, R_b là bán kính đường tròn ngoại tiếp mặt bên, l là cạnh bên, h là chiều cao và GT là giao tuyến của mặt bên với đáy, ta có:

Cạnh bên vuông góc với đáy: Hình chóp, lăng trụ đứng, hình trụ.

$$\boxed{R^2 = R_d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} \quad (2.1)$$

Mặt bên vuông góc với đáy: Hình chóp, lăng trụ đứng.

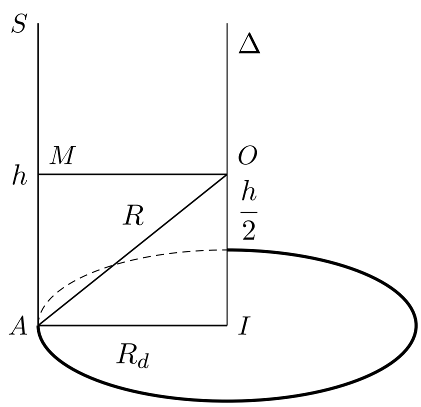
$$\boxed{R^2 = R_d^2 + R_b^2 - \left(\frac{GT}{2}\right)^2} \quad (2.2)$$

Các cạnh bên bằng nhau: Hình chóp, hình nón.

$$\boxed{R = \frac{l^2}{2h} = \frac{R_d^2 + h^2}{2h}} \quad (2.3)$$

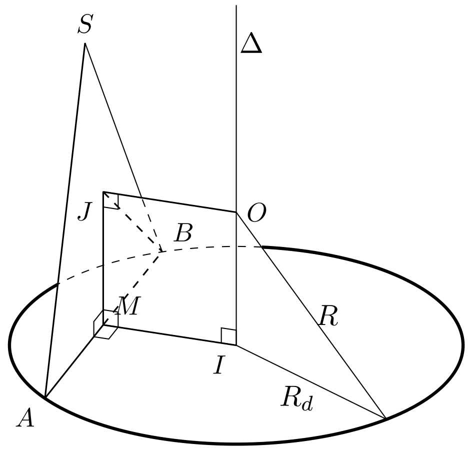
Chứng minh công thức (2.1):
Giải sử $SA\perp$ (Đáy).
Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp, thì O nằm trên trục Δ của đường tròn ngoại tiếp đáy.
Do $SA\perp$ (Đáy) nên $SA \parallel \Delta$, tức Δ và SA đồng phẳng. Do đó, I là giao điểm của Δ và trung trực của SA trong mặt phẳng (SA, Δ).
Vậy

$$\boxed{R^2 = AM^2 + AI^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + R_d^2}.$$



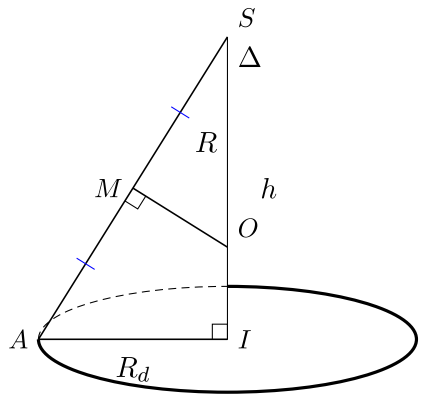
Chứng minh công thức (2.2):

Gọi O là tâm khối cầu ngoại tiếp thì O nằm trên trục Δ của đáy.
Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của mặt bên vuông đáy (chẳng hạn (SAB)) và mặt đáy thì $IM, JM \perp AB$ với M là trung điểm của AB. Khi đó O thuộc đường thẳng qua J và vuông góc với mặt phẳng (SAB). Đường này song song với IM.
Ta có $R^2 = R_d^2 + OI^2 = R_d^2 + JM^2$.
Mà $JM^2 = JB^2 - MB^2 = R_b^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.
Vậy $\boxed{R^2 = R_d^2 + R_b^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}$.



Chứng minh công thức (2.3):

Trường hợp này trục Δ của đường tròn ngoại tiếp đáy trùng với SI.
Trong mặt phẳng (SAI), tâm O của mặt cầu là giao điểm của SI với trung trực của SA.
Ta có $\Delta SMO \sim \Delta SIA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{SM}{SI} = \dfrac{SO}{SA}$
$\Rightarrow SO = \dfrac{SM.SA}{SI} = \dfrac{SA^2}{2SI}$.
Vậy $\boxed{R = \dfrac{(\text{Cạnh bên})^2}{2.(\text{Chiều cao})} = \dfrac{SA^2}{2h}}$.

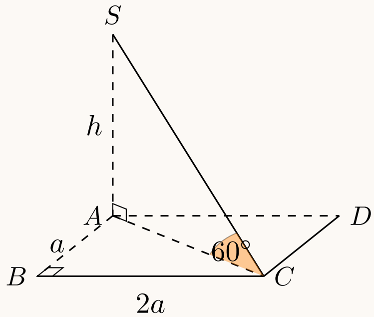


Ví dụ 2.2.5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 2a$. Cạnh $SA \perp (ABCD)$ và SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn

Theo giả thiết suy ra $\widehat{SCA} = 60°$
$\Rightarrow h = SA = AC.\tan 60° = AC\sqrt{3}$.
Có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}a \Rightarrow h = \sqrt{15}a$.
Lại có $R_d = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.
Áp dụng công thức (2.1) ta có
$R^2 = \dfrac{15}{4}a^2 + \dfrac{5}{4}a^2 = 5a^2 \Rightarrow R = \sqrt{5}a$.



Ví dụ 2.2.6

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S có $\widehat{ASB} = 120°$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

Hướng dẫn

Có giao tuyến của mặt (SAB) với đáy là $GT = AB = a$.
Đáy là hình vuông cạnh a nên $R_d = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.
Áp dụng định lý hàm số sin cho ΔSAB có:

$$\frac{AB}{\sin 120°} = 2R_b \Rightarrow R_b = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Áp dụng công thức (2.2) ta được:

$$R^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{7}{12}a^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{6}a.$$

Ví dụ 2.2.7

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AB = 2$ và $SA = 3\sqrt{2}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

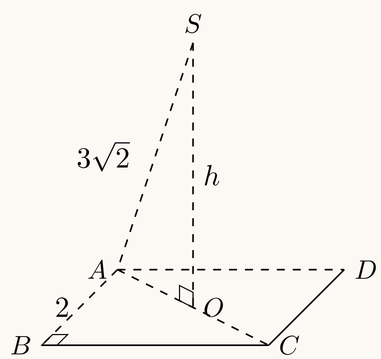
Hướng dẫn

Hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 2 nên

$$R_d = AO = \sqrt{2}.$$

Có $h = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 4$.
Áp dụng công thức (2.3) có

$$R = \frac{SA^2}{2h} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}.$$



Với 3 công thức trên học sinh đã có thể giải quyết được hơn 90% các dạng bài tập hỏi về tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp. Còn lại đối với những bài không rơi vào các trường hợp trên, ta cần lưu ý một số bài toán phổ biến sau đây.

Ví dụ 2.2.8: Tứ diện có độ dài hai cạnh đối và đoạn nối các trung điểm là đợn vuông góc chung

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, CD = b$ và I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD đồng thời là đoạn vuông góc chung của AB, CD. Biết $IJ = l$, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Hướng dẫn

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
Do IJ là đường trung trực chung của AB và CD nên $O \in IJ$.
Đặt $OJ = x \Rightarrow OI = l - x$. Vậy ta có

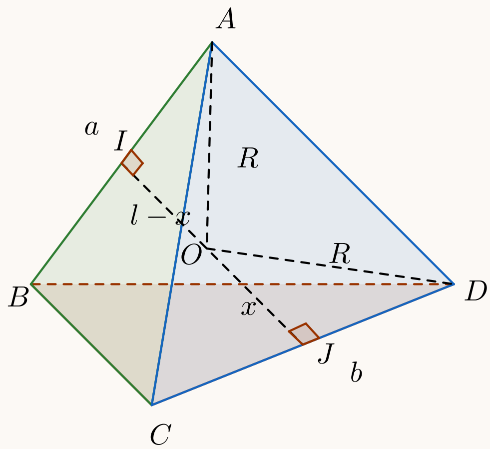
$$R^2 = AI^2 + IO^2 = DJ^2 + JO^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R^2 = \frac{a^2}{4} + (l-x)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Giải phương trình ta được

$$x = \frac{a^2 - b^2}{8l} - \frac{l}{2}.$$

Khi đó tính được R.

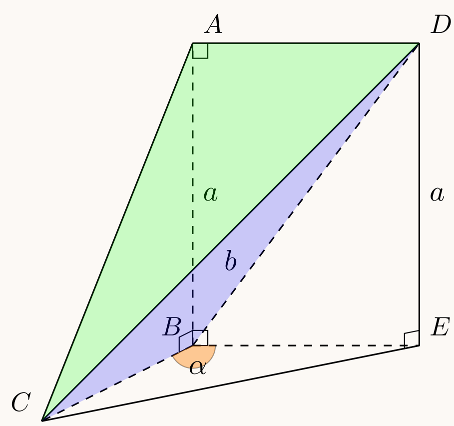


Ví dụ 2.2.9: Tứ diện có một cạnh là đường vuông chung của hai cạnh kề

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AD$; $AB \perp BC$ và cho biết $AB = a, CD = b > a$, góc giữa AD, BC bằng α. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Hướng dẫn

Do AB là đoạn vuông góc chung của AD và BC nên ta vẽ AB thẳng đứng cho dễ hình dung.
Từ B kẻ $BE \parallel AD$ và $BE = AD$ thì $ABED$ là hình chữ nhật, do đó E cũng thuộc mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Vậy ta chỉ cần tìm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCE$.
Gọi R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy BCE ta có $R_d = \dfrac{CE}{2\sin\alpha}$. Mà $CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$. Vậy $R_d = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2\sin\alpha}$.



Hình chóp $A.BCE$ có cạnh bên AB vuông góc với đáy nên áp dụng công thức (2.1) ta có $R^2 = R_d^2 + \frac{AB^2}{4} = R_d^2 + \frac{a^2}{4}$. Thay R_d tính được ở trên vào ta được

$$\boxed{R^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2 - a^2}{4\tan^2\alpha}}.$$

Ví dụ 2.2.10: Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều

Cho tứ diện gần đều $ABCD$ với $AB = CD = a$; $BC = AD = b$ và $CA = BD = c$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Hướng dẫn

Theo trang 34 của Chương 1 về tứ diện gần đều ta thấy tứ diện có thể nội tiếp được trong một hình hộp chữ nhật có cạnh x, y, z với $\begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \\ y^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ z^2 = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \end{cases}$.

Do đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật cũng là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Mặt khác, dễ thấy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có cạnh x, y, z là

$$R^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4}.$$

Vậy, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều được tính bởi

$$\boxed{R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}.$$

2.2.4 Bài tập áp dụng

2.3 Thể tích lớn nhất nhỏ nhất và toán thực tế đối với khối tròn xoay

Mục này giúp học sinh giải quyết những bài toán về thể tích mang tính chất thực tế và liên quan đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất cũng như đường đi tối ưu. Đây có thể coi là các dạng toán ở mức độ vận dụng - vận dụng cao trong đề thi THPTQG.

2.3.1 *Phương pháp chung cho bào toán cực trị hình học*

Dạng 1: Đưa biểu thức đánh giá về hàm một biến

Tính biểu thức cần đánh giá theo hàm một biến: $f(x)$**,** $x \in D$

↓

Khảo sát hàm $f(x)$ **trên** D **để tìm GTLN, GTNN**

Ví dụ 2.3.1

Cho khối nón đỉnh O, đáy có tâm I bán kính R và chiều cao là h. Một khối nón khác có đỉnh I và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đỉnh O. Để thể tích của khối nón đỉnh I lớn nhất thì chiều cao của khối nón này bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn

Gọi H là tâm đáy của hình nón đỉnh I và có bán kính r, đặt $x = IH, 0 < x < h$, ta có:

$$\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow r = \frac{h-x}{h}R.$$

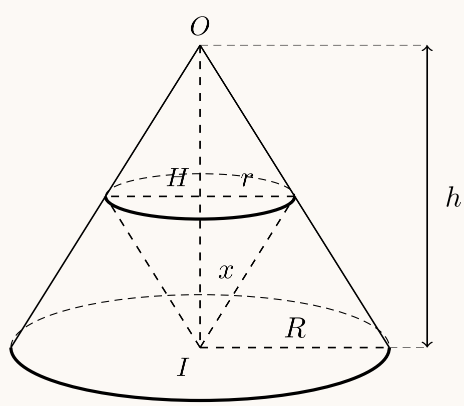
Vậy thể tích khối nón đỉnh I là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.x = \frac{1}{3h^2}\pi.(h-x)^2.x.R^2.$$

Xét $f(x) = x(h-x)^2$

có $f'(x) = (h-x)^2 - 2x(h-x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{h}{3} < h$.

Khảo sát thấy GTLN của V đạt được tại $x = \dfrac{h}{3}$.

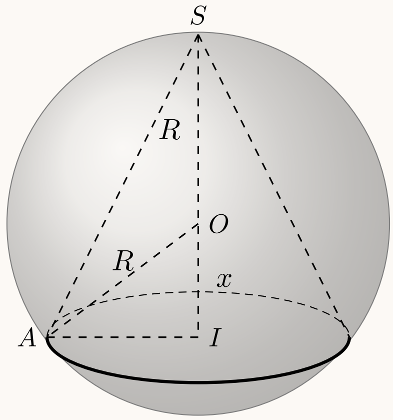


Ví dụ 2.3.2

Trong các khối nón nội tiếp một mặt cầu tâm O bán kính R, tính thể tích của khối nón có thể tích lớn nhất.

Hướng dẫn

Gọi I là tâm đáy của khối nón (như hình vẽ) và đặt $OI = x,\ 0 \le x < R$. Ta chỉ cần xét trường hợp O nằm giữa S, I.
Có $AI^2 = R^2 - x^2$ và $SI = R + x$.
Vậy thể tích khối nón



$$V = \frac{1}{3}\pi AI^2.SI = \frac{1}{3}(R^2 - x^2).(R + x).$$

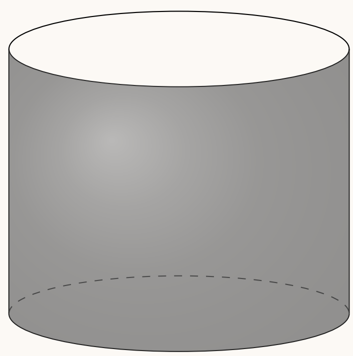
Xét hàm $f(x) = (R^2 - x^2).(R + x)$
Ta có $f'(x) = -3x^2 - 2Rx + R^2$,
Có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{R}{3} > 0$.
Từ đây dễ dàng kiểm tra thấy GTLN của $f(x)$ đạt tại $x = \dfrac{R}{3}$.
Khi đó GTLN của V bằng $\dfrac{32}{81}R^3$.

Ví dụ 2.3.3

Một xí nghiệp chế biến thực phẩm muốn sản xuất những loại hộp hình trụ có thể tích V cho trước để đựng thịt bò. Gọi $x, h\ \ (x > 0, h > 0)$ lần lượt là độ dài bán kính đáy và chiều cao của hình trụ. Tìm x, h để sản xuất hộp hình trụ tốn ít vật liệu nhất.

Hướng dẫn

Ta có $V = \pi r^2 h \Rightarrow \pi r h = \dfrac{V}{r}$.
Do đó, diện tích toàn phần của hộp trụ
$S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.
Xét hàm $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$ có $f'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2}$
Giải $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.
Dễ dàng kiểm tra thấy hàm số đạt GTLN tại



$r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, khi đó $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Vậy khi V đạt GTLN thì $r + h = 3\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Dạng 2: Đưa biểu thức đánh giá về hàm nhiều biến và sử dụng các bất đẳng thức

Tính biểu thức cần đánh giá theo hàm nhiều biến $a, b, c, ...$: $f(a, b, c, ..)$

↓

Đánh giá $f(a, b, c, ..)$ dựa vào các bất đẳng thức đã biết

Các bất đẳng thức thường dùng:

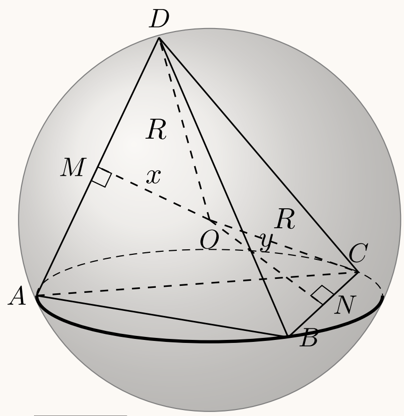
- Bất đẳng thức Cô-Si cho các số dương: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Đẳng thức tại $a = b = c = ..$
- Bất đẳng thức Bunhiakovski: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$, ... Đẳng thức tại $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.
- Bất đẳng thức hình học: $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$. Đẳng thức tại $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.
- Bất đẳng thức Schwarz: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$; $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ với $a, b, c > 0$. Đẳng thức tại $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Ví dụ 2.3.4

Trong tất cả các tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm O bán kính R, tứ diện có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC và đặt $x = OM, y = ON$. Khi đó $AD = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, $BC = 2\sqrt{R^2 - y^2}$.



Áp dụng công thức (1.4) trong Chương 1 ta có

$V \leq \frac{1}{6}AD.BC.d(AD, BC)$

$\leq \frac{2}{3}\sqrt{R^2 - x^2}.\sqrt{R^2 - y^2}.(x + y)$.

Áp dụng Cô-Si có

$\sqrt{R^2 - x^2}.\sqrt{R^2 - y^2} \leq \frac{2R^2 - (x^2 + y^2)}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovski có $x + y \leq \sqrt{2}.\sqrt{x^2 + y^2}$.

Vậy $V \leq \frac{\sqrt{2}}{3}\left(2R^2 - t^2\right) t$ với $t = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Khảo sát $f(t) = \left(2R^2 - t^2\right) t$ dễ dàng tìm được GTLN bằng $\frac{4\sqrt{6}}{9}R^3$ khi $t = \frac{\sqrt{6}}{3}R$.

Vậy GTLN của V bằng $\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$.

Ví dụ 2.3.5

Cho tam diện vuông OABC có bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp lần lượt là R và r. Khi đó tỷ số $\frac{R}{r}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{x + \sqrt{y}}{2}$, $x, y \in \mathbb{N}$. Tính $P = x + y$?

Hướng dẫn

Ta có: $R^2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ với $OA = a, OB = b, OC = c$. Mặt khác ta lại có

$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ (để ý có$S^2_{ABC} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCA}$).

Vậy $\frac{2R}{r} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\left(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right)}{abc}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si cho 3 số ta có:

$\frac{2R}{r} \geqslant \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}.\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + \sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\right)}{abc} \Rightarrow \frac{2R}{r} \geqslant 3 + 3\sqrt{3} \Rightarrow \frac{R}{r} \geqslant \frac{3 + \sqrt{27}}{2}$.

Vậy $x = 3;\ y = 27 \Rightarrow x + y = 30$.

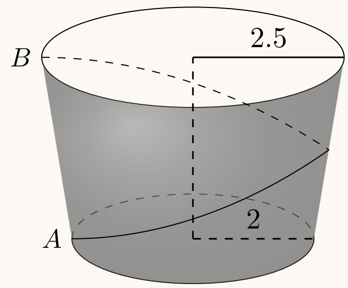
2.3.2 Một số ví dụ về trải hình và tính toán thực tế

Tương tự Mục 1.2.8 trong Chương 1, bài toán trải hình đối với khối tròn xoay cũng giống như trải hình trong khối đa diện chỉ khác một chút về tính toán và hình dạng của hình sau khi được trải phẳng.

Ngoài ra, trong cuộc sống hàng ngày có thể bắt gặp những bài toán hình học thực tế về các khối tròn xoay đòi hỏi phải có những tính toán nhất định. Mục này cuốn sách sẽ trình bày một số ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Ví dụ 2.3.6

Cho chiếc cốc hình nón cụt với miệng cốc bán kính $R = 2.5$cm, đáy cốc bán kính $r = 2$cm và độ dài đường sinh bằng $l = 6$. Một con kiến bò từ điểm A ở đáy cốc đúng một vòng đến điểm B ở miệng cốc (hình bên). Tính quãng đường đi ngắn nhất của con kiến (tính gần đúng đến hai chữ số thập phân).



Hướng dẫn

Trải chiếc cốc trên mặt phẳng diện tích xung quanh chiếc cốc như hình vẽ (bôi đen). Gọi S là đỉnh của các hình quạt tạo thành và $\alpha = \widehat{S}$. Ta có

$$\frac{SA}{SB} = \frac{2\pi r}{2\pi R} \Rightarrow \frac{SA}{SA+l} = \frac{r}{R}$$
$$\Rightarrow SA = \frac{rl}{R-r} = 24\text{cm}.$$

Theo công thức độ dài cung có

$2\pi r = SA.\alpha \Rightarrow \alpha = 2\pi\dfrac{R-r}{l} = \dfrac{\pi}{6}$.

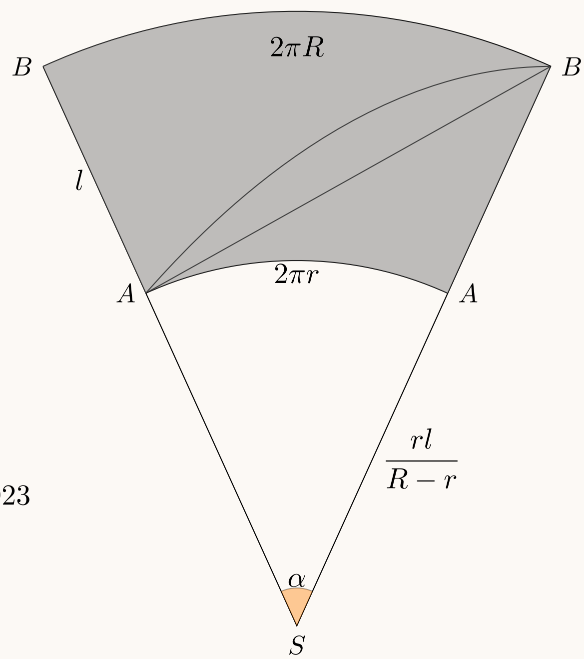
Có $SB = SA + l = 30$cm.

Theo định lý hàm số cos cho ΔSAB có

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\frac{\pi}{6} = 228,923$$

Thấy $SB^2 > SA^2 + AB^2$ nên $\widehat{SAB} > 90°$, do đó con kiếm có thể bò theo đường thẳng AB.

Vậy quãng đường đi ngắn nhất của con kiếm là $AB = 15,13$cm.

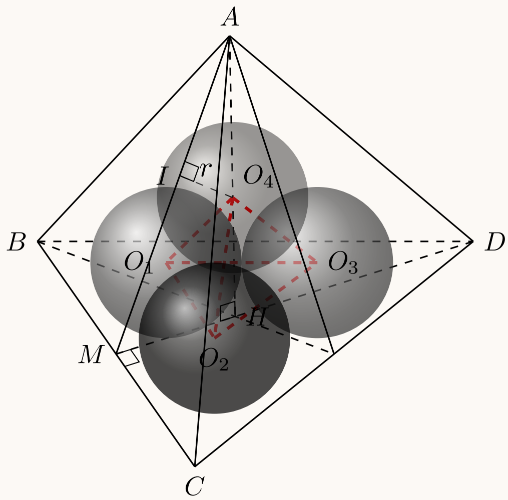


Ví dụ 2.3.7

Cho 4 mặt cầu có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3, O_4 có cùng bán kính $r = 2$ đôi một tiếp xúc với nhau. Một tứ diện đều $ABCD$ ngoại tiếp cả 4 mặt cầu sao cho mỗi mặt cầu trên tiếp xúc với 3 mặt của tứ diện. Tính độ dài cạnh tứ diện đều $ABCD$.

Hướng dẫn

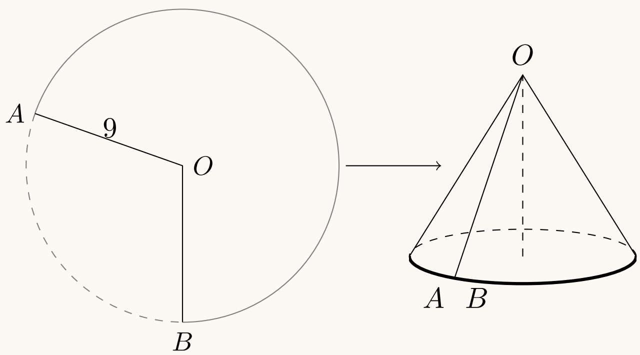
Dễ thấy tứ diện $O_1O_2O_3O_4$ là tứ diện đều cạnh bằng $2r$ nên chiều cao, chẳng hạn $d(O_4,(O_1O_2O_3)) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.2r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}r$.
Gọi I là tiếp điểm của (O_4) với (ABC) thì AI qua trung điểm M của BC, do đó $\sin\widehat{IAO4} = \sin\widehat{MAH} = \dfrac{MH}{MA} = \dfrac{1}{3}$.
Suy ra $\dfrac{IO4}{AO_4} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AO_4 = 3r$.
Mặt khác $d\left((O_1O_2O_3),(BCD)\right) = r$ do 3 mặt cầu $(O1),(O_2),(O_3)$ cùng tiếp xúc với (BCD).
Vậy $AH = AO_4 + d(O_4,(O_1O_2O_3)) + d\left((O_1O_2O_3),(BCD)\right) = 4r + \dfrac{2\sqrt{6}}{3}r = \dfrac{12+2\sqrt{6}}{3}r$.



Mà trong tứ diện đều có $AH = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.AB \Rightarrow AB = \dfrac{\sqrt{6}}{2}.AH = (2\sqrt{6}+2)r = 4+4\sqrt{6}$.
Vậy tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $AB = 4+4\sqrt{6}$.

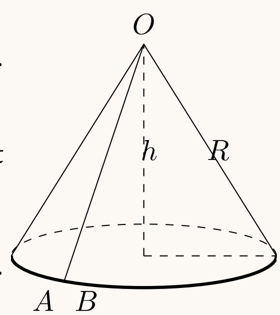
Ví dụ 2.3.8

Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R = 9$cm. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (như hình vẽ). Muốn được cái phễu có thể tích lớn nhất thì hình quạt cần để làm phễu có độ dài cung bao nhiêu?



Hướng dẫn

Gọi h là bán kính đáy của chiếc phễu thì bán kính đáy $r^2 = R^2 - h^2$.
Vậy thể tích của phễu là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h = \dfrac{1}{3}\pi(R^2h - h^3)$.
Hàm $f(h) = R^2h - h^3$ có $f'(h) = R^2 - 3h^2$. Dễ kiểm tra $f(h)$ đạt GTLN khi $h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ hay $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R = 3\sqrt{6}$.
Độ dài cung tròn cần tính bằng chu vi đáy phễu và bằng $2\pi r = 6\pi\sqrt{6}$.



2.3.3 Bài tập áp dụng

Tài liệu tham khảo

[1] David Hilbert and Stephan Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*. Number 87. American Mathematical Soc., 1999.

[2] BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO. *Hình học 11*. Nhà xuất bản Giáo Dục, 2008.

[3] BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO. *Hình học 12*. Nhà xuất bản Giáo Dục, 2008.

[4] Eric Weisstein and Stephen Wolfram. Platonic solids. 2008.

[5] Eric W Weisstein. ”conic section.” from mathworld–a wolfram web resource. http://mathworld.wolfram.com/conicsection.html. 2003.

Tra cứu theo vần