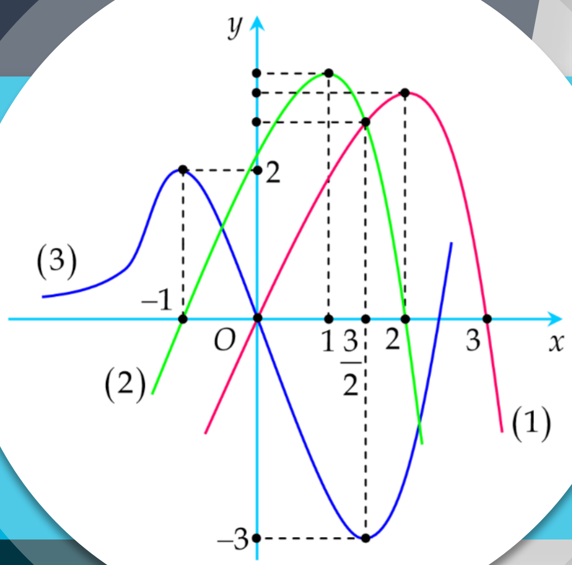
CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

NGUYỄN NAM TRUNG
NGUYỄN MINH TUẤN
NGUYỄN QUANG PHÁT
NGUYỄN THỊ KIM ANH
NGUYỄN TIẾN DŨNG
MA TRUNG HIẾU



PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN ĐỒ THỊ

OMATHS

Blog của Fanpage
lovetoan.wordpress.com

Phone
0343763310

Contact
tuangenk@gmail.com

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN ĐỒ THỊ
TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

LỜI GIỚI THIỆU

Với kỳ thi THPT Quốc Gia hiện nay, các bài toán luôn có một chỗ đứng nhất định và ngày càng biến hóa ra thành nhiều dạng, điều này làm cho nhiều bạn học sinh tỏ ra vô cùng lúng túng khi đối mặt với các dạng toán này, một phần chưa có phương pháp làm và đồng thời cũng chưa được tiếp xúc nhiều với dạng bài tập này. Với tư cách là những người đã trải qua kỳ thi THPT Quốc Gia và nhiều kỳ thi thử khác bọn mình quyết định viết nên cuốn ebook này nhằm gửi tới cho các sĩ tử ôn thi THPT Quốc Gia năm nay có thể tổng ôn tập lại và tiếp xúc với nhiều bài toán hơn để chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc Gia đang đến rất gần. Các bài toán trong ebook này chủ yếu được trích từ các đề thi thử của các trường, một số bọn mình tự sáng tác, một số sưu tầm từ các thầy cô trên mạng. Xin gửi lời cảm ơn tới

1. Thầy Nguyễn Đăng Ái – Thuận Thành Bắc Ninh
2. Thầy Đào Văn Tiến – THPT A Nghĩa Hưng
3. Thầy Đỗ Văn Đức
4. Anh Phạm Minh Tuấn – ĐH Bách Khoa Đà Nẵng
5. Anh Nguyễn Quang Huy – ĐH Sư phạm Thái Nguyên
6. Bạn Ngô Nguyên Quỳnh – ĐH Sư Phạm Quy Nhơn
7. Thầy Nguyễn Chiến
8. Bạn Tạ Công Hoàng – THPT Chuyên Lê Khiết

Đã giúp mình đồng thời viết ra những tài liệu hay để bọn mình tham khảo. Thay mặt nhóm tác giả gồm

- Nguyễn Minh Tuấn – ĐH FPT Hà Nội
- Nguyễn Thị Kim Anh – THPT Chuyên Nguyễn Trãi
- Nguyễn Quang Phát – THPT Chuyên Nguyễn Trãi
- Nguyễn Nam Trung
- Nguyễn Tiến Dũng – THPT Đô Lương 3 – Nghệ An
- Ma Trung Hiếu – THPT Trịnh Hoài Đức

Cảm ơn mọi người đã theo dõi fanpage. Chúc các bạn có một mùa thi thành công!

Mọi ý kiến đóng góp vui lòng gửi về địa chỉ

NGUYỄN MINH TUẤN – K14 ĐẠI HỌC FPT

EMAIL: tuangenk@gmail.com

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN ĐỒ THỊ

Tạp chí và tư liệu toán học

I. LÝ THUYẾT.

Trước khi vào các bài toán cụ thể chúng ta cần nắm chắc các kiến thức sau.

Cách vẽ và tịnh tiến đồ thị đặc biệt – Thầy Nguyễn Chiến

ĐỒ THỊ	CÁCH VẼ
$y=f(-x)$	Lấy đối xứng đồ thị $y=f(x)$ qua trục Oy.
$y=-f(x)$	Lấy đối xứng đồ thị $y=f(x)$ qua trục Ox.
$y=f(\lvert x\rvert)$	+ *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $y=f(x)$. + *Bỏ* phần đồ thị bên trái Oy của $y=f(x)$, lấy đối xứng phần đồ thị *được giữ* qua Oy.
$y=\lvert f(x)\rvert$	+ *Giữ nguyên* phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $y=f(x)$. + *Bỏ* phần đồ thị phía dưới Ox của $y=f(x)$, lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ* qua Ox.
$y=\lvert f(\lvert x\rvert)\rvert$	Thực hiện liên hoàn biến đổi đồ thị $y=f(x)$ thành đồ thị $y=\lvert f(x)\rvert$, sau đó biến đổi đồ thị $y=\lvert f(x)\rvert$ thành đồ thị $y=\lvert f(\lvert x\rvert)\rvert$.
$y=\lvert u(x)\rvert.v(x)$ với $(C): y=u(x).v(x)$	+ *Giữ nguyên* phần đồ thị trên miền $u(x)\geq 0$ của đồ thị $y=f(x)$. + *Bỏ* phần đồ thị trên miền $u(x)<0$ của $y=f(x)$, lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ* qua Ox.
$y=f(x)+m$ với $m>0$	Dịch chuyển đồ thị lên trên m đơn vị
$y=f(x)-m$ với $m<0$	Dịch chuyển đồ thị xuống dưới m đơn vị.
$y=f(x+n)$ với $n>0$	Dịch chuyển đồ thị sang trái n đơn vị.
$y=f(x-n)$ với $n<0$	Dịch chuyển đồ thị sang phải n đơn vị.
$y=f(px)$ với $p>1$	Co đồ thị theo chiều ngang hệ số p.
$y=f(px)$ với $0<p<1$	Giãn đồ thị theo chiều ngang hệ số $\frac{1}{p}$.
$y=qf(x)$ với $q>1$	Giãn đồ thị theo chiều dọc hệ số q.

$y = qf(x)$ với $q < 1$	Co đồ thị theo chiều dọc hệ số $\frac{1}{q}$.
$y = \|f(x)\| + m$	Vẽ $y = \|f(x)\|$ trước sau đó tịnh tiến đồ thị lên trên hoặc xuống dưới tùy theo m.
$y = \|f(x+m)\|$	Tịnh tiến đồ thị qua trái, phải tùy theo m sau đó lấy đối xứng qua trục Ox (Giữ nguyên phần trên Ox, bỏ phần dưới Ox, lấy đối xứng phần bị bỏ qua Ox).
$y = f(\|x\| + m)$	Tịnh tiến đồ thị qua trái, phải tùy theo m sau đó lấy đối xứng qua trục Oy (Giữ nguyên phần bên phải Oy, bỏ phần bên trái Oy, lấy đối xứng phần được giữ nguyên qua Oy).
$y = f(\|x + m\|)$	Vẽ $y = f(\|x\|)$ trước sau đó tịnh tiến đồ thị sang trái hoặc phải tùy theo m.

Số điểm cực trị của hàm trị tuyệt đối – Thầy Nguyễn Chiến.

- Gọi m là số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và k là số giao điểm giữa đồ thị $y = f(x)$ với trục Ox.

  $\Rightarrow$ Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là $m + k$.

- Gọi m là số điểm cực trị có hoành độ dương của hàm số của hàm số $y = f(x)$.

  $\Rightarrow$ số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là $2n + 1$.

Bài toán chứa tham số: Cho hình vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ có n_1 *điểm cực trị.* Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x+k) + f(m)|$ có n_2 *điểm cực trị.*

+ Khi tịnh tiến sang trái hoặc sang phải đơn vị thì số điểm cực trị hàm số $y = f(x+k)$ vẫn bằng số điểm cực trị hàm số $y = f(x)$.

+ Để tìm *số giao điểm* $y = f(x) + f(m)$ với trục Ox ta chuyển về dạng tìm *số giao điểm* của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -f(m)$.

Lưu ý: số giao điểm này không tính giao tại điểm cực trị của hàm $y = f(x)$.

Phương pháp giải toán đồ thị tìm khoảng đồng biến và nghịch biến

Đây là dạng toán vô cùng đơn giản, cách làm bài nào cũng như bài nào, ta sẽ có 3 bước là đạo hàm $\rightarrow$ Tìm nghiệm $\rightarrow$ Lập bảng biến thiên!

Khi vào ví dụ cụ thể ta sẽ hiểu được mấu chốt của bài toán này

Phương pháp giải toán đồ thị chứa tham số.

Ở đây ta sẽ xét dạng toán $f(u(x)) = f(m)$ trong đó $u(x)$ là bất kì hàm gì đó liên quan tới x và $f(m)$ là hàm theo biến m và đề bài yêu cầu tìm giá trị của m để thỏa mãn điều kiện gì đó. Khi đó ta làm như sau:

- ***Bước 1.*** Chặn giá trị x, $u(x), f(u(x))$
- ***Bước 2.*** Đặt $t = u(x)$, lập bảng biến thiên cho hàm $f(t)$
- ***Bước 3.*** Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện của hàm $f(m)$, từ đó suy ra điều kiện của m

Với những bạn nào cảm thấy khó hiểu thì có thể tham khảo các làm sau của bạn Sơn Hoàng. Link https://www.youtube.com/channel/UCiduEKtcZZO8Yei-XBUq9lQ

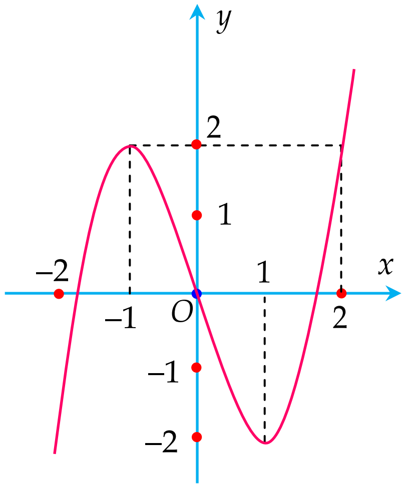
Ví dụ đơn giản để hiểu, ta có thể lấy một đề bài kiểu như sau

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ, hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right) = m^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy ở đây ta sẽ làm theo 3 bước trên, dễ thấy $u = \sqrt{4-x^2} \in [0;2]$, chuyển bài toán về tìm giá trị nguyên của tham số M để phương trình $f(u) = M$ có 2 nghiệm phân biệt, đây là bài toán cơ bản!

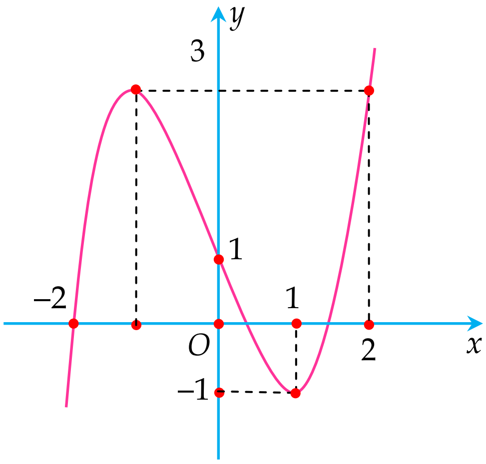
ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:

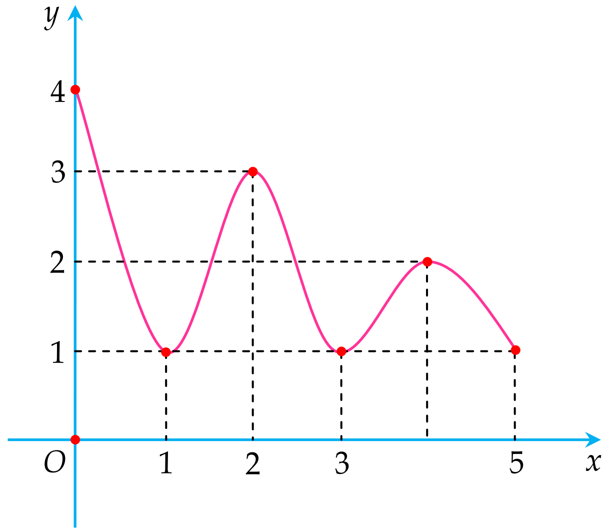


Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình

$f(\pi^x)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;5]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



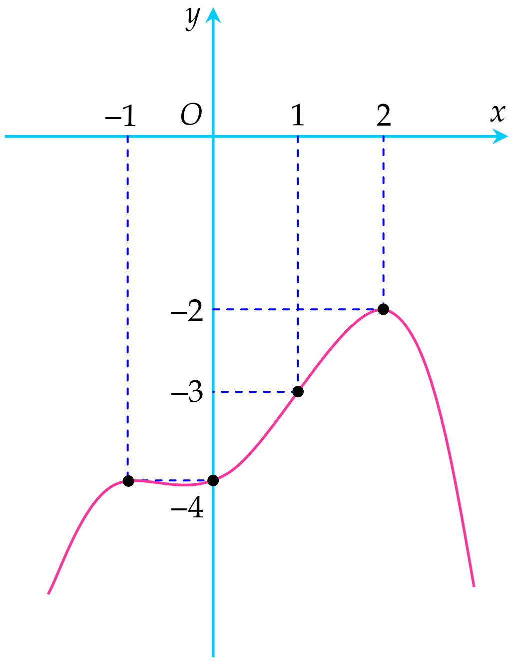
Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình

$$(2019-m)\sqrt{f^2(x)+f(x)-1}\geq\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$$

Nghiệm đúng với mọi $x\in[0;5]$?

A. 2014 **B.** 2015 **C.** 2016 **D.** 2017

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



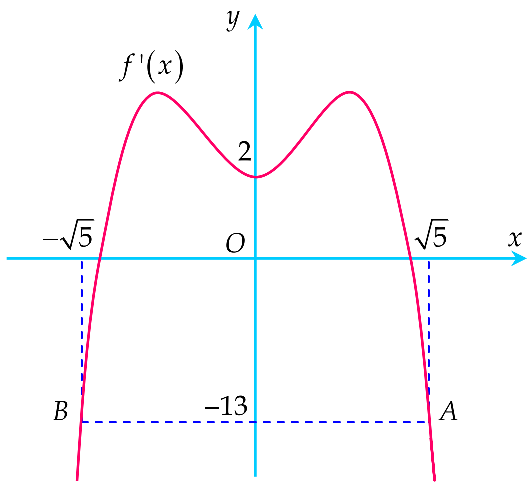
Tổng tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^x\leq\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$$

Đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là?

A. 10. **B.** 4. **C.** 5 **D.** 9

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x)\leq 0\quad\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



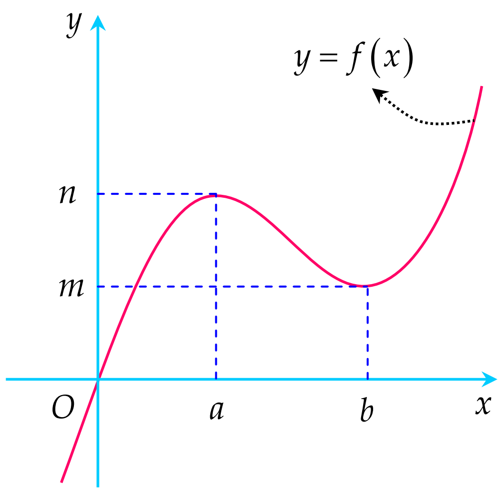
A. $m \ge \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$

B. $m \le \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$

C. $m \le \frac{2}{3} f(0) - 2\sqrt{5}$

D. $m \ge \frac{2}{3} f\left(-\sqrt{5}\right) - 4\sqrt{5}$

Câu 6. Cho $0 < \sqrt{a} - 1 < \sqrt{b} - 1 < a$ và hàm số $y = g(x) = \dfrac{f(x)}{f\left((x+1)^2\right)}$ có đạo hàm trên $[0;+\infty)$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi $x \in \left[\sqrt{a} - 1; \sqrt{b} - 1\right]$



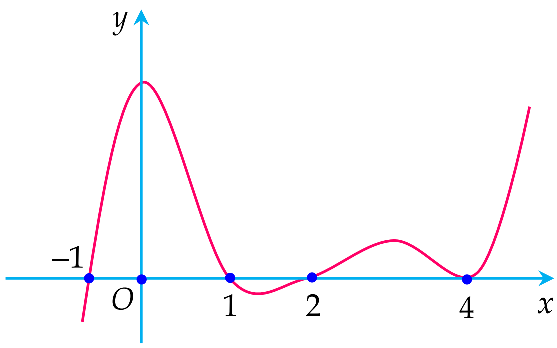
A. $g(x) \ge \dfrac{f\left(\sqrt{b} - 1\right)}{m}$

B. $g(x) \le \dfrac{f\left(\sqrt{a} - 1\right)}{n}$

C. $g(x) \le \dfrac{f\left(\sqrt{b} - 1\right)}{m}$

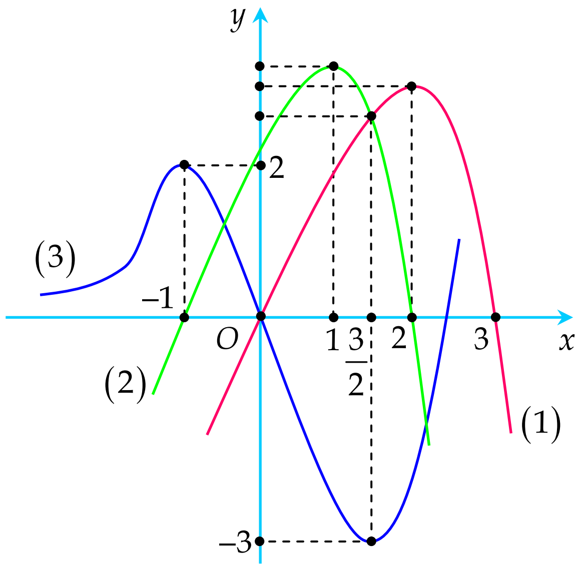
D. $-10 \le g(x) \le 0$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn $[1;4]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là?



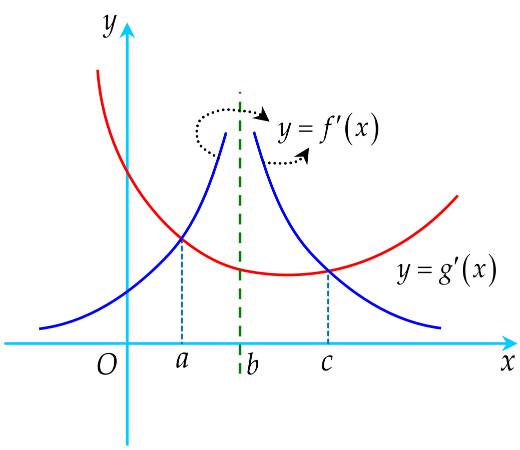
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 8. Cho đồ thị của hàm số $f(x), F(x), f'(x+1)$ như hình vẽ. Tính giá trị của tích phân $\int_{f'(-1)+F(1.5)}^{f(0)+f(1.5)} \sin^3 x.\cos x dx$?



A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

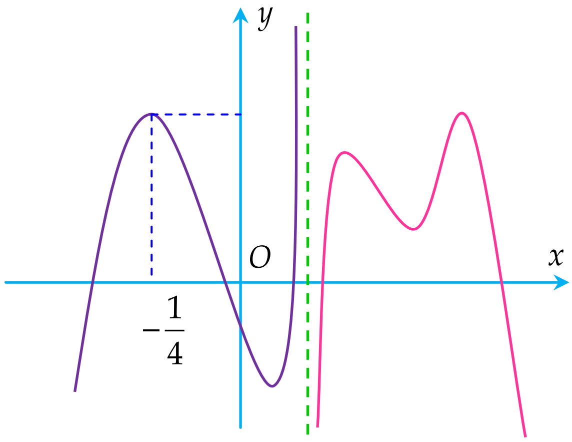
Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ và hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hai hàm số $y=f'(x), y=g'(x)$ như hình vẽ dưới. Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$ và $S=-\left[h\left(x^2+b\right)\right]^2+h\left(b+x^2\right)\left(1+2h(c)\right)-\left[h(c)\right]^2$ với a,b,c là các số thực đã biết. Khẳng định đúng với mọi $x\neq 0$ là?



A. $S\in\left[h(c);h(a+c)\right]$ **B.** $S\le h(c)$

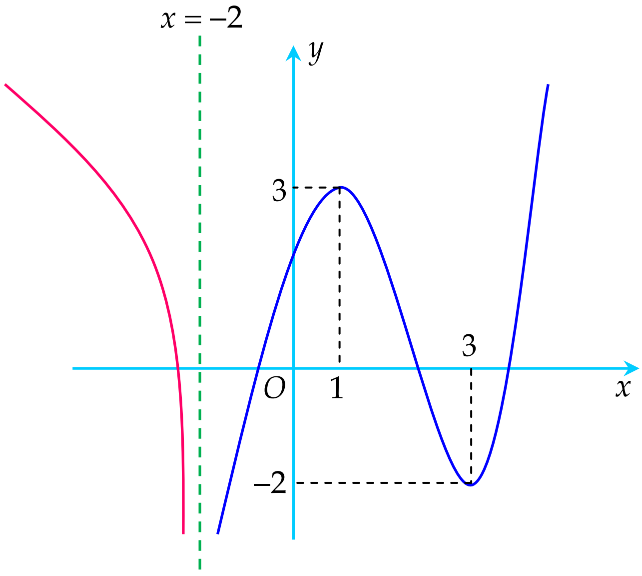
C. $S \le [h(c); h(a+b)]$ **D.** $S \in [h(a); h(c)]$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + x)$?



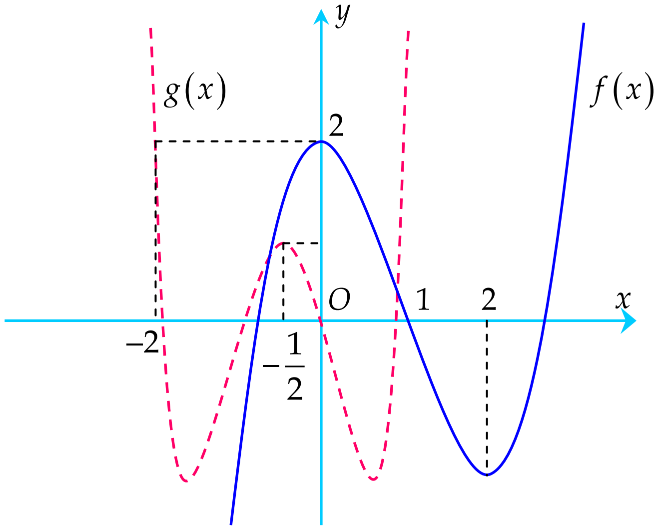
A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ dưới. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị?



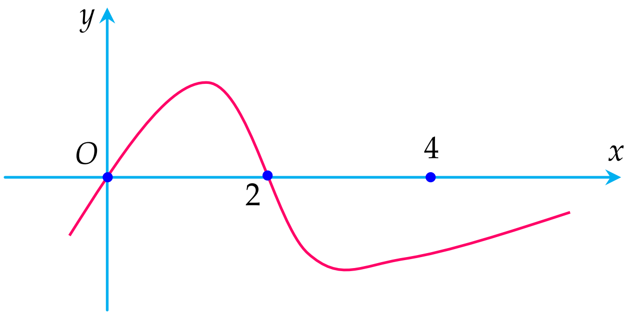
A. -210 **B.** -212 **C.** -211 **D.** -209

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x) = f(mx^2 + nx + p)\ (m, n, p \in \mathbb{Q})$ có đồ thị như hình dưới, trong đó đường nét liền là đồ thị hàm $f(x)$, đồ thị hàm nét đứt là đồ thị hàm $g(x)$, đường $x = -\frac{1}{2}$ là trục đối xứng hàm $g(x)$. Giá trị của biểu thức $P = (n+m)(m+p)(p+2n)$ bằng bao nhiêu?



A. 6 **B.** 24 **C.** 12 **D.** 16

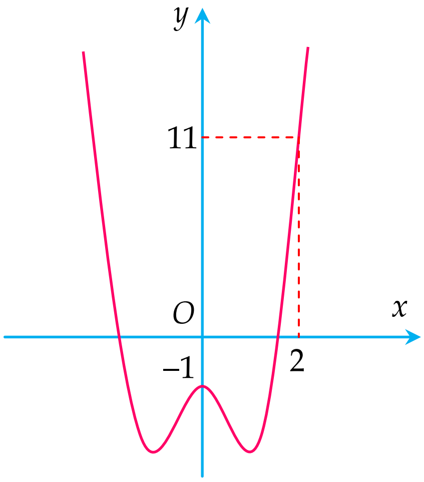
Câu 13. Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ dưới đây và $f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;4]$.



A. $m=f(4)$. **B.** $m=f(0)$. **C.** $m=f(2)$. **D.** $m=f(1)$.

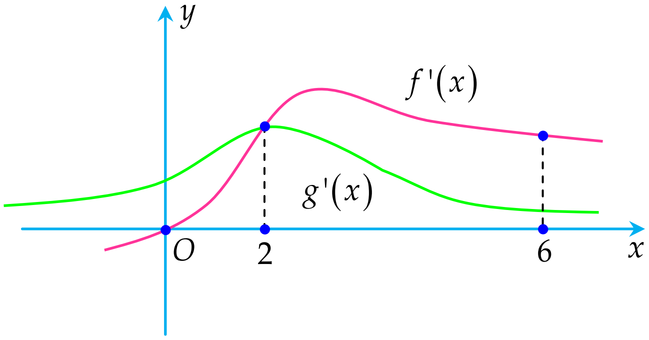
Câu 14. Cho hàm số $f(x)$có đồ thị như hình vẽ đồng thời $f(x+1)-f(x)=2x(2x+1)(x+1)(*)$ Biết rằng $f(x)=ax^4+bx^2+c\,;g(x)=mx^2+nx+p$ và $f(x)=g\left(x^2-1\right)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$



A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{4}$ **C.** -2 **D.** -4

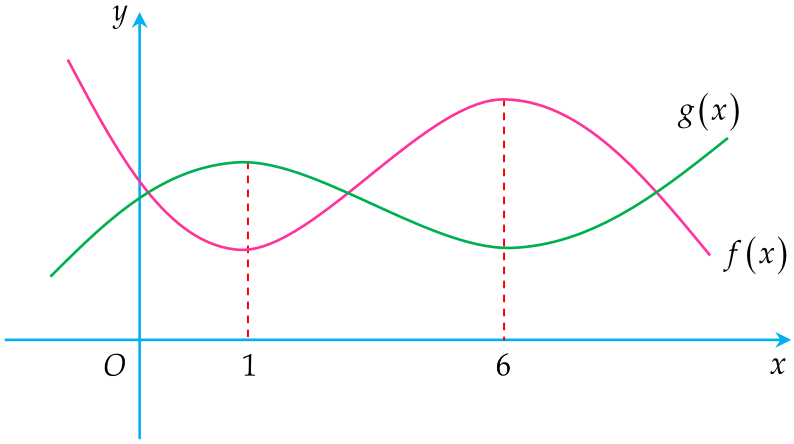
Câu 15. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

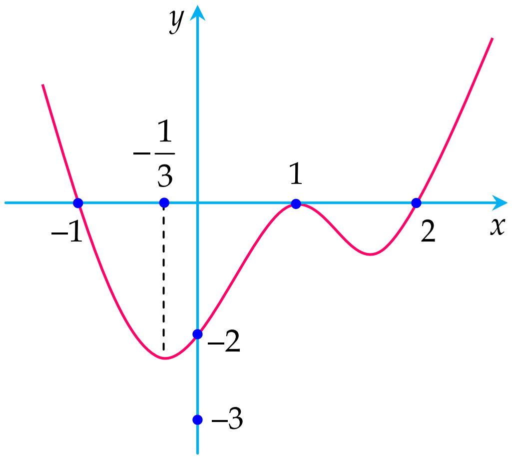
A. $h(2),h(6)$. **B.** $h(6),h(2)$. **C.** $h(0),h(2)$. **D.** $h(2),h(0)$.

Câu 16. Cho 2 hàm số $f(x),g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $x=1,x=6$ đều là các điểm cực trị của 2 hàm số $f(x),g(x)$ đồng thời $f(1)=g(6),2f(6)=g(1)+3$ và $2f(-5x+16)=3g(5x-9)-1(*)$.Gọi M,m lần lượt là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=f(x)(f(x)-2g(x)+1)+g^2(x)+g(x)$. Tính tổng $P=M+m$?



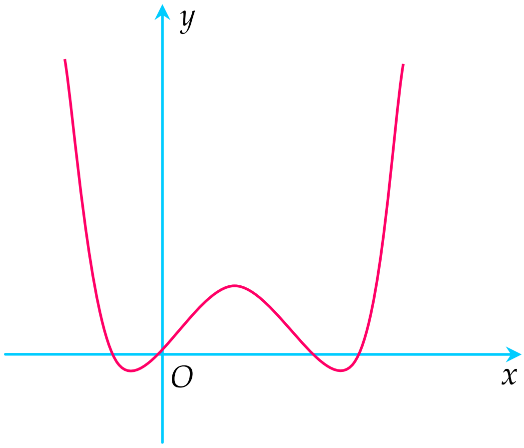
A. $\frac{27}{4}$ **B.** $\frac{23}{4}$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây. Đặt $g(x)=f(f(x)-1)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



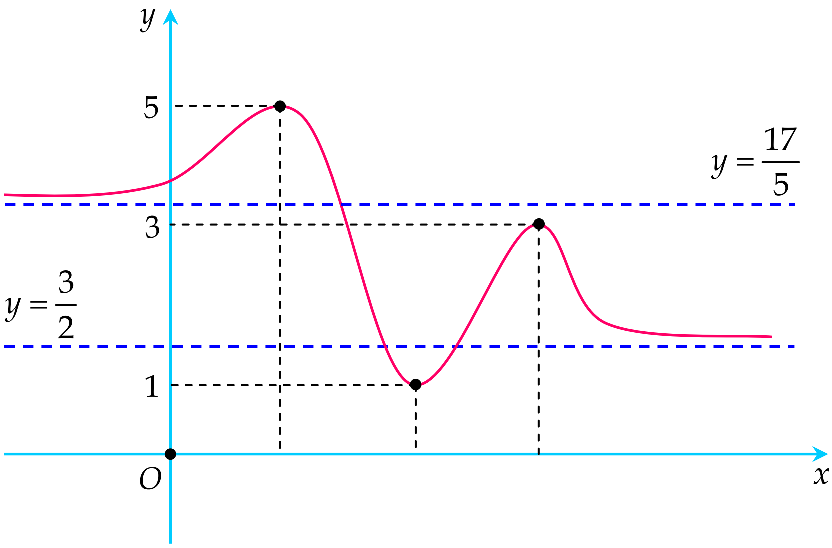
A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 18. Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y=f(x)$ được cho như hình vẽ bên. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục Ox.



A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** –4.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

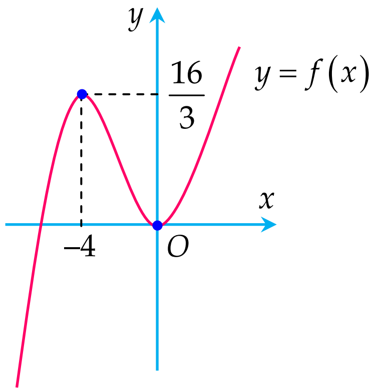


Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để phương trình sau có nghiệm là bao nhiêu?

$$e^{f^3(x)+2f^2(x)-7f(x)+5}+\ln\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=m?$$

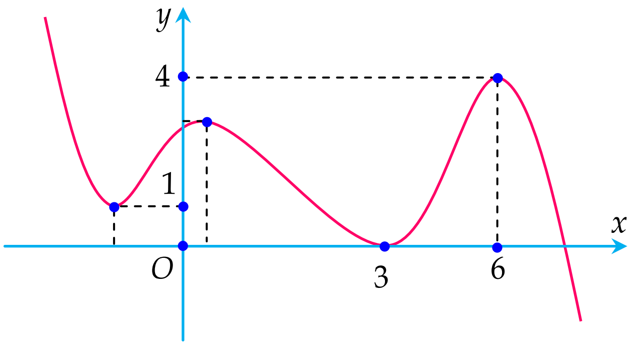
A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ có nghiệm?



A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số **D.** 3.

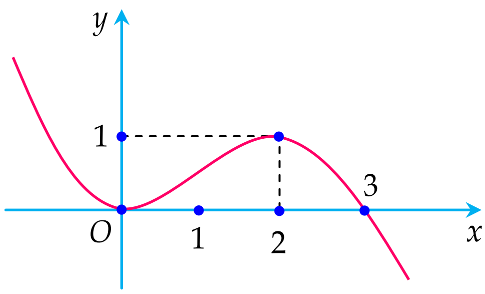
Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$ có 3 nghiệm phân biệt là:

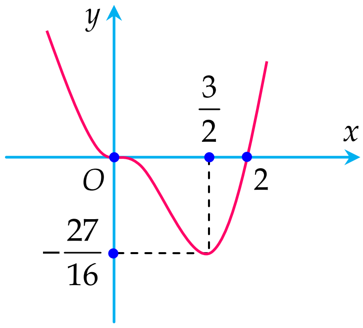
A. $m=\dfrac{\pm\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{\pm3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt truc hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.



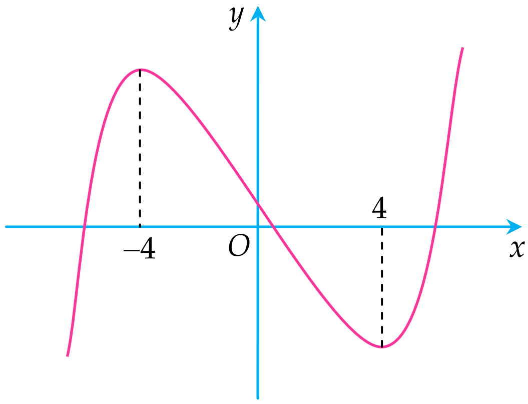
A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$?



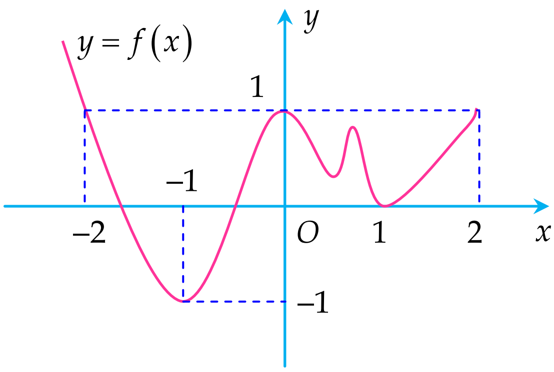
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 24. Cho đồ thị hàm số là nguyên hàm của $f(x)$ có dạng $F(x) = ax^3 + bx^2 + 5x + d$. Tính diện tích tạo bởi $f(x)$ và trục hoành?



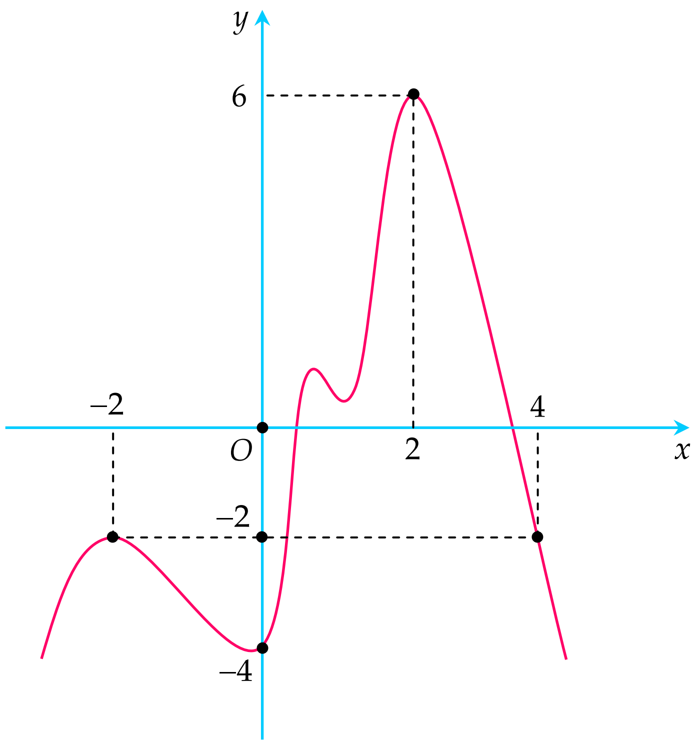
A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{50}{3}$. **D.** $\frac{70}{3}$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ dưới. Hỏi phương trình $\sqrt[3]{f^2(x) - 2f(x) + 9} = \sqrt{|f(x-2)| + 3}$ có bao nhiêu nghiệm thực trên đoạn $[-2;3]$?



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

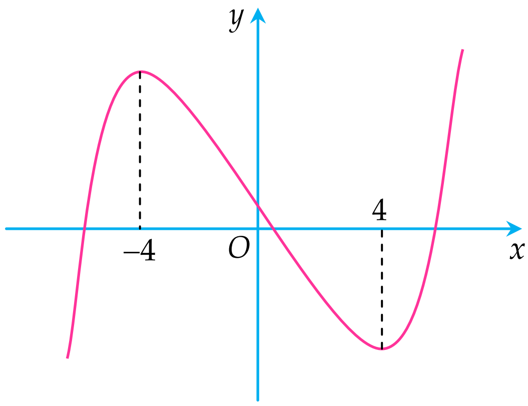
Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\frac{1}{3}f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\right)=m$ có nghiệm?

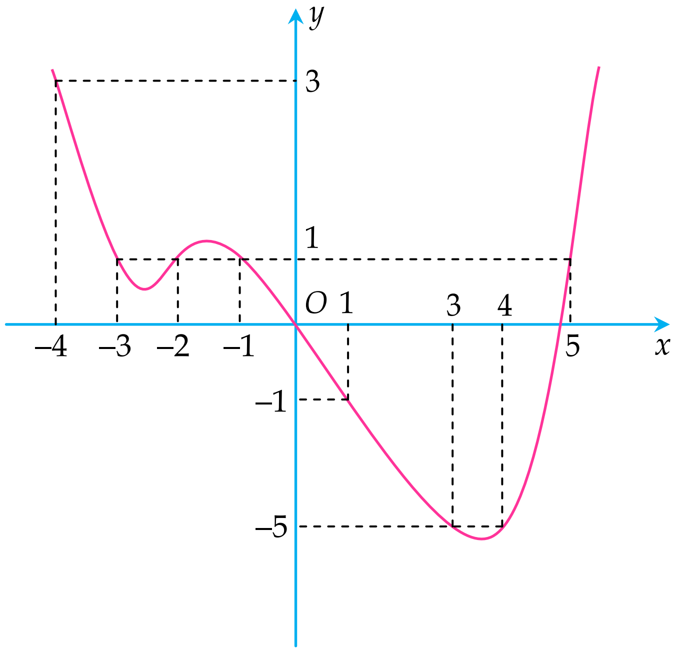
A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 27. Cho đồ thị hàm số là nguyên hàm của $f(x)$ có dạng $F(x)=ax^3+bx^2+5x+d$. Tính diện tích tạo bởi $f(x)$ và trục hoành?



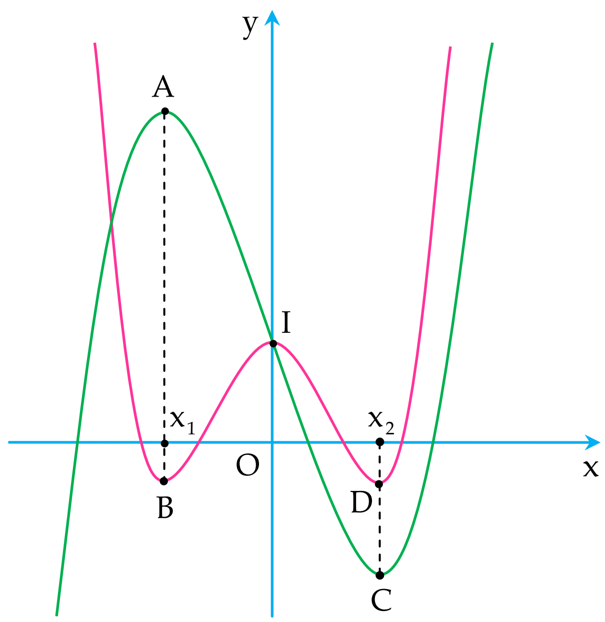
A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{50}{3}$. **D.** $\frac{70}{3}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



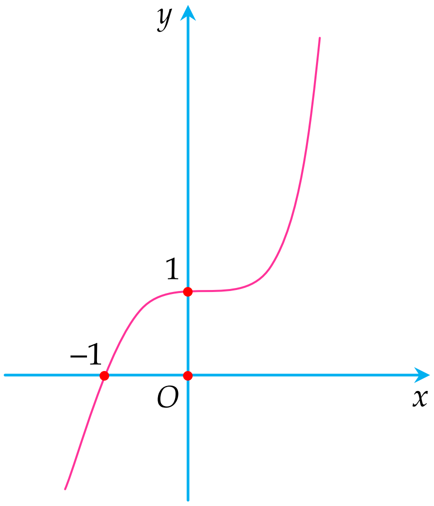
A. 13 **B.** 14 **C.** 15 **D.** 16

Câu 29. Cho hai đồ thị $(C_1): y = f(x) = x^4 + ax^2 + b$ và đồ thị hàm số $(C_2): y = g(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ như hình vẽ. Gọi B, D là hai điểm cực trị của (C_1), A và C lần lượt là hai điểm cực đại và cực tiểu của (C_2), (A và C đối xứng nhau qua điểm $U \in Oy$. Biết hoành độ A và B bằng nhau, hoành độ của C và D bằng nhau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $AB \le 3$?



A. 2 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

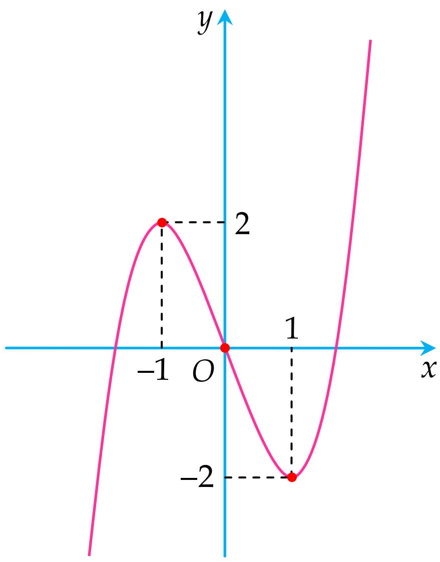
Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình $f\left(16\cos^2 x+6\sin 2x-8\right)=f\left(n\left(n+1\right)\right)$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$?

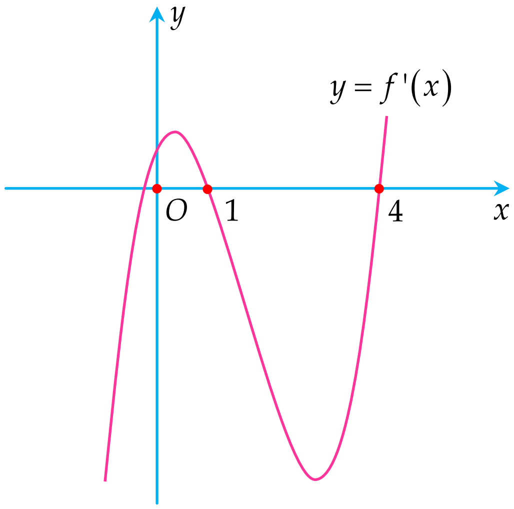
A. 10 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 6

Câu 31. Cho 2 số x,y thỏa mãn $x^2+5y^2=1+4xy$ và hàm số bậc 3 $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=f\left(\dfrac{2x-3y-3}{-x+4y+4}\right)$. Tích $M.m$?



A. $\dfrac{1436}{1333}$ **B.** $\dfrac{1436}{1331}$ **C.** $\dfrac{1438}{1331}$ **D.** $\dfrac{1436}{1335}$

Câu 32. Cho $f\left(x\right)$ là một đa thức hệ số thực có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới . Hàm số $g\left(x\right)=\left(1-m\right)x+m^2-3$ $\left(m\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn tính chất : mọi tam giác có độ dài là ba cạnh là a,b,c thì có các số $g\left(a\right),g\left(b\right),g\left(c\right)$ là ba cạnh của một tam giác. Khẳng định nào sau đây đúng về hàm số $y=f\left[\left(mx+m-1\right)^2\right]-e^{mx+1}$



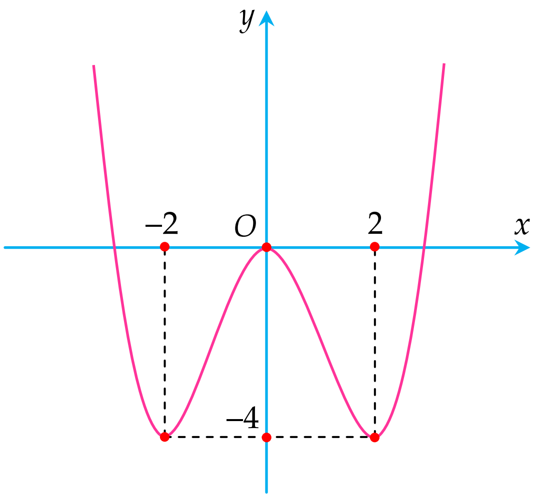
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{4}{3};-1\right)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{3};0\right)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(4;9)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ và đồng biến trên khoảng $(4;9)$

Câu 33. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;2)$ khi và chỉ khi :

$$3^{f(x)+m}+4^{f(x)+m}\le 5f(x)+2+5m$$

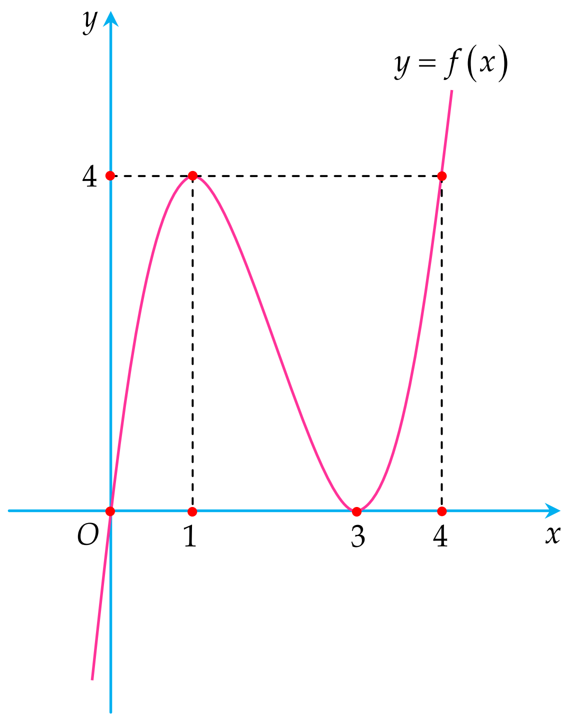
A. $-f(-1)<m<1-f(2)$

B. $-f(2)<m<1-f(-1)$

C. $-f(2)<m<1-f(-1)$

D. $-f(2)\le m\le 1-f(-1)$

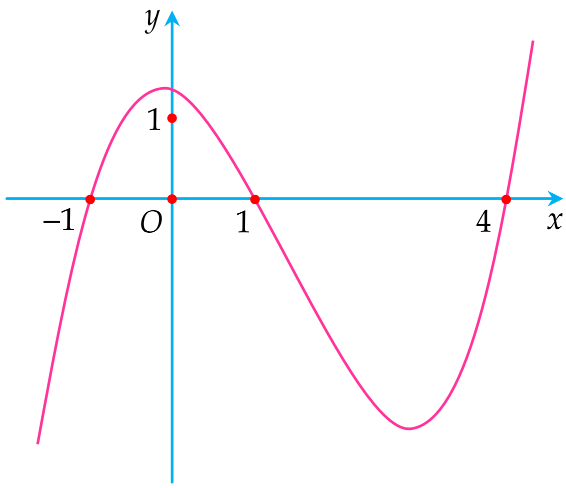
Câu 34. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ :



Phương trình $f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt

A. 12 **B.** 40 **C.** 41 **D.** 16

Câu 35. Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ có đồ thị như hình vẽ.

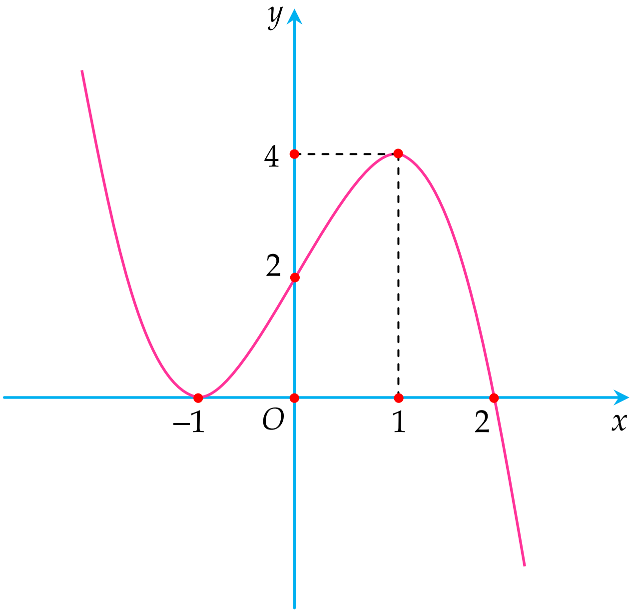


Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau đây có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$

$$2019f\left(\sqrt{15x^2-30x+16}\right)-m\sqrt{15x^2-30x+16}-m=0$$

A. 1513 **B.** 1512 **C.** 1515 **D.** 1514

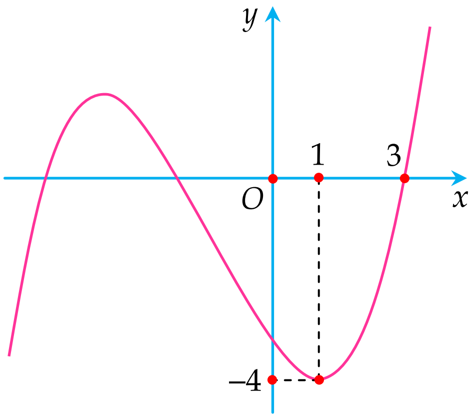
Câu 36. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(-1)=\frac{13}{4}, f(2)=6$. Tổng các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng?

A. $\frac{1573}{64}$ **B.** 198 **C.** $\frac{37}{4}$ **D.** $\frac{14245}{64}$

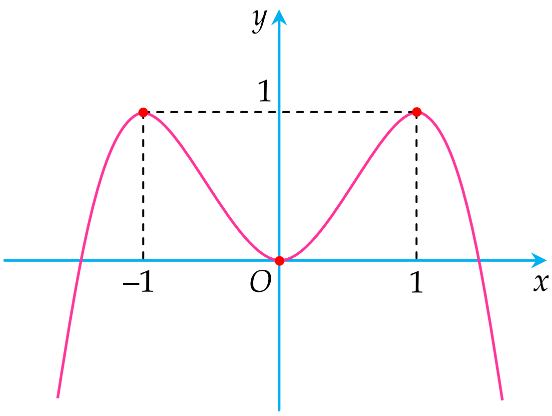
Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(e^x)<m(3e^x+2019)$ có nghiệm $x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m>-\frac{4}{1011}$ **B.** $m\geq\frac{4}{3e+2019}$ **C.** $m>-\frac{2}{1011}$ **D.** $m>\frac{f(e)}{3e+2019}$

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

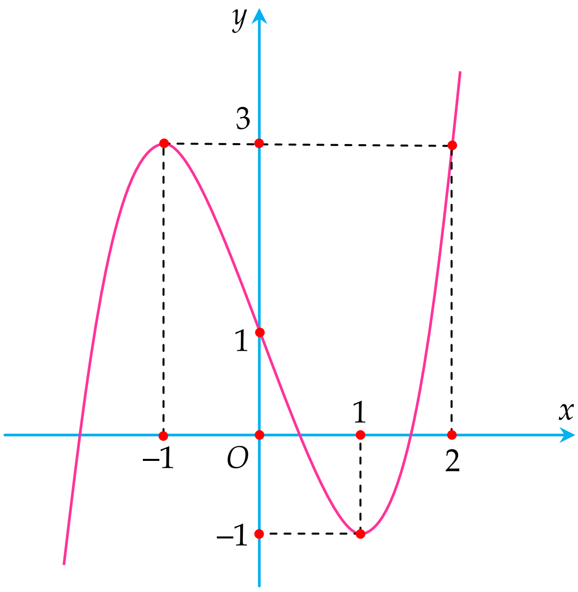


Bất phương trình $\frac{f(x)}{36}+\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}>m$ đúng với mọi $x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\le\frac{f(1)+9}{36}$ **B.** $m<\frac{f(1)+9}{36}$

C. $m\le\frac{f(1)}{36}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ **D.** $m<\frac{f(1)}{36}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}$

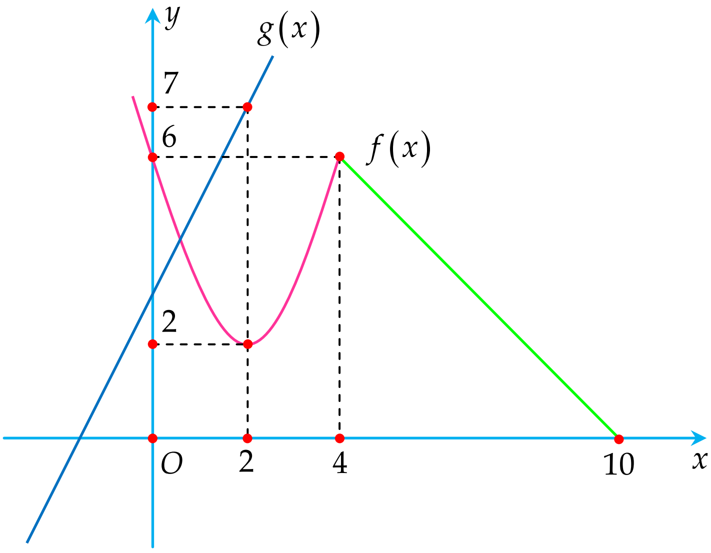
Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt hàm số $y=g(x)=f(2x^3+x-1)+m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]}g(x)=-10$.

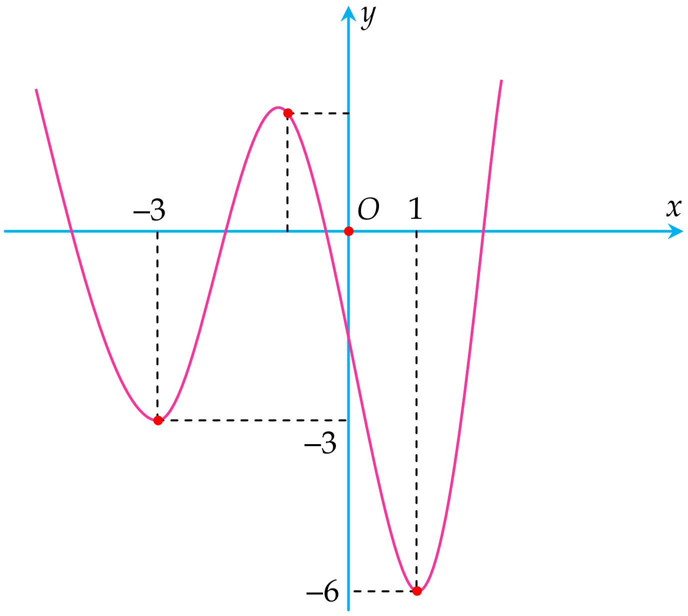
A. $m=-13$ **B.** $m=3$ **C.** $m=-12$ **D.** $m=-1$

Câu 40. Cho hàm số $f(x),g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Tính $h'(2)$



A. $h'(2)=\frac{4}{49}$ **B.** $h'(2)=-\frac{4}{49}$ **C.** $h'(2)=\frac{2}{7}$ **D.** $h'(2)=-\frac{2}{7}$

Câu 41. Hình vẽ là đồ thị $y=f(x)$.



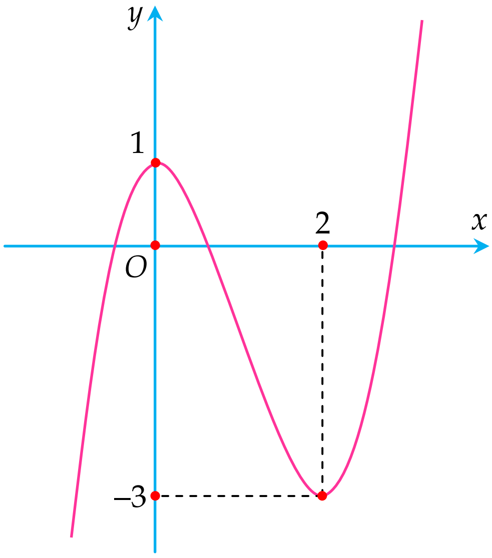
Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình

$$-f^2(x+1)|f(x+1)|+3|f(x+1)|+2=m\left(f^2(x+1)+2|f(x+1)|+1\right)$$

Có nghiệm trên $[-4;-2]$ là đoạn $[a;b]$. Khi đó $2a+3b$ bằng?

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

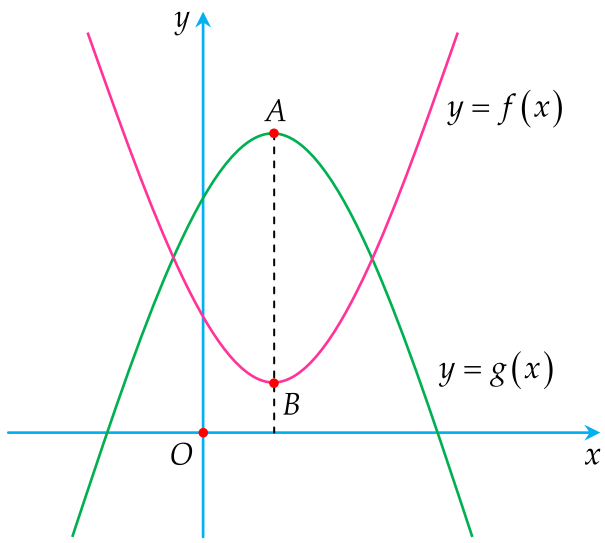
Câu 42. Cho hàm số $y=ax^3+3bx^2-2cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\frac{a}{4}x^4+(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(d-2c)x+d-2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(0;2)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(2;+\infty)$

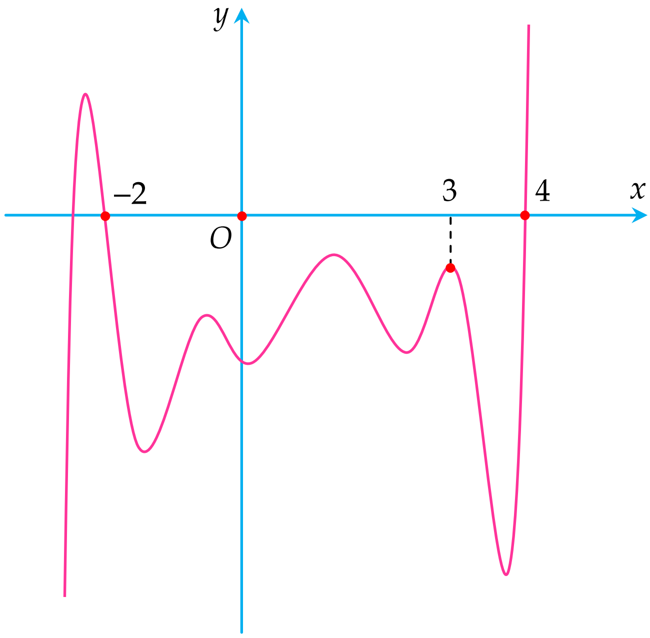
Câu 43. Cho hai hàm đa thức $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ bên.



Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

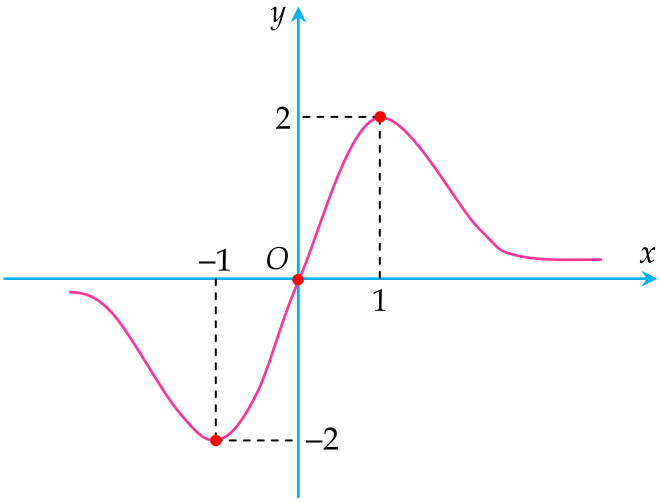


Bất phương trình $f(x)\geq\frac{2^{f(x)-m}+5^{f(x)-m}-2+27m}{27}$ nghiệm đúng với $x\in(-2;3)$

A. $f(3)\leq m\leq f(3)+1$ **B.** $f(-2)+1\leq m\leq f(3)$

C. $f(-2)-2\leq m\leq f(3)$ **D.** $f(3)\leq m\leq f(-2)-2$

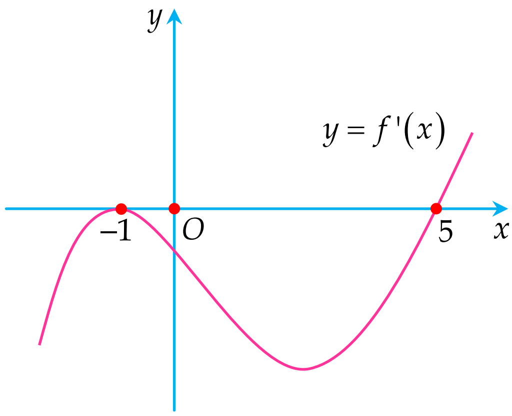
Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới:



Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=4^{m+2\log_4\sqrt{2}}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $0<m<2.$ **B.** $0<m<1.$ **C.** $1<m$ **D.** $m<0.$

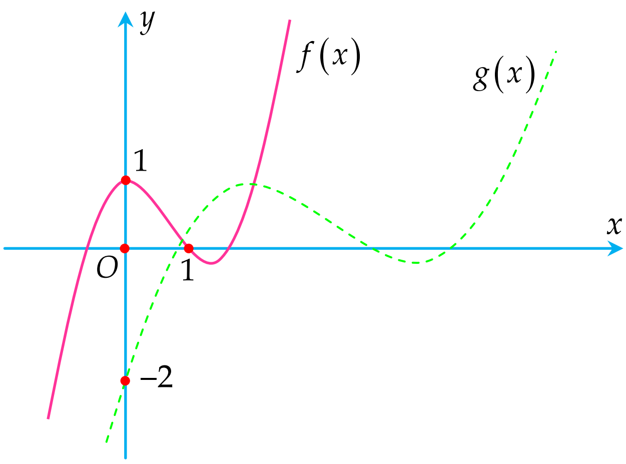
Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và có đồ thị của $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Để hàm số $y=f(2x^3-6x+3)$ đồng biến với mọi $x>m\ (m\in R)$ thì $m\ge a\sin\dfrac{b\pi}{c}$ trong đó $a,b,c\in\mathbb{N}^*,c>2b$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tổng $S=2a+3b-c$ bằng

A. 7 **B.** –9. **C.** –2. **D.** 5.

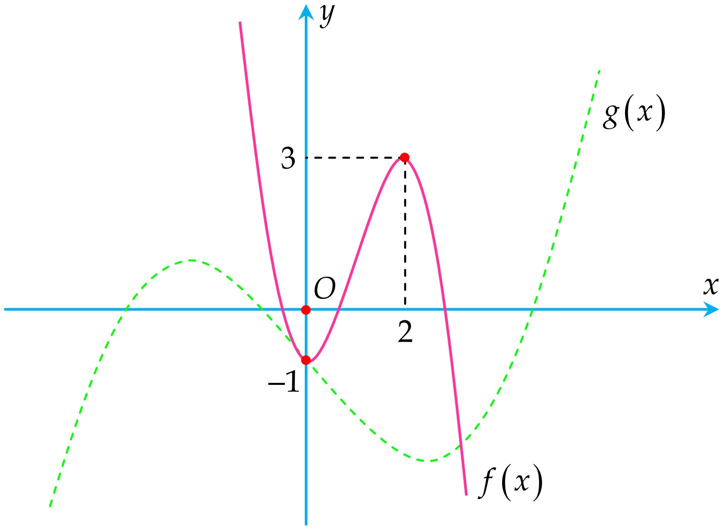
Câu 47. Cho hàm số $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ và $g(x)=f(mx+n)$ có đồ thị như hình vẽ :



Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng k, hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng $2k$. Giá trị biểu thức $2m+n$ là

A. 3 **B.** 0 **C.** -1 **D.** 5

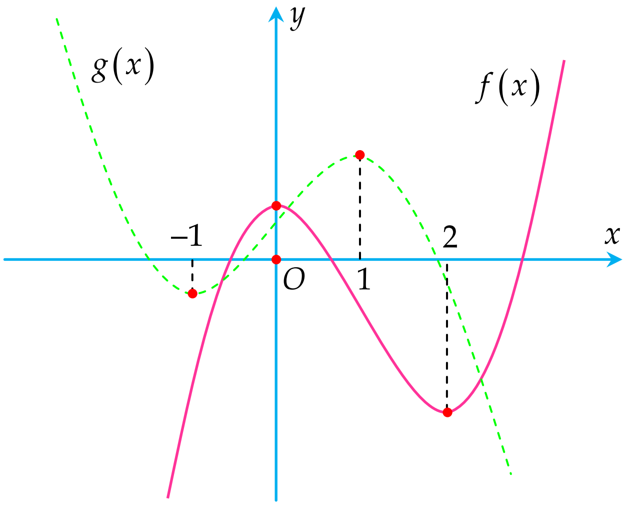
Câu 48. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x)=-f(mx+n),(m;n\in\mathbb{Q})$ có đồ thị hàm số như hình vẽ :



Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5. Giá trị biểu thức $3m+2n$ là

A. -5 **B.** $-\frac{13}{5}$ **C.** $\frac{16}{5}$ **D.** 4

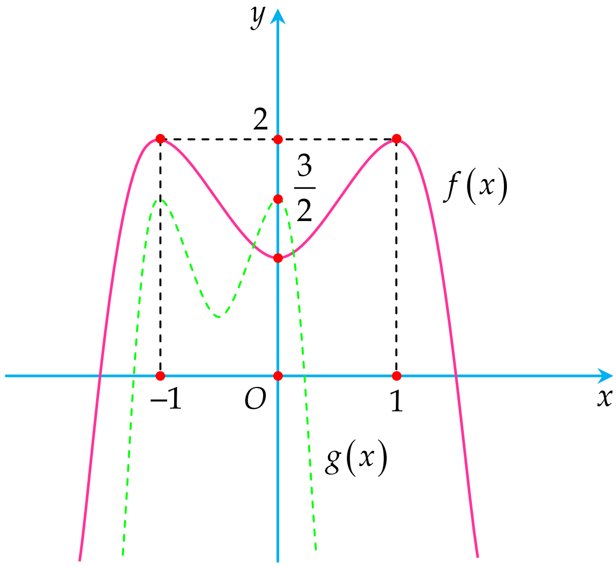
Câu 49. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Biết rằng hai hàm số $y=f(-2x+1)$ và $y=3g(ax+b)$ có cùng khoảng đồng biến. Giá trị biểu thức $a+2b$ là

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 6

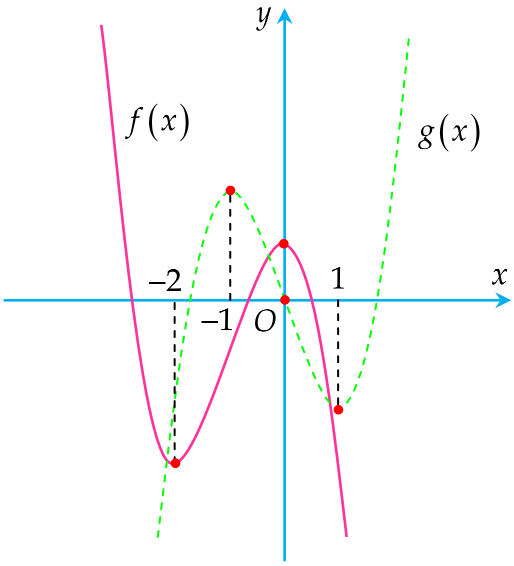
Câu 50. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ và $g(x)=f(mx+n)+p,(m;n;p\in\mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị biểu thức $m+n-2p$ là

A. 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 6

Câu 51. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

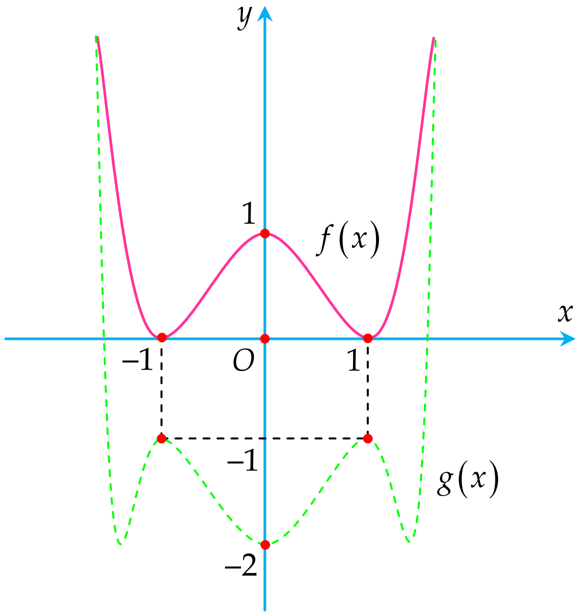


Biết rằng hai hàm số $y=3f(3x-1)$ và $y=2f(ax+b)$ có cùng khoảng đồng biến. Giá trị biểu thức $2a+b$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** –6

Câu 52. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ và $g(x)=f(mx^2+nx+p)+q,(m;n;p;q\in\mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ:

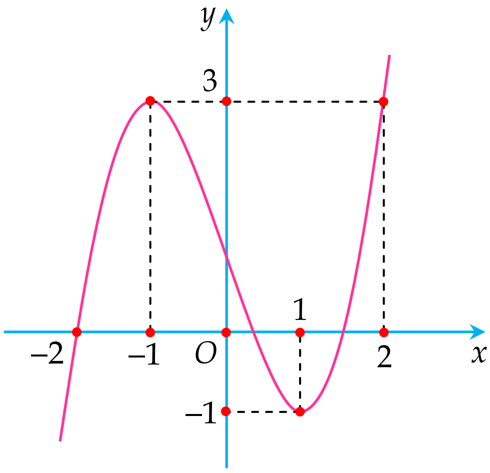
CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN



Giá trị của biểu thức $m+2n+3p-4q$ là

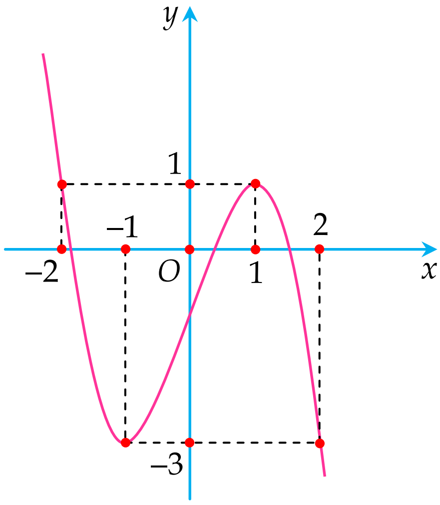
A. 4 **B.** -2 **C.** 8 **D.** 6

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4-x}\right)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là



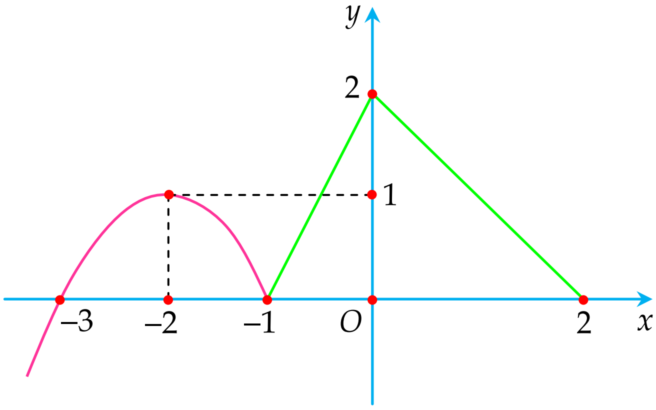
A. $[-1;3]$ **B.** $\left[-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$ **C.** $\left(-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$ **D.** $(-1;3]$

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?



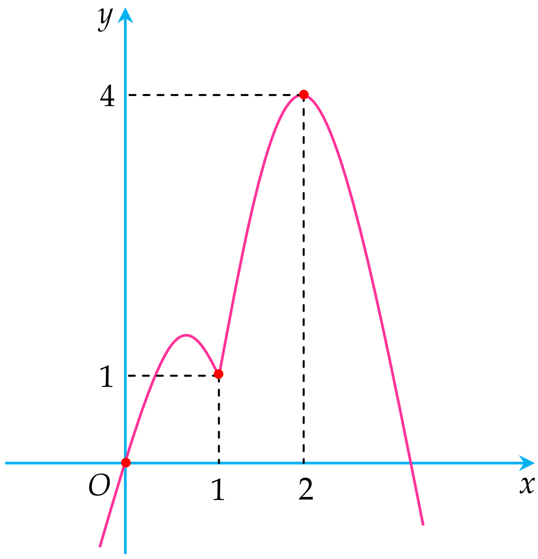
A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong là 1 phần của Parabol $y=ax^2+bx+c$). Biết $f(-3)=0$. Giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng bao nhiêu?



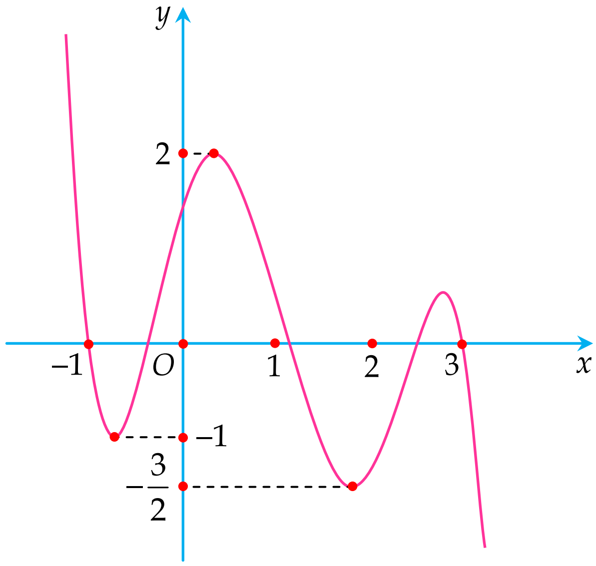
A. $\frac{23}{6}$ **B.** $\frac{31}{6}$ **C.** $\frac{35}{3}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ lên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(0)=0$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=\left|3f(x)-x^3\right|$ đồng biến trên khoảng nào?



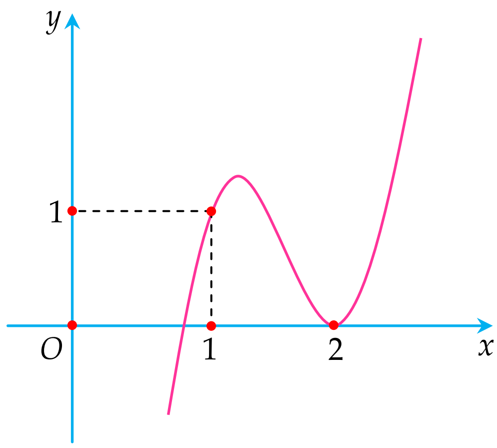
A. $(2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;2)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(1;3)$

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m tương ứng là GTLN và GTNN của hàm số $y = f(1-\cos x)$ trên $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$. Giá trị của $M+m$ bằng :



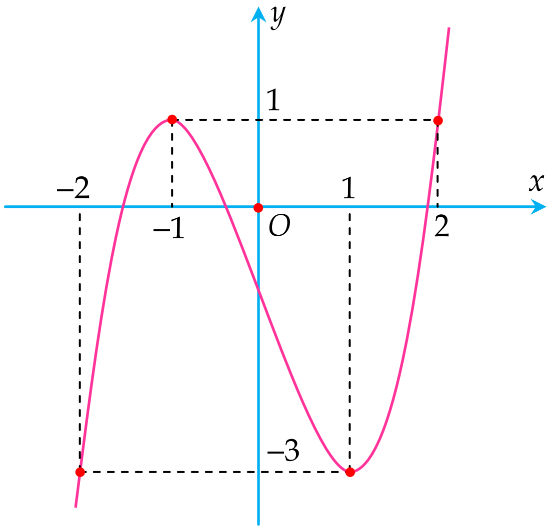
A. 2 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 58. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2-3x+2.)\sqrt{x-1}}{x.\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận



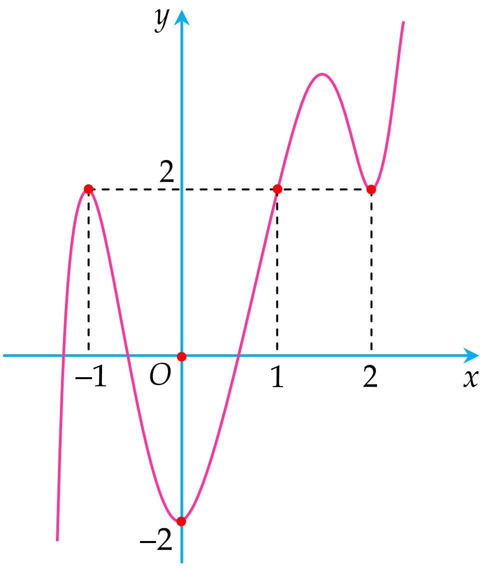
A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ lên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Phương trình $f(f(x)-1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



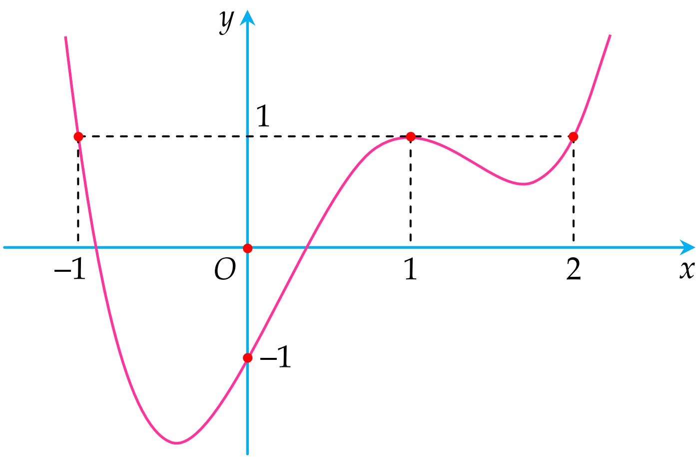
A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Câu 60. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x-1\right)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào



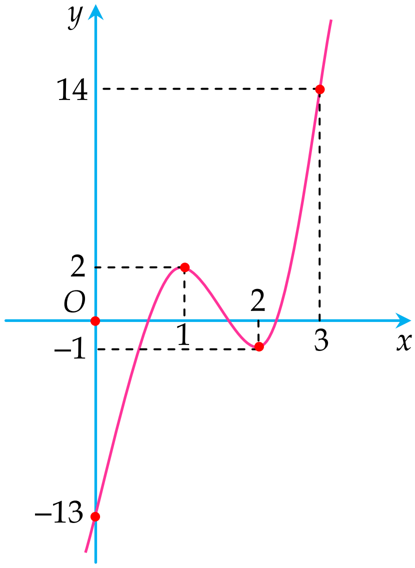
A. $x=1$ **B.** $x=0$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=2$

Câu 61. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ lên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-1\right)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



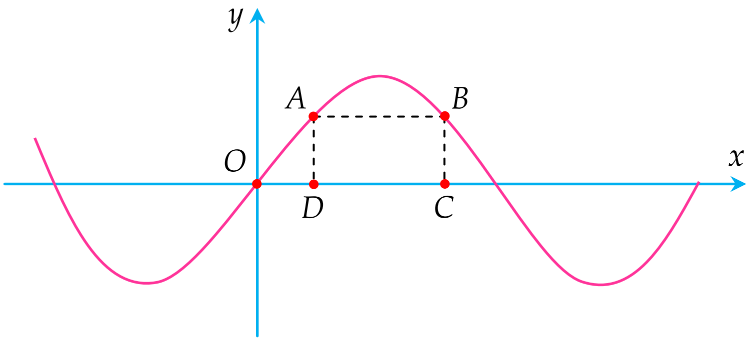
A. $(2;3)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(1;2)$

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)+1)=m$ có 3 nghiệm phân biệt bằng



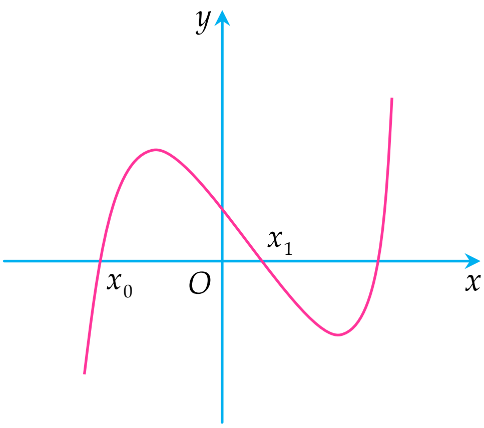
A. 15 **B.** 14 **C.** 13 **D.** 11

Câu 63. Cho 2 điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên $[0;\pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox sao cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật là $CD=\frac{2\pi}{3}$. Độ dài cạnh BC là?



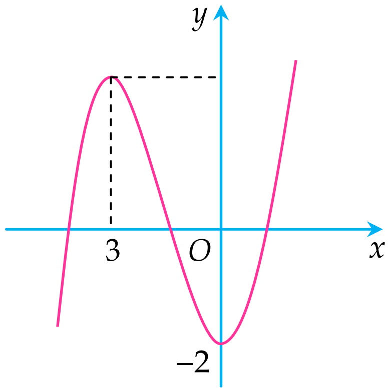
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** $\sqrt{2}$

Câu 64. Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r\ (r>0)$ có nghiệm. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x)=-r$ là?



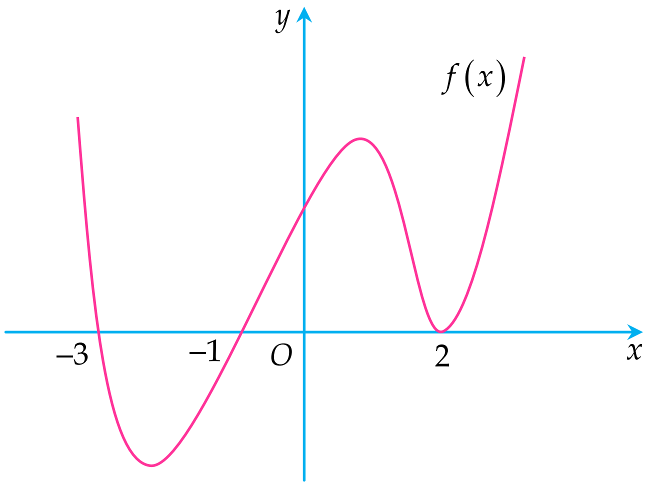
A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 65. Cho $f(x)$ như hình vẽ. Biết $\int_{-1}^{4} f''(x)dx = 60$. Giá trị của $f(-2) - f(2)$ là ?



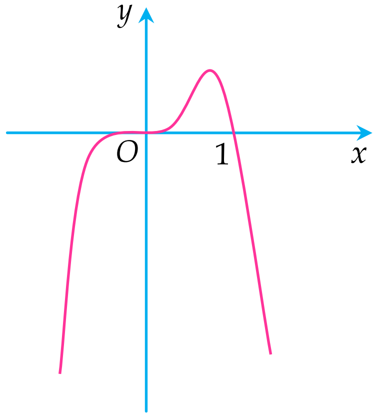
A. $\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{31}{3}$. **C.** $-\frac{12}{3}$. **D.** $-\frac{32}{3}$.

Câu 66. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số như sau. Tìm số điểm cực trị của $g(x) = \int_{2019}^{x^2-1} f(t)dt$



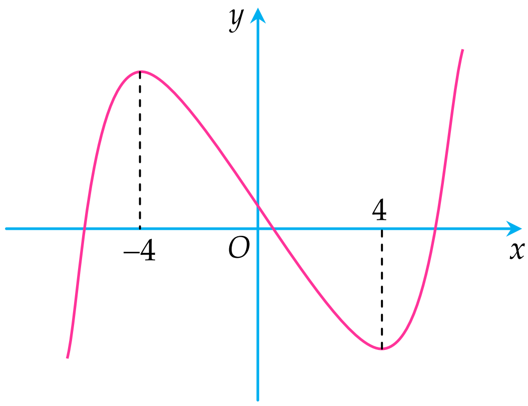
A. 1 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7

Câu 67. Cho đồ thị hàm $g(x)$ hàm bậc 4 như hình vẽ, biết $g(x) = f(x) + f(1-x)$ và $f(0) = g(0)$. Tính tích phân $\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$?



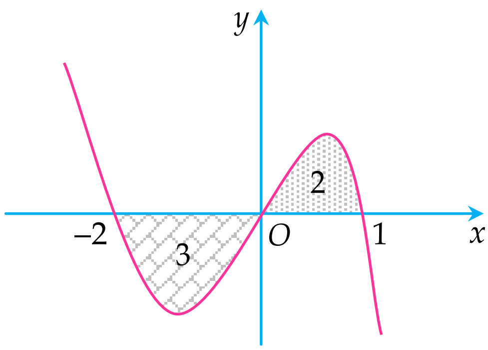
A. 1 **B.** $-\dfrac{1}{10}$ **C.** 5 **D.** $-\dfrac{1}{5}$

Câu 68. Cho đồ thị hàm số là nguyên hàm của $f(x)$ có dạng $F(x)=ax^3+bx^2+5x+d$. Tính diện tích tạo bởi $f(x)$ và trục hoành ?



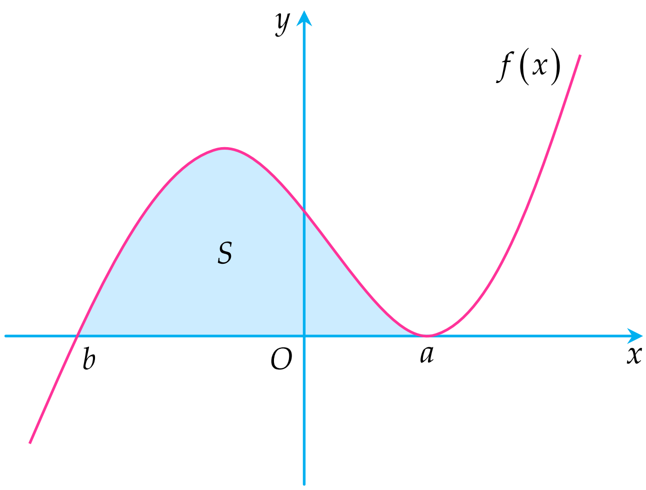
A. $\dfrac{80}{3}$. **B.** $\dfrac{20}{3}$. **C.** $\dfrac{50}{3}$. **D.** $\dfrac{70}{3}$.

Câu 69. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích 2 hình S_1, S_2 lần lượt là 3,2, $f(1)=5$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 e^x f(x)dx+\int_0^1 e^x f'(x)dx$?



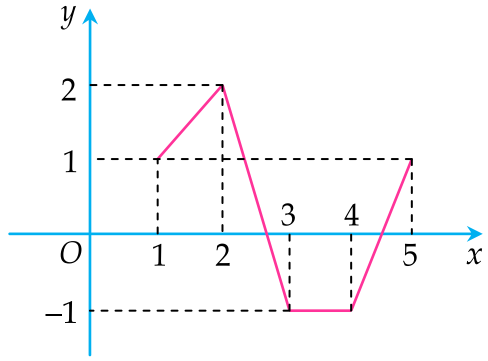
A. $e-3$. **B.** $2e-2$. **C.** $4e-3$. **D.** $5e-3$.

Câu 70. Cho đồ thị hàm số bậc 3 $f(x)$ như hình vẽ. Biết $S=\dfrac{9}{4}, a-b=3$ và $f'(0)=-1$. Tính $I=\int_{b-a}^{2a} f(x)dx$



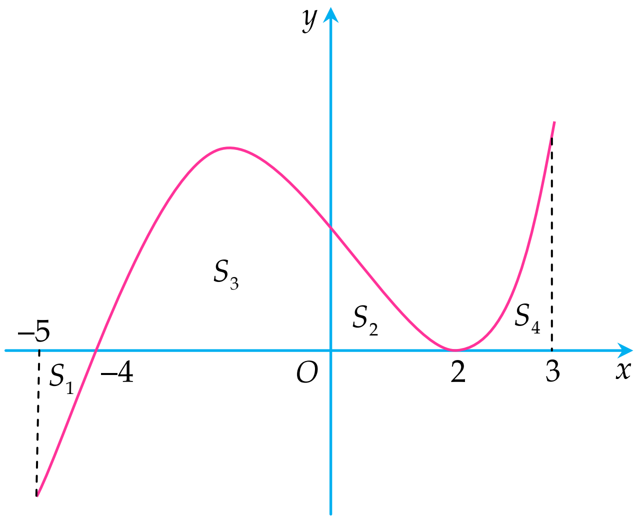
A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{7}{12}$ **D.** $\frac{5}{12}$

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính giá trị của tích phân $I=\int_1^5 f''(x)(x-1)(x-5)dx$?



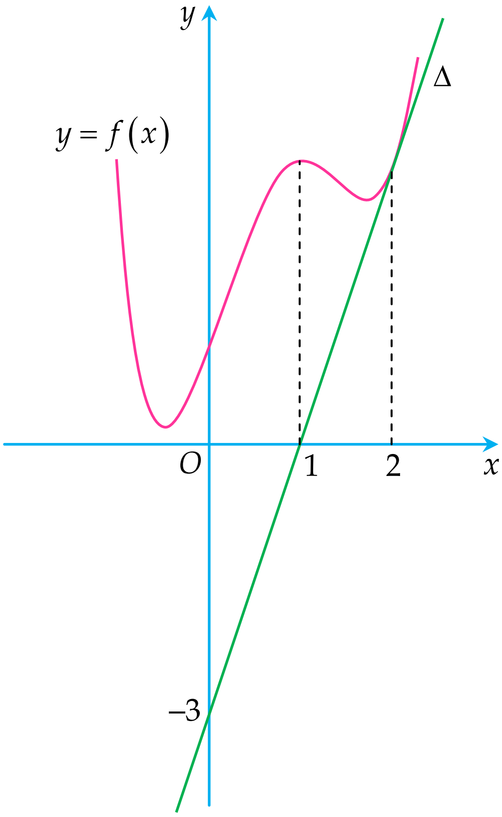
A. –4 **B.** –5 **C.** –6 **D.** –7

Câu 72. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Biết $S_2-S_4=S_3-S_1$ (hình vẽ chỉ mang tính chất tương đối). Tính $I=\int_0^2\left[5f(5-5x)+4(x-2)f\left(x^2-4x\right)\right]dx$



A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{23}{5}$ **D.** $\frac{6}{5}$

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$. Đường thẳng Δ trong hình vẽ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^{\ln 3} e^x f''\left(\frac{e^x+1}{2}\right)dx$?

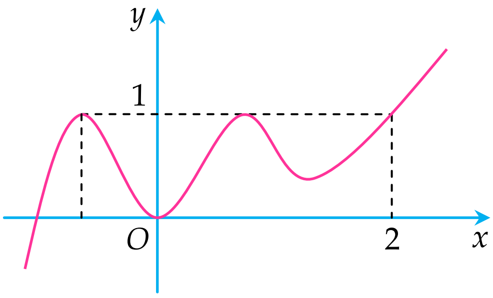


A. 0 **B.** 1 **C.** 6 **D.** 7

Vted.vn

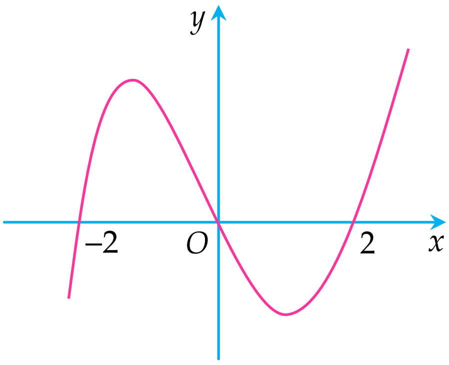
Câu 74. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Biết $\int_2^4 \left[f(x-2)+3-m \right] dx = \left[f(x)-1 \right]^2 + 12$.

Giá trị của m là ?



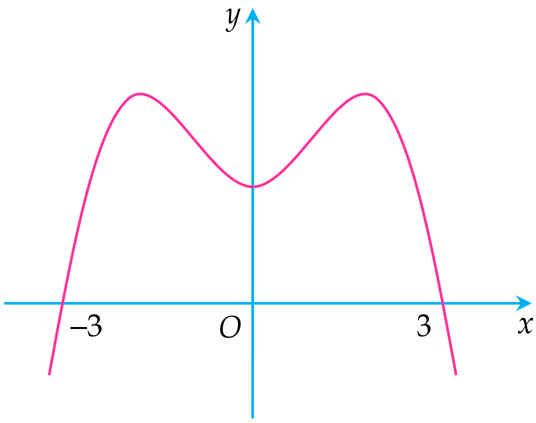
A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 75. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ, biết $f'(1)=2$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_{-2}^{2} |f'(x)|$?



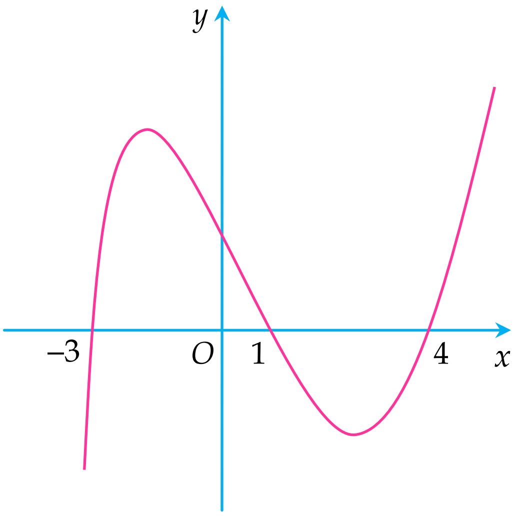
A. $\dfrac{64}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{25}{3\sqrt{3}}$ **C.** $\dfrac{14}{3\sqrt{3}}$. **D.** 2.

Câu 76. Cho đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị của biểu thức tích phân $I=\int_0^3 x^2 f'(x)dx$?



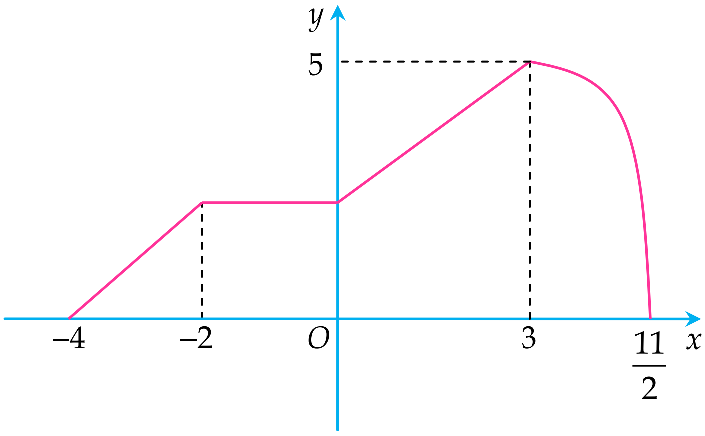
A. 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 4

Câu 77. Cho đồ thị hàm số $f(x-2)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=\int_{\sqrt{x-4}}^{\sqrt{x-2}} f(t^2+2)dt$ cắt trục Ox tại nhiều nhất mấy điểm phân biệt ?



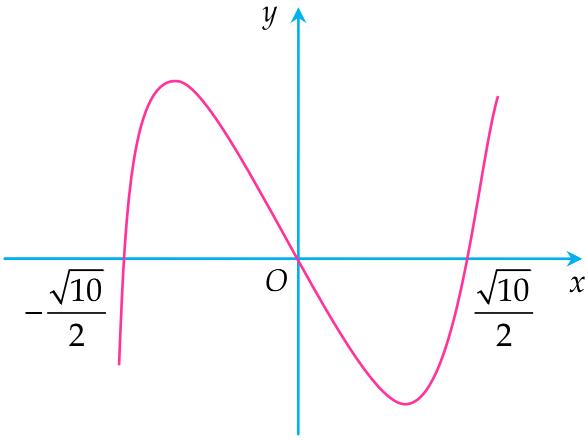
A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 78. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $\left[-4;\dfrac{11}{2}\right]$ (lần lượt là các đoạn thẳng và nửa parabol). Tính giá trị $S=\int_{\frac{-3}{2}}^{0} f'(2x+3)dx+\int_{-1}^{1} f'(2x-2)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x.f'(5\sin x+3)dx$?



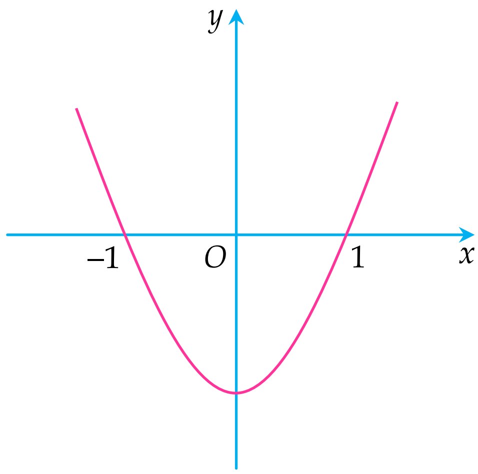
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{149}{6}$. **C.** $\frac{154}{4}$. **D.** $\frac{109}{3}$.

Câu 79. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+4$. Đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ. Tính tích phân $\int_{-1}^{2}\left[f''(x).f(x)+f'(x)^2\right]dx$?



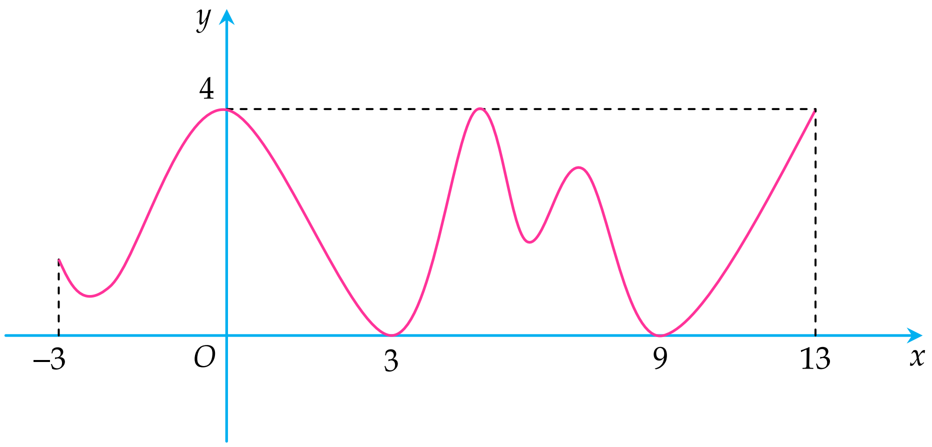
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 80. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình $F(x)=0$, với $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$. Biết $x=1$ đều là nghiệm của của $f(x)=0$ và $F(x)=0$.?



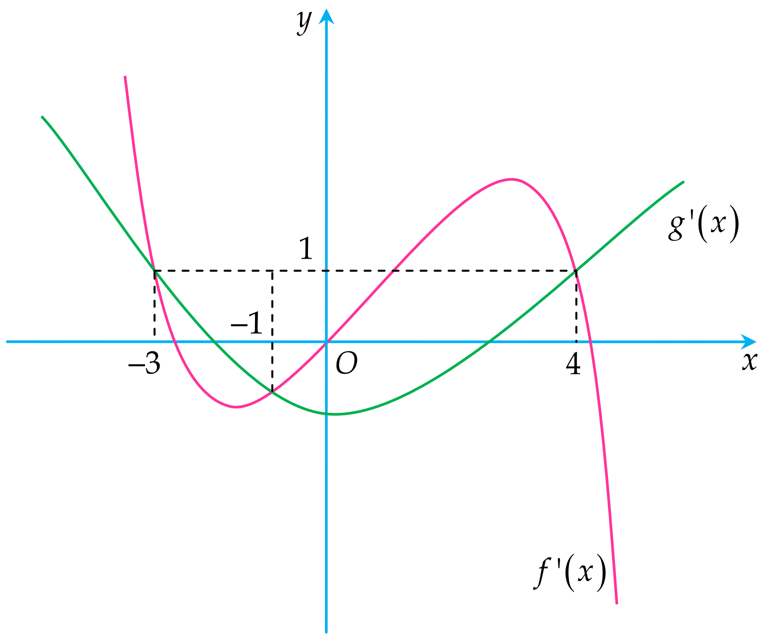
A. 0 **B.** 10. **C.** 12. **D.** 17.

Câu 81. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;13]$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị m nguyên không âm để phương trình $e^{f(x)}-f(x)-2=\int_0^m f(m)dx$ có 1 nghiệm duy nhất.



A. 15. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 17.

Câu 82. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$. Biết $g(-3)+g(4)>3>f(-3)+f(4)$, hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?



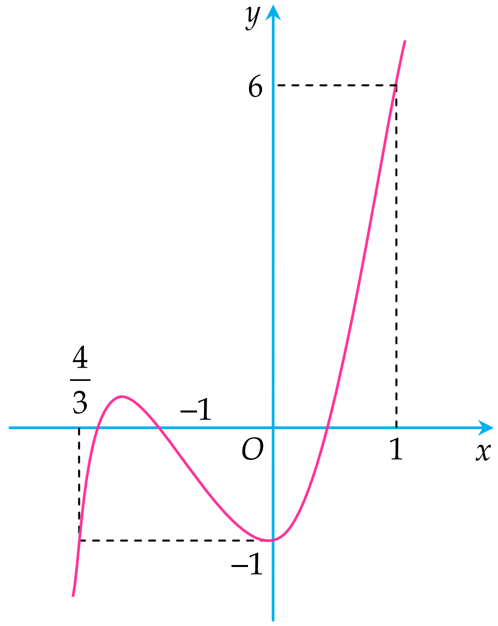
A. $h(x)$ đạt min là $h(-1), h(-1)<0$

B. $h(x)$ đạt min là $h(-1), h(-1)>0$

C. $h(x)$ đạt max là $h(-1), h(-1)<0$

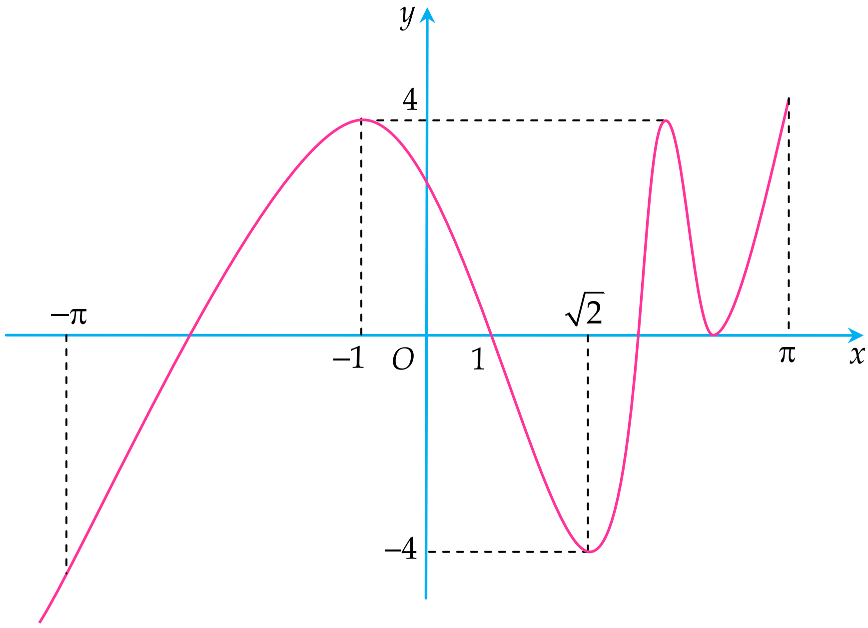
D. $h(x)$ đạt max là $h(-1), h(-1)>0$

Câu 83. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng về biểu thức $S=f(0)+\cos(f(0))-f(1)-\cos(f(1))+\frac{9}{2}$.



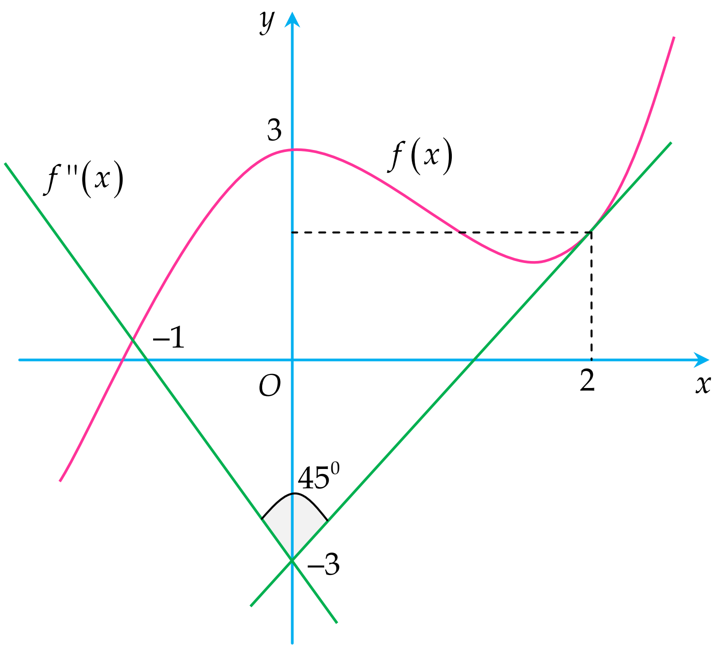
A. Không xác định **B.** nhỏ hơn 0. **C.** bằng 0. **D.** lớn hơn 0.

Câu 84. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Tìm m để $\int_{\pi}^{x} f(\sin x + \cos x)dx = mx$ có nhiều nghiệm nhất có thể trên đoạn $[-\pi;\pi]$?



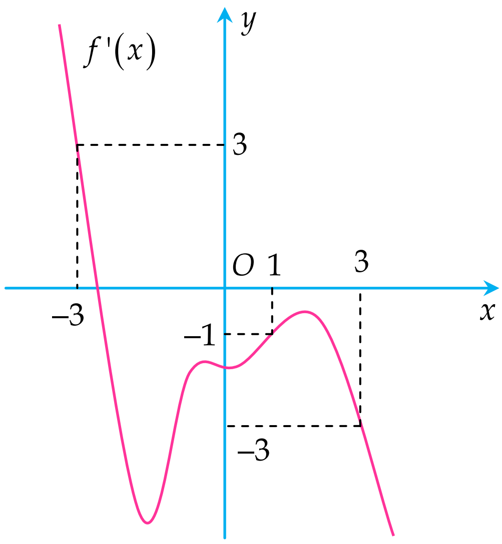
A. $0 \le m < 4$. **B.** $0 < m < 4$ **C.** $m > 0$. **D.** $-4 < m \le 0$.

Câu 85. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ, đồ thị hàm số $f'(x)$ và tiếp tuyến của $f(x)$ tạo với nhau một góc 45^0. Tính giá trị của tích phân $\int_0^2 [f''(x) + f'(x)]dx$?



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

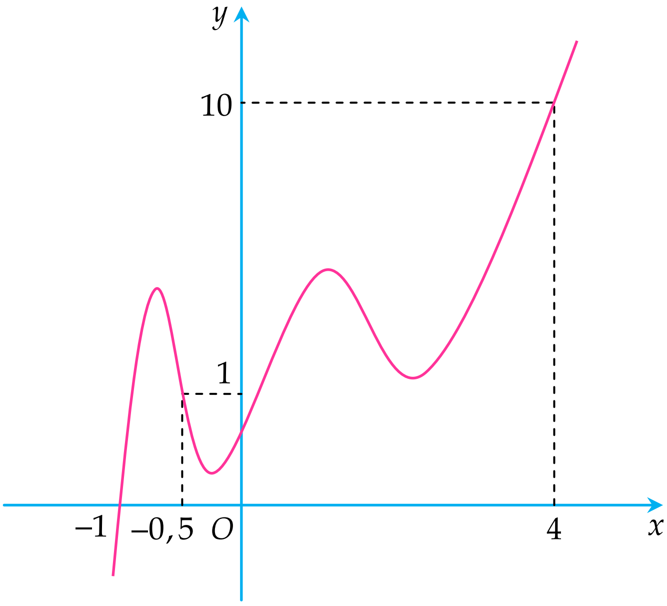
Câu 86. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$ như hình vẽ. Đặt hàm số $g(x)=2f(x)+x^2$. Biết $\int_{-2}^{2}[g(x+m)-m]dx=0$ m thuộc đoạn $[-1;1]$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?



A. $4g(1)<m<4g(-3)$. **B.** $3g(1)<m<3g(-3)$.

C. $2g(1)<m<2g(-3)$. **D.** $g(1)<m<g(-3)$.

Câu 87. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)-(x+1)^2$ là a và b trên đoạn $[-1;3]$. Biết $\int_{-1}^{-0,5} xf'(x)dx=c$ và $\int_{-1}^{3} f'(x)dx=d$. Tính giá trị của tích phân $\int_{-1}^{-0,5} f(x)dx$?



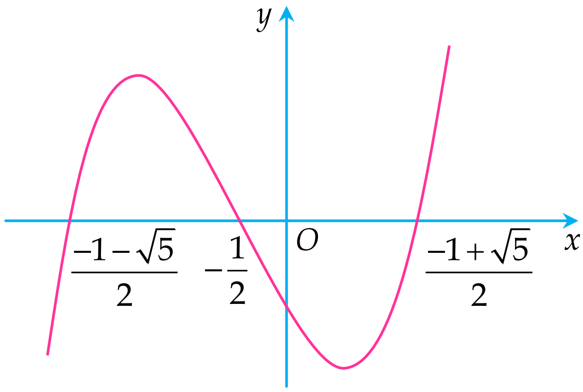
A. $-\frac{1}{2}a+b-d-\frac{1}{8}$.

B. $-\frac{1}{2}a+b-2d-\frac{1}{4}$.

C. $-a+b-d-\frac{1}{8}$.

D. $-\frac{1}{2}a+b-2d$.

Câu 88. Cho hàm số bậc 4 có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0)=0$, $\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} f'(x)\,dx=\frac{\pi}{6}$. Tính giá trị của tích phân $\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} \sin\left[f(x)\right].f'(x).f(x)\,dx$?



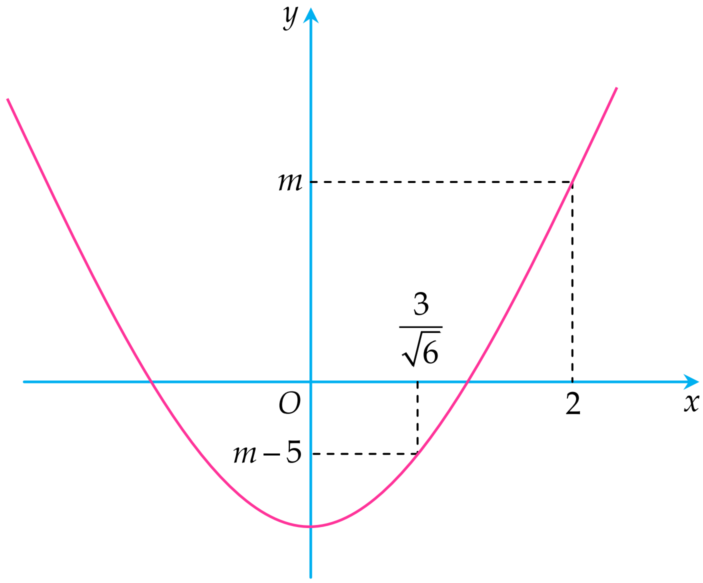
A. $\frac{-\sqrt{3}\pi}{2}+\frac{-1}{2}$.

B. $\frac{-\sqrt{3}\pi}{2}$.

C. $\frac{-\sqrt{3}\pi}{12}+\frac{-1}{2}$.

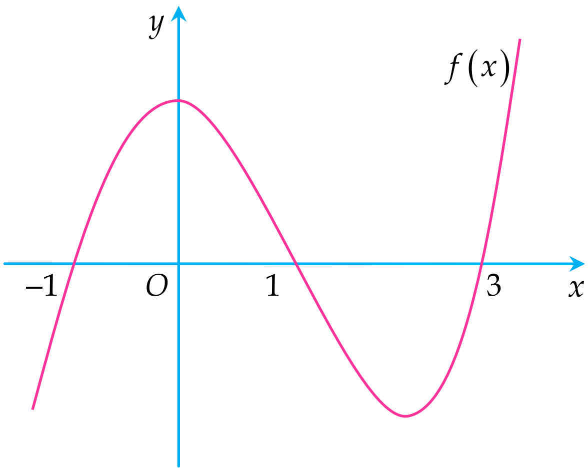
D. $\frac{-1}{2}$.

Câu 89. Hàm số $f(x)$ có dạng $f(x)=ax^2+b\,(a>0)$. Đồ thị hàm số $f(x)$ được cho như hình vẽ. Gọi diện tích hình tạo bởi $f(f(x))$ và $f(x)$ là S. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_{-\frac{1}{a}-1}^{\frac{1}{a}+1} a^3(x-1)\left(x-\frac{1}{a}-1\right)(x+1)\left(x+\frac{1}{a}+1\right)dx$?



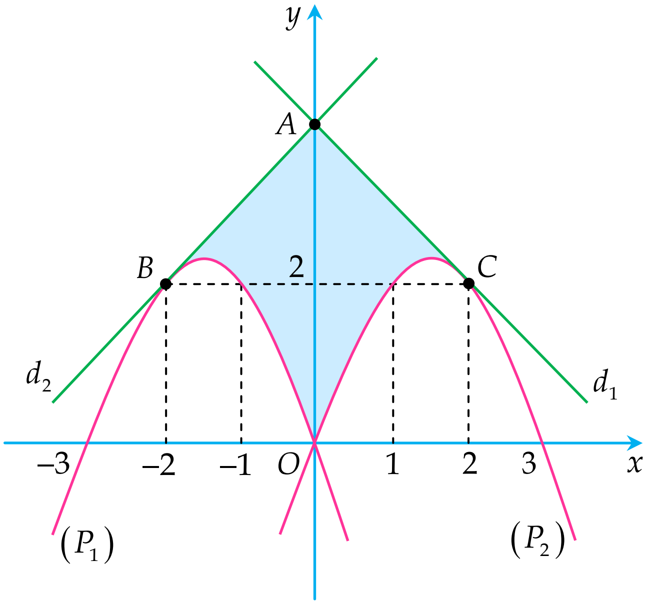
A. S. **B.** aS. **C.** $a^2.S$ **D.** $2S$.

Câu 90. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $F(x)=\int\left[\frac{f''(x)}{f(x)}-\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2\right]dx$. Phương trình $f(x-4).F(x-4)=0$ có tổng các nghiệm là bao nhiêu, biết $F(3)=0$?



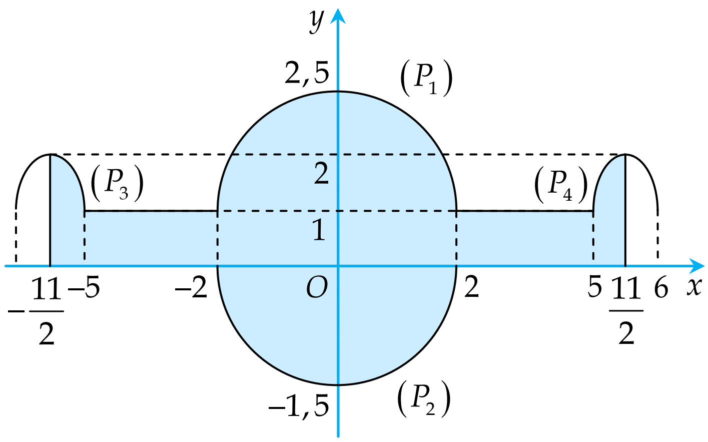
A. 15. **B.** 8. **C.** 20. **D.** 17.

Câu 91. Anh Tuấn có một con diều hình con cá chim. Con diều này được giới hạn bởi 2 Parabol $(P_1): -x^2-3x, (P_2): -x^2+3x$ và 2 tiếp tuyến d_1, d_2 đối xứng qua trục tung sao cho $BAC = 120^\circ$ (hình vẽ). Tính chính xác diện tích của con diều (làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



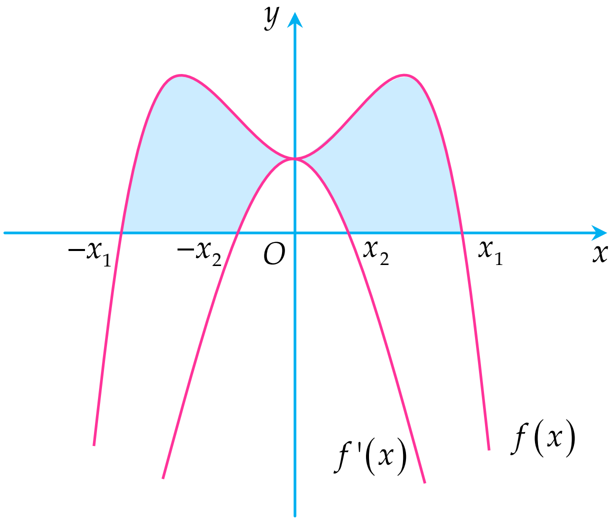
A. 3,81 **B.** 3,82 **C.** 4,31 **D.** 4,32

Câu 92. Cho thiết diện mặt cắt một chiếc đĩa bay của người ngoài hành tính như hình vẽ (phần tô đậm). Cho biết các đường cong trong hình vẽ đều là một phần của các Parabol. Tính diện tích thiết diện đó.



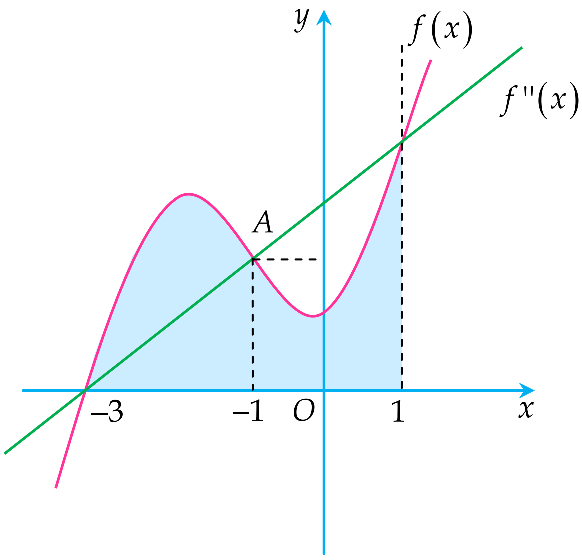
A. $\frac{55}{6}$ B. $\frac{59}{6}$ **C.** $\frac{55}{3}$ **D.** $\frac{59}{3}$

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1$. Biết đồ thị hàm số $f''(x)$ tiếp xúc đồ thị hàm số $f(x)$ tại 1 điểm trên trục tung. Gọi $\pm x_1$ là nghiệm của $f(x)$, $\pm x_2$ là nghiệm của $f''(x)$ $(x_1, x_2 > 0)$. Biết $x_1 = 3x_2$, tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ).



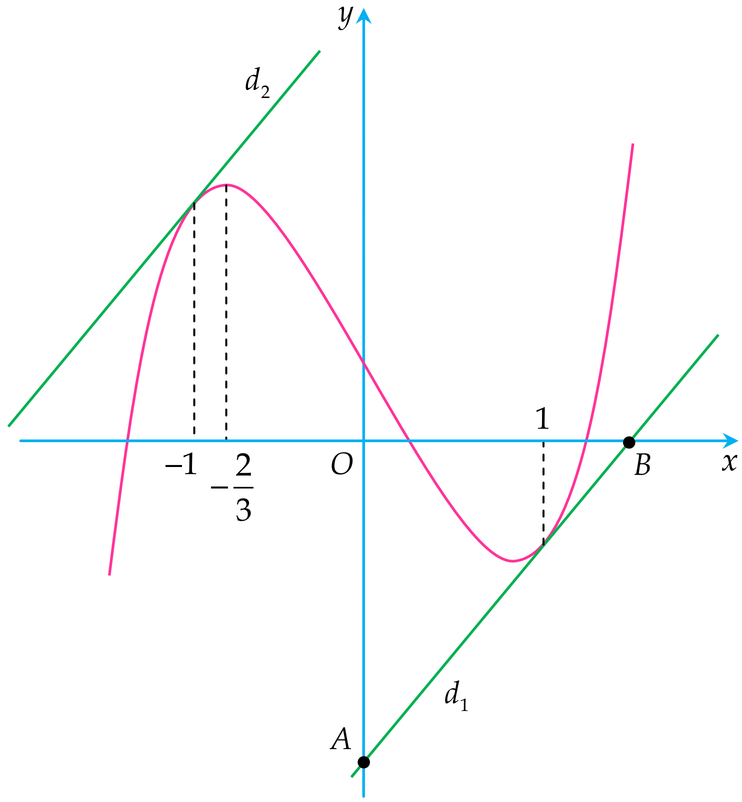
A. $\frac{152}{15}$ **B.** $\frac{73}{15}$ **C.** $\frac{152}{45}$ **D.** $\frac{73}{45}$

Câu 94. Cho diện tích phần tô đậm bằng a, $f'(1)=b$. Biết $2f(-1)=f(1)+f(3)$ và $f(x)$ là một hàm bậc 3, tính $f'(1)+f'(3)$ theo a và b



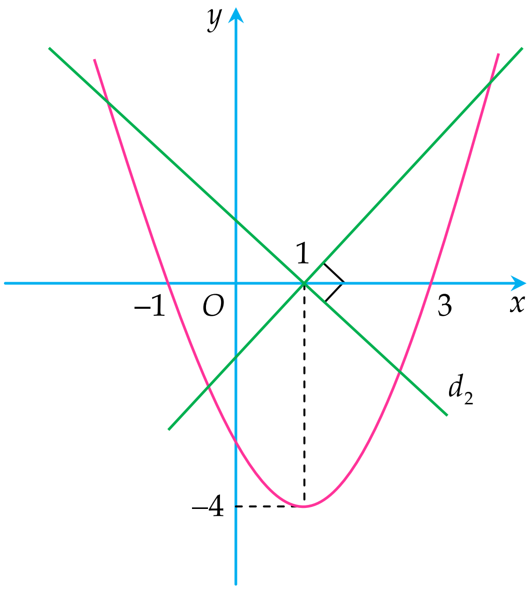
A. $2b-a$ **B.** $b+a$ **C.** b **D.** $b-a$

Câu 95. Cho đồ thị hàm số là đa thức bậc 3 $f(x)$ như hình vẽ. Biết d_1 và d_2 là tiếp tuyến của $f(x)$ tại $x=1$ và $x=-1$; $\frac{OA}{OB}=\frac{1}{4}$ và $f(0)=\frac{2}{5}$. Tính $\int_{-1}^{1}(f(x)+f'(x))dx$



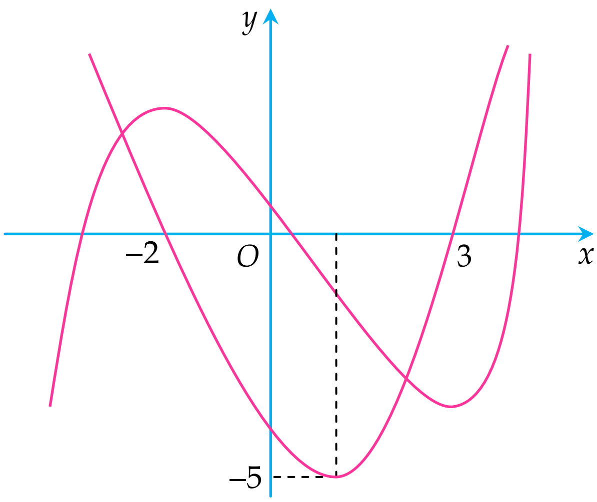
A. 1 **B.** $\frac{7}{10}$ **C.** $\frac{7}{9}$ **D.** $\frac{7}{8}$

Câu 96. Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ như hình vẽ, d_1 là đồ thị hàm số $f'(x)$. Gọi S_1, S_2 là các diện tích tạo bởi d_1, d_2 với đồ thị hàm số $f(x)$. Tính gần đúng tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$



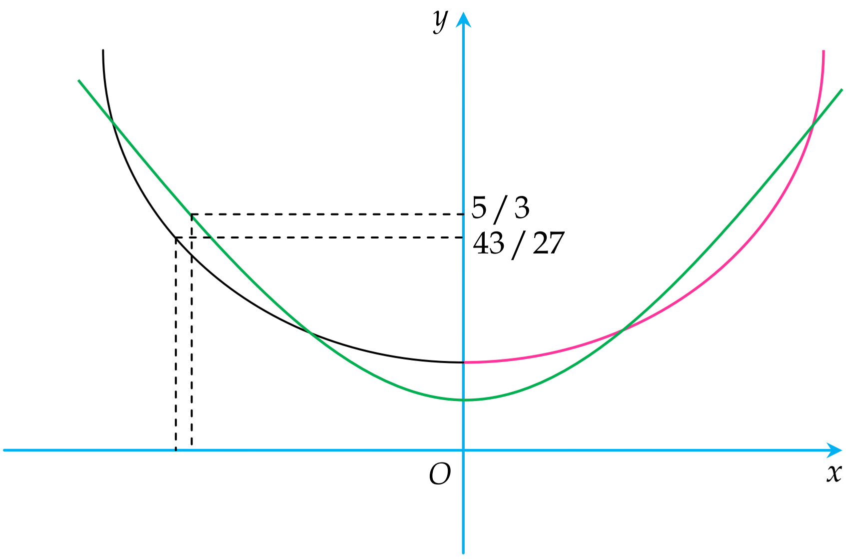
A. 1,35 **B.** 1,36 **C.** 1,37 **D.** 1,38

Câu 97. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ như hình vẽ. Diện tích tạo bởi $f'(x)$ và $f(x)$ gần nhất ?



A. 23. **B.** 65. **C.** 50. **D.** 43.

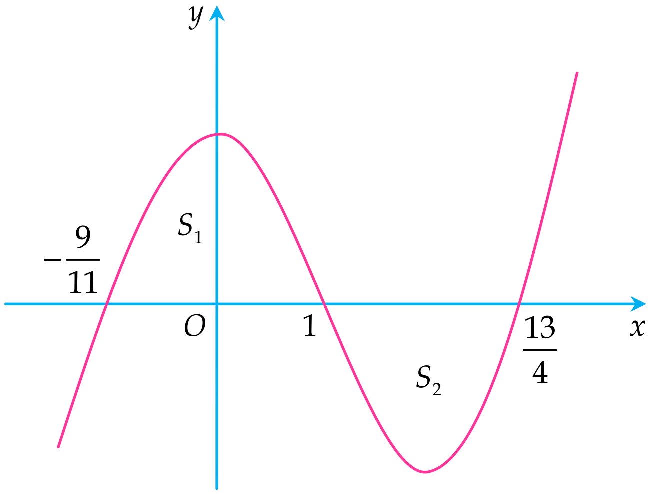
Câu 98. Hàm số $f(x)$ có dạng $f(x)=ax^2+b$. Đồ thị hàm số $f(f(x))$ được cho như hình vẽ. Gọi diện tích hình tạo bởi $f(f(x))$ và $f(x)$ là S, t_1, t_2 là hoành độ giao điểm $f(f(x))$ và $f(x)$ $(t_1.t_2>0)$ sao cho $t_1^{\,2}+t_2^{\,2}+2\sqrt{t_1^{\,2}t_2^{\,2}}=9$. Tính S ?



A. $\dfrac{50}{203}$. **B.** $\dfrac{42}{305}$. **C.** $\dfrac{32}{405}$. **D.** $\dfrac{65}{203}$.

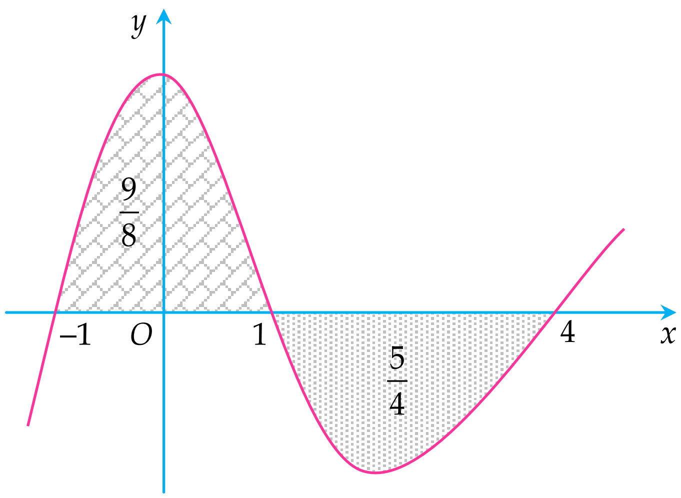
Câu 99. Cho đồ thị hàm số $f(x)$. S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn như hình vẽ.

Tính giá trị lớn nhất của $\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{2\sin x+11\cos x+5}{(2\cos x-\sin x+4)^2}.\mathrm{f}\left(\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right)dx$?



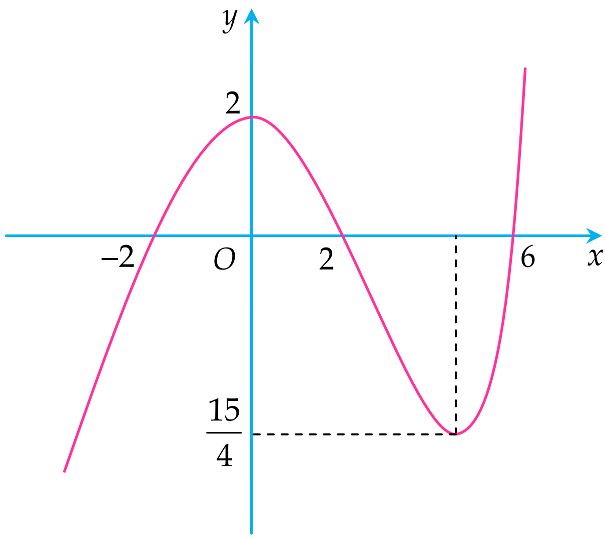
A. S_1+S_2 **B.** S_1 **C.** S_2 **D.** $S_1+\frac{2}{3}S_2$

Câu 100. Cho đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Diện tích 2 hình tạo bởi $f'(x)$ và trục hoành là $\frac{9}{8},\frac{5}{4}, f(1)=3$. Tính giá trị của tích phân $\int_{-1}^{4} f'(x).f(x)dx$?



A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

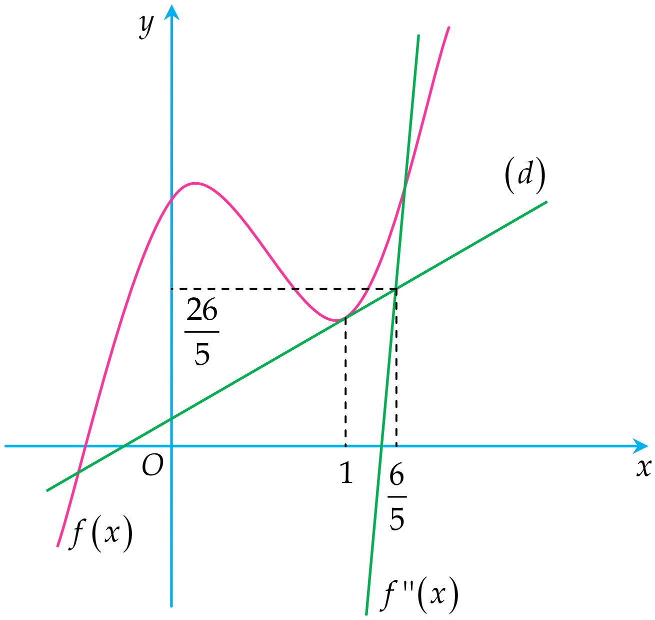
Câu 101. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ.



Để hàm số $h(x)=\dfrac{x^2-8x+\sqrt{n-m}}{f\left(f(x)+m\right)}$ có số tiệm cận đứng là lớn nhất là n (với m,n nguyên dương). Tính giá trị nhỏ nhất của S $=m^2+n^2$

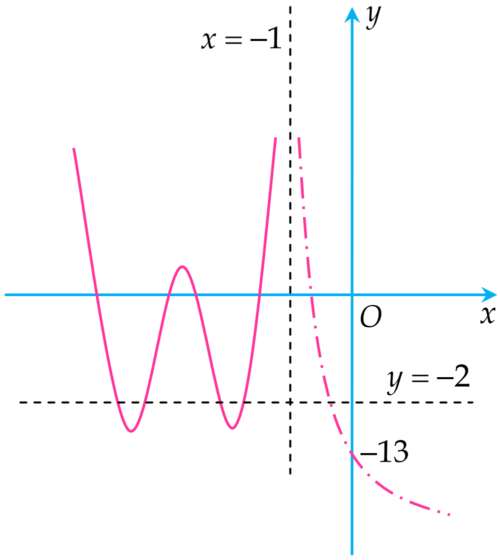
A. 14 **B.** 74 **C.** 50 **D.** 3

Câu 102. Cho $f(x), f''(x)$ và d là tiếp tuyến của $f(x)$ dưới hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có dạng mx^3-nx^2+p. Tính $43n-45p$



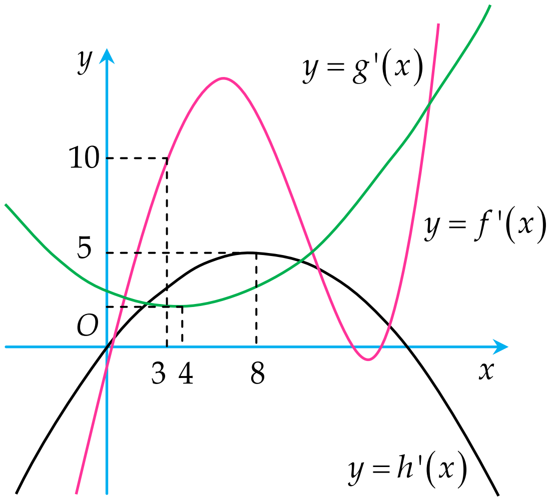
A. $-\dfrac{285}{3}$ **B.** 450 **C.** 201 **D.** –182

Câu 103. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Tổng các giá trị nguyên của $m\in[3;20]$ để hàm số $g(x)=\left|f(x)+m\right|$ có 4 cực trị. Biết tử số của $f(x)$ có hệ số tự do dương.



A. 64 **B.** –58 **C.** 75 **D.** 88

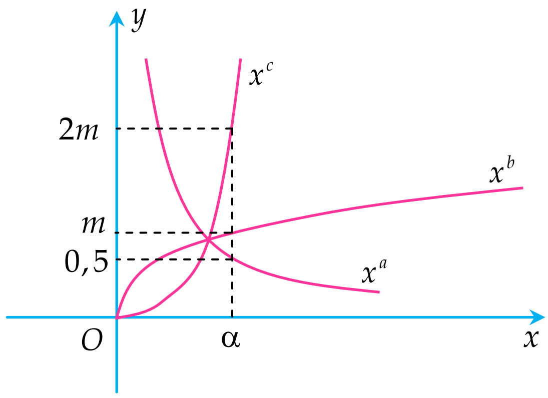
Câu 104. Cho 3 hàm số $y=f(x), y=g(x), y=h(x)$. Đồ thị của 3 hàm số $y=f'(x), y=g'(x)$, $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới, trong đó đường đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hàm số $k(x)=f(x+7)+g(5x+1)-h\left(4x+\dfrac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



A. $\left(-\dfrac{15}{4};0\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{8};1\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{8};+\infty\right)$.

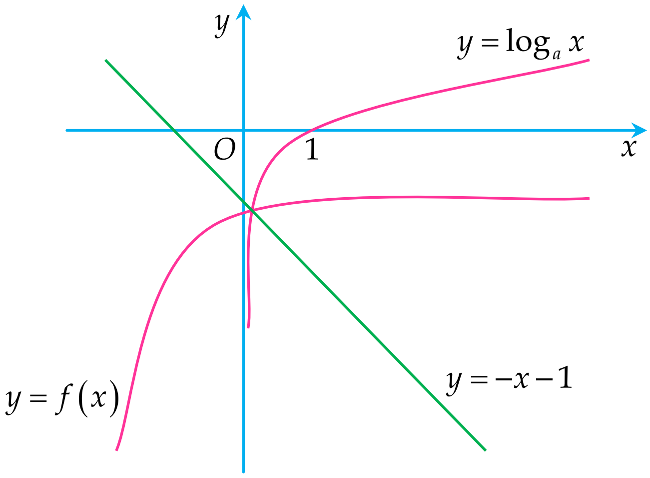
Câu 105. Cho hình vẽ của đồ thị các hàm số $y=x^a;y=x^b;y=x^c$ có đồ thị như hình bên. Khi đó hãy tìm tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{3a^2+(2b+a+c)^2}{a^2+5c^2+4ac}?$$



A. 31 **B.** 32 **C.** 33 **D.** 34

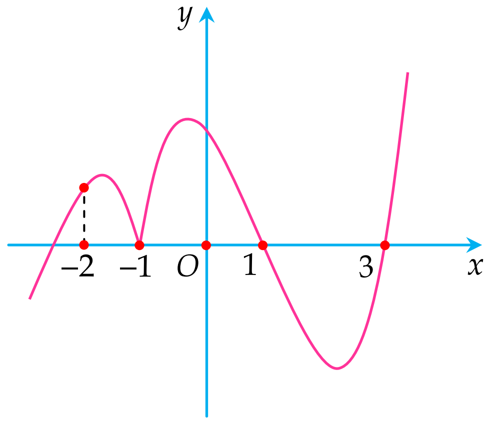
Câu 106. Hình vẽ bên là đồ thị của hai hàm số $y=\log_a x$ và $y=f(x)$. Đồ thị của chúng đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x-1$ .Tính $f(\log_a 2018)$



A. $f(\log_a 2018) = -1 - \dfrac{a}{2018}$ **B.** $f(\log_a 2018) = -1 - \dfrac{1}{2018a}$

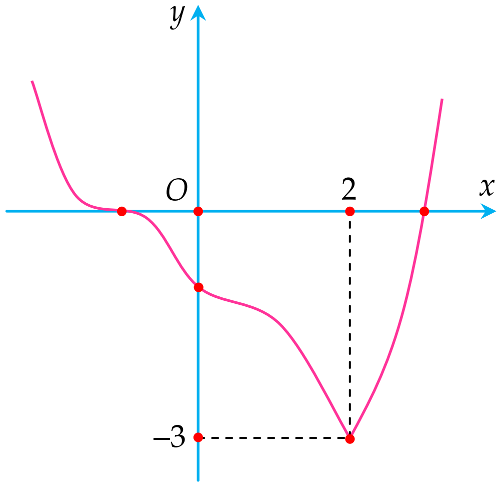
C. $f(\log_a 2018) = -1 + \dfrac{a}{2018}$ **D.** $f(\log_a 2018) = -1 + \dfrac{1}{2018a}$

Câu 107. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1\right) f(x) \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;2]$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

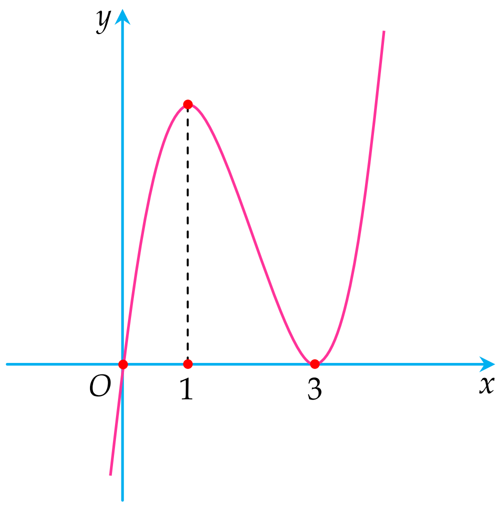
Câu 108. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(x) + x^2 > 4x + m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$



A. $m < -3$. **B.** $m < -10$.

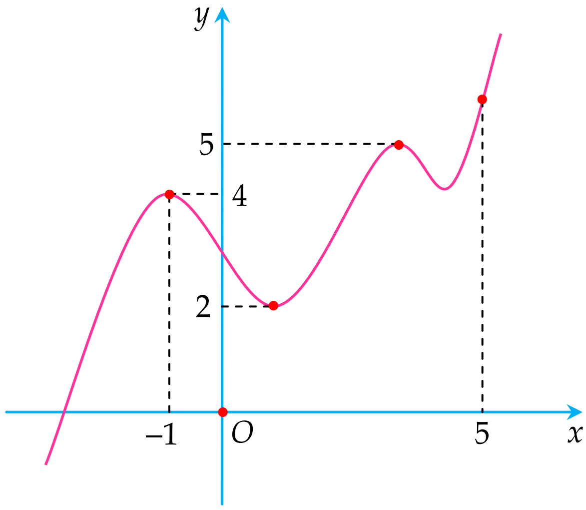
C. $m < -2$. **D.** $m < 5$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Để đồ thị của hàm số $h(x) = \left|f^2(x) + f(x) + m\right|$ có số điểm cực trị ít nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số m là m_0. Tìm mệnh đề đúng?



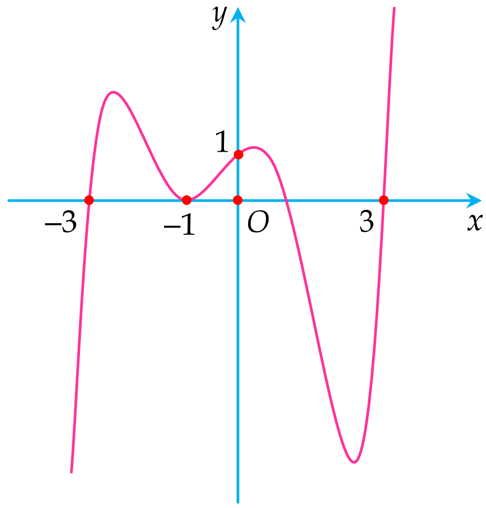
A. $m_0 \in (0;1)$. **B.** $m_0 \in (-1;0)$. **C.** $m_0 \in (-\infty;-1)$. **D.** $m_0 \in (1;+\infty)$.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau?



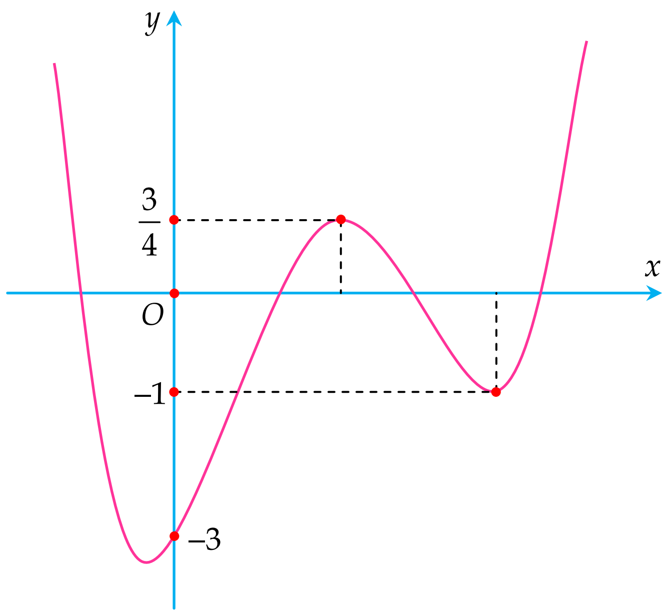
A. $M + m < 7$. **B.** $Mm > 10$. **C.** $M - m > 3$. **D.** $\frac{M}{m} > 2$.

Câu 111. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|f(|x-2|) + 1\right| - m = 0$ có 8 nghiệm phân biệt trong khoảng $(-5;5)$



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

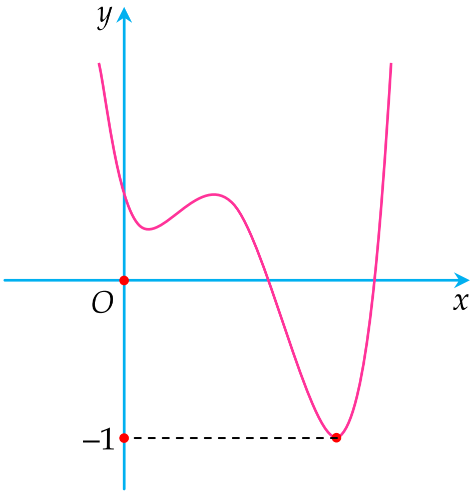
Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số

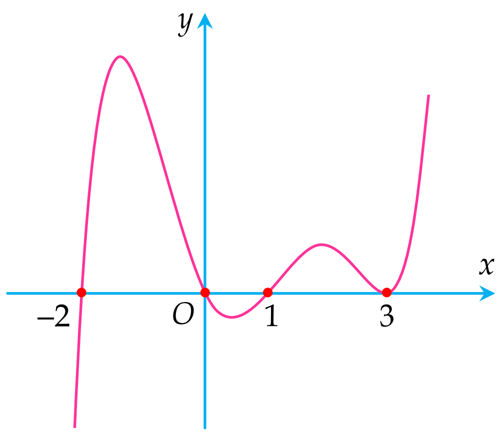
Câu 113. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$



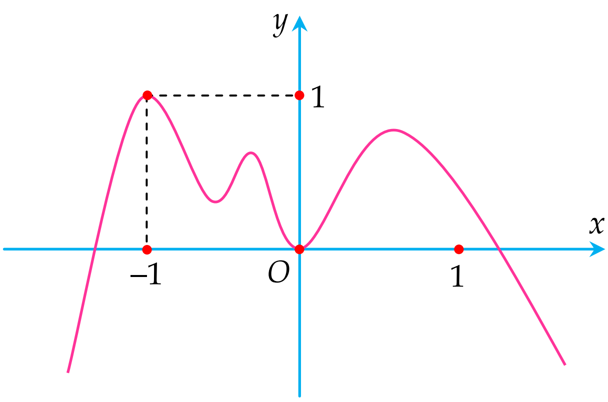
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 114. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f(x^2) = m$ (m là tham số thực) là?



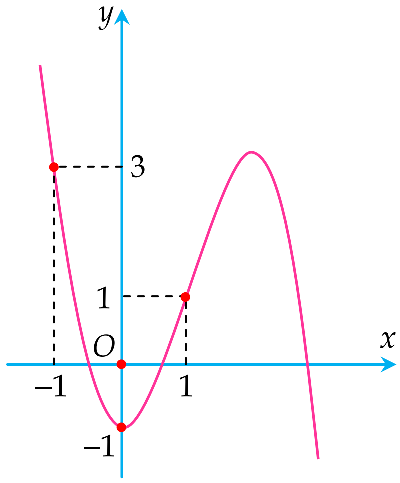
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 115. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(\cos x)) = 0$ trong đoạn $[0;2019]$ là



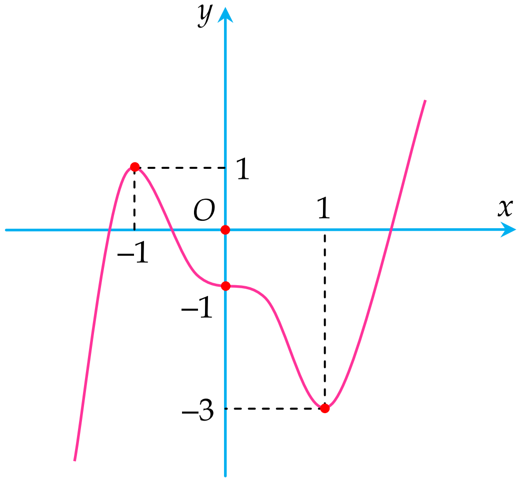
A. 642. **B.** 1002. **C.** 1003. **D.** 643.

Câu 116. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m-2018)f(\cos x) + m - 2019 = 0$ có đúng 6 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$ là?



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

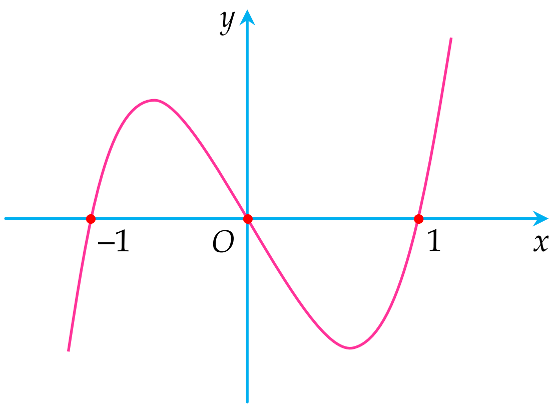
Câu 117. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x|-1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt

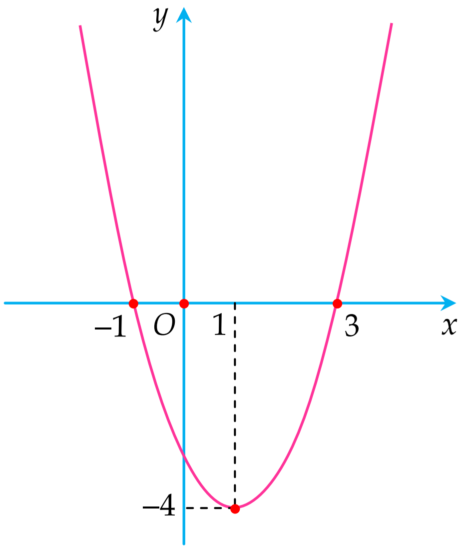
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 118. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x \in R$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f'(x)]$ là?



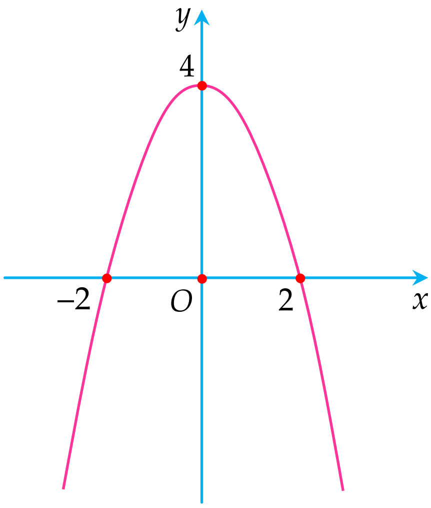
A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 119. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = -9$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Phần nguyên của giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là?



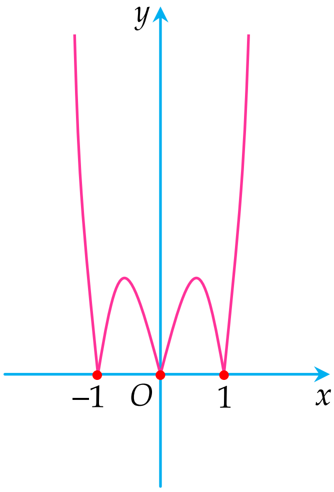
A. 2 **B.** 27 **C.** 29 **D.** 35

Câu 120. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Giá trị $3a + 2b + c - d$ là?



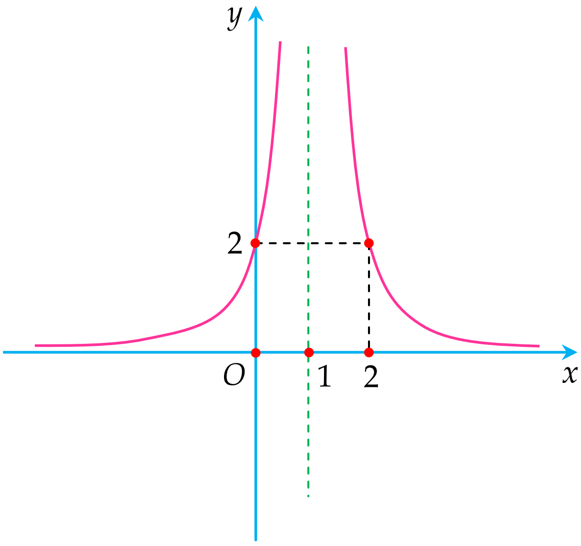
A. 0. **B.** 2 **C.** 3. **D.** 4

Câu 121. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $(a > 0)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y = |f'(x)|$ như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại 2 điểm. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là?



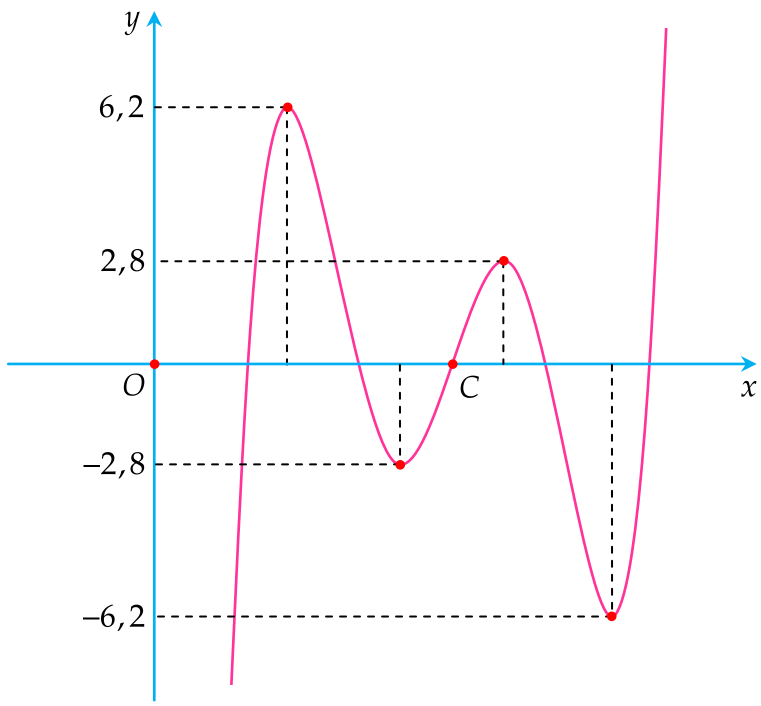
A. $\frac{7}{15}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{14}{15}$ **D.** $\frac{16}{15}$

Câu 122. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R},\frac{-d}{c}\neq 0\right)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có dạng ?



A. $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ **B.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ **C.** $y=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$ **D.** $y=\frac{-1}{2}x+2$

Câu 123. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và cắt trục hoành tại 5 điểm như hình vẽ sao cho điểm C là tâm đối xứng của đồ thị.



Xét các cặp số $(a;b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $a<b$ sao cho đồ thị hàm số

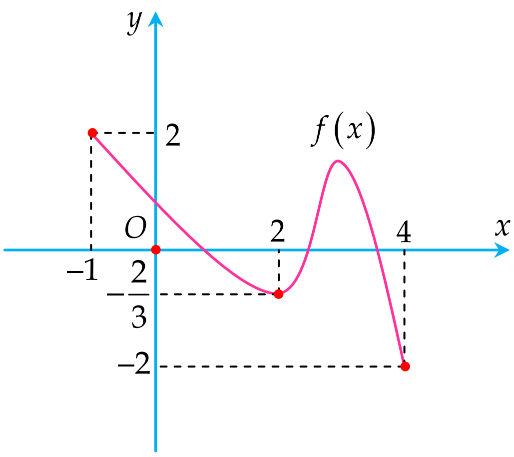
$$g(x)=\left[f(x)-a\right]\left[f(x)-b\right]$$

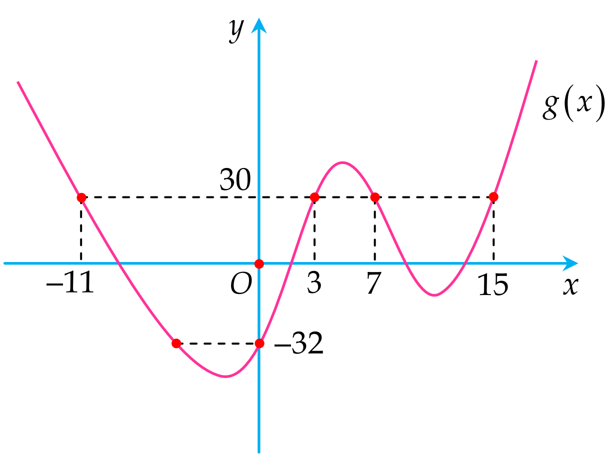
Cắt trục hoành có đúng 3 cặp giao điểm đối xứng nhau qua điểm C. Tổng các giá trị a nhận được?

A. 15 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 10

Nhóm toán VD – VDC

Câu 124. Cho hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên dưới. Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f(x)\geq\dfrac{g(m^2-5)}{x^2-4x+10}$ có nghiệm $x\in[-1;4]$ là?

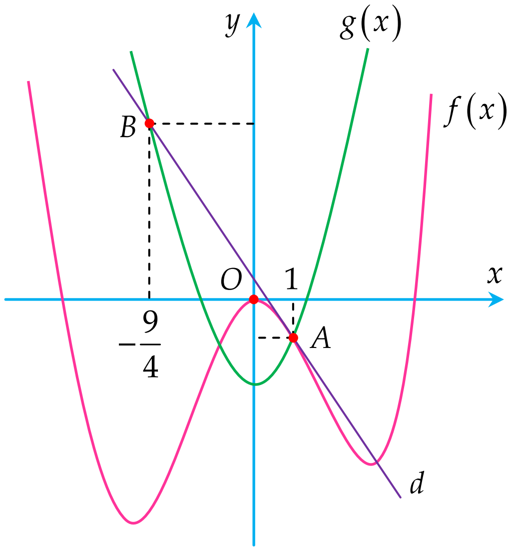




A. 7 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 5

Thầy Nguyễn Đăng Ái

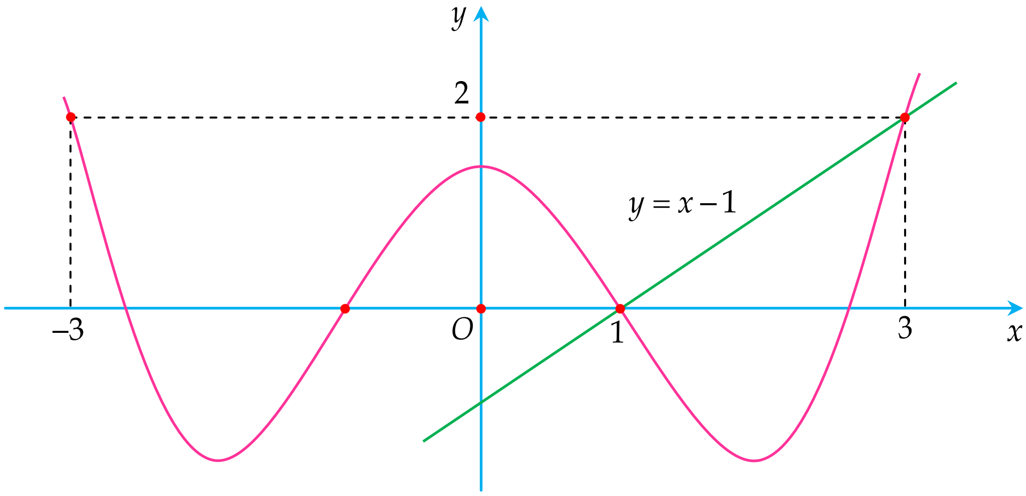
Câu 125. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $g(x)=2x^2-3$ và đường thẳng d có đồ thị như hình vẽ dưới.



Biết rằng A là điểm chung của 2 đồ thị $f(x), g(x), x_A = 1$, điểm B thuộc đồ thị $g(x)$ và $x_B = -\frac{9}{4}$, đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tính $f'(x_A)$

A. -1 **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** -2

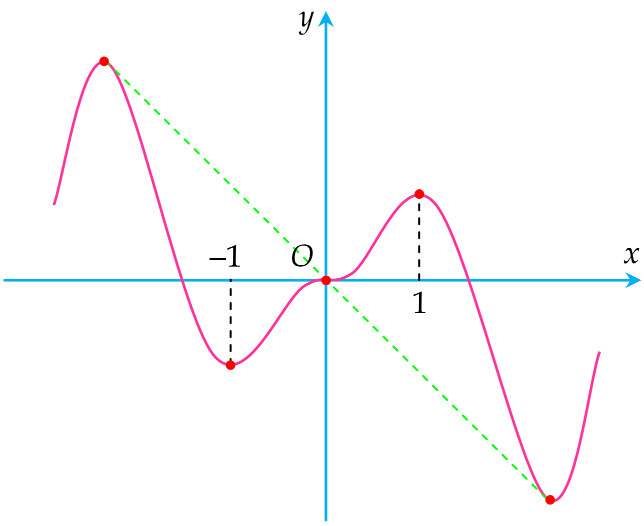
Câu 126. Cho hàm số $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y = g(x) = f(1-2x) - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{-3}{2}; -1\right)$ **B.** $\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(1;3)$

Câu 127. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:

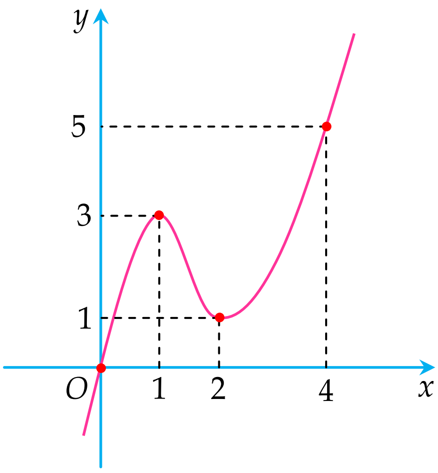


Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [1;2019]$ sao cho phương trình

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+f\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)=0 \text{ có nghiệm}$$

A. 2018 **B.** 2019 **C.** 1 **D.** 2

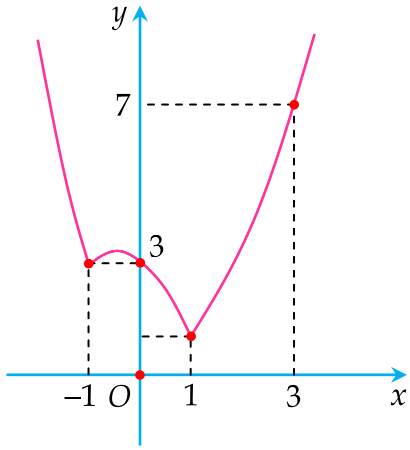
Câu 128. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

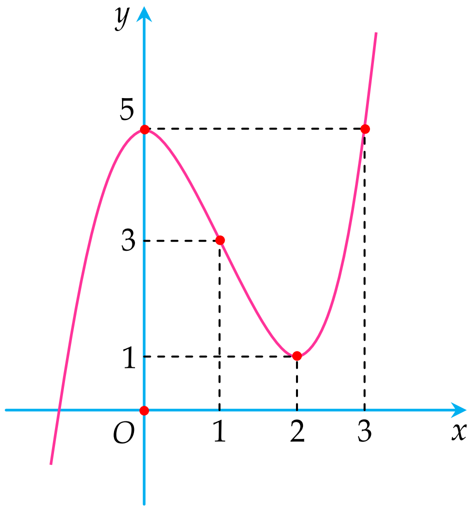
Câu 129. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x) - 2|^3 - 3(f(x) - 2)^2 + 5$ trên đoạn $[-1;3]$. Tích $M.m$ bằng

A. 2 **B.** 3 **C.** 54 **D.** 55

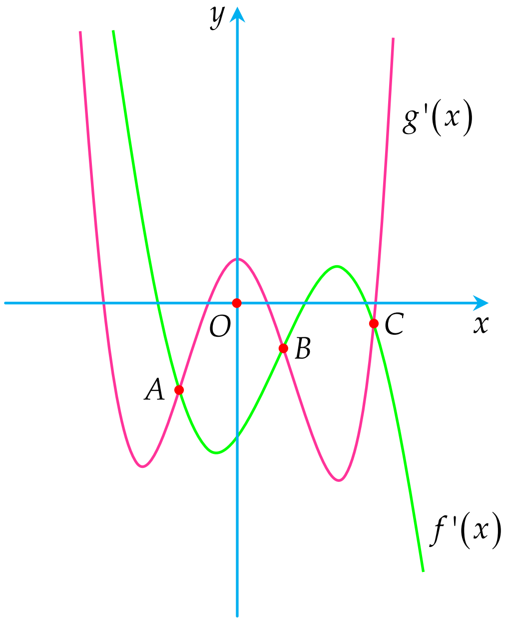
Câu 130. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Ký hiệu $g(x) = f\left(2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x}\right) + m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) > 2\min\limits_{[0;1]} g(x)$

A. $m > 4$ **B.** $m < 3$ **C.** $0 < m < 5$ **D.** $m < 2$

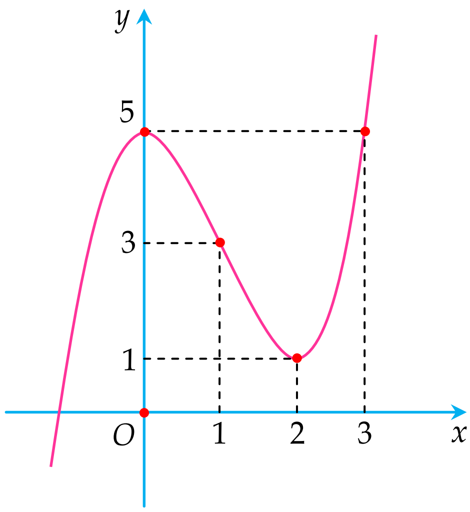
Câu 131. Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ.



Gọi ba giao điểm A, B, C của đồ thị $y = f'(x), y = g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ a, b, c . Giá trị nhỏ nhất trên đoạn bằng

A. $h(0)$ **B.** $h(a)$ **C.** $h(b)$ **D.** $h(c)$

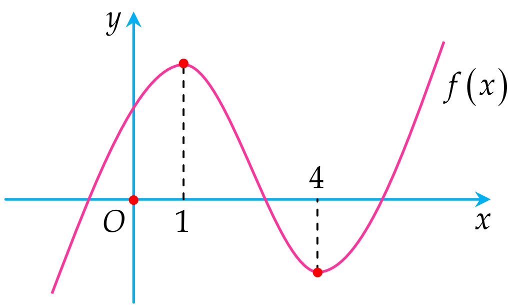
Câu 132. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Ký hiệu $g(x) = f(x^3 - x^2 + x + 2) + 3m$, với m là tham số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = m^2 + 3\max\limits_{[0;1]} g(x) + 4\min\limits_{[0;1]} g(x) + m$

A. -105 **B.** -102 **C.** -50 **D.** 4

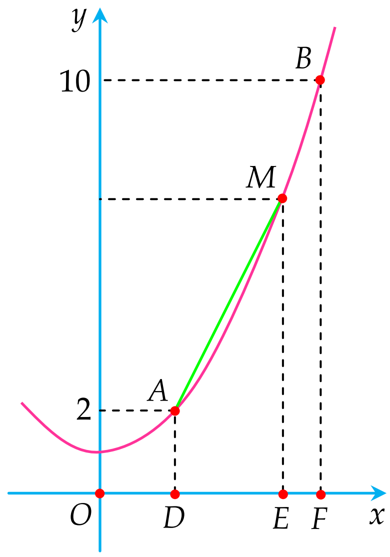
Câu 133. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m với $m \in [1;5]$ để bất phương trình $f\left(m-\sqrt{m}+1\right) \geq f\left(\sqrt{5-x}\right)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1;4]$

A. 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

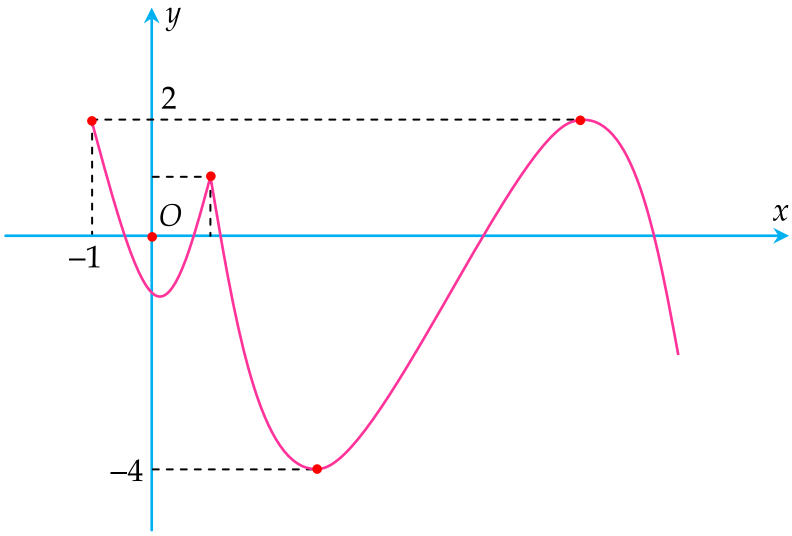
Câu 134. Trên parabol $y = x^2 + 1(P)$ lấy hai điểm $A(1;2).B(3;10)$ gọi M là điểm di động trên cung AB của (P), M khác A,B .



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi và , gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi và Gọi là tọa độ điểm khi đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x_0^2 + y_0^2$

A. 29 **B.** 11 **C.** 7 **D.** 5

Câu 135. Cho hàm số liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



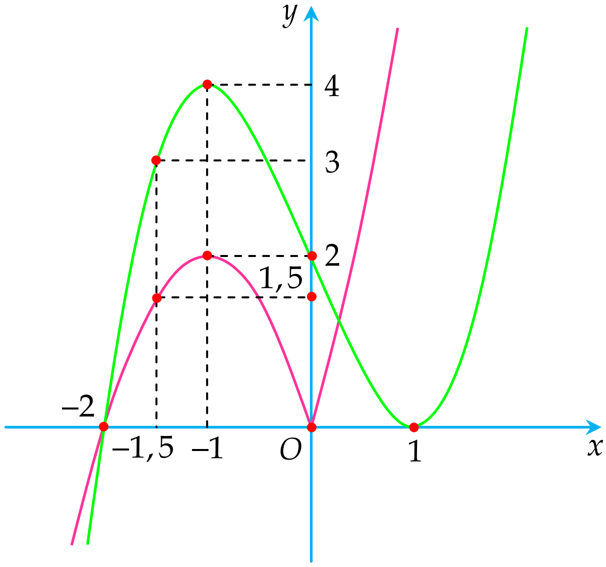
Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$16.3^{f(x)} - \left[f(x)^2 + 2f(x) - 8\right].4^{f(x)} \geq \left(m^2 - 3m\right).6^{f(x)}$$

Nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in [-1;9]$?

A. 22 **B.** 31 **C.** 5 **D.** 6

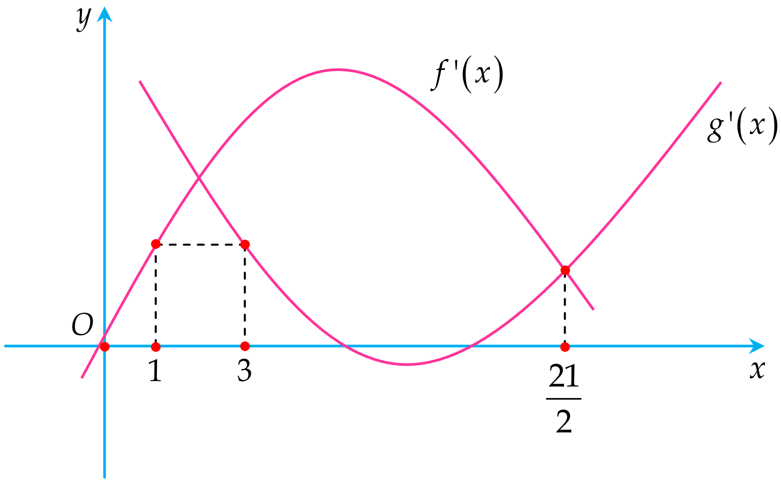
Câu 136. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị các đạo hàm cho như hình vẽ với $f'(x)$ (màu xanh) và $g'(x)$ (màu hồng) có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $h(x)=f(x-1)-g(2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(-1;\frac{-1}{2}\right)$ **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$

Câu 137. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $y=f(x)-g(x+2)$ đồng biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và giá trị lớn nhất của biểu thức $(\beta-\alpha)=8$; phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y=g(x)$ tại điểm có hoành độ $x_1=11$ là $y=3x+2$ và phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_2=9$ là $y=ax+1$ Giá trị của $f(9)$ bằng



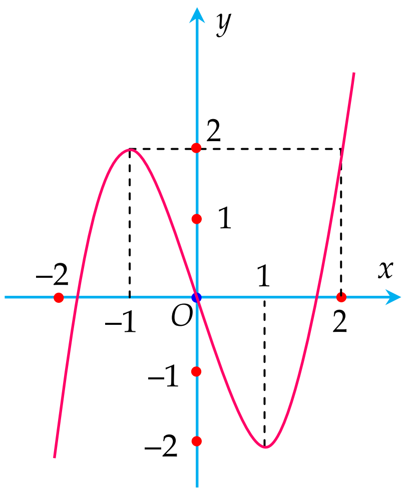
A. 13 **B.** 28 **C.** −26 **D.** 22

Thầy Nguyễn Đăng Ái

TUYỂN TẬP MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐỒ THỊ VẬN DỤNG CAO ÔN THI THPT QG 2019

Bài toán 1

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $t=\cos x$, do $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nên suy ra $t\in(-1;0]$.

Trên khoảng $(-1;0)$ hàm số nghịch biến nên suy ra

Với $t\in(-1;0]$ thì $f(0)\le f(t)<f(-1)$ hay $0\le f(t)<2$.

Đặt $u=\sqrt{2f(\cos x)}$ thì $u=\sqrt{2f(t)}, u\in[0;2)$. Khi đó bài toán trở thành:

Tìm m để phương trình $f(u)=m$ có nghiệm $u\in[0;2)$.

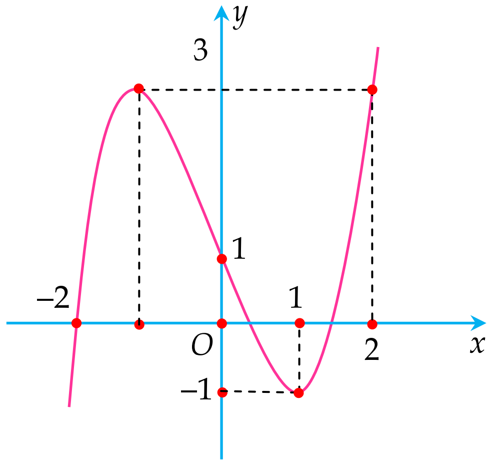
Quan sát đồ thị ta thấy rằng với $u\in[0;2)$ thì $f(u)\in[-2;2)\Rightarrow -2\le m<2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1\}$. Vậy có 4 giá trị của m.

Chọn ý D.

Bài toán 2

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f\left(\pi^x\right)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Đặt $t=\pi^x, t>0$. Phương trình đã cho trở thành:

$$f(t)-\frac{m^2-1}{8}=0 \Leftrightarrow f(t)=\frac{m^2-1}{8},(t>0).$$

Quan sát đồ thị đã cho của hàm số $y=f(x)$ ta thấy rằng

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$-1<\frac{m^2-1}{8}<1 \Leftrightarrow -7<m^2<9 \Leftrightarrow -3<m<3$$

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

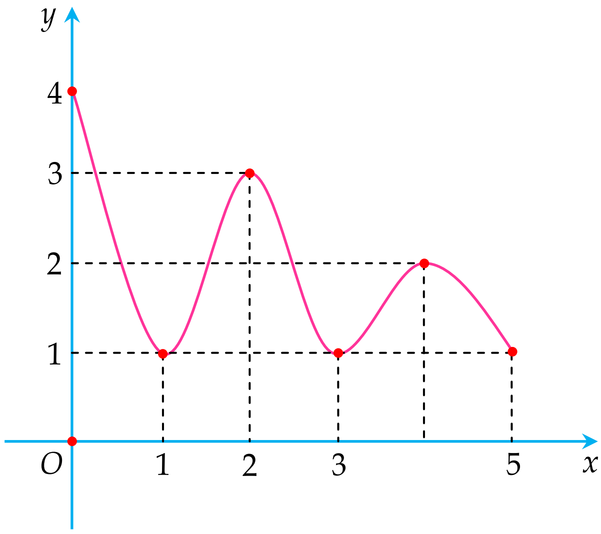
Vậy có tất cả 5 giá trị nguyên của m.

Chọn ý A.

Nhận xét. *Không khó để nhận ra phương pháp bài này giống với bài toán 1, gồm 3 bước như ở lý thuyết mình đã nêu, các bạn chú ý làm theo nhé!*

Bài toán 3

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;5]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình

$$(2019-m)\sqrt{f^2(x)+f(x)-1} \ge \sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$$

Nghiệm đúng với mọi $x \in [0;5]$?

A. 2014 **B.** 2015 **C.** 2016 **D.** 2017

Lời giải

Để bất phương trình đúng với mọi $x \in [0;5]$ thì ta cần có

$$2019-m \ge \max_{[0;5]}\left(\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{\sqrt{f^2(x)+f(x-2)-1}}\right)$$

Theo *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x} = \sqrt{3}\sqrt{x}+\sqrt{2}\sqrt{5-x} \le \sqrt{(3+2)(x+5-x)} = 5$$

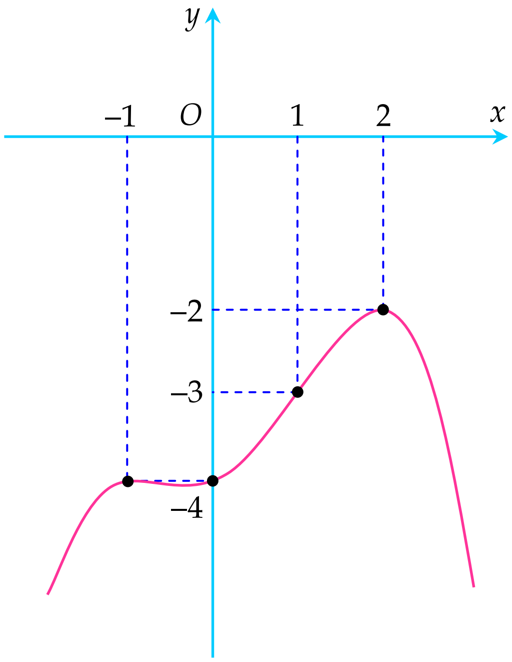
Dấu "=" xảy ra khi $x=3$. Nhìn vào đồ thị ta thấy rằng $f(x)\ge 1$ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=3 \vee x=1 \vee x=5$.

Ta có $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{\sqrt{f^2(x)+f(x)-1}} \le \dfrac{5}{\sqrt{f^2(x)+f(x)-1}} \le 5 \Rightarrow m \le 2014$

Chọn ý A.

Bài toán 4

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tổng tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^x\le\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$$

Đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là?

A. 10. **B.** 4. **C.** 5 **D.** 9

Lời giải

Đặt $t=f(x)$. Quan sát đồ thị ta thấy $f(x)\le -2\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\le -2$

Bất phương trình đã cho được viết lại như sau

$$9.6^t+\left(4-t^2\right).9^t\le\left(-m^2+5m\right).4^t,\forall t\le -2\Leftrightarrow 9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^t+\left(4-t^2\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}\le -m^2+5m$$

Xét hàm số $g(t)=9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^t+\left(4-t^2\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}$

Có $g'(t)=9.\left(\frac{3}{2}\right)^t.\ln\left(\frac{3}{2}\right)-2t.\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+2\left(4-t^2\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}.\ln\frac{3}{2}\ge 0,\forall t\le -2$

Từ đó suy ra $\max\limits_{(-\infty;-2]}g(t)=g(-2)=4$

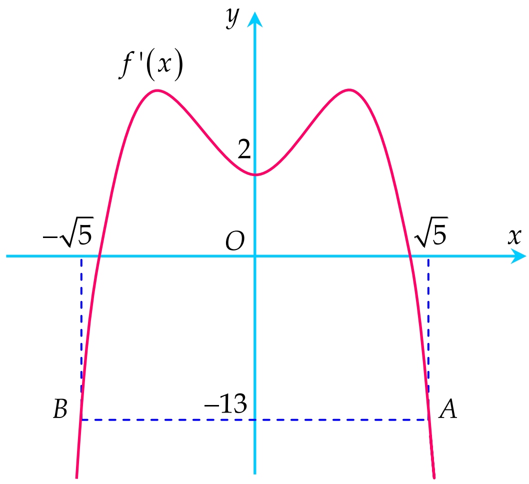
Yêu cầu bài toán tương đương với $-m^2+5m\ge 4\Leftrightarrow 1\le m\le 4$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$ nên tổng tất cả các giá trị của tham số m là 10.

Chọn ý A.

Bài toán 5

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x)\le 0\ \ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



A. $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$

B. $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$

C. $m\le\frac{2}{3}f(0)-2\sqrt{5}$

D. $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$

Lời giải

Ta có $g(x)\le 0\Leftrightarrow g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}\le 0\Leftrightarrow 3m\ge 2f(x)+2x^3-4x-6\sqrt{5}$

Đặt $h(x)=2f(x)+2x^3-4x-6\sqrt{5}$. Ta có $h'(x)=2f'(x)+6x^2-4$.

Suy ra $\begin{cases} h'\left(-\sqrt{5}\right)=2f'\left(-\sqrt{5}\right)+6.5-4=0 \\ h'\left(\sqrt{5}\right)=2f'\left(\sqrt{5}\right)+6.5-4=0 \\ h'(0)=2f'(0)+0-4=0 \\ h'(1)=2f'(1)+6.1-4>0 \\ h'(-1)=2f'(-1)+6.1-4>0 \end{cases}$

Từ đó ta có bảng biến thiên

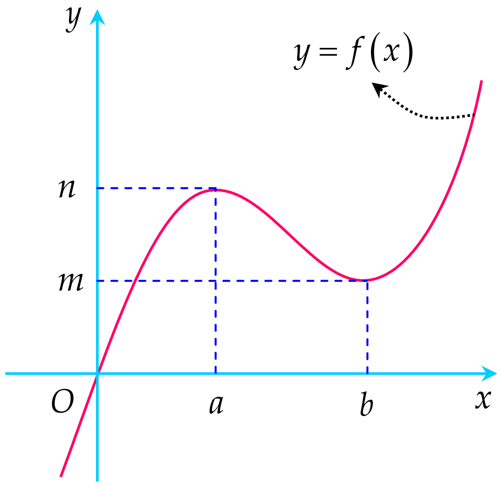
x	$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$
h'		$-$	0	$-$	
h	$h\left(-\sqrt{5}\right)$	$\searrow$	$h(0)$	$\searrow$	$h\left(\sqrt{5}\right)$

Từ bảng biến thiên ta có $3m \ge h\left(\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow m \ge \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$.

Chọn ý A.

Bài toán 6

Cho $0 < \sqrt{a} - 1 < \sqrt{b} - 1 < a$ và hàm số $y = g(x) = \frac{f(x)}{f\left((x+1)^2\right)}$ có đạo hàm trên $[0;+\infty)$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi $x \in \left[\sqrt{a}-1;\sqrt{b}-1\right]$



A. $g(x) \ge \frac{f\left(\sqrt{b}-1\right)}{m}$

B. $g(x) \le \frac{f\left(\sqrt{a}-1\right)}{n}$

C. $g(x) \le \frac{f\left(\sqrt{b}-1\right)}{m}$

D. $-10 \le g(x) \le 0$

Lời giải

Ta có $x \in \left[\sqrt{a}-1;\sqrt{b}-1\right] \Rightarrow (x+1)^2 \in [a;b]$, dựa vào đồ thị ta có

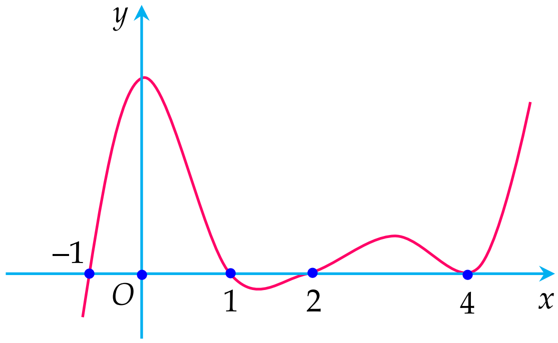
$$m \le f\left((x+1)^2\right) \le n \Rightarrow \frac{1}{n} \le \frac{1}{f\left((x+1)^2\right)} \le \frac{1}{m}$$

Mặt khác $0 < \sqrt{a}-1 < \sqrt{b}-1 < a$ dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{a}-1;\sqrt{b}-1\right]$ nên ta có $f\left(\sqrt{a}-1\right) \le f(x) \le f\left(\sqrt{b}-1\right) \Rightarrow g(x) \le \frac{f\left(\sqrt{b}-1\right)}{m}$

Chọn ý C.

Bài toán 7

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn $[1;4]$ của phương trình $f(x)=f(0)$ là?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số (đa thức nội suy):

x	$-\infty$		-1		1		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y			$f(-1)$		$f(1)$		$f(2)$		$f(4)$		

Mặt khác quan sát hình vẽ ta thấy:

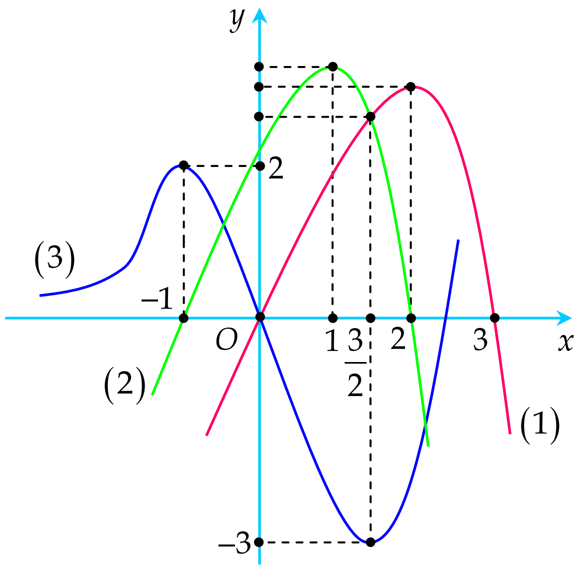
$$\int_0^1 |f'(x)|dx > \int_1^2 |f'(x)|dx \Leftrightarrow f(1)-f(0) > f(1)-f(2) \Leftrightarrow f(2) > f(0)$$

Vậy trong đoạn $[-1;4]$ phương trình $f(x)=f(0)$ có 1 nghiệm.

Chọn ý B.

Bài toán 8

Cho đồ thị của hàm số $f(x), F(x), f'(x+1)$ như hình vẽ. Tính giá trị của tích phân $\int\limits_{f'(-1)+F(1.5)}^{f(0)+f(1.5)} \sin^3 x.\cos x dx$?



A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Đồ thị hàm số (1) cực đại khi $x=2$ nên 2 là đồ thị của đạo hàm hàm số (1) .

Chuyển dịch đồ thị hàm số (3) sang phải 1 đơn vị ta thấy có cắt trục Ox tại $x=1$, đồng thời tại đó đồ thị hàm số (2) cực đại 3 là đồ thị của đạo hàm (2).

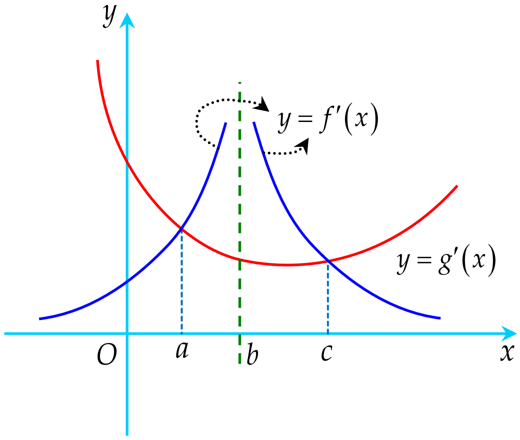
Suy ra đồ thị hàm số (1), (2), (3) lần lượt là đồ thị hàm số $F(x), f(x), f'(x+1)$.

Ta có $f(0)+f(1.5)=f'(-1)+F(1.5) \Rightarrow \int\limits_{f'(-1)+F(1.5)}^{f(0)+f(1.5)} \sin^3 x.\cos x dx = 0$

Chọn ý A.

Bài toán 9

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ và hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hai hàm số $y=f'(x), y=g'(x)$ như hình vẽ dưới. Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$ và $S=-\left[h\left(x^2+b\right)\right]^2+h\left(b+x^2\right)\left(1+2h(c)\right)-\left[h(c)\right]^2$ với a,b,c là các số thực đã biết. Khẳng định đúng với mọi $x\neq 0$ là?



A. $S\in\left[h(c);h(a+c)\right]$

B. $S\le h(c)$

C. $S\le\left[h(c);h(a+b)\right]$

D. $S\in\left[h(a);h(c)\right]$

Lời giải

Từ đồ thị đã cho ta suy ra $h'(x)=f'(x)-g'(x); h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=c \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta có

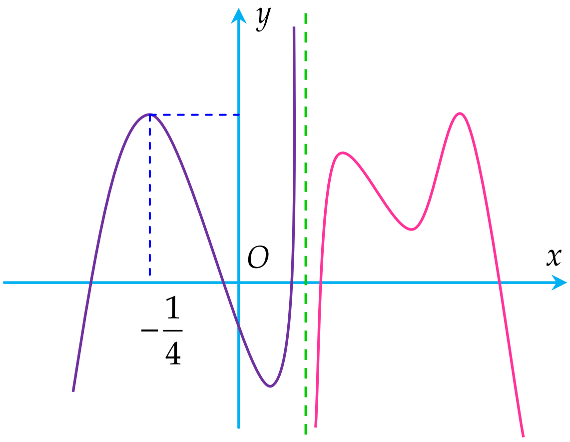
x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(a)$	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	$h(c)$	$\searrow$	

Lại có $S=-\left(h\left(b+x^2\right)-h(c)\right)^2+h\left(b+x^2\right)\le h\left(x^2+b\right)\le h(c)$

Chọn ý B.

Bài toán 10

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 + x\right)$?



A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Lời giải

Ta có $y' = (2x+1) f'\left(x^2 + x\right)$, $x^2 + x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -\frac{1}{4}$.

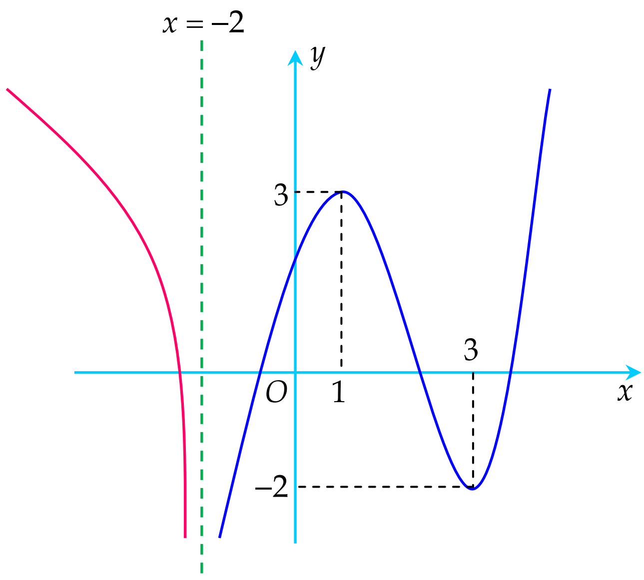
Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm trong đó 1 điểm có hoành độ nhỏ hơn $-\frac{1}{4}$ và có một tiệm cận.

Khi đó ứng với mỗi giao điểm có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{4}$ và 1 điểm không xác định thì $y' = 0$ có 2 nghiệm Từ đây dễ dàng suy ra hàm $y = f\left(x^2 + x\right)$ có 11 cực trị!

Chọn ý B.

Bài toán 11

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ dưới. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để hàm số $y = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị?



A. -210 **B.** -212 **C.** -211 **D.** -209

Lời giải

Chúng ta có thể tính nhanh theo công thức là hàm số $y = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương và hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$.

Dựa vào đồ thị của hàm số ta suy ra

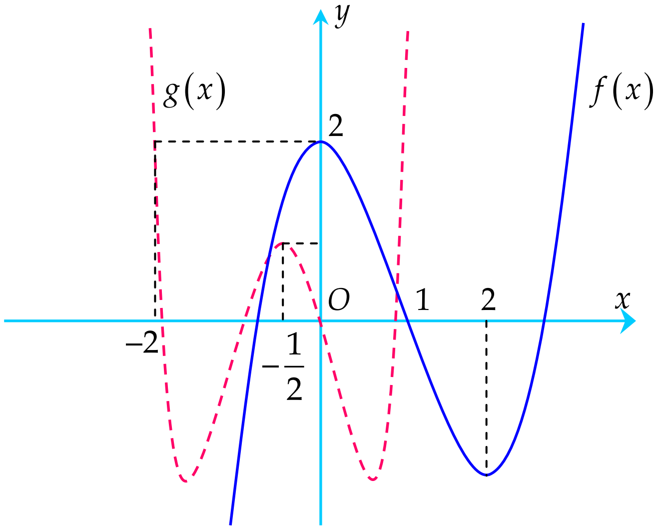
$$\begin{cases} 1-m>0 \\ -2-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-20,-19,-18,\ldots,-3,-1,0\}$$

Suy ra tổng S các giá trị nguyên m: $S = -210$.

Chọn ý A.

Bài toán 12

Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x)=f\left(mx^2+nx+p\right)(m,n,p\in\mathbb{Q})$ có đồ thị như hình dưới, trong đó đường nét liền là đồ thị hàm $f(x)$, đồ thị hàm nét đứt là đồ thị hàm $g(x)$, đường $x=-\frac{1}{2}$ là trục đối xứng hàm $g(x)$. Giá trị của biểu thức $P=(n+m)(m+p)(p+2n)$ bằng bao nhiêu?



A. 6 **B.** 24 **C.** 12 **D.** 16

Lời giải

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Hàm số đạt cực trị tại $x=0;x=2$ và đồ thị đi qua điểm $(1;0),(0;2)$ nên ta có

$$\begin{cases} f'(0)=0\\ f'(2)=0\\ f(1)=0\\ f(0)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1\\ b=-3\\ c=0\\ d=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+2$$

Ta có $g(x)=\left(mx^2+nx+p\right)^3-3\left(mx^2+nx+p\right)^2+2$. Hệ số tự do bằng p^3-3p^2+2. Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua điểm $(0;0)$ nên $p^3-3p^2+2=0\Rightarrow p=1$.

Đồ thị hàm số $g(x)=f\left(mx^2+nx+p\right)$ có trục đối xứng $x=-\frac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số $y=mx^2+nx+p$ cũng có trục đối xứng $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{n}{2m}=-\frac{1}{2}\Rightarrow m=n$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua điểm $(-2;2)$ nên

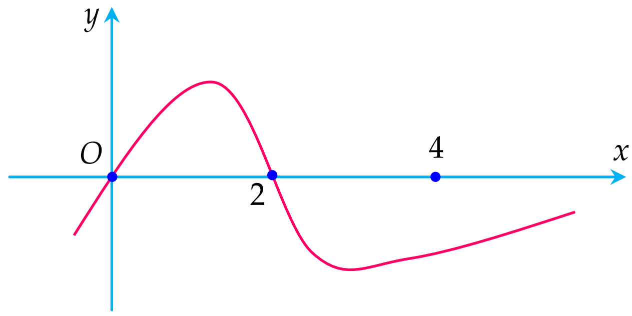
$$g(-2)=0\Rightarrow g(x)=(2m+1)^3-3(2m+1)^2+2=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m=n=1\\ m=n=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Do đồ thị có hướng quay lên trên nên ta suy ra $m>0\Rightarrow m=n=p=1$

Chọn ý C.

Bài toán 13

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ dưới đây và $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên $[0;4]$.



A. $m = f(4)$. **B.** $m = f(0)$. **C.** $m = f(2)$. **D.** $m = f(1)$.

Lời giải

Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy:

- Trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x) > 0$.
- Trên khoảng $(2;4)$ thì $f'(x) < 0$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		2		3		4
$f'(x)$		+		+		−		−	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(1)$	↗	$f(2)$	↘	$f(3)$	↘	$f(4)$

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy GTNN của hàm số đạt được bằng $f(0)$ hoặc $f(4)$.

Ta lại có $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3) \Leftrightarrow f(0) - f(4) = 2f(2) - f(1) - f(3)$

$[f(2) - f(1)] + [f(2) - f(3)] > 0$ (do $f(2) > f(1), f(2) > f(3)$).

Do vậy $f(0) - f(4) > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(4)$.

Vậy $m = f(4)$.

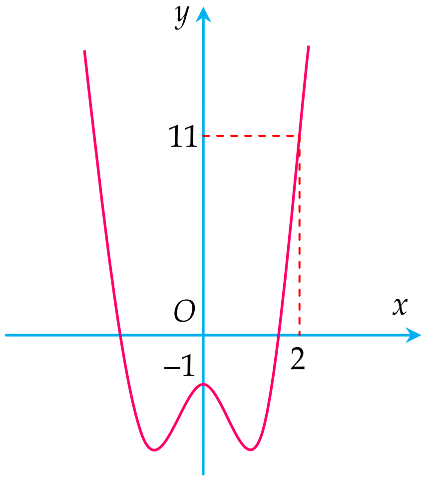
Chọn ý A.

Bài toán 14

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời $f(x+1)-f(x)=2x(2x+1)(x+1)(*)$

Biết rằng $f(x)=ax^4+bx^2+c;g(x)=mx^2+nx+p$ và $f(x)=g(x^2-1)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$



A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** -2 **D.** -4

Lời giải

Từ $(*)$ ta thay $x=0\Rightarrow f(1)=f(0)$

Ta có $x=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow c=-1\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\c=-1\end{cases}$ và $x=2,y=11\Rightarrow f(x)=x^4-x^2-1$

Mặt khác $x^4-x^2-1=g(x^2-1)=m(x^2-1)^2+n(x^2-1)+p=mx^4-2mx^2+m+nx^2-n+p$

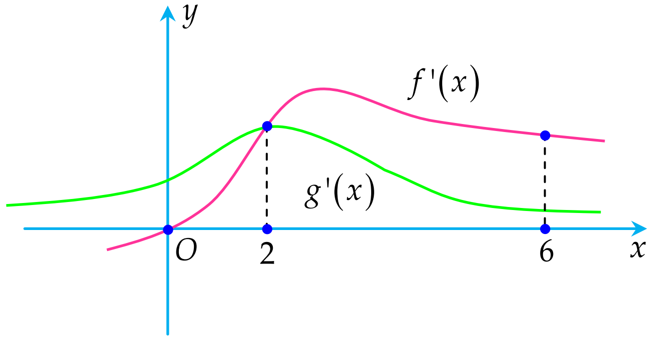
$$\Rightarrow\begin{cases}m=1\\-2+n=-1\\-1=-n+p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\n=1\\p=0\end{cases}\Rightarrow g(x)=x^2+x;g'(x)=2x+1;g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $g(x)=-\frac{1}{4}$

Chọn ý B.

Bài toán 15

Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

A. $h(2),h(6)$. **B.** $h(6),h(2)$. **C.** $h(0),h(2)$. **D.** $h(2),h(0)$.

Lời giải

Có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

Từ đồ thị đã cho ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $[0;6]$

x	0		2		6
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(0)$ ↘		$h(2)$	↗	$h(6)$

Do đó $\min\limits_{[0;6]} h(x)=h(2)$

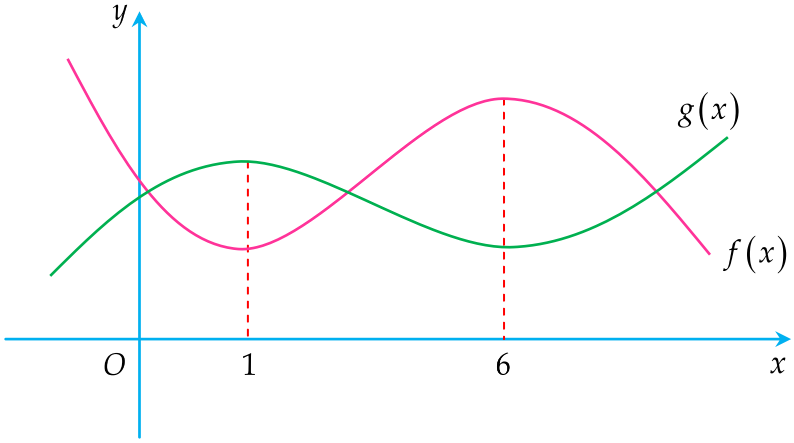
Giả thiết ta có $f(0)-g(0)<f(6)-g(6)\Leftrightarrow h(0)<h(6)$

Vậy nên $\max\limits_{[0;6]} h(x)=h(6)$

Chọn ý B.

Bài toán 16

Cho 2 hàm số $f(x), g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $x=1, x=6$ đều là các điểm cực trị của 2 hàm số $f(x), g(x)$ đồng thời $f(1)=g(6), 2f(6)=g(1)+3$ và $2f(-5x+16)=3g(5x-9)-1(*)$.Gọi M,m lần lượt là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=f(x)(f(x)-2g(x)+1)+g^2(x)+g(x)$. Tính tổng $P=M+m$?



A. $\dfrac{27}{4}$ **B.** $\dfrac{23}{4}$ **C.** $\dfrac{9}{2}$ **D.** $\dfrac{11}{2}$

Lời giải

Lần lượt thay $x=2, x=3$ vào $(*)$ đồng thời kết hợp điều kiện ban đầu ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2f(1)=3g(6)-1 \\ 2f(6)=3g(1)-1 \\ 2f(6)=4g(1)-4 \\ 2f(1)=4g(6)-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=g(6)=1 \\ f(6)=\dfrac{5}{2}, g(1)=2 \end{cases}$

Từ giả thiết kết hợp đồ thị ta nhận thấy rằng $g(x)$ nghịch biến trên $[1;6]$ và $f(x)$ đồng biến trên $[1;6] \Rightarrow g(x)\in[1;2], f(x)\in\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$. để đơn giản ta đặt $u=f(x), y=g(x)$

Ta có $S=u^2-2uy+y^2+u+y=f(u;y)$. Coi đây là 1 hàm số theo ẩn u ta có

$$f_u'(u;y)=2u-2y+1=0 \Leftrightarrow u=\frac{2y-1}{2}$$

Ta có $f(1;y)=1-2y+y^2+y+1=y^2-y+2; f\left(\dfrac{5}{2};y\right)=y^2-4y+\dfrac{35}{4}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{5}{2};y\right)-f(1;y)>0, \forall y\in[1;2]$$

Xét $y\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow u=\dfrac{2y-1}{2}\notin\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$ và $y\in\left[\dfrac{3}{2};2\right] \Rightarrow u=\dfrac{2y-1}{2}\in\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$

Với $y\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right)(1)$ khảo sát hàm số $f(u;y)$ theo biến $u\in\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$

$$\Rightarrow f_u(u;y) \geq f(1;y) = y^2 - y + 2 \geq 1 \text{ ,và } f_u(u;y) \leq f\left(\frac{5}{2};y\right) = y^2 - 4y + \frac{35}{4} \leq \frac{23}{4}$$

Với $y \in \left[\frac{3}{2};2\right]$ (2). Lập bảng biến thiên cho hàm số $f(u;y)$ theo biến $u \in \left[1;\frac{5}{2}\right]$ ta có

$$\Rightarrow f_u(u;y) \geq f\left(\frac{2y-1}{2};y\right) = \left(\frac{2y-1}{2}\right)^2 - y(2y-1) + y^2 + \frac{2y-1}{2} + y = \frac{8y-1}{2} \geq \frac{7}{4}$$

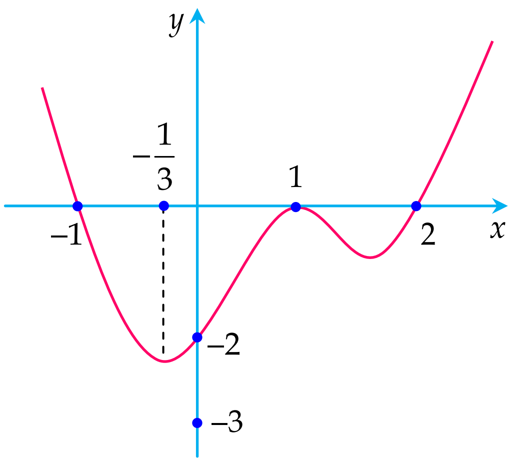
Và $f_u(u;y) \leq f\left(\frac{5}{2};y\right) = y^2 - 4y + \frac{35}{4} \leq \frac{23}{4}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \max S = M = \frac{23}{4}, \min S = m = 1 \Rightarrow P = M + m = \frac{23}{4} + 1 = \frac{27}{4}$

Chọn ý A.

Bài toán 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây. Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Quan sát đồ thị hàm số trên thì hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ và $x = a(1 < a < 2)$. Do đó, $f'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ và $x = a(1 < a < 2)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) - 1)$

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) \cdot = 0 \\ f'(f(x) - 1) = 0 \end{array}\right.$

Phương trình (1) có ba nghiệm $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ và $x = a \quad (1 < a < 2)$

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

Phương trình $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=-\dfrac{1}{3} \\ f(x)-1=1 \\ f(x)-1=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2}{3} \\ f(x)=2 \\ f(x)=a+1 \end{array}\right.$

Theo đồ thị, ta thấy $f(x)=\dfrac{2}{3}$ có hai nghiệm phân biệt và $f(x)=2$ cũng có hai nghiệm phân biệt.

Đặt $b=a+1$. Do $1<a<2$ nên $2<b<3$

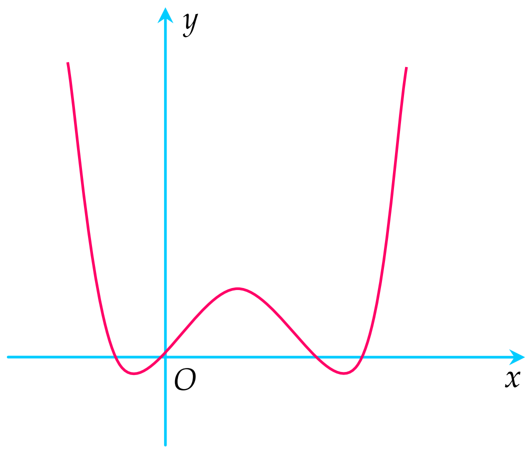
Xét phương trình $f(x)=b$ $(2<b<3)$. Đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình (5) có hai nghiệm phân biệt.

Xét thấy các nghiệm của phương trình (1), (3), (4) và (5) là các nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm phân biệt.

Chọn ý C.

Bài toán 18

Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y=f(x)$ được cho như hình vẽ bên. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục Ox.



A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** –4.

Lời giải

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục Ox bằng số nghiệm của phương trình: $\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)=0 \Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2=f(x).f''(x)$.

Giả sử đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R};a\neq 0,b\neq 0)$ cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4.

Đặt $A=x-x_1$, $B=x-x_2$, $C=x-x_3$, $D=x-x_4$ ta có:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=a.ABCD.$$

- TH1: Nếu $x=x_i$ với $i=1,2,3,4$ thì $g(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2>0$.

Do đó $x=x_i$, $i=1,2,3,4$ không phải nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

- TH2: Nếu $x\neq x_i$ với $i=1,2,3,4$ thì ta viết lại

$$f'(x)=a(BCD+ACD+ABD+ABC)=f(x)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right).$$

$$f''(x)=f'(x)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)-f(x)\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)$$

$$=f(x).\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)^2-f(x).\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)$$

Suy ra, $f''(x).f(x)=f^2(x).\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)^2-f^2(x).\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right).$

Khi đó $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)=f^2(x).\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)>0\ \forall x\neq x_i\ (i=1,2,3,4)$

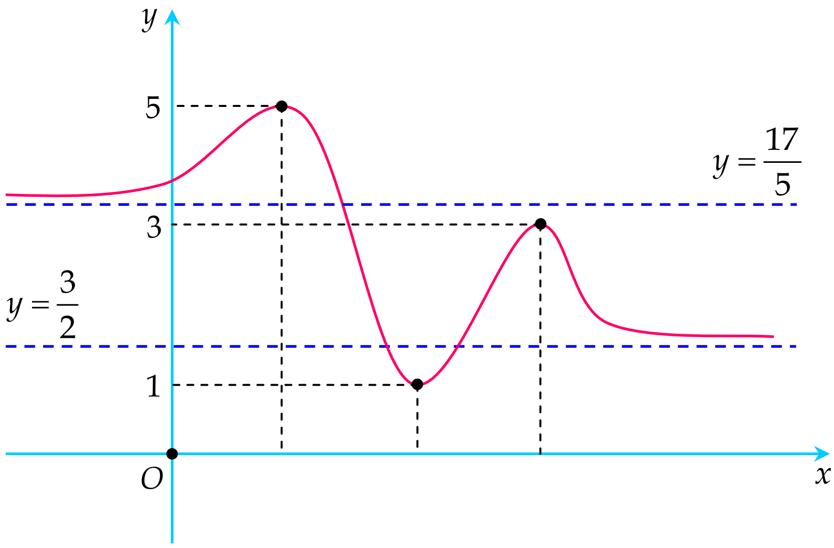
Từ đó suy ra phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ không cắt trục hoành.

Chọn ý B.

Bài toán 19

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để phương trình sau có nghiệm là bao nhiêu?

$$e^{f^3(x)+2f^2(x)-7f(x)+5}+\ln\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=m?$$

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Quan sát đồ thị ta thấy rằng $1\leq f(x)\leq 5$, đặt $t=f(x)$, giả thiết trở thành

$$e^{t^3+2t^2-7t+5}+\ln\left(t+\frac{1}{t}\right)=m$$

Xét: $g(t)=t^3+2t^2-7t+5, g'(t)=3t^2+4t-7\geq 0\forall t\geq 1\Rightarrow g(1)\leq g(t)\leq g(5)\Leftrightarrow 1\leq g(t)\leq 145$

Mặt khác $h(t)=t+\frac{1}{t}, h'(t)=1-\frac{1}{t^2}\geq 0\forall t\in[1;5]\Rightarrow 2\leq h(t)\leq\frac{26}{5}$

Vậy hàm $u(t)=e^{t^3+2t^2-7t+5}+\ln\left(t+\frac{1}{t}\right)$ đồng biến với $x\in[1;5]$

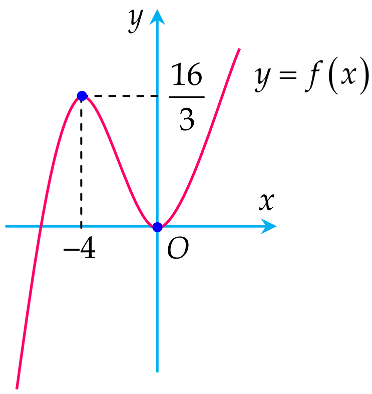
Để phương trình đầu có nghiệm thì $e+\ln 2\leq m\leq e^{145}+\ln\frac{26}{5}$

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của m là 4.

Chọn ý B.

Bài toán 20

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ có nghiệm?



A. 4. **B.** 5. **C.** Vô số **D.** 3.

Lời giải

Vì $-1\leq\sin x\leq 1;-1\leq\cos x\leq 1$ nên $2\cos x-\sin x>-3\Rightarrow 2\cos x-\sin x+4>0$

Đặt $\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}=t\Leftrightarrow 3\sin x-\cos x-1=t(2\cos x-\sin x+4)$

$$\Leftrightarrow\cos x(2t+1)-\sin x(t+3)=-4t-1$$

Phương trình trên có nghiệm khi $(2t+1)^2+(t+3)^2\geq(-4t-1)^2$

$$\Leftrightarrow 5t^2+10t+10\geq 16t^2+8t+1\Leftrightarrow 11t^2-2t-9\leq 0\Leftrightarrow -\frac{9}{11}\leq t\leq 1\Rightarrow 0\leq|t|\leq 1$$

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên (0;1)

Nên phương trình $f(x)=f(|t|)$ với $t\in[0;1]$ có nghiệm duy nhất khi $x=|t|\Rightarrow x\geq 0$

Do đó phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+m+4\right)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow |t| = m^2 + 4m + 4$ có nghiệm với $0 \le |t| \le 1$

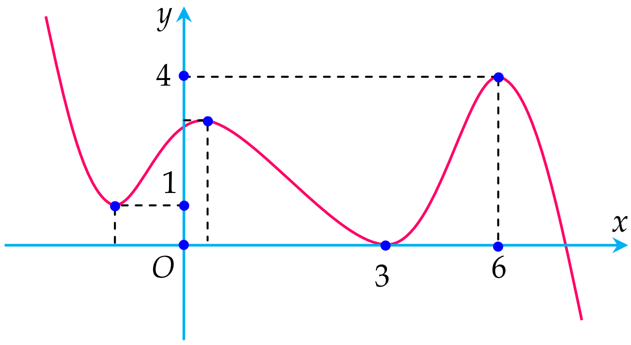
$\Leftrightarrow 0 \le m^2 + 4m + 4 \le 1 \Leftrightarrow (m+2)^2 \le 1 \Leftrightarrow -3 \le m \le -1$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3;-2;-1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn ý C.

Bài toán 21

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{4m^3 + m}{\sqrt{2f^2(x)+5}} = f^2(x) + 3$ có 3 nghiệm phân biệt là:

A. $m = \frac{\pm\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m = \frac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m = \frac{\pm 3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ta biến đổi $\frac{4m^3 + m}{\sqrt{2f^2(x)+5}} = f^2(x) + 3 \Leftrightarrow 4m^3 + m = \left(f^2(x)+3\right)\sqrt{2f^2(x)+5}$

$$\Leftrightarrow 8m^3 + 2m = \left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right)^3 + \sqrt{2f^2(x)+5}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên suy ra $2m = \sqrt{2f^2(x)+5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4m^2 = 2f^2(x) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4m^2 - 5 \ge 0 \\ f(x) = \pm\sqrt{\frac{4m^2-5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \frac{\sqrt{5}}{2} \\ f(x) = \pm\sqrt{\frac{4m^2-5}{2}} \end{cases}$$

Do phương trình $f(x) = g(m)$ luôn có ít nhất một nghiệm nên để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì $f(x) = \pm\sqrt{\frac{4m^2-5}{2}}$ có một phương trình có 1 nghiệm và một phương trình có 2 nghiệm.

Để ý rằng $f(x)=-\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ có hai nghiệm khi $m=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ và có một nghiệm khi $m>\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

- $m=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm.
- $m>\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ để phương trình có 3 nghiệm thì $f(x)=\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ có hai nghiệm

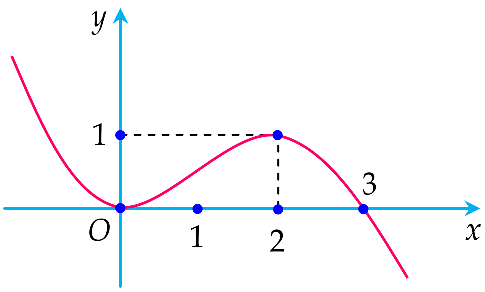
$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{4m^2-5}{2}}=4\Leftrightarrow m^2=\frac{37}{4}\Rightarrow m=\frac{\sqrt{37}}{2}$$

Vậy $m=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$.

Chọn ý C.

Bài toán 22

Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt truc hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2+2x+m)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Quan sát đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Ta thấy rằng đây là hàm bậc 3 qua 0 không đổi dấu và qua 3 đổi dấu 1 lần. Nên suy ra

$$f'(x)=k.x^2(x-3)\ (k<0)\ (\text{vì } \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty \text{ nên } k<0\ )$$

Do $f'(2)=1\Rightarrow -4k=1\Leftrightarrow k=\dfrac{-1}{4}\to f'(x)=-\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{3}{4}x^2$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{-1}{16}x^4+\dfrac{1}{4}x^3+e=-\dfrac{1}{4}x^3\left(\dfrac{1}{4}x-1\right)+e$.

Mà theo đề ta có phương trình

$$f(-x^2+2x+m)=e\Leftrightarrow(-x^2+2x+m)^3\left(\frac{-x^2+2x+m}{4}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -x^2+2x+m=0 & (1) \\ -x^2+2x+m-4=0 & (2) \end{array}\right.$$

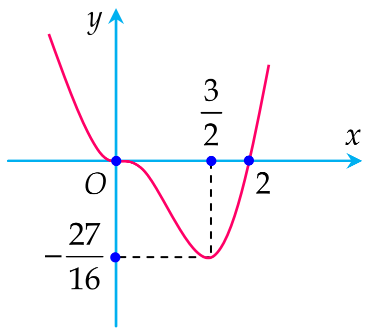
Để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=e$ có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) và (2) lần lượt có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1=1+m>0 \\ \Delta_2=1+m-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>3.$

Mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-5;5] \end{cases} \Rightarrow m\in\{4;5\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên m thoả mãn bài toán.

Chọn ý B.

Bài toán 23

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$?

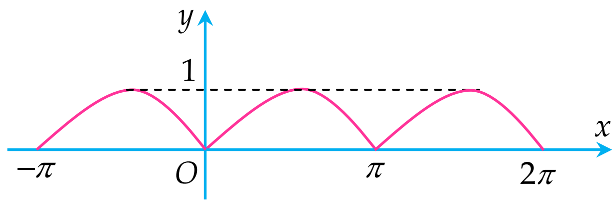


A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Xét phương trình: $f(2|\sin x|)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ (*)

Ta có đồ thị $y=|\sin x|$:



- Nếu $f\left(\frac{m}{2}\right)=\frac{-27}{16} \Leftrightarrow \frac{m}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow m=3$

$(*) \Leftrightarrow 2|\sin x|=\frac{3}{2} \Leftrightarrow |\sin x|=\frac{3}{4} \Rightarrow$ phương trình (*) có ***6 nghiệm*** thuộc $[-\pi;2\pi]$

- Nếu $-\frac{27}{16} < f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{m}{2} < 2 \\ \frac{m}{2} \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2|\sin x| = x_1 \left(x_1 \in \left(0;\frac{3}{2}\right)\right) \\ 2|\sin x| = x_2 \left(x_2 \in \left(\frac{3}{2};2\right)\right) \end{array}\right. \Rightarrow$ Phương trình $(*)$ có *12 nghiệm* thuộc $[-\pi;2\pi]$

- Nếu $f\left(\frac{m}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{m}{2} = 0 \\ \frac{m}{2} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2|\sin x| = 0 \\ 2|\sin x| = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ Phương trình $(*)$ có *7 nghiệm* thuộc $[-\pi;2\pi]$

- Nếu $f\left(\frac{m}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{m}{2} < 0 \\ \frac{m}{2} > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$

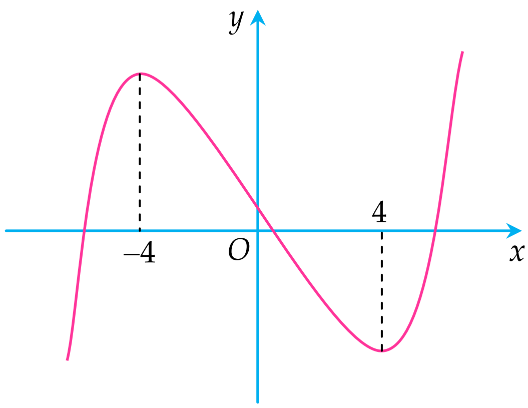
Khi đó $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2|\sin x| = x_1 (x_1 < 0) \\ 2|\sin x| = x_2 (x_2 > 2) \end{array}\right. \Rightarrow$ Phương trình $(*)$ *vô nghiệm.*

Suy ra $\begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2\}$. Vậy có tất cả 2 giá trị nguyên của m.

Chọn ý D.

Bài toán 24

Cho đồ thị hàm số là nguyên hàm của $f(x)$ có dạng $F(x) = ax^3 + bx^2 + 5x + d$. Tính diện tích tạo bởi $f(x)$ và trục hoành?



A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{50}{3}$. **D.** $\frac{70}{3}$.

Lời giải

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\Rightarrow f(x)-f'(x)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-2b)x+d-c.$$

Nhìn vào đồ thị ta có $\begin{cases} x=-2 \Rightarrow 12a-4b+c=0 \\ x=3 \Rightarrow 27a+6b+c=0 \end{cases}$ (1)

$f'(x)$ có cực trị là -4 , gọi x_0 là hoành độ của điểm cực trị thì

$$f''(x_0)=0 \Leftrightarrow 6ax_0+2b=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{-b}{3a} \text{ và } 3a.x_0^{\,2}+2bx_0+c=-5$$

$$\Rightarrow 3a.\frac{b^2}{9a^2}+2b\frac{-b}{3a}+c=-4 \Leftrightarrow -\frac{b^2}{3a}+c=-5 \text{ (2)}$$

Từ (1) $\Rightarrow a=\frac{-2}{3}b$ và $c=4b-12a$, thay vào (2) ta được

$$-\frac{b^2}{3a}+4b-12a=-5 \Leftrightarrow \frac{-b^2}{-2b}+4b+8b=-5 \Rightarrow b=\frac{-2}{5} \Rightarrow a=\frac{4}{15} \Rightarrow c=\frac{-24}{5}.$$

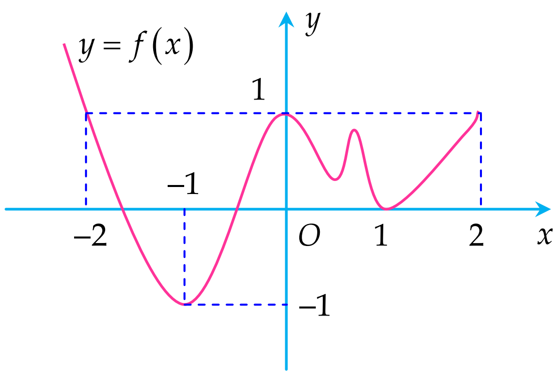
$$\Rightarrow f(x)-f'(x)=\frac{4}{15}x^3+\frac{-6}{5}x^2-4x+\frac{24}{5}=0 \text{ có nghiệm là } x_1,x_2$$

Vậy diện tích cần tìm là $\int_{x_1}^{x_2}\frac{4}{15}x^3+\frac{-6}{5}x^2-4x+\frac{24}{5}\approx 65,4$

Chọn ý B.

Bài toán 25

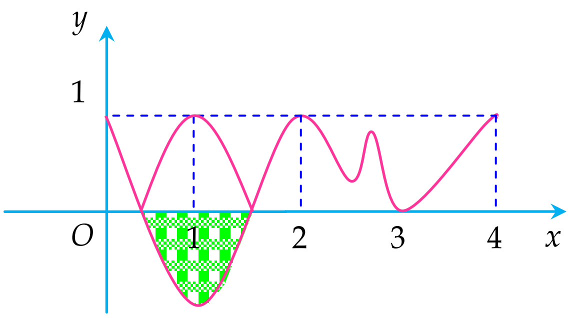
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ dưới. Hỏi phương trình $\sqrt[3]{f^2(x)-2f(x)+9}=\sqrt{|f(x-2)|+3}$ có bao nhiêu nghiệm thực trên đoạn $[-2;3]$?



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Ta có đồ thị hàm $y=|f(x-2)|$ như hình vẽ dưới (phần trên trục Ox)



Xét hàm số $y=\sqrt{|f(x-2)|+3}$ trên đoạn $[0;4]$ ta có $y=\sqrt{|f(x-2)|+3}\le 2$,

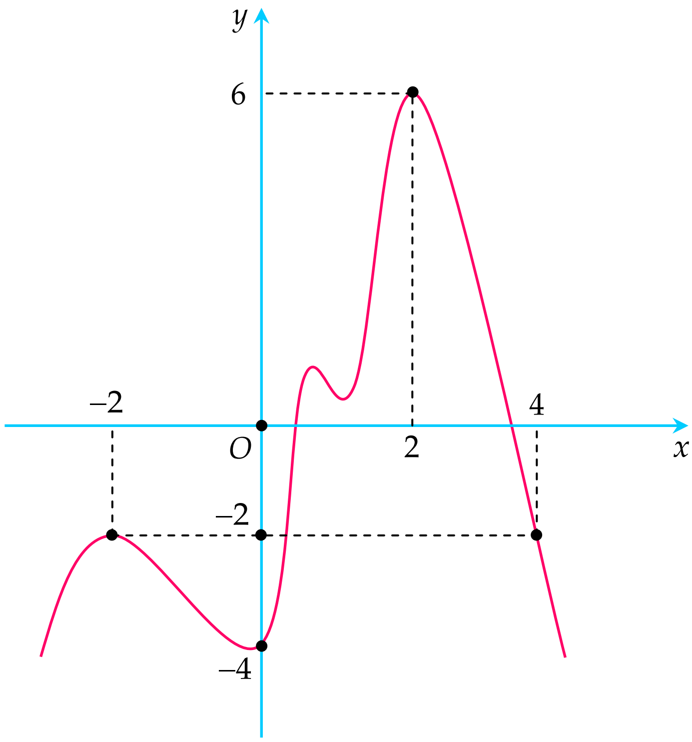
Xét hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$ ta có $\sqrt[3]{f^2(x)-2f(x)+9}=\sqrt[3]{(f(x)-1)^2+8}\ge 2$

Suy ra $VT\ge VP$ dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}|f(x-2)|=1\\ f(x)=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$

Chọn ý B.

Bài toán 26

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\frac{1}{3}f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\right)=m$ có nghiệm?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Vì $0\le|\sin x|\le 1\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{3}|\sin x|\le\frac{\pi}{3}$.

Trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ hàm số sin luôn tăng nên suy ra $\sin 0\le\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\le\sin\frac{\pi}{3}$

Hay $0 \le \sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right) \in [0;2]$

Quan sát đồ thị ta thấy $\frac{1}{3}f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\right) \in \left[-\frac{4}{3};2\right]$

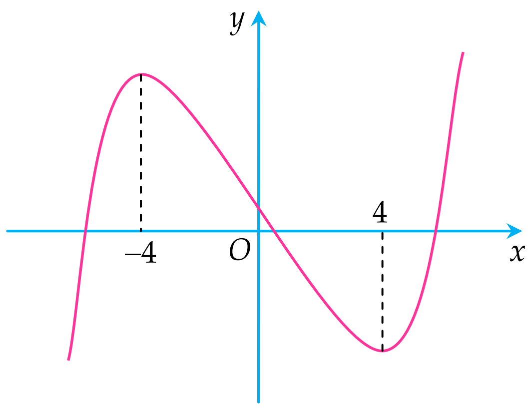
Để phương trình đầu có nghiệm thì $-\frac{4}{3} \le m \le 2$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên thoả mãn.

Chọn ý C.

Bài toán 27

Cho đồ thị hàm số là nguyên hàm của $f(x)$ có dạng $F(x) = ax^3 + bx^2 + 5x + d$. Tính diện tích tạo bởi $f(x)$ và trục hoành?



A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{50}{3}$. **D.** $\frac{70}{3}$.

Lời giải

Ta có $F(x)' = 3ax^2 + 2bx + 5$ nên $F'(0) = 5 \Leftrightarrow f(0) = 5$

Từ 2 điểm cực trị có hoành độ là -4 và 4 ta có thể vẽ đại khái đồ thị của $f(x)$ như sau

$$f(x) = mx^2 + nx + 5$$

Có $\begin{cases} x = -4 \Rightarrow 16m - 4n + 5 = 0 \\ x = 4 \Rightarrow 16m + 4n + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-5}{16} \Rightarrow f(x) = \frac{-5}{16}x^2 + 5$.

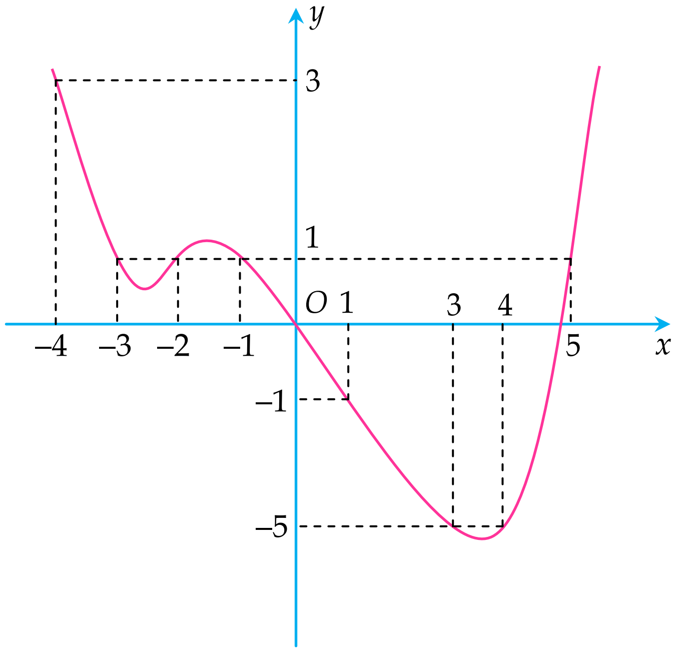
Suy ra $\int_{-4}^{4} f(x) = \int_{-4}^{4}\left(\frac{-5}{16}x^2 + 5\right) = \frac{80}{3}$.

Vậy diện tích cần tìm là $\frac{80}{3}$.

Chọn ý A.

Bài toán 28

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



A. 13 **B.** 14 **C.** 15 **D.** 16

Lời giải

Điều kiện $6x-9x^2\ge 0 \Leftrightarrow 0\le x\le \frac{2}{3}$

Với $x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$ ta có $0\le\sqrt{6x-9x^2}=\sqrt{-9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+1}\le 1$

$$\Rightarrow 0\ge -4\sqrt{6x-9x^2}\ge -4 \Leftrightarrow 3\ge 3-4\sqrt{6x-9x^2}\ge -1$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra $-5\le f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)\le 1$

Khi đó phương trình $2.f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm $\Leftrightarrow -5\le\frac{m-3}{2}\le 1\Leftrightarrow -7\le m\le 5$

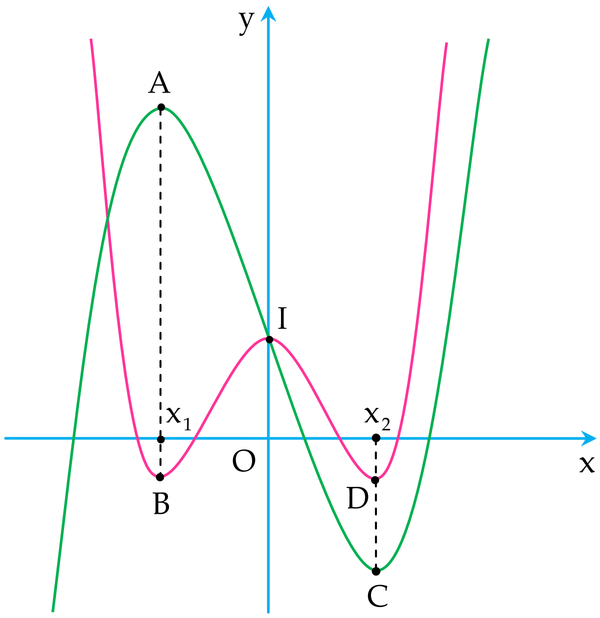
Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-7;-6;-5;-4;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$

Vậy có 13 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn ý A.

Bài toán 29

Cho hai đồ thị $(C_1): y = f(x) = x^4 + ax^2 + b$ và đồ thị hàm số $(C_2): y = g(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ như hình vẽ. Gọi B, D là hai điểm cực trị của (C_1), A và C lần lượt là hai điểm cực đại và cực tiểu của (C_2), (A và C đối xứng nhau qua điểm $U \in Oy$. Biết hoành độ A và B bằng nhau, hoành độ của C và D bằng nhau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $AB \le 3$?



A. 2 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 2ax; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{a}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = -\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$, với $a < 0, (1)$,

$g'(x) = 3x^2 + 2mx + n$

Ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$

Vì điểm $U(0;b)$ là trung điểm của AC nên $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow m = 0$

Mặt khác $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1^2 = -x_1x_2 = -\dfrac{n}{3} \Rightarrow n = -3x_1^2, (2)$,

Từ $(1),(2)$ ta suy ra $-\dfrac{n}{3} = -\dfrac{a}{2} \Rightarrow n = \dfrac{3a}{2}$

Ngoài $U(0;b) \in (C_2)$ nên suy ra $b = p$

Ta có được $\begin{cases} y_A = x_1^3 + nx_1 + p = -2x_1^3 + p = -a \cdot \sqrt{-\dfrac{a}{2}} + p \\ y_B = x_1^4 + ax_1^2 + b = -\dfrac{a^2}{4} + b \end{cases}$

Do đó $AB \le 3 \Leftrightarrow |y_B - y_A| \le 3 \Leftrightarrow \left|a\sqrt{-\dfrac{a}{2}} - \dfrac{a^2}{4}\right| \le 3, (*)$

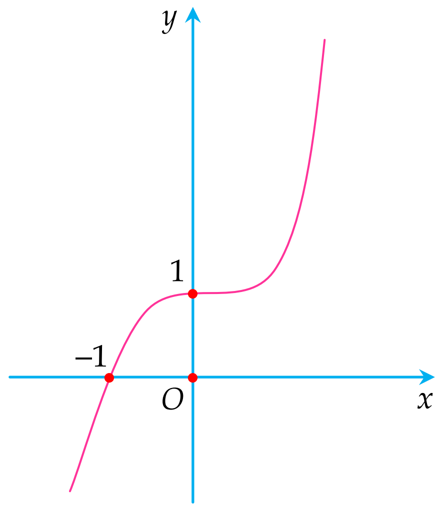
Đặt $t = \sqrt{-\dfrac{a}{2}} \Rightarrow a = -2t^2 \; (t > 0)$

Từ $(*) \Leftrightarrow |-t^4 - 2t^3| \le 3 \Leftrightarrow t^4 + 2t^3 - 3 \le 0 (t > 0)$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3 + 3t^2 + 3t + 3) \le 0 \Leftrightarrow 0 < t \le 1 \Rightarrow -2t^2 \ge -2 \Rightarrow -2 \le a < 0$$

Bài toán 30

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình

$f(16\cos^2 x + 6\sin 2x - 8) = f(n(n+1))$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$?

A. 10 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 6

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f(16\cos^2 x + 6\sin 2x - 8) = f(n(n+1)) \Leftrightarrow 16\cos^2 x + 6\sin 2x - 8 = n(n+1)$

$$\Leftrightarrow 16.\frac{1+\cos 2x}{2} + 6\sin 2x - 8 = n(n+1) \Leftrightarrow 8\cos 2x + 6\sin 2x = n(n+1)$$

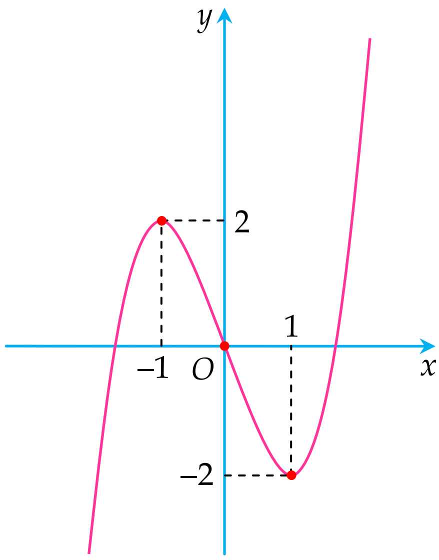
Phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 8^2 + 6^2 \ge n^2(n+1)^2 \Leftrightarrow n^2(n+1)^2 \le 100$

$$\begin{cases} n(n+1) \ge -10 \\ n(n+1) \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + n + 10 \ge 0 \\ n^2 + n - 10 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow n^2 + n - 10 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{41}}{2} \le n \le \frac{-1+\sqrt{41}}{2}$$

Vì $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{-3;-2;-1;0;1;2\}$

Bài toán 31

Cho 2 số x, y thỏa mãn $x^2+5y^2=1+4xy$ và hàm số bậc 3 $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=f\left(\dfrac{2x-3y-3}{-x+4y+4}\right)$. Tích $M.m$?



A. $\dfrac{1436}{1333}$ **B.** $\dfrac{1436}{1331}$ **C.** $\dfrac{1438}{1331}$ **D.** $\dfrac{1436}{1335}$

Lời giải

Dễ thấy $f(x)=x^3-3x$.

Từ $x^2+5y^2=1+4xy \Leftrightarrow (x-2y)^2+y^2=1$ ta đặt $\begin{cases} x-2y=\sin\alpha \\ y=\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin\alpha+2\cos\alpha \\ y=\cos\alpha \end{cases}$

Xét $t=\dfrac{2x-3y-3}{-x+4y+4}=\dfrac{2(\sin\alpha+2\cos\alpha)-3\cos\alpha-3}{-(\sin\alpha+2\cos\alpha)+4\cos\alpha+4}=\dfrac{2\sin\alpha+\cos\alpha-3}{-\sin\alpha+2\cos\alpha+4}$

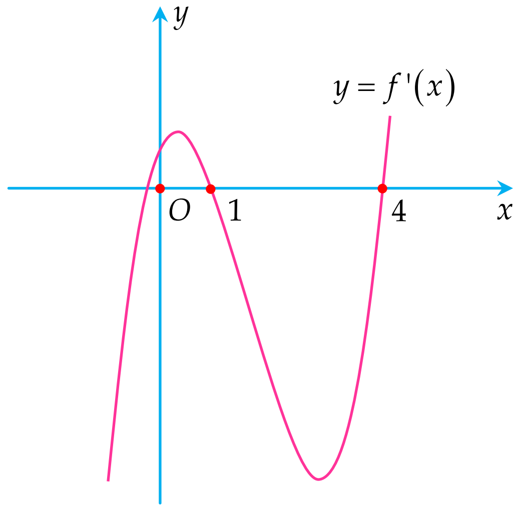
Ta có $t(-\sin\alpha+2\cos\alpha+4)=2\sin\alpha+\cos\alpha-3 \Leftrightarrow (t+2)\sin\alpha+(1-2t)\cos\alpha=4t+3\ (*)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (t+2)^2+(2t-1)^2 \ge (4t+3)^2 \Leftrightarrow -2 \le t \le \dfrac{-2}{11}$

$$\Rightarrow P=f(t)=t^3-3t\left(-2\le t\le \frac{-2}{11}\right) \Rightarrow M=2, m=\frac{718}{1331} \Rightarrow M.m=\frac{1436}{1331}.$$

Bài toán 32

Cho $f(x)$ là một đa thức hệ số thực có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới . Hàm số $g(x) = (1-m)x + m^2 - 3 \ (m \in \mathbb{R})$ thỏa mãn tính chất : mọi tam giác có độ dài là ba cạnh là a,b,c thì có các số $g(a), g(b), g(c)$ là ba cạnh của một tam giác. Khẳng định nào sau đây đúng về hàm số $y = f\left[(mx+m-1)^2\right] - e^{mx+1}$



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{4}{3};-1\right)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(4;9)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ và đồng biến trên khoảng $(4;9)$

Lời giải

Ta có a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b-c > 0 \\ c+b-a > 0 \\ a+c-b > 0 \end{cases} \ (*)$

Ba số $\alpha a+\beta, \alpha b+\beta, \alpha c+\beta \, (\alpha,\beta \in R)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a+\beta > 0 \\ \alpha b+\beta > 0 \\ \alpha c+\beta > 0 \\ \alpha(a+b-c)+\beta > 0 \\ \alpha(a+b-c)+\beta > 0 \\ \alpha(a+b-c)+\beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \ge 0 \\ \beta \ge 0 \\ \alpha^2+\beta^2 > 0 \end{cases}$$

Áp dụng vào bài toán

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} 1-m\geq 0 \\ m^2-3\geq 0 \\ 1-m+m^2-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq -\sqrt{3} \Leftrightarrow m\leq -\sqrt{3}$

Với $m\leq \sqrt{3}$ thì hàm số $y=-e^{mx+1}$ đồng biến trên R

Xét hàm số $y=f\left[(mx+m-1)^2\right]$ có $y'=2m\cdot(mx+m-1).f'\left[(mx+m-1)^2\right]$

Ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx+m-1=0 \\ mx+m-1=\pm 1 \\ mx+m-1=\pm 2 \end{array}\right.$.

Do $m\leq \sqrt{3}$ nên phương trình $y'=0$ có 5 nghiệm phân biệt .

$$x_1=\frac{3-m}{m}<x_2=\frac{2-m}{m}<x_3=\frac{1-m}{m}<x_4=-1<x_5=\frac{-1-m}{m}.$$

Bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y=f\left[(mx+m-1)^2\right]$ như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

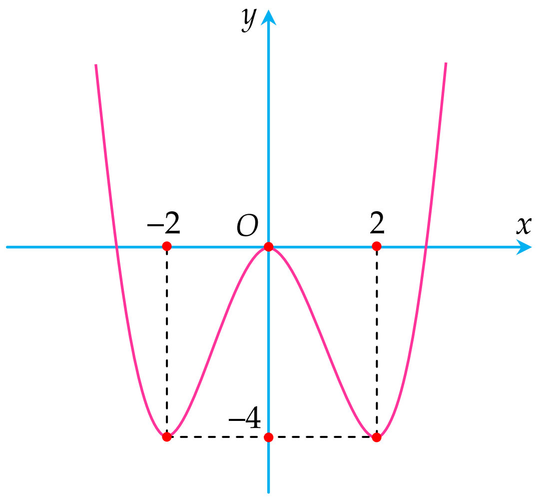
Suy ra hàm số $h(x)=f\left[(mx+m-1)^2\right]-e^{mx+1}$ đồng biến trên các khoảng

$$\left(\frac{3-m}{m};\frac{2-m}{m}\right);\left(\frac{1-m}{m};-1\right);\left(\frac{-1-m}{m};+\infty\right)$$

Với $m\leq \sqrt{3}$ thì $\left(-\frac{4}{3};-1\right)\subset\left(\frac{1-m}{m};-1\right)$ và $(1;+\infty)\subset\left(\frac{-1-m}{m};+\infty\right)$ nên A đúng và B,C,D sai

Bài toán 33

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;2)$ khi và chỉ khi :

$$3^{f(x)+m}+4^{f(x)+m}\leq 5f(x)+2+5m$$

A. $-f(-1)<m<1-f(2)$ **B.** $-f(2)<m<1-f(-1)$

C. $-f(2)<m<1-f(-1)$ **D.** $-f(2)\leq m\leq 1-f(-1)$

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số suy ra bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	$-$		
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(2) < f(x) < f(-1), \forall x \in (-1;2)$

$$\Rightarrow f(2)+m < f(x)+m < f(-1)+m, \forall x \in (-1;2)$$

Đặt $t = f(x)+m \Rightarrow f(2)+m < t < f(-1)+m, \forall x \in (-1;2)$

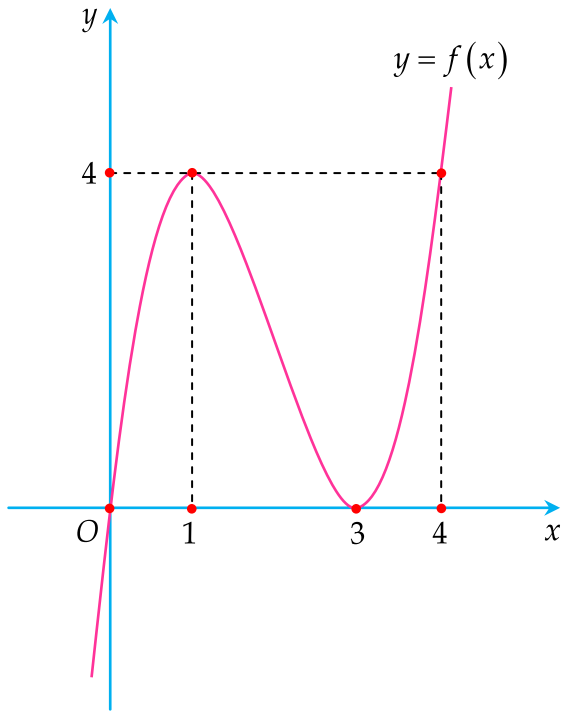
Giả thiết tương đương $3^t + 4^t \le 5t+2 \Leftrightarrow 3^t + 4^t - 5t - 2 \le 0$ (1)

Xét phương trình $3^t + 4^t - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right.$

Dùng phương pháp xét dấu $(1) \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Rightarrow \begin{cases} f(2)+m \ge 0 \\ f(-1)+m \le 1 \end{cases} \Rightarrow -f(2) \le m \le 1 - f(-1)$

Bài toán 34

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \left(a,b,c,d \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ :



Phương trình $f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt

A. 12 **B.** 40 **C.** 41 **D.** 16

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $f(x)=ax(x-3)^2$ đi qua điểm $A(1;4)$

$$\Rightarrow 4=4a \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x)=x^3-6x^2+9x$$

- $x<0 \Rightarrow f(x)<0 \Rightarrow f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)<0$ $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm
- $x>4 \Rightarrow f(x)>4 \Rightarrow f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)>4$ $\Rightarrow$Phương trình vô nghiệm
- Với $x\in[0;4]$ đặt $x=2+2\cos t$ $\left(t\in[0;\pi]\right)$

$\Rightarrow f(x)=(2+2\cos t)^2-6(2+2\cos t)^2+9(2+2\cos t)=8\cos^3 t-6\cos t+2=2(\cos 3t+1)$

Ta chứng minh được $f^{n}(x)=2\left(\cos\left(3^{n}\right)+1\right)$ với $f^{n}(x)=f\left(f\left(f\left(f\left(f....\right)\right)\right)\right)$

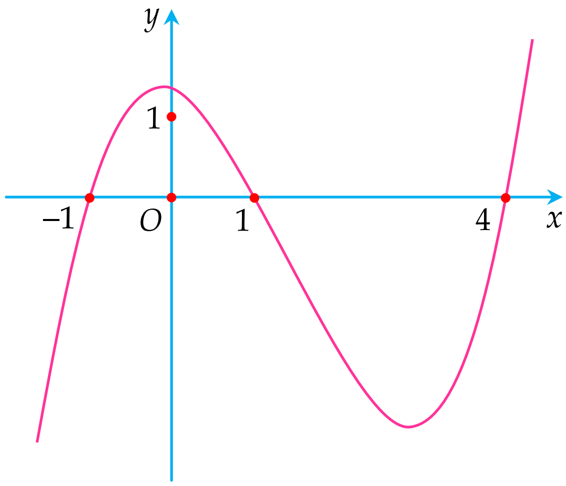
$$\Rightarrow f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)=2\left(\cos\left(3^4 t\right)+1\right)=2\left(\cos(81t)+1\right)$$

Có $f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)=0 \Leftrightarrow 2\left(\cos(81t)+1\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{81t}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{81t}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow t=\frac{\pi(2k+1)}{81}$

Do $t\in[0;\pi] \Rightarrow 0\le \frac{\pi(2k+1)}{81}\le \pi \Leftrightarrow 0\le k\le 40$. Vậy có 41 giá trị

Bài toán 35

Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau đây có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$

$$2019f\left(\sqrt{15x^2-30x+16}\right)-m\sqrt{15x^2-30x+16}-m=0$$

A. 1513 **B.** 1512 **C.** 1515 **D.** 1514

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{15x^2-30x+16}, x\in[0;2]$

Ta cos $t'(x)=\frac{30(x-1)}{2\sqrt{15x^2-30x+16}}; t'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $1\le t\le 4$

Với mỗi $t \in (1;4]$ cho ta 2 nghiệm $x \in [0;2]$

Khi đó phương trình đề cho trở thành

$$2019f(t) = m(t+1) \Leftrightarrow 2019\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{4}{3}\right) = m(t+1)$$

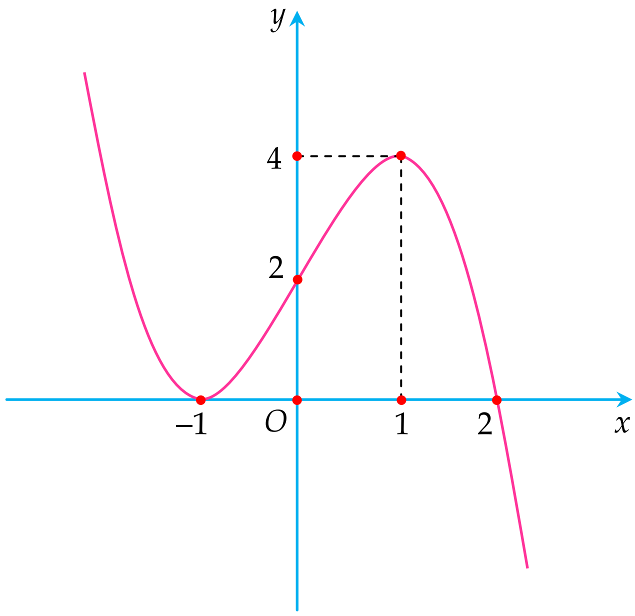
$$\Leftrightarrow 673(t+1)(t-1)(t-4) = m(t+1) \Leftrightarrow (t-1)(t-4) = \frac{m}{673}$$

Xét $g(t) = (t-1)(t-4), t \in (1;4]$, lập bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2] \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < \frac{m}{673} < 0 \Rightarrow -1514,25 < m < 0$

Vậy có 1514 giá trị nguyên m

Bài toán 36

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(-1) = \frac{13}{4}, f(2) = 6$. Tổng các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng?

A. $\frac{1573}{64}$ **B.** 198 **C.** $\frac{37}{4}$ **D.** $\frac{14245}{64}$

Lời giải

Bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$	$\nearrow$	6

Ta có $g'(x)=3f^2(x)f'(x)-3f'(x)$

Xét trên đoạn $[-1;2]$ có $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3f'(x)\left[f^2(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

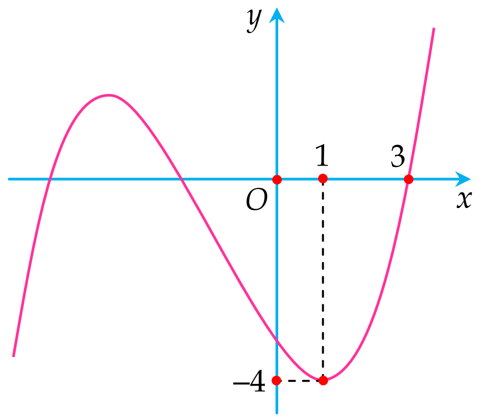
Bảng biến thiên

x	-1		2
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(2)$

Suy ra $\min\limits_{[-1;2]} g(x)=g(-1)=f^3(-1)-3f(-1)=\frac{1573}{64}$

Bài toán 37

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f\left(e^x\right)<m\left(3e^x+2019\right)$ có nghiệm $x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m>-\frac{4}{1011}$ **B.** $m\geq\frac{4}{3e+2019}$ **C.** $m>-\frac{2}{1011}$ **D.** $m>\frac{f(e)}{3e+2019}$

Lời giải

Đặt $e^x=t\,(t>0)$. Ta đưa bất phương trình đã cho thành bất phương trình ẩn t. từ đó lập luận để có phương trình ẩn t có nghiệm thuộc $(1;e)$

Ta chú ý rằng hàm số $y=f(x)$ với $y=f(t)$ có tính chất giống nhau nên từ đồ thị hàm số đã cho ta suy ra tính chất hàm $f(t)$

Sử dụng phương pháp hàm số để tìm m sao cho bất phương trình có nghiệm

Bất phương trình $m>f(x)$ có nghiệm trong $(a;b)$ khi $m>\min\limits_{[a;b]} f(x)$

Cách giải

Xét bất phương trình $f\left(e^x\right)<m\left(3e^x+2019\right)$ (*)

Đặt $e^x=t(t>0)$ với $x\in(0;1)\Rightarrow t\in\left(e^0;e^1\right)\Rightarrow t\in(1;e)$

Ta được bất phương trình $f(t)<m(3t+2019)\Leftrightarrow m>\dfrac{f(t)}{3t+2019}(1)$

Ta xét hàm $g(t)=\dfrac{f(t)}{3t+2019}$ trên $t\in(1;e)$ $\Rightarrow g'(x)=\dfrac{f'(t)(3t+2019)-3f(t)}{(3t+2019)^2}$

Thấy đồ thị hàm số $y=f(t)$ có tính chất giống với đồ thị hàm số $y=f(x)$ nên trên khoảng đang xét $f(t)<0$ và đồ thị hàm số đi lên từ trái qua phải hay hàm số đồng biến trên $(1;e)$ nên $f'(t)>0$

Từ đó $g'(t)>0$ với $t\in(1;e)$ hay hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(1;e)$

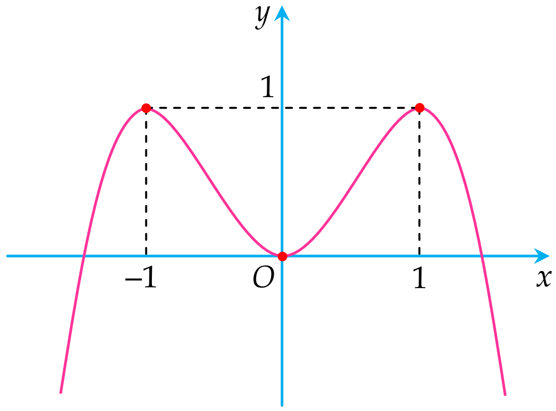
Ta có bảng biến thiên của $g(t)$ trên $[1;e]$

t	1		2
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	$-\dfrac{2}{1011}$	$\nearrow$	$g(e)$

Từ bảng biến thiên ta thấy để $m>\dfrac{f(t)}{3t+2019}$ có nghiệm $t\in(1;e)$ thì $m>-\dfrac{2}{1011}$

Bài toán 38

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $\dfrac{f(x)}{36}+\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}>m$ đúng với mọi $x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\le\dfrac{f(1)+9}{36}$

B. $m<\dfrac{f(1)+9}{36}$

C. $m\le\dfrac{f(1)}{36}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$

D. $m<\dfrac{f(1)}{36}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$

Lời giải

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{36}+\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. Cần chứng minh $m<g(x),\forall x\in(0;1)$. Xét $g(x)$ trên $(0;1)$

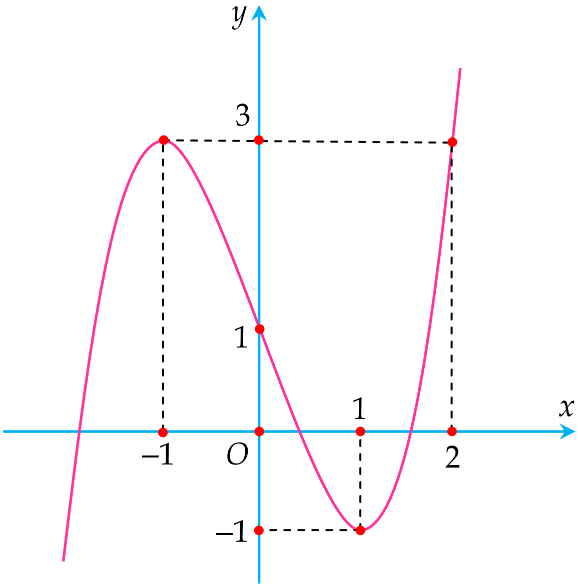
$\Rightarrow g(x)=\dfrac{f(x)}{36}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$, có $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{36}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2}<0$

Do $f'(x)\le 1,\sqrt{x+3}<2$

Suy ra $m\le\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\dfrac{f(1)}{36}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{f(1)+9}{36}$

Bài toán 39

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt hàm số $y=g(x)=f\left(2x^3+x-1\right)+m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

A. $m=-13$ **B.** $m=3$ **C.** $m=-12$ **D.** $m=-1$

Lời giải

Ta có $g'(x)=\left[f\left(2x^3+x-1\right)+m\right]'=f'\left(2x^3+x-1\right)\left(6x^2+1\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(2x^3+x-1\right)=0 \\ 6x^2+1=0\,(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3+x-1=1 \\ 2x^3+x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=0 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên như sau

t	0		a		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$g(0)$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$g(1)$

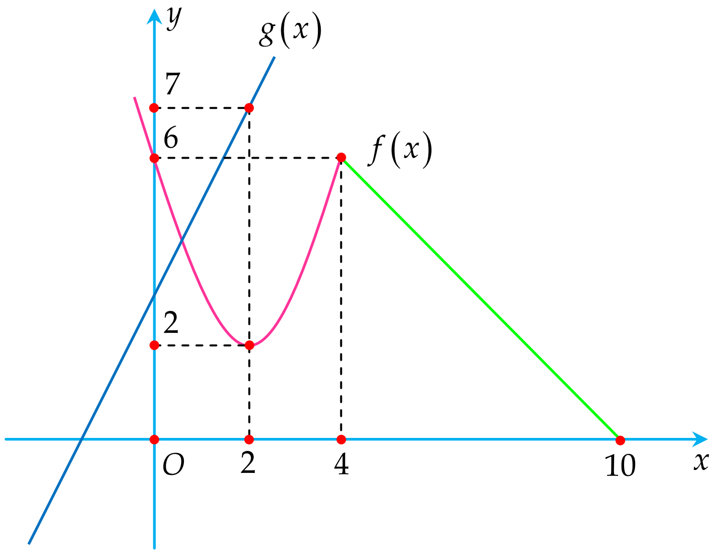
Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$ hoặc $x=1$

Có $g(0)=f(-1)+m=m+3; g(1)=f(2)+m=m+3$

Mà $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10 \Leftrightarrow m+3=-10 \Leftrightarrow m=-13$.

Bài toán 40

Cho hàm số $f(x), g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Tính $h'(2)$



A. $h'(2)=\dfrac{4}{49}$ **B.** $h'(2)=-\dfrac{4}{49}$ **C.** $h'(2)=\dfrac{2}{7}$ **D.** $h'(2)=-\dfrac{2}{7}$

Lời giải

Xét $x\in(-\infty;4)$.

Ta có đồ thị $y=g(x)$ là đường thẳng nên $g(x)$ có dạng $g(x)=ax+b$ và đồ thị $y=g(x)$ đi qua hai điểm $(0;3)$ và $(2;7)$ nên $g(x)=2x+3$.

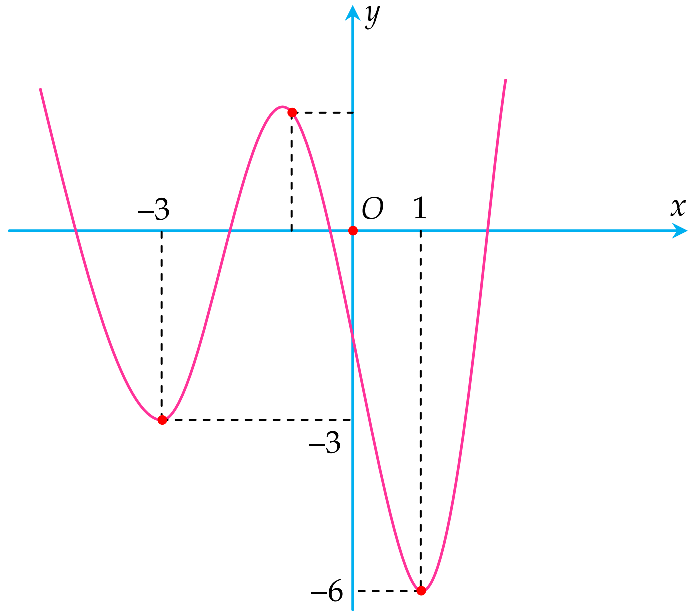
Ta có đồ thị $y=f(x)$ là *parabol* nên $f(x)$ có dạng $f(x)=cx^2+dx+e$ và đồ thị $y=f(x)$ đi qua điểm $(0;6)$ và có đỉnh là $(2;2)$ nên $f(x)=x^2-4x+6$.

Suy ra $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-4x+6}{2x+3}$ khi $x\in(-\infty;4)$.

Ta có $h'(x)=\dfrac{(2x-4)(2x+3)-2(x^2-4x+6)}{(2x+3)^2}$ mà $2\in(-\infty;4)$ nên $h'(2)=-\dfrac{4}{49}$.

Bài toán 41

Hình vẽ là đồ thị $y=f(x)$.



Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình

$$-f^2(x+1)\left|f(x+1)\right|+3\left|f(x+1)\right|+2=m\left(f^2(x+1)+2\left|f(x+1)\right|+1\right)$$

Có nghiệm trên $[-4;-2]$ là đoạn $[a;b]$. Khi đó $2a+3b$ bằng?

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Đặt $h=x+1, x\in[-4;-2]\Rightarrow h\in[-3;-1]\Rightarrow -3\le f(h)\le 2\Rightarrow 0\le\left|f(h)\right|\le 3$

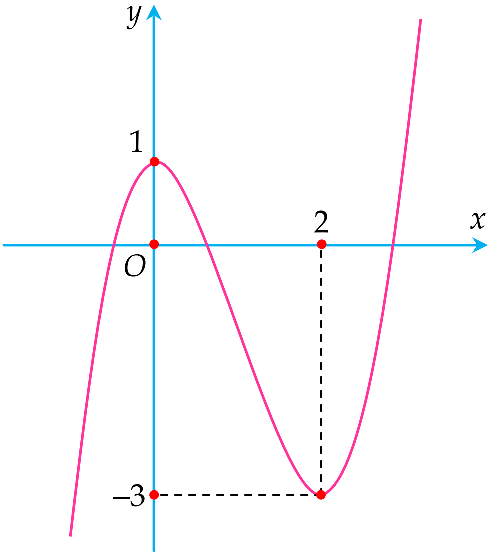
Đặt $t=\left|f(x+1)\right|, t\in[0;3]$

Khi đó $-t^3+3t+2=m\left(t^2+2t+1\right)\Leftrightarrow (t+1)^2(2-t)=m(t+1)^2\Rightarrow t=2-m$

Suy ra $0\le 2-m\le 3\Leftrightarrow -1\le m\le 2\Rightarrow 2a+3b=4$.

Bài toán 42

Cho hàm số $y = ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d\,(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \frac{a}{4}x^4 + (a+b)x^3 + (3b-c)x^2 + (d-2c)x + d - 2019$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(0;2)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(2;+\infty)$

Lời giải

Ta có $y' = 3ax(x-2) \Rightarrow y = ax^3 - 3ax^2 + d$

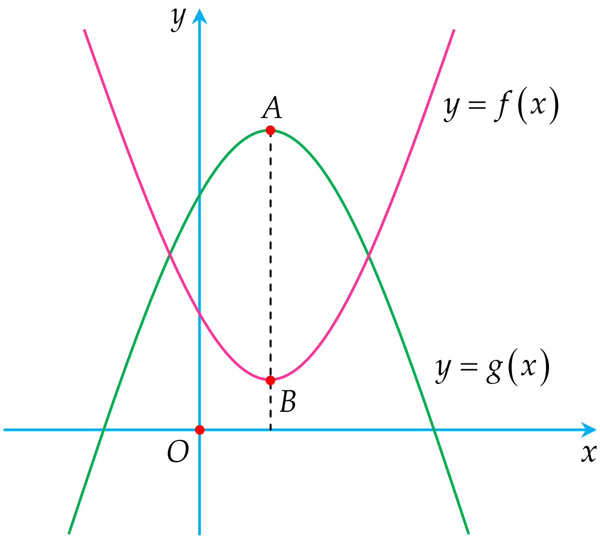
Dựa vào đồ thị ta có $y(0) = 1 \Rightarrow d = 1; y(2) = -3 \Rightarrow -4a + d = -3 \Rightarrow a = 1$

Suy ra $y = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow b = -1, c = 0$

$\Rightarrow y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x - 2018 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

Bài toán 43

Cho hai hàm đa thức $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ bên.

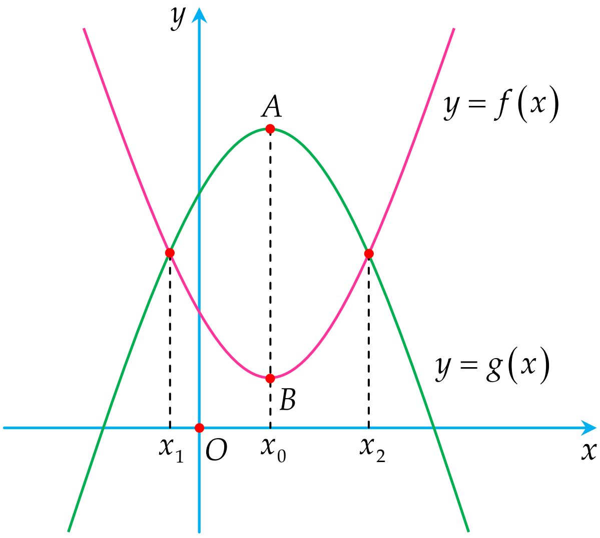


Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y = g(x)$

có đúng một điểm cực trị là B và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left||f(x)-g(x)|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải



Ta đặt $h(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow h(x)=0$ có hai nghiệm $x_1<x_2$.

Ta có $h'(x)=f'(x)-g'(x)\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0,\ (x_1<x_0<x_2),\ h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=-\frac{7}{4}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=|h(x)|$ là:

x	$-\infty$		x_1		x_0		x_2		$+\infty$
$\lvert h(x)\rvert'$		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	
$\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

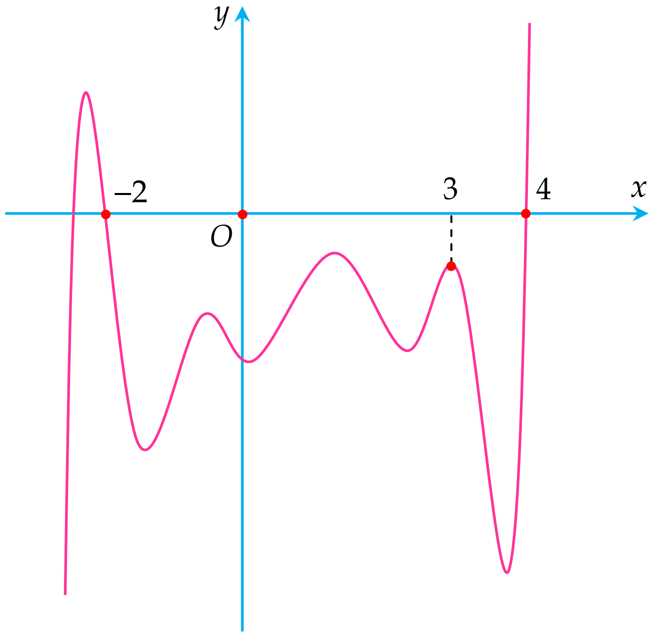
Do đó hàm số $y=|h(x)|+m$ cũng có ba điểm cực trị, Vì số điểm cực trị hàm số $y=\left||h(x)|+m\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=|h(x)|+m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $|h(x)|+m=0$, mà hàm số $y=|h(x)|+m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y=\left||h(x)|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị khi phương trình $|h(x)|+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ)

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=|h(x)|$, phương trình $|h(x)|+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi $-m\ge\frac{7}{4}\Leftrightarrow m\le-\frac{7}{4}$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\le-\frac{7}{4}$ và $m\in(-5;5)$ nên $m\in\{-4;-3;-2\}$.

Bài toán 44

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(x)\ge\dfrac{2^{f(x)-m}+5^{f(x)-m}-2+27m}{27}$ nghiệm đúng với $x\in(-2;3)$

A. $f(3)\le m\le f(3)+1$

B. $f(-2)+1\le m\le f(3)$

C. $f(-2)-2\le m\le f(3)$

D. $f(3)\le m\le f(-2)-2$

Lời giải

Ta có với $x\in(-2;3)$ thì $f'(x)<0$

Ta có $f(3)<f(x)<f(-2), \forall x\in(-2;3)$; $f(3)-2m<f(x)-m<f(-2)-m$

Đặt $t=f(x)-m \Rightarrow f(3)-m<t<f(-2)-m$

Ta có $f(x)\ge\dfrac{2^{f(x)-m}+5^{f(x)-m}-2+27m}{27}$

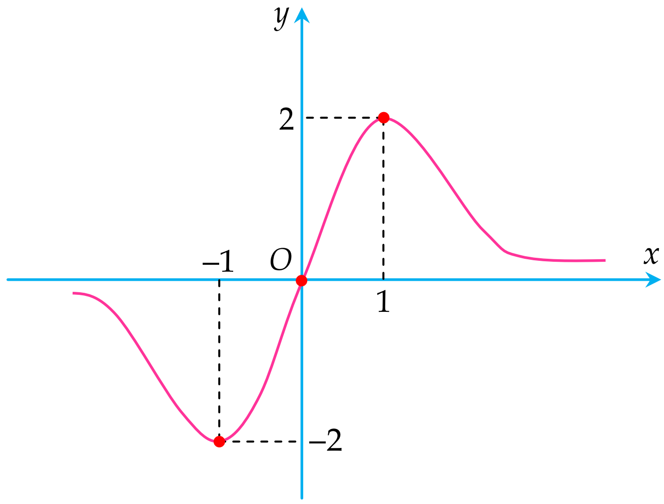
$$\Leftrightarrow 2^{f(x)-m}+5^{f(x)-m}-2-27(f(x)-m)\le0 \Leftrightarrow 2^t+5^t-27t-2\le0$$

Vế trái chỉ có 2 nghiệm $t=0;t=2$

Ta có $0 \le t \le 2 \Rightarrow \begin{cases} f(3) - m \ge 0 \\ f(-2) - m \le 2 \end{cases} \Rightarrow f(-2) - 2 \le m \le f(3)$

Bài toán 45

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới:



Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $0 < m < 2$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $1 < m$ **D.** $m < 0$.

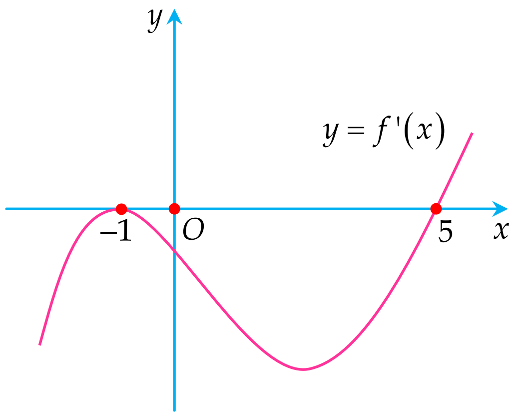
Lời giải

Ta có $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}} \Leftrightarrow f(x) = 2^{2m+1}$

Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow 2^{2m+1} < 2 \Leftrightarrow m < 0$.

Bài toán 46

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Để hàm số $y = f(2x^3 - 6x + 3)$ đồng biến với mọi $x > m$ $(m \in R)$ thì $m \ge a\sin\frac{b\pi}{c}$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*, c > 2b$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tổng $S = 2a + 3b - c$ bằng

A. 7 **B.** –9. **C.** –2. **D.** 5.

Lời giải

Đặt $g(x)=f\left(2x^3-6x+3\right)$, ta có $y'=g'(x)=\left(6x^2-6.\right)f\left(2x^3-6x+3\right)$

Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ f'\left(2x^3-6x+3\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1<0\\ f'\left(2x^3-6x+3\right)<0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ 2x^3-6x+3\ge 5\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1<0\\ 2x^3-6x+3<5\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ 2x^3-6x+3\ge 5\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1<0\\ 2x^3-6x+3<5\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ 2x^3-6x-2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1>0\\ 2x^3-6x-2<0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow x\in(-\infty;-1,53)\cup(-1;-0,35)\cup(1;1,88)$$

Xét phương trình $x^3-3x=1$. Với $|x|>2$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $|x|\le 2$. Đặt $x=2\cos t\Rightarrow 8\cos^3 t-6\cos t=1\Leftrightarrow \cos 3t=\dfrac{1}{2}$ ta được phương trình có 3 nghiệm $x=2\cos\dfrac{\pi}{9};x=2\cos\dfrac{5\pi}{9};x=2\cos\dfrac{7\pi}{9}$ suy ra phương trình $y'=0$ có 6 nghiệm

$$x_1=-2\ ;x_2=2\cos\frac{7\pi}{9};\ x_3=-1;x_4=2\cos\frac{5\pi}{9};x_5=1;x_6=2\cos\frac{\pi}{9}$$

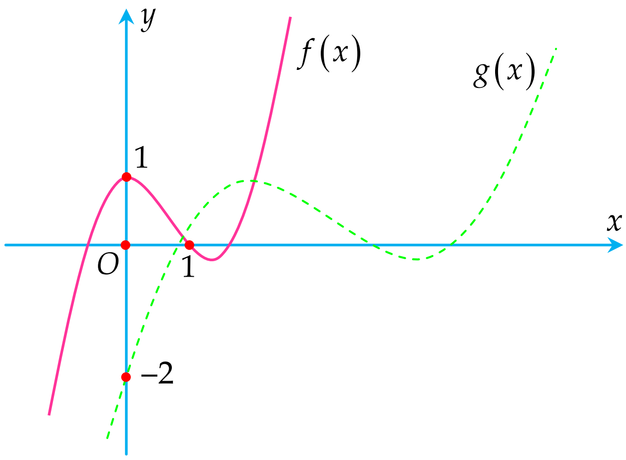
Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(2\cos\dfrac{7\pi}{9};-1\right);\left(2\cos\dfrac{5\pi}{9};1\right);\left(2\cos\dfrac{\pi}{9};+\infty\right)$

Hàm số đồng biến với mọi $x>m(m\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(m;+\infty)\subset\left(2\cos\dfrac{\pi}{9};+\infty\right)\Leftrightarrow m\ge 2\cos\dfrac{\pi}{9}=2\sin\dfrac{7\pi}{18}$

Vậy $a=2;b=7;c=18$

Bài toán 47

Cho hàm số $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ và $g(x)=f(mx+n)$ có đồ thị như hình vẽ :



Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng k, hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng $2k$. Giá trị biểu thức $2m+n$ là

A. 3 **B.** 0 **C.** -1 **D.** 5

Lời giải

Ta có $f(x)=x^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3x^2+2bx+c$

Hàm số đạt cực trị $x=0$ tại và đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$ nên

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=1 \\ f(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3-2x^2+1$$

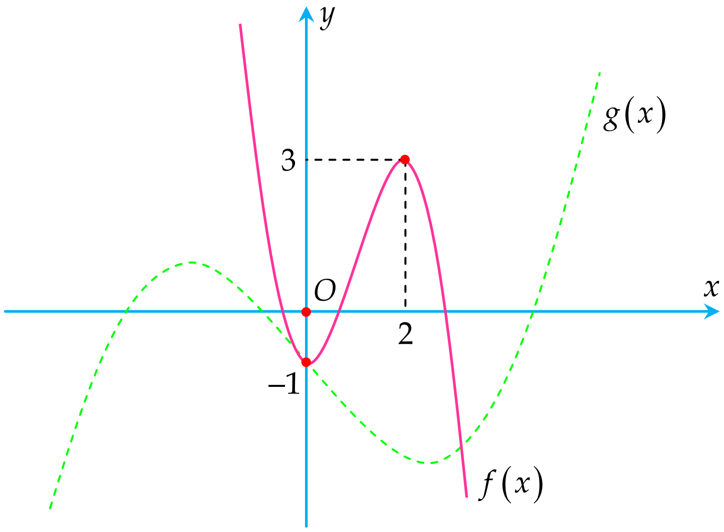
Hàm số $f(x)$đồng biến trên khoảng có độ dài bằng k, hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng $2k$ suy ra $m=\frac{1}{2}$

Ta có $g(x)=(mx+n)^3-2(mx+n)^2+1$. Hệ số tự do bằng n^3-2n^2+1 Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục tung tại điểm $(0;-2)$ nên $n^3-2n^2+1=-2 \Rightarrow n^3-2n^2+3=0 \Rightarrow n=-1$

Vậy $2m+n=0$

Bài toán 48

Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x)=-f(mx+n),(m;n\in\mathbb{Q})$ có đồ thị hàm số như hình vẽ :



Hàm số $g(x)$nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5. Giá trị biểu thức $3m+2n$ là

A. -5 **B.** $-\frac{13}{5}$ **C.** $\frac{16}{5}$ **D.** 4

Lời giải

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Hàm số đạt cực trị tại $x=0;x=2$ và đồ thị hàm số qua điểm $(0;-1),(2;3)$ nên

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \\ f(0)=-1 \\ f(2)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=0 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x^3+3x^2-1$$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên độ dài khoảng đồng biến bằng 2

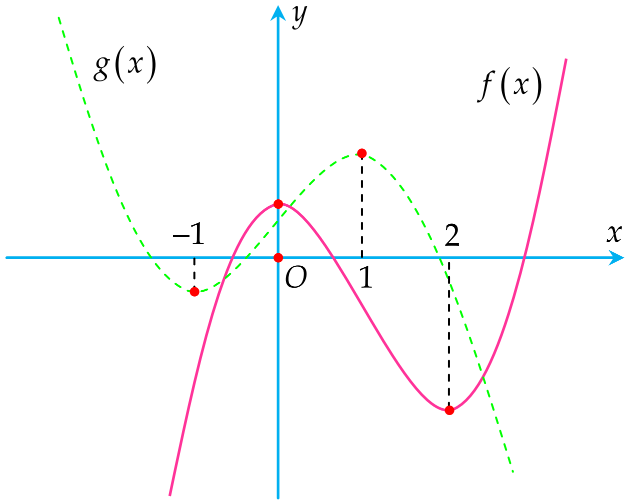
Hàm số $g(x)=-f(mx+n)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5 nên $g(x)=f(mx+n)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 5 suy ra $m=\frac{2}{5}$

Ta có $g(x)=-\left[-(mx+n)^3+3(mx+n)^2-1\right]$ .Hệ số tự do bằng : n^3-3n^2+1 Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$nên $n^3-3n^2+1=-1 \Rightarrow n^3-3n^2+2=0 \overset{n\in\mathbb{Q}}{\Rightarrow} n=1$

Vậy $3m+2n=\frac{16}{5}$

Bài toán 49

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Biết rằng hai hàm số $y=f(-2x+1)$ và $y=3g(ax+b)$ có cùng khoảng đồng biến.Giá trị biểu thức $a+2b$ là

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 6

Lời giải

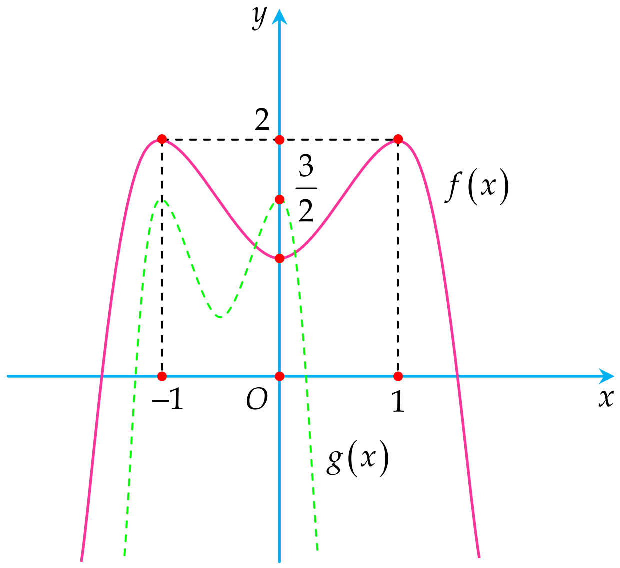
Ta có hàm số $f(x)$nghịch biến trong khoảng $(0;2)$nên hàm số $f(-2x)$đồng biến trong khoảng $(-1;0)$. Hàm số $y=f(-2x+1)=f\left(-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Để hàm số $y=3g(ax+b)$ có cũng đồng biến trong khoảng $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$ thì $y=g(ax+b)$đồng biến trong khoảng $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Mà hàm số $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(-1;1) \Rightarrow a=\dfrac{1-(-1)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2;b=0 \Rightarrow a+2b=2$

Bài toán 50

Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ và $g(x)=f(mx+n)+p,(m;n;p\in\mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị biểu thức $m+n-2p$ là

A. 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Ta có giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là 2 và giá trị lớn nhất của của hàm số $g(x)$ là $\frac{3}{2}$

Suy ra $p=\frac{-1}{2}$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại là $(-1;2),(1;2)$ và 1 điểm cực tiểu là $(0;1)$nên

$$\begin{cases} f'(-1)=f'(1)=0 \\ f(-1)=f(1)=2 \\ f(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x^4+2x^2+1$$

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $2k$ thì hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng k

Tương tự đối với hàm $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $2h$ thì hàm số cũng nghịch biến trên khoảng h. Suy ra $m=2$

Ta có $g(x)=-(mx+n)^4+2(mx+n)^2+\frac{1}{2}$ có hệ số tự do là $-n^4+2n^2+\frac{1}{2}$.

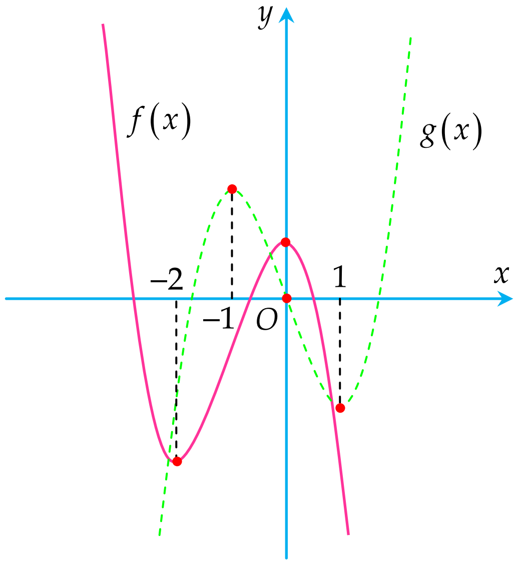
Đồ thị hàm số $y=g(x)$ đi qua điểm $\left(0;\frac{3}{2}\right);\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ nên $n=1$

Vậy $m+n-2p=4$

Chọn A

Bài toán 51

Cho hai hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ:



Biết rằng hai hàm số $y=3f\left(3x-1\right)$ và $y=2f\left(ax+b\right)$ có cùng khoảng đồng biến. Giá trị biểu thức $2a+b$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** −6

Lời giải

Ta có hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-2;0\right)$ nên hàm số $y=f\left(3x\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(-\frac{2}{3};0\right)$. Hàm số $y=f\left(3x-1\right)=f\left(3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right)$

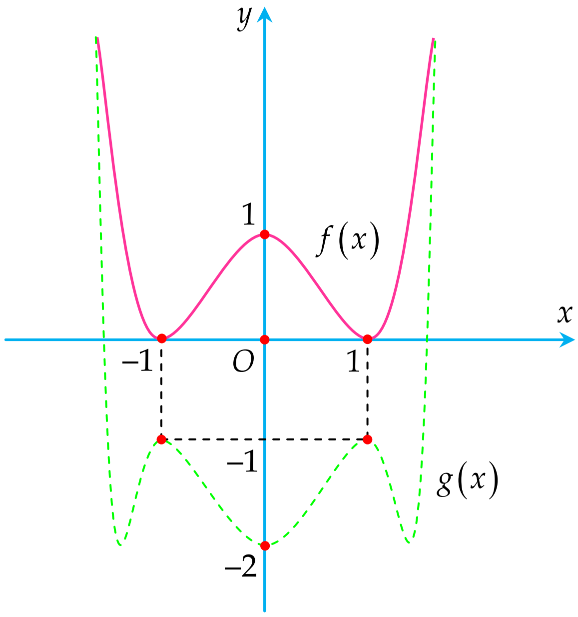
Suy ra hàm số $y=3f\left(3x-1\right)$ cũng đồng biến trong khoảng $\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Để hàm số $y=2g\left(ax+b\right)$ cũng đồng biến trong khoảng $\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right)$ thì hàm số $y=g\left(ax+b\right)$ đồng biến trong khoảng $\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Mà hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trong khoảng $\left(-1;1\right)$ nên $a=-\dfrac{1-\left(-1\right)}{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-3, b=0$

Bài toán 52

Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ và $g(x)=f\left(mx^2+nx+p\right)+q,\left(m;n;p;q\in\mathbb{Q}\right)$ có đồ thị như hình vẽ:



Giá trị của biểu thức $m+2n+3p-4q$ là

A. 4 **B.** -2 **C.** 8 **D.** 6

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số có 2 điểm cực tiểu $(-1;0)$, $(1;0)$ và 1 điểm cực đại $(0;1)$ nên

$$\begin{cases} f(-1)=f(1)=0 \\ f(0)=1 \\ f'(1)=f'(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+1 \\ c=1 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất của là 0 và giá trị nhỏ nhất của là -2

Suy ra $q=-2$

Đồ thị hàm số $g(x)=f\left(mx^2+nx+p\right)+q$ nhận trục tung làm trục đối xứng thì đồ thị hàm số $y=mx^2+nx+p$ cũng nhận trục tung làm trục đối xứng $\Rightarrow \dfrac{-n}{2m}=0\Rightarrow n=0$

Ta có khi hàm số $f(x)$ đồng biến $(-1;0)$ và nghịch biến $(0;1)$ thì hàm số $g(x)$ lại nghịch biến $(-1;0)$ và đồng biến $(0;1)\Rightarrow m=1$

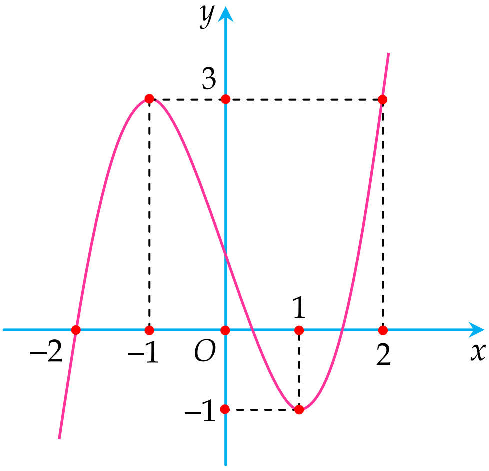
Hàm số đạt cực trị tại $x=1\Rightarrow g'(-1)=0\Leftrightarrow 2(-1)f'(1+p)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=0 \\ p=-1 \\ p=-2 \end{array}\right.$

Ta có $g(x)=\left(x^2+p\right)^4-2\left(x^2+p\right)^2-1$ có hệ số tự do là p^4-2p^2-1. Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua điểm $(0;-2)$ nên $p^4-2p^2-1=-2\Leftrightarrow p=\pm1$

Suy ra $p=-1\Rightarrow m+2n+3p-4q=6$

Bài toán 53

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4-x}\right)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là



A. $[-1;3]$ **B.** $\left[-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$ **C.** $\left(-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$ **D.** $(-1;3]$

Lời giải

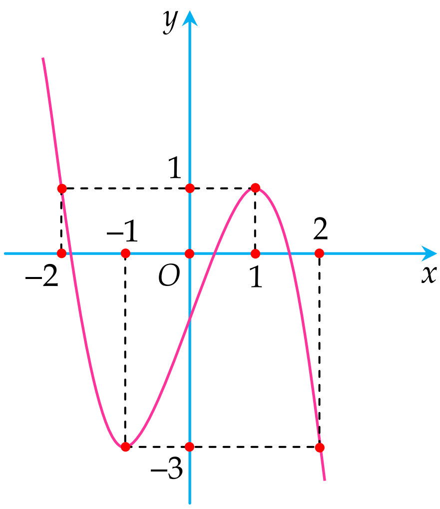
Một bài toán đồ thị hàm ẩn rất quen thuộc, có lẽ ta không cần bàn đến nó nhiều nữa !

Đặt $\sqrt{4-x}=t$, ta có $t'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, rõ ràng $t'=0\Leftrightarrow x=0$

Phương trình tương đương với $f\left(t\right)=m$. Cần tìm m để phương trình này có nghiệm $t\in\left(1;2\right)$. Tập giá trị của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left(1;2\right]$ là $\left(-1;3\right]$.

Bài toán 54

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(2-f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?



A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

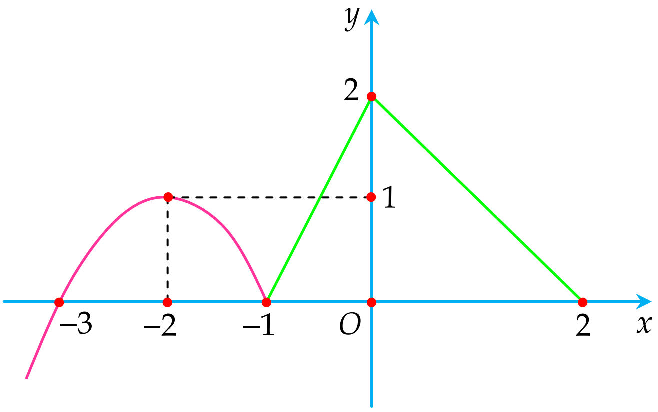
Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a(-2<a<1) \\ x=b(0<b<1) \\ x=c(1<c<2) \end{array}\right. \Rightarrow f(2-f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-f(x)=a \\ 2-f(x)=b \\ 2-f(x)=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a(1) \\ f(x)=b(2) \\ f(x)=c(3) \end{array}\right.$

- $a \in (-2;1) \Rightarrow 2-a \in (3;4)$, do đó (1) có đúng 1 nghiệm.
- $b \in (0;1) \Rightarrow 2-b \in (1;2)$ nên (2) có 1 nghiệm duy nhất.
- $c \in (1;2) \Rightarrow 2-c \in (0;1)$ nên (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Bài toán 55

Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong là 1 phần của Parabol $y=ax^2+bx+c$). Biết $f(-3)=0$. Giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng bao nhiêu?



A. $\frac{23}{6}$ **B.** $\frac{31}{6}$ **C.** $\frac{35}{3}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Lời giải

Parabol $y=ax^2+bx+c$ có 2 nghiệm $-3;-1$ nên có dạng $y=a(x+1)(x+3)$

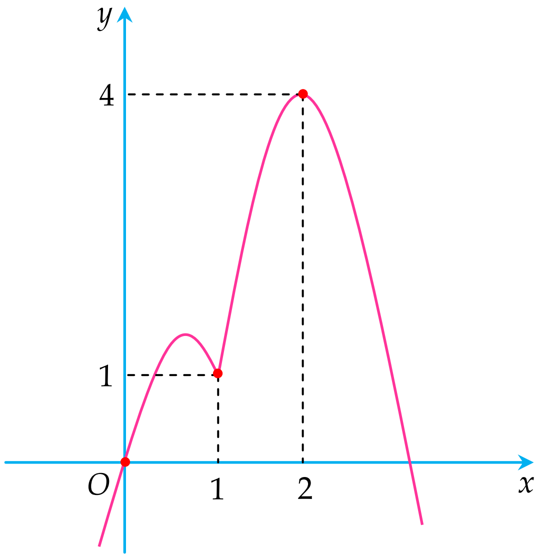
Vì Parabol đi qua điểm $(-2;0)$ nên $a=-1$.

Để tính $f(-1)$, ta xét : $f(-1)-f(-3)=\int_{-3}^{-1} f'(x)dx = S_1+S_2$, trong đó S_1 là diện tích tam giác có 3 đỉnh tọa độ $(-1;0)$, $(0;2)$, $(0;0)$ nên $S_1=\frac{1}{2}.1.2$; S_2 là diện tích hình thang có các đỉnh $(0;0)$, $(0;2)$, $(1;1)$, $(1;0)$ nên $S_2=\frac{1}{2}.(2+1)=\frac{3}{2}$.

Do đó $f(-1)+f(1)=(f(1)-f(-1))+2f(-1)=\frac{5}{2}+2.\frac{4}{3}=\frac{31}{6}$.

Bài toán 56

Cho hàm số $y=f(x)$ lên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(0)=0$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=\left|3f(x)-x^3\right|$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;2)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(1;3)$

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=3f(x)-x^3$, $g'(x)=3f'(x)-3x^2$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2$ trên cùng một trục tọa độ ta thấy $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$

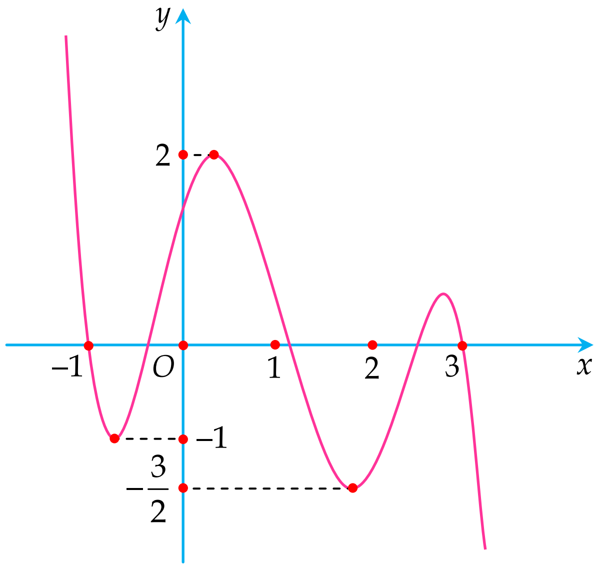
Từ đó ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, chú ý rằng $g(0)=3f(0)=0$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến và nhận giá trị dương trên $(0;2)$ nên hàm số $\left|g(x)\right|$ đồng biến trên $(0;2)$.

Chú ý. *Bảng biến thiên các bạn tự lập nhé !*

Bài toán 57

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m tương ứng là GTLN và GTNN của hàm số $y=f(1-\cos x)$ trên $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$. Giá trị của $M+m$ bằng :



A. 2 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

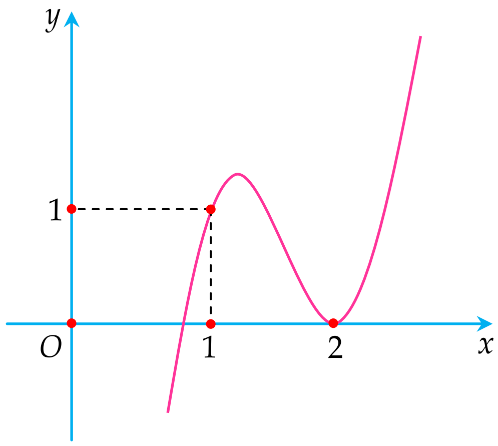
Lời giải

Đặt $1-\cos 2x=t$, dễ thấy $x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ thì $\cos x\in[-1;1]$, do đó $t\in[-1;3]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{t\in[-1;3]} f(t)=2$ và $\min\limits_{t\in[-1;3]} f(t)=\frac{-3}{2}$ nên $M+m=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

Bài toán 58

Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2.)\sqrt{x-1}}{x.\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận



A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Ta có $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2.)\sqrt{x-1}}{x.\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}(x-2)}{x.f(x).\left[f(x)-1\right]}$

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)=0$ có 3 nghiệm $x=m\in(0;1)$, $x=2$, với nghiệm $x=2$ là nghiệm kép nên $f(x)=a(x-m)(x-2)^2$.

Phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm $x=1, x=n\in(1;2)$, $x=p\in(2;+\infty)$ nên

$$f(x)-1=a(x-1)(x-n)(x-p).$$

Do đó $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}(x-2)}{x.a.(x-m)(x-2)^2.a.(x-1)(x-n)(x-p)}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{a^2.x.(x-2)(x-m)(x-n)(x-p)}$

Số tiệm cận đứng là 3, gồm các đường $x=2, x=n, x=p$ (loại đường thẳng $x=0$ và $x=m$ do $m<1$).

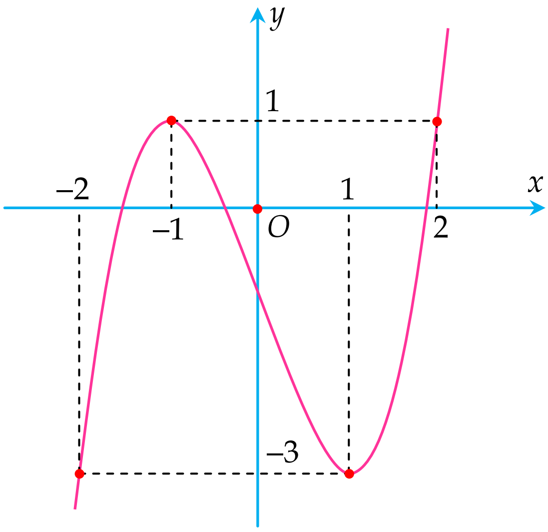
Số tiệm cận ngang là 1, đó là đường $y=0$.

Vậy có 4 đường tiệm cận

Bài toán 59

Cho hàm số $y=f(x)$ lên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới.

Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ \ (-2<a<-1)\\x=b\ \ (-1<b<0)\\x=c\ \ (1<c<2)\end{array}\right.$

Do đó phương trình $f(f(x)-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-1=a\\f(x)-1=b\\f(x)-1=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a+1\\f(x)=b+1\\f(x)=c+1\end{array}\right.$

Phương trình $f(x)=a+1$ có $a+1\in(-1;0)$ nên có 3 nghiệm phân biệt.

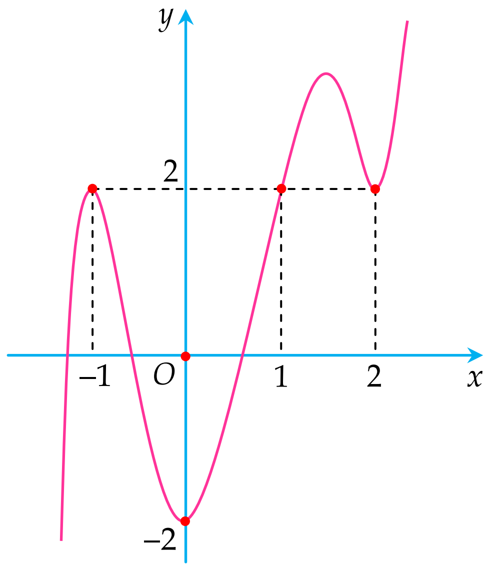
Phương trình $f(x)=b+1$ có $b+1\in(0;1)$ nên có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=c+1$ có $c+1\in(2;3)$ nên có đúng 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 3+3+1=7 nghiệm. Chọn **D**.

Bài toán 60

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào



A. $x=1$ **B.** $x=0$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=2$

Lời giải

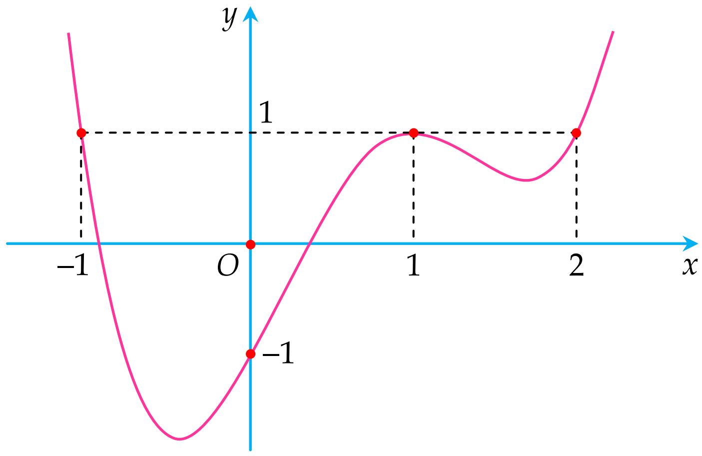
Xét $y=\pi^{2(f(x)-4x)}$ có $y'=\pi^{2(f(x)-4x)}.\ln\pi\left(2f'(x)-4\right)$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_o thì y' phải đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm đó. Dựa vào đồ thị, ta thấy chỉ có điểm $x=-1$ làm $f'(x)-2$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua.

Vậy hàm đạt cực tiểu tại $x=-1$. Chọn **C**.

Bài toán 61

Cho hàm số $y=f(x)$ lên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



A. $(2;3)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(1;2)$

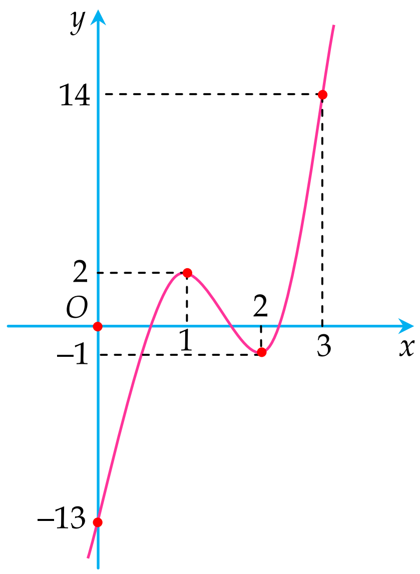
Lời giải

Ta có $y'=f'(x-1)-1$. Ta có $y'>0 \Leftrightarrow f'(x-1)>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<1 \\ x-1>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>3 \end{array}\right.$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Bài toán 62

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)+1)=m$ có 3 nghiệm phân biệt bằng



A. 15 **B.** 14 **C.** 13 **D.** 11

Lời giải

Đặt $f(x)+1=t$, phương trình đã cho tương đương với $f(t)=m$

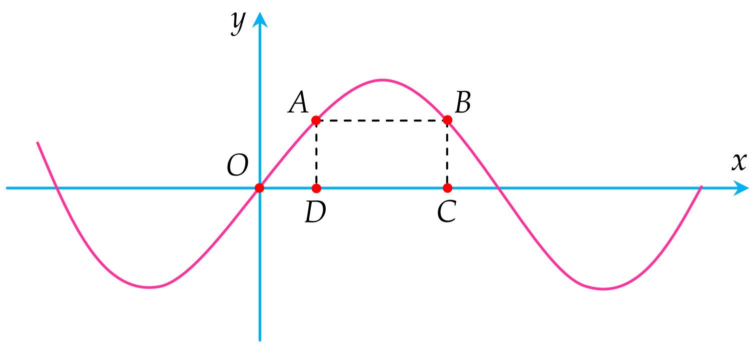
Nếu phương trình $f(t)=m$ có nhiều hơn một nghiệm t (nghĩa là $-1\le m\le 2$), giả sử 2 nghiệm trong số đó là t_1 và t_2, dựa vào đồ thị, ta thấy các nghiệm này đều thuộc $(0;3)$, do đó $t_1-1;t_2-1\in(-1;2)$, nên các phương trình $f(x)=t_1-1$ và $f(x)=t_2-1$ đều có 3 nghiệm phân biệt . do đó phương trình $f(f(x)+1)=m$ có ít nhất 6 nghiệm(loại).

Vậy phương trình $f(t)=m$ có đúng 1 nghiệm, giả sử là nghiệm t_0. Phương trình tương ứng với $f(x)=t_0-1$, phương trình này có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Leftrightarrow t_1-1\in(-1;2)\Leftrightarrow t_0\in(0;3)$. Vậy cần tìm m để phương trình $f(t)=m$ có đúng 1 nghiệm, nghiệm đó thuộc $(0;3)$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}2,m<14\\-13<m<-1\end{array}\right.$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{3;4;...;13\}\cup\{-12;-11;...;-2\}$. Tổng các giá trị của m là 11

Bài toán 63

Cho 2 điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên $[0;\pi]$, các điểm C,D thuộc trục Ox sao cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật là $CD=\dfrac{2\pi}{3}$. Độ dài cạnh BC là?



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải

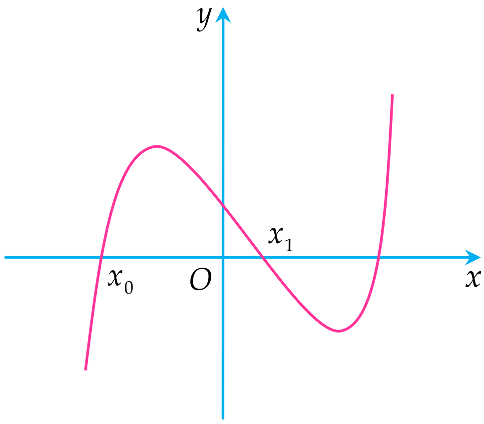
Giả sử $D(x_1;0),C(x_2;0)$ với $x_2-x_1=\dfrac{2\pi}{3}$

Ta có $y_A-y_B\Rightarrow\sin x_1=\sin x_2\Rightarrow x_1+x_2=\pi$. Do đó $x_1=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow y_A=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$BC=$\dfrac{1}{2}$

Nào chúng ta cùng đổi chủ đề xíu trước khi quay lại đồ thị hàm số chương 1. Chủ đề tiếp theo của chúng ta là đồ thị liên quan tới tích phân. Trong chủ đề này chúng mình sẽ giới thiệu cho bạn đọc một số bài toán được 3 thành viên là Nguyễn Thị Kim Anh, Nguyễn Quang Phát và Nguyễn Minh Tuấn sáng tác, để làm tốt được các bài này các bạn cần phải nắm vững các kiến thức về diện tích hình phẳng, cực trị, đạo hàm v.v.. Nào chúng ta cùng bắt đầu chủ đề này nhé!

Bài toán 64

Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r\,(r>0)$ có nghiệm. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x)=-r$ là?



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f(x)+2r$. Suy ra $g(x)'=f(x)'$.

Dựa vào diện tích tích phân ta thấy

$$\int_0^{x_1} g'(x)dx<\int_{x_0}^{x_1} g'(x)dx \Rightarrow g(x_1)-g(0)<g(x_1)-g(x_0)\Rightarrow g(x_1)>g(0)>g(x_0).\quad (1)$$

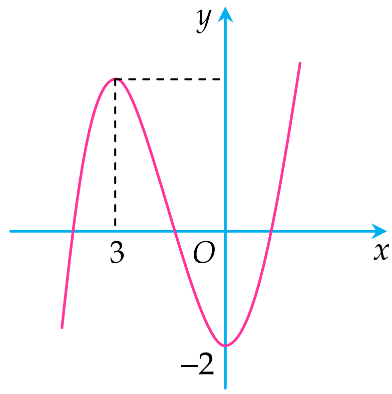
Theo đề bài thì $r>0\Rightarrow g(0)>0=g(x')$. Từ giả thiết nghiệm x′ của $f(x)$ thuộc khoảng $(-\infty;x_0)$ nên $g(x')>g(x_0)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=-r$ có 4 nghiệm.

Chọn ý **B.**

Bài toán 65

Cho $f(x)$ như hình vẽ. Biết $\int_{-1}^{4} f''(x)dx = 60$. Giá trị của $f(-2) - f(2)$ là ?



A. $\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{31}{3}$. **C.** $-\frac{12}{3}$. **D.** $-\frac{32}{3}$.

Lời giải

Phân tích : *Một bài toán tìm dạng của hàm số !*

Đồ thị hàm $f(x)$ có cực trị tại $x = 0$ và $x = -3$ nên $f'(x)$ có dạng $k.x.(x+3)$.

$$\int_{-1}^{4} f''(x)dx = 60 \Rightarrow f'(x)\Big|_{-1}^{4} = 60 \Rightarrow f'(4) - f'(-1) = 60 \Leftrightarrow 28.k + 2.k = 60 \Leftrightarrow k = 2.$$

Nên $f'(x) = 2.x.(x+3) \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + r$.

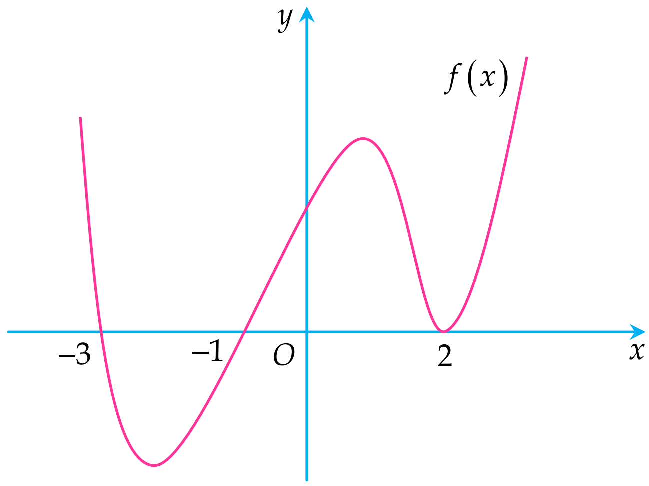
Nhìn đồ thị, ta thấy $x = 0; y = -2 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 2$.

Suy ra $f(-2) - f(2) = -\frac{32}{3}$.

Chọn ý **D.**

Bài toán 66

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số như sau. Tìm số điểm cực trị của $g(x)=\int_{2019}^{x^2-1} f(t)\,dt$



A. 1 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7

Lời giải

Có $g'(x)=2xf(x^2-1)$. Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x^2-1)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-1=-3 \Leftrightarrow x^2=-2\,(L) \\ x^2-1=-1 \Leftrightarrow x^2=0 \\ x^2-1=2 \Leftrightarrow x^2=3 \end{array}\right.$

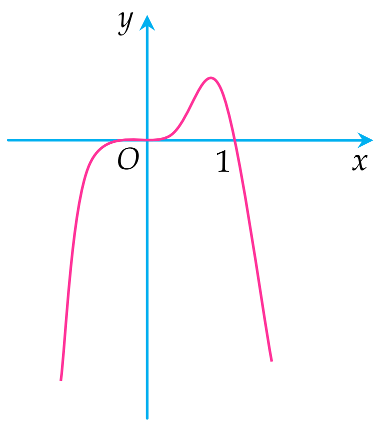
Nhưng để $g(x)$ đạt cực trị thì $g'(x)$ phải đổi dấu qua đạo hàm. Nhận thấy chỉ có duy nhất TH $x=0$ thỏa mãn.

Chọn ý **A.**

Bài toán 67

Cho đồ thị hàm $g(x)$ hàm bậc 4 như hình vẽ, biết $g(x)=f(x)+f(1-x)$ và $f(0)=g(0)$.

Tính tích phân $\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$?



A. 1 **B.** $-\frac{1}{10}$ **C.** 5 **D.** $-\frac{1}{5}$

Lời giải

Từ đồ thị ta suy ra $g(x)=x^3(1-x)\Rightarrow x^3(1-x)=f(x)+f(1-x)$

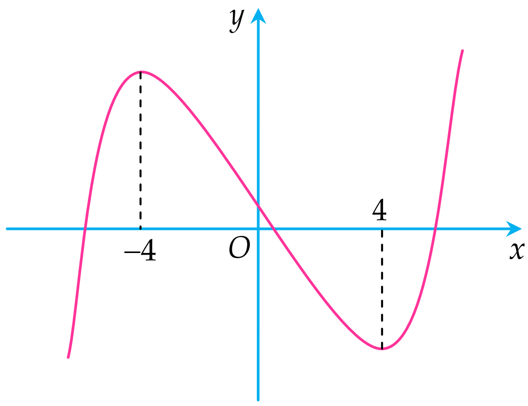
Từ $(*)$ tích phân hai vế ta được $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{40}$. Thay $x=0$ vào $(*)$ ta được $f(1)=0$

Tích phân từng phần được $\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\left(x.f\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2-\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx\right)=\frac{-1}{10}$.

Chọn ý **B.**

Bài toán 68

Cho đồ thị hàm số là nguyên hàm của $f(x)$ có dạng $F(x)=ax^3+bx^2+5x+d$. Tính diện tích tạo bởi $f(x)$ và trục hoành ?



A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{50}{3}$. **D.** $\frac{70}{3}$.

Lời giải

Phân tích : *Ý tưởng bài này cũng giống như ý tưởng bài trước.*

Ta có $F'(x)=3ax^2+2bx+5$ nên $F'(0)=5\Leftrightarrow f(0)=5$

Từ 2 điểm cực trị có hoành độ là -4 và 4 ta có thể vẽ đại khái đồ thị của $f(x)$ như sau

$$f(x)=mx^2+nx+5$$

Có $\begin{cases}x=-4\Rightarrow 16m-4n+5=0\\ x=4\Rightarrow 16m+4n+5=0\end{cases}\Rightarrow m=\frac{-5}{16}\Rightarrow f(x)=\frac{-5}{16}x^2+5$.

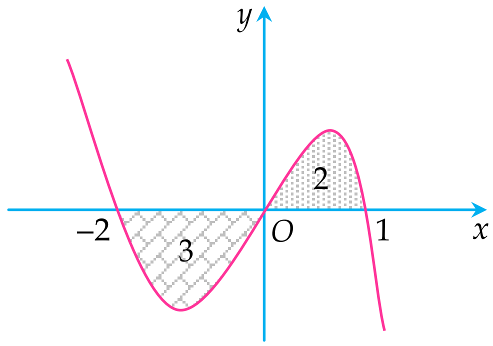
Suy ra $\int_{-4}^4 f(x)=\int_{-4}^4\frac{-5}{16}x^2+5=\frac{80}{3}$.

Vậy diện tích cần tìm là $\frac{80}{3}$.

Chọn ý **A.**

Bài toán 69

Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích 2 hình S_1, S_2 lần lượt là 3,2, $f(1)=5$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 e^x f(x)dx + \int_0^1 e^x f'(x)dx$?



A. $e-3$. **B.** $2e-2$. **C.** $4e-3$. **D.** $5e-3$.

Lời giải

Phân tích. *Bài này quan trọng là biến đổi tích phân thôi nhé !*

Ta có $\int_0^1 e^x f(x)dx + \int_0^1 e^x f'(x)dx = \int_0^1 e^x f(x) + e^x f'(x)dx$

$$= \int_0^1 \left[e^x f(x)\right]'\mathrm{dx} = e^x f(x)\Big|_0^1 = e.f(1) - 1.f(0)\ (1)$$

Diện tích 2 hình S_1, S_2 lần lượt là 3,2 nên

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1) - f(0) \Rightarrow f(0) = 5 - 2 = 3.$$

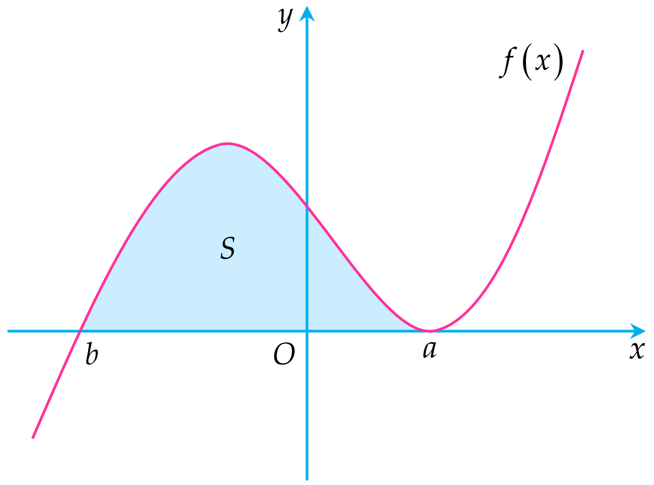
Thay vào (1) ta được $e.f(1) - f(0) = 5e - 3$.

Vậy $\int_0^1 e^x f(x)dx + \int_0^1 e^x f'(x)dx = 5e - 3$.

Chọn ý **D**

Bài toán 70

Cho đồ thị hàm số bậc 3 $f(x)$ như hình vẽ. Biết $S=\frac{9}{4}, a-b=3$ và $f'(0)=-1$. Tính $I=\int_{b-a}^{2a} f(x)dx$



A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{7}{12}$ **D.** $\frac{5}{12}$

Lời giải

Dễ thấy $f(x)=m(x-a)^2(x-b)=m\left(x^3-(2a+b)x^2+\left(2ab+a^2\right)x-a^2b\right)$

Ta có $S=\frac{9}{4}\Rightarrow \int_b^a f(x)dx=\frac{9}{4}\Rightarrow m\int_b^a\left(x^3-(2a+b)x^2+\left(2ab+a^2\right)x-a^2b\right)dx=\frac{9}{4}$

$$\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2a+b}{3}x^3+\frac{2ab+a^2}{2}x^2-a^2bx\right)\right|_b^a=\frac{9}{4m}$$

Thay số, biến đổi, rút gọn, ta được

$$\frac{a^4}{12}-\frac{a^3b}{3}+\frac{a^2b^2}{2}-\frac{ab^3}{3}+\frac{b^4}{12}=\frac{9}{12m}\Rightarrow a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4=\frac{27}{m}$$

$$\Rightarrow (a-b)^4=\frac{27}{m}\Rightarrow \frac{27}{m}=81\Rightarrow m=\frac{1}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}(x-a)^2(x-b)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\left(2(x-a)(x-b)+(x-a)^2\right).\text{ Mà } f'(0)=-1$$

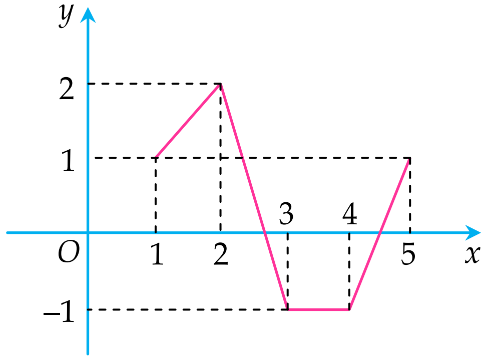
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(a^2+2ab\right)=-1\Rightarrow a^2+2ab=-3\Rightarrow a^2+2a(a-3)=-3\Rightarrow a=1\Rightarrow b=-2$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x+2)\Rightarrow I=\int_{b-a}^{2a} f(x)dx=\int_{-3}^{2}\frac{1}{3}(x-1)^2(x+2)dx=\frac{5}{12}$$

Chọn ý **D.**

Bài toán 71

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính giá trị của tích phân $I=\int_1^5 f''(x)(x-1)(x-5)dx$?



A. –4 **B.** –5 **C.** –6 **D.** –7

Lời giải

Sử dụng tính chất nguyên hàm từng phần ta đặt $\begin{cases} u=(x-1)(x-5) \\ v=\int f''(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(2x-6)dx \\ v=f'(x) \end{cases}$

$\Rightarrow I=-\int_1^5(2x-6)f'(x)dx$. Đến đây đặt tiếp $\begin{cases} u=2x-6 \\ v=\int f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I=-(2x-6)f(x)\Big|_1^5+2\int_1^5 f(x)dx$$

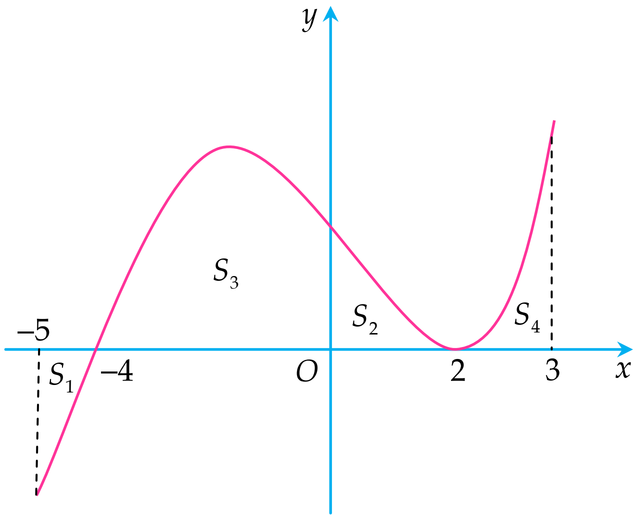
Đến đây ta sẽ tính $\int_1^5 f(x)dx$. Đặt $A(1;1),B(2;2),C(3;-1),D(4;-1),E(5;1)$ đồng thời $M(1;0),N(2;0),P(3;0),Q(4;0),S(5;0)$.

- Phương trình đường thẳng BC là $y=-3x+8$ suy ra giao điểm của BC với trục hoành là điểm $I\left(\frac{8}{3};0\right)$.
- Tọa độ giao điểm của DE với trục hoành là $H\left(\frac{4}{5};0\right)$

Ta có $\int_1^5 f(x)dx=S_{MABN}+S_{BNI}-S_{ICDH}+S_{HSE}=\frac{3}{2}$. Vậy $I=-5$

Bài toán 72

Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Biết $S_2 - S_4 = S_3 - S_1$ (hình vẽ chỉ mang tính chất tương đối). Tính $I = \int_0^2 \left[5f(5-5x) + 4(x-2)f\left(x^2-4x\right)\right]dx$



A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{23}{5}$ **D.** $\frac{6}{5}$

Lời giải

Gọi $F(x)$ là họ nguyên hàm của $f(x)$. Ta có $S_2 - S_4 = S_3 - S_1$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx - \int_{-5}^{-4} -f(x)dx = \int_{-4}^{0} f(x)dx - \int_2^5 f(x)dx$$

$$\Rightarrow F(2) - F(0) - \left[F(-5) - F(-4)\right] = F(0) - F(-4) - \left[F(5) - F(2)\right]$$

$$\Rightarrow F(5) - F(-5) = 2\left[F(0) - F(-4)\right] \Rightarrow \int_{-5}^{5} f(x)dx = 2\int_{-4}^{0} f(x)dx$$

Xét $I = \int_0^2 5f(5-5x)dx + \int_0^2 4(x-2)f\left(x^2-4x\right)dx = J + K$

Đặt $t = 5 - 5x \Rightarrow dt = -5dx \Rightarrow J = \int_5^{-5} -f(t)dt = \int_{-5}^{5} f(t)dt$

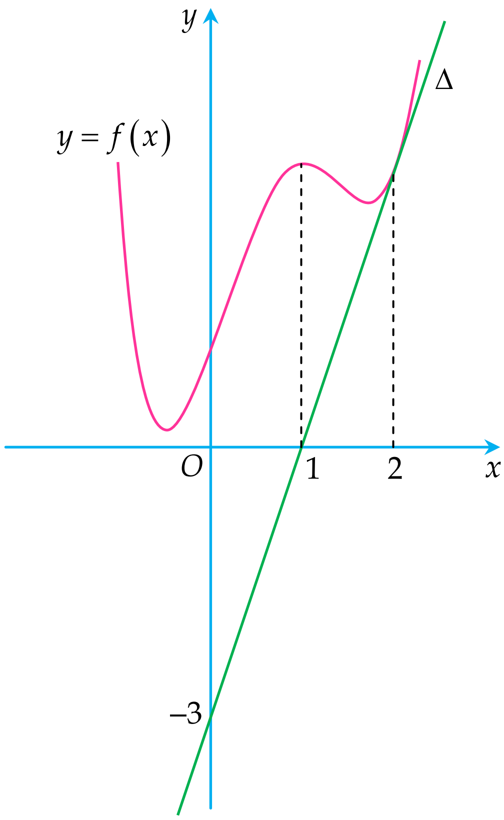
Đặt $u = x^2 - 4x \Rightarrow dt = 2(x-2)dx \Rightarrow K = 2\int_0^{-4} f(t)dt = -2\int_{-4}^{0} f(t)dt$

$$\Rightarrow I = J + K = \int_{-5}^{5} f(t)dt - 2\int_{-4}^{0} f(t)dt = 0$$

Chọn ý **A.**

Bài toán 73

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$. Đường thẳng Δ trong hình vẽ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^{\ln 3} e^x f''\left(\frac{e^x+1}{2}\right)dx$?



A. 0 **B.** 1 **C.** 6 **D.** 7

Vted.vn

Lời giải

Đặt $t=\frac{e^x+1}{2} \Rightarrow dt=\frac{e^x dx}{2}$ khi đó $I=\int_1^2 2f''(t)dt=2f'(2)-2f'(1)$

Ta có phương trình tiếp tuyến của hàm số $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ đi qua điểm $(0;-3)$ nên có $-3=-2f'(2)+f(2) \Rightarrow 2f'(2)=f(2)+3$.

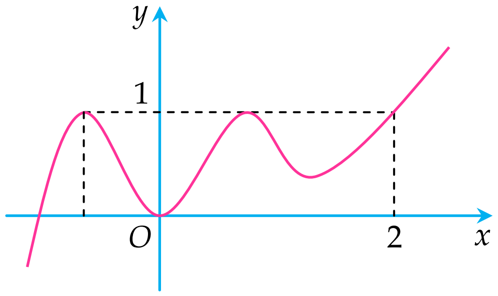
Mặt khác do $f'(1)=0$ nên $0=-f'(2)+f(2) \Rightarrow f'(2)=f(2) \Rightarrow f(2)=3 \Rightarrow I=6$

Chọn ý **C.**

Bài toán 74

Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Biết $\int_2^4 \left[f(x-2)+3-m\right]dx = \left[f(x)-1\right]^2+12$.

Giá trị của m là ?



A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Phân tích : *Một bài toán lạ !*

Ta thấy $f(x-2)\le 1$ với mọi x thuộc đoạn $[2;4]$.

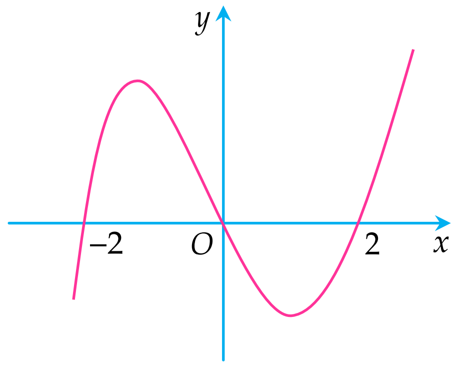
$$\Rightarrow f(x-2)+5\le 6 \Rightarrow \int_2^4 \left[f(x-2)+5\right]dx \le 12.$$

$$VP=\left[f(x)-1\right]^2+12\ge 12. \text{ Mà } m\ge 0 \text{ nên } \int_2^4 m dx = 2m = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Chọn ý **B.**

Bài toán 75

Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ, biết $f'(1)=2$. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\int_{-2}^{2}\left|f'(x)\right|$?



A. $\frac{64}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{25}{3\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{14}{3\sqrt{3}}$. **D.** 2.

Lời giải

Phân tích : *Một bài có sự xuất hiện của trị tuyệt đối !*

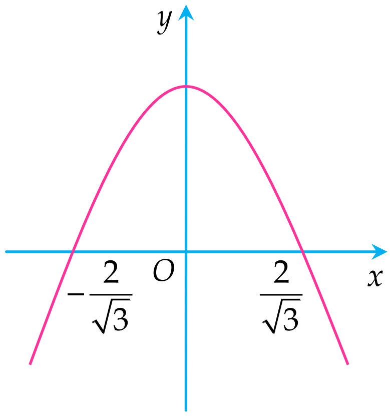
Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm nên có thể viết dưới dạng :

$$kx(x-2)(x+2)=k\left(x^3-4x\right). \Rightarrow f'(x)=k\left(3x^2-4\right)$$

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow k\left(3x^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\ x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$.

$f'(1)=2\Rightarrow -k=2\Rightarrow k=-2\Rightarrow f'(0)=8.$

Đồ thị của $f'(x)$ có thể vẽ lại như sau



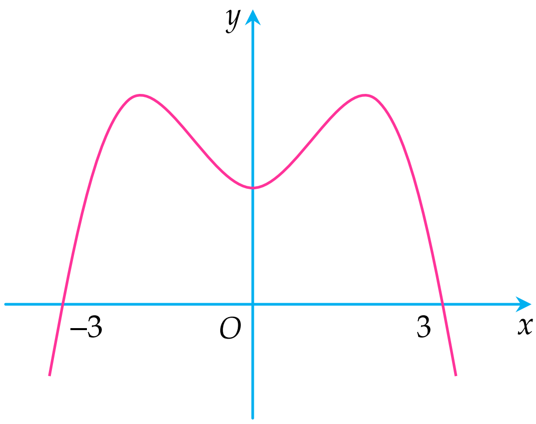
Áp dụng công thức tính nhanh diện tích tạo bởi parabol và trục hoành

Ta có $\int\limits_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left|f'(x)\right|dx=\int\limits_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}f'(x)dx\Rightarrow\int\limits_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}f'(x)dx=\frac{2}{3}.8.\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{64}{3\sqrt{3}}$

Chọn ý **A.**

Bài toán 76

Cho đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị của biểu thức tích phân $I=\int\limits_0^3 x^2f'(x)dx$?



A. 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Ta có $\begin{cases}u=x^2\\ f'(x)dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=f(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^3 x^2 f'(x)dx = x^2 f(x)\Big|_0^3 - 2\int_0^3 f(x).xdx = 9.f(3)-2\int_0^3 f(x).xdx = -2\int_0^3 f(x).xdx$$

Vì đồ thị $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_0^3 f(x)xdx = \int_0^{-3} f(-x).(-x).(-dx) = \int_0^{-3} f(x)xdx$

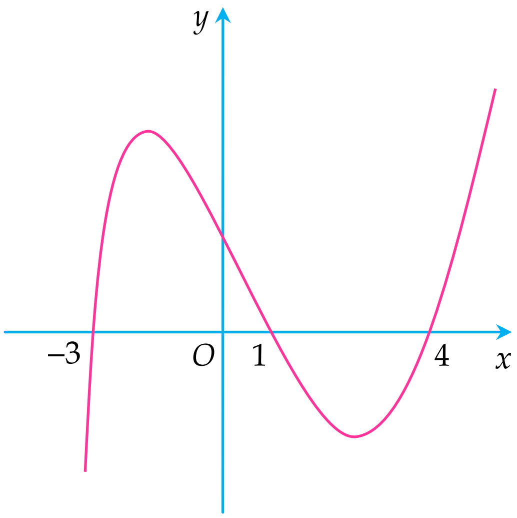
$$= -\int_{-3}^0 f(x)xdx \Rightarrow \int_{-3}^3 f(x)xdx = \int_{-3}^0 f(x)xdx + \int_0^3 f(x)xdx = 0$$

Mà $2\int_0^3 f(x).xdx = \int_{-3}^3 f(x).\text{x}\,dx = 0 \Rightarrow I = 0$.

Chọn ý **B.**

Bài toán 77

Cho đồ thị hàm số $f(x-2)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=\int_{\sqrt{x-4}}^{\sqrt{x-2}} f(t^2+2)dt$ cắt trục Ox tại nhiều nhất mấy điểm phân biệt ?



A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Đặt $t^2+2=x \Rightarrow 2tdt = dx \Rightarrow y=\int_{x-2}^{x} f(x)\frac{dx}{2} = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(x-2)$.

Đặt $f(x-2)=k(x+3)(x-1)(x-4) \Rightarrow f(x)=k(x+1)(x-3)(x-6)$.

$$\Rightarrow f(x)-f(x-2)=k\left(-6x^2+20x+6\right)=k\left(x-\frac{5+\sqrt{34}}{3}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{34}}{3}\right).$$

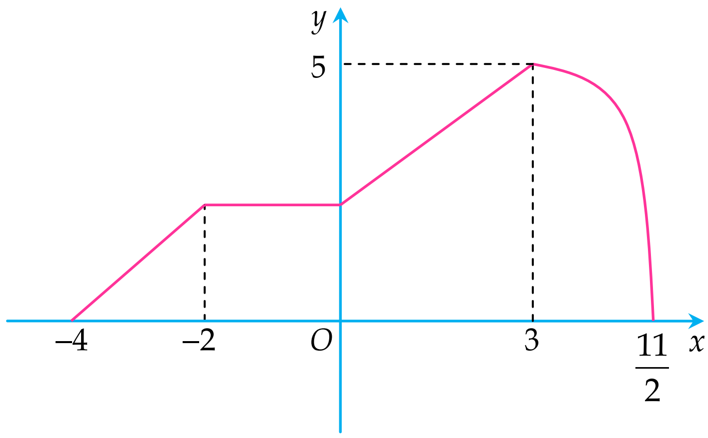
Nên đồ thị hàm số $y=\int_{\sqrt{x-4}}^{\sqrt{x-2}} f(t^2+2)dt$ có 2 cực trị nên cắt trục Ox nhiều nhất 3 điểm phân biệt.

Chọn ý **C.**

Bài toán 78

Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $\left[-4;\dfrac{11}{2}\right]$ (lần lượt là các đoạn thẳng và nửa parabol).

Tính giá trị $S=\int_{\frac{-3}{2}}^{0} f'(2x+3)\,dx+\int_{-1}^{1} f'(2x-2)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos x.f'(5\sin x+3)\,dx$?



A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{149}{6}$. **C.** $\dfrac{154}{4}$. **D.** $\dfrac{109}{3}$.

Lời giải

Phân tích : *Một bài toán cần áp dụng diện tích tích phân và sử dụng phương pháp đổi biến !*

Đặt $2x+3=t\Rightarrow 2dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-3}{2}\Rightarrow t=0\\ x=0\Rightarrow t=3\end{cases}$.

Đặt $2x-2=m\Rightarrow 2dx=dm\Rightarrow\begin{cases}x=-1\Rightarrow m=-4\\ x=1\Rightarrow m=0\end{cases}$.

Đặt $5\sin x+3=n\Rightarrow 5\cos x dx=dn\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow n=3\\ x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow n=\dfrac{11}{2}\end{cases}$.

Nên $S=\int_0^3 f'(t)\,dt+\int_{-4}^{0} f'(m)\,dm+\int_3^{\frac{11}{2}} f'(n)\,dn=\int_0^3 f'(x)\,dx+\int_{-4}^{0} f'(x)\,dx+\int_3^{\frac{11}{2}} f'(x)\,dx=\int_{-4}^{\frac{11}{2}} f'(x)\,dx$.

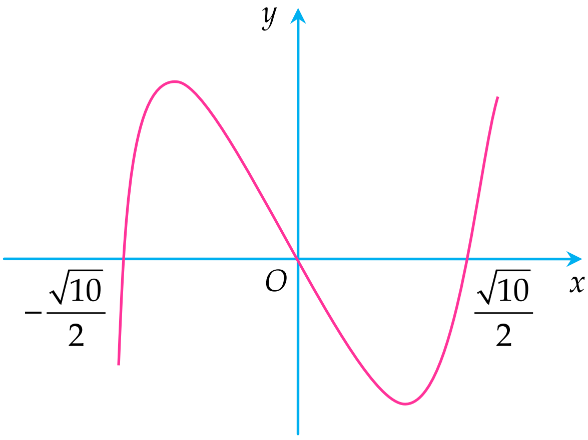
Ta thấy rằng S chính là diện tích hình tạo bởi $f'(x)$ và trục Ox.

- Diện tích hình tam giác là $S_1=\dfrac{1}{2}.2.2=2.$
- Diện tích hình chữ nhật là $S_2=2.2=4.$
- Diện tích hình thang là $S_3=\dfrac{1}{2}.(2+5).3=\dfrac{21}{2}.$
- Diện tích nửa parabol là $S_3=\dfrac{2}{3}.\left(\dfrac{11}{2}-3\right).5=\dfrac{25}{3}.$
- Diện tích hình tạo bởi $f'(x)$ và trục Ox là $S=S_1+S_2+S_3+S_4=\dfrac{149}{6}$.

Chọn ý **B.**

Bài toán 79

Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+4a$. Đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ. Tính tích phân $\int_{-1}^{2}\left[f''(x).f(x)+f'(x)^2\right]dx$?



A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Phân tích. *Ta chỉ cần rút gọn tích phân và khai thác từ đồ thị là ra được bài toán !*

Nhìn đồ thị ta có $f'(x)=ax\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=ax\left(x^2-\frac{5}{4}\right)$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} f'(x)dx=\int_{-1}^{2} x\left(x^2-\frac{5}{4}\right)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

Ta có thể viết $f(x)$ dưới dạng $f(x)=a(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)+r=a.\mathrm{q}(x)+4a+r$

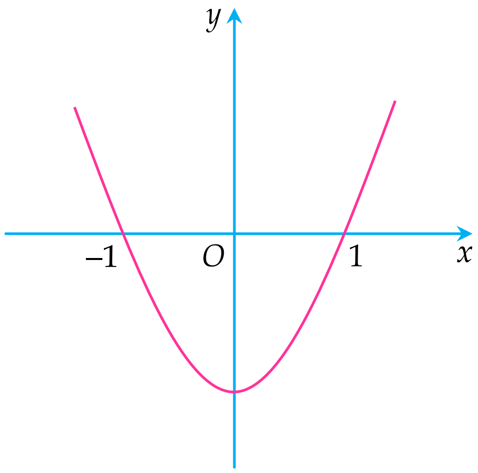
Nên $r=0\Rightarrow f(x)=a(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)\Rightarrow f(-1)=0, f(2)=0$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2}\left[f''(x).f(x)+f'(x)^2\right]dx=\int_{-1}^{2}\left[f'(x).f(x)\right]'dx=f'(x).f(x)\Big|_{-1}^{2}=f'(2).f(2)-f'(-1).f(-1)=0$$

Chọn ý **C.**

Bài toán 80

Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình $F(x)=0$, với $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$. Biết $x=1$ đều là nghiệm của của $f(x)=0$ và $F(x)=0$.?



A. 0 **B.** 10. **C.** 12. **D.** 17.

Lời giải

Nhìn đồ thị ta có $f'(x)=k(x-1)(x+1)\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=k\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+c$.

$$f'(x)=k(x-1)(x+1)\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=k\left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}\right)+cx+d.$$

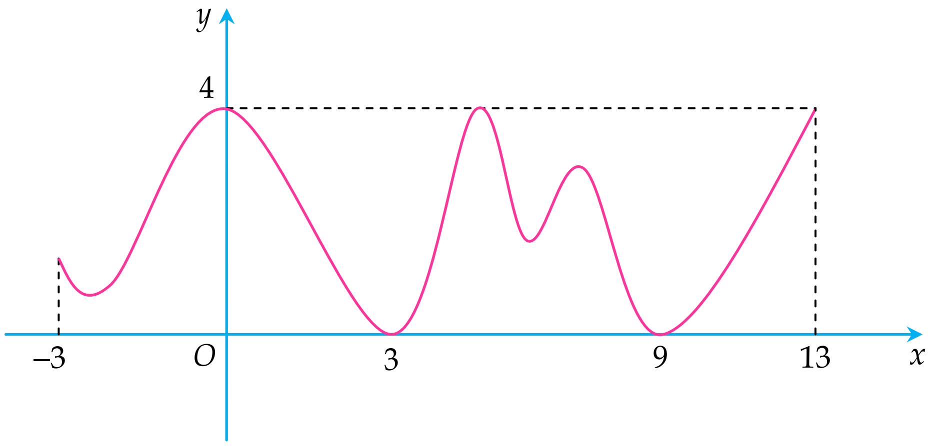
Ta có $\begin{cases} f(1)=0\Leftrightarrow k\left(\frac{1^3}{3}-1\right)+c=0 \\ F(1)=0\Leftrightarrow k\left(\frac{1^4}{12}-\frac{1^2}{2}\right)+c.1+d=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=\frac{2}{3}k \\ d=-\frac{1}{4}k \end{cases}\Rightarrow F(x)=k\left(\frac{x^3}{4}-x\right)+\frac{2}{3}k-\frac{1}{4}k$

$$\Rightarrow F(x)=0\Leftrightarrow k\left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{2}{3}k-\frac{1}{4}k=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{array}\right.\Rightarrow T=1+1+5+5=12$$

Chọn ý **C.**

Bài toán 81

Cho đồ thị hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;13]$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị m nguyên không âm để phương trình $e^{f(x)}-f(x)-2=\int_0^m f(m)dx$ có 1 nghiệm duy nhất.



A. 15. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 17.

Lời giải

Đặt $f(x)=t; g(t)=e^t-t-2 \Rightarrow g'(t)=e^t-1$.

Vì $f(x)\geq 0$ với mọi x nên $e^t-1\geq 0$ với mọi x .

Nhìn đồ thị ta có $0\leq f(x)\leq 4 \Rightarrow \leq -1\leq g(t)\leq e^4-6 \Rightarrow -1\leq \int_0^m f(m)dx \leq e^4-6$.

$$\Rightarrow -1\leq m.f(m)\leq e^4-6$$

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì

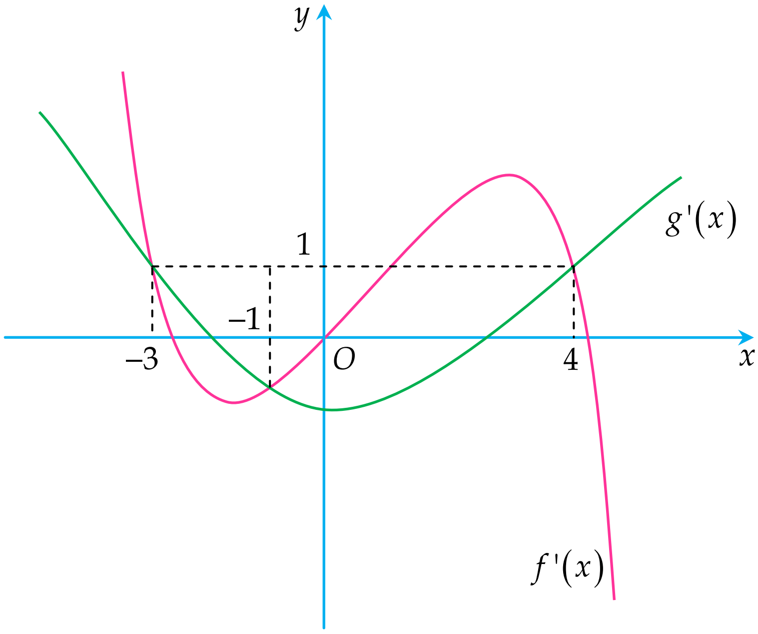
$$m.f(m)\in[0;12.f(12)] \Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$$

Suy ra có 13 giá trị của m.

Chọn ý **C.**

Bài toán 82

Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$. Biết $g(-3)+g(4)>3>f(-3)+f(4)$, hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $h(x)$ đạt min là $h(-1), h(-1)<0$ **B.** $h(x)$ đạt min là $h(-1), h(-1)>0$

C. $h(x)$ đạt max là $h(-1), h(-1)<0$ **D.** $h(x)$ đạt max là $h(-1), h(-1)>0$

Lời giải

Xét $h'(x)=f'(x)-g'(x)$. Dễ thấy $h'(-3)=h'(-1)=h'(4)=0$

Dựa vào đò thị, thấy $f'(x)>g'(x)$ với $x\in(-1;4)\Rightarrow h'(x)>0$ với $x\in(-1;4)$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		4		$+\infty$
h'(x)		+	0	−	0	+	0	−	
$h(x)$		↗		↘		↗		↘	

$\Rightarrow h'(x)$ có cực tiểu là $h(-1)$

Dựa vào tương quan các phần diện tích trên đồ thị, dễ thấy

- $\int_{-1}^{4}(1-g'(x))dx>\int_{-3}^{-1}(1-g'(x))dx\Rightarrow 5-g(4)+g(-1)>2-g(-1)+g(-3)$

$$\Rightarrow 2g(-1)>g(4)+g(-3)-3>0\Rightarrow g(-1)>0 \quad (1)$$

- $\int_{-3}^{-1}(1-f'(x))dx>\int_{-1}^{4}(1-f'(x))dx\Rightarrow 2-f(-1)+f(-3)>5-f(4)+f(-1)$

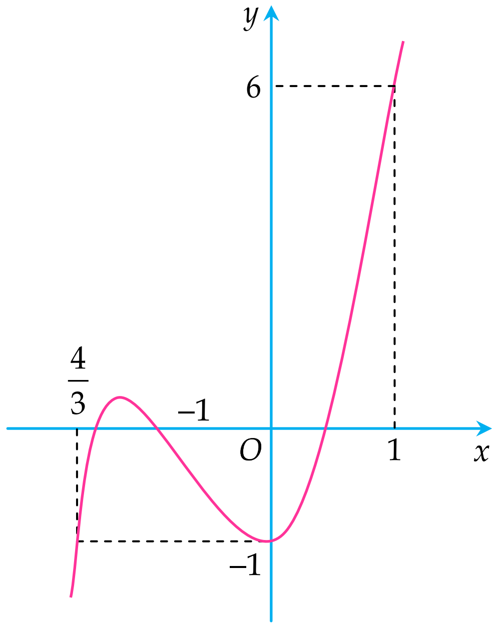
$$\Rightarrow 2f(-1)<f(-3)+f(4)-3<0\Rightarrow f(-1)<0 \quad (2)$$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow h(-1)=f(-1)-g(-1)<0$

Chọn ý **A.**

Bài toán 83

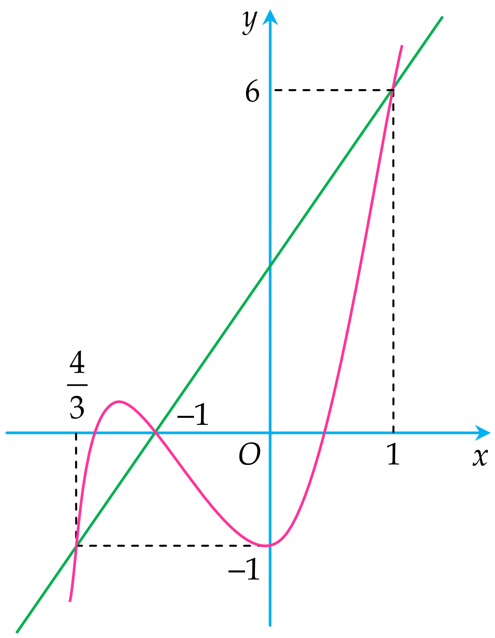
Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng về biểu thức $S=f(0)+\cos(f(0))-f(1)-\cos(f(1))+\dfrac{9}{2}$.



A. Không xác định **B.** nhỏ hơn 0. **C.** bằng 0. **D.** lớn hơn 0.

Lời giải

Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{3}{2}x^2-3x \Rightarrow g'(x)=f'(x)-3x-3$.



Ta có đồ thị đạo hàm của hàm số $g(x)$ như sau, ta thấy đường thẳng $y=3x-3$ đi qua những điểm có hoành độ lần lượt là $\dfrac{-4}{3};-1;1$ và $g'(x)$ chuyển dấu qua điểm $x=-1$ nên $x=-1$ là điểm cực đại.

Ta có $\int_{-1}^{0} g'(x)dx < \int_{-1}^{1} g'(x)dx \Rightarrow g(-1)-f(0) < g(-1)-g(1) \Rightarrow g(0) > g(1) \Rightarrow f(0) > f(1)-\frac{9}{2}$

Xét hàm số $h(x) = x + \cos x \Rightarrow h'(x) = 1 - \sin x$.

Hàm số trên đồng biến với mọi x nên nó cũng đồng biến trên đoạn $\left[f(0); f(1)-\frac{9}{2}\right]$ nên

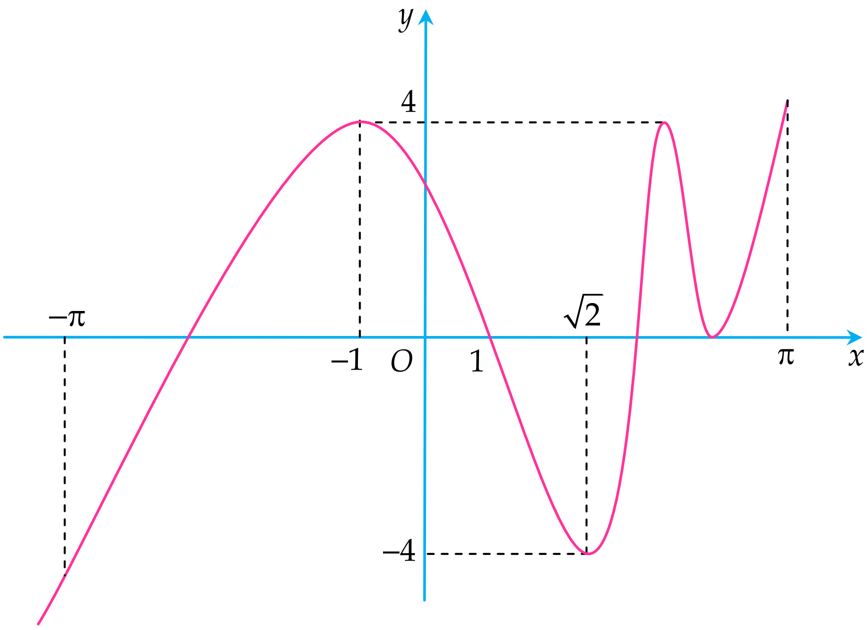
$$f(0)+\cos(f(0)) > f(1)+\cos(f(1))-\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow S = f(0)+\cos(f(0))-f(1)-\cos(f(1))+\frac{9}{2} > 0.$$

Chọn ý **D.**

Bài toán 84

Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Tìm m để $\int_{\pi}^{x} f(\sin x+\cos x)dx = mx$ có nhiều nghiệm nhất có thể trên đoạn $[-\pi;\pi]$?



A. $0 \le m < 4$. **B.** $0 < m < 4$ **C.** $m > 0$. **D.** $-4 < m \le 0$.

Lời giải

Ta có $y = \left(\int_{\pi}^{x} f(\sin x+\cos x)dx\right)' = f(\sin x+\cos x) - f(\pi) = f(\sin x+\cos x)+1$.

Ta phải tìm nghiệm của phương trình $f(\sin x+\cos x)+1 = m$.

Có $g(x) = \sin x+\cos x = \cos x - \sin x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ vì $x \in [-\pi;\pi]$

Mà $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; g(-\pi) = -1; g(\pi) = -1$.

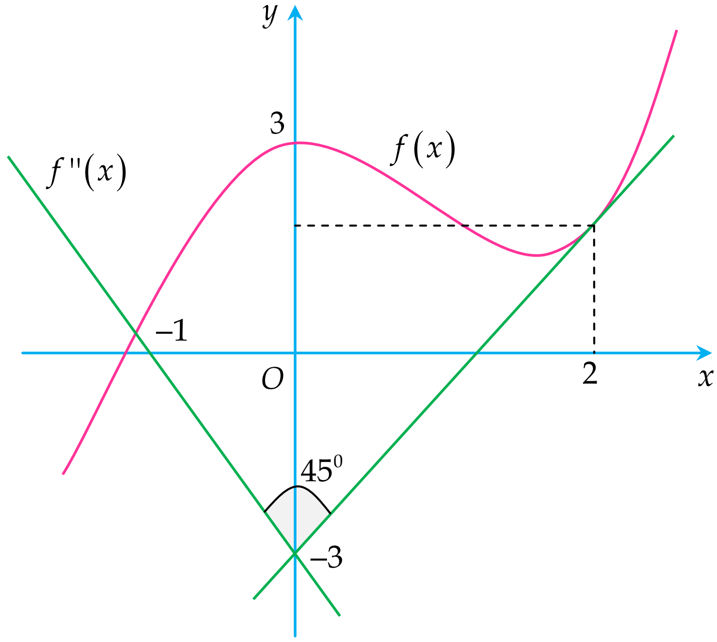
Nên $f(\cos x+\sin x) \in \left[f(\sqrt{2}); f(-1)\right]$ vì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[-1;\sqrt{2}\right]$.

Nên để phương trình đề bài cho có nhiều nghiệm nhất thì $0 \le m < 4$.

Chọn ý **A.**

Bài toán 85

Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ, đồ thị hàm số $f'(x)$ và tiếp tuyến của $f(x)$ tạo với nhau một góc 45^0. Tính giá trị của tích phân $\int_0^2 [f''(x)+f'(x)]dx$?



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Phân tích : *Bài toán có sử dụng công thức tính góc của 2 đường thẳng.*

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ nên $f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Phương trình đường thẳng $f''(x) = 6ax + 2b$ có hệ số góc là 6a $\Rightarrow 6a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ là 2 có hệ số góc là $12a + 4b$.

Vì đồ thị hàm số $f''(x)$ và tiếp tuyến của $f(x)$ tạo với nhau một góc 45^0 nên

$$\tan 45^0 = \frac{|12a+4b-6a|}{1-6a(12a+4b)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 12a+4b-6a = 1-6a(12a+4b) \\ -12a-4b+6a = 1-6a(12a+4b) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -3 = -17+8b \\ 20 = 16b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{7}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{array}\right.$$

Trường hợp $b = \frac{5}{4}$ loại vì $6a$ nhỏ hơn $12a + 4b$.

Ta có hàm số $f(x) = \frac{-1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2$.

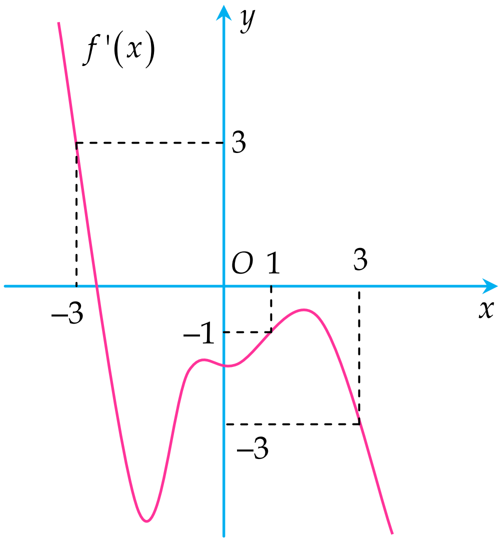
Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $y = x - 2 + 3 = x + 1$.

$$\int_0^2 [f''(x)+f'(x)]dx = f'(2) - f'(0) + f(2) - f(0) = 1 + 3 - 2 = 2.$$

Chọn ý **D.**

Bài toán 86

Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$ như hình vẽ. Đặt hàm số $g(x)=2f(x)+x^2$. Biết $\int_{-2}^{2}[g(x+m)-m]dx=0$ m thuộc đoạn $[-1;1]$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?



A. $4g(1)<m<4g(-3)$.

B. $3g(1)<m<3g(-3)$.

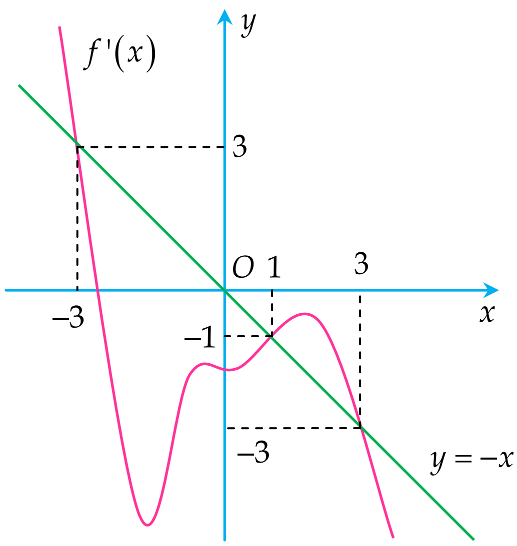
C. $2g(1)<m<2g(-3)$.

D. $g(1)<m<g(-3)$.

Lời giải

Phân tích : *Lại một bài chứa tham số nữa !*

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x; g'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=-x$.



Ta thấy đường thẳng $y=-x$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại những điểm có hoành độ $-3;3;1$, $g'(x)$ đổi dấu tại $x=1$ nên là cực tiểu của hàm số $g(x)$.

Dựa vào đồ thị ta có $\int_{-3}^{3} g'(x)dx=\int_{-3}^{3}\left[2f'(x)+2x\right]dx<0 \Rightarrow g(3)<g(-3)$.

$$\Rightarrow g(1)<g(x)<g(-3).$$

Ta có $\int_{-2}^{2}\left[g(x+m)-m\right]dx=0 \Rightarrow \int_{-2}^{2}\left[g(x+m)\right]dx=\int_{-2}^{2} m dx=4m$.

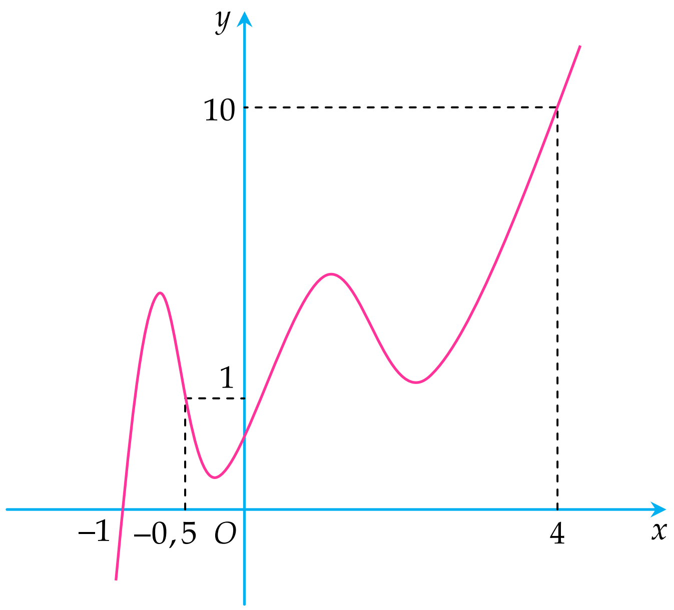
Đặt $x+m=t \Rightarrow dx=dt \Rightarrow \int_{-2}^{2}\left[g(x+m)\right]dx=\int_{-2+m}^{2+m} g(t)dt$.

$$\Rightarrow 4g(1)<\int_{-2+m}^{2+m} g(x)dx<4g(-3) \Rightarrow g(1)<m<g(-3).$$

Chọn ý **D.**

Bài toán 87

Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)-(x+1)^2$ là a và b trên đoạn $[-1;3]$. Biết $\int_{-1}^{-0.5} xf'(x)dx=c$ và $\int_{-1}^{3} f'(x)dx=d$. Tính giá trị của tích phân $\int_{-1}^{-0.5} f(x)dx$?



A. $-\frac{1}{2}a+b-d-\frac{1}{8}$.

B. $-\frac{1}{2}a+b-2d-\frac{1}{4}$.

C. $-a+b-d-\frac{1}{8}$.

D. $-\frac{1}{2}a+b-2d$.

Lời giải

Phân tích : *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm hợp sau đó tìm mối quan hệ giữa a,b,c,d.*

Ta có $g'(x)=f'(x)-2(x+1)$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy $g'(x)=0$ có 3 nghiệm là $-1;0.5;4$.

Lại có $\int_{-1}^{-0.5}\left[f'(x)-2(x+1)\right]dx < \int_{-0.5}^{3}\left[f'(x)-2(x+1)\right]dx$

$$\Rightarrow g(0.5)-g(-1) < g(0,5)-g(3) \Rightarrow g(-1) > g(3)$$

Ta thấy $g'(x)$ đổi dấu tại $x=0.5$ trên đoạn $[-1;3]$ nên $x=0.5$ là cực đại của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;3]$.

Nên $g(-0.5)=a; g(3)=b \Rightarrow f(-0.5)=a+\frac{1}{4}; f(3)=b+16$.

Mà $\int_{-1}^{-0.5} xf'(x)dx = c$. Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

Ta có

$c=\int_{-1}^{-0.5} xf'(x)dx = xf(x)\Big|_{-1}^{-0.5} - \int_{-1}^{-0.5} f(x)dx = -0.5.f(-0.5)+f(-1)-I = -0.5a-\frac{0.5}{4}+f(-1)-I$.

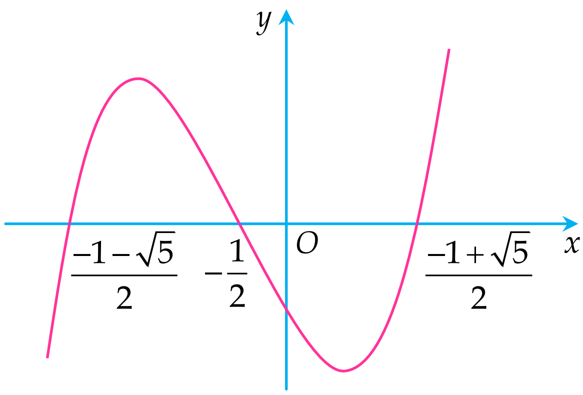
Lại có $\int_{-1}^{3} f'(x)dx = d \Rightarrow f(3)-f(-1)=d \Rightarrow f(-1)=b+16-d$.

$$\Rightarrow I=-0.5a-\frac{0.5}{4}+b+16-d=-\frac{1}{2}a+b-d-\frac{1}{8}.$$

Chọn ý **A.**

Bài toán 88

Cho hàm số bậc 4 có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0)=0$, $\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} f'(x)dx=\frac{\pi}{6}$. Tính giá trị của tích phân $\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} \sin\left[f(x)\right].f'(x).f(x)dx$?



A. $\frac{-\sqrt{3}\pi}{2}+\frac{-1}{2}$.

B. $\frac{-\sqrt{3}\pi}{2}$.

C. $\frac{-\sqrt{3}\pi}{12}+\frac{-1}{2}$.

D. $\frac{-1}{2}$.

Lời giải

Phân tích : *Sử dụng phương pháp tích phân từng phần và đọc đồ thị để tìm ra đáp án nhé !*

Đặt $f'(x)=k\left(x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}k\left(4x^3+6x^2-2x-2\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}k\left(x^4+2x^3-x^2-2x\right)+\mathrm{r}.$$

Mà $f(0)=0\Rightarrow r=0$.

Nên $f(x)=\dfrac{1}{4}k\,\mathrm{x}(x+1)(x-1)(x+2)$.

Ta có $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} f'(x)dx=\frac{\pi}{6}\Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right)-f(-1)=\frac{\pi}{6}\Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Từ giả thiết $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}\sin\left[f(x)\right].f'(x).f(x)dx$. Đặt $\begin{cases} f(x)=u \\ \sin\left[f(x)\right].f'(x).dx=dv \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{1}^{\frac{-1}{2}}\sin\left[f(x)\right].f'(x).f(x)dx=-f(x).\cos\left[f(x)\right]\Big|_{-1}^{\frac{-1}{2}}-\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}\cos\left[f(x)\right]f'(x)dx$$

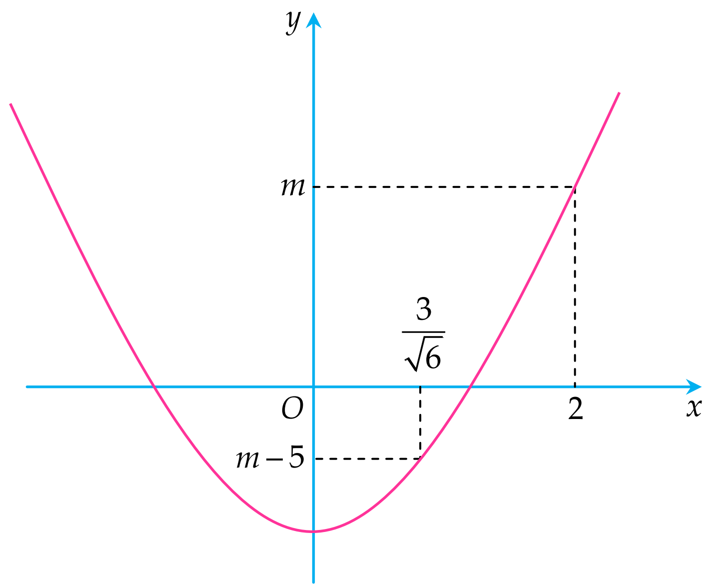
$$=-f(x).\cos\left[f(x)\right]\Big|_{-1}^{\frac{-1}{2}}-sin\left[f(x)\right]\Big|_{-1}^{\frac{-1}{2}}$$

$$=-f\left(\frac{-1}{2}\right).\cos\left[f\left(\frac{-1}{2}\right)\right]+f(-1).\cos\left[f(-1)\right]-\sin\left[f\left(\frac{-1}{2}\right)\right]+\sin\left[f(-1)\right]=\frac{-\sqrt{3}\pi}{12}+\frac{-1}{2}.$$

Chọn ý **C.**

Bài toán 89

Hàm số $f(x)$ có dạng $f(x)=ax^2+b\,(a>0)$. Đồ thị hàm số $f(x)$ được cho như hình vẽ. Gọi diện tích hình tạo bởi $f\left(f(x)\right)$ và $f(x)$ là S. Tính giá trị của biểu thức tích phân $\displaystyle\int_{-\frac{1}{a}-1}^{\frac{1}{a}+1} a^3(x-1)\left(x-\frac{1}{a}-1\right)(x+1)\left(x+\frac{1}{a}+1\right)dx$?



A. S.	**B.** aS.	**C.** $a^2.S$	**D.** $2S$.

Lời giải

Phân tích: *Được phát triển lên từ bài toán tính diện tích. Bài toán đòi hỏi ta phải tìm được các nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm 2 đồ thị!*

Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $f(f(x))$ là

$$a\left(ax^2+b\right)^2+b=ax^2+b \Leftrightarrow a^3x^4+\left(2a^2b-a\right)x^2+b^2a=0.(1).$$

Nhìn vào đồ thị ta thấy $a.1+b=-1 \Rightarrow b=-1-a$.

Thay b vào (1) ta được $a^3.x^4+\left(-2a^2-2a^3-a\right)x^2+a+2a^2+a^3=0$ (*)

Đặt $x^2=t$. Ta thấy $t_1=1$ là nghiệm của phương trình (*) $\Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{cases}$.

Lại áp dụng Vi-et ta có

$$t_1.t_2=\frac{-b}{a}=\frac{2a^2+2a^3+a}{a^3}=\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+1=\left(\frac{1}{a}+1\right)^2 \Rightarrow t_2=\left(\frac{1}{a}+1\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x_3=\frac{1}{a}+1 \\ x_4=-\frac{1}{a}-1 \end{cases}$$

Vì phương trình (*) có 4 nghiệm như trên nên

$$a^3x^4+\left(2a^2b-a\right)x^2+b^2a=\int_{-\frac{1}{a}-1}^{\frac{1}{a}+1} a^3(x-1)\left(x-\frac{1}{a}-1\right)(x+1)\left(x+\frac{1}{a}+1\right)dx$$

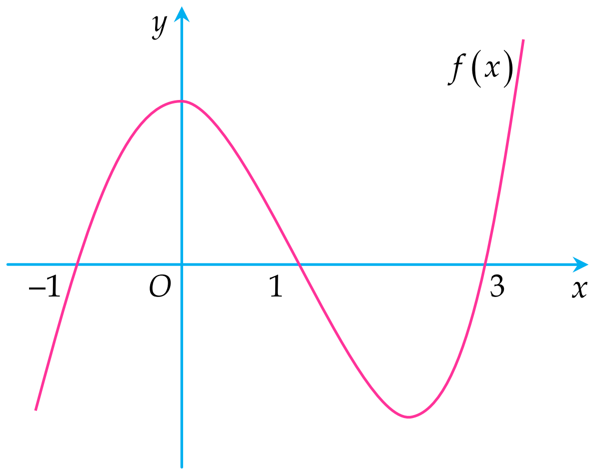
Hay $\int_{-\frac{1}{a}-1}^{\frac{1}{a}+1} a^3(x-1)\left(x-\frac{1}{a}-1\right)(x+1)\left(x+\frac{1}{a}+1\right)dx$ chính là diện tích S tạo bởi $f(f(x))$ và $f(x)$.

Chọn ý **A.**

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

Bài toán 90

Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $F(x)=\int\left[\frac{f''(x)}{f(x)}-\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2\right]dx$. Phương trình $f(x-4).F(x-4)=0$ có tổng các nghiệm là bao nhiêu, biết $F(3)=0$?



A. 15. **B.** 8. **C.** 20. **D.** 17.

Lời giải

Phân tích. *Việc rút gọn được tích phân kia là rất khó tuy nhiên khi tìm được rồi tìm ra đáp án là không khó và ta thấy bài toán khá là hay.*

Ta có $\int\left[\frac{f''(x-4)}{f(x-4)}-\left(\frac{f'(x-4)}{f(x-4)}\right)^2\right]dx=\int\left[\frac{f''(x-4).f(x-4)-\left(f'(x-4)\right)^2}{\left(f(x-4)\right)^2}\right]d(x-4)$

$$=\int\left[\frac{f'(x-4)}{f(x-4)}\right]'d(x-4)=\frac{f'(x-4)}{f(x-4)}+c.$$

$F(3)=0\Rightarrow F(3)=\frac{f'(-1)}{f(-1)}+c=0$. Mà hàm số đạt cực trị tại $x=-1$ nên $f'(-1)=0\Rightarrow c=0$.

Nên $f(x-4).F(x-4)=f'(x-4)$.

Vì $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt như hình vẽ đồ thị nên có dạng

$$f'(x)=k(x+1)(x-1)(x-3).$$

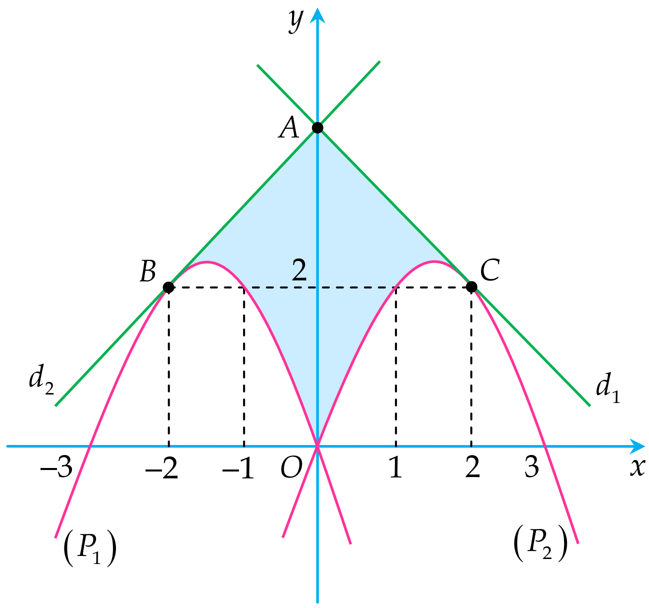
$$\Rightarrow f'(x-4)=0\Leftrightarrow k(x-4+1)(x-4-1)(x-4-3)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=5.\\x=7\end{array}\right.$$

Tổng các nghiệm là : $3+5+7=15$.

Chọn ý **A.**

Bài toán 91

Anh Tuấn có một con diều hình con cá chim. Con diều này được giới hạn bởi 2 Parabol $(P_1): -x^2 - 3x, (P_2): -x^2 + 3x$ và 2 tiếp tuyến d_1, d_2 đối xứng qua trục tung sao cho $BAC = 120^\circ$ (hình vẽ). Tính chính xác diện tích của con diều (làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



A. 3,81 **B.** 3,82 **C.** 4,31 **D.** 4,32

Lời giải

Ta có $\angle BAC = 120^\circ \Rightarrow \angle BAO = 60^\circ \Rightarrow$ hệ số góc của d_1 là $\tan(90^\circ - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d_1 tiếp xúc (P_1) tại $B \Rightarrow x_B$ là nghiệm của phương trình $(-x^2 - 3x)' = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_B = -\frac{9+\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow y_B = \frac{13}{6} \Rightarrow$ điểm $B\left(-\frac{9+\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{6}\right) \in d_1$ có phương trình dạng $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + a$

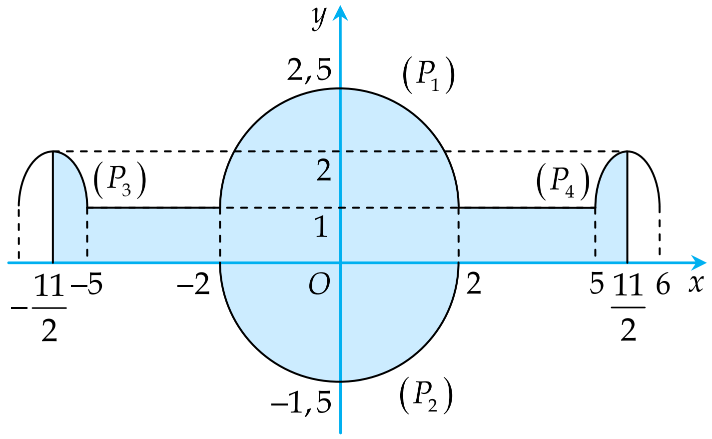
$$\Rightarrow a = \frac{14+3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow (d_1): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{14+3\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow S_{ABOC} = 2S_{OAB} = 2\int_{-\frac{9+\sqrt{3}}{6}}^{0}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{14+3\sqrt{3}}{6} - (-x^2 - 3x)\right)dx \approx 3,82$$

Chọn ý **B.**

Bài toán 92

Cho thiết diện mặt cắt một chiếc đĩa bay của người ngoài hành tính như hình vẽ (phần tô đậm). Cho biết các đường cong trong hình vẽ đều là một phần của các Parabol. Tính diện tích thiết diện đó.



A. $\frac{55}{6}$ B. $\frac{59}{6}$ **C.** $\frac{55}{3}$ **D.** $\frac{59}{3}$

Lời giải

Vì thiết diện là hình đối xứng qua trục tung, nên ta sẽ đi tính phần diện tích bên phải trục tung. Trước tiên, ta cần tìm phương trình của các Parabol.

Xét Parabol $(P_1): y = ax^2 + bx + c$ có

$$\begin{cases} x = \pm 2 \Leftrightarrow y = 1 \\ x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ 4a - 2b + c = 1 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ b = 0 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}$$

Xét Parabol $(P_2): y = ax^2 + bx + c$ có

$$\begin{cases} x = \pm 2 \Leftrightarrow y = 0 \\ x = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = 0 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}$$

Xét Parabol $(P_4): y = ax^2 + bx + c$ có

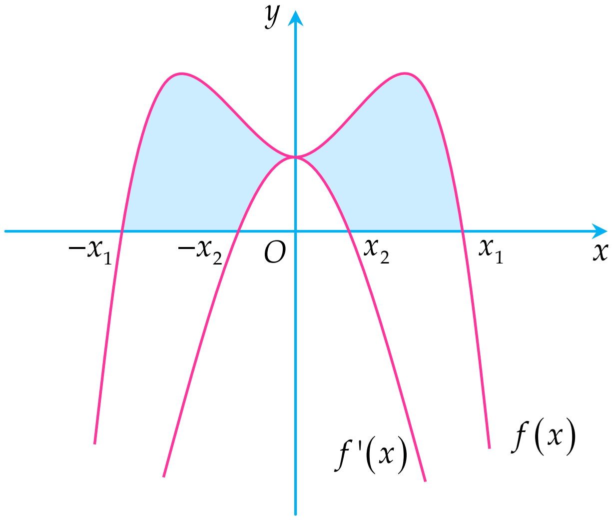
$$\begin{cases} x = 5 \Leftrightarrow y = 1 \\ x = 6 \Leftrightarrow y = 1 \\ x = \frac{11}{2} \Leftrightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25a + 5b + c = 1 \\ 36a + 6b + c = 1 \\ \frac{121}{4}a + \frac{11}{2}b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 44 \\ c = -119 \end{cases} \Rightarrow (P_4): y = -4x^2 + 44x - 119$$

$$\Rightarrow S = 2S_p = 2.\left(\int_0^2 \left(-\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2} - 1 \right) dx + \int_0^2 -\left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \right) dx + \int_5^{\frac{11}{2}} \left(-4x^2 + 44x - 119 - 1 \right) dx + \frac{11}{2}.1 \right) = \frac{59}{3}$$

Chọn ý **D.**

Bài toán 93

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có dạng $f(x)=ax^4+bx^2+1$. Biết đồ thị hàm số $f''(x)$ tiếp xúc đồ thị hàm số $f(x)$ tại 1 điểm trên trục tung. Gọi $\pm x_1$ là nghiệm của $f(x)$, $\pm x_2$ là nghiệm của $f''(x)$ $(x_1,x_2>0)$. Biết $x_1=3x_2$, tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ).



A. $\frac{152}{15}$ **B.** $\frac{73}{15}$ **C.** $\frac{152}{45}$ **D.** $\frac{73}{45}$

Lời giải

Ta có $f(x)=ax^4+bx^2+1 \Rightarrow f''(x)=12ax^2+2b$

Xét pt hoành độ giao điểm $f(x)-f''(x)=ax^4+bx^2+1-12ax^2-2b=0$. Vì $f(x)$ cắt Oy tại điểm $(0;1)$ $\Rightarrow x=0$ là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $\Rightarrow 1-2b=0 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^4+\frac{x^2}{2}+1 \\ f''(x)=12ax^2+1 \end{cases}$. Xét $f(x)=0 \Rightarrow x^2=\frac{-1\pm\sqrt{1-16a}}{4a}=x_1{}^2$

Xét $f''(x)=0 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{12a}=x_2{}^2$. Xét 2 TH của pt $x_1{}^2=9x_2{}^2$

- TH 1: $\frac{-1+\sqrt{1-16a}}{4a}=9.\frac{-1}{12a} \Rightarrow \sqrt{1-16a}=-2$ (loại)
- TH 2: $\frac{-1-\sqrt{1-16a}}{4a}=9.\frac{-1}{12a} \Rightarrow \sqrt{1-16a}=2 \Rightarrow a=-\frac{3}{16}$

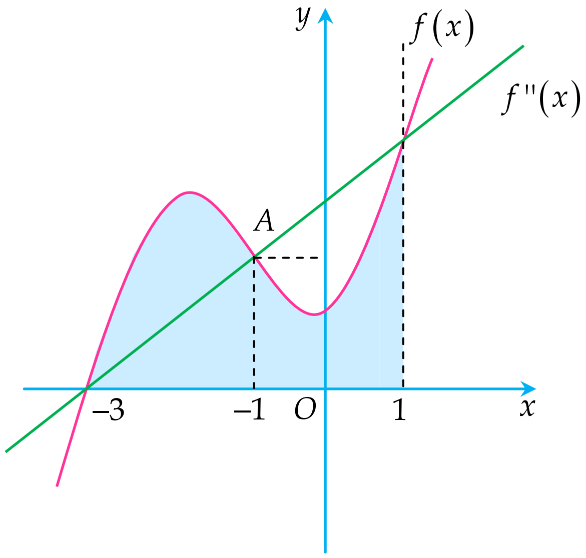
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=-\frac{3}{16}x^4+\frac{x^2}{2}+1 \\ f''(x)=-\frac{9}{4}x^2+1 \end{cases} \text{ và } x_1=2; x_2=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow S=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{3}{16}x^4+\frac{x^2}{2}+1\right)dx-\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{9}{4}x^2+1\right)dx=\frac{64}{15}-\frac{8}{9}=\frac{152}{45}$$

Chọn ý **C.**

Bài toán 94

Cho diện tích phần tô đậm bằng a, $f'(1)=b$. Biết $2f(-1)=f(1)+f(3)$ và $f(x)$ là một hàm bậc 3, tính $f'(1)+f'(3)$ theo a và b



A. $2b-a$ **B.** $b+a$ **C.** b **D.** $b-a$

Lời giải

Nhận xét, diện tích phần tô đậm chính bằng $\int_{-3}^{1} f(x)dx = a$

Ta có $\begin{cases} -1=\dfrac{1+(-3)}{2} \\ f(-1)=\dfrac{f(1)+f(-3)}{2} \end{cases} \Rightarrow$ A là điểm đối xứng của $f(x)$

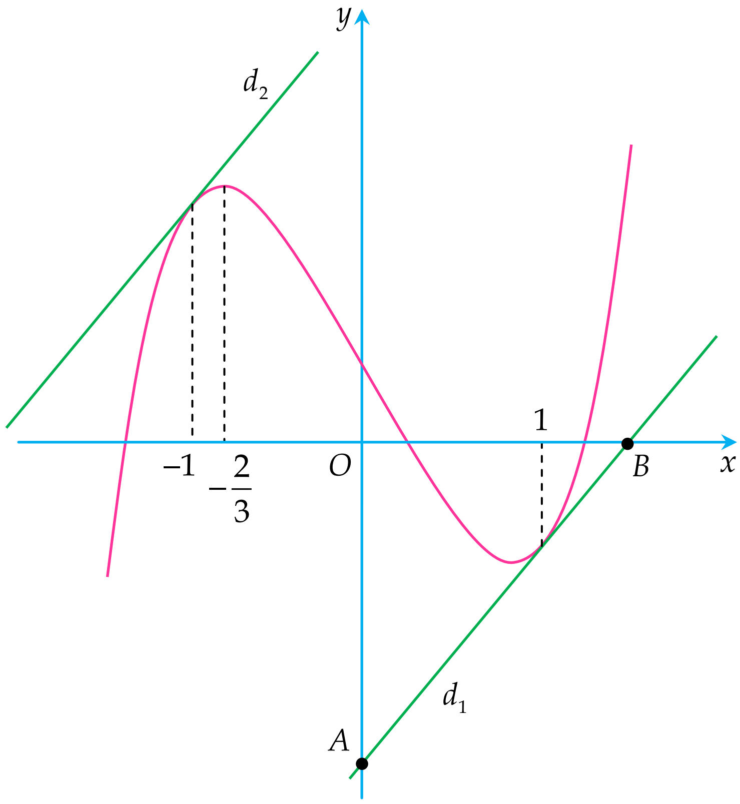
$$\Rightarrow \int_{-3}^{-1}(f(x)-f''(x))dx = \int_{-1}^{1}(f''(x)-f(x))dx \Rightarrow \int_{-3}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{1} f''(x)dx = f'(1)-f'(3)$$

$$\Rightarrow f'(-3)=b-a \Rightarrow f'(1)+f'(3)=2b-a$$

Chọn ý **A.**

Bài toán 95

Cho đồ thị hàm số là đa thức bậc 3 $f(x)$ như hình vẽ. Biết d_1 và d_2 là tiếp tuyến của $f(x)$ tại $x=1$ và $x=-1$; $\frac{OA}{OB}=\frac{1}{4}$ và $f(0)=\frac{2}{5}$. Tính $\int_{-1}^{1}(f(x)+f'(x))dx$



A. 1 **B.** $\frac{7}{10}$ **C.** $\frac{7}{9}$ **D.** $\frac{7}{8}$

Lời giải

Ta có d_1 và d_2 là tiếp tuyến tại $x=1$ và $x=-1$ của $f(x)$ và d_1 song song d_2

$\Rightarrow f'(-1)=f'(1)$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ có dạng } f'(x)=ax^2+b$$

Nhận thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x=-\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{4}{9}a+b=0$ (1)

Có $\frac{OA}{OB}=\frac{1}{4}\Rightarrow \tan(d_1;Ox)=\frac{1}{4}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{4}\Rightarrow a+b=\frac{1}{4}$ (2)

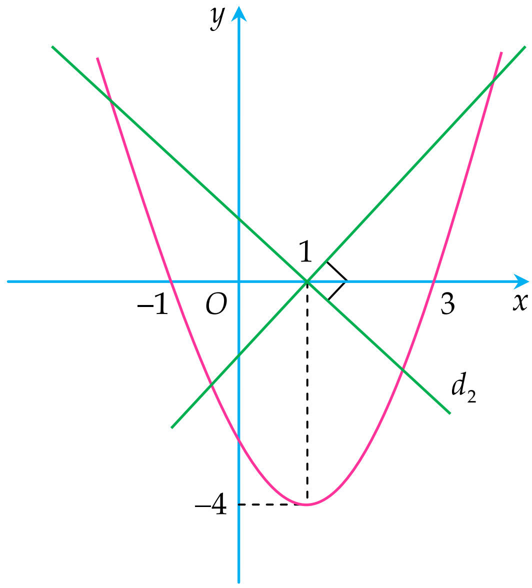
Từ (1) và (2) $\Rightarrow a=\frac{9}{20};b=-\frac{1}{5}\Rightarrow f'(x)=\frac{9}{20}x^2-\frac{1}{5}\Rightarrow f(x)=\frac{3}{20}x^3-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ (Vì $f(0)=\frac{2}{5}$)

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}(f(x)+f'(x))dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{20}x^3+\frac{9}{20}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\right)dx=\frac{7}{10}$$

Chọn ý **B.**

Bài toán 96

Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ như hình vẽ, d_1 là đồ thị hàm số $f'(x)$. Gọi S_1, S_2 là các diện tích tạo bởi d_1, d_2 với đồ thị hàm số $f(x)$. Tính gần đúng tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$



A. 1,35 **B.** 1,36 **C.** 1,37 **D.** 1,38

Lời giải

Nhìn vào đồ thị, thấy $f(x)$ nhận $x = -1$ và $x = 3$ là nghiệm và $f(1) = -4$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

$$d_2 \perp d_1 \text{ tại } (1;0) \Rightarrow (d_2): y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Xét pt hoành độ giao điểm $f(x)$ và $f'(x)$

$$x^2 - 2x - 3 = 2x - 2 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow S_1 = \int_{2-\sqrt{5}}^{2+\sqrt{5}} \left(-x^2 + 4x + 1\right) dx$$

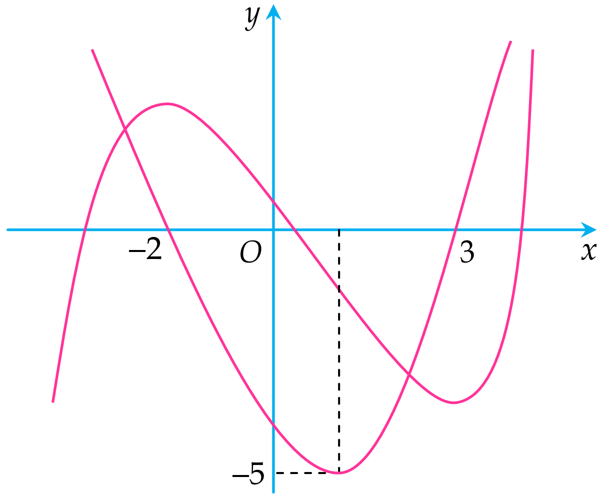
Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)$ và d_2

$$x^2 - 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{4} \Rightarrow S_2 = \int_{\frac{3-\sqrt{65}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{65}}{4}} \left(-x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}\right) dx \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} \approx 1{,}37$$

Chọn ý **C**

Bài toán 97

Cho đồ thị hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ như hình vẽ. Diện tích tạo bởi $f'(x)$ và $f(x)$ gần nhất ?



A. 23. **B.** 65. **C.** 50. **D.** 43.

Lời giải

Phân tích: *Bài toán đơn tuần là dùng kĩ thuật phân tích, biến đổi là nhiều. Dựa vào các dữ liệu của bài để suy ra được hàm từ đó tính được diện tích hình phẳng bằng tích phân.*

Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f(x)=3ax^2+2bx+c$.

$$\Rightarrow f(x)-f'(x)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-2b)x+d-c.$$

Nhìn vào đồ thị ta có $\begin{cases} x=-2 \Rightarrow 12a-4b+c=0 \\ x=3 \Rightarrow 27a+6b+c=0 \end{cases}$. (1)

Ta có $f'(x)$ có cực trị là -4 , gọi x_0 là hoành độ của điểm cực trị thì

$$f''(x_0)=0 \Leftrightarrow 6ax_0+2b=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{-b}{3a} \text{ và } 3a.x_0{}^2+2bx_0+c=-5$$

$$\Rightarrow 3a.\frac{b^2}{9a^2}+2b\frac{-b}{3a}+c=-4 \Leftrightarrow -\frac{b^2}{3a}+c=-5 \; (2)$$

Từ $(1) \Rightarrow a=\frac{-2}{3}b$ và $c=4b-12a$, thay vào (2) ta được

$$-\frac{b^2}{3a}+4b-12a=-5 \Leftrightarrow \frac{-b^2}{-2b}+4b+8b=-5 \Rightarrow b=\frac{-2}{5} \Rightarrow a=\frac{4}{15} \Rightarrow c=\frac{-24}{5}.$$

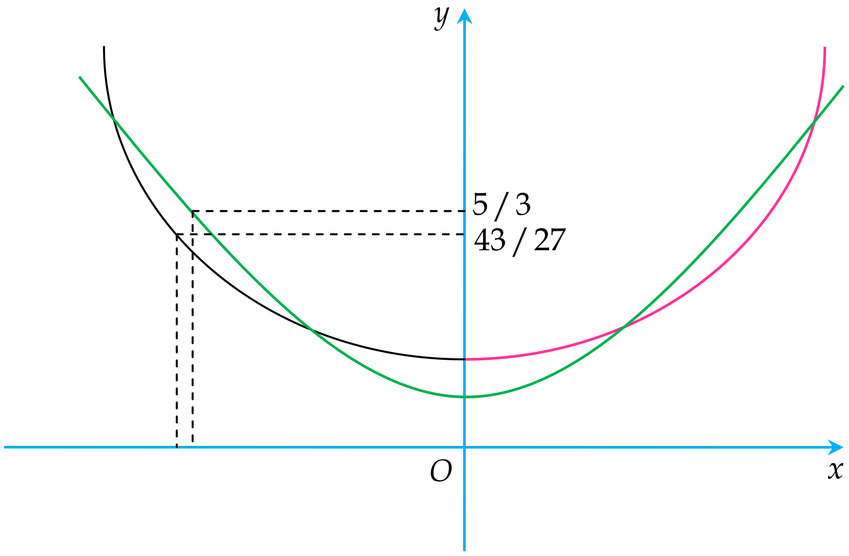
$\Rightarrow f(x)-f'(x)=\frac{4}{15}x^3+\frac{-6}{5}x^2-4x+\frac{24}{5}=0$ có nghiệm là x_1,x_2

Vậy diện tích cần tìm là $\int_{x_1}^{x_2}\frac{4}{15}x^3+\frac{-6}{5}x^2-4x+\frac{24}{5}\approx 65,4$

Chọn ý **B.**

Bài toán 98

Hàm số $f(x)$ có dạng $f(x)=ax^2+b$. Đồ thị hàm số $f(f(x))$ được cho như hình vẽ. Gọi diện tích hình tạo bởi $f(f(x))$ và $f(x)$ là S, t_1, t_2 là hoành độ giao điểm $f(f(x))$ và $f(x)$ $(t_1.t_2>0)$ sao cho $t_1^2+t_2^2+2\sqrt{t_1^2t_2^2}=9$. Tính S ?



A. $\frac{50}{203}$. **B.** $\frac{42}{305}$. **C.** $\frac{32}{405}$. **D.** $\frac{65}{203}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $f(f(x))$ là

$$a\left(ax^2+b\right)^2+b=ax^2+b \Leftrightarrow a^3x^4+\left(2a^2b-a\right)x^2+b^2a=0.$$

Áp dụng Ta -let $\begin{cases} t_1^2+t_2^2=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2b}{a} \\ t_1^2.t_2^2=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 \end{cases}$

Theo giả thiết ta có $t_1^2+t_2^2+2\sqrt{t_1^2t_2^2}=9 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$ (do đồ thị hướng lên trên nên $a>0$)

Nhìn vào đồ thị ta thấy $\frac{25}{9}a+b=\frac{43}{27} \Rightarrow b=\frac{2}{3}$

Nên $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$ và $f(f(x))=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

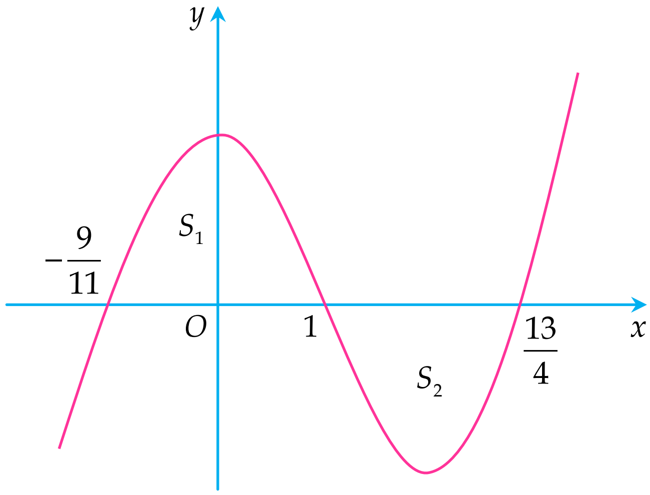
Khi đó phương trình $f(f(x))-f(x)=0$ có 4 nghiệm là $-1;1;-2;2$

Suy ra $S=\frac{32}{405}$

Chọn ý **C.**

Bài toán 99

Cho đồ thị hàm số $f(x)$. S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn như hình vẽ. Tính giá trị lớn nhất của $\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{2\sin x + 11\cos x + 5}{(2\cos x - \sin x + 4)^2}.\mathrm{f}\left(\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right)dx$?



A. $S_1 + S_2$ **B.** S_1 **C.** S_2 **D.** $S_1 + \frac{2}{3}S_2$

Lời giải

Phân tích: *Bài toán có ý tưởng khác là hay về việc đổi biến, tuy nhiên cũng dễ nhầm lẫn trong việc xác định khoảng giá trị của t. Bài toán còn là sự kết hợp giữa tích phân và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.*

Đặt $\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} = t \Rightarrow \frac{2\sin x + 11\cos x + 5}{(2\cos x - \sin x + 4)^2}dx = dt$. Đổi biến $\begin{cases} x_0 \Rightarrow t_0 \\ x_1 \Rightarrow t_1 \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{2\sin x + 11\cos x + 5}{(2\cos x - \sin x + 4)^2}.f\left(\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right)dx = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.

Mặt khác ta lại có $\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} = t \Leftrightarrow 3\sin x - \cos x - 1 = t.(2\cos x - \sin x + 4)$

$$\Leftrightarrow (3+t).\mathrm{sinx} + (-1-2t).\cos x = 1 + 4t \qquad (*)$$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì

$$\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} = t \Leftrightarrow 3\sin x - \cos x - 1 = t.(2\cos x - \sin x + 4)$$

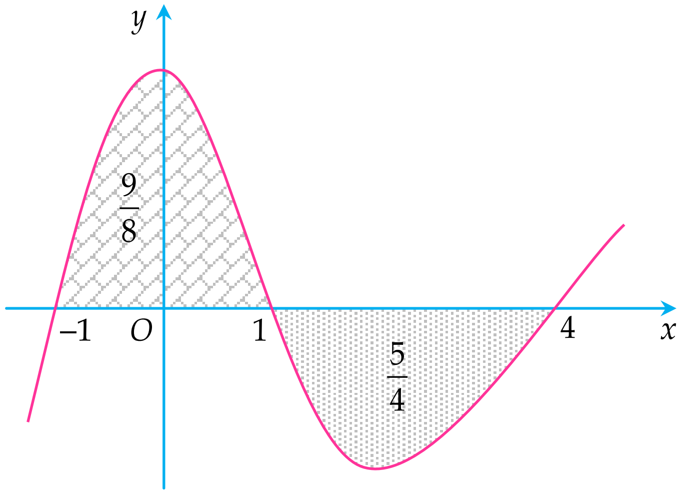
$$\Leftrightarrow (3+t)^2 + (-1-2t)^2 \ge (1+4t)^2 \Leftrightarrow 11t^2 - 2t - 9 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-9}{11} \le t \le 1$$

Nhìn vào đồ thị ta thấy diện tích phần S_1 chính là giá trị lớn nhất của tích phân $\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt$

Chọn ý **B.**

Bài toán 100

Cho đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Diện tích 2 hình tạo bởi $f'(x)$ và trục hoành là $\frac{9}{8},\frac{5}{4}, f(1)=3$. Tính giá trị của tích phân $\int_{-1}^{4} f'(x).f(x)dx$?



A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Phân tích: *Một bài toán khá dễ thở nhá!*

Ta đặt $\int_{-1}^{4} f'(x).f(x)dx = \int_{-1}^{4} f(x)d(f(x)) = \left.\frac{f(x)^2}{2}\right|_{-1}^{4} = \frac{f(4)^2 - f(-1)^2}{2}$ (1)

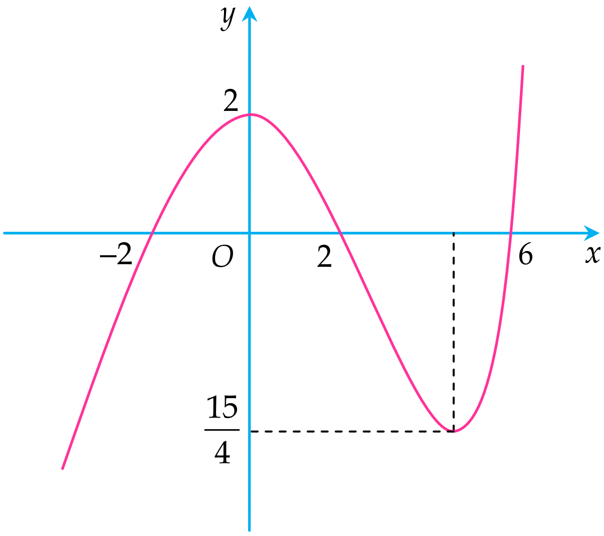
Từ đồ thị suy ra $\begin{cases} \int_{-1}^{1} f'(x) = \frac{9}{8} \\ \int_{1}^{4} f'(x) = -\frac{5}{4} \end{cases} \begin{cases} f(1) - f(-1) = \frac{9}{8} \\ f(4) - f(1) = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = \frac{15}{8} \\ f(4) = \frac{7}{4} \end{cases}$

Thay vào (1) ta được $\frac{f(4)^2 - f(-1)^2}{2} = -\frac{29}{128}$.

Chọn ý **B.**

Bài toán 101

Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ.



Để hàm số $h(x)=\dfrac{x^2-8x+\sqrt{n-m}}{f\left(f(x)+m\right)}$ có số tiệm cận đứng là lớn nhất là n (với m,n nguyên dương). Tính giá trị nhỏ nhất của $S=m^2+n^2$

A. 14 **B.** 74 **C.** 50 **D.** 3

Lời giải

Để $g(x)$ có số tiệm cận đứng thì $f\left(f(x)+m\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)+m=-2 \\ f(x)+m=2 \\ f(x)+m=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-2-m \\ f(x)=2-m \\ f(x)=6-m \end{array}\right.$

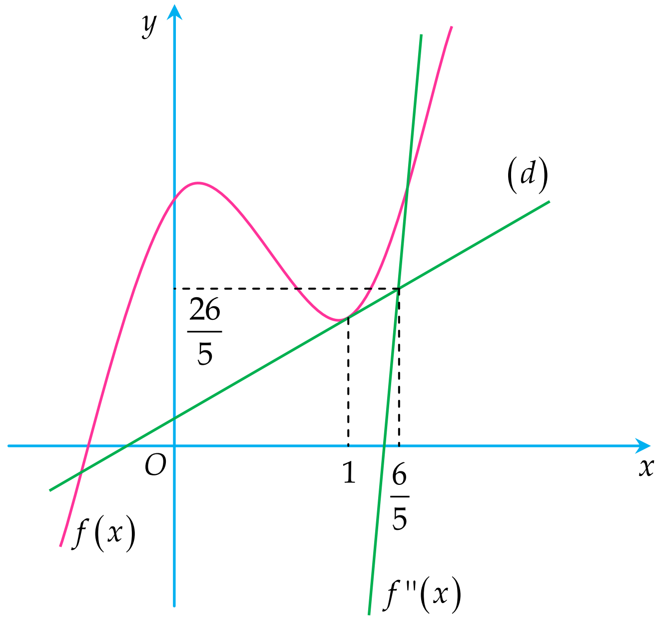
Để hàm số có số TCĐ là lớn nhất thì hoặc là $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-m<2 \\ 2-m>-\dfrac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow m=5 \\ \begin{cases} -2-m>\dfrac{-15}{4} \\ 2-m<2 \end{cases} \Rightarrow m=1 \end{array}\right.$

Có $g'(x)=2x-8$ đồng biến trên $(-4,+\infty)$ nên khi $m=5$ và đường thẳng $y=-7$ giáp với $f(x)$ tại điểm có hoành độ lớn hơn -4 nên $g(x)>0$ với x thuộc $(-4;+\infty)$ nên $x^2-8x+\sqrt{n-m}>0$. Nên $S=74$ hoặc 50 $\Rightarrow S_{\min}=50$

Chọn ý **C.**

Bài toán 102

Cho $f(x), f''(x)$ và d là tiếp tuyến của $f(x)$ dưới hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có dạng $mx^3 - nx^2 + p$. Tính $43n - 45p$



A. $-\frac{285}{3}$ **B.** 450 **C.** 201 **D.** –182

Lời giải

Phương trình $f''(x)$ là $y'' = 6mx - 2n$

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ là 1 là $y = (3m-2n)(x-1) + m - n + p$

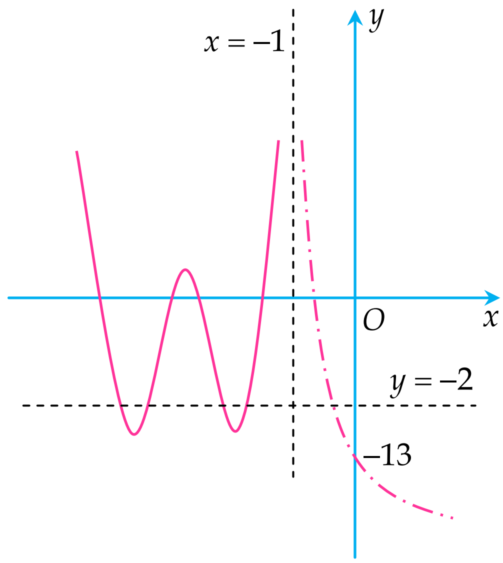
Ta có $\begin{cases} \frac{26}{5} = (3m-2n)\frac{1}{5} + m - n + p \\ \frac{26}{5} = \frac{36}{5}m - 2n \end{cases}$

Tìm được $n = \frac{18m-13}{5}; p = \frac{86m+39}{25}$

Chọn ý **D.**

Bài toán 103

Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Tổng các giá trị nguyên của $m \in [3;20]$ để hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ có 4 cực trị. Biết tử số của $f(x)$ có hệ số tự do dương.



A. 64 **B.** –58 **C.** 75 **D.** 88

Lời giải

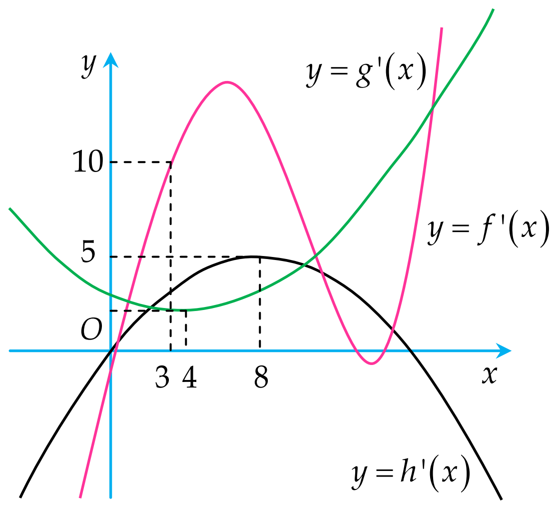
Đặt $h(x) = f(x) + mx \Rightarrow h'(x) = f'(x) + m$. Vì hệ số tự do của tử số của $f(x)$ dương Và mẫu có $x+1$. Tức là $f(0) > 0$. Ta thấy đường nét đứt giao với trục Oy và tại $y=0$ thì điểm cực trị đó là cực đại x_M và $f(x_M) > f(0) > 0 \Rightarrow$ Đường đỏ tạo ra 3 điểm cực trị cho $g(x)$ nếu cắt trục Ox

- **Trường hợp 1 :** Cả 2 đường đỏ và vàng đều nằm trên Ox thì $g(x)$ có 2 điểm cực trị.
- **Trường hợp 2 :** Đường màu vàng cắt Ox tại 2 điểm khác cực trị của $f'(x)$ (hoặc 3 điểm) có ít nhất 3 điểm cực trị và đường đỏ có 3 điểm cực trị (loại).
- **Trường hợp 3 :** Đường màu vàng cắt Ox tại 4 điểm (loại) .
- **Trường hợp 4 :** Đường màu vàng cắt Ox tại 2 điểm là cực trị của $f'(x)$ (hoặc không cắt điểm
- nào) và để có 4 cực trị thì ta tịnh tiến đồ thị $f'(x)$ sao cho $13 > m \geq 2$. Khi đó tổng giá trị m là 75

Chọn ý **C.**

Bài toán 104

Cho 3 hàm số $y=f(x),y=g(x),y=h(x)$. Đồ thị của 3 hàm số $y=f'(x),y=g'(x)$ $,y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới, trong đó đường đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hàm số $k(x)=f(x+7)+g(5x+1)-h\left(4x+\frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



A. $\left(-\frac{15}{4};0\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{8};1\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{8};+\infty\right)$.

Lời giải

Ta cần giải bất phương trình $k'(x)=f'(x+7)+2g'\left(2x+\frac{15}{2}\right)-4h'\left(4x+\frac{3}{2}\right)>0$

Không thể giải trực tiếp bất phương trình này. Quan sát các đồ thị của các hàm số $y=f'(x),y=g'(x),y=h'(x)$ ta nhận thấy

$$f'(x)>10,\forall x\in(3;8);g'(x)\geq 5,\forall x,h'(x)<5,\forall x\in(3;8)$$

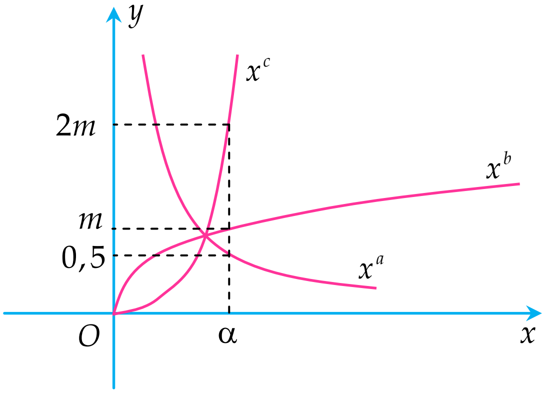
Do đó $f'(a)+2g'(b)-4h'(c)>10+2.5-4.5=0,\forall a,c\in(3;8),b\in\mathbb{R}$

Vì vậy ta chỉ cần chọn $\begin{cases}3<x+7<8\\3<4x+\frac{3}{2}<8\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{8}<x<1$.

Đối chiếu với đáp án ta chọn ý C.

Bài toán 105

Cho hình vẽ của đồ thị các hàm số $y=x^a; y=x^b; y=x^c$ có đồ thị như hình bên. Khi đó hãy tìm tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\dfrac{3a^2+(2b+a+c)^2}{a^2+5c^2+4ac}$?



A. 31 **B.** 32 **C.** 33 **D.** 34

Lời giải

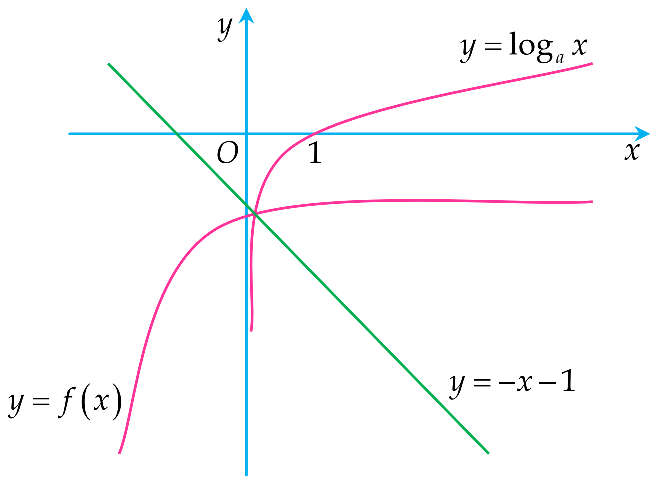
Nhận thấy ngay khi $x=\alpha$, ta có

$$\alpha^c=2\alpha^b \Leftrightarrow c\log_2\alpha=1+b\log_2\alpha \Leftrightarrow (c-b)\log_2\alpha=1$$
$$\alpha^a=0.5 \Leftrightarrow a\log_2\alpha=-1$$
$$\Leftrightarrow a+c=b$$

Đến đây thay vào biểu thức ta được một hàm thuần nhất 2 biến rồi đặt 1 ẩn đưa về khảo sát hàm 1 biến!

Bài toán 106

Hình vẽ bên là đồ thị của hai hàm số $y=\log_a x$ và $y=f(x)$. Đồ thị của chúng đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x-1$. Tính $f(\log_a 2018)$



A. $f(\log_a 2018)=-1-\dfrac{a}{2018}$ **B.** $f(\log_a 2018)=-1-\dfrac{1}{2018a}$

C. $f(\log_a 2018)=-1+\dfrac{a}{2018}$ **D.** $f(\log_a 2018)=-1+\dfrac{1}{2018a}$

Lời giải

Lời giải

Gọi $(b;c)\in(C_1): y=\log_a x; (e;f)\in(C_2): y=f(x)$.

Ta có hệ điều kiện

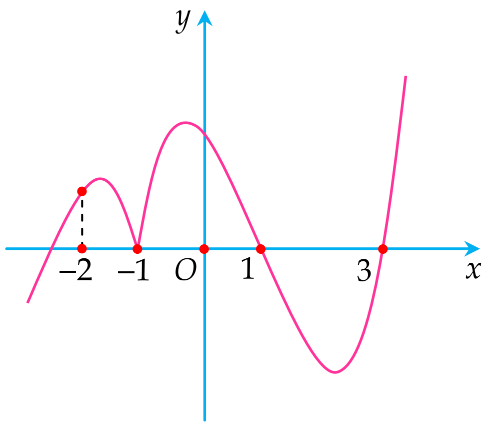
$$\begin{cases} c+f=-(b+e)-2 \\ 1(b-e)-1(c-f)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=-f-e-2 \\ b-c=e-f \end{cases} \begin{cases} b=-f-1 \\ c=-e-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -e-1=\log_a(-f-1) \Leftrightarrow -f-1=a^{-e-1} \Leftrightarrow f=-1-a^{-e-1} \Leftrightarrow f(x)=-1-a^{-x-1}.$$

Vậy $f(\log_a 2018)=-1-a^{-\log_a 2018-1}=-1-\dfrac{1}{2018a}$

Bài toán 107

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1\right)f(x)\ge 0$ có nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2]$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $g(x)=mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1$, rõ ràng $g(x)$ xác định $\forall x\in[-2;2]$.

Hàm số $f(x)$ đổi dấu 1 lần trên $[-2;2]$, tại điểm $x=1$ khi đó $f(x)$ đổi dấu từ dương sang âm.

Vậy để $f(x).g(x)\ge 0\ \forall x\in[-2;2]$ thì $g(x)\ge 0\ \forall x\in[-2;1]$ và $g(x)\le 0\ \forall x\in[1;2]$.

Nhận thấy $g(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ nên $g(1)=0\Rightarrow m+2m^2+2m+1=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

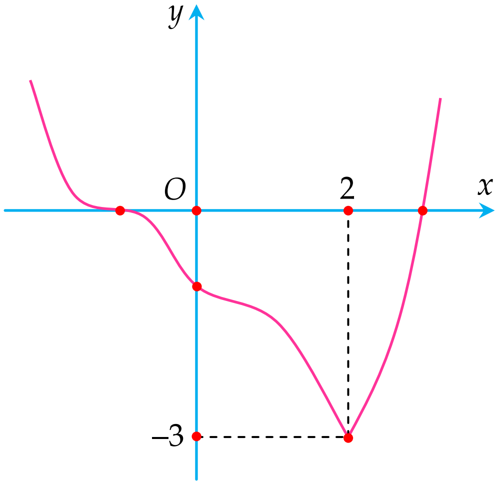
Nếu $m=-1$ $g(x)=-x+\sqrt{5-x^2}-1$, dễ thấy $g(x)\ge 0\ \forall x\in[-2;1]$ và $g(x)\le 0\ \forall x\in[1;2]$.

Vậy $m=-1$ thỏa mãn.

Ta không cần thử trường hợp $m=\dfrac{-1}{2}$ vì đề bài nói $m\in Z$.

Bài toán 108

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(x)+x^2>4x+m$ có nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)$



A. $m<-3$.
B. $m<-10$.
C. $m<-2$.
D. $m<5$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với $2f(x)+x^2-4x>m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy $\min\limits_{(-1;3)} f(x)=-3$, dấu bằng xảy ra khi $x=2$.

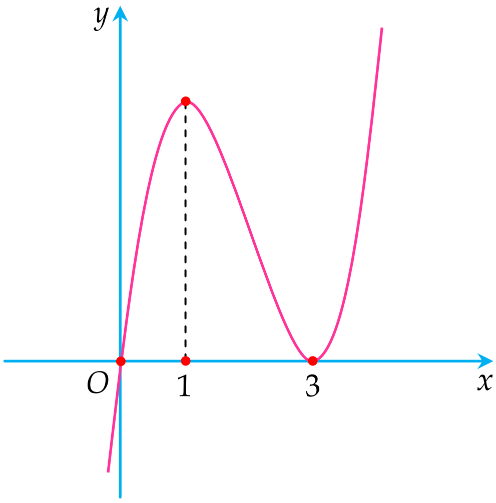
Lại có $x^2-4x=(x-2)^2-4\ge -4$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Vậy $\min\limits_{(-1;3)}\left(2f(x)+x^2-4x\right)=2.(-3)+(-4)=-10$.

Do đó bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)$ khi và chỉ khi $m<-10$.

Bài toán 109

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Để đồ thị $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có số điểm cực trị ít nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số m là m_0. Tìm mệnh đề đúng?



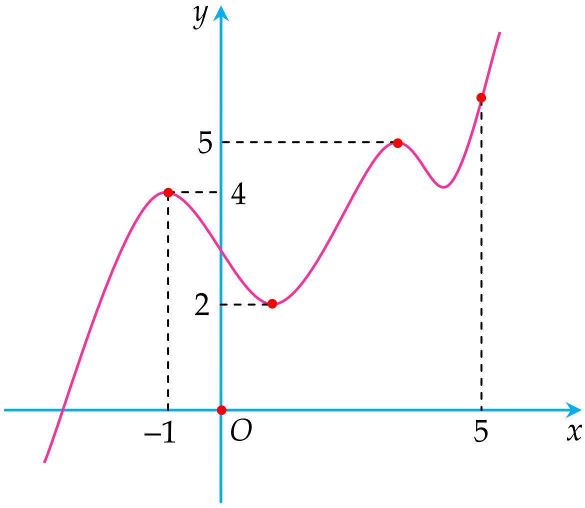
A. $m_0\in(0;1)$.
B. $m_0\in(-1;0)$.
C. $m_0\in(-\infty;-1)$.
D. $m_0\in(1;+\infty)$.

Lời giải

Xét hàm $g(x) = f^2(x) + f(x) + m$. Bằng việc khảo sát $g(x)$, chỉ ra $g(x)$ có 3 điểm cực trị, từ đó $h(x)$ muốn có 3 điểm cực trị thì $g(x) \ge 0\ \forall x \in R \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{4}$.

Bài toán 110

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau?



A. $M + m < 7$. **B.** $Mm > 10$. **C.** $M - m > 3$. **D.** $\frac{M}{m} > 2$.

Lời giải

Một câu quá quen thuộc rồi phải không nào!

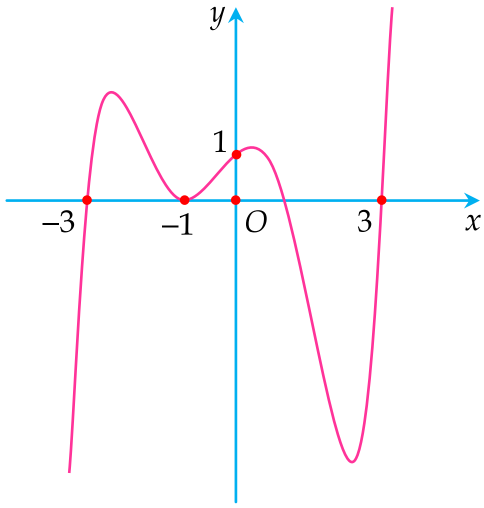
Đặt $t = x^2 - 2x, x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$.

Từ đồ thị xét hàm $y = f(t), t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$, ta có $m = 2, M > 5$

Chọn A.

Bài toán 111

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|f(|x-2|)+1\right|-m=0$ có 8 nghiệm phân biệt trong khoảng $(-5;5)$



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $x-2=t$, phương trình tương đương: $\left|f(|t|)+1\right|=m(1)$.

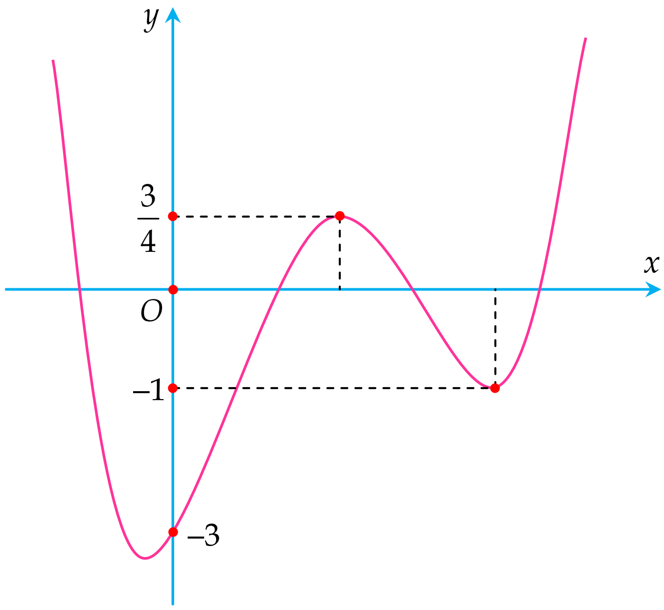
Phương trình có 8 nghiệm phân biệt thuộc $(-5;5)$ khi và chỉ khi (1) có 8 nghiệm phân biệt thuộc $(-7;3)$. Ta thực hiện việc biến đổi ra đồ thị hàm số $y=\left|f(|x|)+1\right|$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ như sau

- ***Bước 1:*** Tạo ra đồ thị hàm số $y=f(|x|)+1$ bằng cách lấy đối xứng qua trục tung phần bên phải trục tung đồ thị hàm $y=f(x)$ rồi tịnh tiến lên trên 1 đơn vị:
- ***Bước 2:*** Tạo ra đồ thị hàm số $y=\left|f(|x|)+1\right|$ bằng cách lấy đối xứng phần dưới trục hoành đồ thị hàm số bên trên, qua trục hoành.

Do đó đồ thị hàm số có 8 nghiệm thuộc $(-7;3)$ thì $m=1$.

Bài toán 112

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số

Lời giải

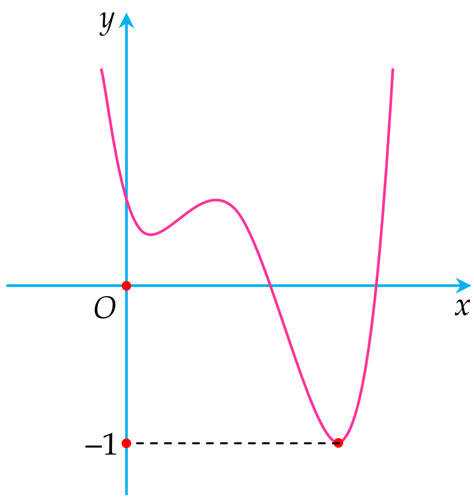
Đặt $x+m=t$, phương trình tương đương với $f(|t|)=m(1)$

Nhận xét: Mỗi nghiệm của t ở (1) cho ta duy nhất 1 nghiệm x, do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(t)=m$ có hai nghiệm phân biệt dương và không có nghiệm $t=0$. Điều đó có nghĩa $m=-1$ hoặc $m=\frac{3}{4}$. Vì $m \in Z \Rightarrow m=-1$.

Bài toán 113

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=2^{f(x)}-3^{f(x)} \Rightarrow g'(x)=f'(x)2^{f(x)}.\ln 2-f'(x)3^{f(x)}.\ln 3;\forall x\in R$.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 2^{f(x)}.\ln 2=3^{f(x)}.\ln 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}=\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f(x)=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\ln 3}{\ln 2} & (2) \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy:

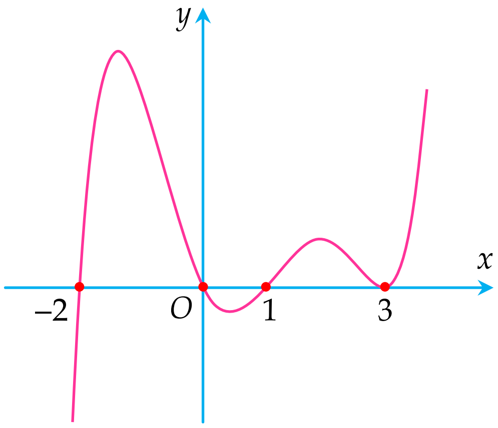
Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt (vì hàm số $y=f(x)$ có 3 cực trị).

Phương trình (2) vô nghiệm vì đường thẳng $y=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\ln 3}{\ln 2}<-1$ không cắt đồ thị hàm số.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt hay hàm số đã cho có 3 cực trị.

Bài toán 114

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f\left(x^2\right)=m$ (m là tham số thực) là?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

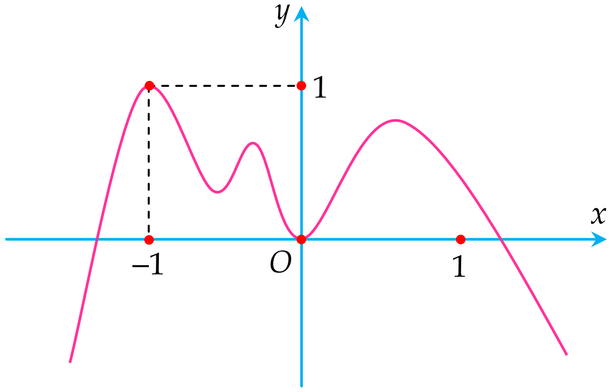
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(1)$	↗	$f(3)$	↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=m$ có tối đa hai nghiệm dương, do đó phương trình $f\left(x^2\right)=m$ có tối đa 4 nghiệm. Chọn C.

Bài toán 115

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(\cos x))=0$ trong đoạn $[0;2019]$ là



A. 642. **B.** 1002. **C.** 1003. **D.** 643.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\ (x<-1) \\ x=0 \\ x=b\ (b>1) \end{array}\right.$.

Do đó $f(f(\cos x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)=a\ (x<-1) \\ f(\cos x)=0 \\ f(\cos x)=b\ (b>1) \end{array}\right.$.

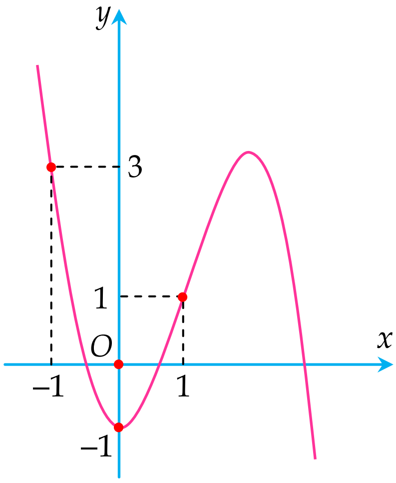
Lại có, nếu $x\in[-1;1]$ thì $f(x)\in[0;1]$. Suy ra vì $\cos x\in[-1;1]$ nên $f(\cos x)\in[0;1]$.

Vậy nên loại các trường hợp $f(\cos x)=a$ và $f(\cos x)=b$. Chỉ còn $f(\cos x)=0$.

Tiếp tục $f(\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=a\ (x<-1)\to loai \\ \cos x=0 \\ \cos x=b\ (b>1)\to loai \end{array}\right.$.

Bài toán 116

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(m-2018)f(\cos x)+m-2019=0$ có đúng 6 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$ là?



A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(f(\cos x)+1\right)\left(f(\cos x)+m-2019\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)=-1 \\ f(\cos x)=2019-m \end{array}\right.$$

Với $f(\cos x)=-1 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$

Do đó để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0;2\pi]$ thì phương trình $f(\cos x)=2019-m$ phải có 4 nghiệp phân biệt thuộc $[0;2\pi]$, không tính cách nghiệm làm cho $\cos x=0$.

Đặt $t=\cos x, f(t)=2019-m,$ theo yêu cầu bài toán có đúng 2 nghiệm phân biệt $t\in(-1;1]\setminus\{0\}$.

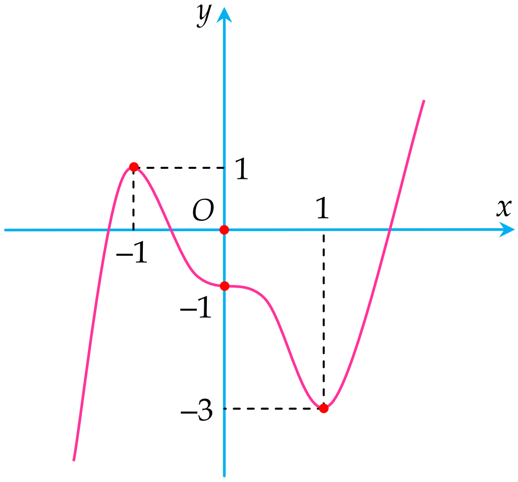
Từ đồ thị ta có phương trình có đúng 2 nghiệm khi

$$-1<2019-m\le -1 \Leftrightarrow 2018\le m<2020; m\in Z.$$

Vậy $m\in(2018;2019)$

Bài toán 117

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(\left|x\right|-1\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $g\left(x\right)=f\left(x-1\right)$, đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ được xác định bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ sang phải 1 đơn vị.

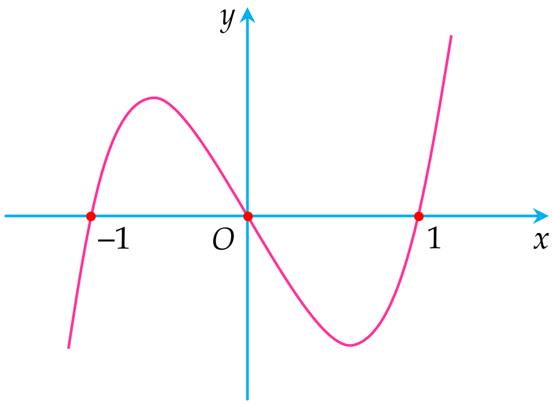
Rõ ràng $g\left(\left|x\right|\right)=f\left(\left|x\right|-1\right)$, do đó đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|-1\right)$ được xác định bằng cách giữ nguyên phần bên phải trục tung của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ và lấy đối xứng qua trục tung của phần đó

Từ đó ta thấy phương trình $f\left(\left|x\right|-1\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-3<m<1$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m\in\left\{-2;-1;0\right\}$

Bài toán 118

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $\forall x\in R$, hàm số $f'\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'\left(x\right)\right]$ là?



A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Đồ thị $f'(x)$ đi qua các điểm $O(0;0); A(-1;0); B(1;0)$ nên ta có $\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$

Do đó $f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1$.

Đặt $g(x)=f(f'(x))$.

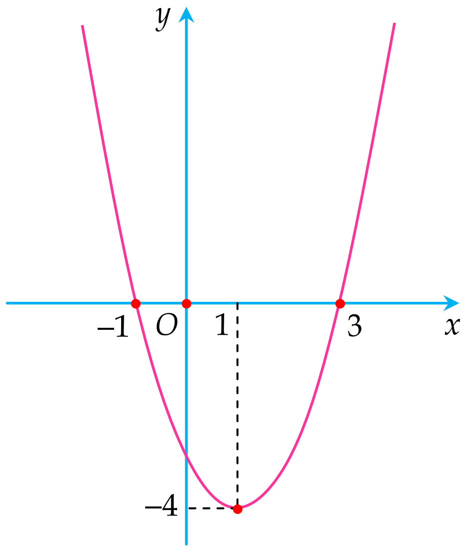
Ta có $g'(x)=\left(f\left[f'(x)\right]\right)'=f'\left[f'(x)\right].f''(x)=\left[\left(x^3-x\right)^3-\left(x^3-x\right)\right]\left(3x^2-1\right)$

$$=x(x-1)(x+1)\left(x^3-x+1\right)\left(3x^2-1\right)$$

Dễ thấy $g(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt, tất cả đều là nghiệm đơn nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Bài toán 119

Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \ \ (a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=-9$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Phần nguyên của giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là?



A. 2 **B.** 27 **C.** 29 **D.** 35

Lời giải

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua 3 điểm $(-1;0),(3;0),(1;-4)$ ta có hệ: $\begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \\ 3a+2b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=-1 \\ c=-3 \end{cases}$

Suy ra $f'(x)=x^2-2x-3 \Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(x^2-2x-3\right)dx=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=-9$ tại điểm có hoành độ x_0 nên

$$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=3 \end{array}\right., \text{ do } x_0>0 \Rightarrow x_0=3.$$

Từ đó suy ra $f(3)=-9 \Leftrightarrow \frac{1}{3}.27-9+C=-9 \Leftrightarrow C=0 \Rightarrow (C): y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

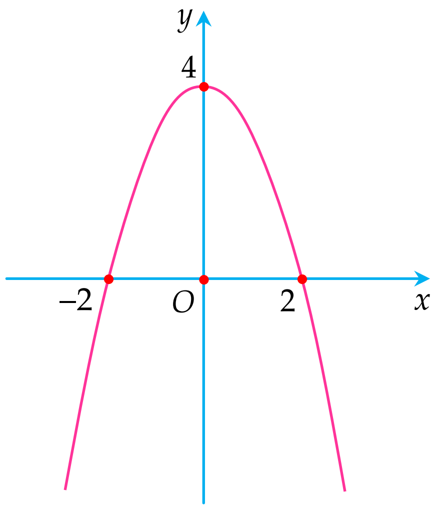
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành:

$$\frac{1}{3}x^3-x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{\frac{3-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{5}}{2}} \left|\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right| dx = 29.25$.

Bài toán 120

Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=\frac{2}{3}$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Giá trị $3a+2b+c-d$ là?



A. 0. **B.** 2 **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ là hàm chẵn, suy ra $b=0$.

Mà $\begin{cases} f'(0)=4 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ a=\dfrac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x^2+4$

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x^2+4)dx=\frac{-1}{3}x^3+4x+C$.

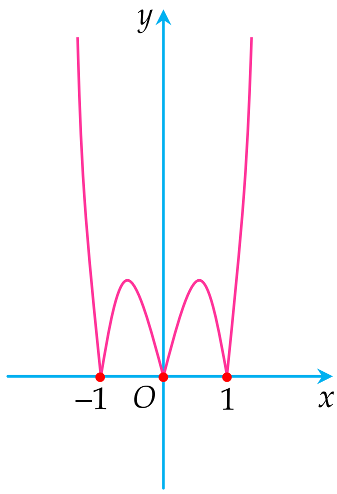
Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=\frac{13}{3}$ tại điểm có hoành độ x_0 nên

$$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow -x_0^2+4=0 \Leftrightarrow x_0=\pm 2, \text{ do } x_0>0 \Rightarrow x_0=2.$$

Suy ra $f(2)=\frac{13}{3} \Leftrightarrow C=-1 \Rightarrow (C): y=-\frac{1}{3}x^3+4x-1 \Rightarrow 3a+2b+c-d=4$.

Bài toán 121

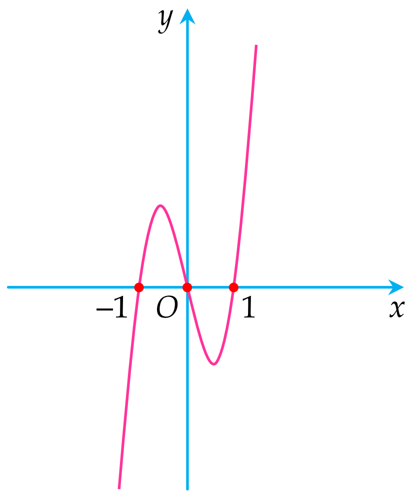
Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a>0)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y=|f'(x)|$ như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại 2 điểm. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là?



A. $\frac{7}{15}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{14}{15}$ **D.** $\frac{16}{15}$

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y=|f'(x)|$ với $a>0$ ta dễ dàng có được đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới.



Ta có $f'(x)=4ax^3+2bx$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ qua $(1;0)$ và $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ nên ta có hệ :

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{-8\sqrt{3}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=0 \\ 4a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+2b\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{-8\sqrt{3}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=4x^3-4x$$

Ta có: $f(x)=\int f(x)dx=\int(4x^3-4x)dx=x^4-2x+C$.

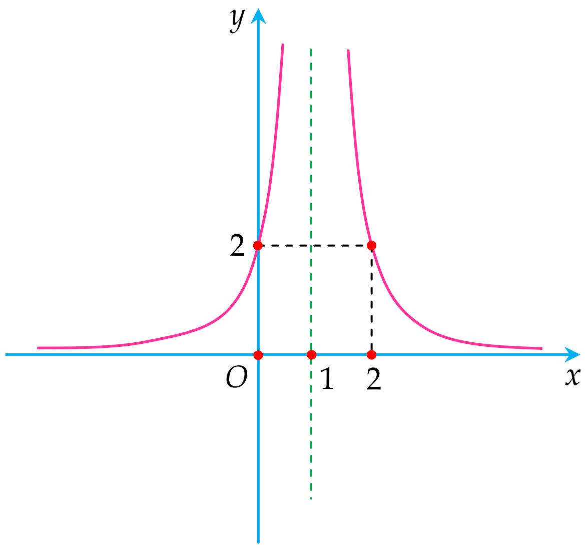
Do (C) tiếp xúc với đường thẳng Ox tại điểm có hoành độ x_0 nên $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 4x_0^3-4x_0=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\pm 1 \end{array}\right.$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại 2 điểm nên 2 điểm đó có hoành độ là ± 1. Suy ra $f(1)=0 \Rightarrow C=1 \Rightarrow (C): y=x^4-2x^2+1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_{-1}^{1}\left|x^4-2x^2+1\right|dx=\frac{16}{15}$.

Bài toán 122

Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\left(a,b,c,d\in\mathbb{R},\frac{-d}{c}\neq 0\right)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có dạng ?



A. $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ **B.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ **C.** $y=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$ **D.** $y=\frac{-1}{2}x+2$

Lời giải

Ta có $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy :

- Đồ thị $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=1 \Rightarrow \frac{-d}{c}=-1 \Leftrightarrow c=-d$ (1).
- Đồ thị $y=f'(x)$ qua điểm $(2;2) \Rightarrow \frac{ad-bc}{(2c+d)^2}=2 \Rightarrow ad-bc=2(2c+d)^2$ (2)
- Đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục tung tại $y=2 \Rightarrow \frac{ad-bc}{d^2}=2 \Rightarrow ad-bc=2d^2$ (3).

Mà đồ thị $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 $\Rightarrow \dfrac{b}{d}=3 \Rightarrow b=3d\ (4)$.

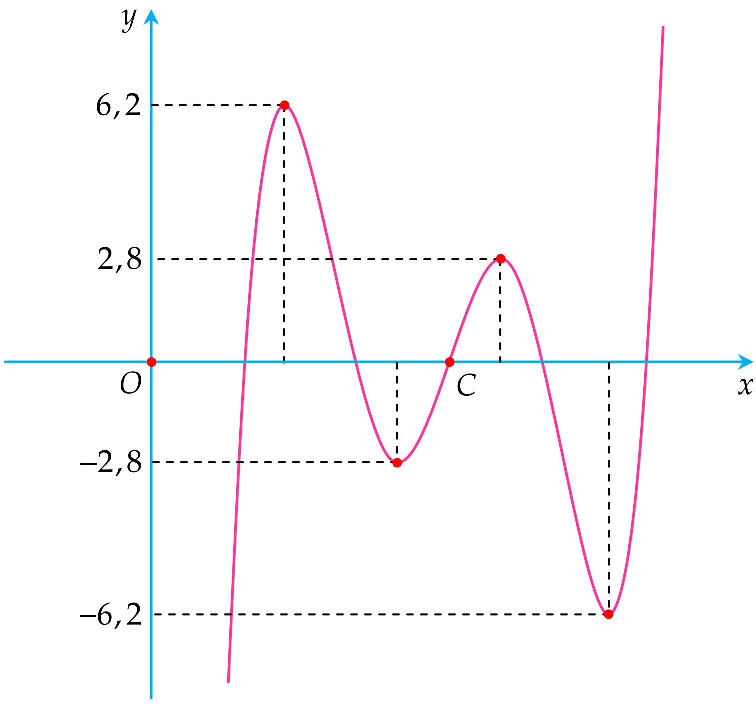
Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta có hệ $\begin{cases} c=-d \\ ad-bc=2(2c+d)^2 \\ ad-bc=2d^2 \\ b=3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=1 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow y=f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$.

Đồ thị (C) giao với Ox tại $(3;0)$, $f'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(3)=\dfrac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(3;0)$ là : $y=\dfrac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

Bài toán 123

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và cắt trục hoành tại 5 điểm như hình vẽ sao cho điểm C là tâm đối xứng của đồ thị.



Xét các cặp số $(a;b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $a<b$ sao cho đồ thị hàm số

$$g(x)=[f(x)-a][f(x)-b]$$

Cắt trục hoành có đúng 3 cặp giao điểm đối xứng nhau qua điểm C. Tổng các giá trị a nhận được?

A. 15 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 10

Nhóm toán VD – VDC

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=g(x)$ với trục hoành là

$$[f(x)-a]\cdot[f(x)-b]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=b \end{array}\right.$$

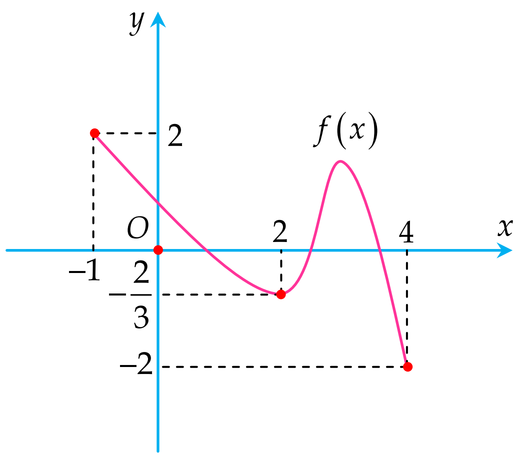
Vì đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận điểm C làm tâm đối xứng nên để đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành có đúng 3 cặp giao điểm đối xứng với nhau qua điểm C khi và chỉ khi các giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=a, y=b$ đối xứng với nhau qua điểm C. Do đó $a+b=0 \Rightarrow b=-a(a>0)$.

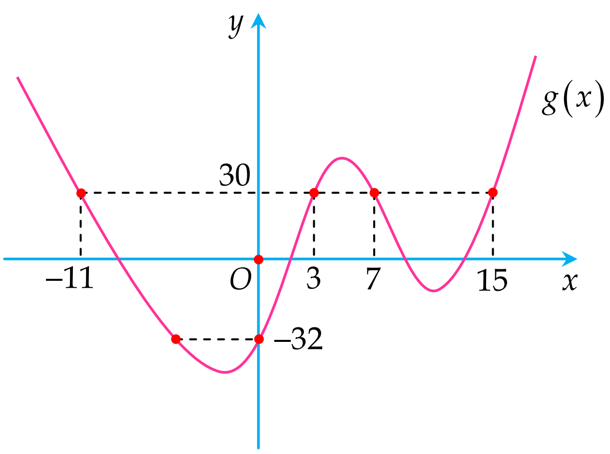
Quan sát đồ thị hàm số ta thấy $f(x)=a$ với $a>0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi $2.8<a<6.2$ mà a là số nguyên nên $a\in\{3;4;5\}$

Do đó tổng các giá trị a nhận được là $T=3+4+5=12$

Bài toán 124

Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên dưới. Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f(x)\ge \dfrac{g(m^2-5)}{x^2-4x+10}$ có nghiệm $x\in[-1;4]$ là?





A. 7 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 5

Thầy Nguyễn Đăng Ái

Lời giải

Ta nhận thấy nhanh $|x^2-4x+10|\le 15$ và $|f(x)|\le 2$ với $\forall x\in[-1;4]$

$f(x)\ge \dfrac{g(m^2-5)}{(x^2-4x+10)} \Leftrightarrow (x^2-4x+10)f(x)\ge g(m^2-5)$ có nghiệm $x\in[-1;4]$ thì ta phải có điều kiện $g(m^2-5)\le \max\limits_{[-1;4]}\left((x^2-4x+10)f(x)\right)=30$

Nhận thấy $|(x^2-4x+10)f(x)|=|x^2-4x+10|.|f(x)|\le 15.2=30$ với $\forall x\in[-1;4]$

Suy ra: $(x^2-4x+10)f(x)\le 30$ dấu "=" xảy ra khi $x=-1$

Suy ra: $g(m^2-5)\le \max\limits_{[-1;4]}\left((x^2-4x+10)f(x)\right)=30$

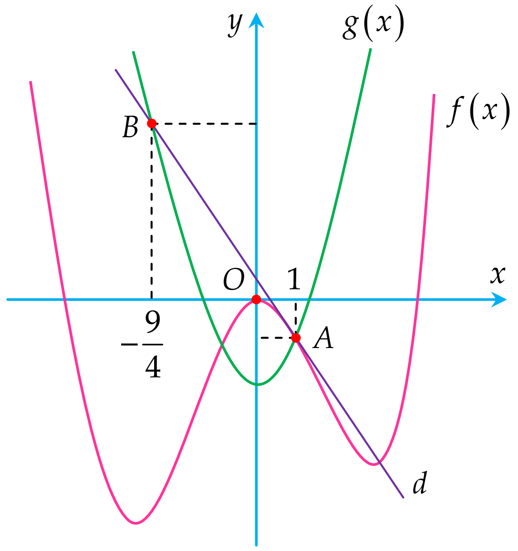
Nhìn vào đồ thị hàm số $y=g(x)$, ta có

$$g(m^2-5)\le 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7\le m^2-5\le 15\\ -11\le m^2-5\le 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}12\le m^2\le 20\\ m^2\le 8\end{array}\right. \Leftrightarrow m=\{0;\pm1;\pm2;\pm4\}$$

Suy ra có tất cả 7 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán. Vậy ta chọn đáp án A

Bài toán 125

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $g(x)=2x^2-3$ và đường thẳng d có đồ thị như hình vẽ dưới.



Biết rằng A là điểm chung của 2 đồ thị $f(x), g(x), x_A=1$, điểm B thuộc đồ thị $g(x)$ và $x_B=-\frac{9}{4}$, đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Tính $f'(x_A)$

A. -1 **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** -2

Lời giải

Vì điểm A thuộc đồ thị hàm $g(x)$ nên $y_A=2.1^2-3=-1$.

Điểm B thuộc đồ thị hàm $g(x)$ nên $y_B=2.\left(\frac{-9}{4}\right)^2-3=\frac{57}{8}$.

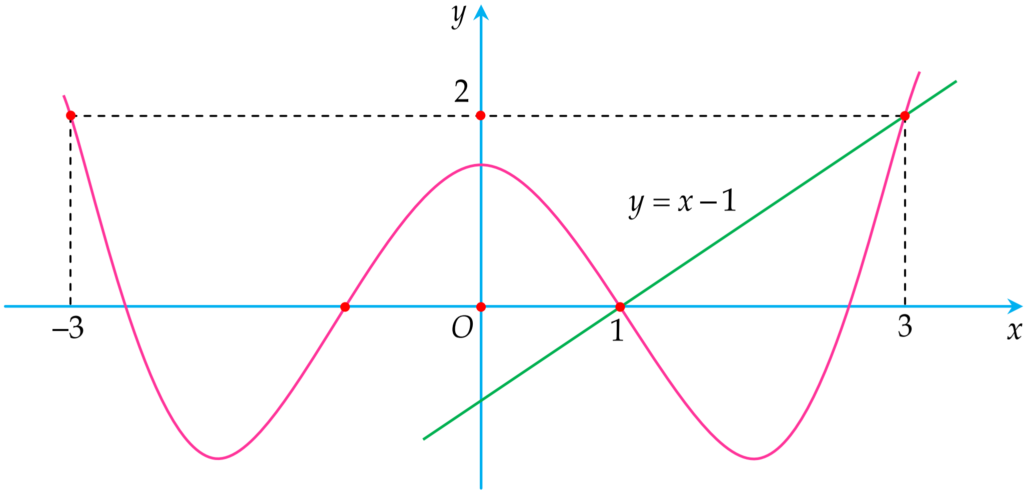
Đường thẳng tiếp tuyến có dạng $y=ax+b$ đi qua 2 điểm A, B nên ta có hệ

$$\begin{cases}\frac{-9}{4}a+b=\frac{57}{8}\\ a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-5}{2}\\ b=\frac{3}{2}\end{cases}.$$

Mà hệ số góc của đường thẳng tiếp tuyến $f(x)$ chính là $f'(x_A)$ nên $f'(x_A)=\frac{-5}{2}$

Bài toán 126

Cho hàm số $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y = g(x) = f(1-2x) - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{-3}{2};-1\right)$ **B.** $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(1;3)$

Lời giải

Ta có $g'(x) = -2f'(1-2x) - 4x$

Đặt $t = 1-2x \Rightarrow x = \frac{1-t}{2} \Rightarrow -2f'(t) - 4\frac{1-t}{2} > 0 \Rightarrow -2f'(t) - 2(1-t) > 0 \Rightarrow f'(t) < t-1$

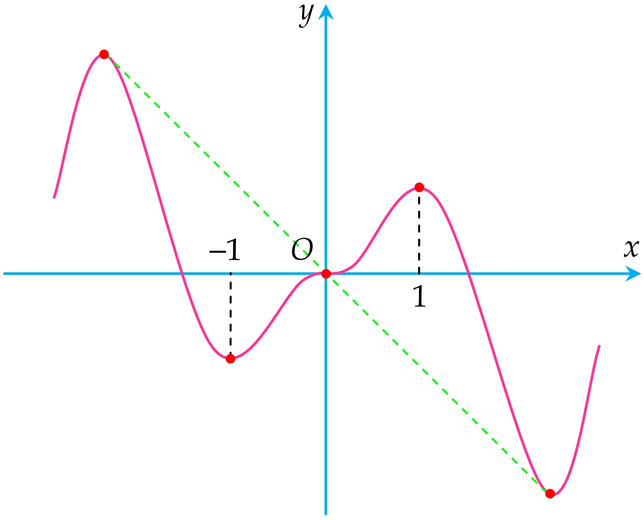
Dựa vào hình vẽ thấy đường thẳng $y = x-1$ "nằm cao hơn" đồ thị $f'(x)$ khi $1 < x < 3$

Do đó, $f'(t) < t-1 \Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 1-2x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

Chọn ý C.

Bài toán 127

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [1;2019]$ sao cho phương trình

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+f\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)=0 \text{ có nghiệm}$$

A. 2018 **B.** 2019 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $f(-x)=-f(x)$ nên hàm số $f(x)$ là một hàm lẻ

$$\Rightarrow f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+f\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)=-f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\Leftrightarrow f\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)=f\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right)$$

Ta có $1=\frac{-2x}{-2x}\ge\frac{-2x}{1+x^2}\ge\frac{-2x}{2x}=-1\Rightarrow\frac{-2x}{x^2+1}\in[-1;1]\Rightarrow f\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)$ đồng biến

Ta có: $\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\Rightarrow f\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)$ đồng biến

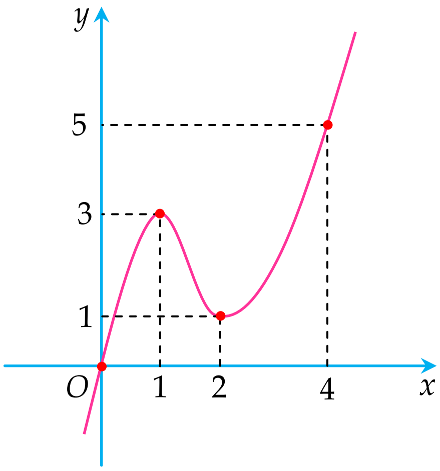
$$\Rightarrow m-\sqrt{m^2+1}=\frac{-2x}{x^2+1}\Rightarrow -1\le m-\sqrt{m^2+1}\le 1$$

Luôn đúng với $\forall m\in[1;2019]$

Có 2019 giá trị nguyên m

Bài toán 128

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Một bài toán rất quen thuộc phải không nào?

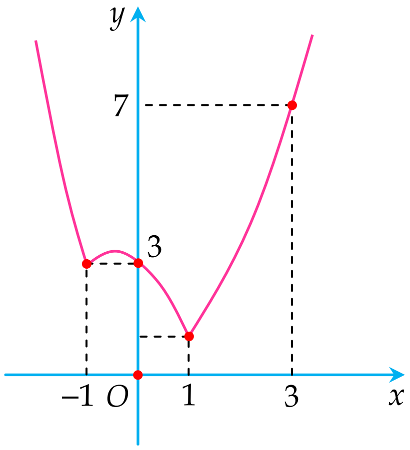
Ta có $2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=1+\cos^2 2x \Rightarrow 1\le 2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\le 2$

Ta có $\begin{cases} M=\max\limits_{[1;2]} f(t)=f(1)=3 \\ m=\min\limits_{[1;2]} f(t)=f(2)=1 \end{cases}$

Vậy $M+m=4$

Bài toán 129

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(x)-2\right|^3-3\left(f(x)-2\right)^2+5$ trên đoạn $[-1;3]$. Tích $M.m$ bằng

A. 2 **B.** 3 **C.** 54 **D.** 55

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $\max\limits_{[-13]} f(x) = f(3) = 7; \min\limits_{[-1;3]} f(x) = f(1) = \alpha(0 < \alpha < 2)$

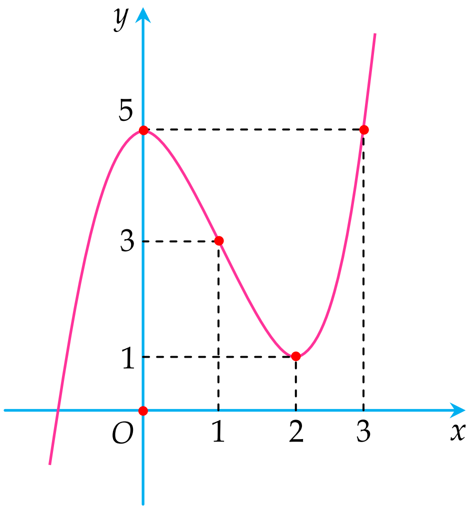
Đặt $t = |f(x) - 2| \Rightarrow t \in [0;5]$

Ta có : $y = |f(x)-2|^3 - 3(f(x)-2)^2 + 5 = t^3 - 3t^2 + 5 = g(t) \Rightarrow \begin{cases} M = \max\limits_{[0;5]} g(t) = g(5) = 55 \\ m = \min\limits_{[0;5]} g(t) = g(2) = 1 \end{cases}$

Vậy $M.m = 55$

Bài toán 130

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Ký hiệu $g(x) = f\left(2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x}\right) + m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) > 2\min\limits_{[0;1]} g(x)$

A. $m > 4$ **B.** $m < 3$ **C.** $0 < m < 5$ **D.** $m < 2$

Lời giải

Đặt $t = 2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow t \in [1;3]$

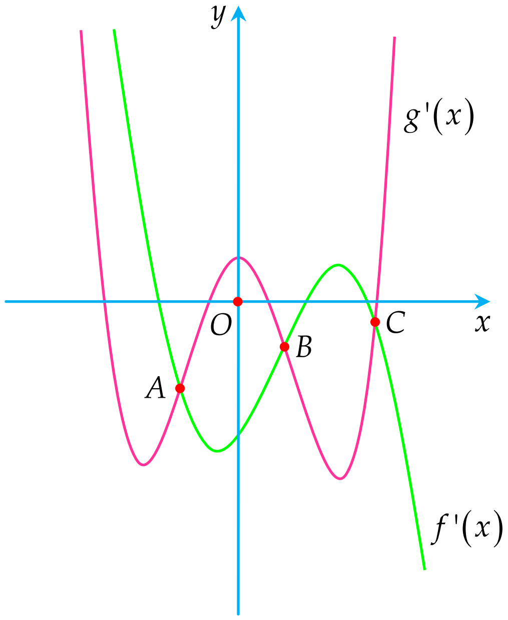
Để $\max g(t) > 2\min g(t) \Leftrightarrow g(3) > 2g(2) \Leftrightarrow 5 + m > 2(1+m) \Leftrightarrow m < 3$

Chọn ý B.

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

Bài toán 131

Cho hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y=g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ.



Gọi ba giao điểm A,B,C của đồ thị $y=f'(x), y=g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ a,b,c . Giá trị nhỏ nhất trên đoạn bằng

A. $h(0)$ **B.** $h(a)$ **C.** $h(b)$ **D.** $h(c)$

Lời giải

Ta có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

Trên khoảng (a,b) thì đồ thị hàm số của $f'(x)$ nằm thấp hơn so với $g'(x)$

Suy ra $h'(x)<0$ với $x\in(a;b)$

Trên khoảng $(b;c)$ thì đồ thị hàm số của $f'(x)$ nằm cao hơn so với $g'(x)$

Suy ra $h'(x)>0$ với $x\in(b;c)$

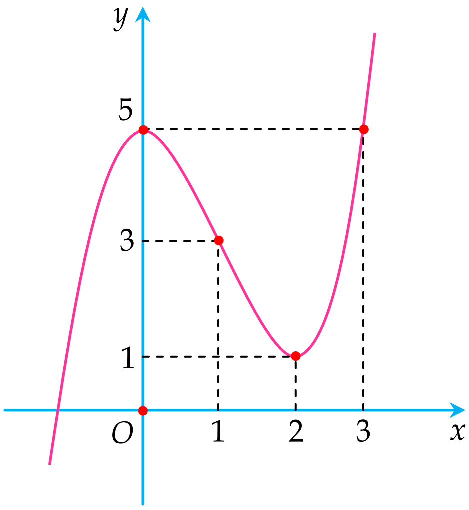
Nên $h(x)$ đạt cực tiểu tại $x=b\in[a;c]$

Vậy $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(b)$

Chọn ý C.

Bài toán 132

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Ký hiệu $g(x)=f(x^3-x^2+x+2)+3m$, với m là tham số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=m^2+3\max\limits_{[0;1]} g(x)+4\min\limits_{[0;1]} g(x)+m$

A. -105 **B.** -102 **C.** -50 **D.** 4

Lời giải

Đặt $x^3-x^2+x+2=t$

Do $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[2;3]$

Ta có $\max\limits_{[2;3]} g(t)=g(3)=5+3m;\min\limits_{[2;3]} g(x)=g(2)=1+3m$

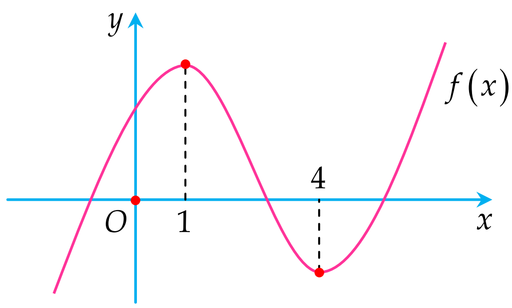
Từ đó $P=m^2+22m+19\geq -102$

Vậy $P_{\min}=-102$

Chọn ý B.

Bài toán 133

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m với $m\in[1;5]$ để bất phương trình $f\left(m-\sqrt{m}+1\right)\geq f\left(\sqrt{5-x}\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;4]$

A. 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Với $m\in[1;5]\Rightarrow\left(m-\sqrt{m}+1\right)\in\left[1;6-\sqrt{5}\right]\Rightarrow f\left(m-\sqrt{m}+1\right)$ nghịch biến

Với $x \in [1;4] \Rightarrow \sqrt{5-x} \in [1;2] \Rightarrow f\left(\sqrt{5-x}\right)$ nghịch biến

Bất phương trình $f\left(m-\sqrt{m}+1\right) \ge f\left(\sqrt{5-x}\right)$ nghiệm đúng $\Leftrightarrow m-\sqrt{m}+1 \le \min\left(\sqrt{5-x}\right)$

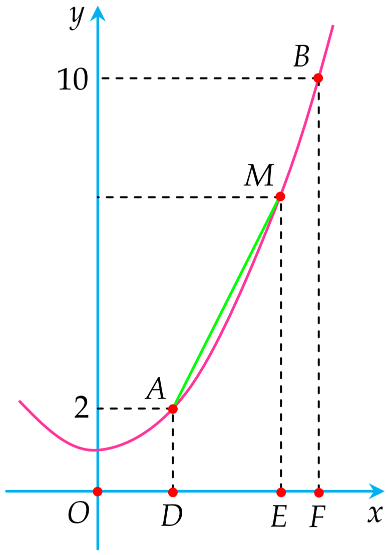
$\Leftrightarrow m-\sqrt{m}+1 \le 1 \Leftrightarrow m=1$

Vậy có 1 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài

Chọn ý B.

Bài toán 134

Trên parabol $y=x^2+1(P)$ lấy hai điểm $A(1;2).B(3;10)$ gọi M là điểm di động trên cung AB của (P), M khác A,B .



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi và , gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi và Gọi là tọa độ điểm khi đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x_0^2+y_0^2$

A. 29 **B.** 11 **C.** 7 **D.** 5

Lời giải

Gọi $M\left(a;a^2+1\right) \in (P)$

Ta viết được phương trình đường thẳng

$$MA: y=(a+1)(x-1)+2 \text{ và } MB: y=(a+3)(x-3)+10$$

Ta có $S_1+S_2=\int\limits_1^a \left[(a+1)(x-1)+2\right]+\int\limits_a^3 \left[(a+3)(x-3)+10\right]-\int\limits_1^3 \left(x^2+1\right)dx = a^2-4a+\dfrac{13}{3} \ge \dfrac{1}{3}$

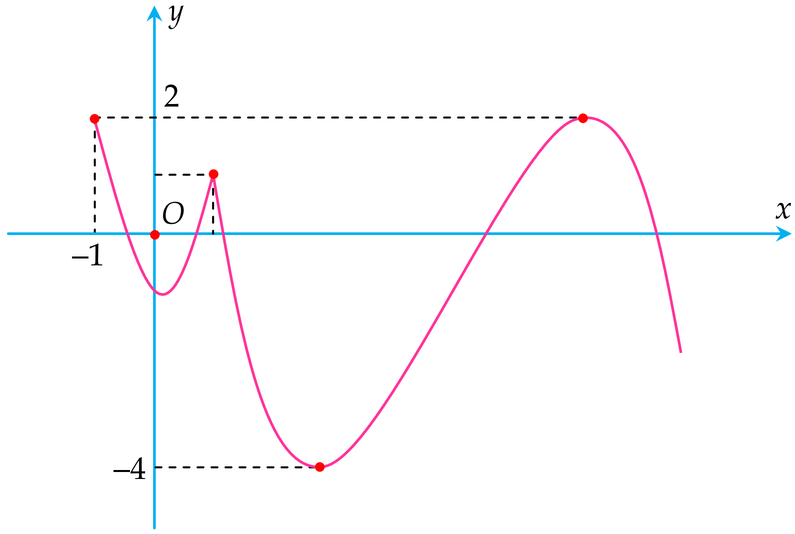
Ta có $\min\left(S_1+S_2\right)=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a=2 \Rightarrow M(2;5)$

Vậy $x_0^2+y_0^2=29$

Chọn ý A.

Bài toán 135

Cho hàm số liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$16.3^{f(x)}-\left[f(x)^2+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\geq\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$$

Nghiệm đúng với mọi giá trị $x\in[-1;9]$?

A. 22 **B.** 31 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $-4\leq f(x)\leq 2\ \ \forall x\in[-2;9]$. Đặt $t=f(x), t\in[-4;2]$

Ta tìm m sao cho $16.3^t-\left[t^2+2t-8\right].4^t\geq\left(m^2-3m\right).6^t$ đúng với mọi $t\in[-4;2]$

$$16.3^t-\left[t^2+2t-8\right].4^t\geq\left(m^2-3m\right).6^t,\ \forall t\in[-4;2]$$

$$\Leftrightarrow\frac{16}{2^t}-\left[t^2+2t-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^t\geq\left(m^2-3m\right),\forall t\in[-4;2]$$

Ta có $\frac{16}{2^t}\geq 4, \forall t\in[-4;2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t=2$.

Mà $t^2+2t-8\leq 0, \forall t\in[-4;2]$. Do đó $\left[t^2+2t-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^t\leq 0, \forall t\in[-4;2]$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=2$.

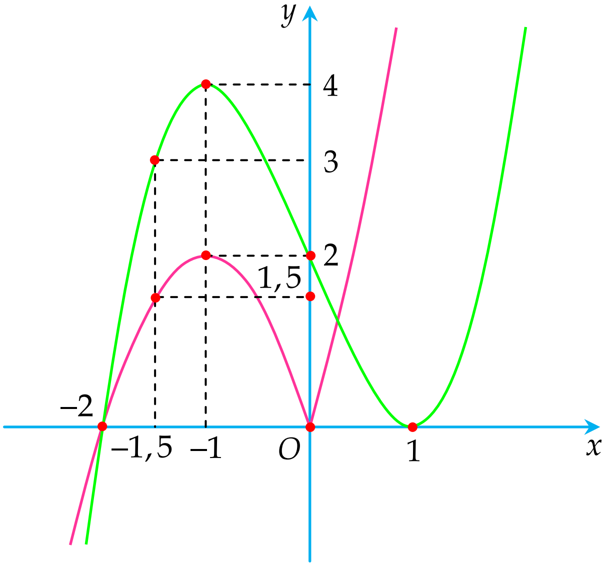
Suy ra $\frac{16}{2^t}-\left[t^2+2t-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^t\geq 4, \forall t\in[-4;2]$.

Vậy $\frac{16}{2^t}-\left[t^2+2t-8\right].\left(\frac{2}{3}\right)^t\geq\left(m^2-3m\right), \forall t\in[-4;2]\Leftrightarrow m^2-3m\leq 4\Leftrightarrow -1\leq m\leq 4$

Kết quả $m=\{-1;0;1;2;3;4\}$.

Bài toán 136

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị các đạo hàm cho như hình vẽ với $f'(x)$ (màu xanh) và $g'(x)$ (màu hồng) có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $h(x)=f(x-1)-g(2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(-1;\frac{-1}{2}\right)$ **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

Ta có $h(x)=f(x-1)-g(2x) \Rightarrow h'(x)=f'(x-1)-2g'(2x)$

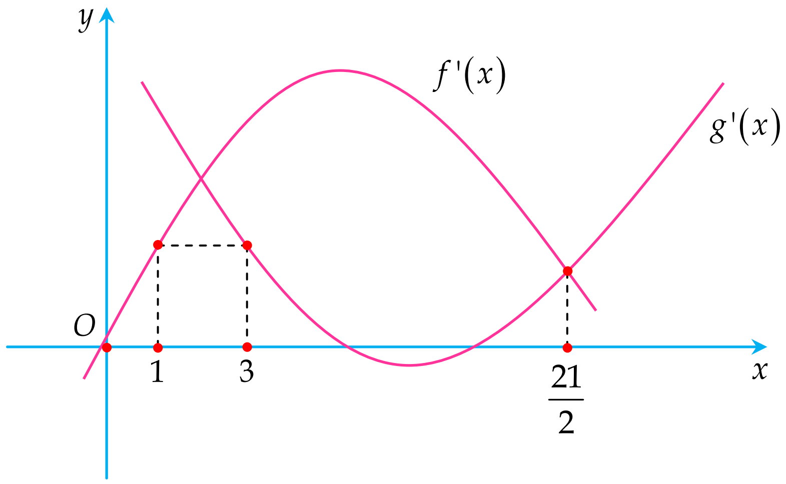
Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)-2g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[-2;0]$

$\Rightarrow h'(x)=f'(x-1)-2g'(2x)\ \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)\in[-2;0]\\ 2x\in[-2;0]\end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;0]$

$\Rightarrow$ Hàm số $h(x)=f(x-1)-g(2x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$

Bài toán 137

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $y = f(x) - g(x+2)$ đồng biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và giá trị lớn nhất của biểu thức $(\beta - \alpha) = 8$; phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x_1 = 11$ là $y = 3x + 2$ và phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_2 = 9$ là $y = ax + 1$ Giá trị của $f(9)$ bằng



A. 13 **B.** 28 **C.** –26 **D.** 22

Thầy Nguyễn Đăng Ái

Lời giải

Ta có $y' = f'(x) - g'(x+2)$

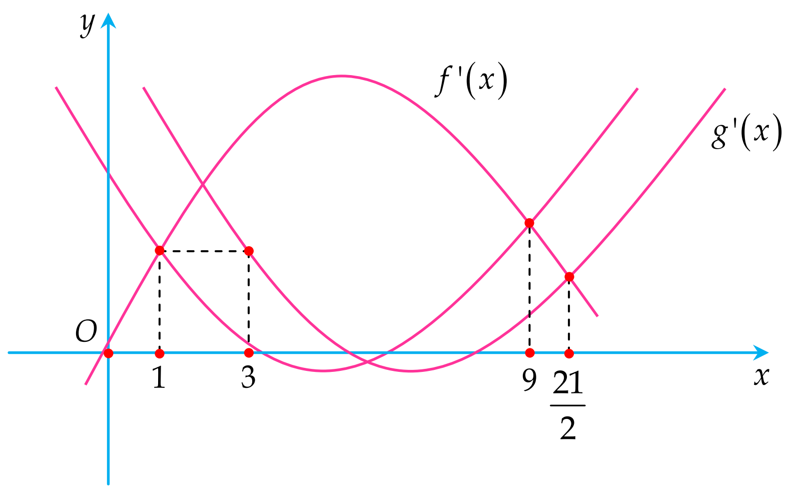
Đồ thị hàm số $g'(x)$ dịch sang trái 2 đơn vị so với trục tung sẽ được $g'(x+2)$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(1) = g'(3)$. Giả sử x_0 là điểm thỏa mãn $f'(x_0) = g'(x_0 + 2)$

Trên khoảng $(1;x_0)$ thì $f'(x_0)$ luôn nằm cao hơn so với $g'(x_0 + 2)$

Nên $y' > 0$ với $x \in (1;x_0)$. Từ $\max(\beta - \alpha) = 8 \Rightarrow x_0 - 1 = 8 \Rightarrow x_0 = 9$

Hình vẽ tượng trưng



Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x_1 = 11$ là

$$y = g'(11)(x-11) + g(11) \Rightarrow \begin{cases} g'(11) = 3 \\ g(11) = 35 \end{cases}$$

Ta có $f'(9) = g'(11) = 3$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_2 = 9$ là

$$y = f'(9)(x-9) + f(9) \Rightarrow \begin{cases} a = f'(9) = 3 \\ f(9) = 9f'(9) + 1 = 28 \end{cases}$$

THE END GAME

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

MỌI NGƯỜI CÓ THỂ TÌM ĐỌC CUỐN "TẠI SAO NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN LẠI KHÓ" CỦA CÙNG TÁC GIẢ

CHỊU TRÁCH NHIỆM NỘI DUNG VÀ THIẾT KẾ BÌA

NGUYỄN MINH TUẤN

NHÓM CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

Mọi ý kiến thắc mắc, góp ý vui lòng gửi về địa chỉ sau

0343763310

tuangenk@gmail.com

Lovetoan.wordpress.com

Đại học FPT Hà Nội