TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
9 2013
Số 435

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

ĐÓN CHÀO NĂM HỌC MỚI 2013 - 2014

TỔNG GIÁM ĐỐC NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM NHẬN GIẢI THƯỞNG

Nhà Quản lí xuất sắc thời kì đổi mới

Ngày 17/8/2013, tại Thủ đô Viêng Chăn, Lào, Nhà giáo Ưu tú *Ngô Trần Ái* – Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam đã vinh dự được nhận giải thưởng *Nhà Quản lí xuất sắc thời kì đổi mới*.

Việc trao giải thưởng này nhằm góp phần thực hiện đường lối đổi mới, mở cửa và hội nhập kinh tế Quốc tế của Đảng và Nhà nước ta, tăng cường mối quan hệ hữu nghị và nêu cao tấm lòng nhân ái vốn là nét đẹp truyền thống của nhân dân ba nước Việt Nam - Lào - Campuchia.

Giải thưởng *Nhà Quản lí xuất sắc thời kì đổi mới* được trao cho những nhà quản lí, điều hành giỏi, có tinh thần dám nghĩ, dám làm, lao động sáng tạo, chất lượng và hiệu quả công tác cao, tích cực tham gia hoạt động xã hội từ thiện; góp phần quan trọng vào sự phát triển của đơn vị, địa phương, ngành và đất nước. Giải thưởng có quy mô toàn khu vực Asean.

Các bạn Lào chúc mừng Tổng Giám đốc Ngô Trần Ái

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam, Nhà giáo Ưu tú *Ngô Trần Ái* đã vinh dự cùng 67 lãnh đạo các doanh nghiệp, tổ chức khác được trao giải lần này.

Đánh giá về giải thưởng, Chủ tịch Quốc hội *Nguyễn Sinh Hùng* khẳng định sự kiện này có ý nghĩa đặc biệt, góp phần thúc đẩy tình đoàn kết hữu nghị và quá trình hội nhập của các nước trong khu vực với kinh tế thế giới. Đồng thời mong muốn các doanh nhân nhận giải thưởng mở rộng hơn nữa tầm hoạt động ra toàn khu vực, tạo hiệu quả kinh tế cao và góp phần tăng cường việc hợp tác, hữu nghị giữa các nước.

THƯ CỦA CHỦ TỊCH NƯỚC TRƯƠNG TẤN SANG GỬI NGÀNH GIÁO DỤC NHÂN DỊP KHAI GIẢNG NĂM HỌC MỚI 2013 - 2014

Hà Nội ngày 28 tháng 8 năm 2013

Các thầy giáo, cô giáo, cán bộ, công chức, viên chức ngành Giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên cả nước thân mến!

Nhân dịp khai giảng năm học mới 2013 - 2014 và ngày *"Toàn dân đưa trẻ đến trường"*, tôi thân ái gửi tới các thế hệ nhà giáo, cán bộ, công chức, viên chức ngành Giáo dục, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên trong cả nước lời chúc mừng tốt đẹp nhất.

Năm học 2012 - 2013, trong điều kiện còn nhiều khó khăn, các thầy giáo, cô giáo, các em học sinh, sinh viên trong cả nước đã có nhiều cố gắng, nỗ lực phấn đấu đạt được nhiều thành tích trong giảng dạy, học tập và rèn luyện; đặc biệt có nhiều tập thể, cá nhân điển hình tiên tiến, các thầy giáo, cô giáo hết lòng vì học sinh thân yêu; các em học sinh nghèo ở vùng sâu, vùng xa, vùng biên giới và hải đảo đã vượt khó vươn lên trong học tập; nhiều em học sinh giỏi đạt các giải cao trong các kì thi Olympic Quốc tế và Khu vực làm rạng danh cho thế hệ trẻ Việt Nam. Tôi nhiệt liệt biểu dương những nỗ lực, cố gắng và kết quả ngành Giáo dục đạt được trong năm học vừa qua.

Năm học 2013 - 2014 là năm học đầu tiên triển khai thực hiện Kết luận của Hội nghị Trung ương 6 (Khóa XI) về *"Đổi mới căn bản và toàn diện giáo dục và đào tạo, đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa trong điều kiện kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế"*. Ngành Giáo dục cần đổi mới mạnh mẽ công tác quản lí, chương trình, phương pháp dạy học và kiểm tra, đánh giá kết quả học tập; quan tâm phát triển và nâng cao chất lượng đội ngũ nhà giáo và cán bộ quản lí giáo dục; đẩy mạnh thi đua "Dạy tốt - Học tốt" để nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện ở tất cả các cấp học.

Tôi đề nghị các cấp ủy Đảng, chính quyền, các tổ chức, đoàn thể, ngành Giáo dục, các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh và các em học sinh, sinh viên ghi nhớ và thực hiện tốt lời của Bác Hồ trong thư gửi các cán bộ, thầy cô giáo, công nhân viên, học sinh, sinh viên nhân dịp đầu năm mới, tháng 10/1968: *"Giáo dục nhằm đào tạo những người kế tục sự nghiệp cách mạng to lớn của Đảng và nhân dân ta, do đó các ngành, các cấp Đảng và chính quyền địa phương phải thật sự quan tâm hơn nữa đến sự nghiệp này, phải chăm sóc nhà trường về mọi mặt, đẩy sự nghiệp giáo dục của ta lên những bước phát triển mới"*; *"Dù khó khăn đến đâu cũng phải tiếp tục thi đua dạy tốt, học tốt. Trên nền tảng giáo dục chính trị và lãnh đạo tư tưởng tốt, phải phấn đấu nâng cao chất lượng văn hóa và chuyên môn nhằm thiết thực giải quyết các vấn đề do cách mạng nước ta đề ra và trong một thời gian không xa, đạt những đỉnh cao của khoa học và kĩ thuật"*[1].

Chúc các cô giáo, thầy giáo, cán bộ, công chức, viên chức ngành Giáo dục và toàn thể các em học sinh, sinh viên đạt được nhiều thành tích xuất sắc trong năm học mới. Chúc sự nghiệp giáo dục ngày càng phát triển, góp phần thực hiện thắng lợi sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa, xây dựng đất nước ngày càng giàu mạnh và bảo vệ vững chắc Tổ quốc Việt Nam xã hội chủ nghĩa.

Chào thân ái!

Trương Tấn Sang

---

[1] *Hồ Chí Minh toàn tập, Nhà xuất bản Chính trị quốc gia, Tập 12, trang 402 - 404*

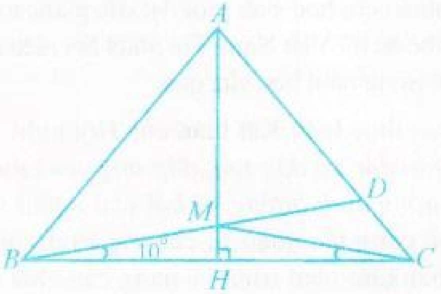
MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍNH GÓC TRONG TAM GIÁC CÂN

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Trong bài báo này từ hai bài toán cơ bản (Bài toán 1 và 2), chúng tôi tăng dần số đo góc, thay đổi giả thiết để được các bài toán mới.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{BAC}=80^o$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC}=\widehat{MCB}=10^o$. Tính số đo góc AMC.*

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Từ giả thiết có tam giác MBC cân tại M, nên $MB=MC$, suy ra $\Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c).

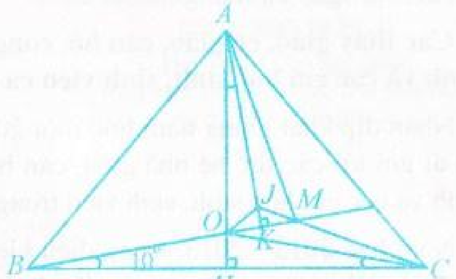
$\Rightarrow \widehat{MAB}=\widehat{MAC}=40^o$, $\widehat{ACM}=50^o-10^o=40^o$.

Xét tam giác AMC có $\widehat{ACM}=\widehat{MAC}=40^o$, suy ra $\widehat{AMC}=100^o$. ❒

Nếu giữ nguyên $\widehat{MBC}=10^o$, tăng dần số đo góc MCB lên 20^o, 30^o (do $\widehat{MCB}<50^0$). Dựa vào cách giải bài toán 1 ta có các bài toán.

Bài toán 1.1. *Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{BAC}=80^o$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC}=10^o$, $\widehat{MCB}=20^o$. Tính số đo các góc AMB, AMC.*

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC cắt BM tại O; kẻ đường cao AK của tam giác AOM cắt CM tại J. Vì tam giác ABC cân tại A, nên AH là trung trực của đoạn BC.

Suy ra $OB=OC \Rightarrow \widehat{OBC}=\widehat{OCB}=10^o$.

Xét tam giác OAC có $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}=40^o$, suy ra $OA=OC$.

Lại có $\widehat{HAK}=\widehat{MBC}=10^o$. Xét tam giác AJC có $\widehat{JAC}=\widehat{JCA}=30^o$ suy ra $JA=JC$.

Mà $OA=OC$, nên OJ là trung trực của đoạn AC.

Suy ra OJ là phân giác góc AOC, vì $\widehat{AOC}=100^o$ nên $\widehat{JOA}=\widehat{JOC}=50^o$.

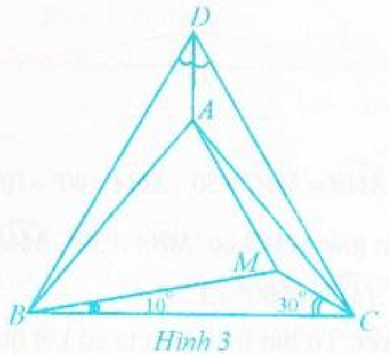
Có $\widehat{MOC}=\widehat{OBC}+\widehat{OCB}=20^o \Rightarrow \widehat{MOJ}=30^o$.

Từ $\widehat{JMO}=\widehat{MBC}+\widehat{MCB}=30^o$ suy ra $\widehat{JMO}=\widehat{JOM}=30^o$, nên tam giác JOM cân tại J, mà $JK \perp OM$ nên JK là đường trung trực của đoạn OM. Do đó tam giác AOM cân tại A.

Suy ra $\widehat{AOM}=\widehat{AMO}=\widehat{BOH}=80^o$. Vậy $\widehat{AMB}=80^o \Rightarrow \widehat{MAC}=20^o$, $\widehat{MCA}=30^o$. Từ đó $\widehat{AMC}=180^o-20^o-30^o=130^o$. ❒

Bài toán 1.2. *Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{BAC}=80^o$. Gọi M là điểm nằm trong* *tam giác sao cho $\widehat{MBC}=10^\circ$, $\widehat{MCB}=30^\circ$. Tính số đo các góc AMB, AMC.*

Lời giải. (h.3)



Hình 3

Dựng tam giác BCD đều với A, D cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC. Từ $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=50^\circ$, suy ra $\widehat{ABD}=10^\circ$.

Do $\Delta ADB=\Delta ADC$(c.c.c) nên $\widehat{ADB}=\widehat{ADC}=30^\circ$.

Suy ra $\Delta BAD=\Delta BMC$ (g.c.g). Do đó $BA=BM$, hay tam giác BAM cân tại B.

Từ đó $\widehat{BAM}=\widehat{BMA}=\left(180^\circ-40^\circ\right):2=70^\circ$.

Vậy $\widehat{MAC}=80^\circ-70^\circ=10^\circ$, $\widehat{MCA}=50^\circ-30^\circ=20^\circ$.

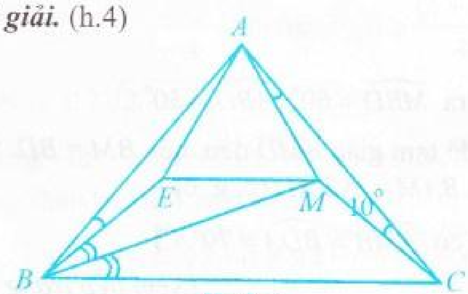
Xét tam giác AMC có $\widehat{MAC}=10^\circ$, $\widehat{MCA}=20^\circ$

suy ra $\widehat{AMC}=150^\circ$.❒

Trong bài toán 1, thay giả thiết $\widehat{MBC}=\widehat{MCB}=10^\circ$ bởi $\widehat{MAC}=\widehat{MCA}=10^\circ$ ta có bài toán mới.

✪ **Bài toán 1.3.** *Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC}=80^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC}=\widehat{MCA}=10^\circ$. Tính số đo góc AMB.*

Lời giải. (h.4)



Hình 4

Vẽ tam giác AEM đều với E và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AM.

Ta có $\widehat{BAE}=80^\circ-10^\circ-60^\circ=10^\circ$, suy ra $\Delta BAE=\Delta CAM$ (c.g.c). Do đó $\widehat{EAB}=\widehat{EBA}=10^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AEB}=160^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BEM}=360^\circ-60^\circ-160^\circ=140^\circ$.

Xét tam giác BEM có $BE=AE=EM$ nên

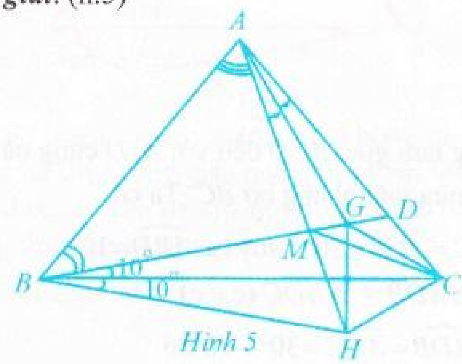
$\widehat{EBM}=\widehat{EMB}=\left(180^\circ-140^\circ\right):2=20^\circ$.

Do đó $\widehat{AMB}=20^\circ+60^\circ=80^\circ$.❒

Từ **Bài toán 1.1**, ta có kết quả $\widehat{MBA}=40^\circ$, $\widehat{MAB}=60^\circ$. Nếu coi $\widehat{MBA}=40^\circ$, $\widehat{MAB}=60^\circ$ là giả thiết. Ta có bài toán

✪ **Bài toán 1.4.** *Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC}=80^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBA}=40^\circ$, $\widehat{MAB}=60^\circ$. Tính số đo góc AMC.*

Lời giải. (h.5)



Hình 5

Giả sử BM cắt AC tại D, dựng tam giác đều ABH với H và C cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB. Kẻ tia phân giác của góc CAH cắt BD tại G. Ta có $\widehat{CAH}=80^\circ-60^\circ=20^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CAG}=\widehat{HAG}=\widehat{CBG}=\widehat{CBH}=10^\circ$.

Xét tam giác ABM có $\widehat{MBA}=40^\circ$, $\widehat{MAB}=60^\circ$.

Suy ra $\widehat{AMB}=\widehat{GMH}=80^\circ$. Xét tam giác ABG có $\widehat{ABG}=40^\circ, \widehat{BAG}=60^\circ+10^\circ=70^\circ$, nên tam giác ABG cân tại B. Suy ra $BG=BA=BH=AC=AH$. Từ đó $\Delta AGC=\Delta AGH$; $\Delta BCG=\Delta BCH$ (c.c.c).

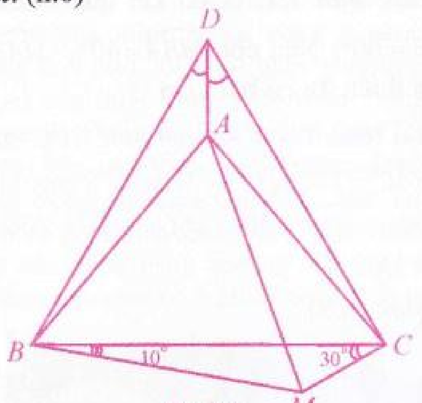
Do đó $CG=GH=CH$, nên tam giác CHG đều.

Suy ra $\widehat{CHG} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{GHM} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

Xét tam giác MHG có $\widehat{GHM} = 20^\circ$, $\widehat{GMH} = 80^\circ$ nên tam giác MHG cân tại H. Do đó $HM = HG = HC$, suy ra ΔHMC cân tại H, mà $\widehat{MHC} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{HMC} = 50^\circ$, do đó $\widehat{AMC} = 130^\circ$. ❒

✪ **Bài toán 1.5**. *Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Gọi M là điểm nằm ngoài tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 10^0$, $\widehat{MCB} = 30^0$. Tính số đo các góc AMB, AMC.*

Lời giải. (h.6)



Hình 6

Dựng tam giác BCD đều với A, D cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC. Ta có

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 50^\circ$, suy ra $\widehat{ABD} = 10^\circ$.

Từ $\Delta ADB = \Delta ADC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 30^0$. Từ đó

$\Delta BAD = \Delta BMC$ (g.c.g). Suy ra $BA = BM$, dẫn đến tam giác BAM cân tại B.

Mà $\widehat{ABM} = 50^0 + 10^0 = 60^0$, nên tam giác BAM đều, suy ra $\widehat{AMB} = 60^0$ và

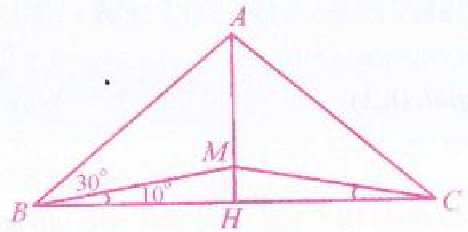
$$\widehat{AMC} = \left(180^\circ - 10^\circ - 30^\circ\right) - 60^\circ = 80^\circ. ❒$$

✪ **Bài toán 2**. *Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = 10^\circ$. Tính số đo góc AMB.*

Lời giải. (h.7)

Do $\widehat{MBC} = \widehat{MCB}$, suy ra $MB = MC$

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$ (c. c. c).



Hình 7

Do đó $\widehat{MAB} = \widehat{MAC} = 50^\circ$, $\widehat{MBA} = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$.

Xét tam giác AMB có $\widehat{MBA} = 30^\circ$, $\widehat{MAB} = 50^\circ$, suy ra $\widehat{AMB} = 100^\circ$. ❒

Nhận xét. Từ bài toán trên ta có kết quả

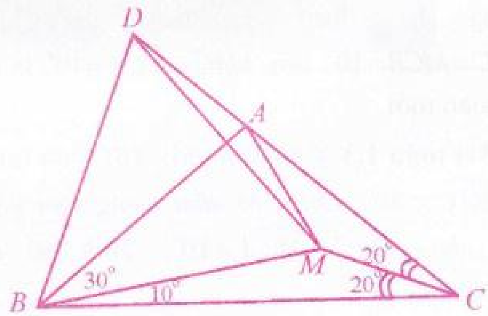
Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = \alpha < 40^\circ$. Khi đó ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ + \alpha$.

✪ **Bài toán 2.1** *Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 10^\circ$, $\widehat{MCB} = 20^\circ$. Tính số đo góc AMB.*

Lời giải. (h.8)

Trên tia CA lấy điểm D sao cho $CB = CD$ thì $\Delta CMB = \Delta CMD$ (c. g. c). Suy ra $MB = MD$.

Lại có $\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = \left(180^\circ - 40^\circ\right):2 = 70^\circ$.



Hình 8

Suy ra $\widehat{MBD} = 60^\circ$, $\widehat{ABD} = 30^\circ$.

Do đó tam giác BMD đều, nên $BM = BD$. Suy ra $\Delta BAM = \Delta BAD$ (c. g. c).

Vậy có $\widehat{AMB} = \widehat{BDA} = 70^\circ$. ❒

(Xem tiếp trang 11)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN - ĐHQG HÀ NỘI

NĂM HỌC 2013-2014

(Đề thi đăng trên TH&TT số 434, tháng 8 năm 2013)

VÒNG 1

Câu I. 1) Điều kiện $-\frac{1}{3}\le x\le 2$. Bình phương hai vế của PT ta được $\sqrt{-3x^2+5x+2}=3-x$

$\Leftrightarrow 4x^2-11x+7=0 \Leftrightarrow x=1, x=\frac{7}{4}$ (thỏa mãn ĐK).

2) Hệ PT tương đương với

$$\begin{cases}\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)=\frac{9}{2}\\ \frac{1}{4}+\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{y}\right)=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)-2.\end{cases}$$

Đặt $u=x+\frac{1}{y}, v=y+\frac{1}{x}$ tìm được $u=\frac{3}{2}; v=3$.

Đáp số. Hệ PT có hai nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{1}{2};1\right)$ và $(1;2)$.

Câu II. 1) Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{a+b}\left(1-\frac{b}{b+c}\right)+\frac{b}{b+c}\left(1-\frac{c}{c+a}\right)+\frac{c}{c+a}\left(1-\frac{a}{a+b}\right)=\frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow ac(a+c)+ba(b+a)+cb(c+b)=\frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow ac(a+c)+b^2(a+c)+(ba^2+abc)+c^2b+abc=8abc$

$\Leftrightarrow (a+c)(ac+b^2+ab+bc)=8abc$

$\Leftrightarrow (a+c)(c+b)(b+a)=8abc$ (luôn đúng).

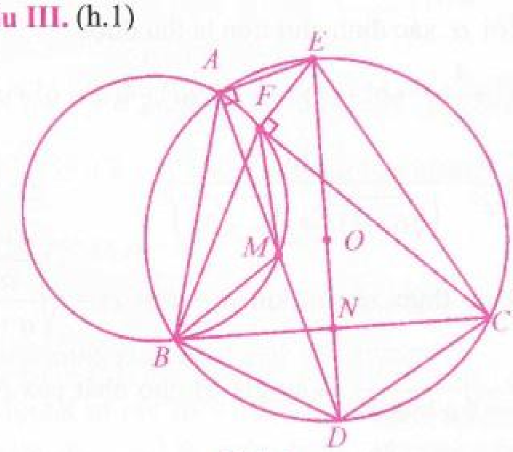
2) Ta có $\overline{abcde}=\overline{abc}.101-\overline{abc}+\overline{de}$.

Nhận thấy $\overline{abc}-\overline{de}=\overline{abc}-(10d+e)$ chia hết cho 101 $\Leftrightarrow \overline{abcde}=101.m\ (m\in\mathbb{N})$.

Do $10000\le\overline{abcde}\le 99999 \Rightarrow 10000\le 101.m\le 99999$ và $m\in\mathbb{N}$ nên $100\le m\le 990$.

Vậy số các số có 5 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $990-100+1=891$.

Câu III. (h.1)



Hình 1

1) Từ $\widehat{BDM}=\widehat{BCF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$) và $\widehat{BMA}=\widehat{BFA} \Rightarrow \widehat{BMD}=\widehat{BFC}$, ta có đpcm.

2) Vì $DB=DC$, nên $DE\perp BC$ tại trung điểm N của BC. Từ $\Delta BDM \backsim \Delta BCF$ ta có $\frac{DM}{CF}=\frac{BD}{BC}$, nên $\frac{DA}{CF}=\frac{2DM}{CF}=\frac{2BD}{BC}=\frac{CD}{CN}=\frac{DE}{CE}$.

Lại có $\widehat{ADE}=\widehat{FCE} \Rightarrow \Delta EAD \backsim \Delta EFC$ (c.g.c) nên $\widehat{EFC}=\widehat{EAD}=90^o$. Vậy $EF\perp AC$.

Câu IV. Với α là số thực dương, áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{d^3}{3}+\frac{a^3}{3\alpha^3}+\frac{b^3}{3\alpha^3}\ge\frac{dab}{\alpha^2};\ \frac{d^3}{3}+\frac{b^3}{3\alpha^3}+\frac{c^3}{3\alpha^3}\ge\frac{dbc}{\alpha^2};$$

$$\frac{d^3}{3}+\frac{c^3}{3\alpha^3}+\frac{a^3}{3\alpha^3}\ge\frac{dca}{\alpha^2};\ \frac{a^3+b^3+c^3}{3\alpha^2}\ge\frac{abc}{\alpha^2}.$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên được

$$d^3+\left(\frac{2}{3\alpha^3}+\frac{1}{3\alpha^2}\right)(a^3+b^3+c^3)\ge\frac{1}{\alpha^2}(dab+dbc+dca+abc).$$

Ta tìm $\alpha>0$ sao cho $\frac{2}{3\alpha^3}+\frac{1}{3\alpha^2}=\frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow 4\alpha^3-3\alpha=6.$

Đặt $\alpha=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)(x>0)$, ta thu được

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=6\Leftrightarrow x^6-12x^3+1=0$$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}, x=\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}$. Do đó

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right).$$

Với α xác định như trên ta thu được

$$d^3+\frac{4}{9}(a^3+b^3+c^3)\geq\frac{1}{\alpha^2}\Leftrightarrow 9d^3+4(a^3+b^3+c^3)$$

$$\geq\frac{9}{\alpha^2}=\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha+3}}$,

$d=\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^3+3\alpha^2}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là

$$\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^2}.$$

VÒNG 2

Câu I. 1) Cộng theo vế hai PT của hệ ta thu được

$$x^3+y^3+6xy=8\Leftrightarrow(x+y-2)(x^2+y^2+4-xy+2y+2x)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+y-2)\left((x-y)^2+(x+2)^2+(y+2)^2\right)=0.$$

• Với $x=y=-2$ không thỏa mãn PT thứ hai của hệ (loại).

• Với $x+y-2=0\Leftrightarrow y=2-x$. Thay vào PT thứ hai được $7x^2-12x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1, y=1\\ x=\frac{5}{7}, y=\frac{9}{7}.\end{array}\right.$

Hệ PT có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1;1),\left(\frac{5}{7};\frac{9}{7}\right)$.

2) ĐK $-1\leq x\leq 1$. Biến đổi PT thành

$(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{x+1}-1)=0$. *Đáp số*. $x=0$.

Câu II. 1) *Nhận xét*. Với a, b là các số nguyên thỏa mãn $a^2+b^2\,\vdots\,3$ thì $a\,\vdots\,3$ và $b\,\vdots\,3$.

$5x^2+8y^2=20412\Leftrightarrow(6x^2+9y^2)-(x^2+y^2)=28.9^3$.

Suy ra $x^2+y^2\,\vdots\,3\Leftrightarrow x\,\vdots\,3$ và $y\,\vdots\,3$.

Đặt $x=3x_1,\ y=3y_1\ (x_1, y_1\in\mathbb{Z})$.

Thay vào PT ta thu được $5x_1^2+8.y_1^2=28.9^2$.

Lập luận tương tự, ta có $x_1=3x_2, y_1=3y_2\ (x_2, y_2\in\mathbb{Z})$ nhận được $5x_2^2+8y_2^2=28.9$. Tương tự $x_2=3x_3$, $y_2=3y_3\ (x_3, y_3\in\mathbb{Z})$ thu được $5x_3^2+8.y_3^2=28$.

Suy ra $y_3^2\leq\frac{28}{8}<2^2$ nên $y_3^2=0$ hoặc $y_3^2=1$.

• Với $y_3^2=0$ thì $x_3^2=\frac{28}{5}$ (loại).

• Với $y_3^2=1$ thì $x_3^2=2^2\Rightarrow x_2^2=9.2^2, y_2^2=9$

$\Rightarrow x_1^2=9^2.2^2, y_1^2=9^2\Rightarrow x^2=9^3.2^2, y^2=9^3$.

Đáp số. Có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(54;27), (54;-27), (-54;27), (-54;-27)$.

2) Ta có $P\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}\sqrt{1+x^2y^2}=2\sqrt{xy+\frac{1}{xy}}$.

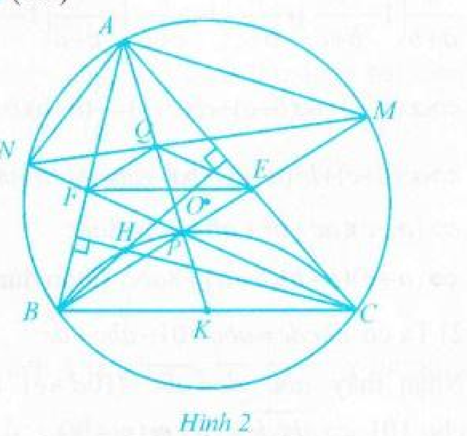
Đặt $t=xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$, ta được

$$\frac{P}{2}\geq\sqrt{t+\frac{1}{t}}=\sqrt{16t+\frac{1}{t}-15t}\geq\sqrt{2\sqrt{16}-\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$\Rightarrow P\geq\sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{17}$.

Câu III. (h.2)



Hình 2

1) Ta có $\widehat{BPC}=\widehat{BHC}=180^\circ-\widehat{BAC}$ nên tứ giác $AEPF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BFC}+\widehat{BEC}=180^\circ$. Từ các tứ giác $AQFN$, $AQEM$ nội tiếp ta có

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2013-2014

(Thời gian làm bài 150 phút)

Câu I. (2 *điểm*)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(xy-2y^2)=3 \\ x^2+y-2xy=4. \end{cases}$

Câu II. (2 *điểm*)

1) Tổng các chữ số của một số chính phương có thể là 2013 được không? Hãy giải thích.

2) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $(x+y)^5=120y+3$.

Câu III. (2 *điểm*)

Cho ba số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\le\frac{3}{4}.$$

Câu IV. (3 *điểm*)

1) Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng

a) $BM.\,CN=IM^2$;

b) $BC.IA^2+CA.IB^2+AB.IC^2=AB.BC.CA.$

2) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) tâm O, đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H là hình chiếu của I lên AD và M là trung điểm của ID. Đường tròn (HMD) cắt (O) tại N (N khác D). Gọi P là giao điểm của BC và HM.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCMH$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng ba điểm P, D, N thẳng hàng.

Câu V. (1 *điểm*)

Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng một trong ba màu xanh, vàng hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được hai điểm cùng màu có khoảng cách bằng 1cm.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP.Hồ Chí Minh*)
Sưu tầm và giới thiệu

$\widehat{MQN}=\widehat{MQA}+\widehat{NQA}=\widehat{MEA}+\widehat{NFA}=180^\circ$.

Vậy ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

2) Ta có $\widehat{AFQ}=\widehat{ANQ}=\widehat{ANM}=\widehat{ABM}$ suy ra $FQ\,//\,BE$. Tương tự $EQ\,//\,CF$. Từ đó tứ giác $EQFP$ là hình bình hành. Vậy $\widehat{QAN}=\widehat{QFP}=\widehat{QEP}=\widehat{QAM}$ hay AQ là phân giác của $\widehat{MAN}$.

Suy ra A, P, Q thẳng hàng. Gọi $K=PQ\cap BC$ thì $\widehat{KAC}=\widehat{QAC}=\widehat{QME}=\widehat{NMB}=\widehat{PCK}$. Từ đó $\Delta AKC \backsim \Delta CKP$ suy ra $KC^2=KP.KA$. Tương tự $KB^2=KP.KA$. Vậy $KB=KC$.

Câu IV. Giả sử k là chỉ số mà $x_1\le x_2\le\ldots\le x_k<0\le x_{k+1}\le\ldots\le x_{192}$.

Kí hiệu $S^-=x_1+x_2+\ldots+x_k$, $S^+=x_{k+1}+x_{k+2}+x_{192}$ thì $S^-+S^+=0$ và $S^+-S^-=2013\Rightarrow S^+=-S^-=\dfrac{2013}{2}$.

do $x_1\le x_2\le\ldots\le x_{192}$ suy ra $S^-\ge kx_1, S^+\le(192-k)x_{192}$

nên $x_1\le\dfrac{S^-}{k}=-\dfrac{S^+}{k}\Rightarrow -x_1\ge\dfrac{S^+}{k}, x_{192}\ge\dfrac{S^+}{192-k}$

$$\Rightarrow x_{192}-x_1\ge\frac{S^+}{192-k}+\frac{S^+}{k}=\frac{2013.192}{2k(192-k)}.$$

Ta có $2k(192-k)\le2\left(\dfrac{(192-k)+k}{2}\right)^2=\dfrac{192^2}{2}$

$\Rightarrow x_{192}-x_1\ge\dfrac{2013}{96}$. Đẳng thức xảy ra khi

$$x_1=x_2=\ldots=x_{96}=-\frac{2013}{192}, x_{97}=x_{98}=\ldots=x_{192}=\frac{2013}{192}.$$

NGUYỄN VŨ LƯƠNG - PHẠM VĂN HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ

NGUYỄN TUẤN LÂM
(GV THPT Thành Nhân, TP. Hồ Chí Minh

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và điểm $M\left(x_0;f(x_0)\right)\in(C)$. Khi đó

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M với đồ thị (C) là $k=f'(x_0)$.

Phương trình (PT) tiếp tuyến tại điểm M có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ (*)

• Đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_A,\ y_A)$ và $B(x_B,\ y_B)$ với $x_A\neq x_B$ có hệ số góc $k_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

• Đường thẳng Δ có hệ số góc k thì

+ Vectơ pháp tuyến của Δ là $\overrightarrow{n_\Delta}=(k;-1)$.

+ $|k|=\tan\alpha$, trong đó α là góc tạo bởi Δ với trục hoành $(0^o\le\alpha<90^o)$.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số

1. Viết phương trình tiếp tuyến bằng cách tìm trực tiếp tọa độ tiếp điểm

Cách giải. Gọi $M(x_0;f(x_0))$ là tiếp điểm. Dùng công thức (*) viết PT tiếp tuyến tại M bằng cách tìm x_0.

★Thí dụ 1. *Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x-1$ biết rằng tiếp tuyến Δ đi qua gốc tọa độ O.*

Lời giải. Gọi $M(x_0;2x_0^3+3x_0^2-12x_0-1)$ là tiếp điểm của Δ và (C).

PT tiếp tuyến Δ tại M có dạng

$$y=\left(6x_0^2+6x_0-12\right)(x-x_0)+2x_0^3+3x_0^2-12x_0-1.$$

Điểm $O(0;0)$ thuộc Δ nên $-4x_0^3-3x_0^2-1=0$ $\Leftrightarrow x_0=-1$, suy ra $M(-1;12)$.

Vậy PT tiếp tuyến Δ là $y=-12x$.□

★Thí dụ 2. *Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) sao cho*

1) Khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến Δ là lớn nhất.

2) Δ cắt trục hoành tại A mà $OA=1$.

Lời giải. Gọi $M\left(x_0;2+\dfrac{1}{x_0-1}\right)$ là tiếp điểm của Δ và (C), với $x_0\neq1$.

PT tiếp tuyến Δ tại điểm M có dạng

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+2+\frac{1}{x_0-1},$$

hay $\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+y-2-\dfrac{1}{x_0-1}=0.$

1) Ta có $d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\dfrac{2}{x_0-1}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{(x_0-1)^4}+1}}\le\dfrac{2}{\sqrt2}=\sqrt2.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x_0-1)^4=1$ $\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=2$.

Từ đó ta có PT hai tiếp tuyến cần tìm là $\Delta_1: y=-x+1$, $\Delta_2: y=-x+5$.

2) Ta có $A\left(2x_0^2-2x_0+1;0\right)$.

$OA=1\Leftrightarrow\left|2x_0^2-2x_0+1\right|=1\Rightarrow x_0=0\ (\text{do } x_0\neq1).$

Từ đó PT tiếp tuyến cần tìm là $y=-x+1$.□

2. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc k của tiếp tuyến

Cách giải. Từ đề bài tìm hệ số góc k, giải $k=f'(x_0)$ để tìm x_0, dùng công thức (*) viết PT tiếp tuyến cần tìm.

★Thí dụ 3. *Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)=x^3-x^2+x-1$, biết rằng tiếp tuyến Δ tạo với đường thẳng $d: 3x+y-1=0$ một góc 45^o.*

Lời giải. Gọi hệ số góc tiếp tuyến Δ là k thì $\overrightarrow{n_\Delta}=(k;-1)$. Ta có $\overrightarrow{n_d}=(3;1)$ và Δ tạo với d góc 45^o nên $\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{1+k^2}.\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2k^2-3k-2=0 \Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$ hoặc $k=2$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm thì $k=f'(x_0)$.

- Với $k=-\dfrac{1}{2}$ thì $3{x_0}^2-2x_0+\dfrac{3}{2}=0$ (PT này vô nghiệm).
- Với $k=2$ thì $3{x_0}^2-2x_0-1=0 \Leftrightarrow x_0=1$ hoặc $x_0=-\dfrac{1}{3}$. Khi đó có hai tiếp điểm là $M_1(1;0)$, $M_2\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{-40}{27}\right)$.

Từ đó có hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài với PT lần lượt là $y=2x-2$; $y=2x-\dfrac{22}{27}$.□

★Thí dụ 4. *Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Gọi M, N là hai điểm phân biệt trên (C) sao cho hai tiếp tuyến tại M, N song song với nhau và đường thẳng MN cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại A, B khác O sao cho $AB=\sqrt{10}$. Viết phương trình của hai đường tiếp tuyến đó.*

Lời giải. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến tại M, N thì x_M, x_N là nghiệm của PT $f'(x)=k$ $\Leftrightarrow 3x^2-6x-k=0$. Để tồn tại hai tiếp điểm M, N thì phải có $\Delta'=9+3k>0 \Leftrightarrow k>-3$.

Ta có $y=f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)-2x+2$. Từ $f'(x_M)=f'(x_N)=k$, suy ra PT của đường thẳng MN là $y=\left(\dfrac{k}{3}-2\right)x+2-\dfrac{k}{3}$.

Khi đó tìm được $A(1;0)$, $B\left(0;\dfrac{6-k}{3}\right)$.

Ta có $AB^2=10 \Leftrightarrow (k-6)^2=9^2$ $\Rightarrow k=15$ (do $k>-3$). Ta được phương trình $3x^2-6x-15=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}$.

Tìm được $M\left(1-\sqrt{6};-3\sqrt{6}\right)$; $N\left(1+\sqrt{6};3\sqrt{6}\right)$.

Hai tiếp tuyến cần tìm có PT là $y=15x-12\sqrt{6}-15$; $y=15x+12\sqrt{6}-15$.□

DẠNG 2. Tìm tọa độ điểm thỏa mãn tính chất của tiếp tuyến

1. Điểm cần tìm thuộc đồ thị hàm số

★Thí dụ 5. *Tìm tọa độ các điểm M (khác gốc tọa độ O) thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-2x$. Biết rằng tiếp tuyến Δ của (C) tại M vuông góc với đường thẳng OM.*

Lời giải. Gọi $M(x_0;x_0^3-2x_0)\in(C)$ với $x_0\neq 0$.

Hệ số góc của tiếp tuyến Δ tại M là $k_\Delta=y'(x_0)=3x_0^2-2$.

Hệ số góc của đường thẳng OM là x_0^2-2.

Ta có $OM\perp\Delta \Leftrightarrow (x_0^2-2)(3x_0^2-2)=-1$

$\Leftrightarrow 3x_0^4-8x_0^2+5=0 \Leftrightarrow x_0^2=1$ hoặc $x_0^2=\dfrac{5}{3}$.

Từ đó tìm được bốn điểm thỏa mãn đề bài là $M_1(1;-1)$, $M_2(-1;1)$, $M_3\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3};\dfrac{\sqrt{15}}{9}\right)$ $M_4\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3};-\dfrac{\sqrt{15}}{9}\right)$.□

★Thí dụ 6. *Tìm điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x+2$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt (C) tại N mà $MN=2\sqrt{6}$.*

Lời giải. PT tiếp tuyến Δ tại $M(x_0;x_0^3-3x_0+2)$ là $y=(3x_0^2-3)(x-x_0)+x_0^3-3x_0+2$.

Giả sử $N(a;a^3-3a+2)\in(C)\ (a\neq x_0)$.
Tiếp tuyến Δ qua điểm N nên

$a^3-3a+2=(3x_0^2-3)(a-x_0)+x_0^3-3x_0+2$

$\Leftrightarrow(a-x_0)^2(a+2x_0)=0\Rightarrow a=-2x_0$ (do $a\neq x_0$).

Vậy $N(-2x_0;-8x_0^3+6x_0+2)$.

Ta có $MN=2\sqrt{6}\Leftrightarrow 9x_0^2+(9x_0^3-9x_0)^2=24$

$\Leftrightarrow 81x_0^6-162x_0^4+90x_0^2-24=0\Leftrightarrow x_0^2=\dfrac{4}{3}$.

Tìm được hai điểm $M_1\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3};-\dfrac{10\sqrt{3}}{9}+2\right)$; $M_2\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{10\sqrt{3}}{9}+2\right)$ thỏa mãn đề bài.□

2. Điểm cần tìm nằm trên một đường thẳng cho trước

★Thí dụ 7. *Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Tìm điểm N trên trục hoành mà từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến (C) sao cho ba hoành độ tiếp điểm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=21$.*

Lời giải. PT tiếp tuyến Δ tại $M(x_0;-x_0^3+3x_0-2)$ là $y=(-3x_0^2+3)(x-x_0)-x_0^3+3x_0-2$.

Gọi $N(a;0)$ thuộc trục hoành. Tiếp tuyến Δ đi qua điểm N nên $0=(-3x_0^2+3)(a-x_0)-x_0^3+3x_0-2$

$\Leftrightarrow(x_0-1)(2x_0^2+(2-3a)x_0+2-3a)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\ g(x_0)=2x_0^2+(2-3a)x_0+2-3a=0.\end{array}\right.$

Để từ N kẻ được ba tiếp tuyến đến (C) thì PT $g(x_0)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Điều này tương đương với

$$\begin{cases}\Delta=(2-3a)^2-8(2-3a)>0\\ g(1)=6-6a\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<-2\\ a>\dfrac{2}{3}\ \text{và}\ a\neq 1\end{array}\right.\ (*)$$

Giả sử $x_3=1$ thì x_1,x_2 là nghiệm của PT $g(x_0)=0$ nên $x_1+x_2=\dfrac{3a-2}{2}$; $x_1x_2=\dfrac{2-3a}{2}$.

Ta có $x_1^3+x_2^3+x_3^3=21$

$\Leftrightarrow(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=20$

$\Leftrightarrow(3a-2)^3+6(3a-2)^2-160=0\Leftrightarrow 3a-2=4$

$\Leftrightarrow a=2$, thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy ta có $N(2;0)$.□

DẠNG 3. Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với đường cong

Đường thẳng $y=kx+b$ tiếp xúc với đường cong có PT $y=f(x)$ khi và chỉ khi hệ $\begin{cases}f(x)=kx+b\\ f'(x)=k\end{cases}$ có nghiệm.

Nghiệm của hệ này cũng chính là hoành độ tiếp điểm của hai đường trên.

★Thí dụ 8. *Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-1}{x+m}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d:y=x$ tiếp xúc với (C).*

Lời giải. Ta có $y=2m-1+\dfrac{-2m^2+m-1}{x+m}$ nên $y'=\dfrac{2m^2-m+1}{(x+m)^2}$.

Đồ thị (C) tiếp xúc đường thẳng d khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}2m-1+\dfrac{-2m^2+m-1}{x+m}=x\\ \dfrac{2m^2-m+1}{(x+m)^2}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m^2-m+1}{x+m}=-x+2m-1\\ \dfrac{-x+2m-1}{x+m}=1\end{cases}$$

Từ đó sử dụng phương pháp thế ta tìm được $m=-1$ hoặc $m=3$.□

BÀI TẬP

1. Tìm điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$, biết rằng tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm M cắt trục trục hoành và trục tung lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{4}$, với O là gốc tọa độ.

2. Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn $AB = 4\sqrt{2}$.

3. Tìm điểm A trên trục hoành để từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

4. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x}{x-2}$, biết tiếp tuyến cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}.OA$.

5. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$, biết rằng tiếp tuyến đó cắt các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho $\cos\widehat{ABI} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, với I là giao điểm hai đường tiệm cận.

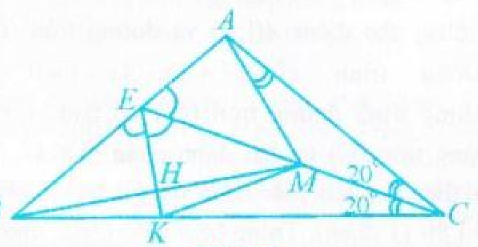
6. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) sao cho $\Delta \perp IM$, với M là tiếp điểm và I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

7. Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + (2m-1)x^2 + (m+1)x - m + 3$ tiếp xúc với đường thẳng $d: y = x + 1$.

*MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍNH GÓC...**(Tiếp trang 4)*

Bài toán 2.2. *Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 20^\circ$. Tính số đo góc AMB.*

Lời giải. (h.9)



Hình 9

Giả sử CM cắt AB tại E, tia phân giác góc BEC cắt BM, BC lần lượt tại H và K.

Ta có tam giác MAC cân tại M, nên $\widehat{AME} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$.

Lại có $\widehat{CEA} = \widehat{CEK} = \widehat{BEK} = 60^\circ$, suy ra $\Delta CEA = \Delta CEK$ (g.c.g)

$\Rightarrow \Delta MEA = \Delta MEK$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{AME} = \widehat{KME} = 40^\circ$. Vì $\widehat{EBK} = 40^\circ$ nên $\Delta EKB = \Delta EKM$ (g.c.g), suy ra

$$\Delta EHB = \Delta EHM \text{ (c.g.c).}$$

Do đó $\widehat{EHM} = 90^\circ$. Xét tam giác HEM có $\widehat{EHM} = 90^\circ, \widehat{HEM} = 60^\circ$, nên $\widehat{EMH} = 30^\circ$.

Do đó $\widehat{AMB} = \widehat{BME} + \widehat{EMA} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$. ❒

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Gọi M là điểm nằm ngoài tam giác sao cho $\widehat{MCA} = 10^\circ$, $\widehat{MAC} = 40^\circ$. Tính số đo góc AMB.

2. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 40^\circ$. Điểm M nằm ngoài tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 10^\circ$, $MB = AB$. Tính số đo góc BCM.

3. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính số đo góc ACD.

4. Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Điểm M nằm ngoài tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 20^\circ$. Tính số đo góc AMB.

5. Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 30^\circ$, $\widehat{MCB} = 20^\circ$. Tính số đo góc AMB.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 1

(*Thời gian làm bài: 180 phút*)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (*2 điểm*). Cho hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M; biết rằng tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho đoạn thẳng AB nhận M làm trung điểm.

Câu 2 (*1 điểm*). Giải phương trình

$$\cot x+\sin x=\frac{\cos x}{1-\cos x}+\frac{1}{\sin x}.$$

Câu 3 (*1 điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3=\sqrt{4-x^2}+2\sqrt{y} \\ 3x^4+4y=2x\sqrt{y}(x^2+3) \end{cases} (x, y\in\mathbb{R}).$$

Câu 4 (*1 điểm*). Tính giới hạn

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos^2 x)}{x(e^x-1)}.$$

Câu 5 (*1 điểm*). Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác vuông tại B có $\widehat{ACB}=2\widehat{BAC}$ và các đường trung tuyến BB', phân giác trong CC'. Các mặt phẳng (SBB'), (SCC') cùng vuông góc với mặt đáy. Góc giữa mặt phẳng $(SB'C')$ và mặt đáy là 60° và $B'C'=a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SBC đến đường thẳng $B'C'$ theo a.

Câu 6 (*1 điểm*). Xét các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=\frac{16}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+1}}+\frac{xy+yz+zx+1}{x+y+z}.$$

PHẦN RIÊNG

(*Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B*)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (*1 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng $\Delta_1: x-y+15=0$ và $\Delta_2: 3x-y-10=0$. Các đường tròn (C_1) và (C_2) bán kính bằng nhau, có tâm nằm trên Δ_1 cắt nhau tại $A(10;20)$ và B. Đường thẳng Δ_2 cắt (C_1) và (C_2) lần lượt tại C và D (khác A). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác BCD, biết rằng diện tích của nó bằng 120.

Câu 8a (*1 điểm*). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-3;-1;-4)$, $B(-3;-5;-4)$ và mặt phẳng $(P): x-y-z+1=0$. Tìm tọa độ điểm C thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC cân tại C và có diện tích bằng $2\sqrt{17}$.

Câu 9a (*1 điểm*). Có một xạ thủ bắn vào tấm bia với xác suất trúng mỗi lần bắn là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn có đúng một lần trúng bia.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (*1 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm $A(1;2)$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y+1=0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

Câu 8b (*1 điểm*). Trong hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-1), B\left(\frac{1}{2};0;-3\right)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z-4=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P). Tìm tọa độ điểm C trên giao tuyến của (P) và (Q) sao cho tam giác ABC vuông tại C.

Câu 9b (*1 điểm*) Cho số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{C_{n+2}^5}-\dfrac{8}{A_{n+1}^3}=\dfrac{2}{n}$. Tìm số hạng chứa x^{n+1} trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức $\left(\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{n}{3x}\right)^{2n}$, với $x\neq 0$.

TRẦN QUỐC LUẬT (*GV THPT chuyên Hà Tĩnh*)

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

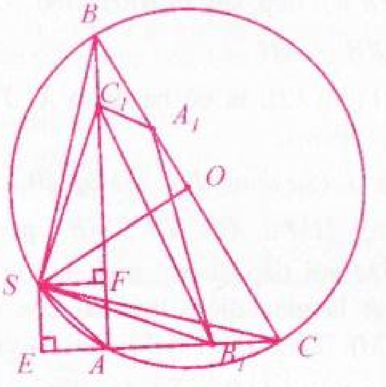
HAI BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KÌ THI IMO 2013

HOÀNG MINH QUÂN
(GV THPT Ngọc Tảo, Hà Nội)

Trong kì thi Olympic Toán học Quốc tế IMO 2013 có hai bài toán hình học. Sau đây chúng tôi sẽ giải hai bài toán này theo nhiều hướng tiếp cận với các ý tưởng khác nhau. Trong bài viết chúng ta kí hiệu (ABC) để chỉ đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.

Bài toán 3 (*Ngày thi thứ nhất*). *Cho tam giác ABC và A_1, B_1, C_1 lần lượt là các tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng nếu tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC thì tam giác ABC vuông.*

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Theo giả thiết S nằm trên (ABC), không mất tính tổng quát, giả sử S nằm trên cung BC chứa đỉnh A.

Ta có $SB_1 = SC_1$, ngoài ra theo tính chất tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp thì $CB_1 = BC_1 = p - a$ (trong đó $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ và $p=\dfrac{a+b+c}{2}$).

Vì $\widehat{ABS} = \widehat{ACS}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{SA}$) nên $\Delta SB_1C = \Delta SC_1B$ (c.g.c), suy ra $SB = SC$, hay S là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của đường tròn (ABC).

Áp dụng định lí Stewart cho tam giác SBC với đoạn thẳng SA_1, ta có

$$SC^2.BA_1 + SB^2.CA_1 = BC(SA_1^2 + BA_1.CA_1)$$

hay $(BA_1 + CA_1)SB^2 = BC(SA_1^2 + BA_1.CA_1)$ (vì $SB = SC$).

Từ đó chú ý rằng $BA_1 + CA_1 = BC$ ta có

$$SB^2 - SA_1^2 = BA_1.CA_1$$

$$\Leftrightarrow SB^2 - SA_1^2 = (p-b)(p-c) = \frac{a^2-(b-c)^2}{4} \quad (1)$$

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của S lên AC, AB.

Ta có $\Delta SBF = \Delta SCE$ nên $AE = AF$, từ đó $BF = CE = \dfrac{b+c}{2}$.

Mặt khác $SB^2 - SC_1^2 = FB^2 - FC_1^2$

$$= \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b+c}{2} - \frac{b+c-a}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Do $SA_1 = SC_1$ nên từ (1) và (2) ta có

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{4} = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b+c}{2} - \frac{b+c-a}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

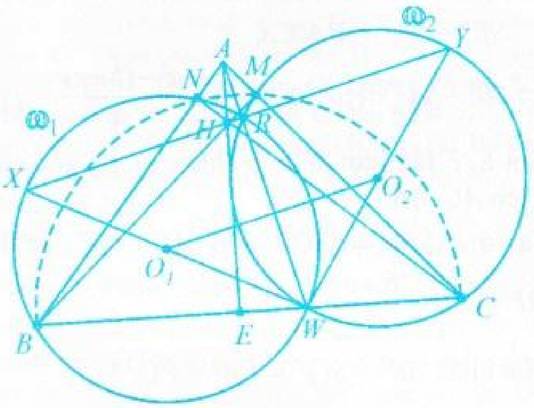
Vậy tam giác ABC vuông ở A. Từ đó ta có điều cần chứng minh. ❒

Nhận xét. Bài toán đảo của bài toán này cũng đúng (bạn đọc tự chứng minh), tức là bài toán này có thể mở rộng như sau:

Cho tam giác ABC và A_1, B_1, C_1 lần lượt là các tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

✪Bài toán 4 (*Ngày thi thứ hai*). *Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H, W là một điểm tùy ý nằm trên cạnh BC và W nằm giữa B và C; các điểm M, N lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C. Kí hiệu ω_1 là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN và gọi X là điểm trên ω_1 sao cho WX là đường kính của ω_1. Tương tự kí hiệu ω_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM và gọi Y là điểm trên ω_2 sao cho WY là đường kính của ω_2. Chứng minh rằng ba điểm X, Y, H thẳng hàng.*

***Lời giải*. *Cách 1*.** (h.2)



Hình 2

Gọi R là giao điểm thứ hai của (BWN) và (CWM), ta có tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn đường kính BC (vì $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^\circ$). Khi đó $AM.AC = AN.AB$. Do đó ta thấy A nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn ω_1 và ω_2, hay ba điểm A, R, W thẳng hàng.

Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC thì tứ giác $BNHE$ nội tiếp đường tròn đường kính BH và tứ giác $CMHE$ nội tiếp đường tròn đường kính CH. Từ đó ta có $AN.AB = AH.AE = AM.AC = AR.AW$, suy ra tứ giác $HEWR$ cũng nội tiếp.

Do đó ta có $\widehat{HRW} = 180^\circ - \widehat{HEW} = 90^\circ$.

Mặt khác WX, WY lần lượt là đường kính của các đường tròn ω_1 và ω_2 nên $\widehat{YRW} = \widehat{XRW} = 90^\circ$.

Từ đó X, Y, H, R thẳng hàng, suy ra ba điểm X, Y, H thẳng hàng (đpcm).

***Cách 2*.** Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của các đường tròn (BWN) và (CWM), R là giao điểm thứ hai của (BWN) và (CWM). Khi đó tương tự phần đầu *Cách 1* ta thấy ba điểm A, R, W thẳng hàng nên $AW \perp O_1O_2$. Mặt khác lại có WX, WY lần lượt là các đường kính của ω_1 và ω_2 suy ra O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của WX, WY và $O_1O_2 \parallel XY$, dẫn đến $RW \perp XY$ (1)

Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC thì tứ giác $BNHE$ nội tiếp đường tròn đường kính BH, nên $AH.AE = AN.AB = AR.AW$. Điều đó chứng tỏ tứ giác $HLWR$ nội tiếp, suy ra $\widehat{WRH} = 180^\circ - \widehat{HEW} = 90^\circ$ hay $RW \perp RH$ (2)

Từ (1) và (2), ta có ba điểm X, Y, H thẳng hàng (đpcm).

***Cách 3*.** (*Sử dụng định lí Miquel*)

Ta có $HM \perp AC$, $HN \perp AB$, nên tứ giác $ANHM$ nội tiếp đường tròn đường kính AH. Gọi R là giao điểm thứ hai của (BWN) và (CWM). Theo định lí Miquel ta có R thuộc đường tròn (AMN). Từ đó $\widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BNMC$ nội tiếp, suy ra BN là trục đẳng phương của ($BNMC$) và (BWN) và CM là trục đẳng phương của ($BNMC$) và (CWM). Do đó A nằm trên trục đẳng phương RW của (BWN) và (CWM), hay ba điểm A, R, W thẳng hàng.

Dễ chứng minh $\widehat{ARH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{WRH} = 90^\circ = \widehat{WRX}$ hay R, H, X thẳng hàng. Tương tự có R, H, Y thẳng hàng nên X, Y, H thẳng hàng (đpcm). ❐

SỬ DỤNG HỆ THẶNG DƯ ĐỂ GIẢI TOÁN

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

(Tiếp theo kì trước)

IV. SỬ DỤNG HỆ THẶNG DƯ TRONG PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANTE BẬC NHẤT

★Thí dụ 8. *Cho $a, b \in \mathbb{Z}^+, (a,b)=1$. Số nguyên dương n được gọi là* ***số đẹp*** *nếu tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $n = ax + by$. Số nguyên dương n được gọi là* ***số xấu*** *nếu không tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $n = ax + by$.*

1) Chứng minh rằng $n = ab$ là số xấu lớn nhất.

2) Chứng minh rằng nếu $n \in [a+b; ab]$, thì n là số đẹp khi và chỉ khi $ab+a+b-n$ là số xấu.

3) Tìm số lượng các số xấu.

Lời giải. 1) Ta chứng minh $n = ab$ là số xấu lớn nhất.

• Giả sử $n = ab$ là số đẹp, hay phương trình $ab = ax + by$ (1) có nghiệm nguyên dương

$$\Rightarrow \begin{cases} ax \vdots b \\ by \vdots a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \vdots b \\ y \vdots a \end{cases} \left(\text{do } (a,b)=1\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = bx_1 \\ y = ay_1 \end{cases} \left(x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^+\right)$$

Khi đó phương trình (1) tương đương với $ab(x_1 + y_1) = ab \Leftrightarrow x_1 + y_1 = 1$, vô lí. Vậy điều giả sử sai, tức là $n = ab$ là số xấu.

• Ta chứng minh mọi $n > ab$ thì phương trình $n = ax + by$ có nghiệm nguyên dương.

Do $(a,b)=1$ nên $A = \{a, 2a, \ldots, ba\}$ là HĐĐ mod$b$ suy ra tồn tại $x \in \{1, 2, \ldots, b\}$ sao cho $ax \equiv n \pmod{b} \Leftrightarrow n - ax = by \, (y \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow ax + by = n.$

Do $1 \le x \le b \Rightarrow n - ax \ge n - ab > 0 \Rightarrow by > 0$ $\Rightarrow y \in \mathbb{Z}^+$. Vậy tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $ax + by = n \Leftrightarrow \forall n > ab$ đều là số đẹp.

Từ hai điều trên ta thấy $n = ab$ là số xấu lớn nhất.

2) Giả sử n là số đẹp, khi đó tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $ax + by = n$.

Khi đó $ab + a + b - n = ab - (x-1)a - (y-1)b$ (2)

Giả sử $ab + a + b - n$ là số đẹp, khi đó tồn tại $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $ab + a + b - n = ax_1 + by_1$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $ab = (x + x_1 - 1)a + (y + y_1 - 1)b$ mà $x + x_1 - 1 \in \mathbb{Z}^+, y + y_1 - 1 \in \mathbb{Z}^+$ nên $n = ab$ là số đẹp, mâu thuẫn với câu 1).

Vậy $ab + a + b - n$ là số xấu.

Ngược lại, đặt $k = ab + a + b - n$. Do $(a,b)=1$ nên $A = \{a, 2a, \ldots, ba\}$ là HĐĐ mod$b$.

Suy ra tồn tại $x \in \{1, 2, \ldots, b\}$ sao cho $ax \equiv k \pmod{b} \Leftrightarrow k - ax \equiv 0 \pmod{b} \Leftrightarrow k - ax = by$ $\Leftrightarrow ax + by = k \; (y \in \mathbb{Z})$. Theo giả thiết k là số xấu, suy ra $k \le ab \Rightarrow y \le 0$. Khi đó ta có

$$n = ab + a + b - k = ab + a + b - (ax + by)$$
$$= a(b + 1 - x) + b(1 - y).$$

Do $b + 1 - x \in \mathbb{Z}^+$, $1 - y \in \mathbb{Z}^+$ nên n là số đẹp.

3) Theo câu 1) mọi $n > ab$ đều là số đẹp.

• $\forall n \in [1; a+b-1]$ đều là số xấu, trong đoạn này có tất cả $a + b - 1$ số xấu.

• $\forall n \in [a+b; ab]$ thì $ab + a + b - n \in [a+b; ab]$ theo câu 2) ta thấy nếu lấy một số đẹp thuộc đoạn $[a+b; ab]$ thì có một số xấu cũng thuộc đoạn $[a+b; ab]$, từ đó số các số xấu trong đoạn $[a+b; ab]$ là $\dfrac{ab - a - b + 1}{2}$.

(Xem tiếp trang 27)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/435. (Lớp 6) Số $s=\overline{3...3}^2+\overline{5...54...4}^2$ viết trong hệ thập phân có $n+1$ chữ số 3, $n-1$ chữ số 5 và n chữ số 4. Biết rằng $s=r^2$, hãy tìm cách viết của số r.

NGUYỄN VĂN TIẾN
(GV THCS Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T2/435. (Lớp 7) Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB kẻ đoạn thẳng AE vuông góc với AB sao cho $AB = AE$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC kẻ đoạn thẳng AF vuông góc với AC sao cho $AF = AC$. Chứng minh rằng $EF = 2AM$ và $EF \perp AM$.

PHẠM TRUNG KIÊN
(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

Bài T3/435. Xét n số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n>1)$ thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n=a_1a_2...a_n$.

1) Chứng minh rằng với mọi n cho trước thì phương trình trên luôn có nghiệm.

2) Hãy tìm tất cả các số n để phương trình đã cho có nghiệm với $a_1<a_2<...<a_n$.

NGUYỄN THU DUNG
(SV Kinh tế, 28E, ĐH Luật Hà Nội)

Bài T4/435. Cho các số a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ac=2013abc$ và $2013(a+b+c)=1$. Tính $A=a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}$.

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Phan Thúc Trực, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T5/435. Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD$). Chứng minh rằng nếu $AC + CB = AD + DB$ thì $ABCD$ là hình thang cân.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/435. Giải bất phương trình sau trên $\mathbb{R}$

$$(\sqrt{13}-\sqrt{2x^2-2x+5}-\sqrt{2x^2-4x+4})$$
$$\times(x^6-x^3+x^2-x+1)\geq 0.$$

NGUYỄN HỮU TÂN
(SV K50A, Hóa học, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/435. Cho tam giác nhọn ABC có ba góc thỏa mãn điều kiện $A>\frac{\pi}{4}, B>\frac{\pi}{4}, C>\frac{\pi}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{\tan A-2}{\tan^2 C}+\frac{\tan B-2}{\tan^2 A}+\frac{\tan C-2}{\tan^2 B}.$$

NGUYỄN TIẾN LÂM
(GV THCS Nguyễn Huệ, Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T8/435. Cho hình chóp $S.ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu tâm O, $AB = a$, $CD = b$. Dựng các hình bình hành $SAKB$ và $SDHC$. Tính tỉ số $\frac{HK}{EF}$ theo a và b, trong đó E là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC, F là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

NGUYỄN TRƯỜNG SƠN
(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/435. Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho n biểu diễn trong hệ thập phân có 2013 chữ số và $\frac{n}{7}$ là số nguyên dương có 2013 chữ số lẻ?

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/435. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng hai điều kiện sau

1) $f(x)-2g(x)=g(y)+4y$, với mọi $x, y\in\mathbb{R}$;

2) $f(x)g(x)\leq 33x^2$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/435. Tìm tất cả các đa thức $T(x,y)$ sao cho $T(x,y).T(z,t) = T(xz+yt, xt+yz)$ với mọi x, y, z, t thuộc $\mathbb{R}$.

MAI TUẤN ANH

(GV THCS Nga Điền, Nga Sơn, Thanh Hóa)

Bài T12/435. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn. Đường tròn đường kính AB cắt các đường thẳng CA, CB, DA và DB theo thứ tự tại E, F, I và J (khác A và B). Chứng minh rằng có một đường phân giác của một trong các góc tạo bởi hai đường thẳng EF và IJ vuông góc với đường thẳng CD.

TRẦN VIỆT HÙNG

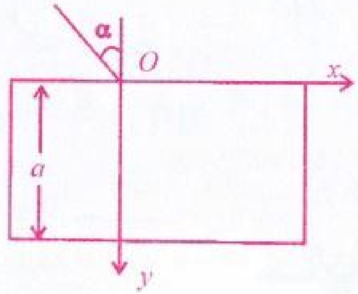
(Sở GD - ĐT Sóc Trăng)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/435. Chiếu một tia sáng đơn sắc lên bản mặt song song có bề dày a = 2cm dưới góc tới $\alpha = 30^o$ (hình vẽ). Xác định góc ló và độ dịch chuyển ngang của tia sáng sau khi qua bản mặt nếu:

a) Chiết suất của bản mặt không đổi $n = 1{,}5$.

b) Chiết suất thay đổi theo hướng pháp tuyến với quy luật $n = 1 + \dfrac{y}{a}$.



TRẦN KHÁNH HẢI

(Thừa Thiên Huế)

Bài L2/435. Một vật khối lượng 10kg bị tác dụng bởi lực $F = -3x - 5x^2$, trong đó F tính bằng newton (N) và x tính bằng mét (m). Khi vật chuyển động thì coi cơ năng của vật được bảo toàn. Giả thiết là thế năng U của vật bằng không tại $x = 0$.

a) Tìm thế năng của vật tại x = 4m.

b) Nếu vật có vận tốc 5m/s và hướng theo chiều âm khi ở tọa độ x = 6m thì tốc độ của nó là bao nhiêu khi đi qua gốc?

c) Lại giả thiết rằng thế năng của vật là −10 J tại $x = 0$, hãy trả lời lại các câu a) và b).

NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV ĐH Kinh tế Công nghiệp TP. Hồ Chí Minh)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/435. (For 6^th grade) The number $s = \overline{3...3}^2 + \overline{5...54...4}^2$, written in decimal system, consists of $n+1$ digits 3, $n-1$ digits 5 and n digits 4. Given that $s = r^2$, find the value of r.

T2/435. (For 7^th grade) Let AM be the median of triangle ABC. On the half-plane containing C created by the side AB, draw line segment AE perpendicular to AB such that $AB = AE$. On the half-plane containing B created by AC, draw AF perpendicular to AC such that $AF = AC$. Prove that $EF = 2AM$ and $EF \perp AM$.

T3/435. Consider n positive integers $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n > 1)$ satisfying $a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1a_2...a_n$.

1) Prove that for any given value of n, the above equation always has solution.

2) Determine all values of n such that the equation has solution $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

T4/435. The numbers a, b, c satisfy $ab + bc + ac = 2013abc$ and $2013(a+b+c) = 1$. Find the sum $A = a^{2013} + b^{2013} + c^{2013}$.

T5/435. Prove that if in a trapezium $ABCD$ ($AB//CD$), $AC + CB = AD + DB$, then $ABCD$ is an isosceles trapezium.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/435. Solve the inequality on $\mathbb{R}$

$$(\sqrt{13} - \sqrt{2x^2 - 2x + 5} - \sqrt{2x^2 - 4x + 4}) \times (x^6 - x^3 + x^2 - x + 1) \geq 0.$$

(Xem tiếp trang 26)

★ **Bài T1/431.** *So sánh A và B, biết*

$$A=\left(1+\frac{1}{2013}\right)\left(1+\frac{1}{2013^2}\right)...\left(1+\frac{1}{2013^n}\right)$$

với n là số nguyên dương và $B=\frac{2013^2-1}{2012^2-1}$.

Lời giải. $B=\frac{2013^2-1}{2012^2-1}=\frac{(2013+1)(2013-1)}{2012^2-1}$

$$>\frac{2014.2012}{2012^2}=\frac{2014}{2012}=C.$$

Ta sẽ so sánh A với C. Nếu $A<C$ thì do $C<B$ nên $A<B$.

• Với $n=1$ thì $A=1+\frac{1}{2013}=\frac{2014}{2013}<\frac{2014}{2012}=C$, suy ra $A<B$.

• Với $n\geq 2$ thì $A=\left(1+\frac{1}{2013}\right)D=\frac{2014}{2013}D$ với

$$D=\left(1+\frac{1}{2013^2}\right)\left(1+\frac{1}{2013^3}\right)...\left(1+\frac{1}{2013^n}\right).$$

Ta tìm cách biến đổi các thừa số trong D để có thể giản ước chúng.

Đặt $a=2013$. Với $m\geq 2$ ta sẽ chứng tỏ rằng

$$\frac{1}{a^m}<\frac{a-1}{a^m-a} \qquad (1)$$

Thật vậy, $\frac{a-1}{a^m-a}-\frac{1}{a^m}=\frac{a^m(a-1)-a^m+a}{a^m(a^m-a)}$

$=\frac{a^m(a-2)+a}{a^m(a^m-a)}>0$ (do $a=2013$ và $m\geq 2$).

Từ (1) ta có

$$1+\frac{1}{a^m}<1+\frac{a-1}{a^m-a}=\frac{a^m-a+a-1}{a^m-a}=\frac{a^m-1}{a(a^{m-1}-1)} \qquad (2)$$

Thay (2) vào biểu thức D khi cho m bằng 2, 3, ..., n và $a=2013$, ta được

$$D=\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^3}\right)...\left(1+\frac{1}{a^{n-1}}\right)\left(1+\frac{1}{a^n}\right)$$

$$<\frac{a^2-1}{a(a-1)}.\frac{a^3-1}{a(a^2-1)}...\frac{a^{n-1}-1}{a(a^{n-2}-1)}.\frac{a^n-1}{a(a^{n-1}-1)}$$

$$=\frac{a^n-1}{a^{n-1}(a-1)}=\frac{(a^n-1)a}{a^n(a-1)}<\frac{a}{a-1}=\frac{2013}{2012}.$$

Từ đó $A=\frac{2014}{2013}D<\frac{2014}{2013}.\frac{2013}{2012}=\frac{2014}{2012}=C$, suy ra $A<B$, với mỗi số nguyên dương n. ❐

➢**Nhận xét.** Nhiều bạn biến đổi biểu thức không chính xác. Hai bạn sau có lời giải đúng:

Nghệ An: *Nguyễn Văn Mạnh, Trần Lê Hiệp*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/431.** *Trong mặt phẳng cho bốn điểm, trong đó không có hai điểm nào có khoảng cách nhỏ hơn* $\sqrt{2}$ *cm. Chứng minh rằng trong bốn điểm đó tồn tại hai điểm có khoảng cách lớn hơn hoặc bằng 2 cm.*

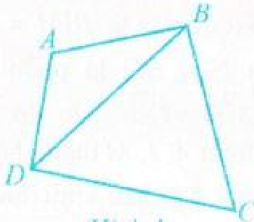
Lời giải. Gọi bốn điểm đã cho là A, B, C, D.

Trường hợp 1. Trong bốn điểm A, B, C, D có ít nhất ba điểm thẳng hàng. Giả sử A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Khi đó $AC = AB + BC \geq \sqrt{2}+\sqrt{2}>2$.

Trường hợp 2. Trong bốn điểm A, B, C, D không có ba điểm nào thẳng hàng. Ta xét hai khả năng

a) *Tứ giác ABCD lồi.*

Khi đó trong các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}, \widehat{DAB}$ tồn tại ít nhất một góc lớn hơn hoặc bằng 90^o.



Hình 1

Giả sử $\widehat{DAB} \geq 90^o$ (h.1)

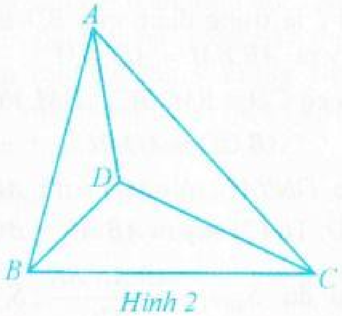
Khi đó $BD^2 \geq AB^2 + AD^2$

$\geq (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$

$\Rightarrow BD \geq 2$.

b) *Tứ giác ABCD không lồi.*

Khi đó trong bốn điểm A, B, C, D tồn tại một điểm nằm trong tam giác mà các đỉnh là ba điểm còn lại. Giả sử D nằm trong tam giác ABC (h.2).



Hình 2

Khi đó trong các góc $\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}$ tồn tại ít nhất một góc lớn hơn hoặc bằng 90^o. Giả sử $\widehat{BDC} \geq 90^o$.

Ta có $BC^2 \geq DB^2 + DC^2 \geq (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$

$\Rightarrow BC \geq 2$. Bài toán được chứng minh.❒

➤**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn xét thiếu trường hợp ba trong bốn điểm thẳng hàng hoặc bốn điểm tạo thành tứ giác không lồi.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Hồ Quang Huy*, 7A, THCS Văn Lang, TP.Việt Trì; **Nghệ An**: *Nguyễn Thùy Dung*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Lê Hoàng Duyên, Phạm Thiên Trang, Nguyễn Thị Hạ Vy*, THCS Hành Phước, *Trương Thị Mai Trâm*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, *Nguyễn Hồng Miêu*, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, *Phạm Thị Vy Vy*, 6A, *Phạm Quốc Trung*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, *Nguyễn Cao Bách*, 7B1, THCS Nguyễn Nghiêm, TP.Quảng Ngãi.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/431. *Tìm hai chữ số tận cùng của số* $2003^{2004^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}}$

Lời giải. Đặt $A=2005^{2004^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}}, B=2004^{2005^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}}$.

Do $2004 \,\vdots\, 4$ nên $B \,\vdots\, 4$. Mà $2004 \equiv -1 (\text{mod}\, 5)$ nên $B \equiv -1 (\text{mod}\, 5)$ suy ra $B = 5k+4$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Do $B \,\vdots\, 4$ nên $5k \,\vdots\, 4 \Rightarrow k \,\vdots\, 4 \Rightarrow k = 4t$ $(t \in \mathbb{N}^*)$.

Vậy $B = 20t + 4, t \in \mathbb{N}^*$ (1)

Do $2003 \equiv 3 (\text{mod}\, 100)$ nên

$A = 2003^B \equiv 3^{20t+4} \equiv (3^{20})^t.3^4 \equiv 1.81 \equiv 81 (\text{mod}\, 100)$.

Vậy hai chữ số tận cùng của số A là 81.❒

➤**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn tham gia giải bài này và đều tìm đúng kết quả. Các cách giải là khá phong phú, chẳng hạn để chứng minh (1) có thể làm như sau:

$2004 \equiv 4 (\text{mod}\, 20) \Rightarrow B \equiv 4^{2005^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}} (\text{mod}\, 20)$.

Với $k \in \mathbb{N}^*$ thì $4^{2k+1} - 4 = 4(4^{2k} - 1) = 4(16^k - 1) \,\vdots\, 4$.

$16^k - 1$ có tận cùng là 5 nên $16^k - 1 \,\vdots\, 5$ nên $4(16^k - 1) \,\vdots\, 20$

$\Rightarrow 4^{2k+1} \equiv 4 (\text{mod}\, 20)$.

Vậy $B \equiv 4 (\text{mod}\, 20)$ hay $B = 20t + 4, t \in \mathbb{N}^*$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Lê Đức Mạnh*, 6A5, THCS Yên Lạc; **Hà Nam**: *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Thị Hồng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Hữu Hoàng*, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Nghệ An**: *Phạm Quang Toàn, Hoàng Thị Thảo Hiền*, 8C, THCS Đặng Thị Mai, TP.Vinh; **Quảng Nam**: *Lê Phước Định*, 8/1, THCS Kim Đằng, Hội An; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Cao Bách*, 7B1, THCS Nguyễn Nghiêm, TP.Quảng Ngãi.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/431. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P = 27\sqrt{x} + 8\sqrt{y}$, *trong đó x, y là các số thực không âm thỏa mãn* $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = x^2 + y^2$.

Lời giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$.

Ta có $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x(x - \sqrt{1-y^2}) + y(y - \sqrt{1-x^2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x^2+y^2-1)}{x+\sqrt{1-y^2}} + \frac{y(x^2+y^2-1)}{y+\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-1)\left(\frac{x}{x+\sqrt{1-y^2}} + \frac{y}{y+\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x=y=0. \end{array}\right.$$

• Với $x = y = 0$ thì $P = 0$. Mà $P \geq 0$ với x, y không âm. Vậy min$P = 0$.

• Với $x^2+y^2=1$ ta tìm giá trị lớn nhất của P. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$P^2=(9.3\sqrt{x}+4.2\sqrt{y})^2\le(9^2+4^2)(9x+4y)$$
$$=97(9x+4y)\quad(1)$$

Lại có $(9x+4y)^2\le(9^2+4^2)(x^2+y^2)=97$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P^2\le 97\sqrt{97}\Leftrightarrow P\le\sqrt[4]{97^3}$;

$$P=\sqrt[4]{97^3}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{9}=\dfrac{y}{4}\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9}{\sqrt{97}}\\ y=\dfrac{4}{\sqrt{97}}.\end{cases}$$

Vậy $\max P=\sqrt[4]{97^3}$. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Một số bạn khi giải bài này đã nhầm lẫn cho rằng điều kiện của bài toán tương đương với điều kiện $x^2+y^2=1$, dẫn đến $\min P = 8$ tại $x=0$; $y=1$(!)

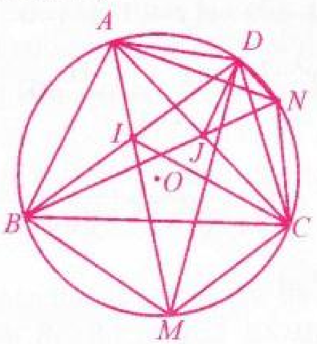
2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Thêm, Chu Mai Anh, Hoàng Thị Lan*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nam**: *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Nghệ An**: *Phạm Quang Toàn*, 8C, THCS Đặng Thanh Mai, TP.Vinh; **Thanh Hóa**: *Lê Quang Dũng*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi**: *Trần Thị Mỹ Ninh*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T5/431.** *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng BD là phân giác của góc AIC khi và chỉ khi AC là phân giác góc BJD.*

Lời giải. (Hình vẽ)



Kẻ $CM//BD$ ($M\in(O)$), khi đó $BM = CD$, $\widehat{DBM}=\widehat{BDC}$. Kết hợp với giả thiết $ID = IB$ ta thấy $\Delta BIM=\Delta DIC$ (c.g.c).

Từ đó suy ra $\widehat{BIM}=\widehat{DIC}$.

• Nếu BD là phân giác của góc AIC thì $\widehat{AID}=\widehat{DIC}$, do đó $\widehat{BIM}=\widehat{AID}$, suy ra ba điểm A, I, M thẳng hàng.

Gọi R là bán kính đường tròn (O), ta có

$$S_{ABM}=\frac{AB.BM.AM}{4R};\ S_{ADM}=\frac{AD.DM.AM}{4R}.$$

Vì I là trung điểm của BD nên $S_{ABM}=S_{ADM}$ suy ra $AB.BM = AD.DM$ (1)

Ta có $CD = BM$, $BC = DM$, từ (1) suy ra

$$AB.CD = AD.BC \quad (2)$$

Kẻ $DN//AC$ ($N\in(O)$) thì $AD = CN$, $AN = CD$. Từ (2) suy ra $AB.AN = BC.CN$ (3)

Lại do $S_{ABN}=\dfrac{AB.AN.BN}{4R}$; $S_{CBN}=\dfrac{BC.CN.BN}{4R}$ nên từ (3) ta có $S_{ABN}=S_{CBN}$.

Điều này chứng tỏ rằng BN đi qua trung điểm J của AC. Lúc đó do $AD = NC$, $\widehat{DAJ}=\widehat{NCJ}$ nên $\Delta DJA=\Delta NCJ$ (c.g.c). Từ đó

$$\widehat{AJD}=\widehat{CJN}=\widehat{AJB}.$$

Nghĩa là AC là phân giác của góc BJD.

• Nếu AC là phân giác của góc BJD thì chứng minh tương tự như phần trên ta được BD là phân giác của góc AIC (đpcm). ❒

➢**Nhận xét.** Kết quả bài toán trên là một tính chất đặc trưng của *tứ giác điều hoà* (*tứ giác nội tiếp ABCD thỏa mãn điều kiện AB.CD=AD.BC*). Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Những bạn sau có lời giải tốt hơn cả: **Hà Nam**: *Hoàng Đức Mạnh*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Hữu Hoàng*, 8B, THCS Trần Phú, TTr. Nông Cống; **TP.Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

HỒ QUANG VINH

★**Bài T6/431.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^3(1-x)+y^3(1-y)=12xy+18 & (1)\\ |3x-2y+10|+|2x-3y|=10 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Ta có

PT (1) $\Leftrightarrow x^3+y^3=x^4+y^4+12xy+18$

$\Leftrightarrow x^3+y^3=(x^2-y^2)^2+2(xy+3)^2$ (3)

Do vế phải của PT (3) luôn không âm, suy ra $x^3+y^3\ge 0 \Leftrightarrow x^3 \ge (-y)^3 \Leftrightarrow x \ge -y \Leftrightarrow x+y\ge 0.$

Áp dụng BĐT $|A|+|B| \ge |A-B|$ (*)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB \le 0$. Ta có $|3x-2y+10|+|2x-3y|$

$$\ge |3x-2y+10-2x+3y| = |x+y+10| \ge 10.$$

Do đó PT (2) tương đương với

$$\begin{cases}(3x-2y+10)(2x-3y)\le 0\\ x+y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(5x+10)5x\le 0\\ y=-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x\le 0\\ y=-x.\end{cases}$$

Thay $y=-x$ vào PT (3), ta được

$$2(-x^2+3)^2=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.$$

Mà $-2\le x\le 0$ nên chọn được $x=-\sqrt{3}$, suy ra $y=\sqrt{3}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)=(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Nhiều bạn do không vận dụng BĐT (*) đã phải phân chia thành các khoảng để bỏ dấu giá trị tuyệt đối nên lời giải còn dài. Có bạn không đối chiếu điều kiện nên đã kết luận sai về nghiệm của hệ phương trình.

2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt, lập luận chặt chẽ:

Hà Nam: *Đỗ Đăng Dương, Hoàng Đức Mạnh*, 9A, *Đặng Đình Lợi*, 9C, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm, *Lê Anh Tuấn*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Bắc Ninh**: *Phạm Văn Chinh*, 11A9, THPT Yên Phong Số 2; **Hải Phòng**: *Vũ Thị Ngọc*, 10C1, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hưng Yên**: *Nguyễn Trung Hiếu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội**: *Nguyễn Hữu Khỏe*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Nghệ An**: *Lê Thị Huyền Trang*, 10T2, THPT Đô Lương 1; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Hữu Hoàng*, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống, *Lê Hùng Cường*[A], 10A7, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Phạm Anh Thư*, 10A1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa; **Phú Yên**: *Lê Văn Thiện*, 10TL1, THPT Nguyễn Huệ, Tuy Hòa; **Trà Vinh**: *Trương Hoàng Việt*, 8_4, THCS Thị trấn Cầu Quan; **TP.Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Trần Hoàng Minh*, 11 Toán, PTNK ĐHQG TP.Hồ Chí Minh; **Long An**: *Chu Thị Thu Hiền*, 11T, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long**: *Trần Duy Quân*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đắk Lắk**: *Nguyễn Như Hiệp*, 12A1, THPT Trần Quốc Toản; **Cà Mau**: *Lưu Giang Nam*, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

ĐINH GIA LINH

★**Bài T7/431.** *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $E=a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}$, trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$.*

Lời giải. Giả sử $a\le b\le c$ suy ra $a\le 0\le c$.

• TH 1. $b\ge 0$. Ta có $a+b+c=0 \Rightarrow a=-(b+c)$

$$\Rightarrow E=-(b+c)^{2013}+b^{2013}+c^{2013}=-\sum_{k=1}^{2012} b^k c^{2013-k}\le 0.$$

• TH 2. $b<0$. Đặt $x=-a$, $y=-b$ thì $x>0$, $y>0$ và $c=x+y>0$. Ta có

$E=-(x^{3013}+y^{2013})+c^{2013}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2013 số thực dương: 1 số bằng $\dfrac{x^{2013}}{(x+y)^{2013}}$ và 2012 số bằng $\dfrac{1}{2^{2013}}$ ta có

$$\frac{x^{2013}}{(x+y)^{2013}}+\frac{2012}{2^{2013}}\ge \frac{2013x}{x+y}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2012}.$$

Tương tự $\dfrac{y^{2013}}{(x+y)^{2013}}+\dfrac{2012}{2^{2013}}\ge \dfrac{2013y}{x+y}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2012}.$

Suy ra $\dfrac{x^{2013}+y^{2013}}{(x+y)^{2013}}+\dfrac{2012}{2^{2013}}\ge \dfrac{2013}{2^{2012}}$

$$\Rightarrow \frac{x^{2013}+y^{2013}}{(x+y)^{2013}}\ge \frac{1}{2^{2012}} \Rightarrow E\le c^{2013}\left(1-\frac{1}{2^{2012}}\right).$$

Ta có $1=x^2+y^2+c^2\ge \dfrac{(x+y)^2}{2}+c^2=\dfrac{3c^2}{2}$

$$\Rightarrow 0<c\le\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow E\le\left(\frac{2}{3}\right)^{1006}\left(1-\frac{1}{2^{2012}}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Trong mọi trường hợp đều có

$$E\le\left(\frac{2}{3}\right)^{1006}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2012}}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và hai số còn lại bằng $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. Vậy giá trị lớn nhất của E là $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1006}\left(1-\dfrac{1}{2^{2012}}\right)\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. ❒

➢**Nhận xét.** Tòa soạn không nhận được nhiều bài giải cho bài toán này. Một số bạn cho kết quả đúng nhưng lập luận chưa được chuẩn. Chẳng hạn cho rằng từ $a+b+c=0$ sẽ có hai số cùng dấu(!) Một số bạn khác dùng cả kiến thức không thuộc chương trình phổ thông để giải (cực trị của hàm nhiều biến). Các bạn sau đây có lời giải tốt:

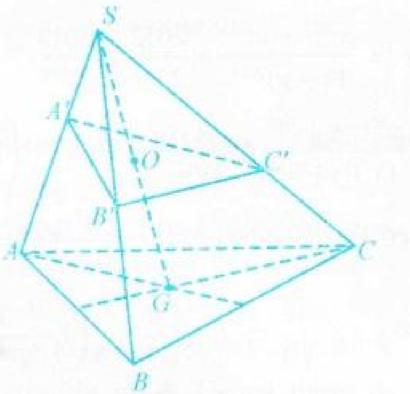
Hà Nam: *Bạch Xuân Đạo*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; *Lê Anh Tuấn*; 11T, THPT chuyên ban Hà Nam; **Hà Nội**: *Nguyễn Hữu Nhân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hòa Bình**: *Đặng Hữu Hiếu*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ.

TẠ NGỌC TRÍ

★Bài T8/431. *Cho hình chóp S.ABC có G là trọng tâm của tam giác ABC, O là trung điểm của SG. Một mặt phẳng (α) thay đổi qua điểm O và cắt các cạnh SA, SB, SC của hình chóp lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng*

$$\frac{SA'^2}{AA'^2}+\frac{SB'^2}{BB'^2}+\frac{SC'^2}{CC'^2}\geq\frac{AA'^2}{SA'^2}+\frac{BB'^2}{SB'^2}+\frac{CC'^2}{SC'^2}.$$

Lời giải. (Theo bạn *Lê Thế Sơn*, 11B$_8$, THPT Bỉm Sơn, **Thanh Hoá**) (Hình vẽ)



Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\frac{AA'}{SA'}=m$, $\frac{BB'}{SB'}=n$, $\frac{CC'}{SC'}=p$ $(m,n,p>0)$. Khi đó, BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\geqslant m^2+n^2+p^2 \qquad (1)$$

Ta có $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\overrightarrow{SG}$

$\Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{SA'}+(n+1)\overrightarrow{SB'}+(p+1)\overrightarrow{SC'}=6\overrightarrow{SO}$.

Do O thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ nên $(m+1)+(n+1)+(p+1)=6 \Leftrightarrow m+n+p=3$.

Sử dụng BĐT Cauchy cho các số dương ta có

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\geqslant\frac{1}{mn}+\frac{1}{np}+\frac{1}{pm}=\frac{3}{mnp} \qquad (2)$$

$$(mn+np+pm)^2\geq 3mnp(m+n+p)=9mnp \quad (3)$$

Mặt khác,

$(mn+np+pm)^2(m^2+n^2+p^2)$

$=(mn+np+pm)(mn+np+pm)(m^2+n^2+p^2)$

$$\leq\left(\frac{(m+n+p)^2}{3}\right)^3=27 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $m^2+n^2+p^2\leq\frac{3}{mnp}$. Kết hợp với (2) ta có BĐT (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $m=n=p=1$. Khi đó A', B', C' thứ tự là trung điểm SA, SB, SC. ❒

➤**Nhận xét.** Ngoài bạn *Sơn*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Văn Cao*, 11A1, THPT Sáng Sơn, Sông Lô; **Thái Bình**: *Nguyễn Đình An*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình; **Thái Nguyên**: *Tạ Văn Tuấn*, 11A1, THPT Lương Phú; **Nghệ An**: *Lê Hồng Đức*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; *Bùi Hoàng Đạt*, 11C1, THPT Nguyễn Đức Mậu, Quỳnh Lưu; **Quảng Bình**: *Trần Hữu Thuận*, 11 Toán, *Trần Thanh Bình*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Long An**: *Chu Thị Thu Hiền*, 11T, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T9/431. *Tìm số tự nhiên n sao cho*

$$A=\left[\frac{n+3}{4}\right]+\left[\frac{n+5}{4}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+n^2+3n-1$$

là số nguyên tố, trong đó kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Long Duy*, 10T, THPT chuyên **Hưng Yên**, *Trần Minh Hiếu*, 6C, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**).

Đặt $B=\left[\frac{n+3}{4}\right]+\left[\frac{n+5}{4}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]$

- Nếu $n=4k$ thì $B=k+k+1+2k=4k+1$ $=n+1$.
- Nếu $n=4k+1$ thì $B=k+1+k+1+2k$ $=4k+2=n+1$.
- Nếu $n=4k+2$ thì $B=k+1+k+1+2k+1$ $=4k+3=n+1$.

• Nếu $n=4k+3$ thì $B=k+1+k+2+2k+1$ $=4k+4=n+1$. Vậy $B=n+1$. Do đó

$$A=n+1+n^2+3n-1=n(n+1).$$

Do đó $A \vdots n$. Để A là số nguyên tố thì điều kiện cần là $n=1$. Nếu $n=1$ thì $A=5$ là số nguyên tố. Vậy $n=1$ là đáp số của bài toán.❒

➢**Nhận xét.** Có khá đông các bạn tham gia giải bài toán này và đều giải đúng. Tuy nhiên số bạn học sinh THCS tham gia không nhiều. Ngoài bạn *Duy, Hiếu*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Hà Nam: *Lê Anh Tuấn*, 11 Toán, THPT chuyên ban Hà Nam; **Phú Thọ**: *Nguyễn Đức Thuận*, 8A, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Văn Hùng*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Đậu Hồng Quân*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP.Vinh; **Gia Lai**: *Trần Nguyên Try*, 12 C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP.Pleiku; **TP.Hồ Chí Minh**: *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1; **Bến Tre**: *Từ Nhật Quang*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T10/431. *Cho hàm số*

$$y=a\sin(x+2013)+\cos 2014x$$

trong đó a là số thực cho trước.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $M^2+m^2\ge 2$.

Lời giải. Lần lượt xét hàm số tại các điểm $x=0$, $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$ và $x=-\frac{\pi}{2}$, ta có

$f(0)=1+a\sin 2013$, $f(\pi)=1-a\sin 2013$. Do đó $f(0)+f(\pi)=2$ và $\max\{f(0), f(\pi)\}\ge 1$, nên $M\ge \max\{f(0), f(\pi)\}\ge 1$. Suy ra $M^2\ge 1$ (1)

Tương tự, ta có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+a\cos 2013$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1-a\cos 2013.$$

Do đó $f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$ và

$$\min\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\le -1$$

nên $m\le \min\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\le -1.$

Suy ra $m^2\ge 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta thu được $M^2+m^2\ge 2$.❒

➢**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Nguyễn Ngọc Đại, Nguyễn Trung Hiếu*, 11T, *Trần Bá Trung*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội**: *Nguyễn Hữu Khỏe*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hòa Bình**: *Đặng Hữu Hiếu*, 12T, chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa**: *Tạ Đình Quyền*, 10A7, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Phú Yên**: *Bùi Lê Ngọc Min*, 11S3, THPT Dân lập Duy Tân, Tuy Hòa; **Bình Định**: *Nguyễn Văn Hải*, 11B, THPT Tây Sơn; **Long An**: *Chu Thị Hiền*, 11T, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T11/431. *Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=\frac{1}{2}$ và $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}, n=1, 2,...$*

a) Chứng minh dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Đặt $b_n=a_1+a_2+...+a_n$ với mỗi số nguyên dương n. Tìm phần nguyên $[b_n]$ và giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Lời giải. a) Ta có $a_n^2-a_n+1=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$\Rightarrow a_n>0, \forall n\ge 1$. Mặt khác

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}-a_n=-\frac{a_n(a_n-1)^2}{a_n^2-a_n+1}\le 0 \quad (1)$$

Do đó chứng minh bằng quy nạp theo n ta có

$$0<a_n<a_{n-1}<...<a_1=\frac{1}{2}.$$

Như vậy (a_n) là dãy số giảm bị chặn dưới bởi 0, suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$. Do đó từ (1)

$$a(a-1)^2=0\Rightarrow a=0 \text{ (vì } 0\le a<\frac{1}{2}).$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

b) Ta có $a_{n+1}-1=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}-1=\frac{a_n-1}{a_n(a_n-1)+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}-1}=a_n+\frac{1}{a_n-1}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}, \forall n\ge 1.$$

Do đó $b_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{i+1}-1}-\frac{1}{a_i-1}\right)$

$=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_1-1}=2-\frac{1}{1-a_{n+1}}.$

Chú ý $0<a_{n+1}<\frac{1}{2}\Rightarrow 2>\frac{1}{1-a_{n+1}}>1\Rightarrow 1>b_n>0$

$\Rightarrow [b_n]=0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=2-1=1.$ □

➢**Nhận xét.** Đây là bài toán cơ bản của dãy số. Hoan nghênh các bạn lớp 10 sau có lời giải đúng:

Hà Nội: *Nguyễn Chí Tùng*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nghệ An**: *Phạm Trung Dũng, Đặng Đình Lâm*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Bình**: *Trần Thanh Bình*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **Bến Tre**: *Nguyễn Duy Linh*, 10T, THPT chuyên Bến Tre; **Bình Định**: *Võ Thế Duy*, 10A1, THPT Số 1 TTr Phù Mỹ; **Tiền Giang**: *Nguyễn Ngọc Minh Tú*, 10T, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T12/431.** *Cho bốn điểm A, B, C và D cùng nằm trên một đường tròn (ABC). M là một điểm không nằm trên đường tròn này. Gọi T_i là các tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 4 điểm đã cho, trừ điểm i (i = A, B , C, D). Gọi H_i theo thứ tự là tam giác có 3 đỉnh là hình chiếu vuông góc của M xuống các cạnh (hoặc cạnh kéo dài) của tam giác T_i (i = A, B, C, D). Chứng minh rằng*

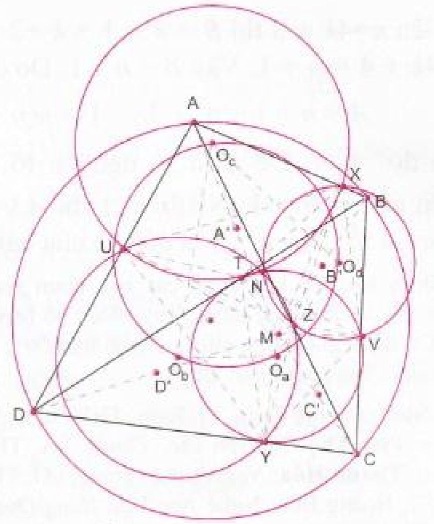
1) Tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác H_i (i = A, B, C, D) cùng nằm trên một đường tròn tâm O'.

2) Khi chỉ D thay đổi trên đường tròn (ABC) thì tâm O' nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải. 1) Gọi X, Y, Z, T, U, V theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng AB, CD, AC, DB, AD, BC; (O_a), (O_b), (O_c), (O_d) là đường tròn ngoại tiếp các tam giác H_A, H_B, H_C, H_D; A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của MA, MB, MC, MD (hình vẽ).

Rõ ràng H_A, H_B, H_C, H_D theo thứ tự là các tam giác YTV, UZY, XTU, VZX.

Dễ thấy các bộ năm điểm (A, M, X, Z, U); (B, M, V, T, X); (C, M, V, Z, Y); (D, M, U, T, Y) cùng thuộc một đường tròn và các đường tròn đó theo thứ tự có tâm là A', B', C', D' (1)



Gọi N là giao điểm thứ hai của (O_a), (O_b), chú ý tới (1), ta có

$(NT,NU)\equiv(NT,NY)+(NY,NU)\pmod{\pi}$

$\equiv(VT,VY)+(ZY,ZU)\pmod{\pi}$

$\equiv(VT,VM)+(VM,VY)+(ZY,ZM)+(ZM,ZU)\pmod{\pi}$

$\equiv(XT,XM)+(ZM,ZY)+(ZY,ZM)+(XM,XU)\pmod{\pi}$

$\equiv(XT,XU)\pmod{\pi}$. Do đó N thuộc (O_c).

Tương tự N thuộc (O_d).

Vậy (O_a), (O_b), (O_c), (O_d) cùng đi qua N.

Nói cách khác, các bộ bốn điểm (N, Y, T, V); (N, U, Z, Y); (N, X, T, U); (N, V, Z, X) cùng thuộc một đường tròn và các đường tròn đó theo thứ tự có tâm là O_a, O_b, O_c, O_d (2)

Suy ra O_aO_c, O_aO_d, O_bO_c, O_bO_d theo thứ tự vuông góc với NT, NV, NU, NZ.

Kết hợp với (1) và (2), chú ý rằng A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn, ta có

$(O_aO_c,O_aO_d)-(O_bO_c,O_bO_d)$

$\equiv(NT,NV)-(NU,NZ)\pmod{\pi}$

$\equiv(YT,YV)-(YU,YZ)\pmod{\pi}$

$\equiv(YT,YU)-(YV,YZ)\pmod{\pi}$

$\equiv(DT,DU)-(CV,CZ)\pmod{\pi}$

$\equiv(DB,DA)-(CB,CA)\pmod{\pi}\equiv 0\pmod{\pi}$.

Điều đó có nghĩa là O_a, O_b, O_c, O_d cùng thuộc một đường tròn (tâm O') (3)

2) Gọi O_1, O_2, O_3 theo thứ tự là tâm các đường tròn $(O_dB'C')$, $(O_dC'A')$, $(O_dA'B')$,

chú ý tới (1) và (2), ta có $O_aB' \perp VT$, $O_aC' \perp VY$, $O_dB' \perp VX$, $O_dC' \perp VZ$.

Kết hợp với (1), chú ý rằng A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn, ta có

$(O_aB', O_aC') - (O_dB', O_dC') \equiv (VT, VX) - (VY, VX) (\mathrm{mod}\,\pi)$
$\equiv (BT, BX) - (CY, CX) (\mathrm{mod}\,\pi)$
$\equiv (BD, BA) - (CD, CA) (\mathrm{mod}\,\pi) \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\pi)$.

Do đó O_a thuộc đường tròn $(O_dB'C')$.

Tương tự O_b, O_c theo thứ tự thuộc các đường tròn $(O_dC'A')$, $(O_dA'B')$.

Vậy các bộ bốn điểm (B', C', O_d, O_a); (C', A', O_d, O_b); (A', B', O_d, O_c) cùng thuộc một đường tròn và các đường tròn đó theo thứ tự có tâm là O_1, O_2, O_3 (4)

Từ (1) và (2) suy ra $VZ \perp C'O_d, O_1O_2 \perp C'O_d$; $VX \perp B'O_d, O_1O_3 \perp B'O_d$.

Do đó $VZ \,//\, O_1O_2; VX \,//\, O_1O_3$.

Từ (2), (3) và (4) suy ra $NZ \perp O_bO_d$, $O'O_2 \perp O_bO_d; NX \perp O_cO_d, O'O_3 \perp O_cO_d$.

Do đó $NZ \,//\, O'O_2, NX \,//\, O'O_3$. Từ (2) có

$(O_1O_2, O_1O_3) \equiv (VZ, VX) \equiv (NZ, NX)$
$\equiv (O'O_2, O'O_3) (\mathrm{mod}\,\pi)$.

Do đó O' thuộc đường tròn cố định $(O_1O_2O_3)$.❐

➢**Nhận xét.** Bài toán này khó, Toà soạn chỉ nhận được lời giải của bạn *Nguyễn Trung Hiếu*, 11T1, THPT chuyên **Hưng Yên**.

Không cần giả thiết A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn, các đường (O_a), (O_b), (O_c), (O_d) vẫn cùng đi qua một điểm (xem bài **T12/404**, TH&TT Số 404, tháng 2 năm 2011).

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/431. *Dưới pit tông trong một xi lanh có một mol khí hêli. Người ta đốt nóng chậm khí, khi đó thể tích của khí tăng nhưng tần số va chạm của các nguyên tử vào đáy bình không đổi. Tìm nhiệt dung của khí trong quá trình đó.*

Lời giải. Tần số va chạm của các nguyên tử với đáy bình phụ thuộc vào vận tốc trung bình v của các nguyên tử và mật độ nguyên tử khí n. Mà $v \approx \sqrt{T}$, còn $n = \dfrac{N}{V}$, trong đó N là số nguyên tử khí. Do tần số va chạm của nguyên tử khí với đáy bình là không đổi nên $\dfrac{\sqrt{T}}{V} = \text{const}$, hay $T = aV^2$ với a là hằng số.

Áp dụng nguyên lí I nhiệt động lực học: $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}A + \mathrm{d}U = p\mathrm{d}V + C_V\mathrm{d}T$.

Theo phương trình trạng thái của khí lí tưởng $pV = RT \Rightarrow p = aRV$. Mặt khác $\mathrm{d}T = 2aV\mathrm{d}V$

nên $\mathrm{d}Q = aV.\dfrac{R\mathrm{d}T}{2aV} + C_V.\mathrm{d}T$

suy ra $C = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} = \dfrac{R}{2} + C_V = \dfrac{R}{2} + \dfrac{3}{2}R = 2R$.

Vậy nhiệt dung của khí là $C = 2R$.❐

➢**Nhận xét. Thái Nguyên**: *Phạm Thanh* Bình, 11A1, THPT chuyên Thái Nguyên; **Nghệ An**: *Chu Minh Thông*, A3K41, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Đăk Lăk**: *Nguyễn Viết Sang*, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Du.

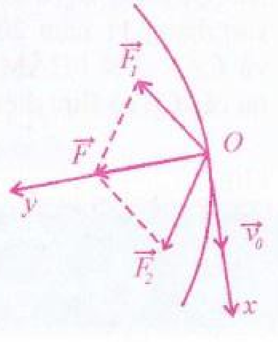
NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/431. *Một vật chịu tác động đồng thời của hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ không đổi có độ lớn bằng nhau $F_1 = F_2 = 0{,}4$N và đang chuyển động tròn đều với vận tốc độ dài $v_0 = 2$m/s, bán kính quỹ đạo $R = 1$m. Nếu tại một thời điểm nào đó ta ngừng tác dụng lực $\overrightarrow{F_1}$ thì sau thời điểm đó 4s vật có tốc độ bằng bao nhiêu? Biết vật có khối lượng $m = 0{,}1$ kg.*

Lời giải. Do vật chuyển động tròn đều nên vật chịu tác dụng của hợp lực hướng vào tâm quỹ đạo và có độ lớn $F = \dfrac{mv^2}{R} = 0{,}4$ (N).

Theo đầu bài $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F}| \Rightarrow (\vec{F_1}, \vec{F_2}) = 120^\circ$; $(\vec{F_1}, \vec{F}) = 60^\circ$, $(\vec{F_2}, \vec{F}) = 60^\circ$.

Chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc O là vị trí của vật lúc ngừng tác dụng lực $\vec{F_1}$, trục Ox theo chiều $\vec{v_0}$, trục Oy theo hướng của hợp lực $\vec{F}$ (Hình vẽ). Tại thời điểm $t = 0$ là lúc ngừng tác dụng



của lực $\vec{F}_1$. Ta thấy sẽ xảy ra hai trường hợp

1) Trường hợp $(\vec{v}_0, \vec{F}_2) = 30^o$. Ta có

$$a_x = \frac{F_{2x}}{m} = \frac{F_2\cos30^o}{m} = 2\sqrt{3}\text{m/s}^2$$

$$\Rightarrow v_x = v_{0x} + a_x t = 2 + 2\sqrt{3}t\,(\text{m/s}).$$

$$a_y = \frac{F_{2y}}{m} = \frac{F_2\sin30^o}{m} = 2(\text{m/s}^2).$$

Suy ra $v_y = v_{0y} + a_y t = 2t\,(\text{m/s})$.

Tốc độ của vật tại thời điểm $t = 4s$ là $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2+8\sqrt{3})^2 + 8^2} \approx 17{,}8(\text{m/s})$.

2) Trường hợp $(\vec{v}_0, \vec{F}_2) = 120^o$. Ta có

$$a_x = \frac{F_{2x}}{m} = \frac{-F_2\cos30^o}{m} = -2\sqrt{3}(\text{m/s}^2)$$

suy ra $v_x = v_{0x} + a_x t = 2 - 2\sqrt{3}t\,(\text{m/s})$.

$$a_y = \frac{F_{2y}}{m} = \frac{F_2\sin30^0}{m} = 2(\text{m/s}^2)$$

suy ra $v_y = v_{0y} + a_y t = 2t\,(\text{m/s})$.

Tốc độ của vật tại thời điểm $t = 4s$ là

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2-8\sqrt{3})^2 + 8^2} \approx 14{,}3(\text{m/s}). \square$$

➤**Nhận xét.** Bằng cách chọn hệ trục toạ độ sao cho Ox trùng với phương của F_2, bạn *Bùi Vũ Hoàn*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** cho lời giải đúng cho cả hai trường hợp 1) và 2).

ĐẶNG THANH HẢI

THÔNG BÁO

Các bạn nhớ đặt mua

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ cho Quý IV, **ĐẶC SAN Số 9** (phát hành vào tháng 11 năm 2013, **Mã số C.168.1**) và CÁC ẤN PHẨM CỦA TOÀ SOẠN tại các Cơ sở Bưu điện trên cả nước.

PROBLEMS IN THIS ISSUE...

(Tiếp trang 17)

T7/435. The three angles of an acute triangle ABC are such that $A > \frac{\pi}{4}, B > \frac{\pi}{4}, C > \frac{\pi}{4}$. Determine the smallest value of the expression

$$T = \frac{\tan A - 2}{\tan^2 C} + \frac{\tan B - 2}{\tan^2 A} + \frac{\tan C - 2}{\tan^2 B}.$$

T8/435 Let $S.ABCD$ be a pyramid inscribed in a sphere centred at O, and $AB = a$, $CD = b$. Draw parallellograms $SAKB$ and $SDHC$. Determine the ratio $\frac{HK}{EF}$ in terms of a and b, where E is the point of intersection of AD and BC, and F is the point of intersection of AC and BD.

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/435. How many positive integers n are there such that n has 2013 digits in decimal number system and $\frac{n}{7}$ is a positive interger with 2013 odd digits?

T10/435. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that the following two conditions are satisfied 1) $f(x) - 2g(x) = g(y) + 4y$, for all $x, y \in \mathbb{R}$;

2) $f(x)g(x) \le 33x^2$, for all $x \in \mathbb{R}$.

T11/435. Find all polynomials $T(x, y)$ such that $T(x, y).T(z, t) = T(xz + yt, xt + yz)$ for all $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

T12/435. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. The circle whose diameter is AB meets CA, CB, DA and DB at E, F, I and J respectively (all differ from A and B). Prove that the angle-bisector of an angle between EF and IJ is perpendicular to the line CD.

SỬ DỤNG HỆ THẶNG DƯ ... (Tiếp trang 15)

Vậy tổng cộng có tất cả

$$a+b-1+\frac{ab-a-b+1}{2}=\frac{ab+a+b-1}{2}$$

số xấu. ❒

★Thí dụ 9. *Cho $a,b,c\in\mathbb{Z}^+,(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$. Số nguyên dương n được gọi là* ***số đẹp*** *nếu tồn tại $x,y,z\in\mathbb{Z}^+$, sao cho $n=bcx+cay+abz$.*

1) Chứng minh rằng $n=2abc$ là số xấu lớn nhất.

2) Chứng minh rằng nếu $n\in[ab+bc+ca;2abc]$ thì n là số xấu khi và chỉ khi số $k=2abc+ab+bc+ca-n$ là số đẹp.

3) Tìm số lượng các số xấu.

Lời giải. 1) Ta chứng minh $n=2abc$ là số xấu lớn nhất.

+) Giả sử $n=2abc$ là số đẹp hay phương trình $2abc=bcx+cay+abz$ (*) có nghiệm nguyên dương. Khi đó

$$\begin{cases}bcx\,\vdots\,a\\ cay\,\vdots\,b\\ abz\,\vdots\,c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\,\vdots\,a\\ y\,\vdots\,b\\ z\,\vdots\,c\end{cases}(\text{do } (a,b)=(b,c)=(c,a)=1)$$

suy ra $x=ax_1;\ y=by_1;\ z=cz_1\ (x_1,y_1,z_1\in\mathbb{Z}^+)$.

Lúc này phương trình (*) $\Leftrightarrow abc(x_1+y_1+z_1)=2abc$

$\Leftrightarrow x_1+y_1+z_1=2$, vô lí.

Vậy điều giả sử là sai, tức là $n=2abc$ là số xấu.

+) Ta chứng minh mọi $n>2abc$ thì phương trình $n=bcx+cay+abz$ có nghiệm nguyên dương.

Do $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$ nên $A=\{n-abi\}_{i=1}^{c}$ là HĐĐ mod$c$. Từ đó tồn tại $z\in\{1,2,...,c\}$ sao cho $n-abz\equiv 0\pmod c\Leftrightarrow n-abz=tc\ (t\in\mathbb{Z})$, mà $n>2abc$. Suy ra $t=\frac{n-abz}{c}>\frac{2abc-abc}{c}=ab$, tức là $t\in\mathbb{Z}^+, t>ab$, dẫn đến tồn tại $x,y\in\mathbb{Z}^+$ mà $bx+ay=t$, từ đó ta có $n-abz=(bx+ay)c\Leftrightarrow n=bcx+cay+abz$, chứng tỏ $\forall n>2abc$ đều là số đẹp.

Từ hai điều trên ta thấy $n=2abc$ là số xấu lớn nhất.

2) Tương tự Thí dụ 8, câu 2.

3)Tương tự Thí dụ 8, câu 3. Ta tính được số lượng số xấu là $\frac{2abc+bc+ca+ab-1}{2}$. ❒

BÀI TẬP

1. Cho $p\in\wp, p=3k+2\,(k\in\mathbb{N}^*)$. Hỏi $S=\sum_{k=1}^{p}(k^2+k+1)$ chia cho p dư bao nhiêu?

2. Cho $p\in\wp, p=3k+2\,(k\in\mathbb{N}^*)$,

$$A=x^4+x^2y^2+y^4\,(x,y\in\mathbb{N}^*).$$

Chứng minh rằng nếu $A\,\vdots\,p$ thì $A\,\vdots\,p^4$.

3. Tìm tất cả các số $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho tồn tại tập $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ là một hoán vị của tập $B=\{1,2,...,n\}$ thoả mãn $C=\{a_1,a_1a_2,...,a_1a_2...a_n\}$ là HĐĐ mod$n$.

4. Liệu có thể đặt 12 số 1, 2,..., 12 theo đường tròn sao cho với ba số liền nhau a, b, c bất kì thì số b^2-ac chia hết cho 13?

5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n đều tồn tại số nguyên dương k, sao cho $k.5^n=\overline{a_ma_{m-1}....a_2a_1}$ viết trong hệ thập phân thoả mãn i và a_i có cùng tính chẵn lẻ, với mọi $i=1, 2, ..., n$.

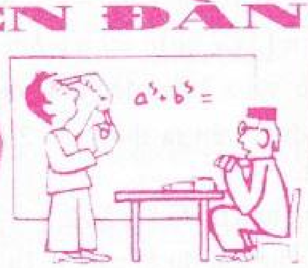
6. Cho $p\in\wp, p>2, p\equiv 2\pmod 3$. Chứng minh rằng $A=\{y^2-x^3-1\mid x,y\in\mathbb{N}, x<p, y<p\}$ có nhiều nhất $p-1$ số chia hết cho p.

7. Cho số nguyên dương n thoả mãn

$$1+1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+(n-1)^{n-1}\equiv 0\pmod n.$$

Chứng minh rằng n không có ước chính phương khác 1.

8. Tồn tại bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 10000, sao cho $2^n-n^2\,\vdots\,7$?



KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN

HOÀNG SỸ LUYỆN
(Học viên Cao học K19 Toán, ĐH Vinh)

Có rất nhiều định lí, tính chất, bài toán,.... có thể khai thác được. Bài viết này chúng tôi xin giới thiệu tới bạn đọc một bài toán hay và khai thác được như thế.

BÀI TOÁN. *Xét các số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Tìm giá trị lớn nhất của $S=a+b+c$.*

(Bài 7 - Tài liệu chủ đề tự chọn nâng cao Toán 10 – NXBGD Việt Nam).

Lời giải. Từ giả thiết ta có $a, b, c \in [0; 2]$.

Cách 1. Xem điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$ là PT bậc hai ẩn a (b, c là tham số). Khi đó

$$a=\frac{-bc+\sqrt{(4-b^2)(4-c^2)}}{2}\le\frac{-bc+\frac{4-b^2+4-c^2}{2}}{2}$$

$$=\frac{8-(b+c)^2}{4}.$$

Suy ra $S=a+b+c\le\dfrac{8-(b+c)^2+4(b+c)}{4}$

$=\dfrac{12-(b+c-2)^2}{4}\le\dfrac{12}{4}=3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy giá trị lớn nhất của S bằng 3.

Cách 2. Áp dụng BĐT Cauchy cho các số thực không âm $2-a$, $2-b$, $2-c$ ta có

$$27(2-a)(2-b)(2-c)\le(2-a+2-b+2-c)^3$$

$$\Leftrightarrow 27\big(8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc\big)$$

$$\le(6-a-b-c)^3$$

$$\Leftrightarrow 27(8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2-4)$$

$$\le(6-a-b-c)^3$$

$$\Leftrightarrow 27((a+b+c)^2-4(a+b+c)+4)$$

$$\le(6-a-b-c)^3\Leftrightarrow 27(S^2-4S+4)\le(6-S)^3$$

$$\Leftrightarrow(S-3)(S^2+12S+36)\le 0.$$

Từ đó suy ra $S\le 3$.

Cách 3. Với mọi tam giác ABC ta có $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$. Đem đối chiếu với giả thiết của bài toán thì ta có thể đặt $a=2\cos A$, $b=2\cos B$, $c=2\cos C$ trong đó A, B, C là số đo các góc của tam giác ABC không tù. Khi đó ta có

$$S=2(\cos A+\cos B+\cos C)\le 3$$

(vì $\cos A+\cos B+\cos C\le\dfrac{3}{2}$).□

Bây giờ ta khai thác thêm để tìm những bài toán *"vệ tinh"* xung quanh ***Bài toán*** trên.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $4=a^2+b^2+c^2+abc$

$\ge 4.\sqrt[4]{a^3b^3c^3}\Rightarrow abc\le 1$.

Mặt khác $a^2+b^2+c^2=4-abc\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$. Cũng theo BĐT Cauchy, ta có

$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\le 9$

$\Rightarrow ab+bc+ca\le 3$. Vậy ta thu được bài toán

✪ **Bài toán 1.** *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh các bất đẳng thức sau*

1) $abc\le 1$; 2) $ab+bc+ca\le 3$;

3) $a^2+b^2+c^2\ge 3$.

Theo **Cách 1** ta có $a\le\dfrac{8-(b+c)^2}{4}$; tương tự $b\le\dfrac{8-(c+a)^2}{4}$, $c\le\dfrac{8-(a+b)^2}{4}$. Cộng theo vế ba BĐT trên và biến đổi, ta có

$2(a+b+c)\le 12-(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\le 12-(4-abc+ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c)+ab+bc+ca-abc\le 8$.

Vậy ta thu được bài toán

✪ **Bài toán 2.** *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2+c^2+abc=4$. *Chứng minh rằng*

$$2(a+b+c)+ab+bc+ca-abc\le 8.$$

Theo BĐT Cauchy ta có

$$4=a^2+b^2+c^2+abc\ge 2ab+c^2+abc.$$

Từ đó suy ra $4-c^2\ge ab(2+c)\Rightarrow 2-c\ge ab$

$\Rightarrow c+ab\le 2\Rightarrow c^2+abc\le 2c$.

Tương tự $b^2+abc\le 2b,\ a^2+abc\le 2a.$

Cộng theo vế ba BĐT trên ta được

$$a^2+b^2+c^2+3abc\le 2(a+b+c).$$

Vậy ta thu được bài toán

✪ **Bài toán 3.** *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2+c^2+abc=4$. *Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+3abc\le 2(a+b+c).$$

Ta thấy $4=a^2+b^2+c^2+abc=a^2+\dfrac{(b+c)^2}{2}$

$+\dfrac{a(b+c)^2}{4}+\left(b^2+c^2-\dfrac{(b+c)^2}{2}\right)+a\left(bc-\dfrac{(b+c)^2}{4}\right)$

$=a^2+\dfrac{(2+a)(b+c)^2}{4}+\dfrac{(b-c)^2}{2}-\dfrac{a(b-c)^2}{4}$

$=a^2+\dfrac{(2+a)(b+c)^2}{4}+\dfrac{(2-a)(b-c)^2}{4}.$

Vì $0\le a\le 2$ nên $4\ge a^2+\dfrac{(2+a)(b+c)^2}{4}$

$\Rightarrow 4-a^2\ge\dfrac{(2+a)(b+c)^2}{4}\Rightarrow 2-a\ge\dfrac{(b+c)^2}{4}$

$\Rightarrow b+c\le 2\sqrt{2-a}$.

Tương tự $c+a\le 2\sqrt{2-b};\ a+b\le 2\sqrt{2-c}$. Cộng theo ba BĐT trên ta có

$$a+b+c\le\sqrt{2-a}+\sqrt{2-b}+\sqrt{2-c}.$$

Vậy ta thu được bài toán

✪ **Bài toán 4.** *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2+c^2+abc=4$. *Chứng minh rằng*

$$a+b+c\le\sqrt{2-a}+\sqrt{2-b}+\sqrt{2-c}.$$

Ta thấy nếu cả ba số dương a, b, c cùng lớn hơn (hoặc cùng nhỏ hơn) 1 thì sẽ mâu thuẫn với giả thiết $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Nên ta có thể giả sử $a\ge 1,\ b\ge 1,\ c\le 1$ hoặc $a\le 1,\ b\le 1,$ $c\ge 1$. Từ đó suy ra $(a-1)(b-1)\ge 0$

$$\Leftrightarrow a+b-ab\le 1 \qquad (1)$$

Mặt khác theo **Bài toán 3** ta có $2-c\ge ab$ suy ra $0\le c\le 2-ab$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $(a+b-ab)c\le c\le 2-ab\Rightarrow ab+bc+ca-abc\le 2.$

Hơn nữa $c\le 1$, nên $abc\le ab$, suy ra $0\le ac+bc+ab-abc$. Vậy ta thu được bài toán

✪ **Bài toán 5.** *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2+c^2+abc=4$. *Chứng minh rằng* $0\le ab+bc+ca-abc\le 2$. **(USA MO – 2001).**

Theo **Cách 3** thì ta có thể đặt $a=2\cos A$, $b=2\cos B$, $c=2\cos C$ trong đó A, B, C là số đo các góc của tam giác ABC không tù. Vậy thì ta có thể lượng giác hoá một số bài toán đã tìm được ở trên để tạo ra những bài toán bất đẳng thức trong tam giác.

✪ **Bài toán 6.** *Cho tam giác ABC không tù. Chứng minh các bất đẳng thức sau*

1) $\cos A\cos B\cos C\le\dfrac{1}{8}$;

2) $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\le\dfrac{3}{4}$;

3) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\dfrac{3}{4}$;

4) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos A\cos B+\cos B\cos C$ $+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C\le 2$;

5) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$ $+6\cos A\cos B\cos C\le\cos A+\cos B+\cos C$;

6) $\cos A+\cos B+\cos C\le\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}$;

ĐẠI HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM LẦN THỨ VIII tại Nha Trang

Trong các ngày từ 10 đến 14 tháng 8 năm 2013 vừa qua, Hội Toán học Việt Nam, Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán, Viện Toán học Việt Nam và Trường Sĩ quan Thông tin phối hợp tổ chức Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ VIII tại Trường Sĩ quan Thông tin, TP Nha Trang, Khánh Hoà.

Đây là dịp để các nhà nghiên cứu, ứng dụng và giảng dạy Toán cả nước trình bày kết quả nghiên cứu của mình trong vòng 5 năm gần đây. Đồng thời trao đổi, thảo luận về những vấn đề thời sự cấp thiết trong phát triển Toán học của đất nước. Tham dự Đại hội có hơn 700 đại biểu ở các Vụ, các Viện, các Trường Đại học, Cao đẳng trong nước và Quốc tế, các Trường THPT, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam. Có 357 báo cáo được trình bày tại Hội nghị trong đó có 5 báo cáo mời (ở 5 phiên toàn thể) và 43 báo cáo mời tại 8 tiểu ban.

Trong dịp này, Hội Toán học Việt Nam đã tiến hành Đại hội đại biểu nhằm đánh giá, tổng kết những thành tựu phát triển toán học trong 5 năm qua, ghi nhận kết quả hoạt động của Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán đồng thời nêu ra đề cương phát triển trong 5 năm tới và bầu ra Ban chấp hành Hội Toán học Việt Nam nhiệm kì 2013 - 2017 gồm 19 thành viên (ảnh dưới). GS. TS *Nguyễn Hữu Dư* (Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội) được bầu là Chủ tịch, GS. TSKH *Phùng Hồ Hải* (Viện Toán học Việt Nam) được bầu là Tổng thư kí kiêm Phó Chủ tịch Hội.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin chúc mừng thành công của Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ VIII.

PV

7) $0 < \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A - 2\cos A \cos B \cos C \le \frac{1}{2}$.

Nếu ta thay đổi giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ của bài toán gốc thành $ab + bc + ca + abc = 4$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{bc}\right)^2 + \left(\sqrt{ca}\right)^2 + \sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca} = 4$

thì chúng ta sáng tạo ra một số bài toán sau.

Bài toán 7. *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn* $ab + bc + ca + abc = 4$. *Chứng minh các bất đẳng thức sau*

1) $abc \le 1$;

2) $\sqrt{abc}.(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \le 3$;

3) $ab + bc + ca \ge 3$;

4) $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right) \le \sqrt{abc} + \frac{8}{\sqrt{abc}}$;

5) $\frac{2-\sqrt{ab}}{\sqrt{c}} + \frac{2-\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} + \frac{2-\sqrt{ca}}{\sqrt{b}} \ge 3\sqrt{abc}$;

6) $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \le \sqrt{2-\sqrt{ab}} + \sqrt{2-\sqrt{bc}} + \sqrt{2-\sqrt{ca}}$;

7) $0 \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{abc} \le \frac{2}{\sqrt{abc}}$.

Ta tổng quát bài toán ban đầu như sau:

Cho các số không âm a, b, c. *Tìm số* k *không âm lớn nhất thoả mãn các điều kiện* $a^2 + b^2 + c^2 + kabc = 3 + k$ *và* $a + b + c \le 3$.

Các bạn hãy thử làm nhé!

GIẢI ĐÁP CUỘC THI
ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2013
Đợt 1

Bài 1. NĂM DƯƠNG LỊCH ỨNG VỚI QUÝ TỴ

Hệ Can Chi có tất cả 10 Can và 12 Chi được ghép mỗi Can với một Chi theo thứ tự và tuần hoàn, như thế mỗi Can ghép với sáu Chi, và cứ sau 10 năm thì lại gặp năm với Can là Quý. Năm 2013 là năm Quý Tỵ, cứ 60 năm thì tên Can Chi lặp lại, nên năm 2013 – 60.33 = 33 là năm Quý Tỵ và là năm Dương lịch (Quý Tỵ) nhỏ nhất với hai chữ số.

Các năm Dương lịch (Quý Tỵ) có ít nhất hai chữ số biểu thị bởi công thức $60k+33=10(6k+3)+3$ với k là số tự nhiên. Từ đó suy ra những năm Dương lịch (có ít nhất hai chữ số) thỏa mãn ba điều kiện sau thì tương ứng với năm Quý Tỵ:

- chữ số hàng đơn vị là 3,
- chữ số hàng chục là số lẻ (do $6k+3$ là số lẻ),
- tổng các chữ số chia hết cho 3.

Chẳng hạn các năm sau là năm Quý Tỵ: 33, 453, 813, 1533, 1893, 1953, 2013,...

HOÀNG NGUYỄN

Bài 2. GẤP GIẤY LÀM PHONG BÌ

Đặt $MN = a = 20$ cm, $MQ = b = 19{,}2$ cm, $ME = u$, $MF = v$, $EF = x$, $FG = y$. Để phong bì không bị hở và có diện tích bề mặt lớn nhất thì các tam giác định gấp MEF, NFG, PGH, QHE phải phủ kín hình chữ nhật $EFGH$ và khi gấp phải không chờm lên nhau, tức là có $\Delta MEF = \Delta KEF = \Delta PGH = \Delta TGH$ và $\Delta QEH = \Delta KEH = \Delta TGF = \Delta TEG$.

Suy ra các điểm H,K,T,F thẳng hàng. Hơn nữa, $EM = EK = EQ$, $GN = GT = GP$ nên $u = EM = GN = b2 = 9{,}6$ cm.

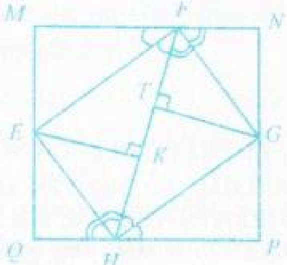
Vì $EG = MN = a$ nên $x^2 + y^2 = a^2$ (1)

Trong tam giác vuông MEF có $u^2 + v^2 = x^2$ (2)

Trong tam giác vuông NFG có

$$u^2 + (a-v)^2 = y^2 \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $v^2 - av + u^2 = 0$. Từ đó tính được $v_1 = 12{,}8$ cm và $v_2 = 7{,}2$cm. Do đó $EF = 16$ cm và $EG = 12$ cm hoặc $EF = 12$ cm và $EG = 16$ cm.



PHI PHI

Bài 3. CẮM HOA MỪNG SINH NHẬT BÁC HỒ

Ta có $1=2^0; 9=2^3+2^0; 5=2^2+2^0; 9=2^3+2^0$. Bạn *Thắng* luôn thắng nếu sử dụng thuật cắm hoa như sau:

Lần đầu bạn *Thắng* cắm 4 bông màu tím. Còn lại 1 bông màu đỏ, 9 bông màu vàng, 1 bông màu tím và 9 bông màu hồng.

Các lần sau, nếu bạn *Lợi* cắm 1 bông màu đỏ (hoặc tím) thì bạn *Thắng* sẽ cắm 1 bông màu tím (hoặc đỏ); nếu bạn *Lợi* cắm m $(1 \le m \le 9)$ bông màu vàng (hoặc hồng) thì bạn *Thắng* sẽ cắm m bông màu hồng (hoặc vàng).

THANH LOAN

Tạp chí TH&TT tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

1) *Phan Xuân Đức*, 11C4, THPT Nam Đàn 2, Nam Đàn, **Nghệ An**.

2) *Trần Nguyễn Try*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP.Pleiku, **Gia Lai**.

3) *Đỗ Nguyễn Hoàng Anh*, 12 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa-Vũng Tàu**.

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 435 (9.2013)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

1 Thư của Chủ tịch nước *Trương Tấn Sang* gửi ngành Giáo dục nhân dịp Khai giảng năm học mới 2013-2014.

2 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**

Vũ Hữu Chín - Một số bài toán tính góc trong tam giác cân.

5 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội, năm học 2013 – 2014.

7 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Trường ĐHSP TP.Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014.

8 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**

Nguyễn Tuấn Lâm- Một số dạng toán về tiếp tuyến của đồ thị.

12 **Thử sức trước kì thi - Đề số 1**

13 **Bạn đọc tìm tòi**

Hoàng Minh Quân - Hai bài toán hình học trong kì thi IMO năm 2013.

15 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp**

Nguyễn Duy Liên - Sử dụng hệ thặng dư để giải toán (Tiếp theo kì trước).

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**

T1/435, ..., T12/435, L1/435, L2/435.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**

Giải các bài của Số 431.

28 **Diễn đàn dạy học toán**

Hoàng Sỹ Luyện - Khai thác một bài toán.

30 Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ VIII tại Nha Trang.

31 Giải đáp Cuộc thi Đố vui ngày hè 2013 (Đợt 1).

Ảnh Bìa 1. *Lễ Khai giảng của Trường THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Tỉnh Sóc Trăng.*

Biên tập: NGUYỄN PHÚC
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Chế bản: NGUYỄN THỊ TRANG

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT09M3

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2013

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng