TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2019
Số 507

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Nhà toán học Johann Bernoulli
(1667-1748)

CHƯƠNG TRÌNH 25.000 BỘ SÁCH GIÁO KHOA TIẾP BƯỚC HỌC SINH CÓ HOÀN CẢNH KHÓ KHĂN TỚI TRƯỜNG

Chương trình trao tặng 25.000 bộ sách giáo khoa cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn đã và đang được NXB Giáo dục Việt Nam tổ chức thực hiện tại nhiều tỉnh thành trên cả nước.

Trong năm học 2019 – 2020, NXB Giáo dục Việt Nam triển khai tổ chức chương trình thiện nguyện trao tặng 25.000 bộ sách giáo khoa đến tay học sinh là con gia đình thương binh, liệt sĩ và học sinh có hoàn cảnh khó khăn trên cả nước. Tính đến cuối tháng 8 - 2019, NXB Giáo dục Việt Nam đã trao trên 22.000 bộ sách giáo khoa tặng học sinh có hoàn cảnh khó khăn ở nhiều tỉnh thành như: Lạng Sơn, Sơn La, Hà Nam, Phú Thọ, Thái Bình, Cao Bằng, Thanh Hoá, Tuyên Quang, Quảng Nam, Quảng Ngãi, Khánh Hoà, Cần Thơ, Kiên Giang, Sóc Trăng, Vĩnh Long, Bến Tre, TP. Hồ Chí Minh …

Mang những cuốn sách giáo khoa đến với học sinh nghèo vượt khó, học sinh con gia đình chính sách, học sinh ở những vùng sâu, vùng xa gặp nhiều khó khăn là trách nhiệm xã hội mà NXB Giáo dục Việt Nam đã thực hiện trong nhiều năm qua. Hành trình trao sách giáo khoa đến tay các em cho dù đôi lúc gặp khó khăn bởi những cung đường khó đi hay ảnh hưởng của thời tiết xấu, thiên tai, lũ lụt… Nhưng chỉ cần nhìn thấy niềm vui trong ánh mắt các em học sinh, điều đó cũng trở thành niềm vui chung của các cán bộ, công nhân viên NXB Giáo dục Việt Nam.

NXB Giáo dục Việt Nam mong muốn những hoạt động thiện nguyện này sẽ được phát triển sâu rộng, thiết thực, góp phần hỗ trợ cho những em học sinh có hoàn cảnh khó khăn, để các em có thêm niềm tin và nỗ lực vươn lên trong cuộc sống.

Một số hình ảnh trong các buổi trao tặng sách của NXB Giáo dục Việt Nam

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

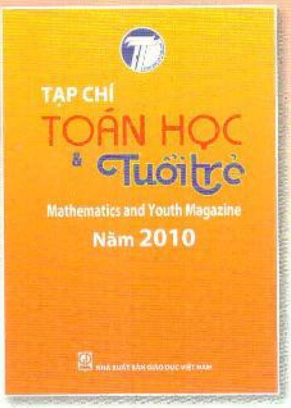
Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

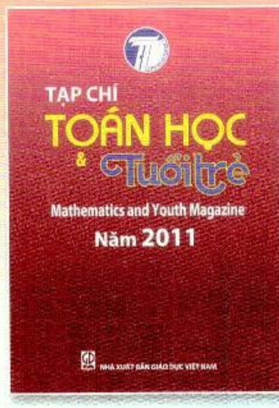
Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

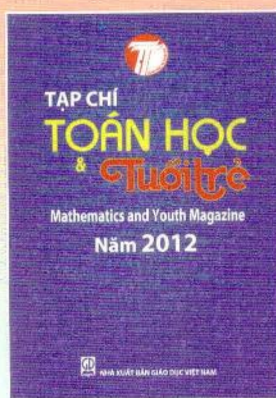
Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

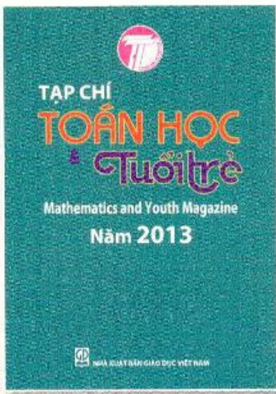
Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

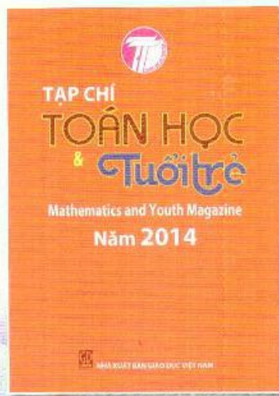
Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

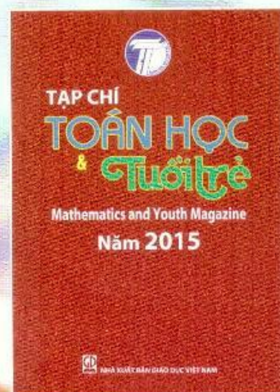


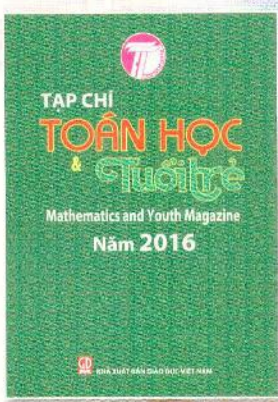


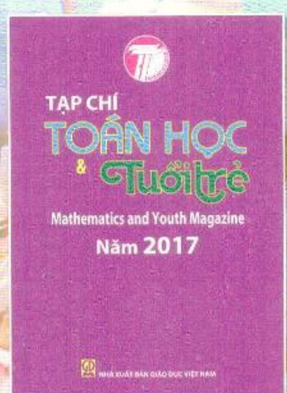


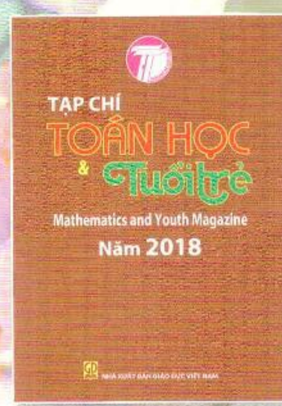












Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

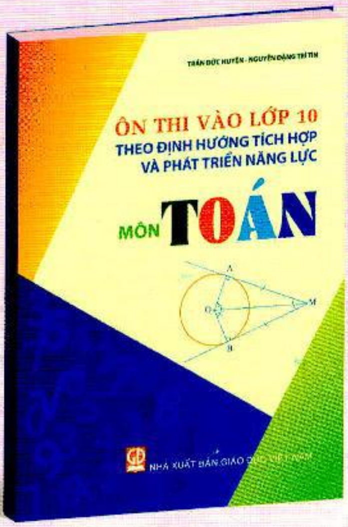
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

ÔN THI VÀO LỚP 10 THEO ĐỊNH HƯỚNG TÍCH HỢP VÀ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC

của các tác giả: TRẦN ĐỨC HUYÊN và NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN

Sách dày 236 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa: 69.000đồng



Nhằm giúp cho các em học sinh có thể tự ôn luyện và hỗ trợ quý Thầy Cô có thêm tài liệu ôn thi vào lớp 10, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn cuốn "**ÔN THI VÀO LỚP 10 THEO ĐỊNH HƯỚNG TÍCH HỢP VÀ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC**".

Ngoài việc luyện thi vào lớp 10, cuốn sách này cũng đáp ứng yêu cầu cho việc đổi mới dạy - học, đáp ứng yêu cầu được các tiêu chí của bộ sách giáo khoa mới, theo định hướng tích hợp các môn học, và phát triển năng lực của học sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Sách gồm 4 chương:

CHƯƠNG 1. NHỮNG CHỦ ĐỀ CƠ BẢN

Bao gồm 12 chủ đề căn bản của chương trình toán lớp 9 hiện hành: Mỗi chủ đề đều có phần tóm tắt lý thuyết, đề toán có hướng dẫn và đề toán tự giải rất tiện cho các em học sinh tự ôn tập và rèn luyện.

CHƯƠNG 2. NHỮNG CHỦ ĐỀ TOÁN ỨNG DỤNG

Chủ đề 13: Những bài toán tích hợp liên môn Lý - Hóa - Sinh.

Chủ đề 14: Những bài toán tỉ lệ phần trăm trong tài chính.

Chủ đề 15: Những bài toán thực tế đo đạc hình học – Các bài toán về địa lí.

CHƯƠNG 3. NHỮNG CHỦ ĐỀ NÂNG CAO

Chủ đề 16: Vận dụng mô hình toán học để giải quyết các vấn đề thực tế.

Chủ đề 17: Toán đại số tổng hợp.

Chủ đề 18: Toán hình học tổng hợp.

CHƯƠNG 4. ĐỀ MẪU THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

Gồm 6 đề thi mẫu được biên soạn theo đúng hướng dẫn cấu trúc và ma trận đề minh họa của Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Hồ Chí Minh, trong đó một số đề có hướng dẫn giải và các đề còn lại các em học sinh sẽ tự làm.

Để sử dụng tài liệu một cách có hiệu quả các em học sinh cần học đầy đủ các kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa, tích cực rèn luyện cách suy nghĩ, tư duy, phân tích, phản biện, đồng thời tìm mối liên hệ với thực tế đối với kiến thức đã học.

Chúng tôi hi vọng tài liệu này sẽ giúp ích cho quý thầy cô và các em học sinh trong việc ôn tập, luyện thi vào lớp 10 theo cấu trúc đề mới và rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp xây dựng để những lần tái bản sau tài liệu sẽ được ngày càng hoàn thiện hơn.

Địa chỉ phát hành:

- Công ty CP Sách và Thiết bị giáo dục Miền Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh, ĐT: (028) 38358423
- Các Công ty CP Sách và Thiết bị Trường học Tỉnh (Thành phố).
- Mua sách trực tuyến tại: www.sobee.vn

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT09M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

CHU TUẤN

(GV THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Nội)

Có bốn cách chứng minh một đẳng thức đại số là: Chứng minh vế này bằng vế kia; Chứng minh hai vế bằng nhau; Đặt lại kết luận của bài toán, chứng minh $VT - VP = 0$; Suy trực tiếp từ một hằng đẳng thức hoặc từ giả thiết của bài toán.

Ta thường gặp hai dạng toán cơ bản về chứng minh đẳng thức đại số là

A. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VỚI CÁC BIẾN TỰ DO

Các đẳng thức này thực chất là các hệ quả của các hằng đẳng thức đáng nhớ nó coi như công cụ rất hữu ích khi biến đổi đại số, chứng minh các đẳng thức có điều kiện.

HQ 1. $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

HQ 2. $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

HQ 3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

HQ 4. $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$
$$= (a-b)(b-c)(a-c).$$

Đẳng thức trên còn được viết ở các dạng sau

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c) \quad (1)$$

$$a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2) = (a-b)(b-c)(a-c) \quad (2)$$

$$(a-b)(a+b)^2 + (b-c)(b+c)^2 + (c-a)(c+a)^2 = (a-b)(b-c)(a-c) \quad (3)$$

Chứng minh. Biến đổi VT bằng cách bỏ ngoặc, chọn biến chính a rồi *nhóm theo bậc* của a, ta được:

$$VT = a^2(b-c) - a\left(b^2-c^2\right) + bc(b-c)$$
$$= (b-c)\left(a^2 + bc - ab - ac\right)$$
$$= (b-c)[a(a-b) - c(a-b)]$$
$$= (a-b)(b-c)(a-c) = VP.$$

HQ 5. $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$
$$= (a+b)(b+c)(c+a).$$

HQ 6. $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

HQ 7. $(a+b+c)^3$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

HQ 8. $(a+b+c)^3$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$$

HQ 9. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$$= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

HQ 10. $(x-a)(x-b)(x-c)$
$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

Bài toán 1. *Chứng minh rằng*

1) $x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2\left(x^2+xy+y^2\right)^2$;

2) $\dfrac{40^2+51^2+91^2}{79^2} = \dfrac{40^4+51^4+91^4}{79^4}$.

Lời giải. 1) Biến đổi vế trái bằng cách áp dụng HQ1, ta được

$$VT = \left(x^2+y^2\right)^2 - 2x^2y^2 + \left(x^2+2xy+y^2\right)^2$$
$$= \left[\left(x^2+y^2\right)^2 - x^2y^2\right] + \left[\left(x^2+2xy+y^2\right)^2 - x^2y^2\right]$$
$$= \left(x^2+xy+y^2\right)\left(x^2-xy+y^2\right)$$
$$+ \left(x^2+xy+y^2\right)\left(x^2+3xy+y^2\right)$$
$$= \left(x^2+xy+y^2\right)\left(2x^2+2xy+2y^2\right)$$
$$= 2\left(x^2+xy+y^2\right)^2 = VP.$$

2) Đặt lại kết luận của bài toán, ta cần chứng minh

$$\frac{40^4+51^4+91^4}{40^2+51^2+91^2} = 79^2.$$

Áp dụng kết quả câu 1) với $x=40, y=51$, ta được $\text{VT}=40^2+40.51+51^2=79^2$.

Bài toán 2. *Áp dụng HQ2, chứng minh rằng*

1) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}}=\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+y}\right|$;

2) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}+\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{y^4}+\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}}}$

$$=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}\right|.$$

Lời giải. 1) Áp dụng HQ2, ta có:

$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2-\dfrac{2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2}{x^2y^2}-\dfrac{2}{xy}$, do đó:

$$\text{VT}=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}\right)^2}=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}\right|=\text{VP}.$$

2) Áp dụng kết quả câu 1), ta có

$$\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Áp dụng kết quả câu 1) một lần nữa ta có đpcm.

Bài toán 3. *Áp dụng HQ4, chứng minh rằng $xy+yz+zx=-1$, trong các trường hợp sau:*

1) $x=\dfrac{a}{b-c}$; $y=\dfrac{b}{c-a}$; $z=\dfrac{c}{a-b}$;

2) $x=\dfrac{a+b}{a-b}$; $y=\dfrac{b+c}{b-c}$; $z=\dfrac{c+a}{c-a}$;

3) $x=\dfrac{a+m}{b-c}$; $y=\dfrac{b+m}{c-a}$; $z=\dfrac{c+m}{a-b}$;

4) $x=\dfrac{1-ab}{a-b}$; $y=\dfrac{1-bc}{b-c}$; $z=\dfrac{1-ca}{c-a}$.

Lời giải. 1) Áp dụng HQ4:

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$
$$=(a-b)(b-c)(a-c)\quad(1).$$

Chia hai vế của (1) cho $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$, ta được:

$$\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(a-b)(c-a)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}=-1$$

hay $xy+yz+zx=-1$.

Các câu 2, 3, 4 chứng minh tương tự.

B. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN

I. Tổng bậc nhất bằng 0 và các kĩ thuật hạ bậc, thay giá trị, nhóm đối xứng

Bài toán 4. *Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh*

1) $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$;

2) $a^3+b^3+c^3=3abc$;

3) $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$;

4) $a^5+b^5+c^5=\dfrac{5}{2}abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$;

5) $a^5(b^2+c^2)+b^5(c^2+a^2)+c^5(a^2+b^2)$

$$=\frac{1}{2}\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

Lời giải. 1) *Cách 1.* Biến đổi vế trái bằng cách hạ bậc rồi thay giá trị ta được:

$$\text{VT}=a(-b-c)+b(-c-a)+c(-a-b)$$
$$=-ab-ca-bc-ab-ca-bc$$
$$=-2(ab+bc+ca)=\text{VP}.$$

Cách 2. Bình phương hai vế giả thiết $a+b+c=0$ ta được: $(a+b+c)^2=0$ hay $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$.

Cách 3. Áp dụng HQ3, thay giá trị $a+b+c=0$, ta có: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ hay $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$.

2) *Cách 1.* Biến đổi vế trái bằng cách hạ bậc, thay giá trị rồi *nhóm đối xứng*, ta có:

$$\text{VT}=a^2(-b-c)+b^2(-c-a)+c^2(-a-b)$$
$$=(-a^2b-ab^2)+(-b^2c-bc^2)+(-a^2c-ac^2)$$
$$=ab(-a-b)+bc(-b-c)+ca(-c-a)$$
$$=3abc=\text{VP}.$$

Cách 2. Đặt lại kết luận của bài toán, chứng minh

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

Áp dụng HQ9, ta có $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=0.$$

Cách 3. Áp dụng HQ8 rồi thay giá trị $a+b+c=0$, ta có:

$(a+b+c)^3$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$

hay $a^3+b^3+c^3=3abc$.

3) *Cách 1.* Biến đổi vế trái bằng cách hạ bậc, thay giá trị rồi *nhóm đối xứng*, ta có

$$\begin{aligned}
\text{VT} &= a^3(-b-c)+b^3(-c-a)+c^3(-a-b)\\
&= (-a^3b-ab^3)+(-b^3c-bc^3)+(-a^3c-ac^3)\\
&= -ab\left(a^2+b^2\right)-bc\left(b^2+c^2\right)-ca\left(c^2+a^2\right)\\
&= -ab(-2ab-bc-ca)-bc(-2bc-ca-ab)\\
&\qquad -ca(-2ca-ab-bc)\\
&= 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)\\
&\qquad -2abc(a+b+c)\\
&= 2(ab+bc+ca)^2 = \text{VP}.
\end{aligned}$$

Cách 2. Áp dụng HQ3 hai lần rồi thay giá trị $a+b+c=0$, ta được VT = VP.

4) *Cách 1.* Biến đổi vế trái bằng cách hạ bậc, thay giá trị rồi *nhóm đối xứng*, ta có:

$$\begin{aligned}
\text{VT} &= a^4(-b-c)+b^4(-c-a)+c^4(-a-b)\\
&= (-a^4b-ab^4)+(-b^4c-bc^4)+(-a^4c-ac^4)\\
&= -ab\left(a^3+b^3\right)-bc\left(b^3+c^3\right)-ca\left(c^3+a^3\right)\\
&= -ab(a+b)\left(a^2+b^2-ab\right)\\
&\qquad -bc(b+c)\left(b^2+c^2-bc\right)-ca(c+a)\left(c^2+a^2-ca\right)\\
&= abc\left[2\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+bc+ca)\right]\\
&= \frac{5}{2}abc\left(a^2+b^2+c^2\right) = \text{VP}.
\end{aligned}$$

5) Biến đổi vế trái bằng cách nhóm đối xứng, thêm bớt hạng tử thiếu ta có:

$$\begin{aligned}
\text{VT} &= \left(a^5b^2+a^2b^5\right)+\left(b^5c^2+b^2c^5\right)+\left(a^5c^2+a^2c^5\right)\\
&= a^2b^2\left(a^3+b^3\right)+b^2c^2\left(b^3+c^3\right)+a^2c^2\left(a^3+c^3\right)\\
&= a^2b^2\left(a^3+b^3+c^3\right)+b^2c^2\left(a^3+b^3+c^3\right)\\
&\qquad +a^2c^2\left(a^3+b^3+c^3\right)-a^2b^2c^2(a+b+c)\\
&= \frac{1}{2}\left(a^3+b^3+c^3\right)\left[\left(a^2b^2+b^2c^2\right)+\left(b^2c^2+c^2a^2\right)\right.\\
&\qquad \left.+\left(c^2a^2+a^2b^2\right)\right] \quad (*)
\end{aligned}$$

Mặt khác $a^2b^2+b^2c^2=b^2\left(a^2+c^2\right)$

$$=b^2\left[(a+c)^2-2ac\right]=b^4-2ab^2c,$$

tương tự: $b^2c^2+c^2a^2=c^4-2abc^2$,

$c^2a^2+a^2b^2=a^4-2a^2bc.$

Do đó ngoặc móc vuông của (*) bằng

$$a^4+b^4+c^4-2abc(a+b+c)=a^4+b^4+c^4.$$

Từ đó suy ra đpcm.

II. Tổng bậc nhất không đổi và kĩ thuật nhân thêm biến số, mô tả kết luận theo giả thiết

Bài toán 5. *Nếu các số hữu tỉ a,b,c,m thoả mãn $a+b+c=m$ thì $P=(am+bc)(bm+ca)(cm+ab)$ là bình phương một số hữu tỉ.*

Lời giải. Nhân thêm biến số vào giả thiết ta được:

$am=a^2+ab+ac,$ khi đó

$am+bc=(a^2+ab)+(ac+bc)=(a+b)(a+c).$

Tương tự ta cũng có: $bm+ca=(b+c)(b+a)$, $cm+ab=(c+b)(c+a)$. Từ đó ta có đpcm.

Bài tập 5. *Cho các số a,b,c dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh*

$$\sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}}+\sqrt{\frac{(b+ca)(c+ab)}{a+bc}}+\sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}=2.$$

Lời giải. Áp dụng kết quả bài toán 5, ta được:

$$\sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}}=\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)}{(c+a)(c+b)}}=a+b;$$

Tương tự ta cũng có: $\sqrt{\dfrac{(b+ca)(c+ab)}{a+bc}}=b+c$;

$$\sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}=c+a.$$

Từ đó ta có VT $=2(a+b+c)=2$ (đpcm).

III. Tổng bậc 2 không đổi và kĩ thuật thay giá trị, mô tả kết luận theo giả thiết

Bài toán 6. *Nếu các số hữu tỉ a,b,c,m thoả mãn $ab+bc+ca=m$ thì*

$$\left(m+a^2\right)\left(m+b^2\right)\left(m+c^2\right)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

Lời giải. Biến đổi

$m+a^2=(a^2+ab)+(bc+ca)=(a+b)(a+c)$ (1).

Tương tự: $m+b^2=(b+a)(b+c)$ (2);

$m+c^2=(c+b)(c+a)$ (3).

Nhân theo vế (1), (2), (3) ta có đpcm.

IV. Tổng bậc hai bằng không và kĩ thuật mô tả kết luận theo giả thiết

Bài toán 7. *Cho các số hữu tỉ a, b, c khác 0 thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 0$. Chứng minh:*

1) $M = (a^2 + 2bc)(b^2 + 2ca)(c^2 + 2ab)$ *là bình phương một số hữu tỉ.*

2) $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} = 0;$

3) $\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} = -1.$

Lời giải. 1) Ta có: $a^2 + 2bc = a^2 + bc - ab - ca$

$$= a(a-b) - c(a-b) = (a-b)(a-c).$$

Tương tự ta cũng có: $b^2 + 2ca = (b-a)(b-c)$, $c^2 + 2ab = (c-a)(c-b)$. Do đó ta có:

$$M = \left[(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2.$$

2) Theo kết quả của câu 1) ta có:

$$\text{VT} = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$= -\frac{a-b+b-c+c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$$

V. Tổng nghịch đảo không đổi và kĩ thuật nhóm các hạng tử

Bài toán 8. *Nếu* $\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = m$ *thì tồn tại một trong ba số x, y, z bằng m.*

Lời giải. *Cách 1.* Từ giả thiết suy ra

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{z} = -\frac{x+y}{z(x+y+z)}$$

hay $(x+y)(zx + yz + z^2) + (x+y)xy = 0$

$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0.$

Điều này chứng tỏ $x + y = 0$ hoặc $y + z = 0$ hoặc $z + x = 0$.

Từ đó rút ra $x = m$ hoặc $y = m$, hoặc $z = m$.

Cách 2. Từ giả thiết và áp dụng HQ7, HQ8 ta có:

$(x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz$

$$= (x+y)(y+z)(z+x) = 0.$$

Suy ra $x = m$ hoặc $y = m$ hoặc $z = m$.

Bài tập 8. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$. *Chứng minh rằng*

1) *Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số đối nhau.*

2) $\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{y^{2n+1}} + \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3)* $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x+y+z}}$.

Hướng dẫn. Từ giả thiết suy ra

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{z} = -\frac{x+y}{z(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{xy} = -\frac{x+y}{zx + yz + z^2}$$

hay $(x+y)(zx + yz + z^2) + (x+y)xy = 0$

$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0.$

Nếu $x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^{2n+1} = -y^{2n+1}$

do đó $x^{2n+1} + y^{2n+1} = 0, \frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{y^{2n+1}} = 0.$

Tương tự, ta suy ra các đẳng thức cần chứng minh.

VI. Tích không đổi và các kĩ thuật: thay hằng bằng biến, thay biến bằng hằng, đổi biến số, thay bằng nghịch đảo

Bài toán 9. *Cho $xyz = 1$. Chứng minh*

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

Lời giải. *Cách 1.* Biến đổi VT bằng cách, thay hằng số $1 = xyz$ vào tử và mẫu của phân thức thứ hai:

$$\frac{1}{1+y+yz} = \frac{xyz}{xyz+y+yz} = \frac{y.zx}{y(1+z+zx)} = \frac{zx}{1+z+zx};$$

Thay $1 = xyz$ hai lần, lần thứ nhất vào tử và mẫu của phân thức thứ nhất, lần thứ hai vào mẫu của phân thức vừa thu được, ta có:

$$\frac{1}{1+x+xy} = \frac{xyz}{xyz+x+xy} = \frac{x.yz}{x(1+y+yz)}$$

$$= \frac{yz}{xyz+y+yz} = \frac{y.z}{y(1+z+zx)} = \frac{z}{1+z+zx}.$$

Vậy $\text{VT}=\dfrac{1+z+zx}{1+z+zx}=1=\text{VP}.$

Cách 2. Vì $\text{VP}=1=\dfrac{1+x+xy}{1+x+xy}$ nên biểu thị các phân thức ở VT bằng cách nhân thêm biến số. Nhân tử và mẫu của phân thức thứ hai với x, phân thức thứ ba với xy, ta được:

$$\frac{1}{1+y+yz}=\frac{x}{x+xy+xyz}=\frac{x}{1+x+xy};$$

$$\frac{1}{1+z+zx}=\frac{xy}{xy+xyz+x.xyz}=\frac{xy}{1+x+xy}.$$

Do đó $\text{VT}=\dfrac{1+x+xy}{1+x+xy}=1=\text{VP}.$

Cách 3. Đổi biến số, đặt $x=\dfrac{a}{b},\ y=\dfrac{b}{c},\ z=\dfrac{c}{a},$ $abc\neq 0$ thì $xyz=1$. Khi đó

$$\text{VT}=\frac{bc}{ab+bc+ca}+\frac{ca}{ab+bc+ca}+\frac{ab}{ab+bc+ca}$$
$$=\frac{ab+bc+ca}{ab+bc+ca}=1=\text{VP}.$$

Cách 4. Thay bằng nghịch đảo $yz=\dfrac{1}{x},\ z=\dfrac{1}{xy}$ vào VT, ta có:

$$\text{VT}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+\frac{1}{x}}+\frac{1}{1+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}}$$
$$=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1=\text{VP}.$$

VII. Tỉ số không đổi với tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và kĩ thuật tham số hóa, kĩ thuật nhân thêm biến số

Bài toán 10. 1) *Cho* $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$. *Chứng minh*

$$\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}.$$

2) *Cho* $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}$. *Chứng minh*

$$\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}.$$

Lời giải. 1) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+b+c}{b+c+d}$,

suy ra: $\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{c}.\dfrac{c}{d}=\left(\dfrac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3$.

Do đó: $\dfrac{a}{d}=\left(\dfrac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3$ (1)

Lại có $\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{c}.\dfrac{c}{d}=\dfrac{a^3}{b^3}=\dfrac{b^3}{c^3}=\dfrac{c^3}{d^3}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$

hay $\dfrac{a}{d}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

2) Đặt $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}=t$

thì $t^2=\dfrac{(x^2-yz)^2}{a^2}=\dfrac{(y^2-zx)(z^2-xy)}{bc}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$t^2=\frac{x^4-2x^2yz+y^2z^2-y^2z^2+xy^3+xz^3-x^2yz}{a^2-bc}$$
$$=\frac{x\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)}{a^2-bc},$$

suy ra $\dfrac{x}{a^2-bc}=\dfrac{t^2}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$ (1).

Tương tự như trên, ta cũng có:

$$\frac{y}{b^2-ca}=\frac{t^2}{x^3+y^3+z^3-3xyz}\quad (2);$$

$$\frac{z}{c^2-ab}=\frac{t^2}{x^3+y^3+z^3-3xyz}\quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta có đpcm.

Bài toán 11. *Cho* $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. *Chứng minh các đẳng thức sau:*

1) $\dfrac{(a-b)^2}{(c-d)^2}=\dfrac{ab}{cd}$; 2) $\dfrac{ac}{bd}=\dfrac{a^2-c^2}{b^2-d^2}$;

3) $\dfrac{ab}{a^2-b^2}=\dfrac{cd}{c^2-d^2}$; 4) $\dfrac{(a+b)^2}{(c+d)^2}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$;

5) $\dfrac{(a+b)^3}{(c+d)^3}=\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$.

Lời giải.

1) Từ giả thiết $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, suy ra $\begin{cases}a=ct\\ b=dt\end{cases}(t\neq 0)$. Biến đổi hai vế bằng cách thay $a=ct, b=dt$ ta có:

$$\text{VT}=\frac{t^2(c-d)^2}{(c-d)^2}=t^2;\ \ \text{VP}=\frac{t^2cd}{cd}=t^2.$$

Từ đó ta có đpcm.

2) Các câu còn lại làm tương tự.

VIII. Tổng các lũy thừa đồng bậc không đổi và kĩ thuật biến đổi tương đương

Bài toán 12. *1) Cho các số thực a,b,x,y thỏa mãn hệ điều kiện:* $x+y=a+b$ (1)

và $x^2+y^2=a^2+b^2$ (2).

Chứng minh $x^n+y^n=a^n+b^n$ (3), $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2) Chứng minh rằng nếu đẳng thức

$$x^n+y^n+z^n=a^n+b^n+c^n$$

đúng với $n=1,\ 2,\ 3$ *thì cũng đúng* $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

3) Cho các số thực a,b,x,y *thỏa mãn hệ điều kiện:* $x^2+y^2=1$ (1) *và* $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}$ (2).

Chứng minh $\frac{x^{2n}}{a^n}+\frac{y^{2n}}{b^n}=\frac{2}{(a+b)^n}$.

Lời giải. 1) Biến đổi giả thiết, từ (1) ta có: $x-a=b-y$ (i), $x-b=a-y$ (i'); từ (2) ta có:

$$x^2-a^2=b^2-y^2$$

hay $\quad (x-a)(x+a)=(b-y)(b+y) \quad (ii)$

và $\quad x^2-b^2=a^2-y^2$

hay $\quad (x-b)(x+b)=(a-y)(a+y) \quad (ii')$.

Từ $(i'),(ii')$ suy ra: $x-a=y-b=0\Leftrightarrow x=a;\ y=b$.

Từ $(i),(ii)$ suy ra: $x-b=y-a=0\Leftrightarrow x=b;\ y=a$.

Vậy ta luôn có (3) $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2) Với $n=1,2$ ta có: $\begin{cases}x+y+z=a+b+c\\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2\end{cases}$

$\Rightarrow(x+y+z)^2=(a+b+c)^2$ hay

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$
$$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$\Rightarrow xy+yz+zx=ab+bc+ca.$

Với $n=3$ ta có: $x^3+y^3+z^3=a^3+b^3+c^3$

$$\Rightarrow(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

$\Rightarrow xyz=abc$. Do đó x,y,z là nghiệm của PT:

$$X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc=0$$
$$\Leftrightarrow(X-a)(X-b)(X-c)=0\Leftrightarrow X=a,X=b,X=c.$$

Do đó (x,y,z) là hoán vị của (a,b,c). Vậy

$$x^n+y^n+z^n=a^n+b^n+c^n.$$

3) Biến đổi giả thiết:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{(bx^2-ay^2)^2}{ab(a+b)}+\frac{(x^2+y^2)^2}{a+b}.$$

Kết hợp với $x^2+y^2=1$, thu được:

$$\frac{(bx^2-ay^2)^2}{ab(a+b)}=0\Leftrightarrow bx^2=ay^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b}.$$

Từ đó rút ra:

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^n=\left(\frac{y^2}{b}\right)^n=\frac{1}{(a+b)^n}\Rightarrow\frac{x^{2n}}{a^n}+\frac{y^{2n}}{b^n}=\frac{2}{(a+b)^n}.$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Áp dụng HQ1, HQ2. Chứng minh các đẳng thức

1) $\sqrt{x^2+y^2+\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}}=\left|x+y-\frac{xy}{x+y}\right|$;

2) $\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{x^2}{(xy+1)^2}}=\left|x+\frac{1}{y}-\frac{x}{xy+1}\right|$;

3) $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$

$$=\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{c-a}\right|;$$

4) $\sqrt{1+2013^2+\frac{2013^2}{2012^2}}=2013.\frac{1}{2012}$;

5) $\sqrt{0,6^4+0,8^4+0,6^4.0,8^4}=0,7696$;

6) $\sqrt{2006^2+2007^2+4026042^2}=2006^2+2006+1$.

2. Áp dụng HQ3, chứng minh các đẳng thức

1) $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

2) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2-ba}{(c+a)(c+b)}=0$

3) $M=N$, với

$$M=\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)};$$

$$N=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ba}{(c+a)(c+b)};$$

4) $\dfrac{(b+c)^2}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{(c+a)^2}{(b-c)(a-b)}+\dfrac{(a+b)^2}{(c-a)(b-c)}=-1$

5) $\dfrac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(a-b)}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(b-c)}=-1$

6) $\dfrac{mbc+n}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{mca+n}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{mab+n}{(c-a)(c-b)}=m.$

3. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

1) $a^5+b^5+c^5=-5abc(ab+bc+ca)$;

2) $a^5+b^5+c^5=\dfrac{5}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)$;

3) $a^7+b^7+c^7=7abc(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$;

4) $a^7+b^7+c^7=\dfrac{7}{10}(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$;;

5) $a^7+b^7+c^7=\dfrac{7}{12}(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$;

6) Tổng $Q=a^5(b^2+c^2)+b^5(c^2+a^2)+c^5(a^2+b^2)$ bằng các biểu thức sau:

a) $3abc(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$;

b) $3abc\left(ab+bc+ca\right)^2$;

c) $\dfrac{3abc}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$.

7) $M.N.P=1$, với $M=\dfrac{4bc-a^2}{bc+2a^2}$;

$N=\dfrac{4ca-b^2}{ca+2b^2}$; $\quad P=\dfrac{4ab-c^2}{ab+2c^2}$;

8) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}+\dfrac{b^2+c^2}{b+c}+\dfrac{c^2+a^2}{c+a}=\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}$.

9) $\dfrac{\left(ab+2c^2\right)\left(bc+2a^2\right)\left(ca+2b^2\right)}{\left(2ab^2+2bc^2+2ca^2+3abc\right)^2}=-1$.

4. Chứng minh rằng, nếu

1) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a+b+c}$ thì

$\sqrt[2n+1]{a}+\sqrt[2n+1]{b}+\sqrt[2n+1]{c}=\sqrt[2n+1]{a+b+c}$ với $n\in\mathbb{N}^*$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}=\dfrac{1}{3}$

và $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$ thì trong ba số a,b,c ít nhất có một số bằng 27.

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}=\dfrac{1}{2}$ và $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=2$ thì trong ba số a,b,c ít nhất có một số bằng 8.

4) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\dfrac{4}{\sqrt[3]{a}}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{b}}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{c}}$ và $\sqrt[3]{abc}=8$ thì trong ba số a,b,c ít nhất có một số bằng 8.

5. Nếu các số thực a,b,c khác 0 thỏa mãn đẳng thức $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$ thì tồn tại hai số bằng nhau.

6. Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số hữu tỉ thoả mãn $abc=1$ thì một trong ba số a,b,c bằng:

1) Bình phương một số hữu tỉ khi

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}=\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b};$$

2) Lập phương một số hữu tỉ khi

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}=\frac{b^3}{a}+\frac{a^3}{c}+\frac{c^3}{b};$$

3) Lũy thừa bậc 4 một số hữu tỉ khi

$$\frac{a}{b^4}+\frac{b}{c^4}+\frac{c}{a^4}=\frac{b^4}{a}+\frac{a^4}{c}+\frac{c^4}{b};$$

4) Lũy thừa bậc 5 một số hữu tỉ khi

$$\frac{a}{b^5}+\frac{b}{c^5}+\frac{c}{a^5}=\frac{b^5}{a}+\frac{a^5}{c}+\frac{c^5}{b}.$$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI, năm học 2019 - 2020

VÒNG 1

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

Câu 1.

1) $$P=\frac{\dfrac{(a+1)^2+3(a-1)^2}{(a-1)^2}}{\dfrac{(a-1)^2+3(a+1)^2}{(a+1)^2}}.\frac{a^3-1}{a^3+1}-\frac{2a}{a-1}$$

$$=\frac{(a+1)^2\left(4a^2-4a+4\right)}{(a-1)^2\left(4a^2+4a+4\right)}.\frac{(a-1)\left(a^2+a+1\right)}{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}-\frac{2a}{a-1}$$

$$=\frac{a+1}{a-1}-\frac{2a}{a-1}=-\frac{a-1}{a-1}=-1.$$

2) Đặt $u=\sqrt[3]{x^2}\geq 0; v=\sqrt[3]{y^2}\geq 0$. Đẳng thức ở giả thiết trở thành:

$$\sqrt{u^3+u^2v}+\sqrt{v^3+v^2u}=a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u^2(u+v)}+\sqrt{v^2(u+v)}=a$$

$$\Leftrightarrow u\sqrt{u+v}+v\sqrt{u+v}=a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u+v}(u+v)=a\sqrt{(u+v)^3}=a$$

$$\Leftrightarrow u+v=\sqrt[3]{a^2}\Rightarrow \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

Câu 2. Gọi v_1 (km/h) là vận tốc của *An* trên quãng đường AC ($v_1>0$); v_2 (km/h) là vận tốc của *Bình* trên quãng đường BC ($v_2>0$).Từ giả thiết ta có: $2v_1+2v_2=20\Leftrightarrow v_1+v_2=10$ (1)

và $\dfrac{2v_1}{v_2+1}-\dfrac{2v_2}{v_1-1}=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow\dfrac{v_1}{11-v_1}-\dfrac{10-v_1}{v_1-1}=\dfrac{2}{5}$ (do (1))

$\Leftrightarrow v_1^2+38v_1-264=0\Leftrightarrow v_1=6$ (km/h).

Câu 3. 1) Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases}a+b+1=0\\2a^2+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-a-1\\2a^2-a-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

2) Theo định lí Viète ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-a\\x_1x_2=b\end{cases};\begin{cases}x_3+x_4=-c\\x_3x_4=d\end{cases}$$

Ta có $P(x_3)+P(x_4)=Q(x_1)+Q(x_2)$

$$\Leftrightarrow x_3{}^2+x_4{}^2+a(x_3+x_4)+2b$$

$$=x_1{}^2+x_2{}^2+c(x_1+x_2)+2d$$

$$\Leftrightarrow x_3{}^2+x_4{}^2-(x_1+x_2)(x_3+x_4)+2x_1x_2$$

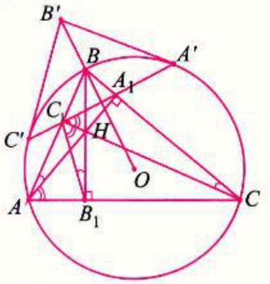
$$=x_1{}^2+x_2{}^2-(x_3+x_4)(x_1+x_2)+2x_3x_4$$

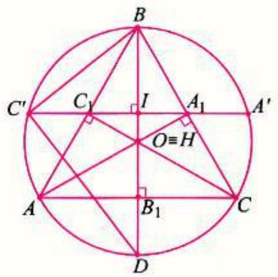
$$\Leftrightarrow x_3{}^2+x_4{}^2-2x_3x_4=x_1{}^2+x_2{}^2-2x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow (x_3-x_4)^2=(x_1-x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow |x_1-x_2|=|x_3-x_4|.$$

Câu 4.





1) Từ các tứ giác nội tiếp AB_1HC_1; CA_1C_1A ta có:

$\widehat{HB_1C_1}=\widehat{HAC_1}=\widehat{A_1CC_1};\widehat{HC_1B_1}=\widehat{HAB_1}=\widehat{CC_1A_1}$.

Suy ra $\Delta B_1HC_1\sim\Delta CA_1C_1$

$$\Rightarrow\frac{HB_1}{A_1C}=\frac{HC_1}{A_1C_1}\Rightarrow HB_1.A_1C_1=HC_1.A_1C.$$

2) Ta có $\widehat{BA_1C'}=180^0-\widehat{C_1A_1C}=\widehat{BAC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{BC'}+\overset{\frown}{CA'}\right)=\frac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{BA'}+\overset{\frown}{A'C}\right)$

Suy ra $\overset{\frown}{BC'}=\overset{\frown}{BA'} \Rightarrow BC'=BA'$.

Mà $B'C'=B'A'$ và $OC'=OA'$, nên 3 điểm $B; B'; O$ thuộc trung trực của $A'C'$ (đpcm).

3) Ta có H trùng với O. Gọi D là giao của BH với đường tròn (O), I là giao của BD với $A'C'$. Khi đó $IA'=IC'$ và tam giác $BC'D$ vuông tại C'. Từ đó $C'I=IB.ID=IB(2R-IB)=$

$$=\frac{1}{2}\frac{3}{2}R\,(2R-\frac{1}{2}\frac{3}{2}R)=\frac{15}{16}R^2$$

$$\Rightarrow C'I=\frac{\sqrt{15}}{4}R \Rightarrow A'C'=\frac{\sqrt{15}}{2}R.$$

Câu 5. Ta có

$$P=xy(xy+6x-2y-12)+12\left(x^2-2x+3\right)$$
$$+3y^2+18y+x^2-2x+1+y^2+6y+9$$
$$=x^2y^2+6x^2y-2xy^2-12xy+12\left(x^2-2x+3\right)$$
$$+3y^2+18y+(x-1)^2+(y+3)^2$$
$$=y^2\left(x^2-2x+3\right)+6y\left(x^2-2x+3\right)$$
$$+12\left(x^2-2x+3\right)+(x-1)^2+(y+3)^2$$
$$=\left(x^2-2x+3\right)\left(y^2+6y+12\right)+(x-1)^2+(y+3)^2$$
$$=\left[(x-1)^2+2\right]\left[(y+3)^2+3\right]$$
$$+(x-1)^2+(y+3)^2\ge 6 \text{ với } \forall x;y\in\mathbb{R},$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1; y=-3$. Vậy min$P=6$.

VÒNG 2

(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

Câu 1. Ta có $a^3+b^3=a^2b^2(ab-3)$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3-a^3b^3+3a^2b^2=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)-a^3b^3+3a^2b^2=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-ab)\left[(a+b)^2+(a+b)ab+(ab)^2\right]$$
$$-3ab(a+b-ab)=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-ab)\left[a^2+b^2-ab+(a+b)ab+(ab)^2\right]=0.$$

Mặt khác, do a và b phân biệt, nên:

$$a^2+b^2-ab+(a+b)ab+(ab)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a+ab)^2+(b+ab)^2\right]>0.$$

Vậy $a+b-ab=0$ hay $T=0$.

Câu 2. Đặt $S(x)=P(x)+Q(x)+R(x)$

$$=(m_1+m_2+m_3)x^2+(n_1+n_2+n_3)x+k_1+k_2+k_3$$

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} S(c_1)=S(c_2) & (1)\\ S(b_1)=S(b_2) & (2)\\ S(a_1)=S(a_2) & (3)\end{cases}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow m{c_1}^2+nc_1=m{c_2}^2+nc_2$

$$\Leftrightarrow m\left({c_1}^2-{c_2}^2\right)+n(c_1-c_2)=0$$
$$\Leftrightarrow (c_1-c_2)\left[m(c_1+c_2)+n\right]=0$$
$$\Rightarrow c_1+c_2=-\frac{n}{m} \text{ (do } c_1\ne c_2\text{)}.$$

Tương tự $a_1+a_2=b_1+b_2=-\frac{n}{m}$. Suy ra điều cần chứng minh.

Câu 3. 1) Biến đổi

$$x^2y^2-4x^2y+y^3+4x^2-3y^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+y+1\right)(y-2)^2=3.$$

Suy ra $(y-2)^2=1$, $x^2+y+1=3$

Trường hợp 1. $y=3\Rightarrow x^2+4=3$ (loại).

Trường hợp 2. $y=1\Rightarrow x^2+2=3\Rightarrow x=\pm 1$.

Vậy $(x\,;y)\in\{(1;1),(-1;1)\}$.

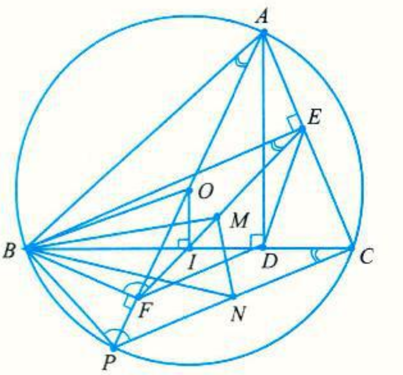
2) Do $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 14 nên $a^3+b^3+c^3$ là số chẵn. Do đó trong ba số a^3, b^3, c^3 phải có một số chẵn. Vì vậy trong ba số a,b,c phải có một số chẵn. Suy ra $abc \vdots 2$. Mặt khác với mỗi số nguyên x thì x^3

$\equiv 0, \pm 1 \pmod 7$. Đặc biệt, nếu cả ba số a, b, c không chia hết cho 7 thì

$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod 7,$$ mâu thuẫn.

Vậy $abc \vdots 7$, suy ra $abc \vdots 14$.

Câu 4.



1) Từ giả thiết ta có A, B, D, E, F thuộc đường tròn đường kính AB. Do $ABFD$ là tứ giác nội tiếp nên:

$$\widehat{BDF} = \widehat{BAF} = \widehat{BAO} = \frac{180^0 - \widehat{AOB}}{2}$$

$$= 90^0 - \widehat{C} = \widehat{EBC}.$$

Do đó $DF // BE$ hay $BEDF$ là hình thang.

Lại có $BEDF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $BEDF$ là hình thang cân.

2) Gọi I là trung điểm của BC. Do ΔBCE vuông đỉnh E nên ta có $\widehat{BIE} = 2\widehat{C}$. (1)

Mặt khác I là trung điểm của BC nên OI vuông góc với BC hay tứ giác $BOIF$ nội tiếp đường tròn đường kính BO. Do đó:

$$\widehat{BIF} = \widehat{BOF} = 180^0 - \widehat{AOB} = 180^0 - 2\widehat{C}. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được $\widehat{BIE} + \widehat{FIB} = 180^0$.

Suy ra ba điểm E, F, I thẳng hàng hay EF đi qua trung điểm I của BC.

3) Do hai tứ giác $ABPC$ và $ABFE$ nội tiếp nên ta có: $\begin{cases} \widehat{BEF} = \widehat{BAF} = \widehat{BCP} \\ \widehat{BFE} = 180^0 - \widehat{A} = \widehat{BPC} \end{cases}$.

Do đó $\Delta BFE \sim \Delta BPC$ (g.g),

suy ra $\begin{cases} \widehat{BEM} = \widehat{BCN} \\ \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{EF}{CP} = \dfrac{EM}{CN} \end{cases}$.

Hay $\Delta BEM \sim \Delta BCN$ (c.g.c).

Từ đó suy ra $\begin{cases} \widehat{EBM} = \widehat{CBN} \\ \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BM}{BN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{EBC} = \widehat{MBN} \\ \dfrac{BE}{BM} = \dfrac{BC}{BN} \end{cases}$.

Hay $\Delta EBC \sim \Delta MBN$ (c.g.c).

Do đó ta có $\widehat{BMN} = \widehat{BEC} = 90^0$.

Câu 5. 1) Gọi $A_1 = \{a, b, c\}$,

đặt $A_1 \cap A_i = \{\alpha_i\}, i = 2, 3, \ldots, 8 \left[\begin{array}{l} \alpha_i = a \\ \alpha_i = b \\ \alpha_i = c \end{array}\right.$.

Suy ra 3 phần tử a, b, c rơi vào 7 tập hợp $A_2, \ldots, A_8$. Do đó tồn tại ít nhất một phần tử thuộc vào 3 tập trong 7 tập $A_2, \ldots, A_8$. Giả sử được $a \in A_2, a \in A_3, a \in A_4$, $a \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

Suy ra $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{a\}$.

2) Ta chứng minh $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{2019} = \{a\}$.

Thật vậy: Giả sử $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{2019} = \varnothing$ và giả sử $a \not\in A_{2019}$.

Xét $A_1 \cap A_{2019} = \{m_1\}, A_2 \cap A_{2019} = \{m_2\}$,

$A_3 \cap A_{2019} = \{m_3\}, A_4 \cap A_{2019} = \{m_4\}$.

Suy ra trong các phần tử m_1, m_2, m_3, m_4 có 2 phần tử trùng nhau. Giả sử $m_1 = m_2 = u$, suy ra $u \in A_1, u \in A_2$

$\Rightarrow u \in A_1 \cap A_2 = \{a\} u = a \in A_{2019}$. Vô lý.

Vậy $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{2019} \neq \varnothing$.

Mà $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{a\}$,

suy ra $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{2019} = \{a\}$ (1).

Từ (1) suy ra $A_1 = \{a, \alpha_1, \alpha_2\}$, $A_2 = \{a, \alpha_3, \alpha_4\}, \ldots$, $A_{2019} = \{a, \alpha_{4037}, \alpha_{4038}\}$, trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{4038}$ là các phần tử phân biệt. Suy ra số phần tử của X lớn hơn hay bằng 4039.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội) **Giới thiệu**

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2019 - 2020

VÒNG 1

(Dàng cho mọi thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 (2 *điểm*). Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{2\sqrt{x}}{9-x}+\frac{1}{3+\sqrt{x}}\right).\frac{x\left(3-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}-2}.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các số thực x để $P=-\frac{1}{3}$.

Câu 2 (2 *điểm*). Cho phương trình

$$x^2-2(m+1)x+m-4=0 \quad (1)$$

(x là ẩn, m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m=-2$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=25.$$

Câu 3 (2 *điểm*).

a) Giải phương trình

$$4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}.$$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+3x^2y=5\\ y^3+6xy^2=7\end{cases}$.

Câu 4 (3 *điểm*). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. Gọi K là điểm chính giữa cung AB, M là điểm di động trên cung AK (M không trùng với A và K). Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng BM sao cho $AM=BN$. Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng AM và OK.

a) Chứng minh MK là đường phân giác của góc $\widehat{DMB}$.

b) Chứng minh $\widehat{AMK}=\widehat{BNK}$.

c) Chứng minh rằng khi điểm M di động trên cung AK thì đường thẳng vuông góc với BM tại N luôn đi qua một điểm E cố định. Xác định vị trí của M để đường thẳng DE song song với đường thẳng AB.

Câu 5 (1 *điểm*). Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}.$$

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (4 *điểm*)

a) Giải phương trình

$$x^2-2x-2\sqrt{x^2-2x+2}-1=0.$$

b) Giải phương trình

$$\frac{1}{2x^2-x+1}+\frac{3}{2x^2-x+3}=\frac{10}{2x^2-x+7}.$$

c) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2} \\ y^2+xy+x^2=4y+1 \end{cases}.$$

Câu 2 (*1,5 điểm*).

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $9x^2-3xy-24x-2y^2+y+28=0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương p, m, n thỏa mãn $2^m p^2+1=n^5$, trong đó p là số nguyên tố.

Câu 3 (*1 điểm*). Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Câu 4 (*3 điểm*). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC, gọi N là giao điểm của hai đường thẳng ID và EF. Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt hai đường thẳng AB, AC lần lượt tại các điểm Q, P. Qua điểm A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng EF tại điểm K.

a) Chứng minh các tứ giác $INQF$, $INEP$ nội tiếp đường tròn và tam giác IPQ cân.

b) Chứng minh $\widehat{IAM}=\widehat{FKI}$.

c) Chứng minh hai đường thẳng IM, DK vuông góc với nhau.

Câu 5 (*0,5 điểm*). Bạn *Bình* có 19 viên bi màu xanh, 21 viên bi màu đỏ và 23 viên bi màu vàng. *Bình* thực hiện một trò chơi theo quy tắc sau: Mỗi lần *Bình* chọn 2 viên bi có màu khác nhau, rồi sơn chúng bởi màu thứ ba (Ví dụ: Nếu *Bình* chọn 2 viên bi gồm 1 viên bi màu xanh và 1 viên bi màu đỏ thì *Bình* sơn 2 viên bi này thành màu vàng). Hỏi sau một số hữu hạn lần thực hiện trò chơi theo quy tắc trên, bạn *Bình* có thể thu được tất cả các viên bi cùng một màu hay không ? Tại sao ?

TRẦN MẠNH CƯỜNG
(*GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc*) **Giới thiệu**

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP CÓ VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV Trung tâm Gia sư toantuhoc.vn, Đồng Tháp)

Trong những năm gần đây, đề thi chọn học sinh giỏi toán THPT cũng như đề thi tuyển sinh ĐH, CĐ thường có câu khó nằm trong những dạng có liên quan đến kĩ năng giải toán có vận dụng phương pháp hàm số; chẳng hạn như: Giải phương trình (PT), bất phương trình (BPT), hệ phương trình (HPT), chứng minh bất đẳng thức (BĐT), tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức (*). Không ít bạn học sinh còn nhiều lúng túng khi giải các bài toán (*) bằng phương pháp hàm số. Nhằm giúp các bạn học sinh làm tốt phần này, bài viết xin giới thiệu một số thí dụ minh họa các dạng toán trên.

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để giải quyết tốt một bài toán thì ngoài việc các bạn biết được phương pháp giải cho bài toán là cốt lõi, bên cạnh đó các bạn cũng cần kĩ năng giải toán thật tốt.

Trong phương pháp hàm số điều quan trọng là dựa vào tính đơn điệu của hàm số để thiết lập mối quan hệ giữa các ẩn. Mệnh đề và tính chất thường hay sử dụng nhất trong phương pháp này là

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D (với D là một khoảng hoặc một đoạn hoặc nửa khoảng) Hàm số đó được gọi là:

– đồng biến (tăng) trên D nếu với mọi $u, v \in D$, $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.

– nghịch biến (giảm) trên D nếu với mọi $u, v \in D$, $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.

Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên D được gọi chung là đơn điệu trên D.

• Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập $D \subset \mathbb{R}$. Khi đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ (với bất kì $u, v \in D$).

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và đơn điệu trên tập D. Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$ thì PT $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

• Cho $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và biến thiên ngược nhau trên đó. Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì PT $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

B. MỘT SỐ THÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình

Thí dụ 1. *Giải phương trình* $\dfrac{2\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt[3]{3x+1}-2} = \dfrac{1}{x+1}$.

Lời giải. ĐK: $x \geq -\dfrac{1}{2}$ và $x \neq \dfrac{7}{3}$ (*).

Ta biến đổi PT đã cho về dạng:

$$(x+1)\left(2\sqrt{2x+1}-3\right) = \sqrt[3]{3x+1}-2$$

$\Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+1} = 3x+1+\sqrt[3]{3x+1}$ (**).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên tập $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (**) được viết dưới dạng:

$$f\left(\sqrt{2x+1}\right) = f\left(\sqrt[3]{3x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \sqrt[3]{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ (2x+1)^3 = (3x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ x^2(8x+3) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 0$.

Đối chiếu với ĐK (*) ta được nghiệm của PT đã cho là $x=0$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{2}\log_2(x+2)+2(x+1)$$
$$=\log_2\frac{2x+1}{x}+3\sqrt{x+2}+\frac{5x+2}{x^2}.$$

Lời giải. Điều kiện để PT đã cho có nghĩa là

$$\begin{cases}x+2>0, x\neq 0\\ \dfrac{2x+1}{x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<-\dfrac{1}{2}\\ x>0\end{array}\right. (*).$$

Ta biến đổi PT đã cho về dạng:

$$\log_2\sqrt{x+2}+2(x+1)$$
$$=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+3\sqrt{x+2}+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}$$
$$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+2}+2(x+2)-3\sqrt{x+2}$$
$$=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+2\left(2+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(2+\frac{1}{x}\right) \quad (**).$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+2t^2-3t$ trên $(0;\ +\infty)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+4t-3\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{t\ln 2}\cdot 4t}-3$

$=\dfrac{4}{\sqrt{\ln 2}}-3>0, \forall t>0,$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;\ +\infty)$. Khi đó (**) được viết dưới dạng: $f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x+2=\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0\Leftrightarrow (x+1)(x^2-3x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ hoặc } x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Đối chiếu với ĐK (*) ta được nghiệm của PT đã cho là $x=-1,\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}.$

Thí dụ 3. *Giải bất phương trình*

$$x^3-6x^2+12x-7>\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}.$$

Lời giải. BPT đã cho tương đương với

$$\frac{(x-1)^3}{2}+(x-1)>\frac{-x^3+9x^2-19x+11}{2}$$
$$+\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^3}{2}+t$ trên tập $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=\dfrac{3t^2}{2}+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (*) được viết dưới dạng:

$$f(x-1)>f\left(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\right)$$
$$\Leftrightarrow x-1>\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^3>-x^3+9x^2-19x+11$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ 1<x<2\end{array}\right..$$

Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\ \sqrt{11x+2y-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2-y-1\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $11x+2y-1\geq 0$.

PT thứ nhất của hệ tương đương với:

$$3x+\sqrt{1+(3x)^2}=(-y)+\sqrt{1+(-y)^2} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$ trên tập $\mathbb{R}$. Ta có:

$f'(t)=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}}\geq 0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ (1) có $f(3x)=f(-y)$, suy ra $3x=-y$.

Thay $-y=3x$ vào PT thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1 \quad (2).$$

Giải (2), ĐK: $x\geq\dfrac{1}{5}$.

$$(2)\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x-1}-2\right)+\left(\sqrt[3]{9-x}-2\right)=2x^2+3x-5$$
$$\Leftrightarrow\frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1-x}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{9-x}+4}$$
$$=(x-1)(2x+5)$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{9-x}+4}+2x+5 \ (3)\end{array}\right.$$

PT(3) vô nghiệm vì $\text{VT}(3)\leq\dfrac{5}{2}$, $\text{VP}(3)>5$.

Do đó PT(2) có nghiệm $x=1$, suy ra $y=-3$.

Thử lại ta thấy nghiệm của HPT đã cho là:

$$(x;\ y)=(1;\ -3).$$

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+1}{y^2+1} \\ 2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9y^2+16} \end{cases}.$$

Lời giải. PT thứ nhất của hệ tương đương với:

$$e^{x^2}(x^2+1)=e^{y^2}(y^2+1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=e^t(t+1)$ trên $[0;\ +\infty)$. Ta có $f'(t)=e^t(t+2)>0$ với mọi $t\geq 0$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;\ +\infty)$. Từ (1) có:

$$f(x^2)=f(y^2)\Leftrightarrow x^2=y^2.$$

Thay $y^2=x^2$ vào PT thứ hai của hệ ta được:

$$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16} \quad (2)$$

Giải (2), ĐK: $-2\leq x\leq 2$ (*)

Bình phương hai vế của PT(2), sau đó khai triển và rút gọn lại ta được:

$$4(8-2x^2)+16\sqrt{8-2x^2}-x^2-8x=0.$$

Đặt $t=\sqrt{8-2x^2}\,(t\geq 0)$ thì PT trên trở thành:

$4t^2+16t-x^2-8x=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{x}{2}$ hoặc $t=-\dfrac{x}{2}-4<0$ (loại do (*)).

Với $t=\dfrac{x}{2}$ thì: $\sqrt{8-2x^2}=\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq 0 \\ 4(8-2x^2)=x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, suy ra $y=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Thử lại ta thấy tập nghiệm của HPT đã cho là:

$$(x;\ y)\in\left\{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\ \frac{4\sqrt{2}}{3}\right);\ \left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\ -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\right\}.$$

➤***Nhận xét.***

• Điểm mấu chốt cách giải trong thí dụ 1 và thí dụ 2 là biến đổi PT đã cho về dạng $f(u)=f(v)$ với hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên tập $D\subset\mathbb{R}$. Từ đó suy ra $u=v$.

• Cách giải trong thí dụ 3 sẽ trở nên phức tạp khi ta lập phương hai vế của BPT đã cho. Nên điểm mấu chốt cách giải trong thí dụ 3 là biến đổi BPT đã cho về dạng $f(u)>f(v)$, rồi vận dụng tính đơn điệu của hàm số f trên D nào đó. Từ đó suy ra tập nghiệm của BPT đã cho.

• Điểm mấu chốt cách giải trong thí dụ 4 và thí dụ 5 là biến đổi một PT của hệ về dạng $f(u)=f(v)$ với hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên tập $D\subset\mathbb{R}$. Từ đó suy ra $u=v$, sau đó vận dụng một phương pháp hoặc nhiều phương pháp phối hợp như phương pháp thế, đặt ẩn phụ,... để tìm nghiệm của HPT.

Dạng 2. Chứng minh bất đẳng thức

Thí dụ 6. *Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh:*

$$\frac{16}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+1}}-\frac{3(xy+yz+zx+1)}{x+y+z}\geq 4.$$

Lời giải. Gọi P là vế trái của BĐT cần chứng minh. Sử dụng $x^2+y^2+z^2=3$, ta biến đổi P về dạng

$$P=\frac{32}{\sqrt{2\left[9-(x^4+y^4+z^4)\right]+4}}+\frac{3\left[1-(x+y+z)^2\right]}{2(x+y+z)}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$x^4+x+x\geq 3x^2$, $y^4+y+y\geq 3y^2$, $z^4+z+z\geq 3z^2$.

Suy ra: $x^4+y^4+z^4\geq 9-2(x+y+z)$.

Do đó: $P\geq\dfrac{32}{\sqrt{4(x+y+z)+4}}+\dfrac{3\left(1-(x+y+z)^2\right)}{2(x+y+z)}$.

Đặt $t=x+y+z$, $t\in\left[\sqrt{3};3\right]$

$\left(\text{do } x^2+y^2+z^2\leq(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)\right)$.

Khi đó $P\geq\dfrac{16}{\sqrt{t+1}}+\dfrac{3(1-t^2)}{2t}$.

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{16}{\sqrt{t+1}}+\dfrac{3(1-t^2)}{2t}$ với $t\in\left[\sqrt{3};3\right]$.

Ta có:

$$f'(t) = -\frac{8}{\sqrt{(t+1)^3}} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{t^2} - 1\right) \le -\frac{8}{\sqrt{4^3}} + \frac{3}{2}\left(-\frac{10}{9}\right) < 0$$

với mọi $t \in \left[\sqrt{3};3\right]$, nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\left[\sqrt{3};3\right]$. Suy ra $f(t) \ge f(3) = 4$.

Từ đó suy ra BĐT được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

➤***Nhận xét.*** Mấu chốt cách giải trong thí dụ 6 là tương ứng với mỗi BĐT cần chứng minh, ta cần xây dựng một hàm số, rồi nghiên cứu tính đơn điệu của nó trên các đoạn thích hợp.

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Thí dụ 7. *Cho a, b, c là các số dương và thỏa mãn $abc = \frac{1}{6}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a^2}{(1+a)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{36c^3}{(1+3c)^3}.$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{2b}, z = \frac{1}{3c}$ với $x, y, z > 0$ thì $xyz = 1$.

Biểu thức P trở thành:

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{4}{3(1+z)^3}.$$

Ta chứng minh: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \ge \frac{1}{1+xy}$ (1).

Thật vậy, BĐT(1) $\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + (1-xy)^2 \ge 0$ luôn đúng.

Đẳng thức trong (1) xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Áp dụng (1) và sử dụng $xyz = 1$ ta có:

$$P \ge \frac{1}{1+xy} + \frac{4}{3(1+z)^3} = \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3}.$$

Xét hàm số $f(z) = \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3}$ trên $(0; +\infty)$,

ta có: $f'(z) = \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{4}{(1+z)^4} = \frac{z^2+2z-3}{(1+z)^3}$.

Ta có $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(z)$ trên $(0;+\infty)$:

z	0		1		$+\infty$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$		↘	$\frac{2}{3}$	↗	

Từ đó suy ra $f(z) \ge \frac{2}{3}$, $\forall z > 0$, do đó $P \ge \frac{2}{3}$.

Vậy $\min P = \frac{2}{3}$, đạt được khi $x = y = z = 1$ hay $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$.

Thí dụ 8. *Cho a, b, c là các số dương và thỏa mãn $15a^2 + 2b^2 + 2015c^2 \ge 1 - 2\sqrt{30}ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = 5\left(30a^2 + 4b^2 + 2015c^2\right) - \left(\sqrt{30}a + 2b + \sqrt{4030}c\right)^2 - \sqrt{\frac{(\sqrt{30}a + 2b)^2 + 4030c^2}{2}}$$

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{30}a$, $y = 2b$, $z = \sqrt{2015}c$ với $x, y, z > 0$ thì $x^2 + y^2 + 2z^2 \ge 2(1 - xy)$ (*).

Biểu thức P trở thành:

$$P = 5\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - (x + y + \sqrt{2}z)^2 - \sqrt{\frac{(x+y)^2 + 2z^2}{2}}.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(x + y + \sqrt{2}z)^2 \le 4(x^2 + y^2 + z^2) \text{ (1).}$$

Mặt khác $\sqrt{\frac{(x+y)^2 + 2z^2}{2}} \le \sqrt{\frac{2\left(x^2+y^2\right) + 2z^2}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$P \ge x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Lại đặt $t = x^2 + y^2 + z^2$ thì

$$t = x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{(x+y)^2 + 2z^2}{2} \ge 1 \text{ (do(*))}$$

Ta được: $P \geq t - \sqrt{t}$.

Xét hàm số $f(t) = t - \sqrt{t}$ với $t \geq 1$. Ta có:

$f'(t) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0$ với mọi $t \geq 1$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$. Suy ra $\min\limits_{t \in [1; +\infty)} f(t) = f(1) = 0$.

Do đó $\min P = 0$, đạt được khi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = y = \dfrac{z}{\sqrt{2}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

hay $a = \dfrac{1}{2\sqrt{30}},\ b = \dfrac{1}{4},\ c = \dfrac{1}{\sqrt{4030}}$.

➢***Nhận xét.*** Trong thí dụ 7 và thí dụ 8 do không thể xây dựng trực tiếp hàm số $f(t),\ t \in D$ thỏa mãn $P = f(t)$, nên ta đi tìm hàm số $f(t)$ thỏa mãn $P \geq f(t)$ (đối với bài toán tìm GTNN) hoặc $P \leq f(t)$ (đối với bài toán tìm GTLN).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải phương trình

$$2x\left(2 + \sqrt{16x^2 + 11}\right) + (2x + 11)\left(1 + \sqrt{x^2 + 11x + 33}\right) = 0.$$

2. Giải phương trình

$$(x-1)^2 + \log_2 \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{2x-1}} = 2\left(\sqrt{2x-1} + 1\right).$$

3. Giải phương trình

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x \cos x$$

$$= (\sin x + \cos x)^2 + \log \frac{6 + 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}{8 + \sin 2x}.$$

4. Giải phương trình

$$4^{x^2 - x} + 25^{5-3x} + x^2 + 10 = 16^{3x-5} + 5^{x - x^2} + 7x.$$

5. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 4x + 2015} - \sqrt{x^2 - 8x + 2027} > \sqrt{4-x} - \sqrt{x-2}.$$

6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{x^2 - 2x + 6} = 2y + \sqrt{y^2 + 5} \\ x^2 - y^2 - 5x + 2y + 1 = 0 \end{cases}.$$

7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 24x + 52 = y^3 + 3y^2 - 24y \\ 2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}.$$

8. Cho $a,\ b,\ c$ là ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 13.$$

9. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh $a^2b^2c^2 \leq \dfrac{1}{54}$.

(Đề thi Olympic Toán của Ailen năm 2009)

10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + a + b = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \leq a^2b^2 - 8ab + \frac{21}{2}.$$

11. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + \frac{96}{\sqrt{5 + 2(ab + bc + ca)} + 1}.$$

12. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $2x + y \leq 2,\ xyz = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{1 + 4x^2} + \dfrac{1}{1 + y^2} - \dfrac{\sqrt{3z + 9}}{3}$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/507 (Lớp 6). Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho tổng $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ có chữ số tận cùng là 2, 4, 7 hoặc 9?

NGUYỄN XUÂN BÌNH
(*NXBGD Việt Nam*)

Bài T2/507 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Trên cạnh AC lấy điểm E, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $EF \perp BC$ và $EF = FB$. Gọi D là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AD = AB$. Chứng minh rằng tam giác EFD cân.

NGUYỄN ĐỨC TÍNH
(*GV THCS Xuân Diệu, huyện Can Lộc, Hà Tĩnh*)

Bài T3/507. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $1 + 5^x = 2^y + 5.2^z$.

HOÀNG VIỆT DŨNG
(*GV THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An*)

Bài T4/507. Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ phía ngoài tam giác ABC, vẽ hai tam giác đều ABD và ACE. Trên các cạnh AD, CE, CB lần lượt lấy các điểm M, N, F sao cho $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{CN}{CE} = \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{1}{3}$. So sánh độ dài hai đoạn thẳng MN và EF.

BÙI VĂN CHI
(*GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

Bài T5/507. Cho các số thực $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ thỏa mãn $\max\{x; y; z\} \ge 1$. Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 + z^3 + (x + y + z - 1)^2 \ge 1 + 3xyz.$$

TRẦN VĂN CƯỜNG
(*GV THPT Đakrông, Quảng Trị*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/507. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x + 2 = 8y^3 - 6xy + 2y \\ \sqrt{x^2 - 2y + 2} + 2\sqrt[4]{x^3(5 - 4y)} = 2y^2 - x + 2 \end{cases}.$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG
(*SV K61 ngành SP toán, ĐHQG Hà Nội*)

Bài T7/507. Cho đa thức

$$P(x) = x^n + x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

có n nghiệm thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ đôi một phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^n}{P'(x_1)} + \frac{x_2^n}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^n}{P'(x_n)} = -1,$$

trong đó $P'(x)$ là đạo hàm của $P(x)$.

TRẦN VĂN HẠNH
(*GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*)

Bài T8/507. Giả sử mặt cầu nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ tiếp xúc với các mặt đối diện với đỉnh A_i tương ứng tại B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Chứng minh rằng tứ diện $B_1B_2B_3B_4$ là tứ diện gần đều (tứ diện có các cạnh đối diện bằng nhau) khi và chỉ khi tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là gần đều.

VŨ ĐỨC SƠN (*Hà Nội*)

Bài T9/507. Với x là số thực, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(2x^2 + 5x + 5)^2}{(x+1)^4 + 1}.$$

VŨ HỒNG PHONG
(*GV THPT Tiên Du số 1, Bắc Ninh*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/507. Tìm tất cả các số nguyên tố p và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^a + p^b$ là số chính phương.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(*GV THPT chuyên Tiền Giang, Tiền Giang*)

Bài T11/507. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f\big((x+z)(y+z)\big) = \big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(z)\big)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

NGUYỄN DUY LIÊN
(*GV THPT chuyên Vĩnh Phúc*)

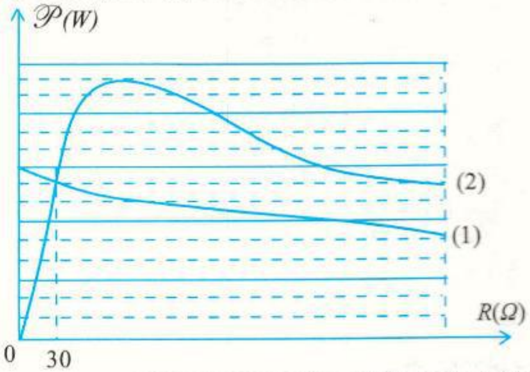
Bài T12/507. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc cạnh BC. Các đường đối trung qua M của các tam giác MAB, MAC cắt các đường tròn (MAB), (MAC) lần lượt tại Q, R khác M. P thuộc đường thẳng BC sao cho $AP \perp AM$. Gọi tiếp tuyến chung ngoài gần A hơn của các đường tròn (MAB), (MAC) là l. Giả sử l song song với BC, chứng minh rằng l tiếp xúc với đường tròn (PQR). (Kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ).

TRẦN QUANG HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Bài L1/507 (Cơ). Sóng cơ truyền từ một nguồn điểm trên mặt nước với bước sóng 12 cm và tốc độ 6 m/s. Hai điểm A, B cùng nằm trên một phương truyền sóng cách nhau 2 cm. Tại thời điểm t, khi li độ dao động tại A là $u_A = +2$ mm thì li độ dao động tại B là $u_B = -2$ mm. Biết sóng truyền từ B đến A. Điểm A có li độ $2\sqrt{3}$cm sau thời gian ngắn nhất kể từ thời điểm t là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/507 (Điện). Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0\cos\omega t$ (với U_0 và ω không đổi) vào hai đầu đoạn mạch AB nối tiếp gồm : Biến trở R, cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở r, tụ điện có điện dung C. Biết $LC\omega^2 = 2$. Gọi $\mathscr{P}$ là công suất tiêu thụ của đoạn mạch AB. Đồ thị trong hệ tọa độ $RO\mathscr{P}$ biểu diễn sự phụ thuộc $\mathscr{P}$ vào R trong trường hợp lúc đầu ứng với đường (1) và trong trường hợp nối tắt cuộn dây ứng với đường (2) như hình sau. Giá trị của điện trở r là bao nhiêu?



ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/507 (For 6th grade). Does it exist a natural number n so that the last digit of the sum $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ is 2, 4, 7 or 9?

Problem T2/507 (For 7th grade). Given a right triangle ABC with the right angle A and $AB < AC$. Let E and F be the points on the sides AC and BC respectively such that $EF \perp BC$ and $EF = FB$. Let D be the point on the side AC such that $AD = AB$. Prove that EFD is an isosceles triangle.

Problem T3/507. Find positive integral solutions of the equation $1 + 5^x = 2^y + 5.2^z$.

Problem T4/507. Given an acute triangle ABC. Outside the triangle, draw two equilateral triangles ABD and ACE. On the line segments AD, CE, CB choose the points M, N, F respectively so that $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{CN}{CE} = \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{1}{3}$. Compare the lengths of two length segments MN and EF.

Problem T5/507. Given real numbers $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ such that $\max\{x; y; z\} \geq 1$. Show that $x^3 + y^3 + z^3 + (x + y + z - 1)^2 \geq 1 + 3xyz$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/507. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^3 + x + 2 = 8y^3 - 6xy + 2y \\ \sqrt{x^2 - 2y + 2} + 2\sqrt[4]{x^3(5 - 4y)} = 2y^2 - x + 2 \end{cases}.$$

Problem T7/507. Suppose that

$$P(x) = x^n + x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

has n distinct real roots $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Show that

$$\frac{x_1^n}{P'(x_1)} + \frac{x_2^n}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^n}{P'(x_n)} = -1,$$

where $P'(x)$ is the derivative of $P(x)$.

Problem T8/507. Suppose that the inscribed sphere of the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ is tangent to the face which is opposite to A_i at B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Prove that if $B_1B_2B_3B_4$ is almost-regular (opposite sides have the same length) if and only if $A_1A_2A_3A_4$ is almost-regular.

Problem T9/507. Find the minimum and maximum values of the expression

$$P = \frac{(2x^2 + 5x + 5)^2}{(x + 1)^4 + 1}.$$

(*Xem tiếp trang 34*)

Bài T1/503. *Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn: $a = b - c = \frac{b}{c}$. Chứng minh rằn $a + b + c$ bằng lập phương của một số nguyên.*

Lời giải.

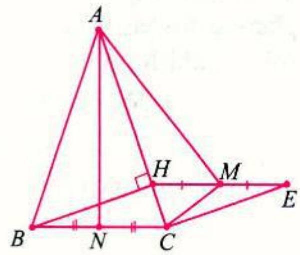
Từ điều kiện ở giả thiết có $b = a + c = ac$ với c khác 0. Do đó $ac - a - c + 1 = 1$, hay là $a(c-1) - (c-1) = 1$, hay là $(c-1)(a-1) = 1$. Do a, c là các số nguyên nên $c - 1$ và $a - 1$ đều là ước số của 1, mà c khác 0, suy ra $c = 2$ và $a = 2$, từ đó $b = a + c = ac = 4$. Lúc đó $a + b + c = 2 + 4 + 2 = 8 = 2^3$.

➢***Nhận xét.*** Một số bạn ghi cả đáp số là $a = b = c = 0$, nhưng lúc đó phân số $\frac{b}{c}$ vô nghĩa. Các bạn sau có lời giải đúng và gọn: **Phú Thọ**: *Đỗ Ngọc Tiến*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Nguyễn Cảnh Nam Khánh*, *Lê Văn Quang Hiếu*, *Nguyễn Hằng Nga*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Hồ Tuấn Dũng*, 6A, *Hồ Tuấn Hùng*, 6D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quãng Ngãi**: *Thới Lê Trâm Anh*, *Nguyễn Nhật Trâm*, *Võ Hữu Thanh Thảo*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/503. *Cho tam giác ABC cân tại A với góc A nhọn. Hạ BH vuông góc với AC (H thuộc AC). Đường thẳng qua H, song song với BC và đường thẳng qua C, song song với BH cắt nhau tại E. Gọi M là trung điểm của HE. Tính số đo góc $\widehat{AMC}$.*

Lời giải. *Cách 1.* (Dựa trên lời giải của bạn *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, **Quảng Ngãi**). Gọi N là trung điểm của BC. Nối AN. Ta có ΔABC cân tại A, AN là đường trung tuyến nên AN là đường cao, do đó

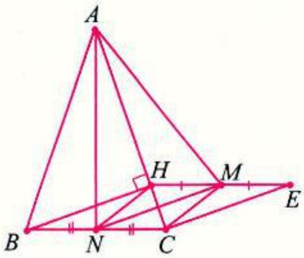


$\widehat{ANC} = 90^o$. Vì $BH \perp AC$, $CE // BH$ (giả thiết) nên $CE \perp AC$. Trong ΔCHE và ΔHCB có: $\widehat{HCE} = \widehat{CHB}$ (= 90^o), cạnh chung HC, $\widehat{CHE} = \widehat{HCB}$ (so le trong, $HE // BC$). Do đó $\Delta CHE = \Delta HCB$ (g.c.g), suy ra $HE = CB$. ΔCHE vuông tại C, CM là đường trung tuyến nên $CM = HM = \frac{1}{2}HE$. Vì $CM = HM$ nên ΔMCH cân tại M. Do đó $\widehat{MCA} = \widehat{CHE}$ mà $\widehat{CHE} = \widehat{HCB}$ nên $\widehat{MCA} = \widehat{NCA}$. Vì $HE = CB$, $CM = \frac{1}{2}HE$, $CN = \frac{1}{2}CB$ nên $CM = CN$. ΔAMC và ΔANC có: cạnh chung AC, $\widehat{MCA} = \widehat{NCA}$, $CM = CN$. Do đó $\Delta AMC = \Delta ANC$ (c.g.c), suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{ANC} = 90^o$.

Cách 2. Gọi N là trung điểm của BC.

Nối AN, NH, NM.

Ta có $NA \perp BC$, $HM // BC$ nên $NA \perp HM$. (1)



Vì $HE = CB$, $HM = \frac{1}{2}HE$, $NB = \frac{1}{2}CB$ nên $HM = NB$. Trong ΔHMN và ΔNBH có: cạnh chung HN, $\widehat{NHM} = \widehat{HNB}$ (so le trong, $HE // BC$), $HM = NB$. Do đó $\Delta HMN = \Delta NBH$ (c.g.c), suy ra $\widehat{HNM} = \widehat{NHB}$. Hai đường thẳng MN và BH tạo với NH hai góc so le trong $\widehat{HNM} = \widehat{NHB}$ nên $MN // BH$. Tương tự, $MC // NH$. Vì $MN // BH$, $HA \perp BH$ nên $HA \perp MN$. (2)

Từ (1) và (2): A là trực tâm của ΔHMN. Do đó $MA \perp NH$ mà $MC \parallel NH$ nên $MA \perp MC$. Vậy $\widehat{AMC} = 90^o$.

➢***Nhận xét.*** Trường hợp ΔABC cân có góc $\widehat{A}$ tù hoặc vuông, ta vẫn có $\widehat{AMC} = 90^o$. Để chứng tỏ $\widehat{AMC} = 90^o$, ta có thể sử dụng phương pháp chứng minh hai góc bằng nhau (cách 1) hoặc sử dụng tính chất ba đường cao của tam giác (cách 2). Các bạn tham gia giải bài đều làm theo cách 1. Các bạn có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Hoàng Xuân Tú,* 6A, THCS Tô Hoàng, Đống Đa; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn,* 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Chử Lê Phương Linh,* 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** *Dương Trọng Nguyên, Nguyễn Công An, Nguyễn Công Phúc, Hoàng Nguyễn Mai Sương,* 7C, *Thái Khắc Hoàng, Phan Đăng Xuân, Nguyễn Văn Quang Huy, Trần Đình Phương, Nguyễn Đức Thành, Nguyễn Văn Thắng, Hà Lê Quỳnh Anh,* 7D, *Nguyễn Văn Chung,* 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Võ Thành Nam,* 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Thu, Nguyễn Trần Phương Mai,* 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Điệp Diệu Châu,* 7B, *Đỗ Thị Như Nguyệt,* 9C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư,* 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN HIỆP

Bài T3/503. *Giải phương trình*

$$x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$$

Lời giải. ĐK: $x^2 - 3x + 1 < 0$.

Vì $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2$

$$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

nên phương trình trong đầu bài có thể viết thành

$$3x^2 - 9x + 3 + \sqrt{(3x^2 - 3x + 3)(x^2 + x + 1)} = 0 \quad (1)$$

Đặt $a = \sqrt{3x^2 - 3x + 3} > 0;\ b = \sqrt{x^2 + x + 1} > 0$. Ta có $3x^2 - 9x + 3 = 2(3x^2 - 3x + 3) - 3(x^2 + x + 1)$

$$= 2a^2 - 3b^2.$$

Phương trình (1) trở thành

$2a^2 - 3b^2 + ab = 0 \Leftrightarrow (a-b)(2a+3b) = 0$

$\Leftrightarrow a = b$ (vì $2a + 3b > 0$).

Ta có : $a = b \Rightarrow 3x^2 - 3x + 3 = x^2 + x + 1$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Thử lại thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện và phương trình. Vậy phương có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét. Điều then chốt của lời giải là các phân tích :

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$
$$x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1).$$

Sau đây là cách trình bày khác của lời giải dựa trên các phân tích trên:

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

Chia hai vế cho $x^2 + x + 1 > 0$, ta được

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2.\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3}.\sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}} - 1 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}$, ta được một phương trình bậc 2, từ đó tìm ra t, suy ra x.

Có thể giải bài toán bằng cách khác như sau :

Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn PT, chia cả hai vế của PT trong đầu bài cho $x \neq 0$, ta được

$$x + \frac{1}{x} - 3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}\ ;$$

đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$ $(|t| \geq 2) \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$, được

PT $t - 3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{t^2 - 1}$; việc giải tiếp không còn gì khó khăn.

Ngoài ra, có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $x^4, x^2, 1$ để ước lượng vế phải, đi đến bất đẳng thức $(x-1)^2 \leq 0$; suy ra $x = 1$.

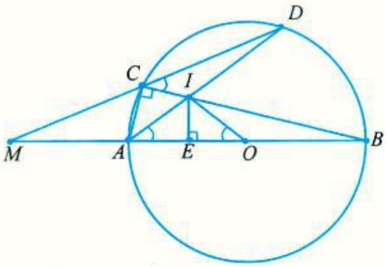
Các bạn có thể tìm thêm những cách giải thú vị khác.

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có bài giải tốt : **Quảng Ngãi**: *Võ Thị Hồng Thu*, 8B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Nghệ An**: *Phạm Ngọc Trinh*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, TTr. Cầu Giát, Quỳnh Lưu; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Phú Thọ**: *Thạch Đức Tùng*, 9A, THCS Cao Mại, Lâm Thao; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách ; **Bến Tre**: *Ngô Quốc Bảo*, 9/1, THCS Mỹ Hóa, TP. Bến Tre.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/503. *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R, M là một điểm trên tia đối của tia AB. Vẽ cát tuyến MCD đến đường tròn (C nằm giữa M và D). AD cắt BC tại I. Xác định vị trí của điểm M biết tứ giác MCIO nội tiếp.*

Lời giải. Hạ $IE \perp AB$ tại E.



Vì tứ giác $MCIO$ nội tiếp nên $BI.BC = BO.BM$.
Vì tứ giác $ACIE$ nội tiếp nên $BI.BC = BE.BA$.
Suy ra $BO.BM = BE.BA$
$\Leftrightarrow R(2R + MA) = (2R - AE)2R$
$\Leftrightarrow 2R + MA = 4R - 2AE \Leftrightarrow MA + 2AE = 2R$.

Lại có, tứ giác $MCIO$ nội tiếp nên $\widehat{IOM} = \widehat{ICD}$. Mà $\widehat{ICD} = \widehat{IAO} \Rightarrow \widehat{IOM} = \widehat{IAO}$, hay ΔIAO cân tại I. Suy ra $AE = EO$. Từ đó suy ra : $MA + R = 2R$ $\Leftrightarrow MA = R$. Vậy nếu tứ giác $MCIO$ nội tiếp thì $MA = R$. Ngược lại, với $MA = R$ ta cũng dễ chứng minh được tứ giác $MCIO$ nội tiếp.

➤***Nhận xét.*** Không có bạn nào tham gia giải bài toán trên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/503. *Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện:* $(1+a^2)(4+b^2)(9+c^2) \le 100$. *Chứng minh rằng:* $-4 \le 3ab + 2ac + bc \le 16$.

Lời giải. (Của các bạn gửi bài)

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $-10 \le 3ab + 2ac + bc - 6 \le 10$, tức là cần chứng minh $|3ab + 2ac + bc| \le 10$. Để chứng minh điều này, hầu hết các bạn sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky:

$$|3ab + 2ac + bc - 6| = |3(ab-2) + c(2a+b)|$$
$$\le \sqrt{(9+c^2)((ab-2)^2 + (2a+b)^2)}$$
$$= \sqrt{(9+c^2)(a^2b^2 + 4a^2 + b^2 + 4)}$$
$$= \sqrt{(9+c^2)(1+a^2)(4+b^2)} \le 10.$$

Cũng có bạn chứng minh

$$(3ab + 2ac + bc - 6)^2 \le (9+c^2)(1+a^2)(4+b^2)$$

bằng cách khai triển và đưa về

$$0 \le (abc - 6a - 3b - 2c)^2.$$

Có thể đặt câu hỏi sâu hơn là khi nào bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Một số bạn nhận xét là bất đẳng thức $-4 \le 3ab + 2ac + bc \le 16$ có thể đạt dấu bằng bên trái (khi $a = -1$, $b = c = 1$ chẳng hạn) nhưng không bao giờ đạt được dấu bằng bên phải.

➤***Nhận xét.*** Có ít bạn giải bài này, một bạn có đáp số sai. Các bạn có đáp số đúng l : **Nghệ An**: *Trương Công Cảnh,* 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng :** *Nguyễn Anh Thư,* 6A3, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng,* 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Hưng Yên :** *Lê Tuấn Nghĩa,* 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T6/503. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \\ \qquad = \sqrt{3}(x+y+z) \quad (1) \\ \sqrt{xyz} - (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x \ge 0, y \ge 0$.

Ta có $x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \ge \frac{3}{4}(x+y)^2$

(do $\frac{1}{4}(x-y)^2 \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$). Suy ra

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) \qquad (3),$$

đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Tương tự, ta có :

$$\sqrt{y^2+yz+z^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z) \qquad (4),$$

đẳng thức xảy ra khi $y = z$;

$$\sqrt{z^2+zx+x^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(z+x) \qquad (5),$$

đẳng thức xảy ra khi $z = x$.

Cộng theo vế của các bất đẳng thức (3), (4), (5) ta được BĐT:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \ge \sqrt{3}(x+y+z) \quad (6)$$

Theo (1), dấu bằng ở BĐT (6) phải xảy ra nên dấu bằng ở các BĐT (3), (4), (5) cùng xảy ra, tức là $x = y = z$.

Thay $x = y = z$ vào (2) ta được :

$$\sqrt{x^3} - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2 = 0$$

(do $\sqrt{x}+2 \ge 2$ với $x \ge 0$) $\Leftrightarrow x = 1$. Từ đó suy ra $x = y = z = 1$ (thoả mãn ĐK).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán giải hệ hai phương trình ba ẩn và chứa ẩn trong dấu căn thức. Vì vậy ta nên sử dụng bất đẳng thức để đánh giá. Đa số các bạn gửi bài đều giải theo cách trên. Tuy nhiên, một số bạn quên đặt điều kiện cho ẩn và biến đổi còn dài dòng.Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Ngô Văn Minh Thắng,* 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc**: *Tạ Kim Nam Tuấn,* 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Trường An*, 10A7, THPT Yên Phong số 1; **Quảng Bình**: *Trần Thành Đạt,* 10A1, THPT Lê Hồng Phong, TX. Ba Đồn; **Thanh Hoá**: *Đỗ Cao Bách Tùng,* 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh**: *Hồ Giang Châu,*10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Long**: *Lê Ngô Minh Đức, Lê Minh Tâm,*10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An**: *Phạm Minh Anh,* 10T1, THPT chuyên Long An; **Cần Thơ**: *Phan Trung Đức,* 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Quảng Trị**: *Lê Chí Cường,* 10A8, THPT Cam Lộ; **Bến Tre**: *Lê Ngô Nhật Huy,* 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP Bến Tre; **Gia Lai**: *Hoàng Minh Quyết,* 11A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku; **Đồng Tháp**: *Võ Thanh Phúc,* 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/503. *Cho tam giác ABC, hãy chứng minh*

$$\tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4} + \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4} + \tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4} + \tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4} \le 3(9-5\sqrt{3}).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\tan\frac{A+B}{4} = \tan\frac{\pi - C}{4} \Leftrightarrow \frac{\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}}{1-\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}} = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{C}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{C}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}}{1-\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}} = \frac{1-\tan\frac{C}{4}}{1+\tan\frac{C}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$
$$= 1-\tan\frac{C}{4}-\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$
$$+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4} = 1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4} \quad (1)$$

Vì $0 < A,B,C < \pi$ nên $0 < \frac{A}{4},\frac{B}{4},\frac{C}{4} < \frac{\pi}{4}$, suy ra:

$$0 < \tan\frac{A}{4}, \tan\frac{B}{4}, \tan\frac{C}{4} < 1.$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4} \ge 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4},\tan\frac{C}{4}} \quad (2)$$

$$\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}$$
$$\ge 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{4}\tan^2\frac{B}{4}\tan^2\frac{C}{4}} \quad (3)$$

Cộng từng vế (2) và (3) ta được:

$$\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$
$$+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4} \ge 3x+3x^2 \quad (4)$$

(ở đây $x = \sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}$). Thay vế trái của (4) bằng vế phải của (1) ta được:

$$1+x^3 \ge 3x+3x^2 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+1) \ge 0 \quad (5)$$

Do $0 < \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4} < 1 \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow x+1 > 0.$

Vậy: $(5) \Leftrightarrow x^2-4x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2-\sqrt{3}$ hay

$$\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}} \le 2-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4} \le (2-\sqrt{3})^3 = 26-15\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow 1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\le 27-15\sqrt{3}=3(9-5\sqrt{3})$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (2), (3) và (5) cùng xảy ra $\Leftrightarrow$ $\tan\frac{A}{4}=\tan\frac{B}{4}=\tan\frac{C}{4}\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

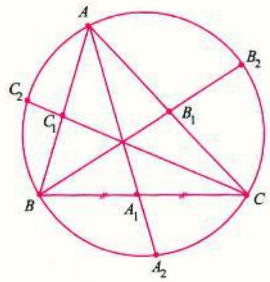
➢***Nhận xét.*** Lời giải của đa số các bạn như cách giải trên. Một số bạn đưa cách giải khác nhưng lời giải khá dài. Các bạn sau có lời giải tốt: **Bắc Ninh**: *Đinh Hoài Anh*, 11A, THPT Yên Phong số 2. **Hưng Yên**: *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Hà Tĩnh**: *Hồ Giang Châu*, *Trương Vân Linh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Quảng Trị**: *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ, H. Cam Lộ; **Sóc Trăng**: *Đậu Đức Quân*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/503. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt (O) tại A_2, B_2, C_2. Đặt AB = c, BC = a, CA = b. Chứng minh rằng*

$$\frac{A_1A_2}{a}+\frac{B_1B_2}{b}+\frac{C_1C_2}{c}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải.



Từ công thức đường trung tuyến:

$$AA_1=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-a^2}}{2}$$

và

$$AA_1.A_1A_2=BA_1.A_1C=\frac{a^2}{4},$$

suy ra $A_1A_2=\dfrac{a^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}$.

Tương tự có $B_1B_2=\dfrac{b^2}{2\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}$;

$$C_1C_2=\frac{c^2}{2\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$, ta thấy

$$\frac{A_1A_2}{a}=\frac{a^2}{2a\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{a\sqrt{3}.\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Tương tự: $\dfrac{B_1B_2}{b}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$;

$$\frac{C_1C_2}{c}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Do đó $\dfrac{A_1A_2}{a}+\dfrac{B_1B_2}{b}+\dfrac{C_1C_2}{c}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Phú Thọ**: *Nguyễn Đăng Khoa*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hưng Yên**: *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa**: *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Quảng Trị**: *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ, Cam Lộ; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Nhật Hào*, *Huỳnh Tấn Phúc*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Vĩnh Long**: *Trương Gia Bảo*, *Lê Ngô Minh Đức*, *Lê Minh Tâm*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An**: *Phạm Minh Anh*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Sóc Trăng**: *Đậu Đức Quân*, 10A2 Toán, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/503. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\frac{4}{3}$. Chứng minh rằng*

$$3\left[a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2\right]\ge ab+bc+ca.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Ta có: $3\left[a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2\right]$

$=3\left[(a^3+b^3+c^3)-2(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)\right]$

$$=3\Big[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc-2(a^2+b^2+c^2)+\frac{4}{3}\Big]$$

$$=3\left\{\frac{2}{3}\Big[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\Big] + 3abc-2(a^2+b^2+c^2)+\frac{4}{3}\right\}$$

$$=9abc+\frac{4}{9} \qquad (1)$$

Do vai trò của a, b, c trong bài toán là như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lớn nhất trong ba số đó.

Ta có : $3a \ge a+b+c=\frac{4}{3} \Rightarrow a \ge \frac{4}{9}$;

Và $9abc+\frac{4}{9}-(ab+bc+ca)$

$$=(9a-1)bc+\frac{4}{9}-a(b+c)$$

$$=(9a-1)bc+\frac{4}{9}-a\left(\frac{4}{3}-a\right)$$

$$=(9a-1)bc+\left(a-\frac{2}{3}\right)^2 \ge 0 \qquad (2)$$

(do $b, c \ge 0, 9a-1 \ge 4-1>0$).

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$3\left[a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2\right] \ge ab+bc+ca.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a-\frac{2}{3}=0$; $bc=0 \Leftrightarrow a=\frac{2}{3}$ và $(b,c)\in\left\{\left(\frac{2}{3},0\right),\left(0,\frac{2}{3}\right)\right\}$.

Do đó bất đẳng thức của bài toán xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi (a, b, c) là một hoán vị của $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};0\right)$.

➤***Nhận xét.*** Bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản, đơn giản, chứng minh chỉ dựa vào phân tích thành nhân tử. Một số bạn hơi lạm dụng bất đẳng thức Schur (nếu dùng phải chứng minh lại!). Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Nguyễn Đăng Khoa*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP.Việt Trì; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, *Đoàn Phú Thành*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc**: *Lê Ngọc Hoa*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An**: *Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị**: *Lê Chí Cường*, 10A8; THCS Cam Lộ; **Vĩnh Long**: *Lê Ngô Minh Đức*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/503. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(n; k)$ sao cho: $(n+1)(n+2)...(n+k)-k$ là số chính phương.*

Lời giải. (Của bạn *Lê Ngọc Hoa*, 11A, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

Xét các trường hợp sau:

1) $k \ge 5$. Đặt $k=a+4 \quad (a\in\mathbb{N}, a\ge 1)$

Giả sử $(n+1)(n+2)...(n+k)-k=b^2 \quad (b\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow (n+1)...(n+a)(n+a+1)...(n+a+4)-a=b^2+4$ (1)

Vì $(n+1)...(n+a)$ là tích a số liên tiếp, $(n+a+1)...(n+a+4)$ là tích của 4 số liên tiếp

nên $a|(n+1)...(n+a)$

$4|(n+a+1)...(n+a+4)$.

Suy ra $4a|(n+1)...(n+a+4)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $4ac-a=b^2+4 \quad (c\in\mathbb{N}^*)$

$\Leftrightarrow a(4c-1)=b^2+4$.

Vì $4c-1\equiv 3 \pmod 4$ nên $4c-1$ có ước nguyên tố p có dạng $p=4t+3 \quad (t\in\mathbb{N}^*, p\ge 3)$.

Do đó $p|b^2+4=b^2+2^2$.

Vì $p\equiv 3 \pmod 4$ suy ra $p|2$ (vô lý).

2) $k=4$. Khi đó: $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-4$

$=(n^2+5n+4)(n^2+5n+6)-4$

$=(d+4)(d+6)-4=d^2+10d+20$

(ở đây $d=n^2+5n$).

Vì $(d+4)^2<d^2+10d+20<(d+5)^2$ nên $d^2+10d+20$ không phải là số chính phương.

3) $k=3$. Xét $n\ge 2$. Giả sử $(n+1)(n+2)(n+3)-3=m^2$. Do VT lẻ nên m lẻ. Đặt $m=2b+1$.

Suy ra: $(n+1)(n+2)(n+3)=4(b^2+b+1)$.

VT là tích của 3 số liên tiếp nên tồn tại số nguyên tố q có dạng $q=3u+2 \quad (u\in\mathbb{N}^*)$ và

$q|(n+1)(n+2)(n+3)$

$\Rightarrow q|4(b^2+b+1)\Rightarrow q|b^2+b+1\Rightarrow q|b^3-1$

$\Rightarrow b\equiv 1 \pmod q \Rightarrow b^{3u}\equiv 1 \pmod q$

$\Rightarrow b^{q-1} \equiv b(\text{mod}\, q)$. Lại có $(p,q)=1$ nên theo định lý Fermat nhỏ thì $b^{q-1} \equiv b\ (\text{mod}\, q)$

$\Rightarrow b \equiv 1(\text{mod}\, q) \Rightarrow q \,|\, b^2+b+1 \equiv 3(\text{mod}\, q) \Rightarrow q=3.$

Vô lý vì $q = 3u+2 \geq 5$.

Với $n=2$ thì $(n+1)(n+2)(n+3)-3=21$ không là số chính phương.

4) $k=2$. Giả sử $(n+1)(n+2)(n+3)-2=s^2$.

Suy ra $(n+1)(n+2)=s^2+2 \Rightarrow (2n+3)^2=4s^2+9$

$\Rightarrow (2n+3-2s)(2n+3+2s)=9$

mà $2n+3+s>3$ nên suy ra

$$\begin{cases} 2n+3-2s=1 \\ 2n+3+2s=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ s=2. \end{cases}$$

Vậy $k=2$, $n=1$ thỏa mãn.

5) $k=1$. Khi đó $(n+1)-1=n$. Lúc này n phải là số chính phương.

Đáp số: $(n, k) = (1, 2)$ hoặc $(n, k) = (a^2, 1)$.

➢***Nhận xét.*** Ngoài bạn *Lê Ngọc Hoa* chỉ có bạn *Nguyễn Đăng Khoa*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, **Phú Thọ** tham gia giải có lời giải đúng với cách giải khác.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/503. *Tìm tất cả các hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b], có đạo hàm trên khoảng (a; b) và thỏa mãn* $f'(x) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}, \forall x \in (a;b)$, *trong đó a, b là các số thực cho trước và a < b.*

Lời giải. Giả sử $f(x)$ là hàm cần tìm. Đặt

$$K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (*)$$

Xét hàm số: $g(x)=f(x)-K(x-a)$ thì $g(x)$ cũng xác định trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-K \leq 0, \ \forall x \in (a;b)$ (do *)

Do đó $g(x)$ không tăng trên $[a; b]$.

Từ (*) suy ra $g(a) = g(b)$ $(= f(a))$. Do đó $g(x)$ phải là hàm hằng, tức là:

$g(x)=f(x)-K(x-a)=C_1, \ \forall x \in [a;b]$

$\Rightarrow f(x)=Kx+C, \ \forall x \in [a;b] \ (C=C_1-Ka)$ (**)

Thử lại ta thấy hàm $f(x)$ xác định bởi (**) thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc là không có bạn nào giải được bài này.

NHƯ HOÀNG

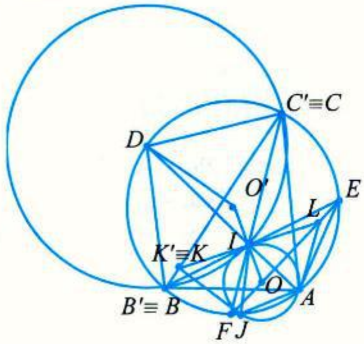
Bài T12/503. *Cho đường tròn tâm O và điểm K nằm ngoài đường tròn. Từ K kẻ các tiếp tuyến KI, KJ với đường tròn (I, J là các tiếp điểm). Trên tia đối của tia IO lấy điểm O' bất kỳ, vẽ đường tròn tâm O' bán kính O'J cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai A. AI cắt đường tròn (O') tại D khác A. Một đường thẳng qua K vuông góc với O'D cắt đường tròn (O') tại B và C. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Đăng Khoa*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì, **Phú Thọ**). Trước hết xin phát biểu không chứng minh hai bổ đề quen thuộc.

Bổ đề 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). I là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng qua I vuông góc với OI theo thứ tự cắt AB, CD tại K, L. Khi đó $IK = IL$.

Bổ đề 1 được gọi là định lí con bướm.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. D là giao điểm thứ hai của (O) và phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Điểm I thuộc đoạn AD sao cho $DI = DB = DC$. Khi đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Trở lại giải bài toán T12/503.

Gọi (D) là đường tròn tâm D bán kính DI; B', C' theo thứ tự là các giao điểm của (D) và các cung $\overset{\frown}{ABD}, \overset{\frown}{ACD}$ của (O'); E, F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của IB', IC' và (O'); L là giao điểm của IK và EF; K' là giao điểm của IK và $B'C'$.

Dễ thấy $\Delta IDB' \backsim \Delta IEA$; $\Delta IDC' \backsim \Delta IFA$.

Từ đó, chú ý rằng $DI = DB'; DI = DC'$, suy ra $EI = EA; FI = FA$.

Do đó EF là trung trực của IA.

Từ đó, chú ý rằng $LI \equiv KI$ tiếp xúc với (O), suy ra LA tiếp xúc với (O).

Vậy, chú ý rằng $IO \equiv O'O$ là trung trực của AJ và KI, KJ tiếp xúc với (O), ta có IO là trung trực của LK.

Do đó I là trung điểm của LK.

Áp dụng bổ đề 1 cho tứ giác $B'C'EF$, ta có I là trung điểm của LK'. Vậy $K' \equiv K$.

Kết hợp với $B'C' \perp O'D; BC \perp O'D$, suy ra $B'C' \equiv BC$.

Do đó $B' \equiv B; C' \equiv C$. Vậy $DI = DB = DC$.

Do đó, theo bổ đề 2, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC(đpcm).

➤***Nhận xét.*** Bài toán này tương đối khó, ngoài bạn *Khoa* chỉ có *Nguyễn Tất Đạt*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh** tham gia giải, tuy nhiên lời giải của bạn *Đạt* khá dài.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/503. *Cho hai dao động điều hoà cùng phương với các phương trình lần lượt là* $x_1 = A_1\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ *(cm) và* $x_2 = A_2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ *(cm). Phương trình của dao động tổng hợp từ hai dao động này là* $x = 4\cos(\omega t + \varphi)$ *(cm). Khi* $(A_1 + A_2)$ *có giá trị cực đại thì giá trị của* φ *là bao nhiêu?*

Lời giải. Áp dụng định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{A_1}{\sin\left(30^0 + \varphi\right)} = \frac{A_2}{\sin\left(45^0 - \varphi\right)} = \frac{A}{\sin 105^0}$$

Suy ra: $A_1 + A_2 = \frac{A}{\sin 105^0}\left[\sin\left(30^0 + \varphi\right) + \sin\left(45^0 - \varphi\right)\right]$

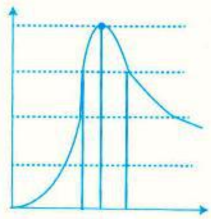
$$= \frac{8}{\sin 105^0}\sin\left(37{,}5^0\right)\cos\left(\varphi - 7{,}5^0\right)$$

Do đó $\left(A_1 + A_2\right)$ cực đại khi $\varphi = 7{,}5^0 = \frac{\pi}{24}$.

➤***Nhận xét.*** Bạn *Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/503. *Đặt điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi nhưng tần số góc ω thay đổi được vào hai đầu đoạn mạch AB mắc nối tiếp gồm cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L, điện trở R và tụ điện có điện dung C. Hình vẽ dưới là đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của điện áp hiệu dụng trên cuộn cảm thuần L theo giá trị tần số góc ω. Công suất cực đại mà mạch tiêu thụ là 100 W. Lần lượt cho* $\omega = x$ *và* $\omega = y$ *và* $\omega = z$ *thì mạch AB tiêu thụ công suất lần lượt là* $\mathscr{P}_1$ *và* $\mathscr{P}_2$ *và* $\mathscr{P}_3$*. Nếu (*$\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_3 = 195$ *W) thì* $\mathscr{P}_2$ *có giá trị bằng bao nhiêu?*



Lời giải. Từ đồ thị, ta thấy x và z là hai giá trị của tần số góc cho cùng $U_L = kU_{Lmax}$, với $k = 0{,}75$.

Mặt khác ta có : $U_L = \frac{U.\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

$$= \frac{U.\omega L}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right) + \omega^2 L^2}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\frac{1}{\omega^4 C^2 L^2} + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)\frac{1}{\omega^2 L^2} + 1}}.$$

Đặt $x = \frac{1}{\omega^2}$, ta có:

$$U_L = \frac{U}{\sqrt{\frac{1}{C^2 L^2}x^2 + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)\frac{1}{L^2}x + 1}}$$

Nhận thấy biểu thức trong căn ở mẫu số có dạng $ax^2 + bx + c$. Nên U_{Lmax} khi:

$x_{đinh} = -\frac{b}{2a}; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_{đinh} = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right) \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_3^2\right)$

$$\Rightarrow 2\omega_2^2 = I_1^2\frac{\omega_2^2}{k^2 I_2^2} + I_3^2\frac{\omega_2^2}{k^2 I_2^2} \Rightarrow I_1^2 + I_3^2 = 2k^2 I_2^2$$

$$\Rightarrow \left(I_1^2 + I_3^2\right)R = 2k^2 I_2^2 R \Rightarrow \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_3 = 2k^2\mathscr{P}_2$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}_2 = \frac{\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_3}{2k^2} = \frac{195}{2.0{,}75^5} = 173 \text{ (W)}.$$

➤***Nhận xét.*** Rất tiếc vì không bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này!

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

MỘT CÁCH GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 2

VÕ HỮU HÀ
(GV Trường THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

Hệ phương trình đối xứng được khai thác nhiều trong các đề thi đại học, cao đẳng và đề thi học sinh giỏi các cấp. Phương pháp giải hệ phương trình đối xứng loại 2 được trình bày như là thuật toán quen thuộc. Thuật toán được trình bày như sau: Trừ theo vế các phương trình, quy về phương trình tích rồi xét hai hệ độc lập; trường hợp $x = y$ được giải tương đối dễ dàng, tuy nhiên trường hợp còn lại là khá phức tạp, hầu hết các đề thi ra dưới dạng trường hợp 2 vô nghiệm.

Trong quá trình giảng dạy và nghiên cứu về hệ phương trình dạng này chúng tôi thấy điều thú vị là các hệ phương trình đối xứng loại 2 đều quy về được hệ phương trình đối xứng loại 1, qua đây chúng ta có thể giải quyết được trường hợp 2 của hệ một cách dễ dàng và hiệu quả, xin trao đổi cùng quý độc giả. Nội dung bài viết được trình bày thông qua các thí dụ và bài tập tự luyện.

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ (*)

Hệ phương trình (*) được gọi là hệ phương trình đối xứng loại 1 nếu $\begin{cases} f(x,y)=f(y,x) \\ g(x,y)=g(y,x) \end{cases}$.

Hệ phương trình (*) được gọi là hệ phương trình đối xứng loại 2 nếu $f(x,y)=g(y,x)$.

2) Cho hai số thực $x, y \in D$ có tổng bằng S và tích bằng P. Khi đó $S^2 \geq 4P$ và x,y là hai nghiệm thuộc D của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

II. NỘI DUNG

Bài toán xuất phát. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} & (1) \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} & (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học khối B năm 2003)

Lời giải. ĐK: $x \neq 0, y \neq 0$.

Khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3x^2y = y^2+2 \\ 3xy^2 = x^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(3xy+x+y)=0 \\ 3xy^2 = x^2+2 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x = y \\ 3xy^2 = x^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 3xy+x+y=0 \\ 3xy^2 = x^2+2 \end{cases}$ vô nghiệm,

vì từ (1) và (2) suy ra $x > 0, y > 0$.

Đây là đáp án của Bộ Giáo dục và Đào tạo, là lời giải hay, độc đáo và có tính nhạy cảm trong nhận xét $x > 0$, $y > 0$ và chỉ giải được khi trường hợp 2 của hệ vô nghiệm.

Từ lời giải bài toán và quá trình suy nghĩ chúng tôi đưa ra cách giải khác và mở rộng bài toán như sau.

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 3y = \dfrac{x^2+2}{x^2} & (1) \\ 3x = \dfrac{y^2+2}{y^2} & (2) \end{cases}$$

Nhận xét. Ta thấy đối với hệ này phương pháp trên không còn giải được nữa và bài toán có thể giải như sau.

Lời giải. ĐK: $x>0, y>0$.

Quy đồng mẫu số, cộng và trừ theo vế các phương trình, ta có $\begin{cases}(x-y)(3xy-x-y)=0\\3xy(x+y)=x^2+y^2+4\end{cases}$

khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases}x-y=0\\3xy(x+y)=x^2+y^2+4\end{cases}$$

hoặc $\begin{cases}3xy-x-y=0\\3xy(x+y)=x^2+y^2+4\end{cases}$.

* Hệ $\begin{cases}x-y=0\\3xy(x+y)=x^2+y^2+4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\3x^3-x^2-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1.$$

* Xét hệ $\begin{cases}3xy-x-y=0\\3xy(x+y)=x^2+y^2+4\end{cases}$

Đặt $S=x+y, P=xy, S^2\ge 4P$, hệ PT trở thành $\begin{cases}S=3P\\3PS=S^2-2P+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=2\\S=6\end{cases}$, khi đó *x,y* là hai nghiệm phương trình $X^2-6X+2=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-\sqrt{7}\\y=3+\sqrt{7}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=3+\sqrt{7}\\y=3-\sqrt{7}\end{cases}.$$

➢***Nhận xét.*** Qua đây ta thấy các hệ phương trình đối xứng loại 2 có thể đưa về hệ đối xứng loại 1 và có lẽ đây là cách giải tối ưu cho hệ phương trình đối xứng loại 2. Các thí dụ sau đây minh họa cụ thể hơn.

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}x^3=2y^2+4xy+x\\y^3=2x^2+4xy+y.\end{cases}$$

Lời giải. Cộng và trừ theo vế các phương trình, ta có $\begin{cases}(x-y)\left(x^2+y^2+xy+2x+2y-1\right)=0\\x^3+y^3=2\left(x^2+y^2\right)+8xy+x+y\end{cases}$

Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases}x=y\\x^3+y^3=2\left(x^2+y^2\right)+8xy+x+y\end{cases}$$

hoặc $\begin{cases}x^2+y^2+xy+2x+2y-1=0\\x^3+y^3=2\left(x^2+y^2\right)+8xy+x+y\end{cases}$.

* Hệ PT $\begin{cases}x=y\\x^3+y^3=2\left(x^2+y^2\right)+8xy+x+y\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^3-6x^2-x=0\end{cases}$ nên hệ có các nghiệm là $(0;0),\left(3+\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right),\ \left(3-\sqrt{10};3-\sqrt{10}\right)$.

* Xét hệ $\begin{cases}x^2+y^2+xy+2x+2y-1=0\\x^3+y^3=2\left(x^2+y^2\right)+8xy+x+y\end{cases}$,

Đặt $S=x+y, P=xy, S^2\ge 4P$, hệ này trở thành

$$\begin{cases}S^2+2S-P-1=0\\S^3-2S^2-3SP-S-4P=0\end{cases}$$

Giải ra ta có $\begin{cases}S=-1\\P=-2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}S=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}\\P=\dfrac{17-3\sqrt{33}}{2}\end{cases}$

hoặc $\begin{cases}S=\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}\\P=\dfrac{17+3\sqrt{33}}{2}\end{cases}$.

+ Với $S=-1, P=-2$, hệ có nghiệm $(1;-2)$, $(-2;1)$.

+ Với $\begin{cases}S=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}\\P=\dfrac{17-3\sqrt{33}}{2}\end{cases}$, hệ có nghiệm

$$\left(\frac{-5+\sqrt{33}}{4}+\sqrt{\frac{7\sqrt{33}-39}{8}};\frac{-5+\sqrt{33}}{4}-\sqrt{\frac{7\sqrt{33}-39}{8}}\right),$$

$$\left(\frac{-5+\sqrt{33}}{4}-\sqrt{\frac{7\sqrt{33}-39}{8}};\frac{-5+\sqrt{33}}{4}+\sqrt{\frac{7\sqrt{33}-39}{8}}\right)$$

* Hệ $\begin{cases} S=\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2} \\ P=\dfrac{17+3\sqrt{33}}{2} \end{cases}$ vô nghiệm, vì $S^2<4P$.

Thí dụ 3. *Tìm m để hệ phương trình*

$\begin{cases} 2x^2y=y^2+m \\ 2y^2x=x^2+m \end{cases}$ *có nghiệm duy nhất.*

Lời giải. Trừ và cộng theo vế các phương trình, ta có: $\begin{cases} (x-y)(2xy+x+y)=0 \\ 2xy(x+y)=x^2+y^2+2m \end{cases}$.

Khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x=y \\ 2xy(x+y)=x^2+y^2+2m \end{cases} \quad \text{(I)}$$

hoặc $\begin{cases} 2xy+x+y=0 \\ 2xy(x+y)=x^2+y^2+2m \end{cases}$ (II).

Trường hợp 1: Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ m=2x^3-x^2 \end{cases}$.

Khảo sát hàm số $f(x)=2x^3-x^2$ ta thấy

+ $m>0$ hoặc $m<-\frac{1}{27}$ thì hệ (I) có nghiệm duy nhất.

+ $m=0$ hoặc $m=-\frac{1}{27}$ thì hệ (I) có 2 nghiệm (1 nghiệm kép và 1 nghiệm đơn).

+ $-\frac{1}{27}<m<0$ thì hệ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2: Đặt $S=x+y, P=xy, S^2\ge 4P$,

từ hệ (II) $\Rightarrow \begin{cases} S=-2P, S\le -2, S\ge 0 \\ 2SP=S^2-2P+2m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S=-2P,\ S\le -2,\ S\ge 0 \\ m=-S^2-\dfrac{S}{2} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $m=-S^2-\frac{S}{2}$ vô nghiệm hoặc có tất cả các nghiệm $S\in(-2;0)$. Lập bảng biến thiên tìm được $m>0$.

Kết hợp hai trường hợp trên suy ra $m>0$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 4. *Biện luận số nghiệm của HPT*

$$\begin{cases} 2x^2=y+5x+\dfrac{m}{y} \\ 2y^2=x+5y+\dfrac{m}{x} \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Lời giải. ĐK: $x\ne 0, y\ne 0$. Khi đó hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} 2x^2y=y^2+5xy+m \\ 2y^2x=x^2+5xy+m \end{cases}$ (II)

Trừ theo vế các phương trình của hệ ta được

$$2xy(x-y)=(y-x)(y+x)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(2xy+x+y)=0.$$

Trường hợp 1: $x=y\Rightarrow 2x^3-6x^2=m.$

Lập bảng biến thiên $f(x)=2x^3-6x^2$, suy ra: $m>0$ hoặc $m<-8$ hệ có một nghiệm; $m=0$ hệ có một nghiệm (vì $xy\ne 0$); $m=-8$ hệ có hai nghiệm (1 nghiệm đơn, 1 nghiệm kép); $-8<m<0$ hệ có ba nghiệm.

Trường hợp 2: $2xy=-x-y$, cộng theo vế các phương trình của hệ suy ra hệ phương trình

$$\begin{cases} 2xy=-x-y \\ 2xy(x+y)=x^2+y^2+10xy+2m \end{cases} \quad \text{(III)}.$$

Đặt $S=x+y, P=xy, S^2\ge 4P$, hệ (III) trở thành

$$\begin{cases} 2P=-S \\ 2SP=S^2+8P+2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P=-S; S\le -2\ ; S\ge 0 \\ -S^2+2S=m\ \ (*) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên $g(S)=-S^2+2S$ suy ra:

$m>1$: (III) vô nghiệm.

$m=1$: (*) có nghiệm kép $S=1$ $\Rightarrow$ (III) có 2 nghiệm kép.

$-8<m<0$: (*) có 1 nghiệm $S>2$ $\Rightarrow$ (III) có 2 nghiệm.

$m = 0$: (*) có 2 nghiệm: $S_1 = 0 \Rightarrow P_1 = 0$ (loại vì $xy \neq 0$), $S_2 = 2 \Rightarrow$ (III) có 2 nghiệm đơn;

$m = -8$: (*) có 2 nghiệm $S_1 = -2, S_2 = 4 \Rightarrow$ (III) có 3 nghiệm (1 nghiệm kép, 2 nghiệm đơn).

$m < -8$: (*) có 2 nghiệm: $S_1 < -2$, $S_2 > 4 \Rightarrow$ (III) có 4 nghiệm.

$0 < m < 1$: (*) có 2 nghiệm $0 < S_{1,2} < 2 \Rightarrow$ (III) có 4 nghiệm.

Giá trị của m	**Số nghiệm hệ (I)**
$m > 1$	Một nghiệm
$m = 1$	Ba nghiệm (1 nghiệm đơn, 2 nghiệm kép)
$0 < m < 1$	Năm nghiệm
$m = 0$	Ba nghiệm (2 nghiệm đơn $(a;\ b)$, 1 nghiệm đơn $(a;\ a)$)
$-8 < m < 0$	Năm nghiệm
$m = -8$	Bốn nghiệm (2 nghiệm đơn, 2 nghiệm kép)
$m < -8$	Năm nghiệm

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases} x^3 = 3y^2 + 8x \\ y^3 = 3x^2 + 8y \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 = 3x^2y + 4x - 6 \\ y^3 = 3xy^2 + 4y - 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy^2 - x^2 = 1 - y \\ x^2y - y^2 = 1 - x \end{cases}$

2. 1) Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + mx \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + my \end{cases}$ có 2 nghiệm phân biệt.

2) Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2y + my = (m+1)x \\ y^3 - 3xy^2 + mx = (m+1)y \end{cases}$ có 2 nghiệm phân biệt.

3. Giải và biện luận hệ phương trình

$\begin{cases} x^2y = 3y^2 + 8x + m \\ xy^2 = 3x^2 + 8y + m \end{cases}$.

Đính chính. Trên TH&TT số 506, tháng 8 năm 2019, trang 30 ở bảng thành tích của Đội tuyển Toán Việt Nam có ghi em *Nguyễn Thuận Hưng* đoạt Huy chương Bạc. Xin sửa lại thành Huy chương Vàng. Thành thật xin lỗi em *Nguyễn Thuận Hưng* và bạn đọc.

TH & TT

CÔNG THỨC L'HÔPITAL HAY CÔNG THỨC JOHANN BERNULLI?

(*Lịch sử ra đời công thức L'Hôpital*)

HOÀNG NGỰ HUẤN
(*GV ĐH Mỏ - Địa chất Hà Nội*)

NỘI DUNG

Bất kỳ sinh viên trường đại học nào nếu đã học toán cao cấp đều biết tới cái tên *L'Hôpital* và quy tắc nổi tiếng của ông dùng để tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Cụ thể, quy tắc *L'Hôpital* phát biểu như sau: *Với hai hàm số cho trước* $f(x)$ *và* $g(x)$ *liên tục và khả vi tại điểm* $x=c$, *thỏa mãn* $f(c)=g(c)=0$, khi đó giới hạn của tỷ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ khi x tiến tới c, bằng giới hạn của tỷ số $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ khi x tiến tới c, với điều kiện là giới hạn cuối tồn tại.

Phát biểu trên có thể là phức tạp với những người không làm quen với toán cao cấp, nhưng viết dưới dạng công thức toán thì rất đơn giản

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

với các điều kiện đã nói ở trên.

Quy tắc này mang tên nhà toán học người Pháp sống ở thế kỷ XVII *Gruillaume Francois Antoine Marquis de L'Hôpital*, chính là người vào năm 1692 viết quyển sách đầu tiên về phép tính vi phân *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696). Cuốn sách gồm mười chương, trong đó quy tắc mà hiện giờ được gọi là quy tắc *L'Hôpital* nằm ở chương thứ chín.

Công trình của *L'Hôpital* đạt được thành công vang dội và nhiều lần được in tái bản trong thế kỷ mười tám. Trong lời mở đầu, tác giả tỏ lòng biết ơn đối với *Gottfried Leibniz* và *Johann Bernoulli* vì "Tôi được tự do sử dụng các công trình của họ". *L'Hôpital* cho rằng vai trò của *Leibniz* trong giải tích là ngang với *Newton*, nhưng *L'Hôpital* thích *Leibniz* hơn "vì cách trình bày của ông ấy đơn giản và trực tiếp hơn". Còn về *Bernoulli* thì *L'Hôpital* không nói thêm gì ngoài một dẫn chứng là *Bernoulli* là giáo sư ở Groninghen.

L'Hôpital
(1661 – 1704)

Vậy thì *Johann Bernoulli* là ai và tại sao *Marquis de L'Hôpital* phải tỏ lòng biết ơn *Johann Bernoulli*.

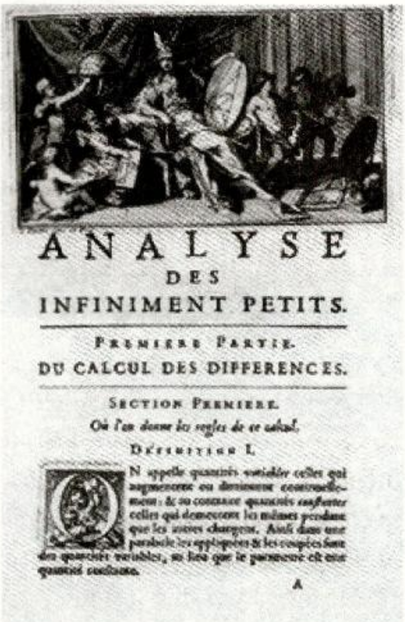
Trái với ý của cha, người con thứ mười trong gia đình *Bernoulli* là *Johann* nghiên cứu y học ở Trường Đại học Basel. Cũng trong khoảng thời gian đó ông được người anh cả là *Jacob* ngầm dạy toán cho và chẳng mấy chốc ông đã ngang tài với anh trai mình. Năm 1691 lần đầu tiên ông tham gia và cuộc đấu toán tay đôi: giải phương trình về đường dây xích do *Jacob* đưa ra. *Johann* trẻ tuổi đã nhanh chóng giải được bài toán và làm ngạc nhiên những người đương thời với mình.

Johann Bernoulli
(1667 – 1748)

Một trong những lần

tới Paris, *Johann Bernoulli* làm quen với *Marquis de L'Hôpital* - một trong những nhà toán học Pháp xuất chúng đương thời. *L'Hôpital* tỏ ra rất ngạc nhiên bởi tài năng của *Bernoulli* trẻ tuổi và cả nghệ thuật sử dụng phép tính vi phân và tích phân mà *Leibniz* lập ra. Biết mình yếu kém, *L'Hôpital* thuê *Johann* với thù lao hậu hĩnh để *Johann* dạy mình những bí mật của phép tính mới. Khi phải quay trở về Basel, *Johann* hứa là sẽ không nói điều đó với ai và những bài giảng vẫn được tiếp tục thư từ qua lại.

Johann sao chép lại các bức thư vì muốn viết bài giảng về giải tích. Thế nhưng học trò thì đã nhanh chân hơn thầy. Sử dụng các bài giảng của *Johann*, năm 1696 *L'Hôpital* công bố công trình đầu tiên về phép tính vi phân "*Analyse des infiniment petits, puor l'intelligence des lignes courbes*" ("*Giải tích các đại lượng vô cùng bé để khảo sát các đường cong*").



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.
DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.
Où l'on donne les regles de ce calcul.

DEFINITION I.

[illegible]

A

Cuốn sách gây bất hòa

Johann im lặng giống như đã hứa với *Marquis* và không yêu cầu công nhận quyền tác giả. Nhưng bằng cách riêng ông than phiền rằng các phát minh của *L'Hôpital* là ăn cắp bản quyền một cách trơ tráo. Trong bức thư gửi *Leibniz* năm 1698, *Bernoulli* nói rằng: "ngoại trừ một số trang thì tất cả phần còn lại là ông ta nhận được từ tôi qua thư [...]. Ưu điểm của ông ta nằm ở chỗ ông ta đã sắp xếp theo trật tự và trình bày một cách cẩn thận bằng tiếng Pháp những thứ lộn xộn mà tôi đã viết cho ông ấy bằng tiếng Pháp hoặc tiếng Latinh". Mãi sau khi *Marquis* mất vào năm 1704, *Bernoulli* mới đòi lại được một chút những gì đã mất bằng cách công bố nhiều kết quả của mình, trong đó có quy tắc *L'Hôpital*.

Thế nhưng, tính cách nổi loạn đã làm hại thanh danh của *Johann*. Ông ganh đua quyết liệt với người anh trai và cũng là người thầy của mình là *Jacob*, rồi cả với *Daniel* – người con trai và cũng là người mà ông đã hết mực dạy bảo. Ông cũng tham gia vào cuộc luận chiến giữa *Newton* và *Leibniz*: ai là người nghĩ ra phép tính vi phân đầu tiên; ông đứng về phía *Lebniz*. Khác với *Johann*, danh tiếng của *Marquis* lại không hề bị sứt mẻ chút nào.

TƯ LIỆU BỊ THẤT LẠC

Những dấu hiệu đầu tiên cho thấy *Johann* có thể đã đúng xuất hiện vào năm 1922, khi người ta tìm thấy trong thư viện của Basel giáo trình của *Johann: Cáculo diferential* ("Phép tính vi phân"); nó chưa từng được công bố. Nếu so sánh với quyển sách của *L'Hôpital* thì sẽ thấy rõ về bản chất chúng là một.

Kết luận rõ ràng xuất hiện vào năm 1955 khi bức thư đầu tiên giữa *Johann* và *L'Hôpital* được tìm thấy. Người ta phát hiện ra lời đề nghị lạ lùng mà *Marquis De L'Hôpital* gửi cho *Johann Bernoulli* trong bức thư gửi vào ngày 17 tháng 3 năm 1694.

"Tôi rất sẵn lòng gửi cho ngài khoảng 300 *Livre* bắt đầu từ ngày 1 tháng 1 năm nay; tôi sẽ gửi ngay 200 *Livre* trong nửa đầu năm cho phần khái quát mà ngài đã gửi cho tôi; còn 100 *Livre* nữa tôi sẽ gửi trong nửa cuối của năm và mọi thứ sẽ tiếp tục như thế. Tôi hứa rằng số tiền này trong thời gian sắp tới sẽ tăng lên vì tôi biết nó là rất ít; và tôi sẽ làm nó ngay khi công việc của tôi tốt đẹp…Tôi quả là gàn dở khi đòi hỏi thời gian của ngài, nhưng tôi yêu cầu ngài thỉnh thoảng hãy dành cho tôi một vài tiếng để trả lời các câu hỏi của tôi và hãy gửi cho tôi những phát minh của mình, với điều kiện là không được công bố chúng với ai. Tôi cũng sẽ hứa là không gửi bản copy những tài liệu này cho *Varignon* hay bất kỳ người nào khác, bởi vì tôi không thích điều đó. Hãy trả lời tôi về vấn đề này".

Mặc dù thư hồi âm của *Bernoulli* không được tìm thấy, nhưng dễ hiểu là ông đã đồng ý thỏa thuận (không có gì ngạc nhiên nếu để ý rằng khi đó *Johann* mới 24 tuổi và đang không có việc làm). Trong những bức thư tiếp theo *Bernoulli* có trả lời thư và những câu hỏi của *Marquis*. Một trong những bức thư ấy chứa công thức *L'Hôpital*. Ngoài ra những ví dụ mà *Bernoulli* đưa ra gần như trùng khớp với những ví dụ mà *Marquis* về sau in trong quyển sách của mình. Nhưng chúng tôi cũng phải thừa nhận là *L'Hôpital* đã sửa vài lỗi của *Bernoulli*, ví dụ như *Bernoulli* cho rằng tích phân của hàm $\frac{1}{x}$ là hữu hạn.

Johann Bernoulli mất khi 81 tuổi, rất nhiều người liệt kê công thức mà ngày nay chúng ta gọi là công thức *L'Hôpital* vào di sản đồ sộ toán học của ông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, 1968.

[2] Carlos Sánchez, Concepción Valdés, *Los Bernoulli, geómetras y viajeros*. Editorial Nívola, 2001.

[3] Daniel Martín, *Los Bernoulli*. ¿Cómo ves?, 136, 26-29.

[4] María Cristina Solaeche, *La controversia L'Hospital - Bernoulli*. Divulgaciones matemáticas 1, 1993, 99-104.

[5] http://hijos.ru/2012/05/20/pravilo-lopitalya-ili-pravilo-bernulli/

PROBLEMS… (Tiếp theo trang 19)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/507. Find all prime numbers p and positive integers a, b so that $p^a + p^b$ is a perfect square.

Problem T11/507. Find all functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f\big((x+z)(y+z)\big) = \big(f(x)+f(z)\big)\big(f(y)+f(z)\big),$$
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Problem T12/507. Given a triangle ABC and a point M on the side BC. The symmedians through M of the triangles MAB, MAC intersect the circles (MAB), (MAC) respectively at Q, R which are different from M. Let P be the point on BC so that $AP \perp AM$. Denote by l the external common tangent, which closer to A, of two circles (MAB), (MAC). Suppose that l is parallel to BC. Show that l is tangent to (PQR). (The notion (XYZ) is for the circumcircle of the triangle XYZ).

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

KHAI THÁC HAI BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KỲ THI IMO 2015

LÊ VIẾT ÂN (*TP. Hồ Chí Minh*)

Bài viết sẽ xoay quanh việc khai thác hai bài hình học trong kỳ thi IMO năm 2015.

Kỳ thi IMO năm 2015 có hai bài toán hình học phẳng với nội dung như sau:

Bài toán 1 (*Ngày thi thứ nhất*). *Cho tam giác nhọn $ABC, AB > AC$ có đường tròn ngoại tiếp (Γ), trực tâm H và chân đường cao F hạ từ A. M là trung điểm của BC. Q là điểm trên (Γ) thỏa mãn $\widehat{HQA} = 90^0$, và K là điểm trên (Γ) thỏa mãn $\widehat{HKQ} = 90^0$. Giả sử A, B, C, K và Q là các điểm phân biệt, và chúng nằm trên (Γ) theo đúng thứ tự đó. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác KHQ và FKM tiếp xúc với nhau.*

Bài toán 2 (*Ngày thi thứ hai*). *Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (Ω) có tâm O. Một đường tròn (Γ) với tâm A cắt các cạnh BC tại D và E sao cho B, D, E, C phân biệt và nằm trên đường thẳng BC theo đúng thứ tự này. F, G là giao điểm của (Ω) và (Γ) sao cho A, F, B, C và G nằm trên (Ω) theo đúng thứ tự này. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF và cạnh AB. Gọi L là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CGE và cạnh CA.*

Giả sử hai đường thẳng FK và GL phân biệt và cắt nhau tại X. Chứng minh rằng X nằm trên đường thẳng AO.

Trong bài viết này, chúng tôi xin chia thành hai phần, mỗi phần khai thác một bài toán.

PHẦN 1

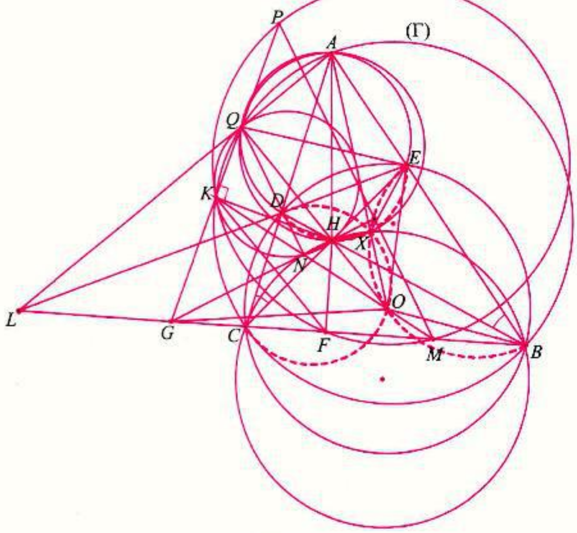
Bài toán 1 là một bài toán tương đối khó và trên diễn đàn *aops.com* có khá nhiều lời giải. Có rất nhiều hướng tổng quát cho bài toán này. Chú ý rằng giả thiết trực tâm của tam giác thường được mở rộng bởi giả thiết điểm H nằm trong tam giác sao cho $\widehat{BHC} = 180^0 - \widehat{BAC}$ hoặc $\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$. Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu một hướng tổng quát cho bài toán này.

Bài toán 3. *Cho tam giác $ABC, AB > AC$ có đường tròn ngoại tiếp (Γ). Điểm H nằm trong tam giác sao cho $\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$. Q là điểm trên (Γ) thỏa mãn $\widehat{HQA} = 90^0$, K là điểm trên (Γ) thỏa mãn $\widehat{HKQ} = 90^0$. Giả sử A, B, C, K và Q là các điểm phân biệt, và chúng nằm trên (Γ) theo đúng thứ tự đó. Trên đường thẳng BC lấy điểm M sao cho giao điểm của hai đường thẳng KM và QH nằm trên trung trực của BC. Gọi F là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác KHQ và FKM tiếp xúc với nhau.*

Lời giải. (h.1)

Gọi $D = CA \cap BH, E = AB \cap CH$ thì ta có bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn, gọi đường tròn đó là (O). Gọi $L = DE \cap BC$. Theo một kết quả về điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần và định lí *Brocard* cho tứ giác nội tiếp, ta có $OH \perp AL$ tại Q và Q là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần

$ABCEDL$. Theo giả thiết thì giao điểm của hai đường thẳng KM và QH nằm trên trung trực của BC nên ba điểm O, K, M thẳng hàng.



Hình 1

Nếu gọi X là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần $ABDCHE$ thì ta có $HX \perp AO$ tại X. Chú ý rằng $OB = OE$ nên AO là một phân giác của $\widehat{BOE}$ nên ta có $\overline{OA}.\overline{OX} = \overline{OB}^2 = \overline{OE}^2$. Từ $\widehat{AQH} = \widehat{AXH} = 90^0$ ta thấy bốn điểm A, Q, H, X cùng nằm trên đường tròn đường kính AH nên $\overline{OH}.\overline{OQ} = \overline{OA}.\overline{OX}$.

Đường thẳng OK cắt đường tròn (KQH) lần nữa tại N thì $\overline{OK}.\overline{ON} = \overline{OH}.\overline{OQ}$.

Gọi f là phép nghịch đảo tâm O với phương tích OB^2. Khi đó qua phép nghịch đảo này $f: A \mapsto X, Q \mapsto H, K \mapsto N, B \mapsto B, C \mapsto C$ nên đường tròn $(ABCKQ)$ biến thành đường tròn $(XBCHN)$, do đó $N \in (HBC)$.

Giả sử KQ cắt BC tại G và cắt đường tròn (FKM) lần nữa tại P. Theo định lý về tâm đẳng phương thì ba đường thẳng KQ, BC, HN đồng quy, suy ra $G \in HN$. Kẻ $HH' \perp PM$ tại H' thì khi đó HH' là trục đẳng phương của hai đường tròn $(HKPH')$ và $(HFMH')$, FM là trục đẳng phương của hai đường tròn $(HFMH')$ và $(FKMP)$, $KP \equiv KQ$ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(FKMP)$ và $(HKPH')$ nên HH', KQ, BC đồng quy, suy ra $HN \perp PM$ tại H'. Mặt khác $N \in (KQH)$ nên $QN \perp HN$, do đó $QN // PM$. Từ đây suy ra đường tròn (KMP) và đường tròn (KQN) tiếp xúc với nhau tại K và ta có điều phải chứng minh.

➢***Nhận xét.*** Trong lời giải trên, ta thấy phép nghịch đảo f tâm O phương tích OB^2 biến đường tròn (Γ) thành đường tròn (HBC) nên O là tâm vị tự của hai đường tròn này. Hơn nữa AB còn là trục đẳng phương của hai đường tròn này. Chính những điều này gợi ý cho chúng ta đề xuất bài toán sau:

Bài toán 4. *Cho hai đường tròn (Γ) tâm O và (Ω) tâm O' có trục đẳng phương d và V là tâm vị tự trong của hai đường tròn. Điểm A nằm trên (Γ) và điểm B nằm trên (Ω) sao cho ba điểm A, B, V thẳng hàng và OA, $O'B$ không song song với nhau. Lấy điểm C trên (Γ) sao cho $\widehat{ACB} = 90^0$. CV cắt d tại K. Kẻ $BH \perp d$ tại H. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và CKH tiếp xúc với nhau.*

Lời giải bài toán này có thể làm hoàn toàn tương tự như đối với bài toán 3, bạn đọc tự giải coi như một bài tập.

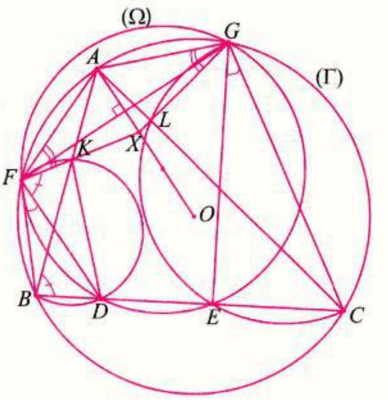
PHẦN 2

Bài toán 2 là một bài toán dễ và cũng có nhiều lời giải. Ở bài viết này chúng tôi trình bày một mở rộng và một số hướng khai thác cho bài toán này.

Bài toán 5. *Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (Ω) có tâm O. Một đường tròn (Γ) với tâm nằm trên đoạn AO cắt các cạnh BC tại D và E sao cho B, D, E, C phân biệt và nằm trên đường thẳng BC theo đúng thứ tự này. Giả sử F, G là giao điểm của (Ω) và (Γ) sao cho A, F, B, C và G nằm trên (Ω) theo đúng thứ tự này. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF và cạnh AB. Gọi L là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CGE và cạnh CA.*

Giả sử hai đường thẳng FK và GL phân biệt và cắt nhau tại X. Chứng minh rằng X nằm trên đường thẳng AO.

Lời giải. (h. 2)



Hình 2

Dễ thấy AO là đường trung trực của FG nên chỉ cần chứng minh $XF = XG$. Thật vậy, ta có :

$(FB, FD) \equiv (FB, FG) + (FG, FD)$

$\equiv (CB, CG) + (EG, ED)$ (vì (B, C, F, G) và (D, E, F, G) là bộ các điểm cùng nằm trên một đường tròn)

$\equiv (CB, CG) + (EG, CB)$ (vì B, C, D, E thẳng hàng) $\equiv (GE, GC) \pmod{\pi}$ (*).

Từ đó : $XF = XG \Leftrightarrow F, G$ đối xứng nhau qua AX (vì $AF = AG$)

$\Leftrightarrow (FX, FA) \equiv (GA, GX) \pmod{\pi}$

$\Leftrightarrow (FK, FA) \equiv (GA, GL) \pmod{\pi}$ (vì $K \in FX$, $L \in GX$)

$\Leftrightarrow (FK, FD) + (FD, FB) + (FB, FA)$

$\equiv (GA, GC) + (GC, GE) + (GE, GL) \pmod{\pi}$

$\Leftrightarrow (FK, FD) + (FB, FA)$

$\equiv (GA, GC) + (GE, GL) \pmod{\pi}$ (vì (*))

$\Leftrightarrow (BK, BD) + (CA, CB)$

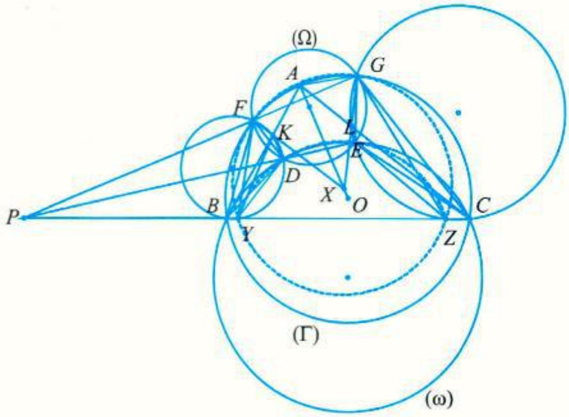
$\equiv (BA, BC) + (CE, CL) \pmod{\pi}$ (vì các bộ điểm (B, D, F, K), (C, E, G, L) và (A, B, C, F, G) cùng nằm trên một đường tròn). Đẳng thức cuối cùng này đúng vì $(BK, BD) \equiv (BA, BC) \pmod{\pi}$ và $(CE, CL) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}$ nên ta có đpcm.

➤***Nhận xét.*** Đây là một mở rộng đơn giản, tuy nhiên cấu hình của nó có tính gợi mở rất nhiều. Chẳng hạn chúng ta có thể thay thế các điểm D, E nằm trên BC bằng các điểm D, E nằm trên đường tròn (Ω) sao cho các điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Tức là ta có bài toán sau đây.

Bài toán 6. *Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (Ω) có tâm O và một đường tròn (ω) đi qua B, C. Một đường tròn (Γ) với tâm nằm trên đoạn AO cắt (ω) tại D và E sao cho B, D, E, C phân biệt và nằm trên (ω) theo đúng thứ tự này. Giả sử F, G là giao điểm của (Ω) và (Γ) sao cho A, F, B, C và G nằm trên (Ω) theo đúng thứ tự này. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF và cạnh AB. Gọi L là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CGE và cạnh CA.*

Giả sử hai đường thẳng FK và GL phân biệt và cắt nhau tại X. Chứng minh rằng X nằm trên đường thẳng AO.

Lời giải. (h. 3)



Hình 3

Giả sử $(BDF) \cap BC = \{B, Y\}$,

$(CGE) \cap BC = \{C, Z\}$. Ta sẽ chứng minh F, G, Y, Z cùng nằm trên một đường tròn có tâm nằm trên OA thì khi đó theo **bài toán 5**, ta sẽ suy ra điều cần chứng minh. Thật vậy, trước hết các đường thẳng BC, DE, FG là ba trục đẳng phương của các cặp đường tròn trong ba đường tròn (Γ), (Ω), (ω) nên chúng đồng quy hoặc đôi một song song. Ở đây ta xét trường hợp chúng đồng quy tại P và bỏ qua trường hợp đơn giản còn lại.

Ta có : $(DE, DY) \equiv (DE, DF) + (DF, DY)$

$\equiv (GE, GF) + (BF, BY)$

$\equiv (GE, GC) + (GC, GF) + (BF, BC)$

$\equiv (ZE, ZC) + (GC, GF) + (GF, GC)$

$\equiv (ZE, ZY) (\bmod \pi)$, suy ra bốn điểm F, G, Z, Y cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó : $\overline{PY}.\overline{PZ} = \overline{PD}.\overline{PE} = \overline{PF}.\overline{PG}$, suy ra bốn điểm F, G, Y, Z cùng nằm trên một đường tròn có tâm nằm trên đường trung trực của FG, tức là tâm nằm trên AO. Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Từ bài toán này, chúng tôi đề xuất một bài toán tương tự như sau :

Bài toán 7. *Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (Ω) có tâm O và một đường tròn (ω) đi qua B, C. Một đường tròn (Γ) với tâm nằm trên đoạn AO cắt (ω) tại P và Q sao cho B, P, Q, C phân biệt và nằm trên (ω) theo đúng thứ tự này. Lấy các điểm D, E trên cạnh BC sao cho $\widehat{BPD} = \widehat{CQE}$. Giả sử F, G là giao điểm của (Ω) và (Γ) sao cho A, F, B, C và G nằm trên (Ω) theo đúng thứ tự này. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF và cạnh AB. Gọi L là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CGE và cạnh CA.*

Giả sử hai đường thẳng FK và GL phân biệt và cắt nhau tại X. Chứng minh rằng X nằm trên đường thẳng AO.

Các bạn hãy giải bài toán này và hãy tập sáng tạo ra nhiều bài toán hay khác.

Kết luận. Hai bài toán hình IMO này tuy không quá khó nhưng còn nhiều ý để khai thác và mở rộng. Vì khuôn khổ bài viết, xin tạm dừng tại đây và xin dành lại cho bạn đọc khai thác tiếp. Chúc các bạn thành công.

Cuối cùng, tác giả xin chân thành cảm ơn thầy *Nguyễn Minh Hà* đã cho tác giả nhiều những nhận xét quan trọng rất hay cho bài viết này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Trang web aops.com với các đường link sau :

http://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1112748_problem3

http://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1113163_problem_4

[2]. Các trang web:

http://www.imo2015.org/

http://diendantoanhoc.net/

[3]. Tài liệu giáo khoa chuyên toán hình học 10, Đoàn Quỳnh (chủ biên), NXBGD Việt Nam, 2011.

[4]. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

BẤT ĐẲNG THỨC BONSE VÀ SỰ KHÁI QUÁT HÓA

HOÀNG ĐỨC TÂN (*Hà Nội*)

Bất đẳng thức Bonse và sự khái quát hóa

$$p_{n+1}^2 < p_1.p_2 \cdots p_n \qquad (1)$$

Trong đó p_i là số nguyên tố thứ i.

H. Bonse, khi còn là sinh viên, đã phát hiện ra một chứng minh khéo léo cho (1). Nó không chỉ tránh tất cả các phương pháp giải tích và các quá trình vô hạn đã được Tschebyscheff sử dụng, mà nó chỉ sử dụng các ý tưởng toán học rất đơn giản.

§1. Ý tưởng cơ bản của chứng minh tương tự như cách chứng minh của Euclid. Thay vì tạo thành biểu thức

$N = p_1p_2 \dots p_n + 1$ hoặc $M = p_1p_2 \dots p_n - 1$

trong số n số nguyên tố đầu tiên, chúng ta chỉ sử dụng i số nguyên tố đầu tiên $p_1, ..., p_i$ và tạo thành p_i biểu thức

$$M_1 = p_1p_2 \dots p_{i-1} * 1 - 1,$$
$$M_2 = p_1p_2 \dots p_{i-1} * 2 - 1,$$
$$M_3 = p_1p_2 \dots p_{i-1} * 3 - 1,$$
$$M_4 = p_1p_2 \dots p_{i-1} * 4 - 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$M_{p_i} = p_1p_2 \dots p_{i-1} * p_i - 1,$$

Như trong trường hợp biểu thức của Euclid, chúng ta cũng có thể khẳng định:

(*a*) *Không có biểu thức* $M_1, ..., M_{p_i}$ *nào chia hết cho bất kỳ số nguyên tố* $p_1, p_2, ..., p_{i-1}$ *nào.*

(*b*) *Có nhiều nhất là một trong các biểu thức này chia hết cho* p_i. Vì nếu có hai trong số các biểu thức này chia hết cho p_i, chẳng hạn $p_1p_2 \dots p_{i-1}x - 1$ và $p_1p_2 \dots p_{i-1}y - 1$, thì hiệu của chúng $p_1p_2 \dots p_{i-1}(x-y)$ cũng phải chia hết cho p_i. Vì p_i không chia hết cho $(i-1)$ số nguyên tố đầu tiên nào, nên nó phải là ước số của $(x-y)$. Nhưng x và y nằm trong số các số 1, 2, 3, 4, 5, ..., p_i, do đó, hiệu của chúng lớn nhất là $p_i - 1$, nhỏ hơn p_i. Do đó p_i không thể là ước số của hiệu này, vì một số lớn hơn không thể là ước của một số nhỏ hơn. Chứng minh tương tự như vậy cho thấy chúng ta cũng có thể khẳng định:

(*c*) *Nhiều nhất là một biểu thức chia hết cho* p_{i+1}, *nhiều nhất là một biểu thức chia hết cho* p_{i+2}, ..., *nhiều nhất là một biểu thức chia hết cho* p_n.

Bây giờ nếu số lượng các số p_i, p_{i+1}, ..., p_n ít hơn so với số các biểu thức $M_1, ..., M_{p_i}$, nói cách khác, nếu chúng ta có

$$n - i + 1 < p_i \qquad (2)$$

thì có ít nhất một trong các biểu thức M không chia hết cho bất kỳ số p_i, p_{i+1}, ..., p_n nào. Bước quan trọng này được suy ra trực tiếp từ (b) và (c). Nếu chúng ta gọi biểu thức cụ thể này là M_h, thì M_h không chia hết cho bất kỳ số nguyên tố $p_1, ..., p_n$ nào, vì (a) cho thấy nó không thể chia hết cho $p_1, ..., p_{i-1}$.

Bước tiếp theo sau chứng minh của Euclid. M_h là số nguyên tố hoặc nó có thể được xem là tích các thừa số nguyên tố. Tồn tại một số nguyên tố p bằng M_h hoặc p là ước số của M_h. Vì M_h không chia hết cho $p_1, ..., p_n$, nên số nguyên tố p này phải lớn hơn p_n. Số nguyên tố tiếp theo sau p_n là p_{n+1}, do đó ta có $p_{n+1} \le p$. Ngoài ra, vì p là ước số hoặc bằng M_h, nên ta có $p \le M_h$. Biểu thức lớn nhất trong tất cả các biểu thức M là M_{p_i}, vì vậy chúng ta có thể xếp đặt các bất đẳng thức này lại với nhau để thu được

$$p_{n+1} \le M_{p_i} = p_1 \dots p_{i-1} p_i - 1 < p_1 \dots p_i$$

Chúng ta có thể tóm tắt kết quả của chúng ta trong phát biểu: Nếu (2) là đúng, thì chúng ta có

$$p_{n+1} < p_1 \dots p_i \qquad (3)$$

§2. Từ cách chứng minh của Euclid ta suy ra $p_{n+1} < p_1 \dots p_n$.

Số i nhỏ hơn n, vì vậy vế bên phải đã bị giảm. Chúng ta đã thực sự đạt được bao nhiêu? Điều kiện (2) không cho phép chúng ta chọn một giá trị nhỏ tùy ý đối với i. Chúng ta phải chọn i đủ lớn để số lượng số $p_i, ..., p_n$, nghĩa là $n-i+1$, nhỏ hơn số p_i là số đầu tiên trong các số này. Yêu cầu này phức tạp bởi sự tương tác của i với chính nó. Một ví dụ đơn giản sẽ giúp chúng ta thấy nó hoạt động như thế nào.

Hãy lấy $n=5$, để chúng ta xem xét 5 số nguyên tố $2, 3, 5, 7, 11$. Nếu chúng ta chọn $p_i = 3$, chúng ta có $i = 2$ và nhóm các số $p_i, ..., p_n$ bao gồm $3,5,7,11$. Nhóm này bao gồm $n - i + 1 = 5 - 2 + 1 = 4$ số. Số lượng các số này không nhỏ hơn số đầu tiên (4 không nhỏ hơn $p_i = 3$), vì vậy chúng ta đã chọn được giá trị quá nhỏ cho i. Nếu chúng ta tăng i lên 1, đến $i = 3$, chúng ta có $p_i = 5$ và chỉ có 3 số $5,7,11$. Vì 3 nhỏ hơn 5, nên đây là một lựa chọn phù hợp cho i. Rõ ràng bất kỳ sự lựa chọn lớn hơn của i cũng sẽ thỏa mãn (2).

Kết quả mà chúng ta sẽ chứng minh trong phần này là nếu i được chọn càng nhỏ càng tốt, thỏa mãn điều kiện (2), thì chúng ta sẽ có

$$p_1 \dots p_i < p_{i+1} \dots p_n \qquad (4)$$

Điều này đúng với $n = 5$, nó có thể được kiểm tra bằng phép nhân, $2 \cdot 3 \cdot 5 < 7 \cdot 11$. Để thấy rằng nó cũng đúng cho các n khác nữa, chúng ta phải xem i tối ưu sẽ thay đổi như thế nào khi tăng n.

Với $n = 5$ chúng ta có $i = 3$, $p_i = 5$. Nhóm các số $p_i, ..., p_n$ bao gồm 3 số $5,7,11$. Nếu chúng ta thay đổi từ $n = 5$ thành $n = 6$, chúng ta sẽ mang đến một số nguyên tố khác là 13. Tuy nhiên, chúng ta không cần phải thay đổi i, vì nhóm số $p_i, ..., p_n$ có thể chứa 4 số. Nếu chúng ta đổi thành $n = 7$, chúng ta sẽ mang đến số nguyên tố 17. Bây giờ chúng ta phải tăng i, vì nếu không thì nhóm $p_i, ..., p_n$ sẽ chứa 5 số và 5 sẽ không nhỏ hơn $p_i = 5$. Do đó, chúng ta phải chọn $i = 4$ nếu $n = 7$. Bây giờ $i = 4$ tức là $p_i = 7$ và điều này sẽ cho phép một nhóm gồm 6 số $7,11,13,17,19,23$. Nghĩa là, $i = 4$ sẽ là đủ cho $n = 7,8,9$. Với $n = 10$, giá trị của i phải được tăng lên $i = 5$. Khi đó p_i sẽ là 11. Vì giá trị này đại diện cho bước nhảy 4 so với $p_i = 7$ trước đó, giá trị này sẽ là đủ cho 5 giá trị của n, với $n = 10,11,12,13,14$. Giá trị của p_i được hiển thị trong bảng sau thông qua kiểu chữ đậm có gạch chân:

n=5: 2, 3, **<u>5</u>**, 7, 11
n=6: 2, 3, **<u>5</u>**, 7, 11, 13
n=7: 2, 3, 5, **<u>7</u>**, 11, 13, 17
n=8: 2, 3, 5, **<u>7</u>**, 11, 13, 17, 19
n=9: 2, 3, 5, **<u>7</u>**, 11, 13, 17, 19, 23
n=10: 2, 3, 5, 7, **<u>11</u>**, 13, 17, 19, 23, 29
n=11: 2, 3, 5, 7, **<u>11</u>**, 13, 17, 19, 23, 29, 31
n=12: 2, 3, 5, 7, **<u>11</u>**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37
n=13: 2, 3, 5, 7, **<u>11</u>**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41
n=14: 2, 3, 5, 7, **<u>11</u>**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43
n=15: 2, 3, 5, 7, 11, **<u>13</u>**, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
....

Mỗi lần i tăng thêm 1, số nguyên tố p_i tăng ít nhất 2 và điều này cho phép i giữ nguyên cho

3 giá trị tiếp theo của n. Nếu điều đó xảy ra khi p_i tăng hơn 2, giá trị của i không đổi đối với nhiều giá trị của n.

Giờ đây chúng ta đã thấy i tối ưu thay đổi như thế nào khi tăng n, chúng ta có thể thảo luận về tính hợp lệ của (4). Chúng ta đã biết rằng (4) đúng với $n=5$,

$$2\bullet3\bullet5<7\bullet11. \qquad (5)$$

Chuyển đến $n=6$, i không thay đổi và (4) khẳng định rằng

$$2\bullet3\bullet5<7\bullet11\bullet13, \qquad (6)$$

và điều này rõ ràng là đúng, vì vế bên phải của (5) đã được tăng lên.

Việc đi từ $n=6$ đến $n=7$ không hoàn toàn đơn giản vì i thay đổi giá trị của nó ở đây. Số 7 di chuyển từ bên phải sang bên trái và số nguyên tố mới 17 xuất hiện ở vế bên phải. Điều chúng tôi muốn chứng minh là

$$2\bullet3\bullet5\bullet7<11\bullet13\bullet17. \qquad (7)$$

Nếu không thực hiện phép tính toán, chúng ta không thể có (7) trực tiếp từ (6). Chúng ta có thể nhân vế trái của (6) với thừa số 7 và vế phải của nó với một thừa số lớn hơn là 17, nhưng điều này sẽ mang lại

$$2\bullet3\bullet5\bullet7<7\bullet11\bullet13\bullet17,$$

trong đó thừa số 7 không mong muốn xuất hiện ở vế phải.

Tuy nhiên, nếu chúng ta bắt đầu bằng (5), chúng ta có thể kiểm tra (7) mà không cần tính toán. Nhân vế trái của (5) với $7\bullet7$, vế phải của nó với $13\bullet17$, chúng ta thu được

$$2\bullet3\bullet5\bullet7\bullet7<7\bullet11\bullet13\bullet17.$$

Giản ước đi một thừa số 7 ở cả 2 vế, chúng ta có bất đẳng thức (7).

Lập luận này đem lại cho chúng ta từ $n=6$ đến $n=7$ mà không cần phải có bất kỳ sự tính toán nào. Nó phụ thuộc vào một thực tế là chúng ta có thể quay lại ***hai*** bước với $n=5$. Lập luận như vậy cũng có thể được thực hiện cho mọi bước tương tự từ một giá trị n đến giá trị $(n+1)$ tiếp theo. Nó chỉ phụ thuộc vào thực tế là bất cứ khi nào giá trị của i tăng thì nó vẫn giữ nguyên cho ít nhất ***hai*** giá trị liên tiếp của n (chúng ta đã thấy rằng nó vẫn giữ nguyên cho ít nhất là ***ba*** và thường là ***nhiều*** giá trị của n). Do đó, bất đẳng thức (4) luôn đúng với mọi $n=5,6,\ldots$.

§3. Nếu chúng ta nhân cả hai vế của (4) với $p_1,\ldots,p_i$, chúng ta thu được $(p_1\ldots p_i)^2<p_1\ldots p_n$ hay là

$$p_1\ldots p_i<\sqrt{p_1\ldots p_n}. \qquad (8)$$

Điều này, kết hợp với (3), cho ta kết quả mong muốn (1) với $n=5,6,\ldots$. Điều (1) cũng đúng với $n=4$ được kiểm tra dễ dàng bằng cách nhân nó ra.

§4. Bonse đã kéo dài suy luận của mình thêm một chút. Bất đẳng thức

$$p_{n+1}<\sqrt[3]{p_1\cdots p_n}, \qquad (9)$$

với $n\geq5$, có thể chứng minh được bằng phương pháp tương tự. Điểm quyết định trong chứng minh thực tế là các giá trị của i, được thảo luận ở cuối phần **§2**, thực tế vẫn giữ nguyên cho 3 giá trị của n, và không chỉ trong 2 bước, như trong chứng minh vừa hoàn thành.

§5. Vậy là với p_n là số nguyên tố thứ n thì Bonse đã chứng minh được:

Định lý 1 (Bonse): *Với* $n\geq4$ *thì* $p_1\ldots p_n>p_{n+1}^2$.

Định lý 2 (Bonse): *Với* $n\geq9$ *thì* $p_1\ldots p_n>p_{n+1}^3$.

Đương nhiên những bất đẳng thức này đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà lý thuyết số, vì vậy trong tương lai chúng sẽ được khái quát hóa và làm mạnh thêm. Và như một sự tiếp nối đó, L. Posa (nhà toán học Hunggari) đã chỉ ra rằng:

Định lý 3 (L. Posa): *Đối với mỗi số nguyên* k*, luôn tồn tại hằng số nguyên* $c(k)$ *sao cho* $p_1\ldots p_n>p_{n+1}^k$ *với tất cả* $n\geq c(k)$.

Sau đó định lý 3 đã được tổng quát hóa thêm bởi Laurentiu Panaitopol (Rumani).

Định lý 4: *Đối với $n \ge 2$, luôn có $p_1 \dots p_n > p_{n+1}^{n-\pi(n)}$ trong đó $\pi(n)$ biểu thị số lượng số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng n.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh một số Bổ đề cần thiết.

Bổ đề 5: *Đối với $n > 4, p_n > 2n$.*

Chứng minh: Đối với $n = 5$, $p_n = 11 > 2n$. Do đó, chúng ta có thể quy nạp theo n. Giả sử nó là đúng cho n và bây giờ chúng ta chứng minh nó cũng đúng cho $n+1$. Chúng ta có $p_n > 2n$ và vì $n > 5$, p_n là lẻ và do đó $p_n + 1$ là chẵn, do đó nó không phải là số nguyên tố. Chúng ta có, $p_{n+1} \ge p_n + 2 > 2n+2 = 2(n+1)$ (đpcm).

Bổ đề 6: *Đối với $n \ge 1, p_1 \dots p_n > 2^{n-1} n!$.*

Chứng minh:

Trước hết $p_1 p_2 p_3 p_4 = 2.3.5.7 = 210$. Và từ Bổ đề 5, $p_i > 2i$ với $i \ge 5$. Như vậy,

$$\prod_{i=5}^{n} p_i > \prod_{i=1}^{n} 2i = 2^{n-4}\frac{n!}{24}.$$

Bây giờ chúng ta có:

$$p_1 \dots p_n = p_1 p_2 p_3 p_4 . p_5 \dots p_n > 210.2^{n-4}\frac{n!}{24}$$

$$= 35.2^{n-6} n! > 2^{n-1} n! \text{ đpcm.}$$

Bổ đề 7: *Dãy $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{4}}$ là tăng nghiêm ngặt.*

Chứng minh: Ta sẽ hoàn thành nếu chúng ta có thể chứng minh $\sqrt[n]{\frac{n!}{4}} < \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)!}{4}}$

hay $$\left(\frac{n!}{4}\right)^{n+1} < \left(\frac{(n+1)!}{4}\right)^{n}$$

$$\Leftrightarrow (n!)^n n! < 4(n!)^n (n+1)^n \;\; \Leftrightarrow n! < 4(n+1)^n$$

đó là điều hiển nhiên! (đpcm).

Bây giờ ta cần tới định lý sau, được Erdös chứng minh khéo léo (đã được giới thiệu trên Tạp chí TH&TT).

Định lý 8 (Erdös, Bertrand): *Đối với $n \ge 1$, luôn luôn tồn tại một số nguyên tố nằm giữa n và $2n$.*

Bây giờ là Bổ đề cuối cùng.

Bổ đề 9: *Đối với mọi n, $p_n \le 2^n$. Đặc biệt đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 1$, nếu không $p_n < 2^n$.*

Chứng minh. Nếu $n = 1$, $p_1 = 2 = 2^1$. Chúng ta biết rằng $p_2 = 3 < 2^2$. Do đó, chúng ta quy nạp theo n nhờ sử dụng Định lý 8. Giả sử rằng $p_n < 2^n$. Vì p_i là số lẻ, chúng ta có $p_{n+1} < 2p_n < 2^{n+1}$ (đpcm).

Chứng minh định lý chính. Trường hợp $k \le 0$ là tầm thường. Vì vậy, chúng ta tập trung vào $k > 0$. Lưu ý rằng khi sử dụng Bổ đề 9, chúng ta tìm thấy $p_{n+1}^k < 2^{(n+1)k}$. Mặt khác, sử dụng Bổ đề 6, chúng ta có $p_1 \dots p_n > 2^{n-1} n!$ Kết hợp chúng lại, ta cần chứng minh rằng

$$p_1 \dots p_n > 2^{(n+1)k}.$$

Và từ Bổ đề 6, chúng ta sẽ có đpcm nếu chúng ta có thể chứng minh rằng tồn tại một n_0 để

$$2^{n-1} n! > 2^{(n+1)k}$$

là đúng cho tất cả $n \ge n_0$. Chúng ta có thể viết nó là $\frac{n!}{2} > \frac{2^{(n+1)k}}{2^n} = 2^{n(k-1)}.2^k \;\; \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{n!}{2}} > 2^{k-1}.2^{\frac{k}{n}}$

Bây giờ, vì 2^{k-1} là hằng số và $2^{k/n}$ giảm khi n tăng trong khi $\sqrt[n]{\frac{n!}{2}}$ tăng nếu n tăng, rõ ràng là có n_0 nhỏ nhất sao cho tất cả $n \ge n_0$.

Đó là đpcm.

Bạn đọc thân mến!

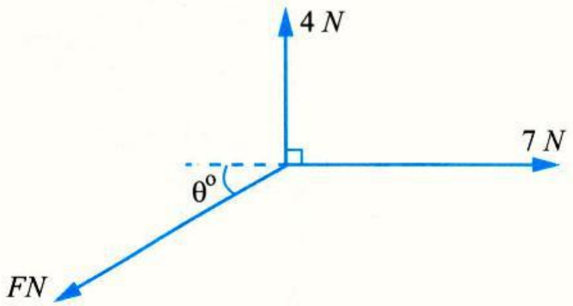
Ta đã biết một chứng minh độc đáo của Bonse, và sự mở rộng kèm một chứng minh đẹp cho kết quả của Bonse. Liệu kết quả trên còn có thể mở rộng theo hướng nào khác nữa không. Rất mong nhận được những kết quả mới từ các bạn trẻ yêu toán Việt Nam!

Sưu tầm và tổng hợp từ Internet.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 48

Problem. *A particle is in equilibrium on a smooth horizontal table when acted on by the three horizontal forces shown in the diagram. Find the value of F.*



Solution. The particle is in equilibrium position so the resultant force is zero, that means it is 0 in both x-direction and y-direction.

Therefore we get $F\cos\theta = 7$ and $F\sin\theta = 4$.

Hence $F^2\cos^2\theta + F^2\sin^2\theta = 49 + 16 = 65$. Thus $F = \sqrt{65}$.

TỪ VỰNG

particle : *hạt*

equilibrium : *cân bằng (vị trí cân bằng)*

diagram : *lược đồ, sơ đồ*

force : *lực*

resultant force : *hợp lực*

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

Bài toán. *Số người hoàn thành cuộc thi chạy được thống kê như sau:*

Thời gian (Phút)	*Tần suất*	*Tần suất cộng dồn*
(0; 15]	10	10
(15; 17]	12	22
(17; 19]	20	42
(19; 21]	5	n
(21; 23]	m	50

Tìm các số m, n.

Lời giải. Từ cột *Tần suất cộng dồn* ta thấy có 42 người hoàn thành cuộc thi chạy trong khoảng thời gian (0; 19] và n người hoàn thành cuộc thi chạy trong khoảng thời gian (0; 21]. Kết hợp với cột *Tần suất* ta có: $n - 42 = 5$. Từ đó suy ra $n = 47$.

Tương tự, $m = 50 - n = 50 - 47 = 3$.

➤***Nhận xét.*** Bạn *Nguyễn Thị Quỳnh Nhi*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**, có bài dịch tốt, gửi bài đến Tòa soạn TH& TT sớm.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 28. *(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT Bắc Giang, năm học 2008-2009)*

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a+b=\frac{5}{4}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}$.

Lời giải.

Cách 1. Thêm bớt cùng một hạng tử rồi sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Do $a+b=\frac{5}{4}$ nên:

$$P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}+4(a+b)-5$$
$$=\left(\frac{4}{a}+4a\right)+\left(\frac{1}{4b}+4b\right)-5.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta được:

$\frac{4}{a}+4a\ge 2\sqrt{\frac{4}{a}.4a}=8;\quad \frac{1}{4b}+4b\ge 2\sqrt{\frac{1}{4b}.4b}=2$

$\Rightarrow P\ge 8+2-5=5.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{4}{a}=4a\\ \frac{1}{4b}=4b\\ a+b=\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Vậy $\min P=5\Leftrightarrow a=1,\ b=\frac{1}{4}$.

Cách 2. Nhân hai vế cùng một số khác 0 rồi sử dụng bất đẳng thức Cauchy

Do $a+b=\frac{5}{4}$ nên nhân hai vế cho $\frac{5}{4}$ ta được:

$$\frac{5}{4}.P=\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}\right)(a+b)=4+\frac{1}{4}+\left(\frac{a}{4b}+\frac{4b}{a}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta được $\frac{a}{4b}+\frac{4b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{4b}.\frac{4b}{a}}=2$

Suy ra $\frac{5}{4}.P\ge\frac{17}{4}+2=\frac{25}{4}\Rightarrow P\ge 5$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{a}{4b}=\frac{4b}{a}\\ a+b=\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Vậy $\min P=5\Leftrightarrow a=1,b=\frac{1}{4}$.

Cách 3. Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số $\left(\sqrt{a};\sqrt{b}\right)$ và $\left(\frac{2}{\sqrt{a}};\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)$ ta có:

$$\left(\sqrt{a}.\frac{2}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}.\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)^2\le(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(2+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{5}{4}.P\Leftrightarrow P\ge 5.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{a}{2}=2b\\ a+b=\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Vậy $\min P=5\Leftrightarrow a=1,b=\frac{1}{4}$.

Cách 4. Sử dụng bất đẳng thức Schwarz.

Với a, b, x, y là các số dương ta luôn có $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$. *Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Thay $b=\frac{5}{4}-a$ vào biểu thức P ta được:

$$P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}=\frac{4}{a}+\frac{1}{4\left(\frac{5}{4}-a\right)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta được:

$$P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4\left(\frac{5}{4}-a\right)}=\frac{4^2}{4a}+\frac{1^2}{5-4a}\geq\frac{(4+1)^2}{4a+5-4a}=5.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{4}{4a}=\frac{1}{5-4a}\\ a+b=\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{4}\end{cases}.$

Cách 5. Tham số hóa.

Do $a>0$, $b>0$ nên đặt $a=bt$; với $t>0$.

Từ giả thiết $a+b=\frac{5}{4}$ suy ra

$$bt+b=\frac{5}{4}\Rightarrow b=\frac{5}{4(t+1)}\Rightarrow a=\frac{5t}{4(t+1)}.$$

Thay $a=\frac{5t}{4(t+1)}$; $b=\frac{5}{4(t+1)}$ vào biểu thức P ta được $P=\frac{16(t+1)}{5t}+\frac{t+1}{5}=\frac{1}{5}.\left(\frac{16}{t}+t+17\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta được $\frac{16}{t}+t\geq 2\sqrt{\frac{16}{t}.t}=8$

$\Rightarrow P\geq\frac{1}{5}(8+17)=5$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=4$ $\Leftrightarrow a=1, b=\frac{1}{4}$. Vậy $\min P=5\Leftrightarrow a=1,\ b=\frac{1}{4}$.

Cách 6. Sử dụng điều kiện có nghiệm của tam thức bậc hai.

Do $a>0$, $b>0$ nên quy đồng rồi khử mẫu số ta được: $P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}\Rightarrow 4abP=16b+a$.

Thay $b=\frac{5}{4}-a$ ta được

$$4a\left(\frac{5}{4}-a\right)P=16\left(\frac{5}{4}-a\right)+a$$

$$\Leftrightarrow 4P.a^2-5(3+P).a+20=0 \qquad (*)$$

Xem (*) là phương trình bậc hai với ẩn là a, khi đó ta có: $\Delta=5(5P^2-34P+45)$.

Để phương trình (*) có nghiệm thì $\Delta\geq 0$ $\Leftrightarrow 5P^2-34P+45\geq 0\Leftrightarrow(5P-9)(P-5)\geq 0$ (1)

Mặt khác, vì $b>0$ nên

$$a=\frac{5}{4}-b<\frac{5}{4}\Rightarrow P=\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}>\frac{4}{a}>\frac{16}{5} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $P-5\geq 0\Rightarrow P\geq 5$.

$P=5$ khi phương trình (*) có nghiệm kép:

$$a=\frac{5(3+P)}{8P}=1\Rightarrow b=\frac{1}{4}.$$

Vậy $\min P=5\Leftrightarrow a=1, b=\frac{1}{4}$.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

➢**Nhận xét.** Ngoài 6 cách giải của *Đoàn Cát Nhơn*, người giới thiệu BÀI TOÁN 28, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải cho bài toán này từ bạn *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, *Trần Quốc Hội*, GV THCS Tự Lập, Mê Linh, **Hà Nội**; *Nguyễn Hữu Huy Hoàng*, 10A8, THPT Cam Lộ, **Quảng Trị**; *Nguyễn Duy Thái*, GV THCS Nam Hồng, TX. Hồng Lĩnh, **Hà Tĩnh**; *Lê Thị Minh Thùy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyễn Nghĩa Tư, **Quảng Ngãi**; *Nhóm HTS* (Happy to succeed) 12 toán, THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, **Bình Định**. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 30 dưới đây về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.10.2019.

BÀI TOÁN 30. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=3\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{6}\end{cases}$$

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

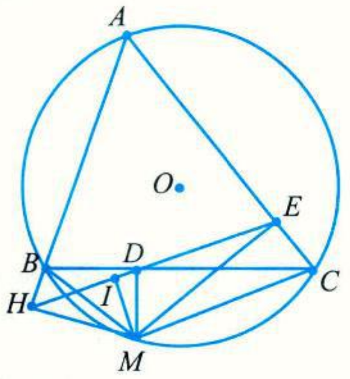
DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 505, T7.2019.

Bài 36 (Vô địch Mỹ, 1979). *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung* $\overset{\frown}{BC}$ *của đường tròn (O) không chứa A. Gọi D, E, H lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng*

$$\frac{BC}{MD}=\frac{CA}{ME}+\frac{AB}{MH}.$$

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} MD \perp BC \\ ME \perp AC \end{cases} \Rightarrow$ tứ giác $MDEC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EMC}=\widehat{EDC}.$

Ta có: $\begin{cases} MH \perp AB \\ MD \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ tứ giác $MHBD$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HMB}=\widehat{HDB}.$ Lại có tứ giác $ABMC$ nội tiếp, do đó: $\widehat{MBH}=\widehat{MCA}.$

Ta có: $\widehat{HMB}+\widehat{MBH}=\widehat{MCA}+\widehat{EMC}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{EMC}=\widehat{HMB} \Rightarrow \widehat{HDB}=\widehat{EDC}$

$\Rightarrow H, D, E$ thẳng hàng (Đường thẳng Simson).

Do các tứ giác $MHBD$ và $MDEC$ nội tiếp nên

$$\begin{cases} \widehat{MEH}=\widehat{MCB} \\ \widehat{MHE}=\widehat{MBC} \end{cases} \Rightarrow \Delta MEH \backsim \Delta MCB \ (g.g).$$

Kẻ $MI \perp HE \Rightarrow \dfrac{BC}{MD}=\dfrac{HE}{MI}.$

Lại có: $\begin{cases} \widehat{MHD}=\widehat{MBC}=\widehat{MAC} \\ \widehat{MDH}=\widehat{MBH}=\widehat{MCA} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta MHD \sim \Delta MAC \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AC}{ME}=\dfrac{HD}{MI}.$

Ta có: $\widehat{MDE}+\widehat{MCA}=\widehat{MCA}+\widehat{MBA}=180^0$

$\Rightarrow \widehat{MDE}=\widehat{MBA}.$ Mà $\widehat{MED}=\widehat{MCB}=\widehat{MAB}$

$\Rightarrow \Delta MED \sim \Delta MAB \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AB}{MH}=\dfrac{ED}{MI}$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{ME}+\dfrac{AB}{MH}=\dfrac{HD}{MI}+\dfrac{DE}{MI}=\dfrac{HE}{MI}=\dfrac{BC}{MD}$ (đpcm).

➢***Nhận xét.*** Hoan nghênh các bạn: *Nguyễn Minh Thảo*, GV THCS Nguyễn Chánh, Sơn Tịnh, *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**; *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội** đã sớm gửi lời giải của bài toán về Tòa soạn. Đặc biệt bạn *Đậu Công Nho*, GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An** đã đưa ra 4 cách giải cho bài toán trên. Các cách giải đều đúng.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

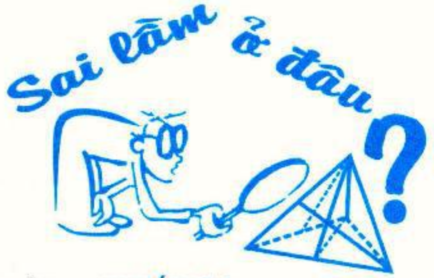
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.10.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 38. *Tìm hai chữ số tận cùng của số*

$$2^{2016}+2^{2017}.$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: AI ĐÚNG !

(Đề đăng trên TH&TT số 503, tháng 5 năm 2019)

***Phân tích và đáp án*:**

Bạn *Hoài* đã sai ở những lập luận sau:

- Trật tự lôgic: yêu cầu bài toán tìm a, b để HPT (1),(2) có nghiệm x với mọi m, bạn *Hoài* đi làm tìm x để a là hằng số.

- Hệ phương trình (1),(2) có tối đa là một nghiệm, HPT (1),(2) có nghiệm thì điều kiện cần là phương trình (1) có nghiệm và phương trình (2) cũng có nghiệm. PT(1) là phương trình bậc nhất có tối đa là một nghiệm, PT(2) là phương trình (quy về) bậc 2 nếu có nghiệm thì chỉ có thể có 2 nghiệm. Do đó theo trật tự thì ta đi tìm a, b để nghiệm của PT(1) là nghiệm của PT(2) với mọi m. Ở đây, bạn *Hoài* lập luận ngược lại dẫn đến lúng túng trong lập luận và đi đến kết luận sai. ***Sau đây là lời giải đúng*:**

Ta có điều kiện tiếp xúc của đường thẳng d với đồ thị (C) là hệ phương trình

$$\begin{cases} a = 2x - (2m+3) & (1) \\ ax + b = x^2 - (2m+3)x + m^2 + 2m & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm } x.$$

Bây giờ ta tìm a, b để HPT (1),(2) có nghiệm x với mọi tham số m.

Từ (1), suy ra $x = \dfrac{a+2m+3}{2}$, thay vào (2) ta được

$$a.\frac{a+2m+3}{2} + b = \left(\frac{a+2m+3}{2}\right)^2 - (2m+3)\frac{a+2m+3}{2} + m^2 + 2m \quad (*)$$

Bây giờ, tìm a, b để PT(*) đúng với mọi m. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow 2a.(a+2m+3) + 4b = (a+2m+3)^2 - 2(2m+3)(a+2m+3) + 4(m^2+2m)$$

$$\Leftrightarrow 4m(a+1) + a^2 + 6a + 4b + 9 = 0 \text{ đúng với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ a^2+6a+4b+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Kiểm tra lại các giá trị a, b tìm được thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn đáp án B.

➢***Nhận xét.*** Đã không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

KIHIVI

CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM !

Bài toán. *Cho a,b,c,d là các số thực phân biệt và khác 0. Chứng minh PT*

$$\frac{a}{a-x} + \frac{b}{b-x} + \frac{c}{c-x} + \frac{d}{d-x} = 0$$

có ít nhất 1 nghiệm thực.

Học sinh 1 làm bài như sau:

Đặt $f(x) = \dfrac{a}{a-x} + \dfrac{b}{b-x} + \dfrac{c}{c-x} + \dfrac{d}{d-x}$.

Trường hợp 1. Với $a<0$ thì ta có:

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, điều này có nghĩa là tồn tại số thực $m<a$ sao cho $f(m)<0$.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, điều này có nghĩa là tồn tại số thực $n>a$ sao cho $f(n)>0$.

Vì $f(m).f(n)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(m;n)$.

Trường hợp 2. Với $a>0$ thì tương tự như trên ta cũng chỉ ra được $m<a$ để $f(m)>0$ và $n>a$ để $f(n)<0$.

Từ đó suy ra PT $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thực.

Học sinh 2 làm bài như sau:

Ta có: $\dfrac{a}{a-x} + \dfrac{b}{b-x} + \dfrac{c}{c-x} + \dfrac{d}{d-x} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-(a+b+c+d)x^3 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2}{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)}$$
$$\frac{-3(abc+bcd+cda+dab)x + 4abcd}{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(a+b+c+d)x^3 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - 3(abc+bcd+cda+dab)x + 4abcd = 0 \ (*).$$

Vì (*) là PT bậc 3 luôn có nghiệm nên PT đã cho có ít nhất 1 nghiệm (đpcm).

Bạn đánh giá thế nào về lời giải của 2 học sinh trên?

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 507 (9.2019)

Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY