T. Huy
Huỳnh Quốc Huy

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

11 2005
Số 341
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com

40 NĂM KHỐI CHUYÊN TOÁN - TIN
ĐHKHTN - ĐHQG HÀ NỘI, ĐƠN VỊ ANH HÙNG THỜI KỲ ĐỔI MỚI

Ban chủ nhiệm Khối

Tập thể cán bộ giáo viên Khối chuyên Toán - Tin ĐHKHTN

CHÀO MỪNG NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM

BỐN MƯƠI NĂM LỚP CHUYÊN TOÁN ĐẦU TIÊN

TRẦN VĂN NHUNG*
HS Chuyên Toán khóa 1 (1965-1967) Trường ĐH Tổng hợp Hà Nội

Vào một ngày tháng 9 năm 1965 tôi đã may mắn nhận được giấy gọi vào học Lớp Chuyên Toán khóa 1, trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (ĐHTH HN), do nhà Toán học, Giáo sư, Phó Hiệu trưởng *Lê Văn Thiêm* ký. Từ một vùng quê của huyện Hải Hậu, tỉnh Nam Định, tôi đã về Hà Nội tập trung cùng các bạn mình thành một lớp gồm 38 học sinh và đã đi ngay lên khu sơ tán của trường ĐHTH HN tại huyện Đại Từ, tỉnh Bắc Thái (kí hiệu lúc sơ tán là A_0). Chúng tôi được triệu tập từ nhiều tỉnh, thành phố trên miền Bắc, trong đó có cả những học sinh miền Nam theo gia đình tập kết ra Bắc. Các bạn học cùng lớp Chuyên Toán với tôi nay đã trở thành các nhà khoa học, nhà giáo, nhà quản lí có uy tín, hoặc nhà kinh doanh thành đạt. Không ít người đã trực tiếp cầm súng ra trận chống Mỹ cứu nước và có người đã hi sinh.

(Xem tiếp trang 4)

* GS. TSKH. Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, Chủ nhiệm Bộ môn Toán Sinh, Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường ĐHKHTN- ĐHQG Hà Nội.

(xem tiếp trang 13)

KHỐI CHUYÊN TOÁN - TIN, ĐHKHTN - ĐHQG HÀ NỘI
BỐN MƯƠI NĂM XÂY DỰNG VÀ TRƯỞNG THÀNH (1965-2005)

Cho đến nay, Khối đã đào tạo được **3000** học sinh của **40** khóa chuyên Toán và **11** Khóa chuyên Tin. Nhiều học sinh đã trở thành những GS, TSKH đầu ngành ; nhiều người đã và đang giữ trọng trách tại các Bộ, các trường Đại học, các Viện Nghiên cứu lớn, các đơn vị Kinh tế mũi nhọn của đất nước. Đặc biệt, một số học sinh của Khối đã được trao tặng các giải thưởng cao quý, có giá trị trong lĩnh vực Toán học của thế giới.

MỘT SỐ THÀNH TÍCH NỔI BẬT

MÔN TOÁN

- **59** giải Quốc tế về Toán học (trong tổng số **151** giải mà Đoàn học sinh Việt Nam đạt được tại các kì thi IMO từ năm 1974 đến năm 2005.
- Đặc biệt Khối đã dành được **20** Huy chương Vàng trong tổng số **30** Huy chương Vàng của Đoàn Việt Nam về môn Toán.
- Có **4** học sinh đạt Huy chương Vàng IMO hai năm liền là : *Ngô Bảo Châu, Đào Hải Long, Ngô Đắc Tuấn, Lê Hùng Việt Bảo.*

MÔN TIN HỌC

Đoàn Việt Nam đã tham gia **17** cuộc thi Olympic Tin học Quốc tế và giành được tất cả **51** Huy chương. Khối chuyên Toán - Tin đã đóng góp **26** Huy chương (**3** Vàng, **9** Bạc, **14** Đồng). Đặc biệt, em *Nguyễn Ngọc Huy* hai năm liền đoạt Huy chương Vàng.

CÁC PHẦN THƯỞNG CAO QUÝ

- Huân chương Lao động hạng Ba năm 1985.
- Huân chương Lao động hạng Nhì năm 1995.
- Huân chương Lao động hạng Nhất năm 2000.
- Huân chương Độc lập hạng Ba năm 2005.
- Anh Hùng Lao động trong thời kì đổi mới năm 2005.

MỘT LỚP BÀI TOÁN VỀ CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

QUÁCH VĂN GIANG
(GV THPT Chu Văn An, Hà Nội)

Trong kì thi tuyển sinh lớp10 chuyên Toán – Tin của các trường THPT Chu Văn An, Hà Nội và THPT Hà Nội - Amsterdam tháng 7 năm 2005 có bài toán sau :

Bài toán 1. *Cho hình vuông ABCD và 2005 đường thẳng thỏa mãn đồng thời các tính chất sau:*

i) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông;

ii) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 0,5.

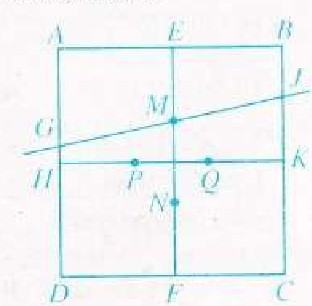
Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng có ít nhất 502 đường đồng quy.

Đây là một bài toán hay, song đáng tiếc số thí sinh giải được bài toán này không nhiều, nguyên nhân chủ yếu là do các em học sinh không có thói quen phân tích tìm tòi lời giải bài toán. Trong bài viết này chúng tôi muốn trao đổi một hướng khai thác bài toán 1 để từ đó đề xuất một lớp các bài toán mới.

Trước hết ta trình bày cách giải bài toán 1.

<u>Bước 1.</u>

Đặt $AB = AD = a$. Gọi EF, HK là hai trục đối xứng của hình vuông $ABCD$ mà $EF \parallel AD$ và $HK \parallel AB$ (h.1). Giả sử một đường thẳng cắt các đoạn thẳng AD, BC, EF lần lượt tại G, J, M sao cho $S_{CDGJ} = 2S_{ABJG}$. Từ đó có



Hình 1

$DG + CJ = 2(AG + BJ)$ hay $(a - AG) + (a - BJ) = 2AG + 2BJ$. Từ đó $AG + BJ = \frac{2a}{3}$ hay $EM = \frac{a}{3}$. Suy ra M là điểm cố định. Lấy điểm N trên EF, các điểm P, Q trên HK sao cho $EM = MN = NF = HP = PQ = QK = \frac{a}{3}$. Lập luận tương tự như trên thì *các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định M, N, P, Q.*

<u>Bước 2</u>: Theo nguyên tắc Dirichlet từ 2005 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải có ít nhất $502 = \left[\frac{2005}{4}\right] + 1$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm trên, nghĩa là 502 *đường thẳng đó đồng quy.*

Với ý tưởng như ở hai bước trên ta có thể xây dựng một lớp các bài toán mới như dưới đây.

Bài toán 2. *Trên mặt phẳng cho hình vuông ABCD với AB = a và 2005 đường thẳng thỏa mãn đồng thời các tính chất sau:*

i) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh liên tiếp của hình vuông;

ii) 4xy = a(x+y), trong đó x, y là khoảng cách từ đỉnh chung của hai cạnh bị cắt đến hai giao điểm.

Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng có ít nhất 502 đường thẳng đồng quy.

Lời giải. Giả sử đường thẳng d cắt AB, AD, AC lần lượt tại M, N, P và thỏa mãn giả thiết với $AM = x$, $AN = y$. (h.2).

Ta có: $S_{AMN} = \frac{xy}{2}$ và

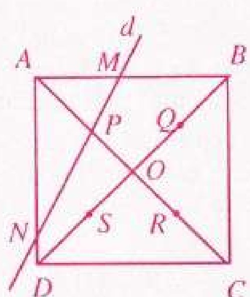
$S_{AMN} = S_{APM} + S_{APN}$

$= (x+y).AP.\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Từ đó suy ra

$4xy = 2\sqrt{2}(x+y)AP$.

Theo giả thiết $4xy = a(x+y)$ suy ra



Hình 2

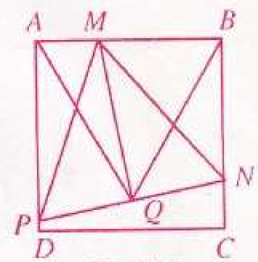
$AP = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Do đó P là trung điểm của AO, trong đó O là trung điểm của AC.

Như vậy nếu d là một trong 2005 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì d phải đi qua một trong 4 điểm P, Q, R, S (lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD. Do đó theo nguyên tắc Dirichlet suy ra trong 2005 đường thẳng có ít nhất 502 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

Bài toán 3. *Trong mặt phẳng cho hình vuông ABCD. Một tam giác được gọi là nội tiếp hình vuông nếu ba đỉnh của tam giác nằm trên ba cạnh hình vuông. Chứng minh rằng trong 6015 đường thẳng chứa các cạnh của 2005 tam giác đều cùng nội tiếp hình vuông trên có ít nhất 502 đường thẳng đồng quy.*

Lời giải. Nhận xét : Một tam giác đều nội tiếp hình vuông thì có hai đỉnh nằm trên hai cạnh đối diện của hình vuông còn đỉnh thứ ba nằm trên cạnh còn lại. Do đó với mỗi tam giác đều nội tiếp hình vuông thì có một cạnh nối hai đỉnh nằm trên hai cạnh đối diện (còn hai cạnh còn lại nối hai đỉnh nằm trên hai cạnh kề) của hình vuông. Vậy trong 6015 đường thẳng chứa các cạnh của 2005 tam giác có 2005 đường thẳng cắt hai cạnh đối của hình vuông.

Xét tam giác đều MNP nội tiếp hình vuông; giả sử $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AD$ (h.3). Gọi Q là trung điểm của NP ta có $MQ \perp NP$, $PA \perp AM$ nên tứ giác $AMQP$ nội tiếp, do đó $\widehat{MAQ} = \widehat{MPQ} = 60^\circ$.



Hình 3

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{MBQ} = 60^\circ$, suy ra ΔAQB là tam giác đều nên Q là điểm cố định.

Tương tự dựng các tam giác đều CDR, ADS, BCT nằm trong hình vuông thì các điểm R, S, T cố định. Do vậy trong 2005 đường thẳng chứa các cạnh của 2005 tam giác đều cắt hai cạnh đối của hình vuông có ít nhất 502 đường thẳng đi qua một trong bốn điểm Q, R, S, T.

Để thử sức mình, các bạn hãy giải các bài tập sau :

Bài tập 1. Cho tam giác đều ABC với $AB = a$ và 2005 đường thẳng thỏa mãn các tính chất sau :

i) Mỗi đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác;

ii) $a(x+y) = 4xy$ trong đó x, y là khoảng cách từ đỉnh chung của hai cạnh bị cắt đến hai giao điểm.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 HỆ THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐHKHTN - ĐHQG HÀ NỘI NĂM 2005

MÔN TOÁN

VÒNG 1

(Dành cho mọi thí sinh. Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+xy=3, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

Cây II. Giải phương trình

$$x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11.$$

Câu III. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+17y^2+34xy+51(x+y)=1740.$$

Câu IV. Cho hai đường tròn (O), (O') nằm ngoài nhau có tâm tương ứng là O và O'. Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại A và (O') tại B.

Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn cắt AB tại I, tiếp xúc với (O) tại C và (O') tại D. Biết rằng C nằm giữa I và $Đ$.

1) Hai đường thẳng OC, $O'B$ cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $OM > O'M$.

2) Kí hiệu (S) là đường tròn đi qua A, C, B và (S') là đường tròn đi qua A, D, B. Đường thẳng CD cắt (S) tại E khác C và cắt (S') tại F khác D. Chứng minh rằng AF vuông góc với BE.

Câu V. Giả sử x, y, z là các số dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xy^2z^2+x^2z+y=3z^2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{z^4}{1+z^4(x^4+y^4)}.$$

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh vào chuyên Toán, chuyên Tin. Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu VI. Giải phương trình

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2.$$

Câu VII. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y. \end{cases}$$

Câu VIII. Giả sử x, y là những số không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=1$.

1) Chứng minh rằng $1 \le x+y \le \sqrt{2}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}$.

Câu IX. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm P nằm trong tam giác ABC.

1) Giả sử $\widehat{BPC}=135^\circ$. Chứng minh rằng $2PB^2+PC^2=PA^2$.

2) Các đường thẳng AP và CP cắt các cạnh BC và BA tương ứng tại các điểm M và N. Gọi Q là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn MN. Chứng minh rằng khi P thay đổi trong ΔABC, đường thẳng PQ luôn đi qua D.

Câu X. 1) Cho đa giác đều (H) có 14 đỉnh. Chứng minh rằng trong 6 đỉnh bất kì của (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

2) Có bao nhiêu phân số tối giản $\frac{m}{n}$ lớn hơn 1 (m, n là các số nguyên dương) thỏa mãn $mn=13860$.

☛ Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng đó có ít nhất 665 đường thẳng đồng quy.

Bài tập 2. Trong mặt phẳng cho lục giác đều $ABCDEF$ với $AB=a$ và 2005 đường thẳng thỏa mãn các tính chất sau :

i) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh kề của lục giác đều ;

ii) $a(x+y)=8xy$ trong đó x, y là khoảng cách từ đỉnh chung của hai cạnh bị cắt đến hai giao điểm.

Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng đó có ít nhất 339 đường đồng quy.

BỐN MƯƠI NĂM... *(Tiếp theo bìa 2)*

Về lịch sử hình thành của Khối chuyên Toán (ĐHTH HN), tôi được nghe kể lại rằng: ý tưởng đầu tiên về việc mở Lớp chuyên toán này thuộc về GS. *Hoàng Tụy*, nguyên là Chủ nhiệm khoa Toán, Trường ĐHTH HN, trên cơ sở tham khảo cách làm của Liên Xô (cũ) và được sự ủng hộ mạnh mẽ của cố GS. Toán học *Lê Văn Thiêm*, Phó Hiệu trưởng; của cố GS. *Ngụy Như Kon Tum*, Hiệu trưởng; của cố GS. *Tạ Quang Bửu*, Bộ trưởng Bộ ĐH và THCN và của cố Thủ tướng *Phạm Văn Đồng*, người mà khi còn sống luôn luôn đã hi sinh, quan tâm đến giáo dục, nói riêng là việc đào tạo học sinh giỏi. Lúc đầu, lớp này được gọi là "Lớp Toán đặc biệt", sau được đổi thành "Lớp Toán dự bị". (Nếu điều tôi nghe được trên đây có điều gì chưa thật chuẩn xác, mong bạn đọc thông cảm cho tôi, một học trò). Việc ra đời của Lớp chuyên Toán đầu tiên này vào năm 1965, giữa lúc cuộc chiến tranh chống Mỹ cứu nước của chúng ta bước sang giai đoạn *vô cùng khốc liệt trên cả hai miền Nam, Bắc*, càng chứng tỏ thêm sự quan tâm to lớn đến giáo dục của Đảng, Nhà nước và Bác Hồ kính yêu. Một năm sau *khi ra đời của Lớp chuyên Toán*, trường ĐHTH Hà Nội, các lớp chuyên Toán tại Khoa Toán, trường ĐH Sư phạm Hà Nội, và Khoa Toán, trường ĐH Sư phạm Vinh và một số nơi khác như Hà Nội, Hải Phòng, Nam Định,... đã được mở, để từng bước sau 40 năm có được một hệ thống các trường, lớp chuyên ở bậc THPT, trong cả nước không chỉ cho môn toán mà nhiều môn học khác. Cũng cần phải nói thêm rằng, mô hình và thiết kế lớp chuyên Toán (Lớp Toán đặc biệt) đầu tiên, mặc dù còn rất bỡ ngỡ, nhưng cũng rất khoa học và chủ trương đào tạo học sinh khá toàn diện. Đương nhiên các môn toán như đại số, hình học, lượng giác, lôgic toán, toán học hữu hạn,... được dạy rất bài bản và nâng cao, chuyên sâu hơn so với mức phổ thông bởi các giáo sư, các nhà toán học trẻ tài ba lúc đó như: *Hoàng Tụy, Phan Đức Chính* (người nhiều năm dẫn các đoàn đi thi Olympic Toán Quốc tế), *Hoàng Hữu Đường* (đã mất), *Nguyễn Thừa Hợp, Nguyễn Bác Văn, Lê Minh Khanh, Nguyễn Viết Phú, Nguyễn Duy Tiến, Đặng Hữu Đạo*,... nhưng các môn học khác như Lí, Hóa, Sinh, Văn, Sử, Địa, Triết học, Ngoại ngữ,... cũng được các thầy cô giáo từ các khoa của trường ĐHTH HN lúc đó ở khu sơ tán huyện Đại Từ, tỉnh Bắc Thái, sang dạy. Vì thế, không chỉ có môn toán mà kể cả các môn khác toán cũng được dạy dỗ rất toàn diện, nghiêm túc và sâu sắc bởi các chuyên gia có uy tín của trường ĐHTH HN. Riêng kĩ năng thi cử về toán thì ngày ấy chúng tôi chưa được tôi luyện tốt như các đội tuyển Olympic toán Quốc gia và Quốc tế sau này.

Người thầy Chủ nhiệm Lớp Chuyên Toán khóa 1 của chúng tôi ngày ấy là thầy *Phạm Văn Điều* (đã mất), nguyên là một học sinh miền Nam tập kết ra Bắc, một con người rất tâm huyết và tận tụy với học trò. Khối phổ thông chuyên Toán - Tin có được thành tựu xuất sắc sau 40 năm phát triển là nhờ các bậc thầy tiền bối nói trên và nhờ sự tiếp nối của nhiều thế hệ các nhà quản lý của trường ĐHTH HN, của các Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Cơ - Tin học, các nguyên Chủ nhiệm Khoa GS. TS. *Phan Văn Hạp*, GS. TS. *Hoàng Hữu Như*, GS. TSKH. *Nguyễn Duy Tiến*, PGS. TS. *Phạm Trọng Quát*, GS. TS. *Đặng Huy Ruận* và Chủ nhiệm Khoa hiện nay GS. TSKH. *Phạm Kỳ Anh*, của các Ban Chủ nhiệm Khối, các thầy cô giáo, cán bộ công nhân viên và học sinh. Đó là TS. *Phạm Tấn Dương*, PGS. TS. *Lê Đình Thịnh*, GS. TSKH. *Nguyễn Văn Mậu*, Hiệu trưởng trường ĐHKHTN, ĐHQG HN, PGS. TSKH. *Đặng Hùng Thắng* (cả hai giáo sư này đã nhiều lần dẫn các đoàn học sinh đi thi Olympic Toán Quốc tế), TS. *Nguyễn Vũ Lương*, Chủ nhiệm Khối; các Phó Chủ nhiệm Khối: ThS. *Phạm Văn Hùng* và *Lê Đình Vinh*; các nguyên Phó Chủ nhiệm Khối: *Đặng Thanh Hoa* và *Phạm Đăng Long*; các thầy như TS. *Nguyễn Xuân My*, *Phạm Quang Đức, Phan Cung Đức*, ThS. *Đỗ Thanh Sơn*, ThS. *Nguyễn Văn Xoa* (học sinh chuyên toán khóa 1), cùng nhiều thầy cô giáo toán và các môn học khác đã có đóng góp quan trọng cho sự phát triển của Khối.

Thấm thoắt thế mà đã 40 năm trôi qua (1965-2005), kể từ ngày thành lập Lớp chuyên Toán đầu tiên (khóa 1) tại Khoa Toán, trường ĐHTH HN, nay là Khối chuyên Toán - Tin thuộc Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường ĐHKHTN, ĐHQG HN. Cũng có thể xem đây là cái mốc đầu tiên của hệ thống các trường, lớp chuyên về Toán, Tin, Lí, Hóa, Sinh, Ngoại ngữ, Văn,... ở bậc THPT trong cả nước, từ Trung ương đến các địa phương, và nói riêng là các khối chuyên Toán - Tin, Lí, Hóa, Sinh tại ĐHQG HN. Chủ trương sáng suốt và tầm nhìn xa này của Đảng và Nhà nước, của Bộ Giáo dục và Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp lúc đó (nay là Bộ GD&ĐT), của trường ĐHTH HN và khoa Toán của Trường, là tiền đề tạo ra một nguồn nhân lực chuyên sâu có chất lượng cao với nhiều thế hệ học sinh, sinh viên và các nhà khoa học, nhà hoạt động xã hội, nhà quản lý, doanh nhân,... năng động, tài năng, đóng góp xứng đáng cho sự nghiệp xây dựng, bảo vệ Tổ quốc và Công nghiệp hóa, Hiện đại hóa đất nước. Việc ra đời hệ thống các trường, lớp chuyên này cũng góp phần trực tiếp nâng cao chất lượng và thành tích của các kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia (đã được khởi xướng từ năm 1961), của các đoàn học sinh giỏi Việt Nam tham gia các cuộc thi Olympic Quốc tế từ năm 1974 cho đến nay về toán, tin, lí, hóa, sinh, ngoại ngữ,... Thật đáng tự hào với bảng thành tích đầy ấn tượng của các đoàn học sinh Việt Nam đi dự thi Olympic Quốc tế ở các môn khác nhau. Riêng các đoàn Olympic Toán học Việt Nam đi dự thi quốc tế từ năm 1974 cho đến nay luôn được xếp (mặc dù không chính thức) vào tốp 10 (top ten) nước mạnh nhất trên thế giới. Đặc biệt là năm 2004, tròn 30 năm kể từ lần đầu tiên Việt Nam dự thi Olympic toán quốc tế, ta gửi 6 em đi dự thi tại Hy Lạp và đã giành được 4 Huy chương Vàng và 2 Huy chương Bạc. Kỉ lục này của đoàn Việt Nam chỉ sau các đoàn Trung Quốc, Nga và Mỹ. Cũng cần phải nói thêm rằng, Khối chuyên Toán - Tin và các khối chuyên khác của Trường ĐHKHTN, ĐHQG HN, là một trong những cơ sở đào tạo cung cấp nhiều học sinh tham gia các đoàn của Việt Nam đi thi Olympic Quốc tế và giành được nhiều Huy chương Vàng, Bạc, Đồng. Trong số các học sinh của Khối chuyên Toán-Tin, ĐHQG HN, giành được Huy chương vàng Olympic Toán Quốc tế có TSKH. *Ngô Bảo Châu* (sinh năm 1972), GS. ĐH Paris Sud, người được trao Giải thưởng Toán học Clay 2004 cùng với GS. Pháp G. *Laumon*, vừa được Hội đồng Chức danh GS Nhà nước phong đặc cách Giáo sư của Việt Nam năm 2005. Với truyền thống và thành tích xuất sắc của 40 năm trưởng thành và phát triển, trong năm 2005 Khối chuyên Toán - Tin đã được tặng thưởng Huân chương Độc lập Hạng Ba và danh hiệu Đơn vị Anh hùng thời kì đổi mới. Các thầy, cô giáo và học sinh chuyên toán từ trung ương đến các địa phương cũng là những bạn đọc và cộng tác viên rất nhiệt tình và đắc lực của Tạp chí "*Toán học và Tuổi trẻ*" (số đầu tiên ra đời vào tháng 10 năm 1964), mà GS. TSKH *Nguyễn Cảnh Toàn* là một trong các sáng lập viên đầu tiên và liên tục nhiều năm là Tổng biên tập.

Trong 10 năm gần đây, khi tham gia vào các hoạt động hợp tác quốc tế về giáo dục, đào tạo, tôi đã trực tiếp cùng các đoàn khách quốc tế và ASEAN về thăm Khối Phổ thông chuyên Toán - Tin và các trường, lớp chuyên ở Hà Nội, TP. Hồ Chí Minh và các địa phương khác và có dịp được trực tiếp nghe các ý kiến đánh giá rất tốt đẹp về chất lượng cao, về trình độ quốc tế của hệ thống đào tạo tài năng này của chúng ta. Một số nước ASEAN, Trung Đông và Châu Phi đã, đang và sẽ đến thăm, tham khảo kinh nghiệm của Việt Nam, gửi giáo viên, học sinh, sinh viên sang ta học tập, nhận tài liệu, sách giáo khoa và mời giáo sư, giáo viên của ta sang giảng dạy, làm chuyên gia. Đây là những tín hiệu tốt, nhưng để có thể đón nhận được những cơ hội mới, bản thân chúng ta cũng cần phải có sự chuẩn bị khẩn trương và nghiêm túc về trình độ tiếng Anh, tiếng Pháp, và sử dụng Công nghệ Thông tin. Để có thể giảng dạy tốt, cần phải dịch và biên soạn được sách giáo khoa hiện đại bằng tiếng Anh, Pháp, cần phải dịch các tuyển tập bài thi và lời giải của các kỳ thi Olympic Quốc gia, quốc tế, của Tạp chí "*Toán học và Tuổi trẻ*" gần nửa thế kỉ qua ra tiếng Anh, tiếng Pháp làm tài liệu tham khảo và để làm marketing.

Những việc làm trên đây cũng là để thiết thực góp phần làm tốt vai trò nước chủ nhà Việt Nam đăng cai tổ chức Olympic Vật lí Châu Á (APhO5) 2004, và chuẩn bị đăng cai Olympic Toán Quốc tế (IMO) 2007, Olympic Vật lí Quốc tế (IPhO) 2008 và nhiều cuộc thi Quốc tế và khu vực khác.

Gần đây, khi trực tiếp chỉ đạo ĐHQG HN phối hợp với Bộ Giáo dục và Đào tạo và các cơ quan khác xây dựng và triển khai Dự án phát triển nhân tài KHCN, lãnh đạo, quản lí và kinh doanh, PGS. TS. *Trần Đình Hoan*, Uỷ viên Bộ Chính trị, Bí thư Trung ương Đảng, Trưởng ban Tổ chức Trung ương, và TS. *Phạm Gia Khiêm*, Uỷ viên Trung ương Đảng, Phó Thủ tướng Chính phủ, cũng đã đánh giá rất cao bề dày thành tích và kinh nghiệm đào tạo của hệ thống các trường, lớp chuyên trong cả nước. Chủ trì Tiểu ban xây dựng Dự án này là GS. TSKH. *Đào Trọng Thi*, Uỷ viên Trung ương Đảng, Giám đốc ĐHQG HN, nguyên là học sinh chuyên Toán khóa 2, trường ĐHTH HN.

Khi ôn lại chặng đường 40 năm của Khối chuyên Toán - Tin, trường ĐHKHTN, ĐHQG HN, chúng ta tự hào và rút ra bài học kinh nghiệm cho việc đào tạo chất lượng cao ở bậc Trung học phổ thông, Đại học và Sau đại học trong nhiều lĩnh vực, trong thời kì hội nhập Quốc tế và cạnh tranh mạnh mẽ hiện nay.

MỘT ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

NGUYỄN VŨ LƯƠNG
*(GV khối PT chuyên Toán – Tin
ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)*

Khi xây dựng các bất đẳng thức (BĐT), nếu coi các biểu thức là các biến số trong các dạng của BĐT Cauchy chúng ta sẽ thu được nhiều BĐT mới. Trong bài này chúng tôi nêu ứng dụng của BĐT Cauchy để chứng minh một số BĐT có biến ràng buộc bởi một hệ thức hoặc các biến không bị ràng buộc bởi hệ thức nào.

Trường hợp 1: **Các biến bị ràng buộc**

Bài toán 1. *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+x_i}=1$. Chứng minh rằng $\prod_{i=1}^{n}x_i\le\frac{1}{(n-1)^n}$.*

Giải. Từ giả thiết và áp dụng BĐT Cauchy, với $k = 1, ..., n$ ta có :

$$\frac{1}{1+x_k}=1-\frac{x_k}{1+x_k}=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}}\frac{x_i}{1+x_i}\ge(n-1)\left(\prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}}\frac{x_i}{1+x_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Nhân theo từng vế n BĐT trên, ta thu được

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\ge(n-1)^n\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+x_i}\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{n}x_i\le\frac{1}{(n-1)^n}$$

(điều phải chứng minh).

Một số trường hợp đặc biệt của BĐT trên lại là các bài tập khó nếu chứng minh trực tiếp. Chẳng hạn như các bài toán sau đây.

Bài toán 2. *Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{1+b}+\frac{3c}{1+c}=1.$$

Chứng minh rằng $ab^2c^3\le\frac{1}{5^6}$.

Giải. Áp dụng kết quả bài toán 1 với điều kiện $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{c}{1+c}+\frac{c}{1+c}=1$ ta thu được $a.b.b.c.c.c\le\frac{1}{5^6}$ (điều phải chứng minh).

Ở bài toán 1, nếu đặt $\frac{x_i}{1+x_i}=y_i$ thì $x_i=\frac{y_i}{1-y_i}$. Ta có bài toán sau :

Bài toán 3. *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$. Chứng minh rằng $\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}\le\frac{1}{(n-1)^n}$.*

Bài toán 4. *Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + 2b + 3c = 1$. Chứng minh rằng $(1-a)(1-b)^2(1-c)^3\ge5^6ab^2c^3$.*

Giải. Đặt $A=\frac{a}{1-a}, B=\frac{b}{1-b}, C=\frac{c}{1-c}$ ta có

$$a=\frac{A}{1+A}, b=\frac{B}{1+B}, c=\frac{C}{1+C}.$$

Áp dụng bài toán 2 suy ra điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: **Các biến không bị ràng buộc**

Bài toán 5. *Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$$

Giải. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$a+(b+c)\ge2\sqrt{a(b+c)}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge\frac{2a}{a+b+c}.$$

Tương tự, ta thu được

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge\frac{2b}{a+b+c}, \sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{2c}{a+b+c}.$$

Dấu bằng của ba BĐT trên không thể đồng thời xảy ra, vì khi đó có $a = b + c$, $b = c + a$, $c = a + b$ nên $a + b + c = 0$ (trái với giả thiết là a, b, c đều là số dương).

Từ đó suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Bài toán 6. *Giả sử a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}>2$$

Giải. Đặt $\sqrt[3]{a}=\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{b}=\sqrt{\beta}$, $\sqrt[3]{c}=\sqrt{\gamma}$, ta thu được $a=\alpha^{3/2}$, $b=\beta^{3/2}$, $c=\gamma^{3/2}$.

Trước hết ta chứng minh $\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}>\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}$ (1)

Ta có

$(1)\Leftrightarrow \frac{a^2}{(b+c)^2}>\frac{\alpha^3}{(\beta+\gamma)^3}\Leftrightarrow(\beta+\gamma)^3>(b+c)^2$

$\Leftrightarrow \beta^3+\gamma^3+3\beta\gamma(\beta+\gamma)>b^2+c^2+2bc$

$\Leftrightarrow 3\beta\gamma(\beta+\gamma)>2bc$ (2)

Lại có $3\beta\gamma(\beta+\gamma)\ge 6(\beta\gamma)^{3/2}=6bc>2bc$.

Vậy BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng.

Suy ra $\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}>$

$>\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}+\sqrt{\frac{\beta}{\gamma+\alpha}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha+\beta}}>2.$

Bài toán 7. *Giả sử a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{b+2c}}+\sqrt{\frac{b}{a+2c}}+2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}}>2.$$

Giải. Sử dụng BĐT Cauchy ta có

$$a+b+c+d\ge 2\sqrt{a(b+c+d)}$$
$$a+b+c+d\ge 2\sqrt{b(c+d+a)}$$
$$a+b+c+d\ge 2\sqrt{c(d+a+b)}$$
$$a+b+c+d\ge 2\sqrt{d(a+b+c)}$$

Biến đổi tương tự cách giải bài toán 5, ta thu được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}}>2.$$

Chọn $d=c$, ta có BĐT cần chứng minh.

Bài toán 8. *Giả sử a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$Q=\sqrt[3]{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt[3]{\frac{d}{a+b+c}}>2.$$

Giải. Đặt $\sqrt[3]{a}=\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{b}=\sqrt{\beta}$, $\sqrt[3]{c}=\sqrt{\gamma}$, $\sqrt[3]{d}=\sqrt{\theta}$. Ta chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c+d}}>\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\theta}} \qquad (3)$$

Thật vậy $(3)\Leftrightarrow \frac{a^2}{(b+c+d)^2}\ge\frac{\alpha^3}{(\beta+\gamma+\theta)^3}$

$\Leftrightarrow(\beta+\gamma+\theta)^3\ge(b+c+d)^2$

$\Leftrightarrow(\beta+\gamma)^3+\theta^3+3(\beta+\gamma)(\beta+\gamma+\theta)\theta$

$\ge b^2+c^2+d^2+2(bc+cd+db)$

$\Leftrightarrow 3\beta\gamma(\beta+\gamma)+3\beta\theta(\theta+\beta)+3\gamma\theta(\theta+\gamma)+6\beta\gamma\theta$

$\ge 2(bc+cd+db)$ (4)

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$3\beta\gamma(\beta+\gamma)\ge 6(\beta\gamma)^{3/2}=6bc>2bc$

$3\beta\theta(\theta+\beta)\ge 6(\theta\beta)^{3/2}=6bd>2bd$

$3\gamma\theta(\theta+\gamma)\ge 6(\theta\gamma)^{3/2}=6cd>2cd;\ 6\beta\gamma\theta>0.$

Suy ra BĐT (4) đúng nên BĐT)(3) đúng.

Vậy ta thu được

$$Q>\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\theta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\gamma+\theta+\alpha}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\theta+\alpha+\beta}}+\sqrt{\frac{\theta}{\alpha+\beta+\gamma}}>2.$$

Từ kết quả bài toán 8, ta thu được BĐT khó hơn sau đây.

Bài toán 9. *Giả sử a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+2c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a+2c}}+2\sqrt[3]{\frac{c}{a+b+c}}>2.$$

Các bạn hãy xây dựng nên những BĐT mới phức tạp hơn bằng cách sử dụng BĐT Cauchy với các biến bị ràng buộc. Sau đó lại đặc biệt hóa các BĐT phức tạp đó sẽ có các BĐT mới.

GIẢI BÀI ... *(Tiếp trang 26)*

Nhận xét : Đa số các bạn giải theo cách trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt là :

Bắc Ninh : *Nguyễn Trọng Đạm, Nguyễn Xuân Nam, Nguyễn Minh Cường*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Thanh Hoá :** *Nguyễn Bá Duẩn*, 11B2, THPT Hoằng Hoá II ; **Tiền Giang** : *Nguyễn Vĩnh Phúc*, 12A18, THPT Chợ Gạo ; **Hà Tĩnh** : *Trương Tuấn Anh*, Lí 12, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Khánh Hoà** : *Nguyễn Ngọc Kì Nam*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Nghệ An** : *Nguyễn Đình Phương*, 11 G, THPT Nghĩa Đàn ; **Vĩnh Phúc** : *Vũ Quang Hoà*, 12A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Dương** : *Lê Hoàng Dũng*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hà Nội** : *Bùi Phi Anh*, 12 Lí, *Nguyễn Tuấn Tú* 10 Lí 1, THPT Hà Nội – Amsterdam.

ANH HOÀNG

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trong đề bài T8/340 trong THTT số 340 tháng 10.2005 đã có sai sót ở câu hỏi cuối cùng. Xin đọc lại như sau :

Tìm $\lim\{\sqrt[3]{f(n)}\}$ khi số tự nhiên n dần tới vô hạn, trong đó kí hiệu $\{x\}$ chỉ phần thập phân dương của số thực x $(0\le\{x\}<1)$.

Chân thành xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

BẠN CÓ BIẾT ?

SỐ BẬP BÊNH

PHẠM VĂN HÙNG
(GV khối PT Chuyên Toán – Tin, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Trước hết, để ý rằng $1089\times9 = 9801$ tức là khi nhân số 1089 với 9 ta thu được kết quả là số 9801, tức là số mà các chữ số được viết theo thứ tự ngược lại của số 1089.

Ta gọi một số là *số bập bênh* (*Flip*) nếu khi nhân số đó với 9 ta được một số cũng có các chữ số như thế nhưng viết theo thứ tự ngược lại.

Câu hỏi đặt ra là tìm tất cả các số bập bênh có n chữ số. Đây là một bài toán rất thú vị.

Dễ dàng thấy rằng với $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ đáp số là *tập rỗng*.

Số $F_1 = 1089$ là số duy nhất có bốn chữ số thỏa mãn điều kiện đặt ra. Cho n tăng lên ta thấy:

- Với $n = 5$ thì số $F_2 = 10989$ là số bập bênh duy nhất,
- Với $n = 6$ thì số $F_3 = 109989$ là số bập bênh duy nhất,
- Với $n = 7$ thì số $F_4 = 1099989$ là số bập bênh duy nhất.

Đến đây chắc các bạn đã phát hiện ra được một quy tắc viết số bập bênh: *Viết thêm một số tùy ý chữ số 9 vào giữa hai số 10 và 89 chúng ta sẽ được một số bập bênh* (cách 1).

Đó là số gồm n chữ số có dạng

$$F = 10\underbrace{99...9}_{n-4 \text{ chữ số } 9}89.$$

Nhưng đây có phải là cách duy nhất để tìm số bập bênh không ?

Đến đây bài toán đã bắt đầu hấp dẫn.

Tiếp tục với $n = 8$, ngoài số $F_5 = 10999989$ không khó khăn lắm ta tìm thêm được một số bập bênh nữa là: $F_6 = 10891089$.

Từ đó ta phát hiện thêm một quy tắc viết số bập bênh nữa: *Viết một số bập bênh tiếp theo chính nó sẽ cho ta một số bập bênh mới* (cách 2).

Đi xa hơn một chút nữa, với $n = 9$ ta có hai số bập bênh:

$F_7 = 109999989$; $F_8 = 108901089$.

Với $n = 10$ ta có ba số bập bênh:

$F_9 = 1099999989$; $F_{10} = 1098910989$;

$F_{11} = 1089001089$.

Hãy để ý đến số F_{11} ta lại rút ra quy tắc viết số bập bênh: *Giữa hai số bập bênh 1089 nếu ta viết thêm một số tùy ý chữ số 0 ta sẽ nhận được một số bập bênh mới* (cách 3).

Đó là số gồm n chữ số có dạng

$$F = 1089\underbrace{000...0}_{n-8 \text{ chữ số } 0}1089.$$

Ngoài ba quy tắc viết số bập bênh đã nêu trên, liệu có còn quy tắc nào khác không?

Với n càng lớn, số các số bập bênh càng tăng. Sau đây là số các số bập bênh có ít hơn 16 chữ số mà chúng tôi đã tìm được:

- Với n bằng 4, 5, 6, 7 thì có 1 số bập bênh;
- Với n bằng 8, 9 thì có 2 số bập bênh;
- Với n bằng 10, 11 thì có 3 số bập bênh;
- Với n bằng 12, 13 thì có 5 số bập bênh;
- Với n bằng 14, 15 thì có 8 số bập bênh.

Các bạn có nghĩ rằng số các số bập bênh liên quan tới dãy Fibonacci không ?

Kết quả cuối cùng thật thú vị :

Gọi $f(n)$ là số các số bập bênh có n chữ số ($n \geq 4$), khi đó:

$$f(n) = u_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right)$$

trong đó (u_n) ($n = 1, 2, ...$) là dãy Fibonacci: $u_1 = u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$, còn $[x]$ là kí hiệu phần nguyên của số thực x.

Việc chứng minh kết quả trên, xin dành cho các bạn say mê thích tìm tòi khám phá quy luật về các số.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH, NĂM 2005

MÔN TOÁN

VÒNG I

Câu 1. a) Ta có

$$2A = \sqrt{16+2\sqrt{15}} + \sqrt{16-2\sqrt{15}}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{15}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{15}-1)^2} = 2\sqrt{15},$$

dẫn đến $A = \sqrt{15}$.

b) Điều kiện $-5 \le x \le 3$. Phương trình (PT) đã cho tương đương với

$8 + 2\sqrt{(x+5)(3-x)} = 16$, hay $\sqrt{(x+5)(3-x)} = 4$

$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 15 = 16 \Leftrightarrow x = -1$ (thỏa mãn điều kiện $-5 \le x \le 3$).

Lưu ý: Có thể sử dụng BĐT Bunhiacốpxki cho hai bộ số (1, 1), $(\sqrt{x+5}, \sqrt{3-x})$ để giải câu này.

Câu 2. Ta có $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n$

$= (n-1)n(n+1) + 18n \;\vdots\; 6$, với mọi $n \in N$ (đpcm).

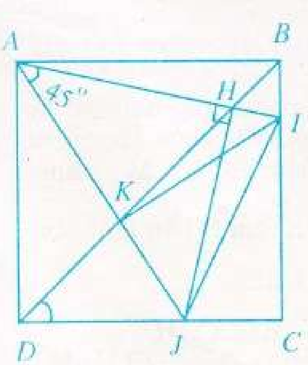
Câu 3. Điều kiện $x \ne 1$. PT đã cho tương đương với $4x^2 + (m-7)x - m = 0$ (1)

Rõ ràng biệt thức

$\Delta = (m-7)^2 + 16m = (m+1)^2 + 48 > 0, \forall m$, nên PT (1) và do đó PT đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1. Khi đó

$$(|x_1 - x_2|)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2$$
$$= \left(\frac{m-7}{4}\right)^2 + m = \frac{m^2+2m+49}{16} = \frac{(m+1)^2+48}{16} \ge 3.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $|x_1 - x_2|$ bằng $\sqrt{3}$ đạt được khi và chỉ khi $m = -1$.



Câu 4. Từ giả thiết $\widehat{HAJ} = \widehat{HDJ} = 45^\circ$, suy ra tứ giác $AHJD$ nội tiếp, từ đó $\widehat{AHJ} = 90^\circ$. Vậy tam giác AHJ vuông cân tại H, dẫn đến $\frac{AH}{AJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1). Xét tương tự ta cũng có $\frac{AK}{AI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2). Từ (1), (2) suy ra

$\Delta AHK \backsim \Delta AJI$. Do đó $\frac{HK}{IJ} = \frac{AH}{AJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5. a) (Bạn đọc tự vẽ hình). Kéo dài O_1O_2 cắt đường tròn (O_1), (O_2) theo thứ tự tại M_0, N_0 thì $\widehat{AMM_0} = \widehat{ANN_0} = 90^\circ$. Từ đó $MN \le M_0N_0 = 2(R_1 + R_2)$. Vậy độ dài lớn nhất của đoạn MN bằng $2(R_1 + R_2)$, đạt được khi $d \equiv O_1O_2$.

b) Gọi I_0 là trung điểm của M_0N_0. Do $R_1 > R_2 \Rightarrow AM_0 > AN_0 \Rightarrow I_0$ nằm trong đoạn AM_0. Vì $\Delta AMM_0 \backsim \Delta ANN_0$ nên $AM > AN$ suy ra I nằm trong đoạn AM.

* *Phần thuận:* Ta có

$$\frac{AI}{AM} = \frac{IN - AN}{AM} = \frac{IM}{AM} - \frac{AN}{AM} = \frac{AM - AI}{AM} - \frac{AN}{AM}$$
$$= 1 - \frac{AI}{AM} - \frac{AN}{AM} \Rightarrow 2\left(\frac{AI}{AM}\right) = 1 - \frac{AN}{AM} \quad (1)$$

Tương tự : $2\left(\frac{AI_0}{AM_0}\right) = 1 - \frac{AN_0}{AM_0}$ (2)

Do $\Delta ANN_0 \backsim \Delta AMM_0$ nên $\frac{AN}{AM} = \frac{AN_0}{AM_0}$, do đó từ (1) và (2) suy ra $\frac{AI}{AM} = \frac{AI_0}{AM_0}$.

Do đó $I_0I \,//\, MM_0$ nên $\widehat{AII_o} = 90^\circ$.

Vậy I chạy trên đường tròn đường kính AI_0.

* *Phần đảo:* Do M, N khác A nên I khác A. Lấy điểm I' trên đường tròn đường kính AI_0 trừ điểm A, đường thẳng AI' cắt (O_1, R_1) và (O_2, R_2) tại M', N'. Khi đó $I_oI' \perp M'N' \Rightarrow I_0I' \,//\, M_0M' // N_0N' \Rightarrow \frac{AI'}{AM'} = \frac{AI_0}{AM_0}$; $\frac{AI'}{AN'} = \frac{AI_0}{AN_0}$. Suy ra I' là trung điểm $M'N'$.

* *Kết luận:* Tập hợp I là đường tròn đường kính AI_0 trừ điểm A.

VÒNG II

Câu 6. Ta có $19 \equiv -1 \pmod{10}$ và 6^{2005} là một số chẵn nên $19^{6^{2005}} \equiv 1 \pmod{10}$. Vậy chữ số tận cùng của số đã cho là 1.

b) Đặt $n^2 - 14n - 256 = k^2, k \in N$.

$\Leftrightarrow (n-7)^2 - k^2 = 305$

$\Leftrightarrow (n-k-7)(n+k-7) = 305 = 1.305 = 5.61.$

Xảy ra các khả năng :

1) $n-k-7 = 1$ và $n+k-7 = 305$, lúc đó $n = 160$;

2) $n-k-7 = -305$ và $n+k-7 = -1$, lúc đó $n = -146$ (loại);

3) $n-k-7 = 5$ và $n+k-7 = 61$; lúc đó $n = 40$;

4) $n-k-7 = -61$ và $n+k-7 = -5$, lúc đó $n = -26$ (loại).

Vậy $n = 40$ hoặc $n = 160$.

Câu 7. ĐK: $x > 0, y > 0$.

Đặt $\sqrt{x} = a > 0$, $\sqrt{y} = b > 0$. Ta được hệ

$$\begin{cases} a^2b+1=2b \\ ab^2+1=2a \end{cases} \Rightarrow ab(a-b) = -2(a-b)$$

$\Leftrightarrow a - b = 0$ (vì $a, b > 0$). Thay vào hệ ta có :

$\begin{cases} a=b>0 \\ a^3-2a+1=0. \end{cases}$ Suy ra $a=b=1$; $a = b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là :

$$x = y = 1; \quad x = y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

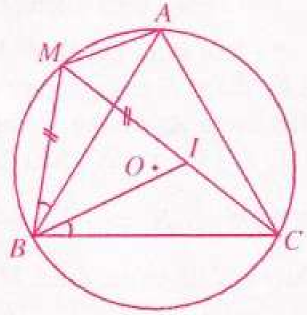
Câu 8. – Từ giả thiết suy ra

$a^2 + b^2 + c^2 + 3 + 1 \le ab + 3b + 2c$

$\Leftrightarrow \left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\dfrac{b}{2}-1\right)^2 + (c-1)^2 \le 0$. Suy ra

$a - \dfrac{b}{2} = \dfrac{b}{2} - 1 = c - 1 = 0$ hay $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$.

Câu 9. a) Lấy điểm I trên đoạn MC sao cho $MI = MB$. Do $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ (cùng chắn cung BC) nên ΔBMI đều, do đó $\widehat{MBI} = 60^\circ$ và $BI = BM$ (1).



Vì $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\widehat{MBA} = \widehat{IBC}$ (2).

Từ (1), (2) và $AB = BC$ suy ra $\Delta AMB = \Delta CIB$ (c.g.c), do đó $MA = IC$.

Vậy $MA + MB = MI + IC = MC$.

b) Do tính bình đẳng của các cung AB, BC, CA nên ta có thể giả thiết M thuộc cung nhỏ AB. Theo câu a) $T = MA + MB + MC = 2MC$.

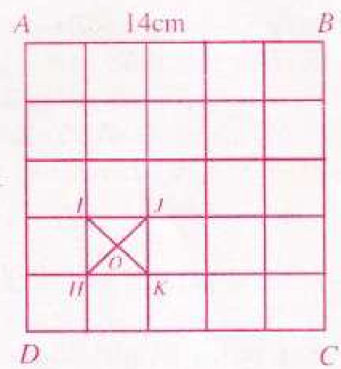
– Do $MC \le 2R$ nên $T \le 4R$ mà $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy $\text{Max}T = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$, khi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.

– Khi M thuộc cung nhỏ AB thì $\widehat{MAC} \ge 60^\circ = \widehat{AMC}$ nên $MC \ge AC = a$. Vậy $\text{Min}T = 2a$ khi M trùng A hoặc B.

Kết luận: • $\text{Max}(MA + MB + MC) = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$, khi M là điểm chính giữa của các cung AB, BC hoặc CA.

• $\text{Min}(MA + MB + MC) = 2a$ khi M trùng với một trong các đỉnh A, B hoặc C.

Câu 10. Chia hình vuông $ABCD$ thành 25 hình vuông nhỏ có cạnh bằng $\dfrac{14}{5}cm$ (hình dưới).



Sử dụng *nguyên lí Dirichlet* hoặc phương pháp *phản chứng* suy ra tồn tại một hình vuông nhỏ $IJKH$ chứa ít nhất 4 điểm trong số 76 điểm đã cho. Gọi O là tâm hình vuông $IJKH$. Ta có $IJ = \dfrac{14}{5}cm$ nên $IK = \dfrac{14}{5}\sqrt{2}\ cm \Rightarrow OI = \dfrac{7\sqrt{2}}{5}\ cm$. Nhận thấy đường tròn ngoại tiếp hình vuông $IJKH$ có tâm O bán kính OI chứa tất cả các điểm trong hình vuông $IJKH$. Mặt khác $\dfrac{7\sqrt{2}}{5} < 2$ nên đường tròn tâm O bán kính $2cm$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

LÊ QUỐC HÁN
(GV khoa Toán, ĐH Vinh)

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
BẢNG A – NĂM HỌC 2004 - 2005

(Tiếp theo kì trước)

VŨ ĐÌNH HÒA
(ĐHSP Hà Nội)

NGÀY THỨ HAI

Bài 4. *Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực **R**, lấy giá trị trong **R** và thỏa mãn hệ thức*

$$f(f(x-y)) = f(x).f(y) - f(x) + f(y) - xy$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử $R \to R$ là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, nghĩa là

$$f(f(x-y)) = f(x).f(y) - f(x) + f(y) - xy \qquad (1)$$

với mọi x, y thuộc R.

Đặt $f(0) = a$.

Thế $x = y = 0$ vào (1), ta được $f(a) = a^2$ (2)

Thế $x = y$ vào (1), với lưu ý tới (2), ta được :

$$(f(x))^2 = x^2 + a^2,\ \forall x \in R. \qquad (3)$$

Suy ra $(f(x))^2 = (f(-x))^2$, $\forall x \in R$, hay

$$(f(x) + f(-x))(f(x) - f(-x)) = 0,\ \forall x \in R. \qquad (4)$$

Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = f(-x_0)$.

Thế $y = 0$ vào (1), được :

$$f(f(x)) = a.f(x) - f(x) + a,\ \forall x \in R. \qquad (5)$$

Thế $x = 0$, $y = -x$ vào (1), ta được :

$$f(f(x)) = a.f(-x) + f(-x) - a,\ \forall x \in R. \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra :

$$a.(f(-x) - f(x)) + f(x) + f(-x) = 2a,\ \forall x \in R. \qquad (7)$$

Thế $x = x_0$ vào (7), ta được : $f(x_0) = a$ (*)

Mặt khác, từ (3) suy ra nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1^2 = x_2^2$. Vì thế, từ (*) suy ra $x_0 = 0$, trái với giả thiết $x_0 \neq 0$. Mâu thuẫn chứng tỏ $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \neq 0$. Do đó, từ (4) suy ra

$$f(x) = -f(-x),\ \forall x \neq 0. \qquad (8)$$

Thế (8) vào (7), ta được :

$$a.(f(x) - 1) = 0,\ \forall x \neq 0.$$

Suy ra $a = 0$, vì nếu ngược lại, $a \neq 0$, thì $f(x) = 1$, $\forall x \neq 0$, trái với (8).

Do đó, từ (3) có : $(f(x))^2 = x^2$, $\forall x \in R$. (9)

Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = x_0$. Khi đó theo (5) ta phải có

$$x_0 = f(x_0) = -f(f(x_0)) = -f(x_0) = -x_0.$$

Mâu thuẫn chứng tỏ $f(x) \neq x$, $\forall x \neq 0$.

Vì vậy, từ (9) ta được : $f(x) = -x$, $\forall x \in R$.

Ngược lại, kiểm tra trực tiếp, ta thấy hàm số tìm được ở trên thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Vậy, hàm số $f(x) = -x$, $x \in R$, là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 5. *Hãy tìm tất cả các bộ ba số tự nhiên (x, y, n) thỏa mãn hệ thức*

$$\frac{x! + y!}{n!} = 3^n.$$

(Quy ước: 0! = 1).

Lời giải. Viết lại hệ thức của đề bài dưới dạng $x! + y! = 3^n.n!$ (1)

• Giả sử (x, y, n) là bộ số tự nhiên thỏa mãn (1). Dễ thấy phải có $n \geq 1$; và không mất tổng quát, có thể giả sử $x \leq y$.

Khi đó xảy ra :

1) *Trường hợp 1:* $x \leq n$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 1 + \dfrac{y!}{x!} = 3^n.\dfrac{n!}{x!}$. (2)

Suy ra $1 + \dfrac{y!}{x!} \equiv 0 \pmod 3$. Từ đây, lưu ý rằng tích của ba số nguyên liên tiếp là một số chia hết cho 3 và $n \geq 1$, suy ra $x < y \leq x + 2$.

+ Nếu $y = x + 2$ thì từ (2) ta có:

$$1 + (x+1)(x+2) = 3^n.\frac{n!}{x!}. \qquad (3)$$

Với lưu ý rằng tích của hai số nguyên liên tiếp là một số chia hết cho 2, từ (3) suy ra $n \leq x + 1$.

– Nếu $n = x$ thì từ (3) ta được

$$1 + (x+1)(x+2) = 3^x, \text{ hay } x^2 + 3x + 3 = 3^x. \qquad (4)$$

Vì $x \geq 1$ nên từ (4) suy ra $x \equiv 0 \pmod 3$. Do đó, phải có $x \geq 3$. Khi đó, từ (4) ta có

$$-3 = x^2 + 3x - 3^x \equiv 0 \pmod 9.$$

Điều vô lí nhận được chứng tỏ $n \neq x$.

– Với $n = x + 1$, từ (3) ta có

$$1 + (x+1)(x+2) = 3^n(x+1).$$

Suy ra $x + 1$ là ước nguyên dương của 1. Do đó $x = 0$, kéo theo $y = 2$ và $n = 1$.

+ Nếu $y = x + 1$ thì từ (2) ta có :

$$x + 2 = 3^n.\frac{n!}{x!} \quad (5)$$

Với chú ý rằng $n \geq 1$, từ (5) suy ra $x \geq 1$. Do đó $x + 2 \equiv 1 \pmod{(x+1)}$. Vì thế, từ (5) suy ra $n = x$. Khi đó, từ (5) ta có $x + 2 = 3^x$ (6)

Dễ thấy, có duy nhất giá trị $x = 1$ thỏa mãn (6), ta được bộ số ($x = 1, y = 2, n = 1$).

Vậy trong trường hợp này, nếu bộ số tự nhiên (x, y, n) thỏa mãn (1) thì $(x, y, n) = (0, 2, 1)$ hoặc $(x, y, n) = (1, 2, 1)$.

2) *Trường hợp 2: $x > n$.*

Ta có : $$(1) \Leftrightarrow \frac{x!}{n!}+\frac{y!}{n!} = 3^n \quad (7)$$

Với lưu ý rằng $n + 1$ và $n + 2$ không thể đồng thời là các lũy thừa của 3, từ (7) suy ra $x = n + 1$. Khi đó, từ (2) $n+1+\dfrac{y!}{n!}=3^n$ (8)

Vì $y \geq x$ nên $y \geq n + 1$. Đặt $A = \dfrac{y!}{(n+1)!}$. Khi đó có thể viết hệ thức (8) dưới dạng:

$$(n + 1)(1 + A) = 3^n \quad (9)$$

Rõ ràng, nếu $y \geq n + 4$ thì $A \equiv 0 \pmod 3$; vì thế, $A + 1$ không thể là một lũy thừa của 3. Do đó, từ (9) suy ra $y \leq n + 3$.

+ Nếu $y = n + 3$ thì $A = (n + 2)(n + 3)$. Do đó, từ (9) ta có $(n + 1)(1 + (n+2)(n + 3)) = 3^n$, hay $(n + 2)^3 - 1 = 3^n$. (10)

Suy ra $n > 2$ và $n + 2 \equiv 1 \pmod 3$.

Đặt $n + 2 = 3k + 1$, $k \geq 2$. Khi đó, (10) trở thành $9k.(3k^2 + 3k + 1) = 3^{3k-1}$.

Suy ra $3k^2 + 3k + 1$ là một lũy thừa của 3. Điều vô lí vừa nhận được chứng tỏ $y \neq n + 3$.

+ Nếu $y = n + 2$ thì $A = n + 2$. Do đó, từ (9)

$$(n + 1)(n + 3) = 3^n. \quad (11)$$

Vì $n + 1$ và $n + 3$ không thể đồng thời là các lũy thừa của 3 nên không tồn tại n thỏa mãn (11). Do đó $y \neq n + 2$.

+ Với $y = n + 1$, ta có $A = 1$. Do đó, từ (9) ta được : $2(n + 1) = 3^n$. Rõ ràng, không tồn tại n thỏa mãn hệ thức vừa nêu. Do vậy $y \neq n + 1$.

Như vậy, nếu bộ số tự nhiên (x, y, n) với $x \leq y$, thỏa mãn (1) thì không thể có $x > n$.

• Tóm lại, nếu (x, y, n) là bộ số tự nhiên thỏa mãn (1) thì $(x, y, n) = (0, 2, 1)$ hoặc $(x, y, n) = (2, 0, 1)$ hoặc $(x, y, n) = (1, 2, 1)$ hoặc $(x, y, n) = (2, 1, 1)$.

Ngược lại, kiểm tra trực tiếp, dễ thấy tất cả bốn bộ số vừa nêu đều thỏa mãn (1).

• Vậy, bốn bộ số nêu trên là tất cả các bộ số cần tìm theo yêu cầu của đề bài.

Bài 6. *Xét dãy số thực $(x_n), n = 1, 2, 3, ...$, xác định bởi: $x_1 = a$ và $x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$ trong đó a là một số thực.*

Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tìm giới hạn của dãy số (x_n) trong các trường hợp đó.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x$. Khi đó, có thể viết hệ thức xác định dãy (x_n) dưới dạng $x_{n+1} = f(x_n)$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

• Ta có $f'(x) = 9x^2 - 14x + 5$. Từ đó, ta có bảng biến thiên sau của hàm $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{5}{9}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{275}{243}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $f(x) - x = 3x^3 - 7x^2 + 4x = x(x - 1)(3x - 4)$ nên

*) $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = \dfrac{4}{3}$ (1)

*) $f(x) < x$ khi $x < 0$ (2)

*) $f(x) > x$ khi $x > \dfrac{4}{3}$ (3)

Hơn nữa, do $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$ và $\dfrac{275}{243} < \dfrac{4}{3}$ nên từ sự biến thiên của hàm f trên $\mathbb{R}$ suy ra :

*) Với mọi $x \in (-\infty; 0)$ luôn có $f(x) \in (-\infty; 0)$ (4)

*) Với mọi $x \in \left(0; \dfrac{4}{3}\right)$ luôn có $f(x) \in \left(0; \dfrac{4}{3}\right)$ (5)

*) Với mọi $x \in \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$ luôn có $f(x) \in \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$ (6)

Xét các trường hợp :

• *Trường hợp 1:* $a < 0$. Khi đó:

*) (4) $\Rightarrow x_n \in (-\infty; 0), \forall n \geq 1$.

*) (2) $\Rightarrow x_2 = f(x_1) < x_1$.

Từ đó, do hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty, 0)$, dễ chứng minh được rằng dãy (x_n) là một dãy số giảm. Kết hợp điều này với (1), suy ra (x_n) là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$ thì phải có $\alpha \in \left\{0; 1; \frac{4}{3}\right\}$ và $\alpha < a$.

Vì $a < 0$ nên không thể có số α thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nêu trên. Điều này chứng tỏ dãy (x_n) không là dãy hội tụ.

• *Trường hợp 2:* $a > \frac{4}{3}$. Khi đó :

*) (6) $\Rightarrow x_n \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$, $\forall n \geq 1$.

*) (3) $\Rightarrow x_1 < f(x_1) = x_2$.

Từ đó, do hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$, dễ dàng chứng minh được rằng dãy (x_n) là một dãy số tăng. Kết hợp điều này với (1), suy ra nếu (x_n) là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$ thì phải có $\alpha \in \left\{0; 1; \frac{4}{3}\right\}$ và $\alpha > a$.

Vì $a > \frac{4}{3}$ nên không tồn tại số α thỏa mãn đồng thời hai điều kiện trên. Điều này chứng tỏ dãy (x_n) không là dãy hội tụ.

• *Trường hợp 3:* $a = 0$. Khi đó, dãy (x_n) là dãy hằng : $x_n = 0$, $\forall n \geq 1$. Vì vậy, (x_n) là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

• *Trường hợp 4:* $a = \frac{4}{3}$. Khi đó, dãy (x_n) là dãy hằng: $x_n = \frac{4}{3}$, $\forall n \geq 1$. Vì vậy, (x_n) là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{4}{3}$.

• *Trường hợp 5:* $0 < a < \frac{4}{3}$. Khi đó, từ (5) suy ra $x_n \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$, $\forall n \geq 1$.

Ta có : $|x_{n+1} - 1| = |3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n - 1|$
$= (x_n - 1)^2 . |3x_n - 1|$, $\forall n \geq 1$. (7)

Vì $x_n \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$, $\forall n \geq 1$ nên $|3x_n - 1| < 1$, $\forall n \geq 1$. Do đó, từ (7) suy ra

$$|x_{n+1} - 1| < (x_n - 1)^2, \ \forall n \geq 1.$$

Từ đó, bằng quy nạp theo n, dễ chứng minh được

$$|x_n - 1| < (a-1)^{2^{n-1}}, \ \forall n \geq 1. \quad (8)$$

Vì $a \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ nên $|a - 1| < 1$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} (a-1)^{2^{n-1}} = 0$. Vì thế, từ (8) suy ra dãy (x_n) là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

• Vậy, tóm lại, dãy (x_n) là dãy hội tụ khi và chỉ khi $a \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$. Và khi đó :

*) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ với $a = 0$;

*) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{4}{3}$ nếu $a = \frac{4}{3}$;

*) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ nếu $a \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$.

• **Chú ý.** *Có thể khảo sát sự hội tụ của dãy (x_n), trong trường hợp $a \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$, bằng cách khảo sát tính đơn điệu và bị chặn của nó. Tuy nhiên, việc khảo sát theo cách đó sẽ phức tạp hơn việc khảo sát theo cách đã trình bày trong lời giải trên.*

(Tiếp theo bìa 2)

Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1) là cuốn sách đầu tiên trong bộ tuyển chọn. Sách gồm 3 chuyên đề : *Phương pháp giải toán, Toán học và Đời sống, Lịch sử Toán học* vốn là những chuyên đề bạn đọc rất quan tâm. Sách có ích đối với thầy cô giáo dạy toán, các em học sinh và mọi người yêu toán. Các bạn có thể mua sách tại các hiệu sách trung tâm quận, huyện, thị xã, thành phố, các Công ty sách và thiết bị trường học, các cơ sở Bưu điện trong cả nước. Các đơn vị mua với số lượng lớn có thể gửi phiếu đặt mua về tòa soạn. Số điện thoại của tòa soạn: (04)5144272. Các bạn hãy tìm đọc và thông tin cho nhiều người cùng biết. Cảm ơn các bạn.

THTT

VỀ MỘT BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2004-2005

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT Chuyên Hà Tĩnh)

LTS: *Trên Tạp chí THTT số 340, tháng 10.2005 đã giới thiệu đề và lời giải một bài toán rời rạc (Bài 3 trong kì thi HSG Quốc gia THPT môn Toán, Bảng A, 2004-2005). Ở bài báo dưới đây nêu thêm một cách giải khác cho bài toán này của Thầy giáo Hoàng Ngọc Cảnh. Từ cách giải này, tác giả đã chỉ ra có phương án tô màu thỏa mãn điều kiện bài toán ứng với n ∈ {14, 28, 42, 56, 70} và đề xuất thêm một số bài toán tương tự cho các đa giác lồi khác (không phải là bát giác lồi). Xin giới thiệu cùng bạn đọc.*

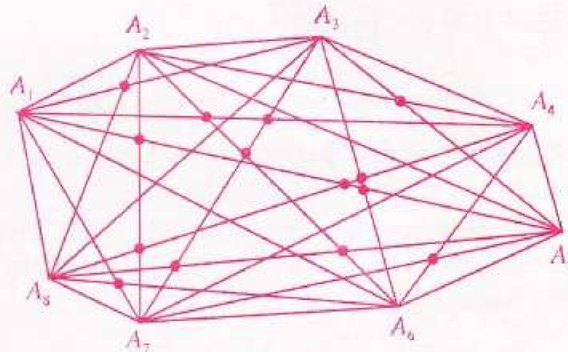
Trong kì thi Học sinh giỏi Quốc gia THPT năm học 2004-2005 có bài toán số 3 Vòng I làm cho nhiều người suy nghĩ. Đây là một bài toán rời rạc, không phải khó song hầu hết học sinh đều bó tay ! Tại sao vậy? Tôi nghĩ có lẽ vấn đề là tâm lí. Trước hết khi đọc đề ra học sinh thấy choáng ngợp bởi các khái niệm đưa ra trong bài toán và các mối quan hệ lôgic giữa chúng, nếu thoáng qua thì chưa thể hiểu được ngay. Vì vậy nhiều thí sinh đều tập trung sức lực, trí tuệ vào các bài toán số 1 và số 2. Trong lúc đó để hoàn chỉnh các bài này cũng mất khá nhiều thời gian. Ta hãy thử nhìn nhận lại bài toán số 3. Trước hết xin nhắc lại đề ra bài toán.

Bài 3: *Trong mặt phẳng cho bát giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ mà không có 3 đường chéo nào đồng quy. Ta gọi mỗi giao điểm của hai đường chéo là một nút. Xét các tứ giác lồi mà mỗi tứ giác đều có cả bốn đỉnh là đỉnh của bát giác đã cho. Ta gọi mỗi tứ giác như vậy là một tứ giác con. Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất có tính chất: Có thể tô màu n nút sao cho với mọi i, j* $\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $i \neq j$ *,nếu kí hiệu S(i;j) là số tứ giác con nhận A_i, A_j làm đỉnh và đồng thời có giao điểm hai đường chéo là một nút đã được tô màu thì tất cả các giá trị S(i;j) đều bằng nhau.*

Có lẽ cái khó đầu tiên là phải hiểu đúng bài toán, hiểu được bài toán thì coi như đường lối giải đã rõ ràng. Sau đây tôi xin nêu một cách giải cho bài toán này.

Lời giải. Giả sử có một phương án tô màu thoả mãn các điều kiện bài toán. Đặt *S(i; j)=k*, k nguyên dương. Rõ ràng một điểm được tô màu chung cho 6 cặp điểm $(A_i; A_j)$, $i \neq j$, mà A_i , A_j là đỉnh của tứ giác có giao điểm của các đường chéo được tô màu đó. Do có tất cả là $C_8^2 = 28$ cặp (A_i ; A_j), $i \neq j$, suy ra số các điểm được tô màu là: $n = \dfrac{28k}{6} = \dfrac{14k}{3}$. Do n nguyên dương ($n \leq C_8^4 = 70$) suy ra k chia hết cho 3, dẫn đến $n \geq 14$.

Ta chỉ ra một phương án tô màu thoả mãn với $n = 14$ tương ứng với $k = 3$. Trên *hình 1* các điểm tô màu được đánh dấu (•). Vậy n nhỏ nhất là 14 .



Hình 1

Sau khi giải xong bài toán ta hãy tiếp tục suy nghĩ : *Với những giá trị nào của n ta có thể tô màu n điểm trong 70 điểm giao các đường chéo của các tứ giác lồi con có được, thoả mãn điều kiện của bài toán* ? Từ công thức :

$n = \dfrac{14k}{3}$ suy ra n là bội của 14, k chỉ có thể nhận các giá trị trong tập $S = \{3;6;9;12;15\}$.

Hơn nữa do quan hệ tương đối của "sự tô màu" và "sự không tô màu", giả sử có một phương án tô màu thoả mãn điều kiện bài toán cho n điểm thì cũng sẽ có một phương án tô màu $(70-n)$ điểm còn lại bằng đổi lại cách gọi điểm "tô màu" và điểm "không tô màu" cho nhau.

Mời bạn tham dự

CUỘC THI TOLITI 2006

LTS : Không phải là nhỏ li ti mà là to li ti. Cuộc thi không nhỏ vì do 3 tạp chí đứng ra đồng tổ chức. Nhưng đây chỉ là cuộc thi vui mà ai cũng có thể tham gia nên chỉ to – li ti thôi. Các vấn đề của cuộc thi vừa to và vừa li ti.

THỂ LỆ CUỘC THI

1. Mục đích cuộc thi

– Động viên, tạo điều kiện cho mọi người yêu Toán – Lí – Tin có cơ hội học tập, giải trí lành mạnh, bổ ích.

– Vận dụng những kiến thức, kĩ năng cơ bản về các môn Toán – Lí – Tin nhưng gần gũi với cuộc sống.

– Là một cầu nối giữa các bạn yêu 3 tạp chí: Toán học và Tuổi trẻ, Tin học và Nhà trường, Vật lí và Tuổi trẻ.

2. Đối tượng dự thi

Tất cả học sinh và sinh viên.

3. Thời gian đăng đề và gửi lời giải

Đề sẽ đăng trên cả 3 tạp chí vào các tháng 1, 4, 7, 10 năm 2006.

Bài giải có thể gửi về một trong ba tạp chí. Thời hạn nhận bài giải là 2 tháng sau khi đăng đề (theo dấu bưu điện). Các bạn cộng tác viên có thể gửi đề.

4. Thể thức gửi bài

Phía trên của mỗi tờ giấy ghi lời giải cần ghi đủ các thông tin sau: Họ và tên (chữ in hoa) ; Ngày tháng năm sinh; Giới tính; Nơi sinh; Quê quán; Địa chỉ (lớp, trường).

Ngoài phong bì đề rõ

BÀI DỰ THI CUỘC THI TOLITI 2006

Bài gửi về một trong ba địa chỉ

– Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ:
187B Giảng Võ, Hà Nội;

– Tạp chí Vật lí và Tuổi trẻ:
10 Đào Tấn, Ba Đình, Hà Nội;

– Tạp chí Tin học và Nhà trường:
Phòng 1407 Nhà 17 T2, Khu Trung Hòa Nhân Chính, Cầu Giấy, Hà Nội

có dán tem. Bài giải chỉ gửi 1 lần.

5. Giải thưởng cuộc thi

Ban tổ chức cuộc thi sẽ chấm và quyết định bài được giải thưởng của 6 tháng và của cả năm.

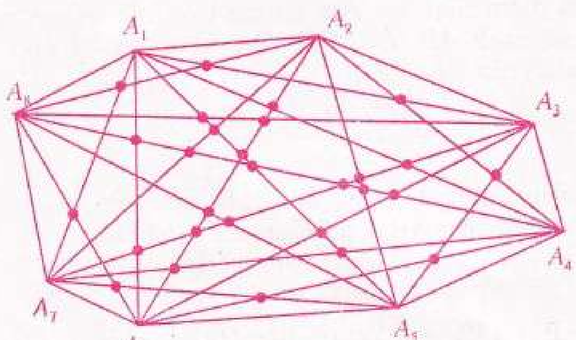
Trường có nhiều học sinh tham gia giải bài cuối năm sẽ được nhận giải tập thể.

6. Tổ chức cuộc thi

Các tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ* , tạp chí *Vật lí và Tuổi trẻ*, tạp chí *Tin học và Nhà trường* đồng tổ chức cuộc thi liên tạp chí này. Người được giải thưởng năm sẽ được cấp giấy chứng nhận của 3 tạp chí.

BAN TỔ CHỨC CUỘC THI

☛ Như vậy ứng với phương án tô màu $n = 14$ ($k = 3$) là phương án tô màu $n = 56$ ($k = 12$).



Hình 2

Với $n = 28$ ($k = 6$) ta chỉ ra cách tô màu như sau: (các điểm được tô màu ứng với dấu (•)), (*hình 2*).

Như vậy, với $n = 70 - 28 = 42$ ($k = 9$) sẽ có phương án tô màu tương ứng thoả mãn. Cuối cùng hiển nhiên $n = 70$ ($k = 15$) có phương án tô màu tất cả 70 điểm thoả mãn điều kiện đề ra. *Do đó với mọi* $n \in N^*$, $n \le 70$, *n là bội của 14 đều có phương án tô màu thoả mãn đề bài.*

Tiếp tục suy nghĩ tôi đã xét bài toán tương tự cho một số đa giác lồi khác (không phải là bát giác). Do khuôn khổ của bài viết , tôi xin tạm dừng tại đây. Rất mong sự góp ý chân tình của bạn đọc.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/341 (Lớp 6). Tìm chữ số tận cùng của tổng gồm 502 số hạng :

$$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + ... + n^{4n-7} + ... + 503^{2005}.$$

NGUYỄN ANH THUẤN
(GV THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T2/341 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân. Trên cạnh đáy BC lấy điểm D sao cho $CD=2BD$. So sánh số đo hai góc $\widehat{BAD}$ và $\frac{1}{2}\widehat{CAD}$.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/341. Tìm mọi nghiệm nguyên dương của phương trình $x^y + x^z + x^t = x^{2005}$.

TRẦN TUYẾT THANH
(GV Học viện PKKQ Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T4/341. Giải phương trình
$(x^2 - 12x - 64)(x^2 + 30x + 125) + 8000 = 0.$

NGUYỄN HỮU BẰNG
(GV THCS Hưng Hòa, Vinh, Nghệ An)

Bài T5/341. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng

$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$$

trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T6/341. Cho tam giác đều ABC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua đường thẳng AC. Đường thẳng qua B cắt các đường thẳng AD, CD lần lượt tại M, N. Các đường thẳng AN và CM cắt nhau tại điểm E. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

ĐOÀN QUỐC VIỆT
(GV THCS Nhân Hòa, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Bài T7/341. Cho tam giác đều ABC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua đường thẳng AC. Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{4}{3}BC$. Đường thẳng AM cắt CD tại N. Trên các đoạn thẳng AB, AD lấy các điểm E, F theo thứ tự sao cho $CE \parallel NF$. Tính số đo góc EOF, trong đó O là trung điểm của AC.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/341. Chứng minh rằng với bất kì số nguyên dương n ($n > 2$) luôn tồn tại n số nguyên dương phân biệt nhau sao cho tổng của chúng bằng bội chung nhỏ nhất của chúng và bằng $n!$.

NGUYỄN THÀNH NHÂN
(SV Lớp cử nhân tài năng Toán- Tin 2003, ĐHKHTN, TP Hồ Chí Minh)

Bài T9/341. Chứng minh rằng

$$2x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 7xz + 2yz > 0$$

trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z < 0$ và $4xz > y^2$.

LÊ ANH TUẤN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/341. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$

trong đó a, b, c, d, x, y là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau :
$a^2 + b^2 + 40 = 8a + 10b$; $c^2 + d^2 + 12 = 4c + 6d$;
$3x = 2y + 13$.

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T11/341. Xét các tứ giác lồi $ABCD$ có đường tròn nội tiếp. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{AM^2}{x_1x_2} + \frac{BN^2}{x_2x_3} + \frac{CP^2}{x_3x_4} + \frac{DQ^2}{x_4x_1}$$

trong đó $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ là một hoán vị của độ dài các cạnh $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$.

THỌ ĐẶNG
(Phòng GD-ĐT Ninh Phước, Ninh Thuận)

Bài T12/341. Xét tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một.

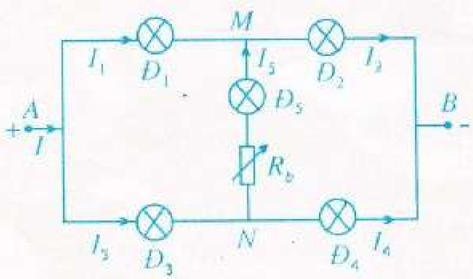
Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng AH cắt BC tại K. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác OBK, OCK theo thứ tự cắt OB, OC tại M, N. Các mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện $[B, OA, H]$ và $[C, OA, H]$ lần lượt cắt BC tại D và E. Chứng minh bất đẳng thức về thể tích sau :

$$V_{OADE} \cdot V_{OAMN} \le \frac{\sqrt{2}-1}{2} V^2_{OABC}.$$

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/341. Cho mạch điện như hình vẽ. U_{AB} = 12V. Công suất tiêu thụ của các đèn $Đ_1$; $Đ_2$; $Đ_3$; $Đ_4$; $Đ_5$ lần lượt là P_1 = 4W;



P_2 = 16W; P_3 = 4W; P_4 = 10W; P_5 = 1W. Công suất tiêu thụ trên biến trở R_b là 1W. Dòng điện có chiều như hình vẽ.

a) Xác định điện trở của các đèn và điện trở phần biến trở tham gia vào mạch điện.

b) Khi điện trở phần biến trở tham gia vào mạch điện thay đổi thì độ sáng của các đèn thay đổi thế nào ? Giả sử điện trở các đèn không thay đổi.

NGUYỄN MẠNH THẮNG
(GV THCS Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)

Bài L2/341. Một điểm sáng A đặt cách màn E một khoảng a = 50cm. Trong khoảng giữa A và E người ta đặt một thấu kính L sao cho A nằm trên trục chính và thấu kính song song với màn E. Khi tịnh tiến thấu kính theo trục chính trong khoảng giữa A và E một khoảng b = 20cm thì vệt sáng trên màn có bán kính nhỏ nhất.

1) Tìm tiêu cự thấu kính.

2) Tìm vệt sáng trên màn nhỏ nhất (r_{min}), biết thấu kính có dạng phẳng lồi với chiết suất n = 1,5 và chỗ dày nhất đo được là 0,2cm.

NGUYỄN TRỌNG QUÂN
(SV44C4, ĐH Thủy Lợi Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/341. (for 6th grade)

Find the last decimal digit of the following sum of 502 terms :

$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + ... + n^{4n-7} + ... + 503^{2005}$.

T2/341. (for 7th grade)

Let ABC be an isosceles triangle and D be the point on its base BC such that $CD = 2BD$. Compare the measures of the angles $\widehat{BAD}$ and $\frac{1}{2}\widehat{CAD}$.

T3/341. Find all positive integral solutions of the equation $x^y + x^z + x^t = x^{2005}$.

T4/341. Solve the equation

$(x^2 - 12x - 64)(x^2 + 30x + 125) + 8000 = 0$.

T5/341. Find the least value of the sum

$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ where x, y, z are positive real numbers satisfying the condition $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

T6/341. Let ABC be an equilateral triangle and D be the reflection of B in the line AC. A line passing through B cuts the lines AD, CD respectively at M, N. The lines AN and CM intersect at E. Prove that the points A, C, D, E are concyclic.

T7/341. Let ABC be an equilateral triangle and D be the reflection of B in the line AC, and M be the point on the ray BC such that $BM = \frac{4}{3}BC$.

The line AM cuts CD at N. Take a point E on the segment AB and a point F on the segment AD so that the lines CE, NF are parallel. Calculate the measure of the angle EOF, where O is the midpoint of AC.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/341. Prove that for every positive integer $n > 2$, there exist n distinct positive integers such that the sum of these numbers is equal to their least common multiple and is equal to $n!$.

T9/341. Prove that

$$2x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 7xz + 2yz > 0$$

for real numbers x, y, z satisfying the conditions $x + y + z < 0$ and $4xz > y^2$.

T10/341. Find the least value of the expression

$$P = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$

where a, b, c, d, x, y are real numbers satisfying the following conditions : $a^2 + b^2 + 40 = 8a + 10b$; $c^2 + d^2 + 12 = 4c + 6d$; $3x = 2y + 13$.

(Xem tiếp trang 30)

Bài T1/337. (Lớp 6). *Tìm bốn chữ số đầu tiên bên trái của số S gồm 1000 số hạng :*

$$S = 1 + 2^2 + 3^3 + ... + n^n + ... + 1000^{1000}.$$

Lời giải. Ta có $1000^{999} > 1000^{999} - 1$ (1)

Từ $1000^{999} - 1$

$= (1000-1)(1000^{998} + 1000^{997} + ... + 1000 + 1)$

$= 999(1000^{998} + 1000^{997} + ... + 1000 + 1)$. Suy ra

$1000^{999} - 1 > 999^{999} + 998^{998} + ... + 2^2 + 1$ (2)

Từ các bất đẳng thức (1), (2), ta được

$1000^{999} > 999^{999} + 998^{998} + ... + 2^2 + 1$. Do đó

$1000^{1000} + 1000^{999} >$

$> 1000^{1000} + 999^{999} + 998^{998} + ... + 2^2 + 1 = S$ (3)

Mặt khác ta có $S > 1000^{1000}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$1000^{1000} < S < 1000^{1000} + 1000^{999}$.

Hay $1000.1000^{999} < S < 1001.1000^{999}$.

Lưu ý rằng khi viết trong hệ thập phân, ta có 1000.1000^{999} là số bắt đầu bằng 1000 và tiếp theo là 2997 chữ số 0. Mặt khác 1001.1000^{999} là số bắt đầu bằng 1001 và tiếp theo là 2997 chữ số 0. Từ đó suy ra bốn chữ số đầu tiên bên trái của số S lần lượt là 1,0,0,0.

Nhận xét. Đây là bài toán khó nên có rất ít bạn tham gia gửi bài giải. Gần một nửa trong số trên có lời giải sai giống nhau là chứng minh bất đẳng thức:

$1000^{1000} < S < 1000^{1000} + 1000^{999} + ... + 1000$ (5)

Hai số 1000^{1000} và

$1000^{1000} + 1000^{999} + ... + 1000^2 + 1000$

cùng có 3001 chữ số và:

1000.1000^{999} là số bắt đầu bằng 1000,

$1000^{1000} + 1000^{999} + ... + 1000^2 + 1000$ là số bắt đầu bằng 1001.

Từ đó suy ra bốn chữ số đầu của S là 1,0,0,0(!?).

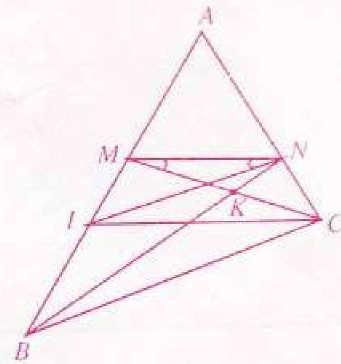
Lưu ý rằng có rất nhiều số bắt đầu bằng 1001 và thỏa mãn bất đẳng thức (5). Các bạn hãy tự tính số các số bắt đầu bằng 1001 và thỏa mãn bất đẳng thức (5). Đây là một bài toán thú vị. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Lê Quang Huy*, 6H1, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân*, 6B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 6^7 , THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Nam Định:** *Nguyễn Thị Thu Thảo*, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/337. (Lớp 7). *Cho tam giác ABC có AB > AC. Trên các cạnh AB và AC theo thứ tự lấy các điểm M và N sao cho AM = AN. Gọi K là giao điểm của BN và CM. Hãy so sánh độ dài của KB và KC.*

Lời giải. Trên đoạn AB lấy điểm I sao cho $AI = AC$. Khi đó $\Delta AMC = \Delta ANI$ (c.g.c) $\Rightarrow NI = MC$ (1).



Vì ΔAIC cân tại A, suy ra $\widehat{AIC} < 90^o$, do đó $\widehat{AIN} < 90^o$ (tia IN nằm giữa hai tia IA và IC). Vì $\widehat{AIN} + \widehat{BIN} = 180^o$ nên $\widehat{BIN} > 90^o$. Trong tam giác BIN, góc $\widehat{BIN}$ là góc tù nên nó là góc lớn nhất, suy ra $BN > IN$ (2). Từ (1) và (2) ta có $BN > CM$ (3).

Cũng do $\Delta AMC = \Delta ANI$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{ANI}$, mà $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ (do ΔAMN cân), suy ra $\widehat{KMN} = \widehat{INM}$. Ta lại có $\widehat{INM} < \widehat{KNM}$ (do I nằm giữa M và B), do đó $\widehat{KMN} < \widehat{KNM}$. Suy ra trong ΔKMN có $KM > KN$ (4).

Từ (3) và (4) ta có $BN + KM > CM + KN$

$\Rightarrow BN - KN > CM - KM$ hay $BK > CK$.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán tương đối dễ, nhiều bạn tham giải nhưng không ít bạn mắc sai lầm khi trừ từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều.

Một số bạn đưa ra kết luận $BN > CM$ bằng cách so sánh các cạnh và góc của hai tam giác BCN và CBM, hoặc hai tam giác ACM và ABN. Các kết luận đó đều không có căn cứ.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và chính xác:

Nam Định: *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Lê Ngọc Tư, Trịnh Quang Dũng,* 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 6A, *Dương Hoàng Hưng*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Thị Thúy*, 7B, THCS Hạnh Lâm, Thanh Chương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Trung Thành*, 7D, THCS TTr Kỳ Anh, Kỳ Anh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*, 6M, THCS Nguyễn Huệ, TX. Đông Hà; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 6^7, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bình Định:** *Võ Thị Mỹ Hạnh*, 7A1, THCS Nhơn Hậu, An Nhơn; **Gia Lai:** *Lê Thanh Lâm*, 7^{10}, THCS Nguyễn Du, Pleiku.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/337. *Xét một tam giác có số đo độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 3 và số đo diện tích của tam giác cũng là số tự nhiên. Chứng minh rằng tồn tại một đường cao của tam giác đã cho chia tam giác đó thành hai tam giác nhỏ mà số đo độ dài các cạnh của cả hai tam giác nhỏ cũng là số tự nhiên.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Quốc Đại*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định**).

Xét ΔABC với $BC = a$, $AB = a - 1$, $AC = a + 1$. Góc ABC là góc lớn nhất vì đối diện với cạnh AC dài nhất. Ta có

$$a^2 + (a-1)^2 > (a+1)^2 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 > a^2 + 2a + 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 > 4a \Leftrightarrow a > 4 \qquad (2)$$

BĐT (2) đúng theo giả thiết nên BĐT (1) đúng. Chú ý rằng trong tam giác ABC nếu $AB^2 + BC^2 > AC^2$ thì góc ABC nhọn (bạn đọc tự chứng minh điều này). Từ đó ΔABC có ba góc nhọn và chân H của đường cao AH nằm trong đoạn BC. Từ $AC^2 - HC^2 = AB^2 - HB^2$ suy ra

$HC^2 - HB^2 = AC^2 - AB^2 = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a$, nên $HC - HB = 4$ (Vì $HB + HC = a$). Do đó

$HC = \dfrac{a+4}{2}$, $HB = \dfrac{a-4}{2}$. Ta tính được

$HA = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3(a^2-4)}$. Nên

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}HA.BC = \frac{a\sqrt{3(a^2-4)}}{4} \qquad (3)$$

Nếu a là số lẻ thì tử số của (3) không chia hết cho 4 nên S_{ABC} không nguyên. Do đó a phải là số chẵn, $a = 2b$, lúc đó $S_{ABC} = b\sqrt{3(b^2-1)}$ phải là số nguyên, suy ra $b^2 - 1 = 3c^2$ (với b, c là số nguyên dương) (4).

Chú ý rằng phương trình (4) có nghiệm nguyên dương, chẳng hạn $b = 7$, $c = 4$, $a = 14$, lúc đó $S = 3abc$, $HA = 3c$, $HC = b + 2$, $HB = b - 2$ đều là số nguyên. Như vậy đường cao AH của ΔABC chia tam giác ABC thành hai tam giác nhỏ ABH và ACH có số đo các cạnh đều là số nguyên dương.

Nhận xét. 1) Một số bạn sử dụng công thức Héron cũng dẫn đến kết quả. Nhiều lời giải chưa chặt chẽ: hoặc không chứng minh điểm H nằm trong đoạn BC, hoặc không chỉ ra phương trình (4) có ít nhất một nghiệm nguyên dương.

2) Ngoài bạn Đại, các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ: *Đào Đức Trung*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Nguyễn Tiến Thanh*, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Tây:** *Nguyễn Thế Tâm*, 8A1, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ; **Thanh Hóa :** *Hoàng Đức Ý, Dương Quốc Việt*, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; **Quảng Trị:** *Trương Xuân Nhã*, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; **Khánh Hòa:** *Võ Thái Thông*, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

VIỆT HẢI

Bài T4/337. *Giải phương trình*

$$x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0 \qquad (1)$$

Lời giải. (Của đa số các bạn).

Điều kiện : $x \ge -2$ (*). Viết lại (1) dưới dạng :

$$x^3 - 3x(x+2) + 2\sqrt{(x+2)^3} = 0 \qquad (2)$$

Đặt $y = \sqrt{x+2} \ge 0$. Khi đó (2) trở thành :

$x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+2y) = 0$

Do đó $x = y$ hoặc $x = -2y$.

Với $x = y$ ta có :

$$x = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ (x+1)(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Với $x = -2y$ ta có

$$x = -2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 = 4(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 - 4x - 8 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2 - 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn (*)).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x = 2$ và $x = 2 - 2\sqrt{3}$.

Nhận xét. 1) Một số bạn có lời giải không đúng. Nguyên nhân chính là các bạn đã mắc sai lầm khi biến đổi phương trình tương đương :

$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^2(x)$

đúng ra là: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc: *Mạc Thế Trường*, 8D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Hải Dương:** *Phạm Thanh Nga*, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành, *Nguyễn Tuấn Thành*, 90 Ngô Quyền, TP Hải Dương; **Nam Định:** *Trần Thanh Sơn*, 8B, THCS Trực Hưng, Trực Ninh; **Thanh Hóa:** *Hoàng Minh Hiếu*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*, 8H, THCS Nguyễn Huệ, TX Đông Hà; **Quảng Nam:** *Lê Nguyễn Anh Tú*, 9D, THCS Quốc Xuân, Quế Sơn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Đinh Ngọc Thái*, 9A, THCS Vũng Tàu, TP Vũng Tàu; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thanh Lâm*, 9, THCS Hùng Vương, Ninh Hòa.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/337. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2ac + bd + cd$, trong đó các số thực a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện : $4a^2 + b^2 = 2$ và $c + d = 4$.*

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Thị Hằng*, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**).

Với mọi $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ ta luôn có

$$\begin{cases} \left(2a-\dfrac{c}{2}\right)^2 \ge 0 \\ \left(b-\dfrac{d}{2}\right)^2 \ge 0 \\ (c-d)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ac \le 4a^2 + \dfrac{c^2}{4} & (1) \\ bd \le b^2 + \dfrac{d^2}{4} & (2) \\ cd \le \dfrac{(c+d)^2}{8} + \dfrac{cd}{2} & (3) \end{cases}$$

Cộng theo từng vế của (1), (2) và (3) ta được

$$T = 2ac+bd+cd \le$$

$$\le 4a^2 + b^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} + \frac{cd}{2} + \frac{(c+d)^2}{8}$$

$$= (4a^2+b^2) + \frac{3(c+d)^2}{8} = 2 + \frac{3.4^2}{8} = 8.$$

$T = 8$ khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở các BĐT (1), (2), (3) tức là khi $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1, c = d = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của T là 8.

Nhận xét. Nhiều bạn đã giải bằng cách áp dụng BĐT Bunhiacôpxki, sử dụng phương pháp đồ thị nên dài dòng hơn. Một số bạn áp dụng BĐT Cauchy lại quên điều kiện các số phải không âm trong khi đề bài không có điều kiện đó. Ngoài bạn Hằng, các bạn sau đây có lời giải tốt và ngắn gọn :

Thanh Hóa: *Trần Thị Dung, Trương Văn Hợp*, 8C, *TrầnThị Ánh Nguyệt*, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Nguyễn Văn Hữu*, 9C, THCS Nông Cống, *Đinh Thế Tiến, Hoàng Trung Sơn*, 8B, THCS Nhữ Bá Sĩ, *Hoàng Đức Ý*, 9E, THCS Trần Mai Ninh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 8A3, *Hà Thị Thanh Huyền*, 9A1, THCS Lâm Thao, *Đào Đức Trung*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Triệu Tuấn Linh*, 8B, THCS Văn Giang, Việt Trì; **Hà Tây:** *Đinh Hoàng Long*, 8A1, THCS Tế Tiêu, Mĩ Đức, *Phí Quốc Tuân*, 9E, THCS Thạch Thất, *Nguyễn Hữu Trung*, 9A, THCS Nguyễn Văn Huyên, *Nguyễn Thế Tâm*, 8A1, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ; **Thái Bình:** *Nguyễn Quốc Trường*, 8A, THCS Nam Hưng; **Hải Dương:** *Hoàng Tiến Đạt*, 9A1, THCS Ngô Gia Tự; **Hải Phòng:** *Phạm Duy Hiệp*, 8B8, THCS Trần Phú; **Nam Định:** *Cao Mạnh Hùng*, 9A, THCS Yên Định, Hải Hậu; **Nghệ An:** *Dương Phúc Thương*, 9A, THCS Thuận Sơn, Đô Lương, *Nguyễn Thị Hồng*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Trần Việt Hưng*, 9G, THCS TT Yên Viên, Gia Lâm; **Bạc Liêu:** *Trần Mĩ Linh*, 9/1, THCS Trần Huỳnh; **Vĩnh Phúc:** *Trần Thị Thu Thanh*, 9B, THCS Tam Dương; **Quảng Trị:** *Trương Xuân Nhã*, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà.

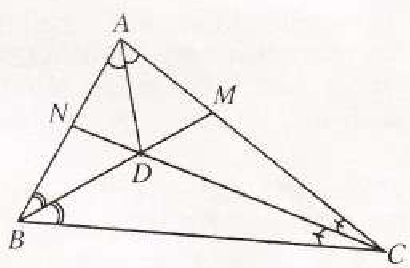
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/337. *Cho tam giác ABC. Các tia phân giác trong BM và CN (M thuộc AC, N thuộc AB) cắt nhau tại D. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $2BD.CD = BM.CN$.*

Lời giải. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{AB}{CB}$.

Suy ra $\dfrac{MA}{MC+MA} = \dfrac{c}{a+c}$ hay $MA = \dfrac{bc}{a+c}$.

Mặt khác từ AD là phân giác của góc BAM ta có $\dfrac{DB}{DM} = \dfrac{BA}{MA}$.



Cùng với trên, suy ra

$$\frac{BD}{BD+DM} = \frac{BA}{BA+MA} \text{ hay } \frac{BD}{BM} = \frac{c}{c+\dfrac{bc}{a+c}}.$$

Vậy $\dfrac{BD}{BM} = \dfrac{a+c}{a+b+c}$ (1)

Tương tự $\dfrac{CD}{CN} = \dfrac{b+a}{a+b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có các biến đổi sau đều tương đương:

$$2BD \times CD = BM \times CN$$

$$1 = \frac{2BD \times CD}{BM \times CN} = \frac{2(c+a)(b+a)}{(a+b+c)^2}$$

$2(c+a)(b+a) = (a+b+c)^2$

$b^2 + c^2 = a^2$

ΔABC vuông tại A.

Vậy ΔABC vuông tại A *khi và chỉ khi* $2BD \times CD = BM \times CN$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Văn Quang*, 9C, *Trần Anh Trung*, 9A, THCS Tự Lập, Mê Linh; **Hải Dương:** *Phạm Thanh Nga*, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hưng Yên:** *Đoàn Thu Hà*, 8A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hải Phòng:** *Phạm Duy Hiệp*, 8B8 THCS Trần Phú; **Hà Nội:** *Đỗ Như Milan*, 8A1, THCS Chu Văn An; **Hà Nam:** *Văn Ngọc Sơn*, 9A1, THCS Nguyễn Khuyến, Bình Lục; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Vân*, 8D, Nguyễn Hiền, Nam Trực, *Phạm Thị Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Thảo*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Dương Phúc Thưởng*, 9A, THCS Thuận Sơn, Đô Lương; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Đức Trung*, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt; **Quảng Trị:** *Võ Trần Tâm*, 7E, THCS TTr. Gio Linh, *Hoàng Đức Hữu*, 8/2 THCS Thành Cổ; **Đăk Lăk:** *Võ Văn Tuấn*, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Khánh Hòa:** *Võ Thái Thông*, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, *Trần Thị Ánh Nguyên*, 6^7, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/337. *Cho góc $\widehat{xPy} = 30^\circ$. Trên tia Px lấy điểm A và trên tia Py lấy điểm B sao cho AB = d không đổi. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi ΔPAB, của diện tích ΔPAB khi A, B di động trên các cạnh của góc xPy.*

Lời giải. (Của nhiều bạn). Bạn đọc tự vẽ hình.

Không mất tính tổng quát giả sử $\widehat{PAB} \geq \widehat{PBA}$, do đó $\widehat{PBA} < 90^\circ$. Dựng $AH \perp PB$ thì H nằm trong đoạn BP.

Trong tam giác vuông AHP có $\widehat{APH} = 30^\circ$ nên $AH = \dfrac{PA}{2}$ và $PH = \dfrac{PA.\sqrt{3}}{2}$ (1). Mặt khác, áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông AHB ta có : $AB^2 = AH^2 + HB^2$. Từ đó

$$d^2 = AH^2 + (PB - PH)^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) có $d^2 = PA^2 + PB^2 - \sqrt{3}.PA.PB$

$= (PA+PB)^2 - (2+\sqrt{3}).PA.PB \qquad (3)$

•) *Tìm giá trị lớn nhất của chu vi ΔPAB*

Từ (3), áp dụng BĐT $(X+Y)^2 \geq 4XY$, ta được

$d^2 \geq (PA+PB)^2 - \dfrac{(2+\sqrt{3})(PA+PB)^2}{4}$, suy ra

$PA + PB \leq \dfrac{2d}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$, hay $PA + PB \leq (\sqrt{6}+\sqrt{2})d$.

Gọi p là chu vi tam giác PAB thì $p \leq (\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)d$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $PA = PB = \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)d$. Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác PAB bằng $(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)d$, đạt được khi và chỉ khi

$PA = PB = \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)d$.

•) *Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔPAB*

Ta có $S_{PAB} = \dfrac{1}{2}AH.PB = \dfrac{1}{4}PA.PB \qquad (4)$

Vì $PA^2 + PB^2 \geq 2PA.PB$ nên từ (3) có

$d^2 = PA^2 + PB^2 - \sqrt{3}.PA.PB \geq (2-\sqrt{3}).PA.PB \; (5)$

Từ (4), (5) suy ra $S_{PAB} \leq \dfrac{d^2}{4(2-\sqrt{3})}$, hay

$S_{PAB} \leq \dfrac{(2+\sqrt{3})d^2}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $PA = PB = \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)d$. Do đó giá trị lớn nhất diện tích tam giác PAB bằng $\dfrac{(2+\sqrt{3})d^2}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $PA = PB = \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)d$.

Nhận xét. 1) Một số bạn nhận xét đúng rằng giả thiết $\widehat{xPy} = 30^\circ$ là không cần thiết. Các bạn đó đã đặt $\widehat{xPy} = \alpha \; (0 < \alpha < 180^\circ)$. Sử dụng hệ thức $AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA.PB.\cos\alpha$; công thức $S_{PAB} = \dfrac{1}{2}PA.PB\sin\alpha$, đồng thời đánh giá các BĐT như lời giải trên cũng tìm được giá trị lớn nhất của chu vi và diện tích tam giác PAB trong trường hợp này.

2) Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả :

Bắc Ninh: *Nguyễn Mạnh Hưng*, 9B, THCS Từ Sơn, Từ Sơn; **Phú Thọ:** *Triệu Tuấn Linh*, 8B, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Đào Đức Trung*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Hải Dương:** *Đinh Công Điệp*, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hà Tây:** *Nguyễn Thế Tâm*, 8A1, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hà Nam:** *Văn Ngọc Sơn*, 9A1, THCS Nguyễn Khuyến, Bình Lục, *Nguyễn Thị Lâm Ngọc*, 9C, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên ; **Thanh Hóa:** *Hoàng Đức Ý*, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; **Quảng Trị:** *Trương Xuân Nhã*, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phi Hùng*, 9A, THCS Quách

Xuân Kì, Hoàn Lão; **Quảng Nam:** *Phan Thị Thu Trang*, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Điện Bàn; **Đăk Lăk:** *Đoàn Nhật Minh*, 9E, THCS Chu Văn An, Eakar, *Võ Văn Tuấn*, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Khánh Hòa:** *Võ Thái Thông*, 9/4, THCS Ngô Gia tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bạc Liêu:** *Trần Mỹ Linh*, 9/1, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/337. *Xét hàm số $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f(f(x)) = x + 4.f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên n $(n \geq 1)$ sao cho $f_n(0)$ chia hết cho $20^{11^{2005}}$, trong đó $f_1(x) = f(x)$ và $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ với mọi $n \geq 2$.*

Lời giải. Đặt $u_n = f_n(0)$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$ thì $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ và với mọi $n \geq 0$ thì

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n \quad (1)$$

PT đặc trưng $x^2 = 4x + 1$ có nghiệm $x_1 = 2+\sqrt{5}$, $x_2 = 2-\sqrt{5}$ suy ra với mọi $n \geq 0$ thì

$$u_n = (x_1^n - x_2^n):2\sqrt{5} \quad (2)$$

Đặt $a = x_1^n = (2+\sqrt{5})^n$, $b = x_2^n = (2-\sqrt{5})^n$ thì $ab = (-1)^n$ (3) và $a - b = 2\sqrt{5}u_n$ (4)

Ta tìm điều kiện để u_n chia hết cho 5^k và u_n chia hết cho 2^k.

a) Từ (1) suy ra $u_{n+5} = 305u_{n+1} + 288u_n$.

Từ đó $u_{n+5} \vdots 5$ khi và chỉ khi $u_n \vdots 5$. Ta thấy $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 17$, $u_4 = 72$ đều không chia hết cho 5, còn $u_0 = 0$, $u_5 = 305$ nên

$$u_n \vdots 5 \Leftrightarrow n \vdots 5 \quad (5)$$

Sử dụng (2), (3) và (4) ta có

$$\begin{aligned} u_{5n} &= (a^5 - b^5):2\sqrt{5} \\ &= u_n(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \\ &= u_n\left((a-b)^4 + 5ab(a-b)^2 + 5a^2b^2\right) \\ &= u_n(400u_n^4 + 100(-1)^n u_n^2 + 5) \\ &= 5u_n(80u_n^4 + 20(-1)^n u_n^2 + 1). \end{aligned}$$

Hay là $u_{5n} = 5u_n.A_n$ với $(A_n, 5) = 1$ (6)

Giả sử $n = 5^k.m$ trong đó k,m là số nguyên dương và $(m, 5) = 1$, theo (5) và (6) ta có $u_n = 5^k.B_n$ với $(B_n, 5) = 1$.

Vậy $u_n \vdots 5^k \Leftrightarrow n \vdots 5^k$ với $k \geq 1$.

b) Từ (1) với mọi $n \geq 1$ có $u_{n+2} \equiv u_n \pmod 4$ mà $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ nên u_n lẻ khi n lẻ và $u_n \vdots 4$ khi n chẵn (7)

Từ (2), (3) và (4) có $u_{2n}^2 = [(a^2 - b^2):2\sqrt{5}]^2$

$$= u_n^2(a+b)^2 = u_n^2[(a-b)^2 + 4ab]$$

$$= u_n^2(20u_n^2 + 4(-1)^n) = 2^2.u_n^2(5u_n^2 + (-1)^n) \quad (8)$$

Với mỗi $x \in N^*$, gọi $s(x)$ là số mũ của 2 trong phân tích x ra thừa số nguyên tố. Từ (7), (8) ta có :

+ Khi n chẵn thì u_n chẵn nên $5u_n^2 + (-1)^n$ lẻ, suy ra $s(u_{2n}) = s(u_n) + 1$.

+ Khi n lẻ thì u_n lẻ và $u_n^2 \equiv 1 \pmod 8$ nên $5u_n^2 + (-1)^n \equiv 4 \pmod 8$, suy ra $s(u_{2n}) = 2$.

Từ đó, giả sử $n = 2^c.d$ trong đó c, d là các số nguyên dương, d lẻ thì

$s(u_n) = c - 1 + s(u_{2d}) = c - 1 + 2 = c + 1$.

Do đó $u_n \vdots 2^c \Leftrightarrow n \vdots 2^{c-1}$ với $c \geq 2$.

Từ kết quả của a) và b) suy ra

$$u_n = f_n(0) \vdots 20^{11^{2001}} \Leftrightarrow n \vdots 10.20^{11^{2001}-1}.$$

Nhận xét. Nhiều bạn nhận xét bài toán có kết quả tương tự như bài toán mà Balatsơ đề xuất (xem THTT số 258 tháng 12.1998 và Tuyển tập 30 năm Tạp chí THTT, trang 143). Các bạn sau có lời giải tốt:

Khánh Hòa: *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Hà Nội:** *Nguyễn Trọng Nhật Quang*, 11A1T, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** *Phan Tiến Dũng*, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Hoàng Khắc Hiếu*, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; **Thái Bình:** *Vũ Hữu Tiệp*, 11T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Phạm Khắc Thanh*, 10B1, THPT Triệu Sơn 1; *Hoàng Vũ Hạnh*, 10T, THPT Lam Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Lê Trường Sơn*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

HOÀNG TRỌNG HẢO

Bài T9/337. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$ trong đó x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0, 1]$.*

Lời giải. (Của đa số các bạn).

Không giảm tổng quát, giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Vậy sẽ xảy ra hai khả năng :

$x \geq y \geq z$ hoặc $x \geq z \geq y$.

Khi $x \geq y \geq z$, thì $P \leq 0$.

Khi $x \geq z \geq y$ thì hiển nhiên :

$$x - z \geq 0, z - y \geq 0, 0 \leq x - z \leq 1.$$

Suy ra $P = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \leq$

$\leq (z-y)(x-z)(x+y+z)$, hay

$$4P \leq [2(z-y)][(\sqrt{3}+1)(x-z)][(\sqrt{3}-1)(x+y+z)] = Q.$$

Theo BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân, thì

$Q \leq \dfrac{1}{27}[(2(z-y)+(\sqrt{3}+1)(x-z)+(\sqrt{3}-1)(x+y+z)]^3$

hay $Q \leq \dfrac{1}{27}[2\sqrt{3}x-(3-\sqrt{3})y]^3$.

Để ý rằng $0 \leq 2\sqrt{3}x-(3-\sqrt{3})y \leq 2\sqrt{3}$.

Suy ra $P \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Do vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, khi

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2(z-y)=(\sqrt{3}+1)(x-z)=(\sqrt{3}-1)(x+y+z) \\ x=1, y=0 \end{cases}$$

hay $(x, y, z) = \left(1, 0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Nhận xét. Đây là một bài toán thuộc loại trung bình. Nhiều bạn sử dụng đạo hàm để khảo sát. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên. Các bạn sau có lời giải đúng :

Phú Thọ: *Phạm Mai Luân*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Trần Văn Huỳnh*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự; **Hà Nội:** *Đoàn Trí Dũng*, 10A2, ĐHSP, *Hoàng Đức Trung*, 10A1, ĐHKHTN; **Hà Tây:** *Dương Minh Hùng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, *Khuất Văn Phiến*, 10A4, THPT Thạch Thất; **Nam Định:** *Đinh Quang Huy*, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Vũ Đình Quý*, *Trương Ngọc Sơn*, 10A, THPT Nam Sách; **Hưng Yên:** *Phạm Tiến Dũng*, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Trịnh Quốc Đức*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, *Phạm Khắc Thanh*, 10B1, THPT Triệu Sơn 1, *Phan Công Bộ*, 10C9, THPT Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Trần Hạnh Nguyên*, 10A2, Khối chuyên Toán – Tin, ĐH Vinh, *Đặng Công Vinh*, *Phạm Thanh Hải*, 10I, THPT Nghĩa Đàn, *Võ Tiến Dũng*, 10A, THPT Tây Hiếu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Nhật Linh*, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Trần Nam Hải*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Trị:** *Bạch Ngọc Bảo Thanh*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đăk Lăk:** *Lê Đức Quang*, *Nguyễn Đức Thân*, *Đỗ Thanh Tùng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du; **An Giang:** *Trần Kha*, 10T, THPT Long Xuyên; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Minh Đức*, 10T, THPT chuyên Bạc Liêu; **Phú Yên:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10A, THPT Phan Chu Trinh, Xuân Lộc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/337. *Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và các số thực dương a, b với $a < b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$ *trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là n số thực thuộc đoạn $[a, b]$.*

Lời giải. Trước hết chúng ta chứng minh khẳng định sau :

Bổ đề: *Giả sử p, q, r, a, b là các số thực với $p \geq 0$, $a < b$ và $f(x) = px^2 + qx + r$. Khi đó $f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}$ với mọi $x \in [a, b]$.*

Thật vậy, giả sử $f(a) \leq f(b)$ (trường hợp $f(a) > f(b)$ khẳng định được chứng minh hoàn toàn tương tự).

Ta có $f(b) - f(a) = (b - a)(p(b + a) + q)$, suy ra $p(b + a) + q \geq 0$. Với mọi $x \in [a, b]$,

$f(b) - f(x) = (b - x)(p(b + x) + q) \geq 0$

vì $p(b + x) + q \geq p(b + a) + q \geq 0$ do $p \geq 0$, $x \geq a$.

Áp dụng vào bài toán: Chú ý với mỗi $k = 1, 2, ..., n$ thì $Q(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$ là tam thức bậc hai của x_k với hệ số của x_k^2 bằng $(n - 1)$. Do đó theo Bổ đề trên

$$Q(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_n) \leq$$
$$\leq \max\{Q(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, a, x_{k+1}, ..., x_n);$$
$$Q(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, b, x_{k+1}, ..., x_n)\}.$$

Áp dụng tính chất trên lần lượt cho $k = 1, 2, ..., n$ ta có

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \max_{t_1, ..., t_n \in [a, b]} Q(t_1, t_2, ..., t_n).$$

Giả sử có m số t_i, $1 \leq i \leq n$, bằng a; $n - m$ số t_i, $1 \leq i \leq n$, bằng b.

Khi đó $Q(t_1, t_2, ..., t_n) =$

$$= m(n-m)(b-a)^2 = \frac{n^2-(n-2m)^2}{4}.(b-a)^2$$

$\leq \dfrac{n^2}{4}(b-a)^2$ nếu n chẵn,

và $Q(t_1, t_2, ..., t_n) \leq \dfrac{n^2-1}{4}.(b-a)^2$ nếu n lẻ (1)

Chú ý: Trong chứng minh của Bổ đề thể hiện: nếu $p > 0$ và $a < x < b$ thì $f(x) < \max\{f(a), f(b)\}$.

Bởi vậy trong (1) đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong các số $t_1, t_2, ..., t_n$ có $[n/2]$ số bằng a, $[n/2]$ số bằng b và số còn lại (trường hợp n lẻ) bằng a hoặc b. Vậy giá trị lớn nhất của Q bằng $\dfrac{n^2}{4}(b-a)^2$ nếu n chẵn, bằng $\dfrac{n^2-1}{4}(b-a)^2$ nếu n lẻ.

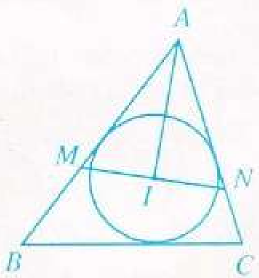
Nhận xét. 1) $f(x) = px^2 + qx + r$ với $p > 0$ là hàm lõm và Bổ đề trên là một tính chất của hàm lõm. Một số bạn học sinh khẳng định $f(x)$ là hàm lõm bằng cách xét đạo hàm $f'(x) = 2px + q$ là hàm đồng biến.

2) Các bạn sau có lời giải đúng : **Phú Thọ:** *Phạm Mai Luân*, 10T, THPT Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Trần Văn Huỳnh*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hà Nội:** *Đoàn Trí Dũng*, 10A2, PTCTT-ĐHSP I ; **Hưng Yên:** *Phan Tiến Dũng*, 10T, chuyên ; **Hải Dương:** *Vũ Đình Quý*, 10A, THPT Nam Sách; **Thanh Hóa:** *Hoàng Đức Ý*, 9E, THCS Trần Mai Ninh, *Phạm Khắc Thanh*, 10B1, THPT Triệu Sơn I; **Nghệ An:** *Đặng Công Vinh*, 10I, THPT Nghĩa Đàn; **TP Hồ Chí Minh:** *Phan Đức Thành*, 10T, THPT Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10A, PT cấp 2-3 Phan Chu Trinh, Xuân Lộc, Sông Cầu; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/337. *Một đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng :*

$$\frac{BM.CN}{AM.AN} \le \frac{BC^2}{4.AB.AC}.$$



Lời giải. Gọi I là tâm, r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Ta thấy :

MN đi qua I (hình vẽ)

$$\Leftrightarrow S_{IAM} + S_{IAN} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}.S_{ABC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}rAM + \frac{1}{2}r.AN = \frac{AM.AN}{AB.AC}.\frac{1}{2}r(AB+AC+BC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.AC}{AN} + \frac{AB.AC}{AM} = AB+AC+BC$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.CN}{AN} + \frac{AC.BM}{AM} = BC$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.CN}{BC.AN} + \frac{AC.BM}{BC.AM} = 1\ (*)$$

Theo BĐT Cauchy

$1 \ge 2\sqrt{\dfrac{AB.AC.BM.CN}{BC^2.AM.AN}}$, suy ra

$\dfrac{BM.CN}{AM.AN} \le \dfrac{BC^2}{4AB.AC}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{AB.CN}{BC.AN} = \dfrac{AC.BM}{BC.AM} = \dfrac{1}{2}$, tức là $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{2AC}{BC}$ và $\dfrac{AN}{CN} = \dfrac{2AB}{BC}$.

Nhận xét. 1) Có nhiều bạn tham gia giải bài này. Tuy nhiên, không bạn nào giải quyết hoàn chỉnh vấn đề "Đẳng thức xảy ra khi nào ?". Xin phân tích cụ thể : Nhiều bạn chỉ chứng minh mệnh đề một chiều : MN đi qua $I \Rightarrow$ (*), mà không nhận thấy rằng, cần phải chứng minh mệnh đề hai chiều : MN đi qua $I \Leftrightarrow$ (*).

Vì có chiều ngược lại : (*) $\Rightarrow MN$ đi qua I, ta mới có thể nói rằng :"Khi $AM = \dfrac{2AC}{BC}$ và $AN = \dfrac{2AC}{BC} = \dfrac{2AB}{BC}$, (*) đúng. Suy ra : MN đi qua I". Chi tiết này rất quan trọng trong khi giải quyết vấn đề "Đẳng thức xảy ra khi nào". Ấy vậy mà nhiều người rất hay quên nó.

2) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt:

Bắc Giang: *Phạm Văn Trường*, 12A10, THPT Ngô Sĩ Liên, TX Bắc Giang; **Hà Tây:** *Nguyễn Thế Tâm*, 8A1, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Đại*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định; **Thanh Hóa:** *Dương Anh Tuấn*, THPT Hậu Lộc II, Hậu Lộc; **Vĩnh Phúc:** *Trần Văn Huỳnh*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, *Vũ Văn Quang*, 12A1, *Lê Công Truyền*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Thanh*, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Nội:** *Nguyễn Trọng Nhật Quang*, 11 Toán, ĐHKHTN.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/337. *Cho hình tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D. Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD lần nữa theo thứ tự tại A_2, B_2, C_2, D_2. Chứng minh rằng :*

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} + \frac{DD_1}{DD_2} \le \frac{8}{3}\ (*)$$

Lời giải. (Dựa theo *Nguyễn Văn Hậu*, 12A1, THPT Yên Dũng 2, **Bắc Giang**).

Để trình bày lời giải được gọn gàng, ta thay đổi kí hiệu các điểm $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ và A_2, B_2, C_2, D_2 theo thứ tự là A_1, A_2, A_3, A_4; M_1, M_2, M_3, M_4 và A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. Khi đó BĐT (*) được viết gọn lại dưới dạng :

$$q = \sum_{i=1}^{4} \frac{A_iM_i}{A_iA'_i} \le \frac{8}{3}. \qquad (**)$$

Gọi G là trọng tâm tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, O và R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$; thế thì ta có :

$$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \text{ và } \mathscr{P}_{G/(O,R)} = -\overrightarrow{GA_i}.\overrightarrow{GA'_i} = GA_i.GA'_i = R^2 - OG^2 = p \qquad (1)$$

Ngoài ra, cũng dễ dàng thiết lập được hệ thức sau (sử dụng vectơ) :

$$\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GA_i}^2 = 4(R^2 - OG^2) = 4p; \qquad (2)$$

Từ (1) có : $A_iA'_i = GA_i + GA'_i = \dfrac{p + GA_i^2}{GA_i}$ (3)

Vì $A_iM_i = \frac{4}{3}GA_i$ nên từ (3) có

$$\frac{A_iM_i}{A_iA'_i} = \frac{4}{3}\frac{GA_i^2}{p+GA_i^2} \quad (4)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ $(x, y > 0)$ có $\frac{4}{p+GA_i^2} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{GA_i^2}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra : $\frac{A_iM_i}{A_iA'_i} \leq \frac{1}{3}+\frac{GA_i^2}{3p}$ (6)

Từ (6) suy ra $q \leq \frac{4}{3}+\frac{1}{3p}\left(\sum_{i=1}^{4} GA_i^2\right)$ (7)

Từ (2) và (7) thu được BĐT (**), cũng tức là BĐT (*) được chứng minh. Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi $GA_i^2 = R^2 - OG^2$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$ nghĩa là $GA_1 = GA_2 = GA_3 = GA_4$ và do đó, $G \equiv O$.

Kết luận: $q = \sum_{i=1}^{4}\frac{A_iM_i}{A_iA'_i}$ đạt cực đại bằng $\frac{8}{3}$ khi và chỉ khi trọng tâm G của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ trùng với tâm O, tức là $A_1A_2A_3A_4$ là một tứ diện gần đều (các cạnh đối diện bằng nhau).

Nhận xét. 1) Bạn Hậu còn nhận xét : Với hệ thức (3) sử dụng các BĐT đại số ta có BĐT hình học sau

$$A_iA'^2_i \geq \sum_{j=1}^{n} GA_j^2 = 4p \text{, hay } A_iA'^2_i \geq \frac{9}{16}\left(\sum_{j=1}^{4} A_jM_j^2\right).$$

Từ đó có BĐT $\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{A_iM_i}{A_iA'_i}\right)^2 \leq \frac{16}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $G \equiv O$.

2) Bạn Hậu và một số bạn khác cũng đã chỉ ra đối với tam giác ta có BĐT $\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iM_i}{A_iA'_i} \leq \frac{9}{4}$ và chứng minh thêm một số BĐT khác nữa đối với khối tứ diện, chẳng hạn $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i} \geq \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA'_i}$; $\prod_{i=1}^{4} GA'_i \geq \prod_{i=1}^{4} GA_i$.

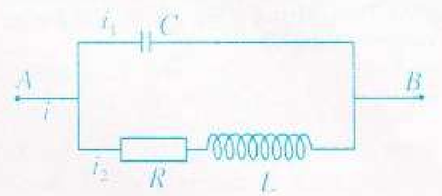
3) Các bạn sau đây cũng có lời giải đúng và gọn :

Hà Nội: *Đoàn Trí Dũng*, 10A2, PTCTT, ĐHSP Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Hoàng Đức Đông*, 12A1, THPT Gia Bình I, Bắc Ninh; **Hải Dương:** *Phạm Thành Thái*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** *Nguyễn Văn Thọ*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Phòng:** *Phạm Văn Dương*, 12C4, THPT Lý Thường Kiệt, Thủy Nguyên; **Vĩnh Phúc:** *Trần Trung Dũng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Trần Văn Huỳnh*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Nghệ An:** *Nguyễn Thanh Long*, 12A, THPT Hà Huy Tập, TP Vinh; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Tiến Vũ*, 11B1, THPT Bình Sơn, Quảng Ngãi; **Phú Yên:** *Phan Thành Việt*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10A, THPT Phan Chu Trinh, Phú Yên; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 10 Toán, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Đăk Lăk:** *Đỗ Thanh Tùng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du; **Cần Thơ:** *Lê Nguyễn*, 11A1, THPT Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/337. *Cho mạch điện xoay chiều có sơ đồ như ở hình vẽ. Cho biết $C = 1\mu F$; $R = 0,1\Omega$; L là cuộn cảm thuần có $L = 1mH$. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một hiệu điện thế xoay chiều có giá trị hiệu dụng $U = 220V$ và có tần số góc ω*

1) Hỏi ω phải có trị số ω_{min} bằng bao nhiêu để cường độ hiệu dụng của dòng điện mạch chính đạt trị số cực tiểu ?



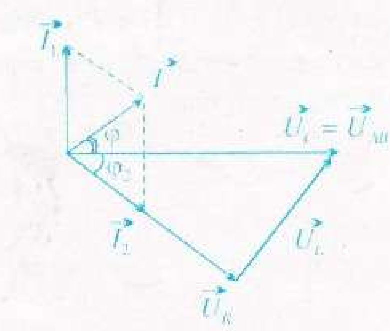
2) Tìm cường độ hiệu dụng của các dòng điện mạch chính và mạch rẽ khi $\omega = \omega_{min}$

Lời giải. 1) Vẽ giản đồ vectơ như trên hình vẽ dưới đây. Ta có : $\sin\varphi_2 = \frac{U_L}{U_{AB}} = \frac{Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}$;

$\cos\varphi_2 = \frac{U_R}{U_{AB}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}$. Ta thấy I cực tiểu khi $\varphi = 0$; khi đó $I_1 = I_2\sin\varphi_2$, suy ra

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}} \approx 3,16.10^4 \text{ (rad/s)}.$$

(cũng có thể tìm ω_{min} bằng cách tính I từ giản đồ vectơ và tìm điều kiện để I cực tiểu).



2) Khi I cực tiểu,

$$I = I_2.\cos\varphi_2 = \frac{UR}{R^2 + L^2\omega_{min}^2} = \frac{URC}{L} \approx 0{,}022(\text{A})\ ;$$

$$I_2 = \frac{I}{\cos\varphi_2} = U\sqrt{\frac{C}{L}} = 6{,}96\ (\text{A})$$

và $I_1 = I_2\sin\varphi_2 = \dfrac{UC}{L}\sqrt{\dfrac{L}{C} - R^2} \approx 6{,}96$ (A).

Lưu ý rằng vì $R^2 << \dfrac{L}{C}$ nên kết quả hầunhư không phụ thuộc R.

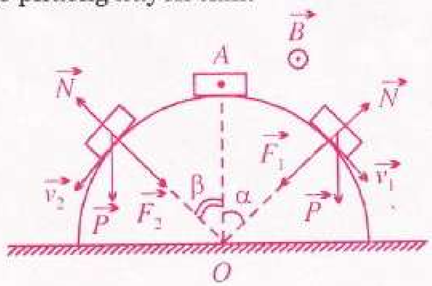
Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Bắc Ninh: *Nguyễn Trọng Đoan, Nguyễn Công Dưỡng, Trần Thái Hà*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Đoàn Anh Quân*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** *Trương Tuấn Anh*, 12 Lí, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Phạm Hải Luân*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên.

MAI ANH

Bài L2/337. *Một vật nhỏ có khối lượng $m = 3g$ và tích điện $q = +2.10^{-4}C$, ban đầu đặt ở đỉnh của mặt bán trụ có bán kính $R = 75(cm)$ (hình vẽ). Trong không gian có một từ trường đều, vectơ cảm ứng từ song song với trục của mặt trụ. Nếu ban đầu vật trượt về bên phải thì khi bắt đầu rời khỏi mặt trụ, vật có vận tốc v_1, còn nếu ban đầu vật trượt về bên trái thì khi bắt đầu rời khỏi mặt trụ vật có vận tốc là v_2. Xác định độ lớn và hướng của vectơ cảm ứng từ, biết rằng $|v_1 - v_2| = 2{,}3cm/s$. Bỏ qua các loại lực ma sát.*

Lời giải : Theo giả thiết, vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ có phương song song với trục của mặt trụ ; nghĩa là có phương vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Giả sử rằng các vectơ cảm ứng từ có chiều hướng từ trong ra ngoài mặt phẳng hình vẽ. Vật chịu tác dụng của các lực : Trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$, phản lực $\vec{N}$ của mặt trụ và lực Loren $\vec{F}$ có độ lớn $F = qvB\sin\gamma = qvB$ (γ là góc giữa hai vectơ $\vec{v}$ và $\vec{B}$). Do $\vec{v}$ vuông góc với $\vec{B}$ nên $\sin\gamma = 1$, $\vec{B}$ có độ lớn là B. Lực Loren này có phương xuyên tâm.



Phương trình (PT) định luật II Newtơn viết cho vật có dạng : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$ (1)

Phản lực $\vec{N}$ và lực Loren có phương vuông góc với quỹ đạo nên không sinh công, do vậy cơ năng của vật bảo toàn. Chọn mốc thế năng ở điểm cao nhất trên mặt trụ (điểm A), ta có :

$$0 = -mgh + \frac{mv^2}{2} \quad (2)$$

Nếu vật chuyển động về bên phải thì từ PT (1) chiếu lên phương xuyên tâm và chọn chiều dương hướng vào tâm (chú ý rằng tại điểm mà vật rời khỏi mặt trụ thì $N = 0$, khi đó vật có vận tốc $v = v_1$), ta được :

$$mg\cos\alpha + qv_1B = \frac{mv_1^2}{R} \quad (3)$$

và PT (2) trong trường hợp này có dạng :

$$0 = -mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} \quad (4)$$

với $h_1 = R(1 - \cos\alpha)$ (5)

Tương tự, nếu vật chuyển động về bên trái thì từ (1) và (2) ta cũng có :

$$mg\cos\beta - qv_2B = \frac{mv_2^2}{R} \quad (6)$$

$$0 = -mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} \quad (7)$$

với $h_2 = R(1 - \cos\beta)$ (8)

Thay (5), (4) vào (3) và (8), (7) vào (6), ta được :

$$mg + qv_1B = \frac{3mv_1^2}{2R} \quad (9)$$

$$mg - qv_2B = \frac{3mv_2^2}{2R} \quad (10)$$

Từ (9) và (10) ta rút ra :

$$\frac{3m\left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2R} = qB(v_1 + v_2)$$

hay $$B = \frac{3m(v_1 - v_2)}{2qR} \quad (11)$$

Nếu $v_1 > v_2$ thì B = 0,69 (T) ; vectơ $\vec{B}$ có chiều từ trong ra ngoài mặt phẳng hình vẽ như ta đã giả thiết.

Nếu $v_1 < v_2$ thì từ các lập luận trên ta thấy : Từ trường vẫn có độ lớn là 0,69 (T) nhưng có chiều ngược lại (từ bên ngoài vào trong).

(Xem tiếp trang 7)

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ
TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2004-2005

Chúng ta đã cùng nhau qua một chặng đường miệt mài với những bài toán đa dạng và không dễ chút nào. Sau một năm tham gia giải toán hẳn kiến thức của mỗi người đều phong phú và kĩ năng thêm hoàn thiện. Cuộc thi trí tuệ của năm học 2004-2005 cũng là cuộc thi thường niên thứ 41 của chúng ta đã khép lại với thành công thuộc về tất cả các bạn đã gửi bài giải. Bạn có thể thấy sự đều khắp các vùng miền qua địa chỉ các bạn gửi bài dự thi và các bạn đoạt giải. Điều thú vị là cả ***2*** *giải Xuất sắc đều thuộc về các bạn ở miền Trung đất nước. Đây là một dấu ấn ghi lại một mốc trên con đường học tập và tập dượt nghiên cứu của các bạn. Chúc mừng* ***92*** *bạn được giải môn Toán và* ***28*** *bạn được giải môn Vật lí. Hi vọng cuộc thi tiếp theo chúng ta có được đông đảo hơn nữa các bạn tham dự, nhất là các bạn ở Đồng bằng sông Cửu Long và các tỉnh miền núi Bắc bộ. Sau đây là danh sách các bạn đoạt giải.*

MÔN TOÁN

Giải Xuất sắc (2 giải)

1) Trần Thị Ánh Nguyên, 6/7, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.

2) Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà, **Quảng Trị**.

Giải Nhất (6 giải)

1) Vũ Đình Long, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

2) Tăng Văn Bình, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

3) Lê Tuấn Hiệp, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương, **Nghệ An**.

4) Nguyễn Tiến Thanh, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ**.

5) Trịnh Hà Linh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

6) Nguyễn Quang Huy, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**.

Giải Nhì (13 giải)

1) Võ Thị Hoàng Nga, 6A, THCS Hermann, TP Vinh, **Nghệ An**.

2) Lê Quang Huy, 6H1, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm, **Hà Nội**.

3) Dương Thị Thu Thảo, 7A4, THCS Nguyễn Du, Pleiku, **Gia Lai**.

4) Phạm Ngọc Dương, 7B, THCS Liên Hòa, Kim Thành, **Hải Dương**.

5) Nguyễn Vũ Thanh Long, 8/1 THCS Chu Văn An, TP. Huế, **Thừa Thiên- Huế**.

6) Trần Mỹ Linh, 9/1, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu, **Bạc Liêu**.

7) Võ Thái Thông, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.

8) Nguyễn Xuân Thọ, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.

9) Trịnh Ngọc Tú, 10T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Tây**.

10) Trương Ngọc Sơn, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.

11) Bùi Quang Huy, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

12) Nguyễn Tường Huân, 11/1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.

13) Hoàng Khắc Hiếu, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu, **Nghệ An**.

Giải Ba (24 giải)

1) Lê Quý Trình, 6A, THCS TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

2) Nguyễn Thùy Dung, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

3) Vũ Minh Đức, 6H1, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm, **Hà Nội**.

4) Nguyễn Mạnh Tuấn, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

5) Hoàng Trung Đức, 7B, THCS Lý Nhật Quang, **Đô Lương**, **Nghệ An**.

6) Hoàng Thị Lệ Quyên, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

7) Nguyễn Thị Kim Chi, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

8) Đỗ Như Milan, 8A1, THCS Chu Văn An, **Hà Nội**.

9) Lê Thị Hạnh, 8A5, THCS Quang Trung, TP Thanh Hóa, **Thanh Hóa.**

10) Nguyễn Sơn Tùng, 9B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ**.

11) Trịnh Hùng Linh, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, **Thanh Hóa**.

12) Nguyễn Lưu Bách, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**.

13) Trần Trung Dũng, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

14) Hà Minh Tuấn, 10A2 Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội**.

15) Phạm Khắc Thanh, 10B1, THPT Triệu Sơn I, Triệu Sơn, **Thanh Hóa**.

16) Vũ Thanh Xuân, 10T, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

17) Vũ Văn Tân, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

18) Trần Văn Linh, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

19) Lê Ngọc Thạch, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.

20) Nguyễn Thành Công, 11A1, THPT Lý Tự Trọng, TP **Cần Thơ**.

21) Nguyễn Đức Tùng, 11A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.

22) Lương Xuân Bách, 12T, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

23) Lê Bá Khiết, 12T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.

24) Hà Đình Thiệu, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

Giải Khuyến khích (47 giải)

1) Lê Thị Tuyết Mai, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

2) Nguyễn Hữu Hùng, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

3) Nguyễn Thị Giang A, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

4) Nguyễn Thị Ngọc, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

5) Phạm Minh Trang, 6B, Trường Hà Nội - Amsterdam , **Hà Nội**.

6) Phạm Mai Phương, 6B, THCS Phong Châu, **Phú Thọ.**

7) Đỗ Vũ Thạch, 6B, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

8) Nguyễn Văn Tuân, 7/1, THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương**.

9) Dương Hoàng Hưng, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

10) Nguyễn Anh Tú, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

11) Nguyễn Phương Thảo, 7D, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch, **Quảng Bình**.

12) Vương Bằng Việt, 8/1 THCS Nam Hà, TX Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

13) Đặng Công Việt, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

14) Lương Xuân Huy, 8A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ, **Hưng Yên**.

15) Đại Thị Ánh, 8A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

16) Đinh Hoàng Long, 8A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức, **Hà Tây**.

17) Nguyễn Ngọc Linh, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.

18) Trương Ngọc Nam, 8B, THCS Minh Tân, Kinh Môn, **Hải Dương**.

19) Nguyễn Cao Tuấn, 8B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

20) Cấn Mạnh Hùng, 8C, THCS Thạch Thất, Thạch Thất, **Hà Tây**.

21) Đỗ Thị Thúy, 8D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.

22) Võ Quang Vinh, 8D, THCS Thái Hòa II, Nghĩa Đàn, **Nghệ An**.

23) Trần Trung Đức, 8H1, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm, **Hà Nội**.

24) Ngô Thị Bích Phượng, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

25) Cao Mạnh Hùng, 9A THCS Yên Định, Hải Hậu, **Nam Định**.

26) Lê Thế Tài, 9B, THCS huyện Từ Sơn, **Bắc Ninh.**

27) Hoàng Đức Ý, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa , **Thanh Hóa**.

28) Nguyễn Như Đức Trung, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt, Q. Hải Châu, **Đà Nẵng**.

29) Tô Việt Anh, 9A1, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, **Hà Nội**.

30) Phạm Tiến Duật, 9B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản, **Nam Định**.

31) Nguyễn Thành Trung, 9D, THCS TTr Kỳ Anh, **Hà Tĩnh**.

32) Lê Đức Lợi, 9/1, THCS Hồng Bàng, Q.5, **TP Hồ Chí Minh**.

33) Trịnh Huy Giang, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

34) Trần Văn Huỳnh, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.

35) Lê Tiến Nam, 10A1, THPT Thiệu Hóa, Thiệu Hóa, **Thanh Hóa**.

36) Đỗ Thanh Tùng, 10T, THPT Nguyễn Du, **Đăk Lăk**.

37) Nguyễn Anh Tuấn, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP Hải Dương, **Hải Dương**.

38) Nguyễn Quốc Hưng, 11A3, THPT Dân lập Duy Tân, TP Tuy Hòa, **Phú Yên**.

39) Nguyễn Thế Nam, 12 Toán - Tin, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.

40) Vũ Mạnh Tuấn, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

41) Nguyễn Tiến Lâm, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.

42) Lưu Như Hòa, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**.

43) Thân Ngọc Thành, 12A1 THPT NK Ngô Sĩ Liên, TX. Bắc Giang, **Bắc Giang**.

44) Nguyễn Văn Đỉnh, 12I, THPT Giao Thủy A, **Nam Định**.

45) Tạ Quang Hiển, 12T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.

46) Nguyễn Trọng Hòa, 12T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

47) Trương Phúc Thoại, 12T, THPT chuyên Quảng Bình, **Quảng Bình**.

MÔN VẬT LÍ

Giải Nhất (1 giải)

1) Dương Trung Hiếu, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên, TX Bắc Giang, **Bắc Giang**.

Giải Nhì (12 giải)

1) Nguyễn Đức Trọng, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

2) Chu Tuấn Anh, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**.

3) Nguyễn Công Dưỡng, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh.**

4) Ngô Thu Hà, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**.

5) Lê Hoàng Dũng , 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.

6) Phạm Tuấn Hiệp, 11 Lí, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**.

7) Ngô Việt Cường, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

8) Nguyễn Thành Nội, 11AT, THPT Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột, **Đăk Lăk**.

9) Nguyễn Minh Cường, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.

10) Bùi Phi Anh, 12 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**.

11) Lê Hà Kiệt, 12A2, THPT Đức Phổ I, **Quảng Ngãi**.

12) Nguyễn Thị Phương Dung, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

Giải Ba (10 giải)

1) Nguyễn Ngọc Kỳ Nam, 10 Lí, THPT Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**.

2) Nguyễn Xuân Nam, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh.**

3) Nguyễn Ngọc Hưng, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Vĩnh Phúc**.

4) Trần Văn Hòa, 11 Lí THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.

5) Đoàn Anh Quân, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

6) Nguyễn Minh Phương, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

7) Phạm Thế Mạnh, 11N, THPT NK Ngô Sĩ Liên, TX. Bắc Giang, **Bắc Giang**.

8) Nguyễn Mạnh Tuấn, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

9) Nguyễn Vĩnh Phúc, 12A18, THPT Chợ Gạo, **Tiền Giang**.

10) Thái Phan, 12T, THPT TX Sa Đéc, **Đồng Tháp**.

Giải Khuyến khích (5 giải)

1) Nguyễn Hữu Toản, 10 chuyên Lí, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**.

2) Trịnh Trọng Thành, 10A, chuyên Lí, ĐHKHTN - ĐHQG **Hà Nội**.

3) Trần Thị Mỹ Phương, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**.

4) Phạm Quốc Việt, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

5) Nguyễn Chí Linh, 12A12, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng, **Đăk Lăk**.

Các bạn hãy gửi địa chỉ mới của mình về để Tòa soạn gửi Bằng chứng nhận giải thưởng và quà tặng.

THTT

HỘI THẢO VỀ HIỆU QUẢ CỦA SÁCH, BÁO TOÁN NXB GIÁO DỤC VỚI VIỆC ĐỔI MỚI PHƯƠNG PHÁP DẠY VÀ HỌC TOÁN BẬC TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Sáng 29.10.2005, tại 15 Nguyễn Chí Thanh, Đà Nẵng đã diễn ra Hội thảo về Hiệu quả của sách, báo toán NXB Giáo dục với việc đổi mới phương pháp dạy - học toán bậc THPT do tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (THTT) phối hợp với NXB Giáo dục tại Đà Nẵng tổ chức.

Dự hội thảo có đại diện NXB Giáo dục: PTS. TS. Vũ Dương Thụy, TBT tạp chí Toán Tuổi thơ; ông Huỳnh Thông, Phó Giám đốc NXB Giáo dục tại Đà Nẵng; PGS. TS. Phan Doãn Thoại, Phó Tổng biên tập NXB Giáo dục, TBT tạp chí THTT và các Phó ban Phụ trách, Phó ban Thư kí Tòa soạn THTT; các trưởng, phó ban Toán, Tin, Khoa học Tự nhiên NXB Giáo dục tại HàNội, TP Hồ Chí Minh, Đà Nẵng, các phó TBT các tạp chí thuộc NXB Giáo dục và Giám đốc Trung tâm Khoa học CN Sách giáo khoa NXB Giáo dục, đại diện các Công ty sách thiết bị các tỉnh miền Trung, các biên tập viên toán cùng hơn 40 cộng tác viên các tỉnh từ Quảng Bình đến Bình Thuận.

Sau khi Th.S Vũ Kim Thủy tuyên bố lí do và giới thiệu chương trình nội dung cuộc hội thảo, PGS. TS Phan Doãn Thoại đã đọc báo cáo đề dẫn, TS. Phạm Thị Bạch Ngọc đọc báo cáo về hoạt động của tạp chí THTT.

Tiếp đó, TS. Trần Phương Dung, các thầy giáo Nguyễn Văn Thông, Huỳnh Duy Thủy, Trần Dư Sinh, Nguyễn Phước, Huỳnh Thông... đã phát biểu về hiệu quả của sách, báo toán và đặc biệt là về nội dung và hiệu quả của THTT. "Toán học và Tuổi trẻ là một cẩm nang, một tài liệu gối đầu quý giá mà dù có bao nhiêu năm tháng đi chăng nữa thế hệ sau vẫn luôn nâng niu, gìn giữ từng tờ báo một "là một đánh giá tốt đẹp về THTT mà nhà giáo Huỳnh Duy Thủy thay mặt giáo viên toán và học sinh THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định đã nói.

Nội dung và hình thức THTT đều có những thay đổi thay đổi tích cực. Bên cạnh đó, các cộng tác viên cũng thẳng thắn chỉ ra rằng để có thể phục vụ độc giả tốt hơn tạp chí cần có thêm những cải tiến. Đó là cần duy trì đều đặn chuyên *mục Phương pháp giải toán*; mục *Giúp bạn tự ôn thi* cần thay đổi theo hướng đăng các chuyên đề giúp bạn đọc ôn thi vào Đại học, đề luyện không khác xa đề thi về mức độ khó, không kéo dài đề ôn luyện trên 3 số như vừa qua. Tăng cường các bài toán mang tính thực tiễn, góp phần giúp học sinh mô hình hóa các bài toán của cuộc sống đặt ra. Cho học sinh tham gia giải và gửi các lời giải toán bằng tiếng Anh về tạp chí. Chú ý hơn nữa vai trò của *Lịch sử toán học*, qua đó giúp học sinh và những người làm toán hiểu những khó khăn, vấp váp của những người làm toán đi trước.

PGS. TS. Vũ Dương Thụy cho rằng THTT cần làm tốt phần *Tuổi trẻ* và đề xuất việc xuất khẩu THTT ra nước ngoài như mong muốn của GS. Nguyễn Cảnh Toàn.

Cuối cùng, TBT tạp chí THTT tổng kết hội thảo: Sách và báo toán đã đáp ứng được yêu cầu chung. Tuy vậy còn thiếu nhiều ở mảng toán thực tiễn, *Toán học và Tuổi trẻ* cần phát triển sao cho Toán phải toán hơn, Trẻ phải trẻ hơn. TBT cũng giới thiệu về các công việc mới mà tòa soạn đang triển khai là làm Website THTT và đưa lên mạng từ đầu năm 2006, THTT góp sức vào việc chuẩn bị cho Việt Nam đăng cai cuộc thi Olympic Toán Quốc tế 2007. Nhiều đại biểu còn nuối tiếc vì thời gian hội thảo một buổi sáng là quá ngắn.

VŨ THANH THÀNH

PROBLEMS ...

(Tiếp trang 17)

T11/341. Consider the convex quadrilaterals $ABCD$ having inscribed circle. Let M, N, P, Q be the touching points of the inscribed circle with the sides AB, BC, CD, DA respectively. Find the least value of the expression

$$T=\frac{AM^2}{x_1x_2}+\frac{BN^2}{x_2x_3}+\frac{CP^2}{x_3x_4}+\frac{DQ^2}{x_4x_1}$$

where $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ is a permutation of the measure $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$.

T12/341. Let $OABC$ be a tetrahedron such that the sides OA, OB, OC are orthogonal each to others. Let H be the orthocenter of triangle ABC. The line AH cuts BC at K. The line passing through the incenters of the triangles OBK, OCK cuts OB, OC at M, N respectively. The plane bisecting the dihedral angle $[B, OA, H]$ cuts BC at D, the plane bisecting the dihedral angle $[C, OA, H]$ cuts BC at E. Prove the inequality for volumes :

$$V_{OADE}\cdot V_{OAMN}\le\frac{\sqrt{2}-1}{2}V_{OABC}^2.$$

Giải đáp :

Ô CHỮ NGÀY KHAI GIẢNG

(Đề đăng trên THTT số 339 tháng 9.2005)

1. Đến trường để MỞ MANG kiến thức.
2. Phương pháp giảng dạy mới: lấy học sinh làm TRUNG TÂM.
3. Lực lượng chính trong mỗi nhà trường : HỌC SINH.
4. Giờ học thú vị: NGOẠI KHÓA.
5. Phòng rất cần cho dạy và học: THÍ NGHIỆM.
6. Nơi có các hoạt động dạy - học: NHÀ TRƯỜNG.
7. Công cụ cần thiết để dạy học: BẢNG.
8. Nơi gắn bó với người thầy: BỤC GIẢNG.
9. Đơn vị đo thời gian ở trường: TIẾT HỌC.
10. Đơn vị lao động của các giảng viên: KHOA.
11. Đơn vị lao động nhỏ của các thầy, cô giáo: TỔ BỘ MÔN.
12. Hai hoạt động chính trong lao động của người thầy: NÓI - VIẾT.
13. Cầu nối giữa thầy và trò : PHỤ HUYNH.

Ta được cột tô màu:

MỪNG NHÀ GIÁO VIỆT NAM

				M	O	M	A	N	G				
				T	R	U	N	G	T	A	M		
	H	O	C	S	I	N	H						
					N	G	O	A	I	K	H	O	A
			T	H	I	N	G	H	I	E	M		
					N	H	A	T	R	U	O	N	G
					B	A	N	G					
			B	U	C	G	I	A	N	G			
					T	I	E	T	H	O	C		
			K	H	O	A							
					T	O	B	O	M	O	N		
			N	O	I	V	I	E	T				
P	H	U	H	U	Y	N	H						

Giải đáp bài :

PHÉP TOÁN TOÀN CHỮ SỐ 9

(Đề đăng trên THTT số 339 tháng 9.2005)

Bài toán có nhiều đáp án. Xin trình bày một số phép toán mà chúng đều cho cùng kết quả là 999 :

1) $999 + 9'$;

2) $999.[\sqrt{\sqrt{9}}]$ ($[z]$ kí hiệu phần nguyên của z)

3) $[999,9]$; 4) BCNN (999; 9);

5) $\left|\left[-\sqrt{99{,}9^{\sqrt{9}}}\right]\right|$; 6) $\sum\limits_{k=9}^{9(\sqrt{9})!-9} k$;

7) $9(((\sqrt{9})!)! : (\sqrt{9})! - 9)$;

8) $(9+[\sqrt{\sqrt{9}}])^{\sqrt{9}} + [-\lg 9]$;

9) $999 + \{9\}$ ($\{x\}$ – kí hiệu phần lẻ của x).

10) $999 + [\lg 9]$;

Nhận xét. Các bạn sau có nhiều lời giải đúng được nhận tặng phẩm :

Trần Đức Trung, 12 Lí, THPT chuyên **Bắc Ninh**; *Nguyễn Văn Lương*, K6A toán, ĐH Hồng Đức, **Thanh Hóa**; *Lê Văn Chánh*, 11 Toán, THPT chuyên **Bến Tre**.

HOÀNG TRỌNG

Một số bạn có đáp án là *Rừng nhà giáo Việt Nam* (!).

Giải tốt bài này có các bạn :

Nguyễn Bá Dũng, 12A1, THPT Thuận Thành I, **Bắc Ninh**; *Trương Quỳnh Anh*, 10A8, THPT Hồng Quang, **Hải Dương**; *Đinh Ngọc Bích*, K28C Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2, **Vĩnh Phúc**; *Lê Phong Vũ*, 10K, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Krông Pắc, **Đăk Lăk**; *Trịnh Đức Thắng*, 325/135/1/10 Kim Ngưu, P.Thanh Lương, **Hà Nội**.

VŨ ĐÔ QUAN

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 341 (11-2005)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập: PHAN DOÃN THOẠI. *Phó ban Phụ trách :* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC. *Thư kí Tòa soạn:* VŨ KIM THỦY.
Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, *231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.* ĐT : 08.8309049.

Hiệu trưởng
Nguyễn Văn Lực

TRƯỜNG THPT NINH GIANG, HẢI DƯƠNG
40 NĂM XÂY DỰNG VÀ TRƯỞNG THÀNH

Trường THPT Ninh Giang được thành lập vào tháng 8 năm 1965. Năm học đầu, trường chỉ có 3 lớp với 9 giáo viên do thầy *Đoàn Đình Mang* làm Hiệu trưởng.

Những năm đầu thầy trò phải dạy và học trong hoàn cảnh chiến tranh phá hoại, cơ sở vật chất thiếu thốn, phải chuyển địa điểm sơ tán nhiều lần. Từ năm 1975 trường chuyển về Thị trấn Ninh Giang. Đến nay trường đã có một cơ ngơi khang trang, rộng rãi với 30 phòng học có phòng thí nghiệm, thư viện đạt chuẩn, 6 phòng thực hành Lí - Hóa - Sinh, có một phòng học hiện đại với thiết bị nghe nhìn. Năm học 2004 - 2005 trường có 36 lớp với 1620 học sinh, hơn 80 cán bộ giáo viên trong đó 4 giáo viên có trình độ Thạc sĩ, 3 giáo viên có trình độ Cao học. 40 năm qua trường đã đạt được nhiều thành tích đáng trân trọng : có 243 giáo viên là Chiến sĩ Thi đua, giáo viên giỏi cấp Tỉnh, cấp Cơ sở. Nhiều năm trường đạt danh hiệu trường tiên tiến xuất sắc. Tổ Toán, tổ Văn nhiều năm được Ủy ban nhân dân tỉnh, Sở giáo dục tặng Bằng khen, Giấy khen công nhận là Tổ lao động xuất sắc. Nhiều giáo viên đã trưởng thành từ mái trường này như thầy *Nguyễn Đỉnh*, nguyên Hiệu trưởng trường THSP Minh Hải, cô *Nguyễn Ngọc Bích* Phó Giám đốc Sở GD-ĐT Hà Nội. Nhiều học sinh cũ của trường đã trưởng thành từ đây như: Nhà giáo Nhân dân GS. TSKH *Nguyễn Văn Mậu*, Hiệu trưởng trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; TS. *Đoàn Hương*, trường ĐHKHXH&NV; Nhà giáo Ưu tú PGS.TS *Nguyễn Thị Nhung*, Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Ngân hàng TP Hồ Chí Minh.

Tập thể sư phạm Trường THPT Ninh Giang, Hải Dương

Năm 2005, Trường được Chủ tịch nước tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Ba. Trường THPT Ninh Giang ý thức được sứ mệnh của mình không ngừng vươn lên để luôn xứng đáng với niềm tin yêu của học sinh và phụ huynh huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT43M5
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004
In 32500 bản tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2005
Giá : 4000 đồng
Bốn nghìn đồng